

# 基于微分模型与有限差分法的防护服设计

## 摘 要

本文针对高温作业专用服装的穿着温度分布情况及服装的优化问题，建立了热量传递模型和目标优化模型，来确定假人穿着高温作业专用服装皮肤外侧的温度变化情况以及防护服不同层织物的最优厚度。

在已知热防护服的密度、比热、热传导率等材料参数的情况下，为了计算假人在穿着热防护服时皮肤外侧的温度分布情况，将服装各层视为平行的无限大带厚度平板，即仅考虑在厚度方向上的温度变化，本文建立了热量传递模型。结合实际情况分析热量的三种传递方式，确定了热防护服中的热量传递方式以热传导与热对流为主，以此建立了热传导与热对流的数学物理方程组，结合边界情况和零时刻状态构成了偏微分方程的定解问题。同时采用有限差分法对偏微分方程组进行数值解求解，为了保证方法的稳定性，采用后项差分法设置合适的步长来求解偏微分方程。在求解过程中，引入两个未知参数：环境传热系数和人体皮肤外层传热系数，遍历搜索人体最外层温度与所给数据最贴近的传热系数。求得未知参数后，为了根据温度函数在当前时刻和位置的温度计算下一时刻前、中、后三个位置的温度，构建线性方程组  $Ax = f$ ，结合层间、层边、左右两边界不同的边界条件采用追赶法求解，由此得到温度函数，即温度随时间和空间的分布情况。

对于在特定条件下热防护服第Ⅱ层的最优厚度求解问题，本文建立单目标优化模型，目标函数为热防护服第Ⅱ层厚度的最小值，约束条件为第Ⅱ层的厚度范围和防护效果要求。运用二分查找法，求解得到在特定的环境条件下第Ⅱ层的最优厚度为  $d_2 = 16.2015mm$ 。

对于在特定条件下热防护服第Ⅱ层和第Ⅳ层最优厚度的求解问题，考虑到温度在空间上呈递减性，第Ⅱ层和第Ⅳ层的厚度呈负相关，又因为第Ⅳ层为空气，其厚度不影响防护服生产成本，同时又为了满足防护要求，将第Ⅳ层厚度设为其厚度范围的最大值，以尽可能减小热防护服第Ⅱ层的厚度。由此可以对第Ⅱ层继续采用二分查找法确定其最优厚度。最终根据二分查找法得到特定环境下热防护服第Ⅱ层和第Ⅳ层最优厚度为  $d_2 = 18.8047mm, d_4 = 6.4000mm$ 。

**关键词：**微分模型，有限差分法，目标规划，追赶法

# 1 问题重述

## 1.1 问题背景

高温作业专用服装一般用于冶金、钢铁、焊接等行业，该服装须在高温下保持自身所具有的各项物理学性能，不发生收缩、熔融和脆性碳化。在高温作业过程中，外界热量以热对流、热辐射、热传导形式传递给人体，对人体造成伤害。高温作业专用的热防护服必须具备较好的减缓和阻止热量传递的性能，避免热源对人体造成伤害，给高温环境下的作业人员提供良好的安全防护。

## 1.2 问题重述

高温作业专用服装通常由三层织物材料构成，分别记为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境接触，III 层与皮肤之间还存在空隙，此空隙层记为 IV 层。测试过程中， $37^{\circ}\text{C}$  恒温的假人将置于实验室高温环境中，高温作业服装包裹在假人体表。

根据上述条件，解决以下问题：

1. 在给定高温作业服装各层的密度、比热、热传导率、厚度等参数值或范围的情况下，测量得到环境温度为  $75^{\circ}\text{C}$ 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形下假人皮肤外侧的温度。由此建立数学模型，计算服装各层温度分布，并生成相应的 Excel 文件。
2. 在给定环境温度为  $65^{\circ}\text{C}$ 、IV 层的厚度为 5.5 mm 的情况下，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。
3. 在给定环境温度为  $80^{\circ}\text{C}$  的情况下，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。

# 2 问题分析

## 2.1 介质中热量传递方式的确定

在高温作业过程中，外界热量以热对流、热辐射、热传导形式传递给人体，对人体造成伤害。一切温度高于绝对零度的物体都能产生热辐射，温度越高，辐射能量越大，短波成分越多，温度较低时，热辐射主要以不可见的红外光进行辐射， $65^{\circ}\text{C} - 80^{\circ}\text{C}$  的环境温度下，热辐射的效果较为微弱，因此可以忽略热辐射在高温作业过程中对热量传递的影响。因此，热量从外界透过高温作业服装向人体皮肤传递时，以热传导和热对流为主。

