基于优化模型和差分模拟的油管压力模型

摘 要

关键词：

1 问题重述

1.1 问题背景

1.2 问题重述

2 问题分析

3 模型假设

1.
2.
3.
4.
5.
6.

4 变量说明

m_1	进油质量	g

5 模型建立与求解

5.1 第一问

在第一问中，需要确定单向阀开启的时长 x 以得到理想的管内压强。首先需要刻画管内密度随时间的变化，同时需要确定密度与压强关系。之后，可建立优化模型。在求解中，将差分条件转化为微分方程，解析地求解出压强关于时间的函数，对 x 进行二分搜索（由于显然 x 与管内压强正相关），并计算此函数相对于目标值的误差，从而可找出最小误差对应的 x。

5.1.1 密度变化的刻画

令 $\mathrm{d}t$ 时间内进油质量为 $\mathrm{d}m_1$，出油质量为 $\mathrm{d}m_2$，则 $\mathrm{d}t$ 时间内管内油质量的改变量为

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2. \tag{1}$$

且

$$\begin{cases} \mathrm{d}m_1 = v_1(t) \times \rho_1, \\ \mathrm{d}m_2 = v_2(t) \times \rho_2, \end{cases} \tag{2}$$

其中 v_1, v_2, ρ_1, ρ_2 分别代表流入油的体积速率，流出油的体积速率（单位：$\mathrm{mm^3/ms}$），进油密度，油管内密度。进而，油管内密度变化为

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}m}{V_0}, \tag{3}$$

其中 V_0 是油管的体积。

5.1.2 密度与压强关系

由题目注1，有

$$\mathrm{d}P = \frac{E}{\rho}\mathrm{d}\rho, \tag{4}$$

其中 E 为弹性模量，P 为压强（单位：MPa）。由附件 3 中的弹性模量与压力的关系，对 E 和 P 进行五次多项式拟合，得

$$P = f(E). \tag{5}$$

因此有

$$\mathrm{d}P = \frac{f^{-1}(P)}{\rho}\mathrm{d}\rho. \tag{6}$$

利用分离变量法解此微分方程，得

$$P = g(\rho). \tag{7}$$

5.1.3 流量速率计算

根据注 2，有

$$Q = CA\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}, \tag{8}$$

其中 Q 为单位时间流过小孔的燃油量（单位：$\mathrm{mm^3/ms}$），$C = 0.85$ 为流量系数，A 为小孔的面积（单位：$\mathrm{mm^2}$），ΔP 为小孔两边的压力差（单位：MPa），即

$$\Delta P = 160 - P. \tag{9}$$

令单向阀每次开启 x ms，则进油的速率

$$v_1=\begin{cases}Q, & t\in[k,k+x],\\ 0, & t\in(k+x,k+10].\end{cases}\tag{10}$$

此外，由所给的喷油速率图，喷油速率

$$v_2=\begin{cases}100t, & t\in[k,k+0.2],\\ 20, & t\in(k+0.2,k+2.2],\\ 240-100t, & t\in(k+2.2,k+2.4],\\ 0, & t\in(k+2.4,k+10].\end{cases}\tag{11}$$

5.1.4 优化模型的建立

要使高压油管内的压强尽可能稳定在 100 MPa 左右，可建立单目标最优化模型

$$\begin{aligned}&x_0=\underset{x}{\operatorname{argmin}}\{\sum_{t=0}^{\infty}\|100-P(t)\|_1\},\\ &s.t.\begin{cases}\rho_1=g^{-1}(160),\\ Q=CA\sqrt{\dfrac{2(160-P)}{\rho_1}},\\ \mathrm{d}P=\dfrac{E}{\rho}\mathrm{d}\rho,\\ \mathrm{d}\rho=\dfrac{\mathrm{d}m}{V_0}.\end{cases}\end{aligned}\tag{12}$$

5.1.5 优化模型求解

首先，弹性模量与压强的拟合结果为

$$\begin{aligned}f(E)=&10^3(1.19\times10^{-10}E^5-2.53\times10^{-8}E^4+6.83\times10^{-8}E^3+\\&8.69\times10^{-6}E^2+4.91\times10^{-3}E+1.538).\end{aligned}\tag{13}$$

解微分方程得到的密度与压强的关系为

$$g(\rho)=10^9(0.194\rho^6-1.044\rho^5+2.330\rho^4-2.771\rho^3+1.851\rho^2-0.658\rho+0.0975).\tag{14}$$

同时针对优化模型的第三个条件，有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{\rho}\times\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{f^{-1}(P)}{g^{-1}(P)}\times\frac{v_1(t)\rho_1-v_2(t)g^{-1}(P)}{V_0}.\tag{15}$$

