

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

Dipartimento di Matematica

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Aspetti Algebrici e Combinatori della Teoria degli Operad

RELATORE

Prof. Alberto Canonaco

CANDIDATO

Ambrogio Maria Bernardelli

Matricola Numero 484237

Anno Accademico 2020/2021

Indice

Abstract	iv
Introduzione	v
1 Introduzione alla teoria degli operad	1
1.1 Nozioni preliminari ed esempi	1
1.2 Operad non unitali	10
1.3 Algebre su un operad	12
1.4 Operad commutativi	17
1.5 Operad e moduli	20
2 Definizione combinatorica e generalizzazioni	26
2.1 Operad liberi e definizione combinatorica	26
2.2 Operad ciclici	34
2.3 PROP, properad e dioperad	37
3 Operad e alberi	43
3.1 Operad dendriforme	43
3.2 Operad di pre-Lie	46
3.3 L'operad dupliciale e l'operad non-associativo commutativo	49
3.4 Da operad a gruppi	51
3.5 Risultati combinatori	60
4 Operad colorati	63
4.1 Introduzione alle multicategorie	63
4.2 Circuiti elettrici	68
Bibliografia	76

Abstract

In my thesis, I deal with operad theory, introducing it with the classical definition of operad in the symmetric monoidal category of \mathbf{k} -modules, with \mathbf{k} a commutative ring, and later giving what is called its partial definition, demonstrating their equivalence. I present some preliminary notions, such as non-unital operads and non- Σ operads, with relating examples. I bring up the concepts of algebra over an operad, module over an algebra over an operad, module over an operad, explaining the connections occurring between these objects and referring to some specific cases, recovering, for example, the classical definitions of associative algebra and module over an associative algebra.

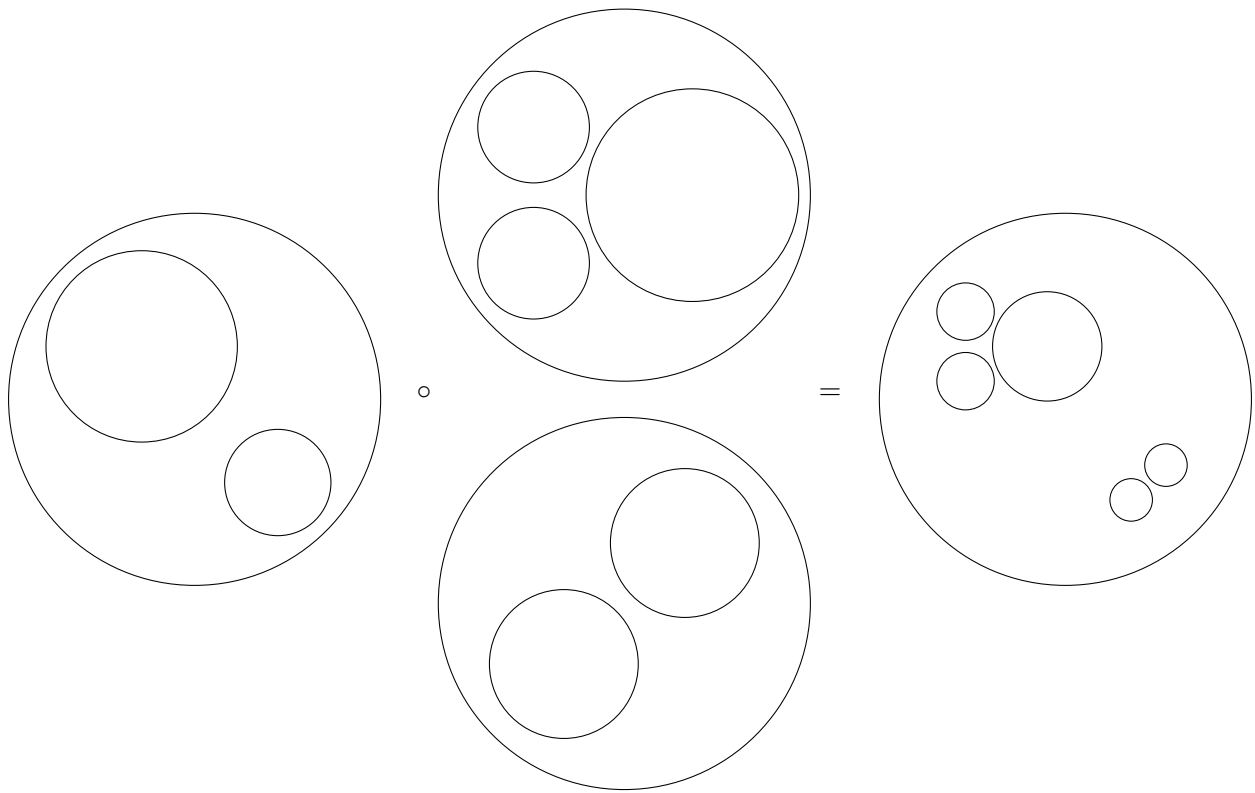
I then pave the way for the close link between operads and the concept of tree in graph theory, showing the notion of free operad, whose construction leads to a new definition of operad, also known as combinatorial definition, equivalent to the others, which makes use of the concept of algebra over a triple. By generalizing this definition, I bring up other types of objects related to operads, such as cyclic operads, PROPs, properads, dioperads, providing pertaining examples.

Subsequently, I present some operads intrinsically linked to trees, such as the dendriform operad, the pre-Lie operad, the duplicial operad, the non-associative permutative operad. I then broach the concept of \mathcal{P} -group associated with a certain operad \mathcal{P} , giving some examples of these groups' elements for the operads mentioned above. I conclude with an example of a combinatorial problem, the solution of which may be found using operads as tools to enumerate families of combinatorial objects.

Finally, I deal with the concept of colored operad, specifying its principal notions and providing an interesting example of a colored operad that can be seen as a model for wiring diagrams and electric circuits.

Introduzione

Informalmente, un operad \mathcal{P} è il dato di una certa successione $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ di oggetti, che solitamente sono insiemi, moduli, spazi vettoriali, spazi topologici eccetera, insieme con alcune mappe di composizione, una mappa unitaria (o al suo posto una unità) e azioni dei gruppi simmetrici con n elementi Σ_n sugli oggetti $\mathcal{P}(n)$, per ogni $n \geq 0$, in modo tale che tutti questi dati soddisfino certi assiomi. In particolare, possiamo vedere un operad come un meccanismo che cattura i risultati di certe operazioni in varie strutture algebriche e geometriche. Si veda ad esempio la seguente equazione di diagrammi



che visivamente può essere interpretata come una sorta di composizione. Intuitivamente, i due piccoli cerchi all'interno del primo cerchio più grande vengono sostituiti con quelli all'interno degli altri due. La teoria degli operad codifica una gran varietà di questo tipo di composizioni, ad esempio l'operad dei dischi piccoli descritto in [Fre18] codifica la composizione che abbiamo appena visto. In particolare, la teoria degli operad ha origine in topologia algebrica dallo studio degli spazi dei lacci iterati, si veda ad esempio [MSS02]. In seguito, gli operad hanno trovato importanti sviluppi in molti altri campi. In algebra omologica, come ad esempio in [Val12], gli operad sono impiegati come oggetti algebrici in grado di codificare omotopie di ordine superiore. Per quanto riguarda la geometria algebrica e la fisica, in [KSV95] la teoria degli operad viene utilizzata nello studio di spazi di moduli e teoria delle stringhe. Infine, in merito a possibili sviluppi nel campo della biologia, in [BO17] viene trattata la costruzione di un certo operad, detto operad filogenetico, impiegato come modello per alcune porzioni del cosiddetto albero della vita, utilizzando la teoria degli operad per modellizzare l'evoluzione delle specie.

Nel mio elaborato introduco la teoria degli operad trattando l'argomento principalmente nel caso particolare della categoria monoidale $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}, \otimes)$ dei \mathbf{k} -moduli e del loro prodotto tensore, con \mathbf{k} anello commutativo, studiando però anche alcuni esempi e applicazioni di operad nella categoria monoidale (\mathbf{Set}, \times) degli insiemi e del loro prodotto cartesiano, cercando di mettere in luce gli aspetti di questa teoria che più mi hanno interessato. Nei primi due capitoli, seguo in particolare [Mar06], completando alcuni esempi e dimostrazioni. Studio l'interscambiabilità tra la definizione classica e quella parziale, l'equivalenza delle quali è forse ciò che mi ha davvero indirizzato verso un corretto modo di maneggiare questi oggetti, con i quali non è stato semplice lavorare. La possibilità di avere questi due diversi punti di vista è stata quindi di grande aiuto, oltre che di grande interesse.

Dopo aver trattato alcuni tipi particolari di operad, mi concentro sul concetto di algebra su un operad. Tale concetto porta ad interessanti sviluppi, come ad esempio il fatto di poter ritrovare, attraverso operad specifici, i concetti di algebra associativa e di algebra associativa commutativa. Algebre su operad diversi codificano diversi tipi di algebre classiche e ciò permette di trattare queste ultime con grande generalità. Inoltre, le algebre sugli operad trovano un'interessante applicazione nel campo dell'informatica, in particolare un possibile sviluppo è quello che viene esposto in [GT16], ossia lo studio di una crittografia basata sulla teoria degli operad, che sfrutti in particolare le algebre su operad commutativi.

In seguito, studio la costruzione dell'operad libero e come questa porti a una nuova definizione di operad, abbastanza flessibile da poter essere generalizzata, modificando un certo colimite, per definire nuovi oggetti legati agli operad, come ad esempio operad ciclici, PROP, properad, dioperad. Tale costruzione sottolinea inoltre lo stretto legame tra il concetto di operad e il concetto di albero in teoria dei grafi.

Seguendo poi [Cha07], presento alcuni operad costruiti a partire da certi insiemi di alberi, studiando in seguito, per questi operad, alcuni problemi combinatori legati al concetto di \mathcal{P} -gruppo associato a un operad \mathcal{P} . Tali problemi combinatori riguardano in particolare l'enumerazione di certi tipi di alberi sfruttando alcune serie di potenze generalizzate. In particolare, come esempio, sfrutto la teoria degli operad per contare rispettivamente i cosiddetti V-alberi e gli alberi senza intersezione con base.

Infine, introduco la teoria degli operad colorati e delle loro algebre, studiando in particolare un esempio di [FS18] riguardante l'operad colorato **Cospan** e come questo possa essere utilizzato come modello per codificare i circuiti elettrici. Lo sviluppo di una teoria in questo senso porta, tra le altre cose, a possibili applicazioni riguardanti i campi dell'informatica e delle neuroscienze, come viene suggerito in [RS13].

Capitolo 1

Introduzione alla teoria degli operad

1.1 Nozioni preliminari ed esempi

Siano \mathbf{k} un anello commutativo, Σ_n il gruppo simmetrico con n elementi, $n \in \mathbb{N}$, e $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ il corrispondente anello di gruppo. In questa trattazione ogni numero è da considerarsi intero e ogni prodotto tensoriale di moduli è da intendersi come prodotto tensoriale sull'anello \mathbf{k} , se non diversamente specificato. Cominciamo dunque dando la definizione classica di operad. In particolare tratteremo principalmente operad nella categoria monoidale $(\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}, \otimes)$ dei \mathbf{k} -moduli e del loro prodotto tensore. Non è difficile generalizzare la trattazione per una categoria monoidale qualsiasi, come fatto in [MSS02]. Tratteremo ad esempio in alcuni casi operad nella categoria monoidale (\mathbf{Set}, \times) degli insiemi e del loro prodotto cartesiano.

Definizione 1.1.1 (Operad di May). *Un operad (di May) nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è una collezione $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ tale che, per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -modulo destro, insieme a mappe \mathbf{k} -lineari, dette anche composizioni operadiche*

$$\gamma : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) \rightarrow \mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_n), \quad (1.1)$$

per $n \geq 1$ e $k_1, \dots, k_n \geq 0$, e una mappa unitaria $\eta : \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{P}(1)$. Questi dati soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Sia $n \geq 1$ e siano $m_1, \dots, m_n \geq 0$ e $k_1, \dots, k_m \geq 0$, con $m := m_1 + \cdots + m_n$. Siano inoltre $g_s := m_1 + \cdots + m_{s-1}$ e $h_s := k_{g_s+1} + \cdots + k_{g_s+1}$, per $1 \leq s \leq n$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(m_s) \right) \otimes \bigotimes_{r=1}^m \mathcal{P}(k_r) & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & \mathcal{P}(m) \otimes \bigotimes_{r=1}^m \mathcal{P}(k_r) \\ \downarrow \text{mescolamento} & & \downarrow \gamma \\ & & \mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_m) \\ & & \uparrow \gamma \\ \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \left(\mathcal{P}(m_s) \otimes \bigotimes_{q=1}^{m_s} \mathcal{P}(k_{g_s+q}) \right) & \xrightarrow{id \otimes (\bigotimes_{s=1}^n \gamma)} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(h_s) \end{array}$$

commuta, dove con mescolamento intendiamo l'isomorfismo di \mathbf{k} -moduli che agisce nel seguente modo

$$\begin{array}{c}
f \otimes t_{m_1} \otimes t_{m_2} \cdots \otimes t_{m_n} \otimes z_{k_1} \otimes z_{k_2} \cdots \otimes z_{k_m} \\
\downarrow \text{mescolamento} \\
f \otimes t_{m_1} \otimes z_{k_1} \otimes \cdots \otimes z_{k_{m_1}} \otimes t_{m_2} \otimes z_{k_{m_1+1}} \otimes \cdots \otimes z_{k_{m_1+m_2}} \otimes \cdots \otimes t_{m_n} \otimes z_{k_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1}} \otimes \cdots \otimes z_{k_m}
\end{array}$$

scambiando l'ordine delle componenti.

Equivarianza. Sia $n \geq 1$, siano $k_1, \dots, k_n \geq 0$ e $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau_1 \in \Sigma_{k_1}, \dots, \tau_n \in \Sigma_{k_n}$ permutazioni. Sia $\sigma(k_1, \dots, k_n) \in \Sigma_{k_1+\dots+k_n}$ la permutazione che permuta n blocchi $(1, \dots, k_1), \dots, (k_{n-1}+1, \dots, k_n)$ come σ permuta $(1, \dots, n)$ e sia $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n \in \Sigma_{k_1+\dots+k_n}$ la permutazione a blocchi di τ_1, \dots, τ_n . Allora i diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_{\sigma(n)}) \\
\downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
\mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_n) & \xrightarrow{\sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})} & \mathcal{P}(k_{\sigma(1)} + \cdots + k_{\sigma(n)})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) & \xrightarrow{id \otimes \tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_n} & \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) \\
\downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\
\mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_n) & \xrightarrow{\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n} & \mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_n)
\end{array}$$

commutano.

Unitalità. Per ogni $n \geq 1$, i diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(n) \otimes \mathbf{k}^{\otimes n} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}(n) \\
id \otimes \eta^{\otimes n} \downarrow & \nearrow \gamma & \\
\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes n} & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{k} \otimes \mathcal{P}(n) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}(n) \\
\eta \otimes id \downarrow & \nearrow \gamma & \\
\mathcal{P}(1) \otimes \mathcal{P}(n) & &
\end{array}$$

commutano.

Talvolta indicheremo un operad \mathcal{P} specificando anche le composizioni operadiche γ e la mappa unitaria η scrivendo la seguente triade $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$.

Vediamo subito un primo esempio di operad, che chiameremo operad degli endomorfismi di un dato \mathbf{k} -modulo. Nella Sezione 1.3 questo particolare operad ci permetterà di introdurre il concetto di algebra su un operad.

Esempio 1.1.2. Sia V un \mathbf{k} -modulo e, per ogni $n \geq 0$, sia $\mathcal{E}nd_V(n)$ lo spazio delle mappe \mathbf{k} -lineari da $V^{\otimes n}$ a V . L'operad degli endomorfismi del \mathbf{k} -modulo V è definito come $\mathcal{E}nd_V := \{\mathcal{E}nd_V(n)\}_{n \geq 0}$. La composizione operadica di $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$ con $g_1 \in \mathcal{E}nd_V(k_1), \dots, g_n \in \mathcal{E}nd_V(k_n)$ è data dall'usuale composizione di mappe multilineari

$$\gamma(f, g_1, \dots, g_n) := f(g_1 \otimes \dots \otimes g_n) \in \mathcal{E}nd_V(k_1 + \dots + k_n),$$

per ogni $\sigma \in \Sigma_n$, l'azione del gruppo simmetrico è data da

$$(f\sigma)(z_1 \otimes \dots \otimes z_n) := f(\sigma(z_1 \otimes \dots \otimes z_n)) = f(z_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes z_{\sigma^{-1}(n)}),$$

la mappa unitaria $\eta: \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{E}nd_V(1)$ è data da $\eta(1) := id_V: V \rightarrow V$ e poi estesa per linearità. Verifichiamo che valgono gli assiomi di operad. Le notazioni saranno quelle della Definizione 1.1.1.

Associatività. Sia $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$, $t_i \in \mathcal{E}nd_V(m_i)$, $i = 1, \dots, n$, $z_j \in \mathcal{E}nd_V(k_j)$, $j = 1, \dots, m$. Dato quindi l'elemento $((f, t_1, \dots, t_n), z_1, \dots, z_m)$ vediamo che il diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 commuta. Si ha che

$$(\gamma \otimes id)((f, t_1, \dots, t_n), z_1, \dots, z_m) = (f(t_1 \otimes \dots \otimes t_n), z_1, \dots, z_m),$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} (id \otimes \bigotimes_{s=1}^n \gamma)(f, ((t_1, z_1, \dots, z_{m_1}), \dots, (t_n, z_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, z_m))) = \\ = (f, t_1(z_1 \otimes \dots \otimes z_{m_1}), \dots, t_n(z_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} \otimes \dots \otimes z_m)). \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} \gamma(f(t_1 \otimes \dots \otimes t_n), z_1, \dots, z_m) &= f(t_1(z_1 \otimes \dots \otimes z_{m_1}) \otimes \dots \otimes t_n(z_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} \otimes \dots \otimes z_m)) = \\ &= \gamma(f, t_1(z_1 \otimes \dots \otimes z_{m_1}), \dots, t_n(z_{m_1+\dots+m_{n-1}+1} \otimes \dots \otimes z_m)). \end{aligned}$$

Equivarianza. Siano $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$ e $g_1 \in \mathcal{E}nd_V(k_1), \dots, g_n \in \mathcal{E}nd_V(k_n)$. Si ha che

$$(\sigma \otimes \sigma^{-1})(f, g_1, \dots, g_n) = (f\sigma, g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}), \quad \gamma(f, g_1, \dots, g_n) = f(g_1 \otimes \dots \otimes g_n).$$

Inoltre

$$\gamma(f\sigma, g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}) = f\sigma(g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(n)}) = \sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})(f(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)).$$

Perciò il primo diagramma dell'assioma di equivarianza commuta. D'altra parte si ha che

$$(id \otimes \tau_1 \otimes \dots \otimes \tau_n)(f, g_1, \dots, g_n) = (f, g_1\tau_1, \dots, g_n\tau_n), \quad \gamma(f, g_1, \dots, g_n) = f(g_1 \otimes \dots \otimes g_n).$$

Inoltre

$$\gamma(f, g_1\tau_1, \dots, g_n\tau_n) = f(g_1\tau_1 \otimes \dots \otimes g_n\tau_n) = (\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n)(f(g_1 \otimes \dots \otimes g_n)).$$

Quindi il secondo diagramma dell'assioma di equivarianza commuta.

Unitalità. Sia $f \in \mathcal{E}nd_V(n)$. Allora si ha che

$$(id \otimes \eta^{\otimes n})(f, 1, \dots, 1) = (f, id_V, \dots, id_V), \quad \gamma(f, id_V, \dots, id_V) = f(id_V \otimes \dots \otimes id_V) = f.$$

Quindi il primo diagramma di unitalità commuta. Inoltre si ha che

$$(\eta \otimes id)(1, f) = (id_V, f), \quad \gamma(id_V, f) = id_V(f) = f,$$

il tutto si estende per \mathbf{k} -linearità. Quindi il secondo diagramma dell'assioma di unitalità commuta.