确定热量在不同介质中的传递方式后，即可建立热量与传递时间、传递距离有关的数学物理方程，根据零时刻状态和具体的边界情况确定初始条件和边界条件，由此构成偏微分方程的定解问题 [1]。

## 2.2 偏微分方程的求解

偏微分方程的求解一般分为解析法和数值法，只有一部分偏微分方程能够求得解析解，实际问题较为复杂在此处并不适用，于是我们采用数值法进行求解。常用的数值解法有：有限差分法、有限元法、矩量法、边界元法，其中有限差分法最是普遍通用。有限差分法的基本思想是将场域划分为网格，把求解场域内连续的场分布用网格节点上的离散的数值解来代替，即用网格节点的差分方程近似代替场域内的偏微分方程来求解。一般来说，只要将网格划分得充分细，所得结果就可达到足够的精确。

## 2.3 最优厚度的确定

对于最优厚度，首先基于经济成本的考虑，只需找出满足题目要求的最薄厚度即可，同时也需要考量服装的高温作业防护效果，即需要保证一定的防护能力，因此对服装厚度又有一定的要求。

针对第二问，可以建立单目标优化模型，即对第Ⅱ层的厚度进行优化，同时可以采用二分法查找进行求解。二分查找法是一种在有序数组中查找特定元素的搜索算法，其大致思路如下：（1）从数组的中间元素开始搜索，如果该元素正好是目标元素，则搜索过程结束，否则执行下一步；（2）如果目标元素大于/小于中间元素，则在数组大于/小于中间元素的那一半区域查找，然后重复步骤（1）的操作；（3）如果某一步数组为空，则表示找不到目标元素。

针对第三问，是对第Ⅱ层和第Ⅳ层的服装厚度进行优化，由于温度在空间上呈递减性，故第Ⅱ层和第Ⅳ层的厚度呈负相关，又因为第Ⅳ层是空气，其厚度不影响成本，同时又为了满足防护要求，可将第Ⅳ层厚度设为最大值，这样可以尽可能减小第Ⅱ层厚度。因此，可以对第Ⅱ层继续采用二分查找法确定其最优厚度。

## 3 模型假设

1. 仅考虑热传导和热对流的情形，而不考虑热辐射的影响；
2. 假设所研究的服装的各层材料为各向同性物质；
3. 将服装各层视为平行的无限大带厚度平板，即仅考虑在厚度方向上的温度变化；
4. 假设相邻两层的接触面的温度连续；
5. 各层内部不含热源；
6. 假设测试刚开始时各层温度与假人温度相同。
7. 热传递为垂直于皮肤表面进行；
8. 高温作业服装的织物是各向同性的，热传递过程中，织物结构几乎不变；
9. 该系统不考虑湿传递，即忽略水汽、汗液的影响；
10. 热量传递到织物的过程中是均匀的，假定热防护材料没有发生溶解。

## 4 变量说明

我们在表 1 中给出主要变量的说明。其中包括变量名称，含义和单位。

表 1: 本文章中的主要变量说明

变量名称	变量含义	变量单位
$u$	温度函数	$^{\circ}C$
$t$	时间	$s$
$x$	位置坐标	$mm$
$d_i$	第 $i$ 层厚度	$mm$
$x_i$	第 $i$ 层与第 $i + 1$ 层交界处坐标	$mm$
$T_s$	实验环境温度	$^{\circ}C$
$T_w$	假人皮肤外侧平衡温度	$^{\circ}C$
$T_r$	假人皮肤温度	$^{\circ}C$
$T_O$	第 $i$ 层初始温度	$^{\circ}C$
$\rho_i$	第 $i$ 层密度	$Kg/m^3$
$c_i$	第 $i$ 层比热容	$J/(Kg \cdot ^{\circ}C)$
$\lambda_i$	第 $i$ 层热传导率（导热系数）	$W/(m \cdot ^{\circ}C)$
$\alpha_i$	第 $i$ 扩散率	$m^2/s$
$h_I$	环境与 I 层表面对流换热系数	$W/(m \cdot ^{\circ}C)$
$h_IV$	IV 层与假人皮肤对流换热系数	$W/(m^2 \cdot ^{\circ}C)$
$q$	热流密度	$J/(m^2 \cdot ^{\circ}C)$