这是一个关于 P 和 t 的微分方程，在已知 x 的情况下，可用分离变量法解此微分方程，得

$$P = P(x,t). \tag{16}$$

其表达式过于繁复，在此不做展示。因此，对 x 进行二分法搜索，找出最小目标函数对应的 x，即是 x_0。

对于 150MPa 对应的三种情况，建立优化模型

$$x^* = \underset{x}{\mathrm{argmin}}\{\sum_{t=0}^{\infty}\|150 - P(t)\|_1\}, \tag{17}$$

与前文相同的方法得到 x^*。对于 $2, 5, 10$s 的情况，计算

$$\Delta x = \frac{x^* - x_0}{t}, \tag{18}$$

表示单位时间内单向阀开启时长的变化。

5.1.6 求解结果

对于 100MPa，求得 $x_0 = 0.290$ ms，对于 150MPa，求得 $x^* = 0.870$ ms。对于 $2, 5, 10$s 情况，Δx 分别为 0.290ms, 0.116ms, 0.058ms。

5.2 第二问

在第二问中，需要确定凸轮的角速度 w 以得到理想的管内压强。在最优化模型的基础上，我们设计差分模拟系统来求解优化模型。具体地，首先求得优化模型限制条件：喷油速率与时间的关系和柱塞内压强与时间的关系，在任意时刻计算质量差分，从而求得下一时刻的管内压强。对 w 进行遍历，其中对每一个 w 进行差分模拟，可以得到最优的凸轮角速度。

5.2.1 喷油速率与时间的关系

令 S_1 表示最下端喷孔面积，S_2 表示针阀底部面积，S_3 表示与针阀底部共面的圆孔除去针阀底部的面积，即是出油面积。h_2 表示针阀底部与喷孔底部垂直距离，h_1 表示喷孔底部与圆锥顶点的垂直距离，Δh 表示升程，d_1 表示最下端喷孔直径，d_2 表示与针阀底部共面的圆孔对应的直径，d_3 表示针阀底部直径。则有

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{h_1}{h_1 + h_2 + \Delta h}, \tag{19}$$

且

$$S_2+S_3=\pi\frac{d_2}{2}^2. \tag{20}$$

同时有

$$\tan 9=\frac{d_2/2}{h_1}=\frac{d_3/2}{h_1+h_2}, \tag{21}$$

因此有

$$S_3=\pi(\frac{d_1}{2\tan 9}+\frac{d_3-d_1}{2\tan 9}+\Delta h)^2-S_2. \tag{22}$$

这即是升程 Δh 与喷油嘴面积 S_3 的关系。利用附件 2，可拟合出升程与时间的函数关系

$$\Delta h=\Delta h(t), \tag{23}$$

因此

$$S_3(t)=\pi(\frac{d_1}{2\tan 9}+\frac{d_3-d_1}{2\tan 9}+\Delta h(t))^2-S_2. \tag{24}$$

这是喷油嘴面积与时间的关系。流出速率 Q 与流出面积 S_3 有关，满足

$$Q(t)=CS_3(t)\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \tag{25}$$

这即是喷油速率与时间的关系。

5.2.2 柱塞内压强与时间的关系

设凸轮的角速度为 w，初始状态为极径最小。由附件 1拟合出极径与极角的函数关系

$$r=r(\theta). \tag{26}$$

又极角与时间相关，有

$$\theta=wt, \tag{27}$$

则

$$r=r(wt). \tag{28}$$

设初始状态极径为 r_0，（$r_0\le r(wt),\forall t$），则极径差分，也就是柱塞升高的距离为

$$\Delta r=r(wt)-r_0, \tag{29}$$

其中 $t\in[0,T),T=\frac{2\pi}{w}$。进而，高压油泵内的体积改变量为

$$\Delta V=\Delta r\cdot S, \tag{30}$$

其中 S 是柱塞腔底面积，满足 $S=\pi(5)^2$，（单位：mm^2）。设初始状态腔内体积为 $V_0'=(r_{max}-r_{min})S+20$，则任意时间腔内剩余体积为 $V(t)=V_0'-\Delta V$。设腔内油的总质量为

$$m_0=g^{-1}(P_0')V_0', \tag{31}$$

其中 $P_0'=0.5\text{MPa}$ 是低压燃油压力，则腔内在 t 时刻的油的密度为

$$\rho'(t)=\frac{m_0}{V(t)}. \tag{32}$$

根据前一问拟合出的密度-压强关系，可得此时刻腔内压强

$$P'(t)=g(\rho'(t)). \tag{33}$$

这即是柱塞内压强与时间的关系。

5.2.3 优化模型的建立

要使管内压强 $P(t)$ 维持在 100MPa，我们建立以凸轮角速度为变量的单目标优化模型

$$\begin{aligned} &w_0=\underset{w}{\operatorname{argmin}}\{\sum_{t=0}^{\infty}\|100-P(t)\|_1\},\\ &s.t.\begin{cases} Q(t)=CS_3(t)\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}},\\ P'(t)=g(\rho'(t)),\\ P(0)=100. \end{cases} \end{aligned} \tag{34}$$