Spesso si considerano operad \mathcal{A} tali che $\mathcal{A}(0) = 0$ (dove con 0 indichiamo in questo caso il \mathbf{k} -modulo banale). Indicheremo che un operad è di questo tipo scrivendo semplicemente $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(n)\}_{n \geq 1}$. Vediamone ora un esempio.

Esempio 1.1.3. Sia $\mathcal{A}ss = \{\mathcal{A}ss(n)\}_{n \geq 1}$ l'operad tale che $\mathcal{A}ss(n) := \mathbf{k}[\Sigma_n]$ per ogni $n \geq 1$, con le composizioni operadiche definite come seguono. Siano $id_n \in \Sigma_n$, $id_{k_1} \in \Sigma_{k_1}, \dots, id_{k_n} \in \Sigma_{k_n}$ le identità dei rispettivi gruppi simmetrici. Allora

$$\gamma(id_n, id_{k_1}, \dots, id_{k_n}) := id_{k_1 + \dots + k_n} \in \Sigma_{k_1 + \dots + k_n}.$$

Grazie all'assioma di equivarianza si calcola che, per $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau_1 \in \Sigma_{k_1}, \dots, \tau_n \in \Sigma_{k_n}$, vale

$$\gamma(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) = \sigma(k_1, \dots, k_n)(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n).$$

La mappa unitaria $\eta: \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{A}ss(1)$ è data da $\eta(1) := id_1$ estesa poi per linearità.

Vediamo ora alcuni oggetti classici riguardanti gli operad, dando le definizioni di omomorfismo di operad, di sotto-operad e di ideale di un operad.

Definizione 1.1.4. Siano $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ e $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}(n)\}_{n \geq 0}$ due operad. Un omomorfismo (o morfismo) di operad $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ è una successione $f = \{f(n): \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{Q}(n)\}_{n \geq 0}$ di mappe $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -lineari che commutano con le composizioni operadiche e con la mappa unitaria.

Un operad $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(n)\}_{n \geq 0}$ è un sotto-operad dell'operad \mathcal{P} se $\mathcal{R}(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -sottomodulo di $\mathcal{P}(n)$ per ogni $n \geq 0$ e se tutte le operazioni di struttura di \mathcal{R} sono le restrizioni di quelle di \mathcal{P} .

Infine, un ideale di \mathcal{P} è una collezione $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(n)\}_{n \geq 0}$ di sottospazi Σ_n -invarianti $\mathcal{I}(n) \subseteq \mathcal{P}(n)$ tali che

$$\gamma_{\mathcal{P}}(f, g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{I}(k_1 + \dots + k_n)$$

se $f \in \mathcal{I}(n)$ o $g_i \in \mathcal{I}(k_i)$ per qualche $1 \leq i \leq n$, per ogni $n \geq 1$, con $\gamma_{\mathcal{P}}$ composizioni operadiche dell'operad \mathcal{P} .

Osservazione 1.1.5. Dato un omomorfismo tra operad nella categoria dei \mathbf{k} -moduli, sono definiti componente per componente kernel, immagini, eccetera. Ad esempio, se $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ è un tale omomorfismo, allora $Ker(f) = \{Ker(f)(n)\}_{n \geq 0}$ è la collezione

$$Ker(f)(n) := Ker(f(n): \mathcal{P}(n) \rightarrow \mathcal{Q}(n)), \quad n \geq 0.$$

Dalla definizione di omomorfismo, risulta chiaro che $Ker(f)$ è un ideale di \mathcal{P} .

Anche i quozienti sono definiti componente per componente. Se \mathcal{I} è un ideale di \mathcal{P} , allora la collezione $\mathcal{P}/\mathcal{I} = \{(\mathcal{P}/\mathcal{I})(n)\}_{n \geq 0}$, dove $(\mathcal{P}/\mathcal{I})(n) := \mathcal{P}(n)/\mathcal{I}(n)$ per $n \geq 0$, ha una struttura naturale di operad indotta da quella di \mathcal{P} . La proiezione canonica $\pi_{\mathcal{I}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}/\mathcal{I}$ ha la solita proprietà universale del quoziente. Il kernel di questa proiezione coincide con \mathcal{I} .

Spesso è sufficiente considerare operad senza l'azione del gruppo simmetrico. Possiamo formalizzare questa nozione con la seguente definizione.

Definizione 1.1.6 (Non- Σ operad di May). Un non- Σ operad nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è una collezione $\underline{\mathcal{P}} = \{\underline{\mathcal{P}}(n)\}_{n \geq 0}$ di \mathbf{k} -moduli destri, insieme a composizioni operadiche

$$\underline{\gamma}: \underline{\mathcal{P}}(n) \otimes \underline{\mathcal{P}}(k_1) \otimes \dots \otimes \underline{\mathcal{P}}(k_n) \rightarrow \underline{\mathcal{P}}(k_1 + \dots + k_n),$$

per $n \geq 1$ e $k_1, \dots, k_n \geq 0$, e una mappa unitaria $\underline{\eta}: \mathbf{k} \rightarrow \underline{\mathcal{P}}(1)$ che soddisfano gli assiomi di associatività e unitalità della Definizione 1.1.1.

Possiamo vedere ogni operad come un non- Σ operad semplicemente dimenticandoci delle azioni dei gruppi simmetrici.

Viceversa, a un non- Σ operad $\underline{\mathcal{P}}$ possiamo associare la sua simmetrizzazione, ossia l'operad $\Sigma[\underline{\mathcal{P}}]$ dato da $\Sigma[\underline{\mathcal{P}}] := \underline{\mathcal{P}}(n) \otimes \mathbf{k}[\Sigma_n]$ per ogni $n \geq 0$, con le operazioni di struttura indotte da quelle di $\underline{\mathcal{P}}$ e da

quelle di $\mathbf{k}[\Sigma_n]$. Infatti, definendo l'operad $U\mathcal{A}ss = \{U\mathcal{A}ss(n)\}_{n \geq 0}$ come $U\mathcal{A}ss(0) = \mathbf{k}$ e $U\mathcal{A}ss(n) = \mathcal{A}ss(n)$ per ogni $n \geq 1$ (con ovvia estensione della struttura di operad descritta nell'Esempio 1.1.3), una generica composizione operadica dell'operad $\Sigma[\mathcal{P}]$ è data dal prodotto tensore tra le corrispondenti operazioni operadiche degli operad \mathcal{P} e $U\mathcal{A}ss$. L'azione del gruppo simmetrico risulta ovvia, così come risulta ovvia la mappa unitaria.

Esempio 1.1.7. Sia $Com = \{Com(n)\}_{n \geq 1}$ l'operad tale che $Com(n) := \mathbf{k}$, con l'azione banale di Σ_n , per ogni $n \geq 1$, e con le composizioni operadiche (1.1) date dagli isomorfismi canonici

$$Com(n) \otimes Com(k_1) \otimes \cdots \otimes Com(k_n) \cong \mathbf{k}^{\otimes(n+1)} \xrightarrow{\cong} \mathbf{k} \cong Com(k_1 + \cdots + k_n).$$

Sia $\mathcal{A}ss$ l'operad Com visto come non- Σ operad. Allora la sua simmetrizzazione $\Sigma[\mathcal{A}ss]$ coincide con l'operad $\mathcal{A}ss$ definito nell'Esempio 1.1.3.

Vediamo ora un nuovo approccio alla nozione di operad. Diamo quella che in [LV12] viene chiamata definizione parziale di operad. Per il momento noi la considereremo come la definizione di un nuovo oggetto, che chiameremo operad di Markl.

Definizione 1.1.8 (Operad di Markl). *Un operad di Markl nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è una collezione $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(n)\}_{n \geq 0}$ tale che, per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{S}(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -modulo destro, insieme a mappe \mathbf{k} -lineari, dette anche \circ_i -composizioni o composizioni operadiche parziali*

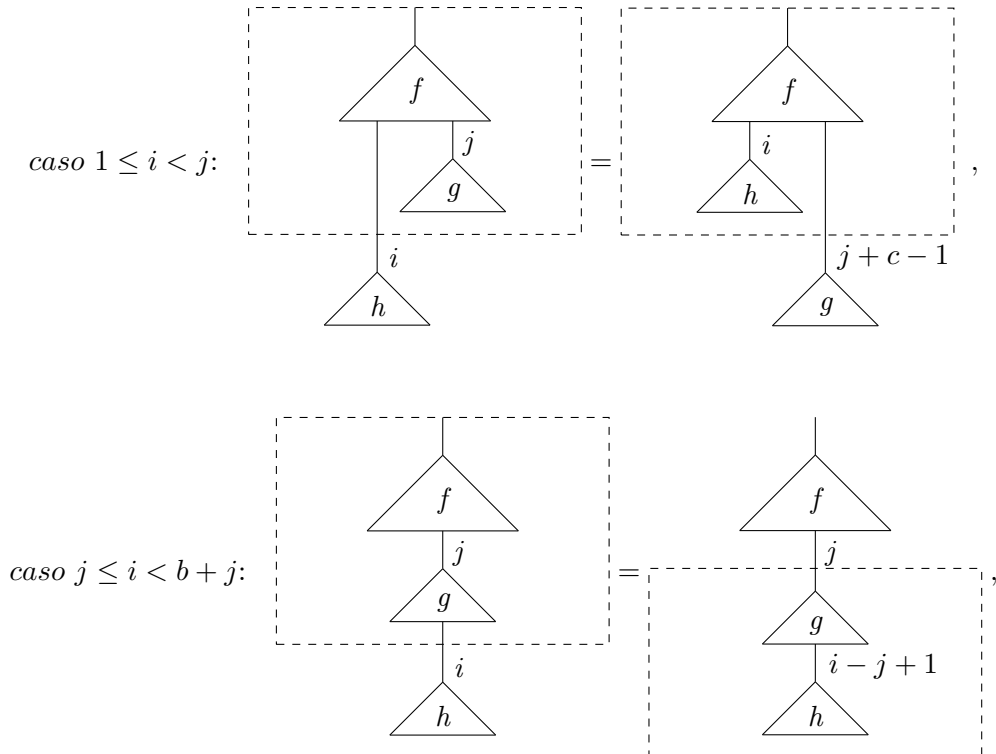
$$\circ_i: \mathcal{S}(m) \otimes \mathcal{S}(n) \rightarrow \mathcal{S}(m+n-1),$$

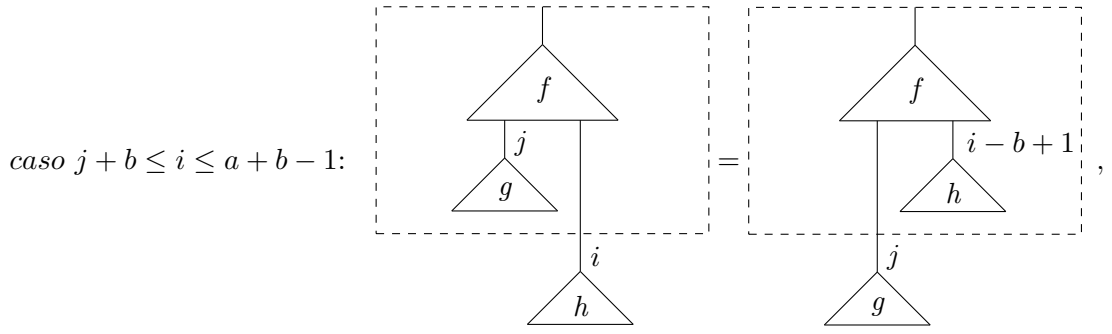
per $1 \leq i \leq m$ e $n \geq 0$. Questi dati soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Per ogni $1 \leq j \leq a$, $b, c \geq 0$, $f \in \mathcal{S}(a)$, $g \in \mathcal{S}(b)$ e $h \in \mathcal{S}(c)$,

$$(f \circ_j g) \circ_i h = \begin{cases} (f \circ_i h) \circ_{j+c-1} g, & \text{per } 1 \leq i < j, \\ f \circ_j (g \circ_{i-j+1} h), & \text{per } j \leq i < b+j, \\ (f \circ_{i-b+1} h) \circ_j g, & \text{per } j+b \leq i \leq a+b-1. \end{cases}$$

Possiamo riassumere questo assioma con i seguenti diagrammi





dove la prima composizione da eseguire è evidenziata con un rettangolo tratteggiato.

Equivarianza. Per ogni $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, $\tau \in \Sigma_m$ e $\sigma \in \Sigma_n$, sia $\tau \circ_i \sigma \in \Sigma_{m+n-1}$ la permutazione data dall'inserire la permutazione σ nell' i -esima posizione di τ . Siano $f \in \mathcal{S}(m)$ e $g \in \mathcal{S}(n)$. Allora vale

$$(f\tau) \circ_i (g\sigma) = (f \circ_{\tau(i)} g)(\tau \circ_i \sigma). \quad (1.2)$$

Unitalità. Esiste $e \in \mathcal{S}(1)$ tale che

$$f \circ_i e = f, \quad e \circ_1 g = g, \quad (1.3)$$

per ogni $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, $f \in \mathcal{S}(m)$ e $g \in \mathcal{S}(n)$.

Come abbiamo fatto per gli operad di May, possiamo dare ora una nozione di omomorfismo tra due operad di Markl.

Definizione 1.1.9. Siano $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(n)\}_{n \geq 0}$ e $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(n)\}_{n \geq 0}$ due operad di Markl. Un omomorfismo (o morfismo) di operad di Markl $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ è una successione $f = \{f(n): \mathcal{S}(n) \rightarrow \mathcal{T}(n)\}_{n \geq 0}$ di mappe $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -lineari che commutano con le \circ_i -composizioni e preservano le unità.

Esempio 1.1.10. Verifichiamo che l'operad $\mathcal{E}nd_V$ degli endomorfismi di un \mathbf{k} -modulo V definito nell'Esempio 1.1.2 soddisfa gli assiomi di operad di Markl con \circ_i -composizioni date da

$$f \circ_i g := f(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m-i)})$$

per ogni $f \in \mathcal{E}nd_V(m)$, $g \in \mathcal{E}nd_V(n)$, $1 \leq i \leq m$ e $n \geq 0$.

Associatività. Sia $h \in \mathcal{E}nd_V(l)$, con $l \geq 0$. Per ogni $1 \leq j \leq m + n - 1$ vale

$$\begin{aligned} (f \circ_i g) \circ_j h &= f(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m-i)}) \circ_j h = \\ &= f(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m-i)})(id_V^{\otimes(j-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(m+n-1-j)}). \end{aligned}$$

Caso $1 \leq j < i$

$$\begin{aligned} (f \circ_j h) \circ_{i+l-1} g &= f(id_V^{\otimes(j-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(m-j)})(id_V^{\otimes(i+l-1-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m-i)}) = \\ &= f(id_V^{\otimes(j-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(i-j-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m-i)}) = (f \circ_i g) \circ_j h. \end{aligned}$$

Caso $i \leq j < n + i$

$$\begin{aligned} f \circ_i (g \circ_{j-i+1} h) &= f \circ_i (g(id_V^{\otimes(j-i+1-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(n-j+i-1)})) = \\ &= f(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g(id_V^{\otimes(j-i+1-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(n-j+i-1)}) \otimes id_V^{\otimes(m-i)}) = (f \circ_i g) \circ_j h. \end{aligned}$$

Caso $i + n \leq j \leq m + n - 1$

$$\begin{aligned} (f \circ_{j-n+1} h) \circ_i g &= f(id_V^{\otimes(j-n+1-1)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(m-j+n-1)})(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(m+l-1-i)}) = \\ &= f(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g \otimes id_V^{\otimes(j-i-n)} \otimes h \otimes id_V^{\otimes(m-j+n-1)}) = (f \circ_i g) \circ_j h. \end{aligned}$$

Equivarianza. Date $\tau \in \Sigma_m$ e $\sigma \in \Sigma_n$, si ha che

$$(f\tau) \circ_i (g\sigma) = f\tau(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes g\sigma \otimes id_V^{\otimes(m-i)}) = f(id_V^{\otimes(\tau(i)-1)} \otimes g\sigma \otimes id_V^{\otimes(m-\tau(i))}) = (f \circ_{\tau(i)} g)(\tau \circ_i \sigma).$$

Unitalità. Basta prendere $e = id_V \in \mathcal{E}nd_V(1)$.

La seguente proposizione dimostra come gli oggetti descritti dalla Definizione 1.1.1 sono gli stessi oggetti descritti dalla Definizione 1.1.8.

Proposizione 1.1.11. *La categoria degli operad di May è isomorfa alla categoria degli operad di Markl.*

Dimostrazione. Dato un operad di Markl $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(n)\}_{n \geq 0}$ come nella Definizione 1.1.8, possiamo definire un operad di May $\mathcal{P} = \text{May}(\mathcal{S})$ tale che per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n) := \mathcal{S}(n)$, con le composizioni operadiche date da

$$\gamma(f, g_1, \dots, g_n) := (\dots((f \circ_n g_n) \circ_{n-1} g_{n-1}) \dots) \circ_1 g_1, \quad (1.4)$$

dove $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_i \in \mathcal{P}(k_i)$, per $1 \leq i \leq n$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$. Il morfismo unitario $\eta : \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{P}(1)$ è definito da $\eta(1) := e$ ed esteso poi per linearità. Verifichiamo che valgono gli assiomi di operad di May.

Associatività. Sia $n \geq 1$, siano m_1, \dots, m_n e k_1, \dots, k_m , con $m := m_1 + \dots + m_n$, interi non negativi, siano $t_s := m_1 + \dots + m_{s-1}$, per $1 \leq s \leq n$. Siano inoltre $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_i \in \mathcal{P}(m_i)$, per $1 \leq i \leq n$, e $h_j \in \mathcal{P}(k_j)$, per $1 \leq j \leq m$. Applicando allora ripetutamente le relazioni dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 si ha che

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma(f, g_1, \dots, g_n), h_1, \dots, h_m) = & (\dots(((\dots((f \circ_n g_n) \circ_{n-1} g_{n-1}) \dots) \circ_1 g_1) \circ_m h_m) \circ_{m-1} h_{m-1}) \dots \\ & \dots) \circ_1 h_1 = (\dots((f \circ_n (\dots((g_n \circ_{m_n} h_m) \circ_{m_{n-1}} h_{m_{n-1}}) \dots \\ & \dots \circ_1 h_{t_n+1})) \circ_{n-1} \dots \circ_1 (\dots((g_1 \circ_{m_1} h_{m_1}) \circ_{m_{1-1}} h_{m_{1-1}}) \dots \\ & \dots \circ_1 h_1)) = \gamma(f, \gamma(g_1, h_1, \dots, h_{m_1}), \dots, \gamma(g_n, h_{t_n+1}, \dots, h_m)), \end{aligned}$$

ossia il diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 commuta. Più in dettaglio, nella composizione precedente h_m entra nella composizione grazie al terzo caso dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 fino ad arrivare a

$$(f \circ_n g_n) \circ_{m-(\sum_{i=1}^{n-1} m_i)+(n-1)} h_m \dots = (f \circ_n g_n) \circ_{m_n+(n-1)} h_m \dots,$$

si applica ora il secondo caso dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.8, ottenendo

$$f \circ_n (g_n \circ_{m_n+(n-1)-n+1} h_m) \dots = f \circ_n (g_n \circ_{m_n} h_m) \dots.$$

Allo stesso modo entrano $h_{m-1}, \dots, h_{t_n+1}$. Entrano, successivamente, $h_{t_n}, \dots, h_{t_{n-1}+1}$ e si fermano all'altezza di g_{n-1} e così via.