## 5 模型建立与求解

### 5.1 温度分布模型建立

假人皮肤外侧的温度分布，具体来说就是假人皮肤外侧的温度随时间和空间的变化情况，由此可定义一个二元函数  $u(x, t)$ ，其中  $u$  为温度， $x$  为各层的位置坐标， $t$  为时间。在考虑热传导与热对流、不考虑热辐射的情况下，可分别根据热传导和热对流

构建相应的热传导方程与热对流方程。

首先，在三维方向均匀介质中的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{\rho c}, \quad (1)$$

其中  $\rho$  为密度， $c$  为比热容， $\lambda$  为热传导率。 $\frac{\partial u}{\partial t}$  描述温度随时间的变化， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  描述温度随空间的变化， $\frac{q}{\rho c}$  描述内部热源的影响。由于模型假设高温作业服装内各层不含热源，故式 (1) 可简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

为了进一步简化模型，我们将各层视为无限大平行板，并将假人身着高温作业服装置身于实验室的高温环境中的情形简化为图 1 所示的模型，其中  $x_i$  为第  $i$  层与第  $i+1$  层交界处坐标。此时，式 (2) 可简化为

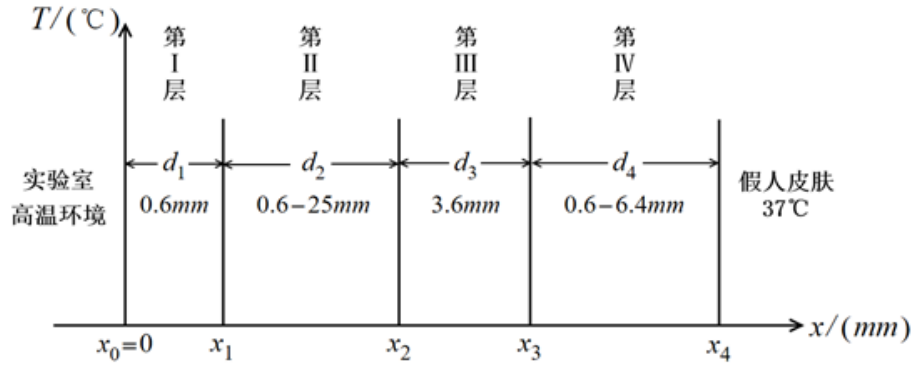


图 1: 空间结构示意图。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

不同层的密度  $\rho_i$ ，比热容  $c_i$ ，热传导率  $\lambda_i$  均不相同，故对于第  $i$  层的热传导方程为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}. \quad (4)$$

其中我们令

$$k_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}. \quad (5)$$

由于我们假设相邻两层的接触面之间温度连续，则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x}, \forall x_0. \quad (6)$$

此即

$$(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x})^- = (\lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x})^+. \quad (7)$$

同时相邻两层的热流量相等，则有

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

在这里，我们忽略热辐射影响。此时问题化为一维复合介质传热，第 I 层与实验室环境之间、IV 层与假人皮肤之间均以对流方式传热，故有

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + k_e u_1 \Big|_{x=x_0} &= k_e u_e \\ -\lambda_4 \frac{\partial u_4}{\partial x} \Big|_{x=x_4} + k_s u_4 \Big|_{x=x_4} &= k_s u_s, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $u_s, u_e, k_s, k_e$  分别表示假人体内温度 ( $37^\circ C$ )，环境温度 ( $85^\circ C$ )，人体外侧与外界的换热系数和最外层防护服与外界的换热系数。假设测试开始时，各层温度相等，则有初始条件

$$u_i(x, 0) = u_0, (i = 1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

综上所述，本题的热传导和热对流模型为：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, (i = 1, 2, 3, 4) \\ (\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x})^- &= (\lambda_{i+1} \frac{\partial u}{\partial x})^+. \\ \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} &= \lambda_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3). \\ -\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + k_e u_1 \Big|_{x=x_0} &= k_e u_e \\ \lambda_4 \frac{\partial u_4}{\partial x} \Big|_{x=x_4} + k_s u_4 \Big|_{x=x_4} &= k_s u_s \\ u_i(x, 0) &= u_0, (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