5.2.4 优化模型求解

对角速度 w 采用遍历的方式求解。在给的一个 w 的情况下，可对系统进行差分模拟，计算出任意时刻的管内压强 $P(t)$，从而计算误差。具体地，在初始条件 $P(0)=100$ 下，对 $\forall t>0$，计算

$$Q(t)=CS_3(t)\sqrt{\frac{2(P'(t)-P(t))}{\rho(t)}}, \tag{35}$$

其中 $\rho(t)=g^{-1}(P(t))$ 是管内油密度。与此同时，计算 $P'(t)=g(\rho'(t))$，令 0-1 函数

$$\sigma(t)=\begin{cases}1, & P'(t)>P(t),\\ 0, & P'(t)\le P(t).\end{cases} \tag{36}$$

表示单向阀打开或关闭，则当 $\sigma(t)=1$ 时，模拟单向阀打开，向管内进油：计算进油速率

$$Q'(t)=CS\sqrt{\frac{2(P'(t)-P(t))}{\rho'(t)}}, \tag{37}$$

则管内油的质量差分为

$$\Delta m=m(t+\mathrm{d}t)-m(t)=Q'(t)\mathrm{d}t\cdot\rho'(t). \tag{38}$$

从而计算下一刻的压强为

$$P(t+\mathrm{d}t)=g\{\frac{m(t)-Q(t)\mathrm{d}t\cdot g^{-1}(P(t))+Q'(t)\mathrm{d}t\cdot\rho'(t)}{V_0}\}, \tag{39}$$

即得到了下一时刻的管内压强。在这里，$\mathrm{d}t$ 是一个需要设定的模型参数。在得到 $P(t),(\forall t\in[0,10000])$ 后，计算误差

$$\sum_{t=0}^{10000}\|100-P(t)\|_1, \tag{40}$$

其中时间上界取 $T=10000$ ms，从而可以找到最小误差对应的角速度。

对范围 $w\in[20,30]$ 内的 w 进行遍历寻优，得到 $w_0=27.2$ rad/s。

5.3 第三问

在第三问中，需要确定两个参数以得到理想的管内压强：凸轮的角速度 w，两个喷油嘴的工作时间差 $\hat{T}$。类似于第二问，可以建立二元优化模型，对变量进行遍历，对每一组参数进行差分系统模拟，寻找出最优的参数 w 和 $\hat{T}$。对于第二小问，可以设置单向减压阀开启的阈值，以达到对管内压强更好的控制。

5.3.1 二元优化模型的建立

针对变量 w 和 $\hat{T}$，类似于第二问，令 $Q_1(t),Q_2(t)$ 分别表示两个喷油嘴在 t 时刻

的流出速率，建立如下的优化模型：

$$\{w^*,\hat{T}^*\} = \underset{w,\hat{T}}{\mathrm{argmin}}\{\sum_{t=0}^{\infty}\|100-P(t)\|_1\},$$
$$s.t.\begin{cases} Q_1(t)=Q_2(t+\hat{T})=CS_3(t)\sqrt{\dfrac{2\Delta P}{\rho}}, \\ P'(t)=g(\rho'(t)), \\ P(0)=100. \end{cases} \tag{41}$$

5.3.2 二元优化模型求解

类似于第二问中的求解方法，对 $w,\hat{T}$ 分别在区间 $[50,60]$ 和 $[0,100]$ 中进行遍历，针对每一组参数系统模拟，寻找最小误差。得到 $w^*=55.1\ \mathrm{rad/s}$，$\hat{T}^*=50\ \mathrm{ms}$。

5.3.3 减压阀的控制方案

由于管内压强需要控制在 100MPa，因此设定阈值 $P^*=100$，令 0-1 函数

$$\alpha(t)=\begin{cases}1, & P(t)>P^*, \\ 0, & P(t)\le P^*.\end{cases} \tag{42}$$

表示减压阀打开（$\alpha(t)=1$）或关闭（$\alpha(t)=0$）的控制函数。这样可以根据管内的实时压强改变减压阀的工作状态。

6 模型评价

6.1 模型优点

1. 模拟仿真与优化模型结合，使模型和结果具有准确性和鲁棒性。
2. 第一问中的微分方程利用了物理规律，准确且解析地描述了物理变量如密度、压强和弹性模量之间的关系。
3. 第二、三问的系统模型用到了差分模拟模型，求解结果可信度较高，且避免了繁琐优化模型解析求解。

6.2 模型缺点

1. 计算量较大，需要遍历+模拟。
2. 在解决第三问的最后一小问时，模型的灵活性有待提高。

7　参考文献