Equivarianza. Sia $n \geq 1$, siano k_1, \dots, k_n interi non negativi e $\sigma \in \Sigma_n$, $\tau_1 \in \Sigma_{k_1}, \dots, \tau_n \in \Sigma_{k_n}$ permutazioni. Sia $\sigma(k_1, \dots, k_n) \in \Sigma_{k_1+\dots+k_n}$ la permutazione che permuta n blocchi $(1, \dots, k_1), \dots, (k_{n-1}+1, \dots, k_n)$ come σ permuta $(1, \dots, n)$ e sia $\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n \in \Sigma_{k_1+\dots+k_n}$ la permutazione a blocchi di τ_1, \dots, τ_n . Siano inoltre $f \in \mathcal{P}(n)$, $g_1 \in \mathcal{P}(k_1), \dots, g_n \in \mathcal{P}(k_n)$. Indichiamo con id_j l'identità del gruppo Σ_j . Da (1.2) e dall'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 segue che

$$\begin{aligned} \gamma(f\sigma, g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}) &= (\dots((f\sigma \circ_n g_{\sigma(n)}) \circ_{n-1} g_{\sigma(n-1)}) \dots) \circ_1 g_{\sigma(1)} = \\ &= (\dots((f \circ_{\sigma(n)} g_{\sigma(n)}) (\sigma \circ_n id_{k_{\sigma(n)}}) \circ_{n-1} g_{\sigma(n-1)}) \dots) \circ_1 g_{\sigma(1)} = \dots = \\ &= ((\dots((f \circ_{\sigma(n)} g_{\sigma(n)}) \circ_{\sigma(n-1)+\zeta(n-1)} g_{\sigma(n-1)}) \dots) \circ_{\sigma(1)+\zeta(1)} g_{\sigma(1)}) (\sigma \circ_n id_{k_{\sigma(n)}} \circ_{n-1} \dots \\ &\dots \circ_1 id_{k_{\sigma(1)}}) = \gamma(f, g_1, \dots, g_n)(\sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})), \end{aligned}$$

ossia il primo diagramma dell'assioma di equivarianza della Definizione 1.1.1 commuta. Qui abbiamo indicato con $\zeta : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, k_1 + \dots + k_n\}$ la funzione tale che

$$\zeta(x) = \sum_{\substack{i=x+1, \dots, n \\ \sigma(i) < \sigma(x)}} k_{\sigma(i)} - 1.$$

Più in dettaglio, sia j tale che $\sigma(j) = n$. Se $\sigma = id_n \in \Sigma_n$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo per semplicità di notazioni che $j \neq n$, altrimenti si proceda allo stesso modo con il più grande j tale che $\sigma(j) \neq j$. Si ha dunque che $\zeta(j) = \sum_{i=j+1, \dots, n} k_{\sigma(i)} - 1$. Applicando il terzo caso dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 si ha

$$\begin{aligned} \cdots \circ_{\sigma(j+1)+\zeta(j+1)} g_{\sigma(j+1)} \circ_{\sigma(j)+\zeta(j)} g_{\sigma(j)} \cdots &= \cdots \circ_{\sigma(j+1)+\zeta(j+1)} g_{\sigma(j+1)} \circ_{n+\sum_{i=j+1}^n k_{\sigma(i)}-1} g_{\sigma(j)} \cdots = \\ &= \cdots \circ_{n+(\sum_{i=j+1}^n k_{\sigma(i)}-1)-k_{\sigma(j+1)}+1} g_{\sigma(j)} \circ_{\sigma(j+1)+\zeta(j+1)} g_{\sigma(j+1)} \cdots = \\ &= \cdots \circ_{n+(\sum_{i=j+2}^n k_{\sigma(i)}-1)} g_{\sigma(j)} \circ_{\sigma(j+1)+\zeta(j+1)} g_{\sigma(j+1)} \cdots \end{aligned}$$

È chiaro allora che, reiterando l'applicazione del terzo caso dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.8, $g_{\sigma(j)}$ entri nella composizione fino a

$$\begin{aligned} (f \circ_{\sigma(n)} g_{\sigma(n)}) \circ_{n+k_{\sigma(n)}-1} g_{\sigma(j)} \cdots &= (f \circ_{n+k_{\sigma(n)}-1-k_{\sigma(n)}+1} g_{\sigma(j)}) \circ_{\sigma(n)} g_{\sigma(n)} \cdots = \\ &= (f \circ_n g_n) \circ_{\sigma(n)} g_{\sigma(n)} \cdots \end{aligned}$$

Si ripete la procedura per $\sigma(l) = n-1$, $\sigma(k) = n-2$ e così via. Sempre da (1.2) segue che

$$\begin{aligned} \gamma(f, g_1 \tau_1, \dots, g_n \tau_n) &= (\cdots ((f \circ_n g_n \tau_n) \circ_{n-1} g_{n-1} \tau_{n-1}) \cdots) \circ_1 g_1 \tau_1 = \\ &= (\cdots ((f \circ_n g_n)(id_n \circ_n \tau_n) \circ_{n-1} g_{n-1} \tau_{n-1}) \cdots) \circ_1 g_1 \tau_1 = \cdots = \\ &= ((\cdots ((f \circ_n g_n) \circ_{n-1} g_{n-1}) \cdots) \circ_1 g_1)(id_n \circ_n \tau_n \circ_{n-1} \tau_{n-1} \circ_{n-2} \cdots \circ_1 \tau_1) = \\ &= \gamma(f, g_1, \dots, g_n)(\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n), \end{aligned}$$

ossia il secondo diagramma dell'assioma di equivarianza della Definizione 1.1.1 commuta.

Unitalità. Per ogni $m \geq 1$, $n \geq 0$, $f \in \mathcal{P}(m)$ e $g \in \mathcal{P}(n)$, da (1.3) segue che $\gamma(\eta(1), g) = \gamma(e, g) = e \circ_1 g = g$ e che $\gamma(f, \eta(1), \dots, \eta(1)) = \gamma(f, e, \dots, e) = (\cdots ((f \circ_n e) \circ_{n-1} e) \cdots) \circ_1 e = f$. Il tutto si estende poi per linearità. Quindi i due diagrammi dell'assioma di unitalità della Definizione 1.1.1 commutano.

Viceversa, dato un operad di May \mathcal{P} , possiamo definire un operad di Markl $\mathcal{S} = \text{Mar}(\mathcal{P})$ tale che per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{S}(n) := \mathcal{P}(n)$, con le \circ_i -composizioni date da

$$f \circ_i g := \gamma(f, \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, g, \underbrace{e, \dots, e}_{m-i}), \quad (1.5)$$

dove $f \in \mathcal{S}(m)$, $g \in \mathcal{S}(n)$, $1 \leq i \leq m$ e $n \geq 0$, con $e := \eta(1) \in \mathcal{S}(1)$. Verifichiamo che valgono gli assiomi di operad di Markl.

Associatività. Per ogni $1 \leq j \leq a$, $b, c \geq 0$, $1 \leq i \leq a+b-1$, $f \in \mathcal{S}(a)$, $g \in \mathcal{S}(b)$ e $h \in \mathcal{S}(c)$, si ha che

$$(f \circ_j g) \circ_i h = \gamma(\gamma(f, \underbrace{e, \dots, e}_{j-1}, g, \underbrace{e, \dots, e}_{a-j}), \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, h, \underbrace{e, \dots, e}_{a+b-1-i}).$$

Sfruttando il diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 e ricordando le proprietà dell'unità e , si ottengono i seguenti risultati.

Caso $1 \leq i < j$:

$$\begin{aligned}
(f \circ_i h) \circ_{j+c-1} g &= \gamma(\underbrace{\gamma(f, e, \dots, e, h, e, \dots, e)}_{i-1}, \underbrace{e, \dots, e}_{a-i}, \underbrace{g, e, \dots, e}_{j+c-1-1}, \underbrace{e}_{a-j}) = \\
&= \gamma(f, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{i-1}, \underbrace{\gamma(h, e, \dots, e)}_c, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{j-i}, \underbrace{\gamma(e, g), \gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{a-j}) = \\
&= \gamma(f, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{i-1}, \underbrace{\gamma(e, h), \gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{j-i}, \underbrace{\gamma(g, e, \dots, e)}_b, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{a-j}) = \\
&= \gamma(\underbrace{\gamma(f, e, \dots, e, g, e, \dots, e)}_{j-1}, \underbrace{e, \dots, e}_{a-j}, \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, \underbrace{h, e, \dots, e}_{a+b-1-i}) = (f \circ_j g) \circ_i h.
\end{aligned}$$

Caso $j \leq i < b + j$:

$$\begin{aligned}
f \circ_j (g \circ_{i-j+1} h) &= \gamma(\underbrace{f, e, \dots, e}_{j-1}, \underbrace{\gamma(g, e, \dots, e, h, e, \dots, e)}_{i-j}, \underbrace{e, \dots, e}_{b-i+j-1}, \underbrace{e}_{a-j}) = \\
&= \gamma(f, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{j-1}, \underbrace{\gamma(g, e, \dots, e, h, e, \dots, e)}_{i-j}, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{b-i+j-1}, \underbrace{\gamma(e, e)}_{a-j}) = \\
&= \gamma(\underbrace{\gamma(f, e, \dots, e, g, e, \dots, e)}_{j-1}, \underbrace{e, \dots, e}_{a-j}, \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, \underbrace{h, e, \dots, e}_{a+b-1-i}) = (f \circ_j g) \circ_i h.
\end{aligned}$$

Caso $j + b \leq i \leq a + b - 1$:

$$\begin{aligned}
(f \circ_{i-b+1} h) \circ_j g &= \gamma(\underbrace{\gamma(f, e, \dots, e, h, e, \dots, e)}_{i-b}, \underbrace{e, \dots, e}_{a-i+b-1}, \underbrace{g, e, \dots, e}_{j-1}, \underbrace{e}_{a+c-j-1}) = \\
&= \gamma(f, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{j-1}, \underbrace{\gamma(e, g), \gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{i-b-j}, \underbrace{\gamma(h, e, \dots, e)}_c, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{a+b-1-i}) = \\
&= \gamma(f, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{j-1}, \underbrace{\gamma(g, e, \dots, e)}_b, \underbrace{\gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{i-b-j}, \underbrace{\gamma(e, h), \gamma(e, e), \dots, \gamma(e, e)}_{a+b-1-i}) = \\
&= \gamma(\underbrace{\gamma(f, e, \dots, e, g, e, \dots, e)}_{j-1}, \underbrace{e, \dots, e}_{a-j}, \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, \underbrace{h, e, \dots, e}_{a+b-1-i}) = (f \circ_j g) \circ_i h.
\end{aligned}$$

Equivarianza. Per ogni $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, $\tau \in \Sigma_m$ e $\sigma \in \Sigma_n$, dalla commutatività dei due diagrammi dell'assioma di equivarianza della Definizione 1.1.1, segue che

$$(f\tau) \circ_i (g\sigma) = \gamma(\underbrace{f\tau, e, \dots, e}_{i-1}, \underbrace{g\sigma, e, \dots, e}_{m-i}) = (f \circ_{\tau(i)} g)(\tau \circ_i \sigma).$$

Unitalità. Per ogni $1 \leq i \leq m$, $f \in \mathcal{S}(m)$, per la commutatività del primo diagramma dell'assioma di unitalità della Definizione 1.1.1, si ha che $f \circ_i e = \gamma(f, e, \dots, e) = \gamma(f, \eta(1), \dots, \eta(1)) = f$. Per la commutatività del secondo diagramma dell'assioma di unitalità della Definizione 1.1.1, si ha che $e \circ_1 g = \gamma(e, g) = \gamma(\eta(1), g) = g$ per ogni $n \geq 0$, $g \in \mathcal{S}(n)$. Vale quindi (1.3).

May(-) e Mar(-) si estendono (in modo ovvio, visto che sono definiti su oggetti che sono sostanzialmente gli stessi a meno delle relazioni date dalle composizioni, che abbiamo appena dimostrato essere equivalenti) a funtori che sono inoltre isomorfismi uno inverso dell'altro tra la categoria degli operad di May e la categoria degli operad di Markl. \square

Chiameremo dunque operad un oggetto descritto equivalentemente dalla Definizione 1.1.1 o dalla Definizione 1.1.8 e chiameremo omomorfismo (o morfismo) di operad un oggetto descritto equivalentemente dalla Definizione 1.1.4 o dalla Definizione 1.1.9.

1.2 Operad non unitali

Vediamo ora una nozione di operad che non fa uso dell'assioma di unitalità. Diamo una definizione sia per gli operad di May che per quelli di Markl, in quanto dimostreremo in seguito che esse descrivono oggetti diversi.

Definizione 1.2.1. *Un operad di May non unitale nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è una collezione $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ tale che, per ogni $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -modulo destro, insieme a composizioni operadiche*

$$\gamma : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(k_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(k_n) \rightarrow \mathcal{P}(k_1 + \cdots + k_n),$$

per $n \geq 1$ e $k_1, \dots, k_n \geq 0$, che soddisfano gli assiomi di associatività e equivarianza della Definizione 1.1.1.

Definizione 1.2.2. *Un operad di Markl non unitale nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è una collezione $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(n)\}_{n \geq 0}$ di $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -moduli destri, insieme a mappe \mathbf{k} -lineari, dette anche \circ_i -composizioni o composizioni operadiche parziali*

$$\circ_i : \mathcal{S}(m) \otimes \mathcal{S}(n) \rightarrow \mathcal{S}(m + n - 1),$$

per $1 \leq i \leq m$ e $n \geq 0$, che soddisfano gli assiomi di associatività e equivarianza della Definizione 1.1.8.

Risulta ora chiaro come definire morfismi di operad di May non unitali e morfismi di operad di Markl non unitali. Mentre abbiamo visto come possiamo non distinguere tra le nozioni di operad di May e operad di Markl, nel caso non unitale queste due strutture sono radicalmente differenti.

Proposizione 1.2.3. *La categoria degli operad di Markl non unitali è una sottocategoria propria non piena della categoria degli operad di May non unitali.*

Dimostrazione. La (1.4) continua a definire un funtore, che chiameremo $\psi\text{May}(-)$, che risulta essere un'inclusione della categoria degli operad di Markl non unitali nella categoria degli operad di May non unitali. Per vedere che l'inclusione è stretta, è sufficiente considerare l'Esempio 1.2.4, mentre l'Esempio 1.2.5 mostra come la sottocategoria degli operad di Markl non unitali non è piena. \square

Esempio 1.2.4. Vediamo un esempio di un operad di May non unitale $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}(n)\}_{n \geq 0}$ che non sia della forma $\psi\text{May}(\mathcal{S})$ per qualche operad di Markl non unitale \mathcal{S} . Sia

$$\mathcal{V}(n) := \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{per } n = 2, 4, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'unica composizione operadica non banale è $\gamma : \mathcal{V}(2) \otimes \mathcal{V}(2) \otimes \mathcal{V}(2) \rightarrow \mathcal{V}(4)$, data dall'isomorfismo canonico

$$\mathcal{V}(2) \otimes \mathcal{V}(2) \otimes \mathcal{V}(2) \cong \mathbf{k}^{\otimes 3} \xrightarrow{\cong} \mathbf{k} \cong \mathcal{V}(4).$$

Se fosse $\mathcal{V} = \psi\text{May}(\mathcal{S})$ per qualche operad di Markl non unitale \mathcal{S} , allora, per (1.4), si avrebbe che

$$\gamma(f, g_1, g_2) = (f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1$$

per ogni $f, g_1, g_2 \in \mathcal{V}(2)$. Ma siccome $(f \circ_2 g_2) \in \mathcal{V}(3) = 0$, allora dovrebbe essere $\gamma = 0$, assurdo.

Esempio 1.2.5. Sia $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ l'operad di Markl non unitale (e quindi anche operad di May non unitale) tale che $\mathcal{P}(2) = \mathcal{P}(3) = \mathcal{P}(4) = \mathbf{k}$ e $\mathcal{P}(m) = 0$ per ogni $m < 2$ e $m > 4$. Le uniche \circ_i -composizioni non banali sono dunque

$$\begin{aligned} \circ_1 : \mathcal{P}(2) \otimes \mathcal{P}(2) &\rightarrow \mathcal{P}(3), & \circ_2 : \mathcal{P}(2) \otimes \mathcal{P}(2) &\rightarrow \mathcal{P}(3), \\ \circ_1 : \mathcal{P}(2) \otimes \mathcal{P}(3) &\rightarrow \mathcal{P}(4), & \circ_2 : \mathcal{P}(2) \otimes \mathcal{P}(3) &\rightarrow \mathcal{P}(4), \\ \circ_1 : \mathcal{P}(3) \otimes \mathcal{P}(2) &\rightarrow \mathcal{P}(4), & \circ_2 : \mathcal{P}(3) \otimes \mathcal{P}(2) &\rightarrow \mathcal{P}(4), & \circ_3 : \mathcal{P}(3) \otimes \mathcal{P}(2) &\rightarrow \mathcal{P}(4), \end{aligned}$$

tutte definite come gli isomorfismi canonici analoghi a quello dell'Esempio 1.2.4. Visto invece come operad di May non unitale, l'unica composizione operadica non banale è solamente quella già descritta nell'Esempio 1.2.4. Sia ora \mathcal{V} l'operad dell'Esempio 1.2.4. Possiamo definire un morfismo di operad di May non unitali $G : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ che agisce come l'identità su $\mathcal{P}(2)$ e $\mathcal{P}(4)$ e come il morfismo nullo sulle altre componenti. Quello appena descritto è un morfismo di operad di May non unitali perché rispetta l'azione (banale) del gruppo simmetrico e le composizioni operadiche (l'unica non banale infatti rimane invariata). Componiamo infine il morfismo G con l'inclusione $I : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{P}$ dell'operad \mathcal{V} nell'operad \mathcal{P} , che è ovviamente un morfismo di operad di May non unitali. Si ha che $F = I \circ G : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ è un morfismo di operad di May non unitali. Pur essendo \mathcal{P} un operad di Markl non unitale, F non è un morfismo di operad di Markl non unitali. Siano infatti $f, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(2)$ tali che $(f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1 \neq 0$ (ad esempio $f = g_1 = g_2 = 1 \in \mathbf{k}$). Siccome $(f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1 \in \mathcal{P}(4)$, allora $F((f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1) = (f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1 \neq 0$. Se F fosse un morfismo di operad di Markl non unitali allora $F((f \circ_2 g_2) \circ_1 g_1) = F(f \circ_2 g_2) \circ_1 (F(g_1)) = 0$ perché $F(f \circ_2 g_2) \in F(\mathcal{P}(3)) = 0$, assurdo.

Vedremo come la vera versione non unitale di operad sia quella di Markl e non quella di May. Per fare ciò, consideriamo $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(n)\}_{n \geq 1}$ l'operad unitale banale, con $\mathcal{K}(1) := \mathbf{k}$ e $\mathcal{K}(n) = 0$ per ogni $n \neq 1$.

Definizione 1.2.6. *Una aumentazione di un operad \mathcal{P} nella categoria dei \mathbf{k} -moduli è un omomorfismo di operad $\epsilon : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$. Gli operad che possiedono una aumentazione sono detti operad aumentati. Il kernel*

$$\overline{\mathcal{P}} := \text{Ker}(\epsilon : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K})$$

è detto ideale dell'aumentazione.

Osservazione 1.2.7. Possiamo rendere la classe degli operad aumentati una categoria definendo i morfismi di operad aumentati come morfismi di operad che rispettano le aumentazioni, come fatto nella Definizione 1.1.4 di [Chi10].

Adesso che abbiamo a disposizione la categoria degli operad aumentati, vediamo come possiamo metterla in relazione con gli operad di Markl non unitali.

Proposizione 1.2.8. *La corrispondenza $\mathcal{P} \mapsto \overline{\mathcal{P}}$ è un isomorfismo tra la categoria degli operad aumentati e la categoria degli operad di Markl non unitali.*

Dimostrazione. Le \circ_i -composizioni di \mathcal{P} si restringono chiaramente a quelle di $\overline{\mathcal{P}}$, che è quindi un operad di Markl non unitale.

Viceversa, vediamo come costruire un inverso $\mathcal{S} \mapsto \tilde{\mathcal{S}}$ della corrispondenza $\mathcal{P} \mapsto \overline{\mathcal{P}}$. Per un operad di Markl non unitale \mathcal{S} , sia

$$\tilde{\mathcal{S}}(n) := \begin{cases} \mathcal{S}(n), & \text{per } n \neq 1, \\ \mathcal{S}(1) \oplus \mathbf{k}, & \text{per } n = 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

$\tilde{\mathcal{S}}$ è un operad di Markl definendo $e := 0 \oplus 1_{\mathbf{k}} \in \mathcal{S}(1) \oplus \mathbf{k} = \tilde{\mathcal{S}}(1)$. Le \circ_i -composizioni di $\tilde{\mathcal{S}}$ sono univocamente determinate dal fatto che devono estendere quelle di \mathcal{S} e che devono soddisfare l'assioma di unitalità di Markl. Inoltre è chiaro che le due corrispondenze sono una l'inversa dell'altra. \square

Se \mathcal{S} fosse stato un operad di May non unitale, la costruzione di $\tilde{\mathcal{S}}$ come è stata fatta nella Proposizione 1.2.8 non avrebbe avuto senso, perché non avremmo saputo come definire

$$\gamma(f, \underbrace{e, \dots, e}_{i-1}, g, \underbrace{e, \dots, e}_{m-i})$$

per $f \in \mathcal{S}(m)$, $g \in \mathcal{S}(n)$, $m \geq 2$, $n \geq 0$, $1 \leq i \leq m$.