## 5.2 温度分布模型求解

方程组 11 是具有初值条件的偏微分方程，它的解析解难以求得，因此考虑数值

算法。一般地，数值求解形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (12)$$

的偏微分方程，其中  $D$  是常数，通常使用有限差分法 [2]。有限差分法包括前项差分与后项差分法，其中前项差分法使用前项的数值微分作为近似微分值：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{h^2}(u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{1}{k}(u(x, t+k) - u(x, t)), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1, t)/12$  和  $k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, c_2)/2$  分别是两项的误差。对于后项差分法，它的  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的近似方法与前项差分一致，但其  $\frac{\partial u}{\partial t}$  则使用后项差分公式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{k}(u(x, t) - u(x, t-k) + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, c_0)), \quad (14)$$

其中  $t-k < c_0 < t$ 。对于前项差分法和后项差分法的稳定性，我们有如下引理 [3]：

**引理 1** 对于形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15)$$

的偏微分方程，其中  $D$  是常数，若其使用前项差分法数值求解，令  $h$  是空间步长， $k$  为时间步长，如果

$$\frac{Dk}{h^2} < \frac{1}{2}, \quad (16)$$

前项差分法稳定。

**引理 2** 对于形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (17)$$

的偏微分方程，其中  $D$  是常数，若其使用后项差分法数值求解，则对任何时间步长  $h$ ，任何空间步长  $k$ ，后项差分法稳定。

事实上，由于防护服厚度  $d_i$  在数值上是偏小的，*i.e.*,  $d_i \ll t = 5400(s)$ ，因此空间步长不能取得太大，这使得前项差分法的稳定性要求难以保证。因此我们考虑后项差分法。在后项差分法中，时间和空间的步长  $k$  和  $h$  不会影响方法的稳定性，因此我们可以根据实际情况设置合适的步长来求解微分方程。对于后项的有限差分，使用

式 (14) 代替在点  $(x, t + \Delta t)$  的热方程 (3) 得到

$$\frac{u_x^{t+\Delta t} - u_x^t}{\Delta t} = \alpha_1 \frac{u_{x+h}^{t+\Delta t} - u_x^{t+\Delta t} + u_{x-h}^{t+\Delta t} - u_x^{t+\Delta t}}{h^2}, \quad (18)$$

其中

$$\Delta t = k \quad (19)$$

是时间步长,

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} \quad (20)$$

是第  $i$  层的传热参数。令

$$r = \frac{\alpha_1 \Delta t}{h^2}, \quad (21)$$

则有

$$u_x^{t+\Delta t} - u_x^t = r u_{x+h}^{t+\Delta t} - 2r u_x^{t+\Delta t} + r u_{x-h}^{t+\Delta t}. \quad (22)$$

由于微分值采用估计法, 式 (22) 也具有误差, 其局部截断误差为  $O(\Delta t) + O(h^2)$ 。

在利用有限差分法求解微分方程的过程中, 根据温度函数  $u(x, t)$  在当前时刻和位置的温度, 可以计算下一时刻前、中、后三个位置的温度, 如图 2。这样就可构建出

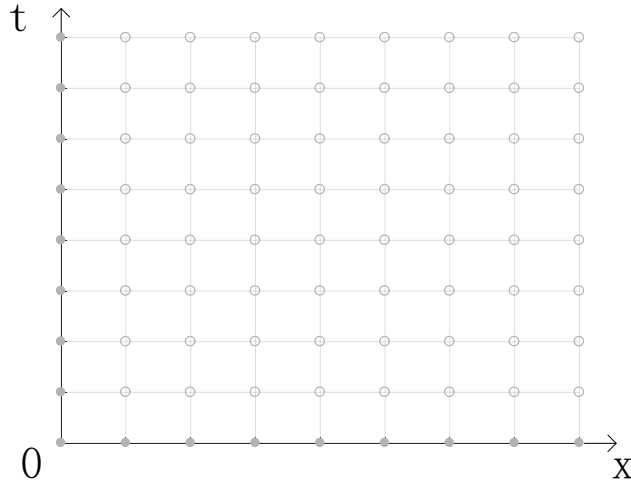


图 2: 有限差分法示意图: 实心圆位置是已知的初始边界条件, 空心圆表示需要确定的未知值。有限差分法从边界出发, 通过逐一计算来确定未知点的值。

如下的线性方程组:

$$Ax = f, \quad (23)$$

其中  $f$  为已知的温度信息,  $x$  为未知的温度信息,  $A$  是一个对三角矩阵 (除对角线与两条次对角线上的元素外全为 0)。在初始时刻, 温度都为  $0^\circ\text{C}$ , 因此  $f$  为全 0 矩阵。