Nella prossima proposizione, indicheremo con $\mathbf{0}\mathbf{oper}$ la categoria degli operad \mathbf{k} -lineari (ossia nella categoria dei \mathbf{k} -moduli) e con $\psi\mathbf{0}\mathbf{oper}$ la categoria degli operad \mathbf{k} -lineari di Markl non unitali. Sia

inoltre $\psi\text{Mar} : \mathbf{Oper} \rightarrow \psi\mathbf{Oper}$ il funtore dimenticante dagli operad (unitali) agli operad di Markl non unitali. Abbiamo quindi le seguenti inclusioni

$$\mathbf{Oper} \xrightarrow{\psi\text{Mar}} \psi\mathbf{Oper} \xrightarrow{\psi\text{May}} \text{operad } \mathbf{k}\text{-lineari di May non unitali}.$$

Proposizione 1.2.9. *Siano \mathcal{P} un operad aumentato e \mathcal{Q} un operad arbitrario nella categoria dei \mathbf{k} -moduli. Allora esiste un isomorfismo naturale*

$$\text{Mor}_{\mathbf{Oper}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \cong \text{Mor}_{\psi\mathbf{Oper}}(\overline{\mathcal{P}}, \psi\text{Mar}(\mathcal{Q})). \quad (1.7)$$

Dimostrazione. È ovvio che ogni morfismo di operad $\vartheta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ si restringe a un morfismo di operad di Markl non unitali $\overline{\vartheta} : \overline{\mathcal{P}} \rightarrow \psi\text{Mar}(\mathcal{Q})$.

Viceversa, sia $\overline{\rho} : \overline{\mathcal{P}} \rightarrow \psi\text{Mar}(\mathcal{Q})$ un morfismo di operad di Markl non unitali e sia $f \in \mathcal{P}(1) \setminus \overline{\mathcal{P}}(1)$. Si ha che $\epsilon_1 := \epsilon(1) : \mathcal{P}(1) \rightarrow \mathcal{K}(1) = \mathbf{k}$ e $\epsilon_1(f) \neq 0$. Allora, siccome ϵ è un omomorfismo (e preserva le unità), si ha che

$$f - e_{\mathcal{P}}\epsilon_1(f) \in \text{Ker}(\epsilon_1),$$

dove $e_{\mathcal{P}}$ è l'unità dell'operad \mathcal{P} , quindi è ben definita $\overline{\rho}_1(f - e_{\mathcal{P}}\epsilon_1(f))$. Sarà dunque sufficiente definire $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ nel seguente modo

$$\rho_1(g) := \begin{cases} \overline{\rho}_1(g - e_{\mathcal{P}}\epsilon_1(g)) + e_{\mathcal{Q}}\epsilon_1(g), & \text{per } g \notin \text{Ker}(\epsilon_1), \\ \overline{\rho}_1(g), & \text{per } g \in \text{Ker}(\epsilon_1), \end{cases}$$

per quanto riguarda ρ_1 , dove $e_{\mathcal{Q}}$ è l'unità dell'operad \mathcal{Q} ; per ogni $n \neq 1$ ρ_n coincide invece con $\overline{\rho}_n$. \square

Combinando gli isomorfismi della Proposizione 1.2.8 e della Proposizione 1.2.9, otteniamo

$$\text{Mor}_{\mathbf{Oper}}(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{Q}) \cong \text{Mor}_{\psi\mathbf{Oper}}(\mathcal{S}, \psi\text{Mar}(\mathcal{Q})) \quad (1.8)$$

per ogni operad di Markl non unitale \mathcal{S} e per ogni operad \mathcal{Q} . L'isomorfismo (1.8) implica che i funtori $\tilde{\cdot} : \psi\mathbf{Oper} \rightarrow \mathbf{Oper}$ e $\psi\text{Mar} : \mathbf{Oper} \rightarrow \psi\mathbf{Oper}$ sono aggiunti. Useremo questa aggiunzione per costruire gli operad liberi nella Sezione 2.1. Da ora in poi indicheremo con operad non unitale un operad di Markl non unitale, se non diversamente specificato.

1.3 Algebre su un operad

Vediamo ora la nozione di rappresentazione di un operad, detta anche algebra su un operad.

Definizione 1.3.1. *Siano V un \mathbf{k} -modulo e End_V l'operad degli endomorfismi di V definito nell'Esempio 1.1.2. Un'algebra sull'operad \mathcal{P} , che chiameremo anche \mathcal{P} -algebra, è un omomorfismo di operad $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \text{End}_V$.*

La seguente proposizione mostra una definizione equivalente per le algebre sugli operad, esplicitando le relazioni che rispettano gli omomorfismi di operad. In particolare, alla fine di questa sezione vedremo come estendere questa definizione equivalente in modo tale da poter definire il concetto di categoria su un operad.

Proposizione 1.3.2. *Sia \mathcal{P} un operad. Dare una \mathcal{P} -algebra è equivalente a dare un \mathbf{k} -modulo V e delle mappe*

$$\alpha : \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} \rightarrow V, \quad n \geq 0, \quad (1.9)$$

che soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Per ogni $n \geq 1$ e $k_1, \dots, k_n \geq 0$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(k_s) \right) \otimes \bigotimes_{s=1}^n V^{\otimes k_s} & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & \mathcal{P}(k_1 + \dots + k_n) \otimes V^{\otimes(k_1 + \dots + k_n)} \\
\downarrow \text{mescolamento} & & \downarrow \alpha \\
\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \left(\mathcal{P}(k_s) \otimes V^{\otimes k_s} \right) & \xrightarrow{id \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^n \alpha \right)} & \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} \\
& & \uparrow \alpha \\
& & V
\end{array}$$

commuta, con mescolamento analogo a quello della Definizione 1.1.1.

Equivarianza. Per ogni $n \geq 1$ e $\sigma \in \Sigma_n$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} \\
& \searrow \alpha & \downarrow \alpha \\
& & V
\end{array}$$

commuta.

Unitalità. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{k} \otimes V & \xrightarrow{\cong} & V \\
\downarrow \eta \otimes id & \nearrow \alpha & \\
\mathcal{P}(1) \otimes V & &
\end{array}$$

commuta.

Dimostrazione. Dato l'omomorfismo ρ come nella Definizione 1.3.1, le mappe α sono definite come

$$\alpha(f, v) := \rho_n(f)(v),$$

per ogni $f \in \mathcal{P}(n)$ e $v \in V^{\otimes n}$.

Viceversa, data una collezione di mappe α , possiamo definire $\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}nd_V$ come $\rho_n(f) = \tilde{f} \in \mathcal{E}nd_V(n)$, tale che

$$\tilde{f}(v) = \alpha(f, v),$$

per ogni $f \in \mathcal{P}(n)$ e $v \in V^{\otimes n}$. □

Dato un operad \mathcal{P} , indicheremo una \mathcal{P} -algebra definita da un \mathbf{k} -modulo V e da mappe ρ o α semplicemente con V , esplicitando quando necessario le mappe di struttura.

Definizione 1.3.3. Un morfismo $f : V \rightarrow W$ di \mathcal{P} -algebre è un morfismo in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ tale che, per ogni $n \geq 0$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} & \xrightarrow{id \otimes (\bigotimes_{i=1}^n f)} & \mathcal{P}(n) \otimes W^{\otimes n} \\ \alpha^V \downarrow & & \downarrow \alpha^W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

commuta, dove α^V e α^W sono rispettivamente le mappe (1.9) per il modulo V e per il modulo W .

Osservazione 1.3.4. La Proposizione 1.3.2 può essere riformulata seguendo la Definizione 1.1.8 di operad, ossia in termini di \circ_i -composizioni. In questo caso, le mappe α descritte in (1.9) devono soddisfare i seguenti assiomi.

Associatività. Per ogni $f \in \mathcal{P}(m)$, $g \in \mathcal{P}(n)$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{m+n-1} \in V^{\otimes(m+n-1)}$, si ha che

$$\alpha(f \circ_i g, v) = \alpha(f, v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes \alpha(g, v_i \otimes \cdots \otimes v_{i+n-1}) \otimes v_{i+n} \otimes \cdots \otimes v_{m+n-1}).$$

Equivarianza. Invariata rispetto a quella formulata con le composizioni operadiche.

Unitalità. Per ogni $v \in V$ si ha che $\alpha(e, v) = v$, con e l'unità dell'operad.

Vediamo ora alcuni esempi di algebre su operad legate alle classiche algebre associative.

Esempio 1.3.5. Verifichiamo che le algebre sull'operad Com definito nell'Esempio 1.1.7 sono le usuali algebre associative commutative. In questo esempio indicheremo con v con vari indici un generico elemento di V . La mappa di struttura (1.9) determina, per ogni $n \geq 1$, una mappa lineare $\mu_n : V^{\otimes n} \rightarrow V$ data da

$$\mu_n(v_1, \dots, v_n) := \alpha(1_n, v_1, \dots, v_n),$$

dove denotiamo con 1_n l'unità $1_n \in \mathbf{k} = Com(n)$. L'assioma di associatività della Proposizione 1.3.2 afferma che

$$\mu_n(\mu_{k_1}(v_1, \dots, v_{k_1}), \dots, \mu_{k_n}(v_{k_1+\dots+k_{n-1}+1}, \dots, v_{k_1+\dots+k_n})) = \mu_{k_1+\dots+k_n}(v_1, \dots, v_{k_1+\dots+k_n}), \quad (1.10)$$

per ogni $n, k_1, \dots, k_n \geq 1$. L'assioma di equivarianza della Proposizione 1.3.2 garantisce che ogni μ_n è completamente simmetrica, ossia che, per ogni $\sigma \in \Sigma_n$, si ha

$$\mu_n(v_1, \dots, v_n) = \mu_n(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}), \quad (1.11)$$

e l'unitalità implica che μ_1 è l'identità di V

$$\mu_1(v) = v. \quad (1.12)$$

Possiamo quindi definire, grazie a questa struttura, una moltiplicazione associativa e commutativa su V . Infatti, la mappa bilineare $\cdot := \mu_2 : V \otimes V \rightarrow V$ è associativa

$$\begin{aligned} (v_1 \cdot v_2) \cdot v_3 &= \mu_2(\mu_2(v_1, v_2), v_3) = \mu_2(\mu_2(v_1, v_2), \mu_1(v_3)) = \mu_3(v_1, v_2, v_3), \\ v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3) &= \mu_2(v_1, \mu_2(v_2, v_3)) = \mu_2(\mu_1(v_1), \mu_2(v_2, v_3)) = \mu_3(v_1, v_2, v_3), \end{aligned}$$

da cui

$$(v_1 \cdot v_2) \cdot v_3 = v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3). \quad (1.13)$$

Tale mappa è anche commutativa. Sia infatti $\sigma = (1, 2) \in \Sigma_2$, allora

$$v_1 \cdot v_2 = \mu_2(v_1, v_2) = \mu_2(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) = \mu_2(v_2, v_1) = v_2 \cdot v_1. \quad (1.14)$$

Viceversa, data una mappa bilineare associativa e commutativa $\cdot : V \otimes V \rightarrow V$ che dà a V una struttura di algebra associativa commutativa, definendo $\mu_1(v) := v$ e

$$\mu_n(v_1, \dots, v_n) := (\dots (v_1 \cdot v_2) \dots v_{n-1}) \cdot v_n,$$

per ogni $n \geq 2$, si hanno mappe multilinearari $\{\mu_n : V^{\otimes n} \rightarrow V\}$ che soddisfano (1.10)-(1.11)-(1.12), e che quindi possono essere estese per \mathbf{k} -linearità a mappe di struttura α , che definiscono una *Com*-algebra. Allo stesso modo, si verifica che le algebre sull'operad $\mathcal{A}ss$ definito nell'Esempio 1.1.3 sono le classiche algebre associative. La trattazione è identica a quella fatta per *Com*, se non per il fatto che ora l'equivarianza non garantisce più la commutatività, in quanto Σ_n non agisce più banalmente su $\mathcal{A}ss(n)$ come avveniva per *Com*(n).

Si potrebbe dire che (1.10)-(1.11)-(1.12) danno una definizione non distorta di algebra associativa commutativa, mentre (1.13)-(1.14) danno una definizione dello stesso oggetto distorta verso le operazioni bilineari. Gli operad ci permettono dunque di definire le algebre in maniera non distorta.

Esempio 1.3.6. Sia $UCom$ l'operad tale che $UCom(n) = Com(n+1)$ per ogni $n \geq 0$. La trattazione fatta per *Com* continua a valere, perciò le algebre su $UCom$ sono algebre associative commutative. Vediamo ora che sono anche unitarie. Basta dimostrare che esiste $v_0 \in V$ tale che, con le notazioni precedenti, $\mu_2(v_0, v) = v$ per ogni $v \in V$. Indichiamo ora con $1_2 \in UCom(2) = \mathbf{k}$, $1_1 \in UCom(1) = \mathbf{k}$, $1_0 \in UCom(0) = \mathbf{k}$, $1 \in V^{\otimes 0} = \mathbf{k}$ le rispettive unità. Sia ora $v \in V$. Preso l'elemento $1_2 \otimes (1_1 \otimes 1_0) \otimes (v \otimes 1) \in UCom(2) \otimes (UCom(1) \otimes UCom(0)) \otimes (V \otimes \mathbf{k})$, per l'assioma di associatività della Proposizione 1.3.2, si ha che

$$\alpha(\gamma(1_2, 1_1, 1_0), v) = \alpha(1_2, \alpha(1_1, v), \alpha(1_0, 1)).$$

Per come è definita γ e per l'assioma di unitalità della Proposizione 1.3.2, si ha che $v = \alpha(1_1, v) = \alpha(\gamma(1_2, 1_1, 1_0), v) = \alpha(1_2, \alpha(1_1, v), \alpha(1_0, 1)) = \mu_2(v, \alpha(1_0, 1))$. L'unità dell'algebra è dunque $\alpha(1_0, 1)$.

Viceversa, dato $v_0 \in V$ tale che $v_0 \cdot v = v \cdot v_0 = v$ per ogni $v \in V$, è sufficiente definire $\alpha(1_0, 1) := v_0$ ed estendere α per linearità. Similmente per quanto riguarda $U\mathcal{A}ss$.

Algebre su un non- Σ operad \mathcal{P} sono definite, nel senso della Definizione 1.3.1, come algebre sulla simmetrizzazione $\Sigma[\mathcal{P}]$ di \mathcal{P} . Algebre su operad non unitali sono definite con appropriate modifiche della Definizione 1.3.1, in particolare di omomorfismo di operad, che per gli operad non unitali non prevederà la preservazione delle unità.

Vediamo infine una definizione che ci permette di generalizzare, come descritto nell'Osservazione 1.3.8, il concetto di algebra su un operad.

Definizione 1.3.7. Sia \mathcal{P} un operad. Una categoria sull'operad \mathcal{P} , che chiameremo anche \mathcal{P} -categoria, \mathcal{C} è data da una classe \mathcal{C}_0 , detta classe degli oggetti di \mathcal{C} , tale che per ogni $x, y \in \mathcal{C}_0$ è dato un oggetto $\mathcal{C}(x, y) \in \mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ detto oggetto dei morfismi da x a y in \mathcal{C} . Inoltre, per ogni $n \geq 0$ e per ogni successione x_0, x_1, \dots, x_n di oggetti in \mathcal{C}_0 , deve essere dato un morfismo

$$\beta_{(x_0, \dots, x_n)} : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{C}(x_0, x_1) \otimes \mathcal{C}(x_1, x_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(x_{n-1}, x_n) \rightarrow \mathcal{C}(x_0, x_n) \quad (1.15)$$

detto operazione di composizione n -aria, che deve rispettare i seguenti assiomi.

Associatività. Siano $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$ e $x_0, x_1, \dots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_1+\dots+k_n}$. Per ogni $0 \leq s \leq n$

sia inoltre $h_s := k_1 + \dots + k_s$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(k_s) \right) \otimes \bigotimes_{i=1}^{h_n} \mathbb{C}(x_{i-1}, x_i) & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & \mathcal{P}(h_n) \otimes \bigotimes_{i=1}^{h_n} \mathbb{C}(x_{i-1}, x_i) \\
 \downarrow \text{mescolamento} & & \downarrow \beta_{(x_0, x_1, \dots, x_{h_n})} \\
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \left(\mathcal{P}(k_s) \otimes \bigotimes_{i=h_{s-1}+1}^{h_s} \mathbb{C}(x_{i-1}, x_i) \right) & \xrightarrow{id \otimes (\bigotimes_{s=1}^n \beta_{(x_{h_{s-1}}, \dots, x_{h_s})})} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}(x_{h_{i-1}}, x_{h_i}) \\
 & & \uparrow \beta_{(x_0, x_{h_1}, \dots, x_{h_n})} \\
 & & \mathbb{C}(x_0, x_{h_n})
 \end{array}$$

commuta, con mescolamento analogo a quello della Definizione 1.1.1.

Equivarianza. Siano $n \geq 1$, $x \in \mathbb{C}_0$ e $\sigma \in \Sigma_n$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}(x, x) & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}(x, x) \\
 & \searrow \beta_{(x, \dots, x)} & \downarrow \beta_{(x, \dots, x)} \\
 & & \mathbb{C}(x, x)
 \end{array}$$

commuta.

Unitalità. Siano $x_0, x_1 \in \mathbb{C}_0$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k} \otimes \mathbb{C}(x_0, x_1) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}(x_0, x_1) \\
 \eta \otimes id \downarrow & \nearrow \beta_{(x_0, x_1)} & \\
 \mathcal{P}(1) \otimes \mathbb{C}(x_0, x_1) & &
 \end{array}$$

commuta.

Osservazione 1.3.8. Notiamo come la Definizione 1.3.7 di categoria su un operad generalizza la definizione alternativa di algebra su un operad della Proposizione 1.3.2. Sia infatti \mathbb{C} una categoria su un operad \mathcal{P} tale che la classe degli oggetti di \mathbb{C} sia formata da un solo elemento x . Usando le stesse notazioni della Definizione 1.3.7, ponendo $V := \mathbb{C}(x, x)$, si ha che l'assioma di associatività, quello di equivarianza e quello di unitalità della Definizione 1.3.7 corrispondono rispettivamente all'assioma di associatività, a quello di equivarianza e a quello di unitalità della definizione alternativa di algebra su un operad della Proposizione 1.3.2. Il concetto di categoria su un operad è dunque la categorificazione orizzontale del concetto di algebra su un operad, dove con categorificazione orizzontale di un certo concetto matematico intendiamo il seguente processo: un certo concetto risulta essere equivalente a un certo tipo di categoria con un solo oggetto, di conseguenza tale concetto viene generalizzato prendendo in considerazione lo stesso tipo di categoria ma aumentandone il numero di oggetti.

1.4 Operad commutativi

Vediamo ora una classe particolare di operad che può essere utilizzata, insieme alle sue algebre, per costruire protocolli crittografici. Questi operad, introdotti in [Tro06], sono detti operad commutativi.

Definizione 1.4.1. *Un operad \mathcal{P} viene detto commutativo se, dati comunque $m, n \geq 1$, per ogni $f \in \mathcal{P}(n)$ e per ogni $g \in \mathcal{P}(m)$ si ha che*

$$\gamma(f, \underbrace{g, \dots, g}_n) = \gamma(g, \underbrace{f, \dots, f}_m) \sigma_{n,m}, \quad (1.16)$$

con $\sigma_{n,m} \in \Sigma_{nm}$ tale che

$$\sigma_{n,m}(i + (j-1)n) = (j + (i-1)m) \quad (1.17)$$

per ogni $1 \leq i \leq n$ e per ogni $1 \leq j \leq m$.

Vediamo ora un primo esempio di un operad commutativo nella categoria monoidale (\mathbf{Set}, \times) degli insiemi finiti e del loro prodotto cartesiano. Costruiremo l'operad commutativo in questione a partire da un monoide commutativo qualsiasi. Come vedremo, se il monoide preso in considerazione non è commutativo, la costruzione fatta ci darà comunque un operad.

Esempio 1.4.2. Sia $(G, 1)$ un monoide. Definiamo $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(n)\}_{n \geq 1}$ l'operad nella categoria \mathbf{Set} tale che $\mathcal{G}(n) = G^n$. Per ogni $n \geq 1$ un elemento di $\mathcal{G}(n)$ è dunque una successione $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ di elementi x_i di G , per ogni $1 \leq i \leq n$. L'unità dell'operad è $1 \in \mathcal{G}(1) = G$. La mappa unitaria η è definita nel modo seguente: per ogni insieme con un solo elemento $\{*\}$ si ha $\eta(*) = 1 \in G$. Per ogni $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 1$, le composizioni operadiche

$$\gamma : \mathcal{G}(n) \times \mathcal{G}(k_1) \times \dots \times \mathcal{G}(k_n) \rightarrow \mathcal{G}(k_1 + \dots + k_n)$$

sono definite nel seguente modo: dato $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n)$ e dati $\bar{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,k_i}) \in \mathcal{G}(k_i)$, per ogni $1 \leq i \leq n$, definiamo

$$\gamma(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) := (x_1 \bar{y}_1, \dots, x_n \bar{y}_n) = (x_1 y_{1,1}, \dots, x_1 y_{1,k_1}, \dots, x_n y_{n,1}, \dots, x_n y_{n,k_n}).$$

Infine, per ogni $n \geq 1$, il gruppo simmetrico Σ_n agisce nel seguente modo: dato $\sigma \in \Sigma_n$ e dato un elemento $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n)$, definiamo

$$\bar{x}\sigma = (x_1, \dots, x_n)\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Verifichiamo che \mathcal{G} rispetta gli assiomi di operad.

Associatività. Dati $n \geq 1$, $m_1, \dots, m_n \geq 1$, con $m_1 + \dots + m_n = m$, siano

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n), \\ \bar{y}_1 &= (y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}) \in \mathcal{G}(m_1), \dots, \bar{y}_n = (y_{n,1}, \dots, y_{n,m_n}) \in \mathcal{G}(m_n). \end{aligned}$$

Dati inoltre $k_1, \dots, k_m \geq 1$, siano

$$\bar{z}_1 = (z_{1,1}, \dots, z_{1,k_1}) \in \mathcal{G}(k_1), \dots, \bar{z}_m = (z_{m,1}, \dots, z_{m,k_m}) \in \mathcal{G}(k_m).$$

Definiamo infine $g_s := m_1 + \dots + m_{s-1}$, per ogni $1 \leq s \leq n$. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n), \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) &= \gamma(x_1 \bar{y}_1, \dots, x_n \bar{y}_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) = \\ &= (x_1 y_{1,1} \bar{z}_{g_1+1}, \dots, x_1 y_{1,m_1} \bar{z}_{g_2}, x_2 y_{2,1} \bar{z}_{g_2+1}, \dots, x_2 y_{2,m_2} \bar{z}_{g_3}, \dots, x_n y_{n,1} \bar{z}_{g_n+1}, \dots, x_n y_{n,m_n} \bar{z}_m) = \\ &= \gamma(\bar{x}, (y_{1,1} \bar{z}_{g_1+1}, \dots, y_{1,m_1} \bar{z}_{g_2}), (y_{2,1} \bar{z}_{g_2+1}, \dots, y_{2,m_2} \bar{z}_{g_3}), \dots, (y_{n,1} \bar{z}_{g_n+1}, \dots, y_{n,m_n} \bar{z}_m)) = \\ &= \gamma(\bar{x}, \gamma(\bar{y}_1, \bar{z}_{g_1+1}, \dots, \bar{z}_{g_2}), \gamma(\bar{y}_2, \bar{z}_{g_2+1}, \dots, \bar{z}_{g_3}), \dots, \gamma(\bar{y}_n, \bar{z}_{g_n+1}, \dots, \bar{z}_m)), \end{aligned}$$

ossia il diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 commuta.

Equivarianza. Dati $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 1$, siano

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n),$$

$$\bar{y}_1 = (y_{1,1}, \dots, y_{1,k_1}) \in \mathcal{G}(k_1), \dots, \bar{y}_n = (y_{n,1}, \dots, y_{n,k_n}) \in \mathcal{G}(k_n).$$

Sia inoltre $\sigma \in \Sigma_n$. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{x}\sigma, \bar{y}_{\sigma(1)}, \dots, \bar{y}_{\sigma(n)}) &= \gamma((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \bar{y}_{\sigma(1)}, \dots, \bar{y}_{\sigma(n)}) = (x_{\sigma(1)}\bar{y}_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\bar{y}_{\sigma(n)}) = \\ &= (x_1\bar{y}_1, \dots, x_n\bar{y}_n)(\sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})) = \gamma(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)(\sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})), \end{aligned}$$

ossia il primo diagramma dell'assioma di equivarianza della Definizione 1.1.1 commuta. Siano ora $\tau_1 \in \Sigma_{k_1}, \dots, \tau_n \in \Sigma_{k_n}$. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{x}, \bar{y}_1\tau_1, \dots, \bar{y}_n\tau_n) &= (x_1\bar{y}_1\tau_1, \dots, x_n\bar{y}_n\tau_n) = (x_1y_{1,\tau_1(1)}, \dots, x_1y_{1,\tau_1(k_1)}, \dots, x_ny_{n,\tau_n(1)}, \dots, x_ny_{n,\tau_n(k_n)}) = \\ &= (x_1y_{1,1}, \dots, x_1y_{1,k_1}, \dots, x_ny_{n,1}, \dots, x_ny_{n,k_n})(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n) = \\ &= \gamma(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)(\tau_1 \oplus \dots \oplus \tau_n), \end{aligned}$$

ossia il secondo diagramma dell'assioma di equivarianza della Definizione 1.1.1 commuta.

Unitalità. Dato un insieme $\{*\}$ e un elemento $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n)$, con $n \geq 1$, definiamo i seguenti isomorfismi

$$\begin{aligned} \varphi : G^n \times \{*\}^n &\xrightarrow{\cong} G^n, \\ \psi : \{*\} \times G^n &\xrightarrow{\cong} G^n, \end{aligned}$$

tali che

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_n, *, \dots, *) &= (x_1, \dots, x_n), \\ \psi(*, x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Si ha allora che

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{x}, \eta(*), \dots, \eta(*)) &= \gamma(\bar{x}, 1, \dots, 1) = (x_1 1, \dots, x_n 1) = (x_1, \dots, x_n) = \bar{x} = \varphi(\bar{x}, *, \dots, *), \\ \gamma(\eta(*), \bar{x}) &= \gamma(1, \bar{x}) = 1\bar{x} = (1x_1, \dots, 1x_n) = \bar{x} = \psi(*, \bar{x}), \end{aligned}$$

ossia i due diagrammi dell'assioma di unitalità della Definizione 1.1.1 commutano.

Se G risulta essere un monoide commutativo, allora l'operad \mathcal{G} è un operad commutativo. Infatti, dati $n, m \geq 1$, siano $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G}(n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{G}(m)$. Si ha che

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{x}, \underbrace{\bar{y}, \dots, \bar{y}}_n) &= (x_1\bar{y}, \dots, x_n\bar{y}) = (x_1y_1, x_1y_2, \dots, x_1y_m, x_2y_1, \dots, x_2y_m, \dots, x_ny_1, \dots, x_ny_m), \\ \gamma(\underbrace{\bar{y}, \dots, \bar{y}}_m, \bar{x}) &= (y_1\bar{x}, \dots, y_m\bar{x}) = (y_1x_1, y_1x_2, \dots, y_1x_n, y_2x_1, \dots, y_2x_n, \dots, y_mx_1, \dots, y_mx_n). \end{aligned}$$

Ricordando la Definizione 1.4.1, al posto $i + (j-1)n$ di $\gamma(\bar{y}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ si trova l'elemento y_jx_i , al posto $j + (i-1)m$ di $\gamma(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y})$ si trova l'elemento x_iy_j , siccome G è commutativo risulta $y_jx_i = x_iy_j$, ossia \mathcal{G} è commutativo.

Sia ora \mathcal{P} un operad e sia (A, α) una \mathcal{P} -algebra. Fissiamo la seguente notazione

$$\sum_{i=1}^n (f)^\alpha a_i := \alpha(f, a_1, \dots, a_n),$$

che useremo per il resto della sezione. Vediamo ora come utilizzarla. Per esempio, data un'altra \mathcal{P} -algebra (B, β) e un morfismo di \mathcal{P} -algebre $\phi : A \rightarrow B$, la commutatività del diagramma della

Definizione 1.3.3 si può riscrivere con la seguente uguaglianza

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n (f)^\alpha a_i\right) = \sum_{i=1}^n (f)^\beta \phi(a_i)$$

per ogni $n \geq 0$, $f \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \dots, a_n \in A$. Useremo anche la più semplice notazione

$$\sum_{i=1}^n (f) a_i := \alpha(f, a_1, \dots, a_n)$$

quando le mappe α saranno chiare dal contesto o quando non ci interesserà specificarle.

Vediamo ora un importante risultato riguardante gli operad commutativi e le loro algebre, grazie al quale sarà appunto possibile costruire dei protocolli crittografici.

Proposizione 1.4.3. *Sia \mathcal{P} un operad commutativo e sia (A, α) una \mathcal{P} -algebra. Presi comunque $n, m \geq 1$ e $f \in \mathcal{P}(n)$, $g \in \mathcal{P}(m)$, per ogni $a_{1,1}, \dots, a_{1,m}, a_{2,1}, \dots, a_{2,m}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,m} \in A$ si ha che*

$$\sum_{i=1}^n (f) \sum_{j=1}^m (g) a_{i,j} = \sum_{j=1}^m (g) \sum_{i=1}^n (f) a_{i,j}. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Sia

$$f \otimes g^{\otimes n} \otimes (a_{1,1} \otimes \dots \otimes a_{1,m}) \otimes \dots \otimes (a_{n,1} \otimes \dots \otimes a_{n,m}) \in \left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(m) \right) \otimes \bigotimes_{s=1}^n A^{\otimes m}.$$

Per la Proposizione 1.3.2, usando il diagramma di associatività si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f) \sum_{j=1}^m (g) a_{i,j} &= \alpha(f, \alpha(g, a_{1,1}, \dots, a_{1,m}), \dots, \alpha(g, a_{n,1}, \dots, a_{n,m})) = \\ &= \alpha(\gamma(f, g, \dots, g), a_{1,1}, \dots, a_{1,m}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,m}) := \alpha(\zeta_1). \end{aligned}$$

Sia ora

$$g \otimes f^{\otimes m} \otimes (a_{1,1} \otimes \dots \otimes a_{n,1}) \otimes \dots \otimes (a_{1,m} \otimes \dots \otimes a_{n,m}) \in \left(\mathcal{P}(m) \otimes \bigotimes_{s=1}^m \mathcal{P}(n) \right) \otimes \bigotimes_{s=1}^m A^{\otimes n}.$$

Per la Proposizione 1.3.2, usando il diagramma di associatività si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (g) \sum_{i=1}^n (f) a_{i,j} &= \alpha(g, \alpha(f, a_{1,1}, \dots, a_{n,1}), \dots, \alpha(f, a_{1,m}, \dots, a_{n,m})) = \\ &= \alpha(\gamma(g, f, \dots, f), a_{1,1}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{1,m}, \dots, a_{n,m}) := \alpha(\zeta_2). \end{aligned}$$

In ζ_2 il termine in posizione $i + (j-1)n$ è $a_{i,j}$, che è il termine di ζ_1 in posizione $j + (i-1)m$, quindi per (1.16) si ha $\zeta_1 = \zeta_2$. \square

In [GT16] si possono trovare quattro protocolli crittografici basati su operad commutativi: creazione di una chiave segreta comune, scambio di chiavi, crittaggio, e autenticazione, che possono essere in particolare facilmente applicati a operad del tipo visto nell'Esempio 1.4.2.

1.5 Operad e moduli

Data un'algebra su un operad, vediamo ora come definire il concetto di modulo su tale algebra.

Definizione 1.5.1. *Siano \mathcal{P} un operad e A una \mathcal{P} -algebra. Un modulo sulla \mathcal{P} -algebra A , anche detto un A -modulo (sotto \mathcal{P}) in [BM08], è un \mathbf{k} -modulo M insieme a mappe \mathbf{k} -lineari*

$$\mu_{n,k} : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-k)} \rightarrow M, \quad (1.19)$$

per $1 \leq k \leq n$, che soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Siano $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n \geq 1$. Per ogni $1 \leq s \leq n$ sia inoltre $h_s := t_1 + \dots + t_s$, sia $1 \leq k \leq h_n$ e sia l l'unico intero tale che $h_{l-1} < k \leq h_l$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{s=1}^n \mathcal{P}(t_s) \right) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(h_n-k)} & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & \mathcal{P}(h_n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(h_n-k)} \\ \downarrow \xi & & \downarrow \mu_{h_n,k} \\ \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(l-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-l)} & \xrightarrow{\mu_{n,l}} & M \end{array}$$

commuta, dove con ξ intendiamo la seguente composizione di morfismi

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(t_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(t_n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(h_n-k)} \\ \downarrow \text{mescolamento} \\ \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^{l-1} (\mathcal{P}(t_i) \otimes A^{\otimes t_i}) \otimes \mathcal{P}(t_l) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(t_n) \otimes M \otimes A^{\otimes(t_n-1)} \otimes \dots \otimes A^{\otimes(t_l-1)} \otimes A^{\otimes(n-l)} \\ \downarrow id \otimes (\bigotimes_{i=1}^{l-1} \alpha) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{2(n-l+1)+1} id) \otimes id \\ \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(l-1)} \otimes \mathcal{P}(t_l) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(t_n) \otimes M \otimes A^{\otimes(t_n-1)} \otimes \dots \otimes A^{\otimes(t_l-1)} \otimes A^{\otimes(n-l)} \\ \downarrow id \otimes id \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n-1-l+1} id) \otimes \mu_{t_n,1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n-1-l+1} id) \otimes id \\ \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(l-1)} \otimes \mathcal{P}(t_l) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(t_{n-1}) \otimes M \otimes A^{\otimes(t_{n-1}-1)} \otimes \dots \otimes A^{\otimes(t_l-1)} \otimes A^{\otimes(n-l)} \\ \downarrow id \otimes id \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n-2-l+1} id) \otimes \mu_{t_{n-1},1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n-2-l+1} id) \otimes id \\ \vdots \\ \downarrow id \otimes id \otimes \mu_{t_l,1} \otimes id \\ \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(l-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-l)} \end{array}$$

con mescolamento analogo a quello della Definizione 1.1.1 e con le mappe α date da (1.9).

Equivarianza. Siano $n \geq 1$ e $\sigma \in \Sigma_n$. Allora, per ogni $1 \leq k \leq n$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-k)} & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(\sigma(k)-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-\sigma(k))} \\ & \searrow \mu_{n,k} & \downarrow \mu_{n,\sigma(k)} \\ & & M \end{array}$$

commuta.

Unitalità. Il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} \otimes M & \xrightarrow{\cong} & M \\ \eta \otimes id \downarrow & \nearrow \mu_{1,1} & \\ \mathcal{P}(1) \otimes M & & \end{array}$$

commuta.

Vediamo ora due esempi grazie ai quali possiamo ritrovare i classici moduli e bimoduli su algebre associative.

Esempio 1.5.2. Sia Com l'operad descritto nell'Esempio 1.1.7. Abbiamo visto nell'Esempio 1.3.5 come le algebre su Com siano le usuali algebre associative commutative. Vediamo ora usando le notazioni di questi due esempi che, presa una tale algebra A , gli A -moduli sotto Com sono gli usuali moduli (sinistri) sull'algebra A . Sia dunque M un tale A -modulo sotto Com . Definiamo la mappa $\beta : A \otimes M \rightarrow M$ tale che per ogni $a \in A, x \in M$

$$\beta(a, x) := \mu_{2,2}(1_2, a, x)$$

e verifichiamo che β dota M di una struttura di A -modulo. Vediamo che è verificata la proprietà associativa dei moduli sinistri, ovvero che, per ogni $a, b \in A, x \in M$,

$$\beta(a \cdot b, x) = \beta(a, \beta(b, x)).$$

Possiamo riscrivere il termine a sinistra applicando l'assioma di unitalità della Definizione 1.5.1 e ottenere

$$\beta(a \cdot b, x) = \mu_{2,2}(1_2, \alpha(1_2, a, b), \mu_{1,1}(1_1, x)).$$

Partendo da $(1_2, 1_2, 1_1, a, b, x) \in Com(2) \otimes Com(2) \otimes Com(1) \otimes A^{\otimes(3-1)} \otimes M$, grazie alla commutatività del diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.5.1, si ha che

$$\mu_{2,2}(1_2, \alpha(1_2, a, b), \mu_{1,1}(1_1, x)) = \mu_{3,3}(1_3, a, b, x).$$

Vediamo ora il termine a destra. Partendo da $(1_1, 1_2, b, x) \in Com(1) \otimes Com(2) \otimes A^{\otimes(2-1)} \otimes M$, grazie alla commutatività del diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.5.1, si ha che

$$\mu_{2,2}(1_2, b, x) = \mu_{1,1}(1_1, \mu_{2,1}(1_2, x, b)).$$

Da ciò e dall'assioma di unitalità della Proposizione 1.3.2 si ha che

$$\beta(a, \beta(b, x)) = \mu_{2,2}(1_2, \alpha(1_1, a), \mu_{2,2}(1_2, b, x)) = \mu_{2,2}(1_2, \alpha(1_1, a), \mu_{1,1}(1_1, \mu_{2,1}(1_2, x, b))).$$

Partendo da $(1_2, 1_1, 1_2, a, b, x) \in \text{Com}(2) \otimes \text{Com}(1) \otimes \text{Com}(2) \otimes A^{\otimes(3-1)} \otimes M$, grazie alla commutatività del diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.5.1, si ha che

$$\mu_{2,2}(1_2, \alpha(1_1, a), \mu_{1,1}(1_1, \mu_{2,1}(1_2, x, b))) = \mu_{3,3}(1_3, a, b, x).$$

Viceversa, data un'algebra associativa commutativa A e un A -modulo (sinistro) M , una volta definita una Com -algebra a partire da A come nell'Esempio 1.3.5, per rendere M un A -modulo sotto Com basta definire

$$\mu_{n,k}(1_n, a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) := a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_n x$$

per ogni $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in A$, $x \in M$, $1 \leq k \leq n$, estendendo poi $\mu_{n,k}$ per \mathbf{k} -linearità.