通过初始  $f$  和  $A$  计算出下一时刻的所有位置的温度后，将该数据作为新的  $f$  来计算下下时刻所有位置的温度。这样的迭代过程可以通过不停地求解线性方程组完成。

此框架的难点在于构建矩阵  $A$ 。事实上，对于层边、左右两边界、层间则均有不同的条件，因此矩阵  $A$  的构建需要寻找并转换这些条件。

### 5.2.1 左边界条件

对于左边界，首先有

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + k_e u_1 \Big|_{x=x_0} = k_e u_e, \quad (24)$$

此即

$$\begin{aligned} & -\lambda_1 \frac{u_{x+h}^t - u_x^t}{h} + k_e u_x^t = k_e u_e \\ \Rightarrow & \left( \frac{hk_e}{\lambda_1} + 1 \right) u_x^t - u_{x+h}^t = \frac{h}{\lambda_1} k_e u_e. \end{aligned} \quad (25)$$

所以有以下矩阵乘积形式的方程

$$\begin{bmatrix} \frac{hk_e}{\lambda_1} + 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^t \\ u_{x+h}^t \end{bmatrix} = \frac{h}{\lambda_1} k_e u_e. \quad (26)$$

### 5.2.2 右边界条件

考虑右边界，首先有

$$\lambda_4 \frac{\partial u_4}{\partial x} \Big|_{x=x_4} + k_s u_4 \Big|_{x=x_4} = k_s u_s, \quad (27)$$

此即

$$\begin{aligned} & \lambda_4 \frac{u_{x+h}^t - u_x^t}{h} + k_s u_x^t = k_s u_s \\ \Rightarrow & \left( \frac{hk_s}{\lambda_4} - 1 \right) u_x^t + u_{x+h}^t = \frac{h}{\lambda_4} k_s u_s. \end{aligned} \quad (28)$$

所以写为矩阵乘积形式有

$$\begin{bmatrix} \frac{hk_s}{\lambda_4} - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^t \\ u_{x+h}^t \end{bmatrix} = \frac{h}{\lambda_4} k_s u_s. \quad (29)$$

### 5.2.3 层边条件

对于层边，首先有

$$\lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial x} = \lambda_{k+1} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x}. \quad (30)$$

此即

$$\begin{aligned} \lambda_k \frac{u_{x+h}^t - u_x^t}{h} &= \lambda_{k+1} \frac{u_{x+2h}^t - u_{x+h}^t}{h} \\ \Rightarrow \left( \frac{\lambda_k}{h} + \frac{\lambda_{k+1}}{h} \right) u_{x+h}^t - \frac{\lambda_k}{h} u_x^t - \frac{\lambda_{k+1}}{h} u_{x+2h}^t &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

所以有

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda_k}{h} & \frac{\lambda_k}{h} + \frac{\lambda_{k+1}}{h} & -\frac{\lambda_{k+1}}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^t \\ u_{x+h}^t \\ u_{x+2h}^t \end{bmatrix} = 0. \quad (32)$$

### 5.2.4 层间条件

在非边界位置（层间），矩阵  $A$  的对应元素由式 (22) 决定，即

$$\begin{bmatrix} -r & 1+2r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x-1}^{t+1} \\ u_x^{t+1} \\ u_{x+1}^{t+1} \end{bmatrix} = u_x^t. \quad (33)$$

### 5.2.5 $Ax = f$ 的最终建立

综上所述，可确定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \frac{h k_e}{\lambda_1} + 1 & -1 & & \\ -r_1 & 1+2r_1 & -r_1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\lambda_1}{h} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{h} - \frac{\lambda_2}{h} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -r_2 & 1+2r_2 & -r_2 & -r_2 \\ & -r_2 & 1+2r_2 & -r_2 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{\lambda_2}{h} & \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{h} - \frac{\lambda_3}{h} \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -r_3 & 1+2r_3 & -r_3 & -r_3 \\ & -r_3 & 1+2r_3 & -r_3 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{\lambda_3}{h} & \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{h} - \frac{\lambda_4}{h} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -r_4 & 1+2r_4 & -r_4 & -r_4 \\ & -r_4 & 1+2r_4 & -r_4 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{h k_s}{\lambda_4} - 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