Esempio 1.5.3. Sia $\mathcal{A}ss$ l'operad descritto nell'Esempio 1.1.3. Abbiamo visto nell'Esempio 1.3.5 come le algebre su $\mathcal{A}ss$ siano le usuali algebre associative. Vediamo ora usando le notazioni di questi due esempi che, presa una tale algebra A , gli A -moduli sotto $\mathcal{A}ss$ sono gli usuali bimoduli sull'algebra A . Sia dunque M un tale A -modulo sotto $\mathcal{A}ss$. La mappa β che rende M un modulo sinistro è definita come nell'Esempio 1.5.2 con id_2 al posto di 1_2 e la proprietà associativa si dimostra semplicemente cambiando notazioni in questo modo. Definiamo ora la mappa $\delta : M \otimes A \rightarrow M$ tale che per ogni $b \in A, x \in M$

$$\delta(x, b) := \mu_{2,1}(id_2, x, b)$$

e verifichiamo che vale la proprietà associativa per δ e che le due mappe β e δ sono compatibili. Per ogni $a, b \in A, x \in M$ deve valere

$$\delta(x, a \cdot b) = \delta(\delta(x, a), b).$$

Possiamo riscrivere il termine a sinistra applicando l'assioma di unitalità della Definizione 1.5.1 e ottenere

$$\delta(x, a \cdot b) = \mu_{2,1}(id_2, \mu_{1,1}(id_1, x), \alpha(id_2, a, b)).$$

Per l'assioma di equivarianza della Definizione 1.5.1, ponendo $\sigma = (1, 2) \in \Sigma_2$, si ha che

$$\mu_{2,1}(id_2, \mu_{1,1}(id_1, x), \alpha(id_2, a, b)) = \mu_{2,2}(\sigma, \alpha(id_2, a, b), \mu_{1,1}(id_1, x)).$$

Partendo da $(\sigma, id_2, id_1, a, b, x) \in \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(1) \otimes A^{\otimes(3-1)} \otimes M$ e applicando l'assioma di associatività della Definizione 1.5.1, ponendo $\tau = (1, 2, 3) = \sigma(id_2 \oplus id_1) \in \Sigma_3$ si ha che

$$\mu_{2,2}(\sigma, \alpha(id_2, a, b), \mu_{1,1}(id_1, x)) = \mu_{3,3}(\tau, a, b, x).$$

Per l'assioma di equivarianza della Definizione 1.5.1 si ha che

$$\mu_{3,3}(\tau, a, b, x) = \mu_{3,1}(id_3, x, a, b).$$

Vediamo ora il termine a destra. Partendo da $(id_2, id_1, id_2, x, a, b) \in \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(1) \otimes \mathcal{A}ss(2) \otimes M \otimes A^{\otimes(3-1)}$ e applicando l'assioma di associatività della Definizione 1.5.1 si ha che

$$\delta(\delta(x, a), b) = \mu_{2,1}(id_2, \mu_{1,1}(id_1, \mu_{2,1}(id_2, x, a)), b) = \mu_{3,1}(id_3, x, a, b).$$

Verifichiamo infine che le mappe β e δ sono compatibili, ovvero che, per ogni $a, b \in A, x \in M$ si ha che

$$\beta(a, \delta(x, b)) = \delta(\beta(a, x), b).$$

Vediamo ora il termine di sinistra. Partendo da $(id_2, id_1, id_2, a, x, b) \in \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(1) \otimes \mathcal{A}ss(2) \otimes A \otimes M \otimes A$ e applicando l'assioma di associatività della Definizione 1.5.1 si ha che

$$\beta(a, \delta(x, b)) = \mu_{2,2}(id_2, \alpha(id_1, a), \mu_{2,1}(id_2, x, b)) = \mu_{3,2}(id_3, a, x, b).$$

Vediamo ora il termine a destra. Partendo da $(id_1, id_2, a, x) \in \mathcal{A}ss(1) \otimes \mathcal{A}ss(2) \otimes A \otimes M$ e l'assioma di associatività e unitalità della Definizione 1.5.1 si ha che

$$\mu_{2,2}(id_2, a, x) = \mu_{2,1}(id_2, x, a).$$

Partendo ora da $(id_2, id_2, id_1, a, x, b) \in \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(2) \otimes \mathcal{A}ss(1) \otimes A \otimes M \otimes A$ e applicando quanto visto prima e l'assioma di associatività della Definizione 1.5.1 si ha che

$$\begin{aligned} \delta(\beta(a, x), b) &= \mu_{2,1}(id_2, \mu_{2,2}(id_2, a, \mu_{1,1}(id_1, x)), b) = \\ &= \mu_{2,1}(id_2, \mu_{2,1}(id_2, \mu_{1,1}(id_1, x), a), b) = \mu_{3,2}(id_3, a, x, b). \end{aligned}$$

Le due mappe sono dunque compatibili. Viceversa, data un'algebra associativa A e un A -bimodulo M , una volta definita una $\mathcal{A}ss$ -algebra a partire da A come nell'Esempio 1.3.5, per rendere M un A -modulo sotto $\mathcal{A}ss$ basta definire

$$\mu_{n,k}(id_n, a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) := a_1 \cdots a_{k-1} x a_{k+1} \cdots a_n$$

per ogni $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in A$, $x \in M$, $1 \leq k \leq n$, estendendo poi $\mu_{n,k}$ per \mathbf{k} -linearità. L'azione del gruppo simmetrico permuta semplicemente gli elementi all'interno del prodotto in modo tale che sia verificato l'assioma di equivarianza.

Vediamo adesso come definire i morfismi di questi oggetti.

Definizione 1.5.4. *Un morfismo $f : M \rightarrow N$ di A -moduli sotto \mathcal{P} è un morfismo in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ tale che, per ogni $1 \leq k \leq n$, il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-k)} & \xrightarrow{id \otimes id \otimes f \otimes id} & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(k-1)} \otimes N \otimes A^{\otimes(n-k)} \\ \mu_{n,k}^M \downarrow & & \downarrow \mu_{n,k}^N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commuta, dove $\mu_{n,k}^M$ e $\mu_{n,k}^N$ sono rispettivamente le mappe (1.19) per il modulo M e per il modulo N .

Dato quindi un operad \mathcal{P} e una \mathcal{P} -algebra A , possiamo definire la categoria degli A -moduli sotto \mathcal{P} e dei loro morfismi, che denoteremo con $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$. Vedremo ora una generalizzazione, nel senso dell'Osservazione 1.5.8, del concetto di modulo su un'algebra su un operad. Per prima cosa ricordiamo che un Σ -modulo è una collezione $E = \{E(n)\}_{n \geq 0}$ tale che, per ogni $n \geq 0$, $E(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -modulo destro. Dati $E = \{E(n)\}_{n \geq 0}$, $D = \{D(n)\}_{n \geq 0}$ due Σ -moduli, ricordiamo inoltre che $f : E \rightarrow D$, con $f = \{f(n) : E(n) \rightarrow D(n)\}_{n \geq 0}$, è un morfismo di Σ -moduli se $f(n) : E(n) \rightarrow D(n)$ è un morfismo di $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -moduli per ogni $n \geq 0$.

Definizione 1.5.5. *Sia \mathcal{P} un operad. Un modulo sinistro su \mathcal{P} , detto anche \mathcal{P} -modulo sinistro, è un Σ -modulo $L = \{L(n)\}_{n \geq 0}$ insieme a mappe \mathbf{k} -lineari*

$$\lambda : \mathcal{P}(n) \otimes L(t_1) \otimes \cdots \otimes L(t_n) \rightarrow L(t_1 + \cdots + t_n), \quad (1.20)$$

per $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n \geq 0$, che soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Siano $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ e $h_1^1, \dots, h_{t_1}^1, \dots, h_1^n, \dots, h_{t_n}^n \geq 0$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{P}(t_j) \right) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \bigotimes_{i=1}^{t_j} L(h_i^j) & \xrightarrow{\gamma \otimes id} & \mathcal{P}(t_1 + \dots + t_n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \bigotimes_{i=1}^{t_j} L(h_i^j) \\
 \downarrow \text{mescolamento} & & \downarrow \lambda \\
 & & L(h_1^1 + \dots + h_{t_n}^n) \\
 & & \uparrow \lambda \\
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n \left(\mathcal{P}(t_j) \otimes \bigotimes_{i=1}^{t_j} L(h_i^j) \right) & \xrightarrow{id \otimes (\bigotimes_{s=1}^n \lambda)} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{j=1}^n L(h_1^j + \dots + h_{t_j}^j)
 \end{array}$$

commuta, con mescolamento analogo a quello della Definizione 1.1.1.

Equivarianza. Siano $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ e $\sigma \in \Sigma_n$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n L(t_i) & \xrightarrow{\sigma \otimes \sigma^{-1}} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n L(t_{\sigma(i)}) \\
 & \searrow \lambda & \downarrow \lambda \\
 & & L(t_1 + \dots + t_n)
 \end{array}$$

commuta.

Unitalità. Sia $n \geq 0$. Allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k} \otimes L(n) & \xrightarrow{\cong} & L(n) \\
 \eta \otimes id \downarrow & \nearrow \lambda & \\
 \mathcal{P}(1) \otimes L(n) & &
 \end{array}$$

commuta.

Vediamo ora come definire il grado di un dato \mathcal{P} -modulo sinistro. In particolare, nell'Osservazione 1.5.8 vedremo l'importanza dei \mathcal{P} -moduli di grado 1.

Definizione 1.5.6. Sia L un \mathcal{P} -modulo sinistro. Diciamo che L è di grado n quando $L(m) = 0$ per ogni $m > n$.

Come fatto in precedenza, dato un operad \mathcal{P} , definiamo i morfismi tra due \mathcal{P} -moduli sinistri.

Definizione 1.5.7. Un morfismo $f : L \rightarrow J$ di \mathcal{P} -moduli sinistri è un morfismo $f = \{f(n)\}_{n \geq 0}$ di Σ -moduli tale che, per ogni $n \geq 1$ e $t_1, \dots, t_n \geq 0$, il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n L(t_i) & \xrightarrow{id \otimes (\bigotimes_{i=1}^n f(t_i))} & \mathcal{P}(n) \otimes \bigotimes_{i=1}^n J(t_i) \\
\downarrow \lambda^L & & \downarrow \lambda^J \\
L(t_1 + \dots + t_n) & \xrightarrow{f(t_1 + \dots + t_n)} & J(t_1 + \dots + t_n)
\end{array}$$

commuta, dove λ^L e λ^J sono rispettivamente le mappe (1.20) per il modulo L e per il modulo J .

Osservazione 1.5.8. Siano ora \mathcal{P} un operad e L un \mathcal{P} -modulo sinistro di grado 1. La struttura di \mathcal{P} -modulo ristretta a $L(0)$ dota $L(0)$ di una struttura di \mathcal{P} -algebra. Con riferimento alla Proposizione 1.3.2, basta definire $V := L(0)$ e le mappe α definite come le mappe λ che non coinvolgono $L(t)$ per $t > 0$, in questo modo gli assiomi della Definizione 1.5.5 corrispondono esattamente a quelli della Proposizione 1.3.2. A questo punto, con riferimento alla Definizione 1.5.1, basta definire $M := L(1)$, $A := L(0)$ e le mappe $\mu_{n,k}$ definite come le mappe λ che coinvolgono $L(1)$ ma non $L(t)$ per $t > 1$ per dotare $L(1)$ di una struttura di $L(0)$ -modulo sotto \mathcal{P} .

Viceversa, data una \mathcal{P} -algebra A e un A -modulo sotto \mathcal{P} M , possiamo definire un \mathcal{P} -modulo di grado 1 L tale che $L(0) = A$ e $L(1) = M$ e con la struttura di \mathcal{P} -modulo data dalla struttura di \mathcal{P} -algebra di A e dalla struttura di A -modulo sotto \mathcal{P} di M . Ricordo infatti che L è un Σ -modulo, visto che A è un \mathbf{k} -modulo, quindi un $\mathbf{k}[\Sigma_0]$ -modulo, e M è un \mathbf{k} -modulo, quindi un $\mathbf{k}[\Sigma_1]$ -modulo. La mappa (1.20) coincide rispettivamente con la mappa (1.9) quando nel prodotto tensoriale non compare $L(1)$ come fattore, con la mappa (1.19) quando $L(1)$ compare una sola volta, con la mappa nulla quando $L(1)$ compare due o più volte, coerentemente con il fatto che $L(m) = 0$ per ogni $m \geq 2$ perché di grado 1.

Definiamo ora la categoria i cui oggetti sono dati dalle coppie (A, M) , con A \mathcal{P} -algebra e M A -modulo sotto \mathcal{P} , e i cui morfismi sono dati dalle coppie $(\phi, \psi) : (A, M) \rightarrow (B, N)$, con $\phi : A \rightarrow B$ morfismo di \mathcal{P} -algebre e $\psi : M \rightarrow \phi^*(N)$ morfismo di A -moduli sotto \mathcal{P} , dove con $\phi^*(N)$ intendiamo N visto come B -modulo sotto \mathcal{P} per restrizione degli scalari attraverso ϕ . Per quanto detto prima, possiamo identificare questa categoria con una sottocategoria della categoria dei \mathcal{P} -moduli sinistri, ossia la sottocategoria piena dei \mathcal{P} -moduli sinistri di grado 1.

Capitolo 2

Definizione combinatorica e generalizzazioni

2.1 Operad liberi e definizione combinatorica

Vediamo ora come definire la struttura di operad libero. Questa struttura sarà messa in relazione con alcuni tipi di grafi e successivamente, variando il tipo di grafi coinvolti nella definizione di operad libero, saremo in grado di costruire tipi diversi di strutture. La costruzione dell'operad libero sarà inoltre utile per definire gli operad come algebre su una monade.

Dato un Σ -modulo E , definiamo ora l'operad libero generato dal Σ -modulo E attraverso la classica proprietà universale.

Definizione 2.1.1. *Sia E un Σ -modulo. L'operad libero generato dal Σ -modulo E è un operad $\Gamma(E)$ insieme ad un morfismo di Σ -moduli $\zeta(E) : E \rightarrow \Gamma(E)$ tale che valga la seguente proprietà universale: dati un operad \mathcal{P} e un morfismo di Σ -moduli $f : E \rightarrow \mathcal{P}$ esiste unico un morfismo di operad $\tilde{f} : \Gamma(E) \rightarrow \mathcal{P}$ tale che il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\zeta(E)} & \Gamma(E) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & \mathcal{P} \end{array}$$

commuta.

Risulta chiaro come riformulare tale definizione nel caso non unitale. Inoltre è facile dimostrare che l'operad libero generato da un dato Σ -modulo è unico a meno di unico isomorfismo.

Vediamo ora come definire il concetto di operad libero in modo diverso, che ci servirà anche per definire strutture simili a quelle di operad, come faremo nelle due successive sezioni. Possiamo tradurre la Definizione 2.1.1 in termini funtoriali nel seguente modo. Indichiamo con $\square : \mathbf{Oper} \rightarrow \Sigma\text{-mod}$ il funtore dimenticante dalla categoria \mathbf{Oper} degli operad alla categoria $\Sigma\text{-mod}$ dei Σ -moduli.

Definizione 2.1.2. *Il funtore di operad liberi è un aggiunto sinistro $\Gamma : \Sigma\text{-mod} \rightarrow \mathbf{Oper}$ del funtore dimenticante $\square : \mathbf{Oper} \rightarrow \Sigma\text{-mod}$. Questo significa che esiste un isomorfismo funtoriale*

$$\text{Mor}_{\mathbf{Oper}}(\Gamma(E), \mathcal{P}) \cong \text{Mor}_{\Sigma\text{-mod}}(E, \square(\mathcal{P}))$$

per ogni Σ -modulo E e per ogni operad \mathcal{P} . L'operad $\Gamma(E)$ è l'operad libero generato dal Σ -modulo E . Allo stesso modo, il funtore di operad liberi non unitali è un aggiunto sinistro $\Psi : \Sigma\text{-mod} \rightarrow \psi\mathbf{Oper}$ del funtore dimenticante $\square_\psi : \psi\mathbf{Oper} \rightarrow \Sigma\text{-mod}$. Questo significa che esiste un isomorfismo funtoriale

$$\text{Mor}_{\psi\mathbf{Oper}}(\Psi(E), \mathcal{S}) \cong \text{Mor}_{\Sigma\text{-mod}}(E, \square_\psi(\mathcal{S}))$$

per ogni Σ -modulo E e per ogni operad non unitale \mathcal{S} . L'operad non unitale $\Psi(E)$ è l'operad libero non unitale generato dal Σ -modulo E .

Sia $\sim: \psi\mathbf{0per} \rightarrow \mathbf{0per}$ il funtore descritto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.8. L'isomorfismo funtoriale (1.8) implica che si può prendere

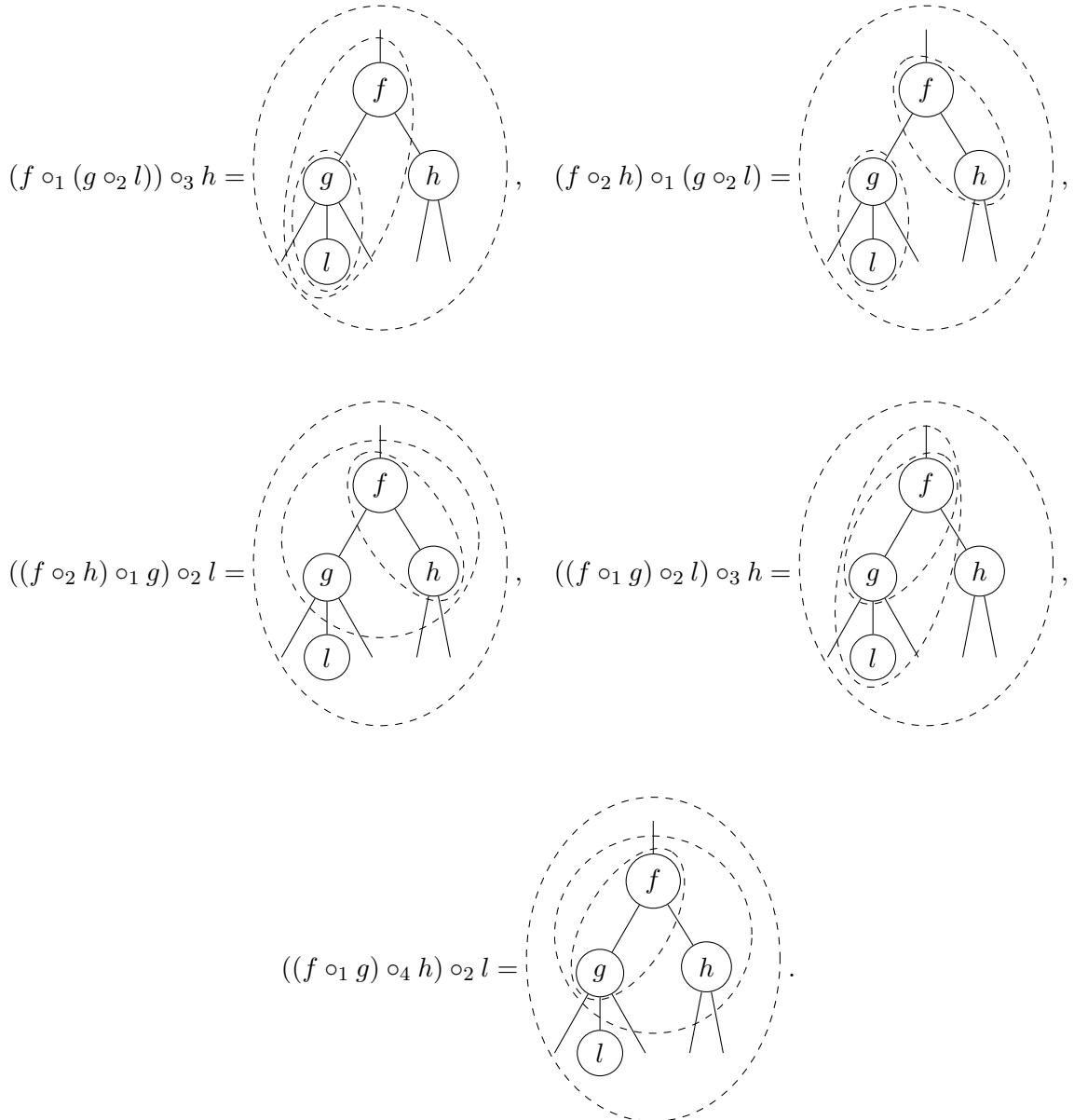
$$\Gamma := \widetilde{\Psi}, \quad (2.1)$$

quindi, l'operad libero $\Gamma(E)$ può essere ottenuto dall'operad libero non unitale $\Psi(E)$ aggiungendo l'unità.