在这里，分块矩阵的拼接规则为：矩阵  $A_i + 1$  的第一列在矩阵  $A_i$  的倒数第二列下方。同时有

$$f = \left( \frac{h}{\lambda_1} k_e u_e \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \frac{h}{\lambda_d} k_s u_s \right)^T, \quad (36)$$

并且我们设定空间步长  $h = 0.1mm$ ，时间步长  $\Delta t = 1$ 。因此线性方程组 (23) 已经构造完毕。对其进行不停的求解迭代，即可求得  $u(x, t)$ ，也就是温度随时间和空间的分布。有限差分法求解温度分布可以描述为表 2。

表 2: 有限差分法求解偏微分方程。

算法 1 温度分布 $u(x, t)$ 求解
1: <b>input</b> : (11), $k_i, d_i, u_e, u_s, k_e, k_s, h, \Delta t$ 2: $A \leftarrow \{(11), k_i, k_e, k_s, u_e, u_s, h, \Delta t\}$ 3: $f = \text{zeros}(\frac{\sum_i d_i}{h}, 1)$ , $u = \text{zeros}(\frac{\sum_i d_i}{h}, 5400)$ , 4: <b>for</b> $t = 1 : 5400$ 5: $x \leftarrow Ax = f$ 6: $f = x$ 7: $u(:, t) = f$ 8: <b>end for</b>

### 5.2.6 未知参数确定

在这里， $k_e, k_s$  在题目中未给定，我们利用所给的附件数据求取最优的环境参数和人体内部参数  $k_e, k_s$ ：

$$\min_{k_e, k_s} \|u_{k_e, k_s}(x_0, t) - Data\|_{\ell_2}, \quad (37)$$

其中  $Data \in \mathbb{R}^{5400}$  是所给的人体表面温度随时间变化的向量， $u_{k_e, k_s}(x_0, t) \in \mathbb{R}^{5400}$  指在参数  $k_e, k_s$  下利用有限差分法求得的人体表面温度随时间变化的向量。对于式 (37) 的求解，我们使用遍历法：首先给定遍历上下界  $[0, 200]$ ，接着第一遍先找出  $k_e, k_s$  大致区间，第二遍在小区间内精确遍历，从而找到满足与所给数据的差值平方和最小的  $k_s, k_e$ 。经计算， $k_s = 8.36, k_e = 117.40$ 。

### 5.2.7 结果和分析

最终的温度分布求解结果详情见 problem1.xlsx。结果可视化见图 3。可以看到，本文的建模和求解很好地估测了温度随空间和时间的分布。并且在不同位置的温度分布上具有统一性：在初期温度上升，后期温度趋于平缓（图 3 右图）。

图 4 展示了本文算法的结果和所给数据的对比曲线。虽然在计算过程中使用了数据  $Data$  进行未知参数确定，但并未直接使用此数据进行温度分布计算。因此，图 4

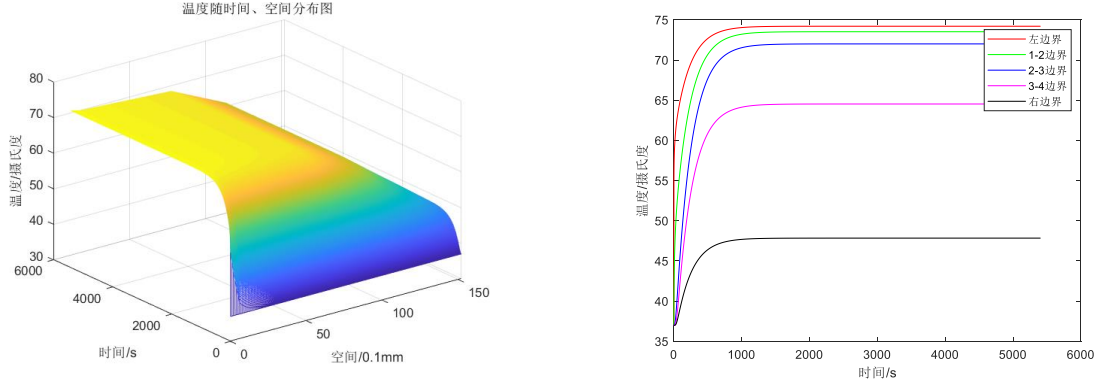


图 3: 第一问的求解结果。左图: 求解出的温度分布  $u(x, t) \in \mathbb{R}^{\frac{\sum d_i}{h} \times 5400}$ 。右图: 部分位置温度随时间变化图。

一定程度上反映了本文算法的鲁棒性和准确性。

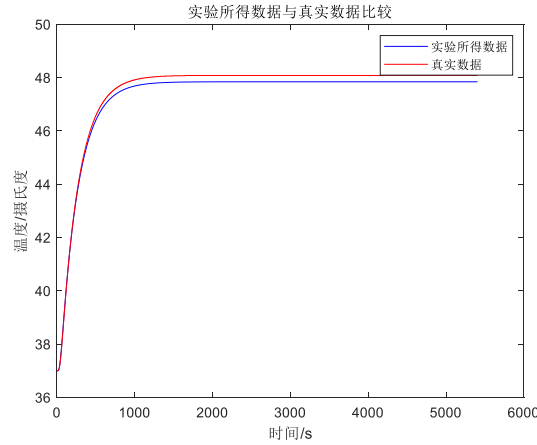


图 4: 本文算法的结果和所给数据的对比曲线。两曲线在涨落态势和极值上具有一致性，一定程度上反映了本文建模的正确性。

### 5.3 第二问建模

在第二问中，我们需要在指定条件下找出第 II 层最优厚度，满足假人皮肤外侧（其空间位置记作  $x_0$ ）在工作 60 分钟时温度不超过  $47^\circ\text{C}$ ，且超过  $44^\circ\text{C}$  的时间不超过 5 分钟。由第一问可以看出，温度在空间上是单调递减的，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} \leq 0, \quad (38)$$

所以对于最优厚度的设计，等价于找出满足要求的最薄厚度。这个最薄厚度需满足一定的条件，从而可以构建单目标优化模型，即对  $d_2$  进行优化。因此第二问的模型可

描述为:

$$\begin{aligned} & \min d_2 \\ & s.t. \begin{cases} d_4 = 5.5 \\ u_s = 60 \\ u(x_0, 60 \times 60) \leq 47 \\ u(x_0, 60 \times 60 - 5 \times 60) \leq 44. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

#### 5.4 第二问求解

搜索满足要求的最小值, 通常使用二分法 [4]。首先设定厚度区间  $D = [a, b]$ , 第一次查找  $\frac{a+b}{2}$ , 若  $d_2$  的厚度  $mid = \frac{a+b}{2}$  满足条件, 则减小厚度, 即

$$x_{max} = \frac{\frac{(a+b)}{2} + a}{2}. \quad (40)$$

否则增加厚度, 即

$$x_{min} = \frac{\frac{(a+b)}{2} + b}{2}. \quad (41)$$

接着下一次判断  $mid = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$  是否符合条件。这样一直查找, 最终可获得近似的最优厚度  $d_2$ 。二分算法可描述为表 3。

第二问的部分求解结果可见表 4。最薄厚度为  $d_2 = 16.2015mm$ 。

表 3: 二分法求  $d_2$ 。

##### 算法 1 第二问 $d_2$ 求解

```

1: input : (11),  $a, b, k_i (i \neq 2), u_e, u_s, k_e, k_s, h, \Delta t$ 
2:  $x_{min} = a, x_{max} = b$ 
3:  $len = 0.01$ 
4: while  $x_{max} - x_{min} > len$ 
5:    $mid = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$ 
6:    $u(x, t) \leftarrow \{(11), k_i, d_i (i \neq 2), mid, u_e, u_s, k_e, k_s, h, \Delta t\}$  (算法 1)
7:   if  $u(x_0, 60 \times 60) \leq 47$  and  $u(x_0, 60 \times 60 - 5 \times 60) \leq 44$ 
8:      $x_{max} = mid$ 
9:   else
10:     $x_{min} = mid$ 
11:   end if
12: end while
13:  $d_2 = x_{max}$ 

```

表 4: 第二问部分结果。可见最终温度与厚度  $d_2$  呈负相关, 为保持  $u(x_0, 55 \times 60) \leq 44$ ,  $d_2$  必须在  $16mm$  以上。