Vediamo ora come costruire l'operad libero non unitale $\Psi(E)$, prima di darne una descrizione precisa più avanti nella trattazione. L'operad libero non unitale $\Psi(E)$ deve essere costruito dalle \circ_i -composizioni di elementi di E in modo tale che valgano gli assiomi della Definizione 1.1.8. Per esempio, date $f \in E(2)$, $g \in E(3)$, $h \in E(2)$ e $l \in E(0)$, la componente $\Psi(E)(5)$ deve contenere le seguenti cinque composizioni

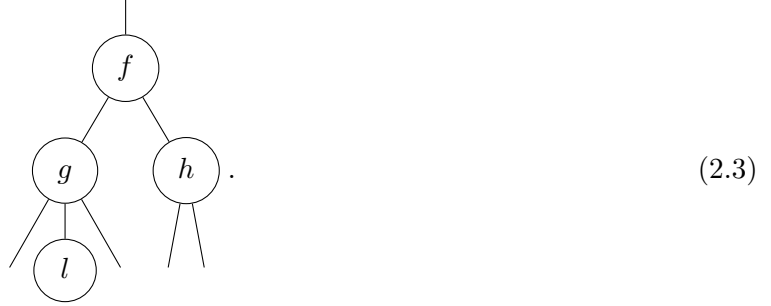
$$\begin{aligned} (f \circ_1 (g \circ_2 l)) \circ_3 h, \quad (f \circ_2 h) \circ_1 (g \circ_2 l), \quad ((f \circ_2 h) \circ_1 g) \circ_2 l, \\ ((f \circ_1 g) \circ_2 l) \circ_3 h, \quad ((f \circ_1 g) \circ_4 h) \circ_2 l. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Gli elementi di (2.2) possono essere descritti con i seguenti 'diagrammi di flusso'



I nodi di questi diagrammi sono etichettati con elementi f, g, h e l di E in modo tale che un elemento di $E(n)$ etichetti un nodo con n spigoli in input, $n \geq 0$. L'annidamento delle ellissi tratteggiate specifica l'ordine nel quale vengono eseguite le \circ_i -composizioni.

L'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 garantisce che il risultato delle composizioni non dipende dall'ordine, possiamo dunque rimuovere le ellissi e rappresentare il valore comune delle composizioni col seguente diagramma:



Il diagramma (2.3), che determina un elemento dell'(ancora ipotetico) operad libero non unitale $\Psi(E)$ è un albero planare con radice, che è anche detto piano o ordinato.

Ricordiamo in tal proposito alcune definizioni. Un albero è un grafo non orientato, connesso e aciclico. Per un albero T , indichiamo con $Vert(T)$ l'insieme dei suoi vertici e con $Edg(T)$ l'insieme dei suoi lati. Il numero dei lati adiacenti ad un dato vertice $v \in Vert(T)$ è detto valenza di v e viene indicato con $val(v)$. Assumendo che sia dato l'insieme

$$ext(T) \subseteq \{v \in Vert(T), val(v) = 1\}$$

dei vertici esterni, i restanti vertici sono detti interni. Indichiamo con

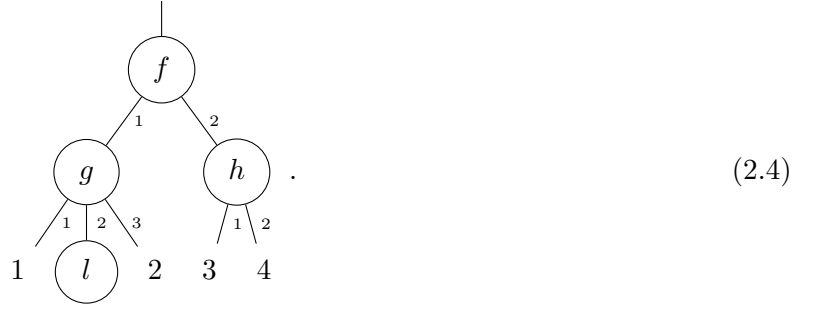
$$vert(T) := Vert(T) \setminus ext(T)$$

l'insieme di tutti i vertici interni. Per adesso assumeremo che i nostri alberi abbiano almeno un vertice interno. Ciò esclude, a questo livello, l'albero eccezionale formato da due vertici esterni connessi da un lato.

I lati adiacenti ai vertici esterni sono detti gambe di T . Un albero è radicato (o con radice) se a una delle sue gambe viene assegnato il ruolo di radice. Possiamo poi orientare naturalmente tutti gli altri lati in due modi, rispettivamente da o verso la radice, in particolare in questa trattazione optiamo per il secondo. Le gambe che non sono la radice sono dette foglie di T . Per esempio, l'albero in (2.3) ha quattro vertici interni etichettati con f, g, h e l , e quattro foglie. Infine, la planarità indica il fatto che abbiamo specificato un'immersione dell'albero T nel piano. Noi posizioneremo generalmente la radice in alto. Classicamente, con foglie e radice si indicano dei vertici di un albero e non dei lati, in particolare in un albero radicato si assegna il ruolo di radice a un vertice e tutti gli altri vertici esterni vengono detti foglie. Focalizzandoci però sui vertici interni di un albero e fissando come radice un vertice esterno, possiamo in un certo senso confondere i suoi vertici esterni con le sue gambe. Useremo questa stessa denominazione più avanti, ad esempio parlando dell'operad dendriforme e dell'operad dupliciale nel Capitolo 3. Sempre nel Capitolo 3, parleremo di alberi per i quali i vertici esterni saranno tanto importanti quanto quelli interni, come ad esempio gli alberi che compariranno nell'operad di pre-Lie o nell'operad non-associativo commutativo. In quel caso useremo la denominazione classica.

La planarità e la scelta di una radice nell'albero (2.3) danno un ordine totale sull'insieme $in(v)$ dei lati in input di ogni vertice interno $v \in T$, così come danno un ordine totale sull'insieme $Leaf(T)$ delle

foglie di T , enumerando lati in input e foglie da sinistra verso destra, come nel seguente diagramma

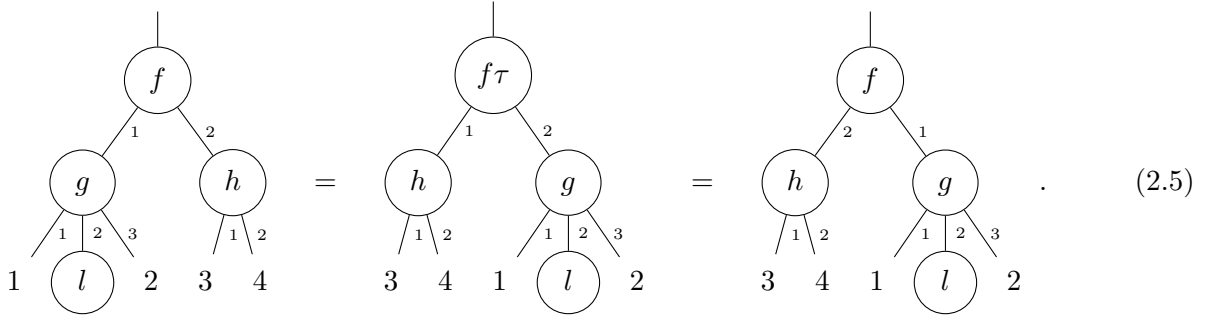


Per questo un albero radicato planare è anche detto ordinato. Il diagramma ci dice che l va inserita nel secondo input di g , g nel primo input di f e h nel secondo input di f . Usando ‘variabili astratte’ v_1, v_2, v_3 e v_4 , l’elemento rappresentato da (2.4) può essere scritto come la ‘composizione’ $f(g(v_1, l, v_2), h(v_3, v_4))$.

Ora dobbiamo tenere in considerazione l’azione del gruppo simmetrico. Se $\tau = (1, 2)$ è il generatore di Σ_2 , allora l’uguaglianza

$$f(g(v_1, l, v_2), h(v_3, v_4)) = f\tau(h(v_3, v_4), g(v_1, l, v_2))$$

di ‘composizioni astratte’ che segue dall’assioma di equivarianza della Definizione 1.1.8 si traduce nella seguente corrispondenza di diagrammi:



L’uguaglianza (2.5) mostra che l’assioma di equivarianza della Definizione 1.1.8 viola l’ordinamento indotto dall’immersione di T nel piano. Questo ci porta a concludere che i diagrammi che rappresentano operad liberi non unitali sono alberi radicati (non planari) etichettati.

Vediamo ora una costruzione precisa di $\Psi(E)$. Per prima cosa, vediamo come ogni Σ -modulo $E = \{E(n)\}_{n \geq 0}$ si estende naturalmente a un funtore (che indicheremo ancora con E) dalla categoria \mathbf{Set}_f degli insiemi finiti e le loro biiezioni alla categoria dei \mathbf{k} -moduli. Se X e Y sono insiemi finiti, denotiamo con

$$\mathbf{Bij}(Y, X) := \left\{ \theta : X \xrightarrow{\cong} Y \right\} \quad (2.6)$$

l’insieme di tutte le biiezioni tra X e Y . Ponendo $\mathbf{Aut}_X := \mathbf{Bij}(X, X)$ e $\mathbf{Aut}_Y := \mathbf{Bij}(Y, Y)$ i due gruppi di automorfismi di X e Y rispettivamente, si ha che \mathbf{Aut}_X agisce a destra su $\mathbf{Bij}(Y, X)$ tramite composizione e che \mathbf{Aut}_Y agisce a sinistra su $\mathbf{Bij}(Y, X)$ sempre tramite composizione. Inoltre le due azioni sono compatibili. In sostanza $\mathbf{Bij}(Y, X)$ è un \mathbf{Aut}_X -torsore destro e un \mathbf{Aut}_Y -torsore sinistro. Sia $S \in \mathbf{Set}_f$ un insieme finito di cardinalità n e sia $E = \{E(n)\}_{n \geq 0}$ un Σ -modulo. Sia ora $[n] := \{1, \dots, n\}$. Definiamo $E(S)$ nel modo seguente

$$E(S) := (E(n) \times \mathbf{Bij}([n], S)) / \sim, \quad (2.7)$$

con $(x, t) \sim (x', t')$ se e solo se esiste $\sigma \in \Sigma_n$ tale che $x' = x\sigma$ e $t' = \sigma^{-1}t$. Notiamo che $E([n])$ si può identificare con $E(n)$. Infine, dato $f \in \mathbf{Bij}(S, S')$, $E(f) : E(S) \rightarrow E(S')$ è il morfismo che manda

$[(x, t)]$ in $[(x, tf)]$, che è chiaramente ben definito per come è definita \sim .

Ricordiamo che un n -albero radicato etichettato è un albero radicato T insieme ad una biiezione $l : \text{Leaf}(T) \xrightarrow{\sim} [n]$. Sia \mathbf{Tree}_n la categoria degli n -alberi radicati etichettati e le loro biiezioni. Ricordiamo inoltre che un isomorfismo tra due n -alberi radicati etichettati è un isomorfismo di grafi che preserva la radice e le etichette e che un isomorfismo tra due grafi G e G' è una funzione $f : \text{Vert}(G) \rightarrow \text{Vert}(G')$ biunivoca tale che due vertici $u, v \in \text{Vert}(G)$ sono adiacenti se e solo se i due vertici $f(u), f(v) \in \text{Vert}(G')$ sono adiacenti.

Per $T \in \mathbf{Tree}_n$, si definisca

$$E(T) := \bigotimes_{v \in \text{vert}(T)} E(\text{in}(v)), \quad (2.8)$$

dove $\text{in}(v)$ è, come abbiamo detto, l'insieme dei lati in input di un vertice interno $v \in \text{vert}(T)$. Per quanto abbiamo visto prima, è facile vedere che $T \mapsto E(T)$ definisce un funtore dalla categoria \mathbf{Tree}_n alla categoria dei \mathbf{k} -moduli.

Ricordiamo che, dato un funtore covariante $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$, abbiamo un modo più diretto per esprimerne il colimite come

$$\text{colim}_{x \in \mathcal{D}} F(x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} F(x) / \sim,$$

dove \sim è la relazione di equivalenza generata da

$$F(y) \ni a \sim F(f)(a) \in F(z),$$

per ogni $a \in F(y)$, $y, z \in \mathcal{D}$ e $f \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(y, z)$. Definiamo infine

$$\Psi(E)(n) := \text{colim}_{T \in \mathbf{Tree}_n} E(T), \quad n \geq 0. \quad (2.9)$$

Si potrebbe semplificare (2.9) introducendo l'insieme $\mathcal{T}ree(n)$ di tutte le classi di isomorfismo di n -alberi in \mathbf{Tree}_n e definendo $\Psi(E)$ come

$$\Psi(E)(n) = \bigoplus_{[T] \in \mathcal{T}ree(n)} E(T), \quad n \geq 0, \quad (2.10)$$

dove non si fa uso del colimite. Le due nozioni sono equivalenti per come abbiamo riscritto la definizione di colimite attraverso un quoziente. Il lato negativo di (2.10) è che si presuppone la scelta di un rappresentante $[T]$ per ogni classe di isomorfismo in $\mathcal{T}ree(n)$, mentre la definizione (2.9) è funtoriale e ammette più facilmente generalizzazioni ad altri tipi di operad.

Una volta costruito quello che sarà l'operad libero non unitale $\Psi(E)$, possiamo usare (2.1) per costruire l'operad libero $\Gamma(E)$. Questo equivale ad allargare la categoria \mathbf{Tree}_n aggiungendo, in (2.9) per $n = 1$, l'albero eccezionale radicato \mathbf{l} con una foglia e nessun vertice interno. L'albero eccezionale rappresenta infatti l'unità che viene aggiunta nella costruzione fatta nella dimostrazione della Proposizione 1.2.8. Se indichiamo questa categoria allargata di alberi e loro morfismi con \mathbf{UTree}_n (che differisce da \mathbf{Tree}_n solo per $n = 1$), possiamo quindi definire

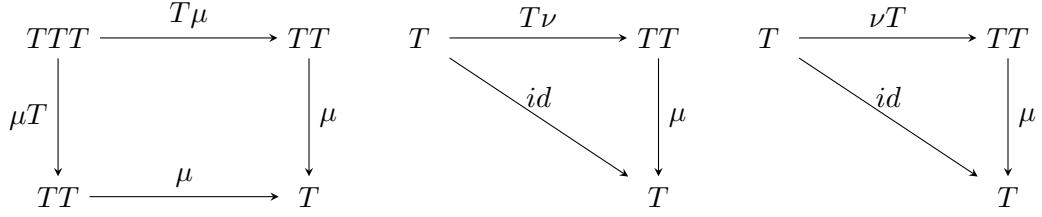
$$\Gamma(E)(n) := \text{colim}_{T \in \mathbf{UTree}_n} E(T), \quad n \geq 0. \quad (2.11)$$

Introduciamo ora il concetto di tripla e di algebra su una tripla, che ci serviranno per dare una definizione combinatorica di operad e per definire l'operad libero.

Data una categoria \mathcal{C} , sia $\text{End}(\mathcal{C})$ la categoria strettamente monoidale degli endofuntori di \mathcal{C} , dove la moltiplicazione è data dalla composizione di funtori.

Definizione 2.1.3. Una tripla (anche detta monade) T su una categoria \mathcal{C} è un monoide (T, μ, ν) associativo e unitale in $\text{End}(\mathcal{C})$. La moltiplicazione $\mu : TT \rightarrow T$ e il morfismo unitario $\nu : \text{id} \rightarrow T$

soddisfano gli assiomi dati dal rendere i diagrammi

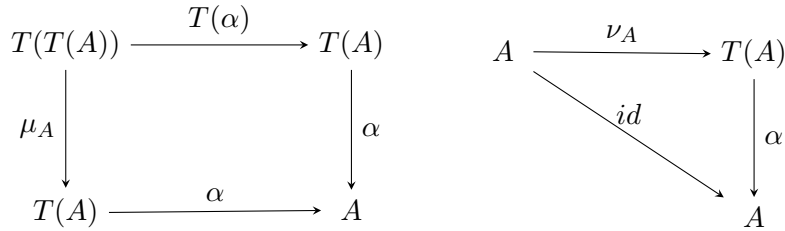


commutativi.

Definizione 2.1.4. Una T -algebra, o algebra sulla tripla T è un oggetto A di \mathcal{C} insieme a un morfismo di struttura $\alpha: T(A) \rightarrow A$ che soddisfa

$$\alpha T(\alpha) = \alpha \mu_A, \quad \alpha \nu_A = id_A,$$

ossia i diagrammi



commutano.

In particolare denoteremo con $\mathbf{Alg}_T(\mathcal{C})$ la categoria delle T -algebre in \mathcal{C} . Costruiamo ora le mappe

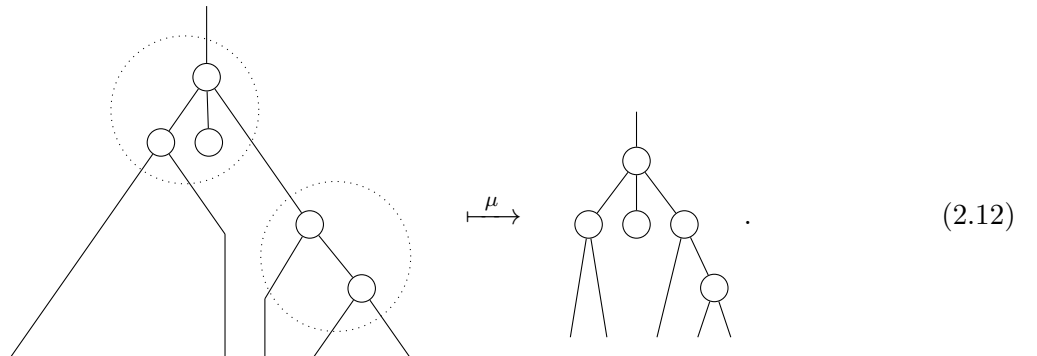
$$\mu: \Psi\Psi \rightarrow \Psi, \quad \nu: id \rightarrow \Psi$$

in modo che Ψ sia una tripla sulla categoria $\Sigma\text{-mod}$. Segue da (2.9) che, per ogni Σ -modulo E , si ha

$$\Psi\Psi(E)(n) := \operatorname{colim}_{T \in \mathbf{Tree}_n} \Psi(E)(T), \quad n \geq 0.$$

Gli elementi del membro di destra sono rappresentati da alberi radicati con vertici interni etichettati da elementi di $\Psi(E)$, mentre gli elementi di $\Psi(E)$ sono alberi radicati etichettati con elementi di E .

Possiamo quindi immaginare gli elementi di $\Psi\Psi(E)$ come alberi radicati con parentesi, come mostrato nel primo diagramma di (2.12). La moltiplicazione $\mu_E: \Psi\Psi(E) \rightarrow \Psi(E)$ è allora definita come la cancellazione delle parentesi:



Il primo diagramma di (2.12) rappresenta un elemento di $\Psi\Psi(E)(5)$ mentre il secondo diagramma rappresenta lo stesso elemento visto come un elemento di $\Psi(E)(5)$, dopo aver cancellato le parentesi rappresentate dalle due circonferenze puntinate. L'unità della tripla $\nu_E : E \rightarrow \Psi(E)$ identifica gli elementi di $E(n)$ con n -corolle etichettate per ogni $n \geq 0$, dove per n -corolla si intende un n -albero con un solo vertice interno, come mostrato dal seguente diagramma:

$$E(n) \ni f \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} | \\ \circlearrowleft f \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \quad \dots \quad n \end{array} \quad \in \Psi(E)(n), \quad n \geq 0.$$

Proposizione 2.1.5. *La costruzione appena fatta rende (Ψ, μ, ν) una tripla.*

Dimostrazione. Si veda il Lemma 5.5.2 di [LV12] per il caso unitale, analogo a quello non unitale. \square

Possiamo dare la definizione combinatorica di operad non unitale come algebra sulla tripla appena descritta e analogamente la definizione combinatorica di operad unitale come algebra sulla tripla analoga per Γ . Questa definizione combinatorica di operad è equivalente a quelle che abbiamo già visto. In particolare vale il seguente teorema.