$d_2$	6.0000	10.0000	13.0000	16.0000	20.0000	22.0000	25.0000
$u(x_0, 60 \times 60)$	44.6539	44.4615	44.2998	44.0759	43.6320	43.3514	42.8792
$u(x_0, 55 \times 60)$	44.6539	44.4593	44.2827	44.0239	43.5148	43.2012	42.6858

### 5.5 第三问建模

在第三问中, 我们需要在指定条件下找出第 II 层和第 IV 层最优厚度, 满足假人皮肤外侧在工作 30 分钟时温度不超过  $47^\circ C$ , 且超过  $44^\circ C$  的时间不超过 5 分钟。由于温度在温度在空间维度上递减, 因此在刚好满足条件的情况下,  $d_2$  与  $d_4$  呈负相关。由于第 IV 层是空气, 因此其厚度不影响成本, 我们将其设为最大值, 这样可以尽可能减小  $d_2$ ; 所以对于最优厚度的设计, 等价于找出满足要求的最薄厚度  $d_2$ , 可描述为以下模型:

$$\begin{aligned} & \min d_2 \\ & s.t. \begin{cases} d_4 = d_{4_{max}} \\ u_s = 80 \\ u(x_0, 30 \times 60) \leq 47 \\ u(x_0, 30 \times 60 - 5 \times 60) \leq 44. \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

### 5.6 第三问求解

对于第三问, 在设定第 IV 层厚度  $d_{4_{max}} = 6.4mm$  的情况下, 与第二问一样用二分法求解  $d_2$ 。求解结果可见图 5。在这里, 我们看到最终温度与防护服厚度呈负相关, 因此在所给限制条件下找到了最小的第 II 层厚度。

第三问结果为  $d_2 = 18.8047mm$ ,  $d_4 = 6.4000mm$ 。

## 6 模型评价

### 6.1 模型优点

1. 建立的微分模型很好的刻画了热传导和热对流的过程, 具有可解释性。
2. 通过有限差分法求解微分模型可以得到比较精确的近似解, 解决了温度分布的求解; 并且由于后项差分的良好性质, 结果具有稳定性。
3. 第一问建立的模型可以即插即用到第二、三问的求解中, 通过二分法寻找到符合要求的防护服厚度。

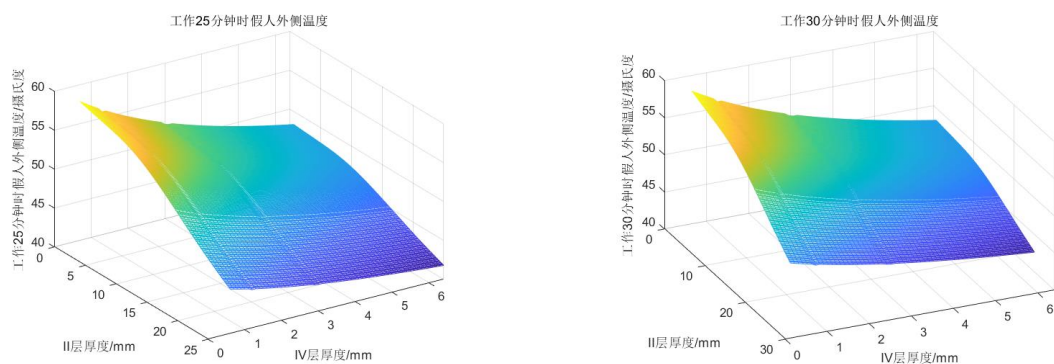


图 5: 第三问的求解结果。左图为工作25分钟时假人皮肤外侧的温度；右图为工作30分钟时假人皮肤外侧的温度。

## 6.2 模型缺点

1. 在使用有限差分法时，由于空间步长受限于防护服厚度，其值远小于时间步长，因此有限差分法的计算精度会受到影响。
2. 在解决第三问时，我们将第 IV 层空气层厚度设为最大值，没有进行多目标优化，而是单目标优化，因此模型的表达能力受限。

## 7 参考文献

- [1] 卢琳珍, “多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定,” 浙江理工大学, pp. 1236–1238, 2018.
- [2] 王秦, “基于时空联合广义有限差分法求解三维非稳态热传导方程,” 北京力学会. 北京力学会第26届学术年会论文集., pp. 1236–1238, 2020.
- [3] T. Sauer, *Numerical Analysis*. China Machine Press, 2014.
- [4] 任宏梅, 二分查找算法实现. 教学设计, 中国信息技术教育, 2019.