Teorema 2.1.6. *Un Σ -modulo \mathcal{S} è una Ψ -algebra se e solo se è un operad non unitale ed è una Γ -algebra se e solo se è un operad. In breve*

$$\text{Alg}_\Psi(\Sigma\text{-mod}) \cong \psi\text{Oper}, \quad \text{Alg}_\Gamma(\Sigma\text{-mod}) \cong \text{Oper}.$$

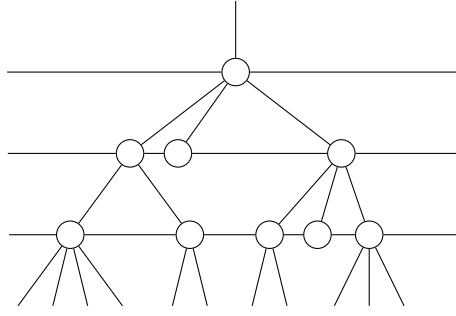
Dimostrazione. Si veda la Proposizione 5.5.4 di [LV12]. Vediamo un'idea della dimostrazione. Sia $\mathcal{S} \in \Sigma\text{-mod}$ una Ψ -algebra. La restrizione del morfismo di struttura $\alpha : \Psi(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$ alle componenti di $\Psi(\mathcal{S})$ corrispondenti ad alberi con un vertice interno definisce le \circ_i -composizioni, come indicato dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{c} | \\ \circlearrowleft f \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \dots \quad i \quad \dots \\ \circlearrowleft g \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} \quad \xrightarrow{\alpha} \quad f \circ_i g.$$

Viceversa, dato un operad non unitale \mathcal{S} , la struttura di Ψ -algebra $\alpha : \Psi(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$ è data dalla contrazione dei lati degli alberi attraverso le \circ_i -composizioni. Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, è sufficiente ricordare che l'unità dell'operad è rappresentata dall'albero eccezionale con un lato e nessun vertice interno. \square

Il vantaggio di questa definizione combinatorica di operad riguarda la sua generalizzabilità: rimpiazzando in (2.9) la categoria \mathbf{Tree}_n con un'altra categoria di alberi o grafi è possibile ottenere triple che definiscono altri tipi di operad e loro generalizzazioni, come vedremo in seguito. Ad esempio si può dimostrare che gli operad di May non unitali siano legati alla categoria \mathbf{MTree}_n degli alberi di

May, che sono, per definizione, alberi come quello rappresentato nel seguente diagramma



ossia alberi radicati i cui vertici interni possono essere ordinati in livelli. Gli operad di May non unitali sono allora algebre sulla tripla $M : \Sigma\text{-mod} \rightarrow \Sigma\text{-mod}$ definita da

$$M(E)(n) := \operatorname{colim}_{T \in \mathbf{MTree}_n} E(T), \quad n \geq 0.$$

Infine possiamo definire l'operad libero generato da un Σ -modulo.

Teorema 2.1.7. *Esiste una struttura naturale di operad non unitale sul Σ -modulo*

$$\Psi(E) = \{\Psi(E)(n)\}_{n \geq 0},$$

con le \circ_i -operazioni date dall'innesto di alberi e con l'azione del gruppo simmetrico data dal rinominare le foglie, in modo tale che $\Psi(E)$ sia l'operad libero non unitale generato dal Σ -modulo E .

Dimostrazione. In [LV12], nella Sezione 5.4.1 viene data una diversa costruzione dell'operad libero generato da un Σ -modulo e nel Teorema 5.4.2 si dimostra che tale operad libero verifica la proprietà universale della Definizione 2.1.1. Successivamente si dimostra nella Proposizione 5.5.5 che tali costruzioni sono equivalenti. \square

Vediamo ora alcune applicazioni della definizione combinatorica di operad. La seguente proposizione dimostra che, in particolari ipotesi, gli operad sono oggetti relativamente piccoli.

Proposizione 2.1.8. *Sia ora \mathbf{k} un campo. Sia $E = \{E(n)\}_{n \geq 0}$ un Σ -modulo tale che*

$$E(0) = E(1) = 0$$

e tale che, per ogni $n \geq 2$, $E(n)$ è finito-dimensionale. Allora gli spazi $\Psi(E)(n)$ e $\Gamma(E)(n)$ sono finito-dimensionali per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. Siccome $E(0) = E(1) = 0$, la somma diretta (2.10), si riduce a una somma su classi di isomorfismo di alberi ridotti, ossia di alberi per i quali ogni vertice ha almeno due lati in input. Per ogni n , \mathbf{Tree}_n risulta quindi essere finito, perciò a maggior ragione $\mathcal{T}ree(n)$ risulta essere finito. Una somma diretta finita di spazi finito-dimensionali è ancora finito-dimensionale. \square

Osservazione 2.1.9. Notiamo che, per ogni $n \geq 0$, le classi di isomorfismo di alberi non ridotti con n foglie non sono in numero finito.

Da una sorta di I Teorema di Isomorfismo per operad, in analogia con i teoremi di isomorfismo per moduli, segue che ogni operad \mathcal{P} è isomorfo a un quoziente $\Gamma(E)/(R)$, dove E e R sono Σ -moduli e (R) è l'ideale operadico generato da R in $\Gamma(E)$.

Esempio 2.1.10. L'operad delle algebre associative commutative Com dell'Esempio 1.1.7 è generato dal Σ -modulo

$$E_{Com}(n) := \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mu, & \text{per } n = 2, \\ 0, & \text{per } n \neq 2, \end{cases}$$

dove $\mathbf{k} \cdot \mu$ è la rappresentazione banale di Σ_2 . L'ideale operadico è generato da

$$R_{Com} := Span_{\mathbf{k}} \{ \mu(\mu \otimes id) - \mu(id \otimes \mu) \} \subseteq \Gamma(E_{Com})(3),$$

dove indichiamo con $\mu(\mu \otimes id) - \mu(id \otimes \mu)$ l'elemento $\gamma(\mu, \mu, e) - \gamma(\mu, e, \mu)$, con e unità di $\Gamma(E_{Com})$.

Allo stesso modo, l'operad $\mathcal{A}ss$ delle algebre associative visto nell'Esempio 1.1.3 è generato dal Σ -modulo

$$E_{Ass}(n) := \begin{cases} \mathbf{k}[\Sigma_2], & \text{per } n = 2, \\ 0, & \text{per } n \neq 2. \end{cases}$$

L'ideale operadico è generato da R_{Ass} , ossia la chiusura in $\mathbf{k}[\Sigma_3]$ della associatività

$$\alpha(\alpha \otimes id) - \alpha(id \otimes \alpha) \in \Gamma(E_{Ass})(3), \quad (2.13)$$

dove α è il generatore della rappresentazione regolare di $E_{Ass}(2) = \mathbf{k}[\Sigma_2]$.

Esempio 2.1.11. L'operad delle algebre di Lie $\mathcal{L}ie$ è il quoziente $\mathcal{L}ie := \Gamma(E_{\mathcal{L}ie})/(R_{\mathcal{L}ie})$, dove $E_{\mathcal{L}ie}$ è il Σ -modulo

$$E_{\mathcal{L}ie}(n) := \begin{cases} \mathbf{k} \cdot \beta, & \text{per } n = 2, \\ 0, & \text{per } n \neq 2, \end{cases}$$

dove $\mathbf{k} \cdot \beta$ è la rappresentazione segno di Σ_2 . L'ideale operadico $(R_{\mathcal{L}ie})$ è generato dall'identità di Jacobi

$$\beta(\beta \otimes id) + \beta(\beta \otimes id)c + \beta(\beta \otimes id)c^2 = 0, \quad (2.14)$$

dove $c \in \Sigma_3$ è la permutazione ciclica $c = (1, 2, 3)$.

Esempio 2.1.12. Vediamo come descrivere le presentazioni degli operad $\mathcal{A}ss$ e $\mathcal{L}ie$, date nell'Esempio 2.1.10 e nell'Esempio 2.1.11, in maniera grafica. Il generatore α di E_{Ass} è un'operazione con due input e un output, che possiamo raffigurare con \wedge . L'associatività (2.13) può essere quindi letta come

$$\wedge \wedge = \wedge \wedge,$$

perciò $\mathcal{A}ss = \Gamma(\wedge)/(\wedge \wedge = \wedge \wedge)$. Un'algebra sull'operad $\mathcal{L}ie$ è ancora generata da un'operazione bilineare \wedge , ma questa volta l'operazione è antisimmetrica

$$\begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \end{array} = - \begin{array}{c} \wedge \\ 2 \quad 1 \end{array}.$$

L'identità di Jacobi (2.14) si traduce in

$$\begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \wedge \\ 2 \quad 3 \quad 1 \end{array} + \begin{array}{c} \wedge \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} = 0.$$

2.2 Operad ciclici

In questa sezione, contrariamente a quanto abbiamo fatto in precedenza, sarà necessario avere, in alcuni casi, \mathbf{k} campo invece di anello commutativo. In questi casi parleremo di \mathbf{k} -spazi vettoriali invece che di \mathbf{k} -moduli.

Sia ora Σ_n^+ il gruppo di permutazioni dell'insieme $\{0, \dots, n\}$, che è chiaramente isomorfo a Σ_{n+1} . Identifichiamo Σ_n con il sottogruppo di Σ_n^+ delle permutazioni $\sigma \in \Sigma_n^+$ tali che $\sigma(0) = 0$. Se $\tau_n = (0, \dots, n)$ allora $\langle \tau_n, \Sigma_n \rangle = \Sigma_n^+$.

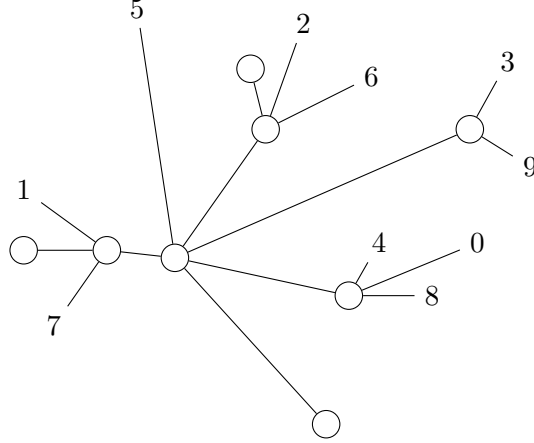
Ricordiamo che un Σ -modulo ciclico o Σ^+ -modulo è una successione $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$ tale che $W(n)$ è un $\mathbf{k}[\Sigma_n^+]$ -modulo destro per ogni $n \geq 0$. Sia $\Sigma^+\text{-mod}$ la categoria dei Σ -moduli ciclici. Così come gli operad sono Σ -moduli con una struttura aggiuntiva, gli operad ciclici sono Σ -moduli ciclici con una struttura aggiuntiva.

Costruiamo ora un analogo ciclico di (2.7). Dati $X \in \mathbf{Set}_f$ di cardinalità $n + 1$ e $W \in \Sigma^+ \text{-mod}$, allora

$$W((X)) := (W(n) \times \text{Bij}([n]^+, X)) / \sim, \quad (2.15)$$

dove $[n]^+ := \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$ e con $(x, t) \sim (x', t')$ se e solo se esiste $\sigma \in \Sigma_n^+$ tale che $x' = x\sigma$ e $t' = \sigma^{-1}t$. Le parentesi doppie in $W((X))$ indicano che l'elemento n -esimo del Σ -modulo ciclico $W = \{W(n)\}_{n \geq 0}$ è calcolato su un insieme con $n + 1$ elementi. Possiamo quindi identificare $W(n)$ con $W(\{0, \dots, n\})$, mentre identifichiamo $W(n + 1)$ con $W(\{0, \dots, n\})$. Infine, come fatto in precedenza, dato $f \in \text{Bij}(X, X')$, $W((f)) : W((X)) \rightarrow W((X'))$ è il morfismo che manda $[(z, r)]$ in $[(z, rf)]$.

I diagrammi che rappresentano operad ciclici sono alberi come il seguente



ossia n -alberi ciclici (ossia non radicati) etichettati, quindi alberi non radicati con gambe etichettate dall'insieme $\{0, \dots, n\}$. Siccome non assumiamo la scelta di una radice, i lati di un albero ciclico C non hanno un verso e non ha quindi senso parlare di input e output di un vertice interno $v \in \text{vert}(c)$. Senza una scelta della radice, non ha nemmeno senso parlare di livelli di un albero ciclico, quindi non potremo dare una definizione di operad ciclico non unitale di May.

Sia \mathbf{Tree}_n^+ la categoria degli n -alberi ciclici etichettati con le loro biiezioni. Per un Σ -modulo ciclico W e un albero ciclico T , abbiamo la seguente versione ciclica del prodotto (2.8)

$$W((T)) := \bigotimes_{v \in \text{vert}(T)} W((\text{edge}(v))).$$

La principale differenza tra questo prodotto e (2.8) è che invece dell'insieme $\text{in}(v)$ di lati in input del vertice interno v dell'albero radicato, qui abbiamo l'insieme $\text{edge}(v)$ di tutti i lati adiacenti al vertice interno v . Sia infine $\Psi_+(W)(n) : \Sigma^+ \text{-mod} \rightarrow \Sigma^+ \text{-mod}$ il funtore

$$\Psi_+(W)(n) := \text{colim}_{T \in \mathbf{Tree}_n^+} W((T)), \quad n \geq 0, \quad (2.16)$$

dotato della struttura della tripla di cancellazione delle parentesi simile a quella vista in precedenza. Useremo inoltre la tripla $\Gamma_+(W)(n) : \Sigma^+ \text{-mod} \rightarrow \Sigma^+ \text{-mod}$,

$$\Gamma_+(W)(n) := \text{colim}_{T \in \mathbf{UTree}_n^+} W((T)), \quad n \geq 0, \quad (2.17)$$

dove \mathbf{UTree}_n^+ è l'ovvia estensione di \mathbf{Tree}_n^+ tramite l'aggiunta dell'albero eccezionale con un lato e nessun vertice interno.

Definizione 2.2.1. *Un operad ciclico (rispettivamente un operad ciclico non unitale) è un'algebra sulla tripla Γ_+ (rispettivamente sulla tripla Ψ_+) definita in (2.17) (rispettivamente in (2.16)).*

Possiamo inoltre dare una definizione alternativa di operad ciclico che non si basa sulla costruzione di un'algebra.

Proposizione 2.2.2. *Un operad ciclico non unitale è la stessa cosa di un operad non unitale $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(n)\}_{n \geq 0}$ tale che l'azione destra di Σ_n su $\mathcal{C}(n)$ si estende, per ogni $n \geq 0$, ad una azione di Σ_n^+ con la proprietà che, per ogni $p \in \mathcal{C}(m)$ e $q \in \mathcal{C}(n)$, con $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, le \circ_i -composizioni rispettano*

$$(p \circ_i q) \tau_{m+n-1} = \begin{cases} (q \tau_n) \circ_n (p \tau_m), & \text{per } i = 1, \\ (p \tau_m) \circ_{i-1} q, & \text{per } 2 \leq i \leq m, \end{cases}$$

dove $\Sigma_j^+ \ni \tau_j = (0, \dots, j)$. La struttura appena descritta risulta essere un operad ciclico (unitale) se in più esiste una unità operadica $e \in \mathcal{C}(1)$ invariante per azione di Σ_1^+ .

Dimostrazione. Si veda il Teorema 5.8 di [MSS02]. □

Esempio 2.2.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $B : V \otimes V \rightarrow \mathbf{k}$ una forma bilineare simmetrica non degenera. La forma B induce un'identificazione

$$\text{Lin}(V^{\otimes n}, V) \ni f \mapsto \widehat{B}(f) := B(-, f(-)) \in \text{Lin}(V^{\otimes(n+1)}, \mathbf{k})$$

tra i due spazi di mappe lineari. L'azione destra del gruppo simmetrico Σ_n^+

$$\widehat{B}(f) \sigma(v_0, \dots, v_n) = \widehat{B}(f)(v_{\sigma^{-1}(0)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \Sigma_n^+, \quad v_0, \dots, v_n \in V,$$

definisce, tramite l'identificazione precedente, un'azione destra di Σ_n^+ su $\text{Lin}(V^{\otimes n}, V)$, ossia sull'elemento n -esimo dell'operad degli endomorfismi $\mathcal{E}nd_V = \{\mathcal{E}nd_V(n)\}_{n \geq 0}$ visto nell'Esempio 1.1.2. Con questa azione, $\mathcal{E}nd_V$ è un operad ciclico nella categoria degli spazi vettoriali, detto operad ciclico degli endomorfismi. Si ha infatti che

$$\widehat{B}(e) \tau_1(v_0, v_1) = \widehat{B}(e)(v_1, v_0) = B(v_1, id_V(v_0)) = B(v_1, v_0) = B(v_0, v_1) = \widehat{B}(e)(v_0, v_1),$$

con $v_0, v_1 \in V$, ricordando che B è simmetrica. Si ha quindi che $\mathcal{E}nd_V(1) \ni e = id_V$ è invariante per azione di Σ_1^+ . Verifichiamo ora che valgono le proprietà delle \circ_i -composizioni della Proposizione 2.2.2. Con le stesse notazioni, si ha che

$$\begin{aligned} \widehat{B}(p \circ_i q) \tau_{m+n-1}(v_0, \dots, v_{m+n-1}) &= \widehat{B}(p \circ_i q)(v_{m+n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{m+n-2}) = \\ &= B(v_{m+n-1}, p \circ_i q(v_0, \dots, v_{m+n-2})) = \\ &= B(v_{m+n-1}, p(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes q \otimes id_V^{\otimes(m-i)})(v_0, \dots, v_{m+n-1})). \end{aligned}$$

Se $i = 1$, possiamo prendere questa come definizione di $(q \tau_n) \circ_n (p \tau_m)$, altrimenti, se $2 \leq i \leq m$, si ha

$$\begin{aligned} \widehat{B}((p \tau_m) \circ_{i-1} q)((v_0, \dots, v_{m+n-1})) &= \widehat{B}(p) \tau_m(v_0, \dots, v_{i-2}, q(v_{i-1}, \dots, v_{n-i+2}), v_{n-i+3}, \dots, v_{m+n-1}) = \\ &= B(v_{m+n-1}, p(id_V^{\otimes(i-1)} \otimes q \otimes id_V^{\otimes(m-i)})(v_0, \dots, v_{m+n-1})). \end{aligned}$$

Sia \mathcal{C} un operad, $\alpha : \mathcal{C}(n) \otimes V^{\otimes n} \rightarrow V$, $n \geq 0$, una \mathcal{C} -algebra con lo spazio vettoriale V come nella Proposizione 1.3.2 e sia $B : V \otimes V \rightarrow U$ una forma bilineare su V a valori in uno spazio vettoriale U . Possiamo allora definire una mappa

$$\widetilde{B}(\alpha) : \mathcal{C}(n) \otimes V^{\otimes(n+1)} \rightarrow U, \quad n \geq 0, \tag{2.18}$$

come

$$\widetilde{B}(\alpha)(c \otimes v_0 \otimes \dots \otimes v_n) := B(v_0, \alpha(c \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n)), \quad c \in \mathcal{C}(n), \quad v_0, \dots, v_n \in V.$$

Supponiamo ora che \mathcal{C} sia un operad ciclico, in particolare $\mathcal{C}(n)$ è un Σ_n^+ -modulo destro per ogni $n \geq 0$. Diremo che la forma bilineare $B : V \otimes V \rightarrow U$ è invariante se le mappe $\widetilde{B}(\alpha)$ di (2.18) sono invarianti per azione diagonale di Σ_n^+ su $\mathcal{C}(n) \otimes V^{\otimes(n+1)}$, per ogni $n \geq 0$.

Osservazione 2.2.4. L'invarianza di $\tilde{B}(\alpha)$ per $n = 1$ e l'esistenza di una unità operadica implicano che B è simmetrica. Infatti sia $e \in \mathcal{C}(1)$ invariante per azione di Σ_1^+ come nella Proposizione 2.2.2. In particolare $e\tau_1 = e$. Allora, per ogni $v_0, v_1 \in V$ sia ha

$$B(v_0, v_1) = B(v_0, \alpha(e, v_1)) = \tilde{B}(\alpha)(e \otimes v_0 \otimes v_1) = \tilde{B}(\alpha)(e\tau_1 \otimes \tau_1(v_0 \otimes v_1)) = \tilde{B}(\alpha)(e \otimes v_1 \otimes v_0) = B(v_1, v_0).$$

Definizione 2.2.5. Un'algebra ciclica su un operad ciclico \mathcal{C} è uno spazio vettoriale V con una struttura di \mathcal{C} -algebra e una forma bilineare invariante non degenera $B : V \otimes V \rightarrow \mathbf{k}$.

Si può vedere che una algebra ciclica è la stessa cosa di un omomorfismo di operad $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}nd_V$, dove $\mathcal{E}nd_V$ è l'operad ciclico degli endomorfismi della coppia (V, B) definito nell'Esempio 2.2.3. Questo fatto non è altro che la variante ciclica della Proposizione 1.3.2.

Esempio 2.2.6. Un'algebra ciclica sull'operad ciclico Com è un'algebra di Frobenius, ossia una struttura data da una moltiplicazione associativa e commutativa $\cdot : V \otimes V \rightarrow V$ come già visto nell'Esempio 1.3.5, insieme ad una forma bilineare simmetrica non degenera $B : V \otimes V \rightarrow \mathbf{k}$, invariante nel senso che

$$B(a \cdot b, c) = B(a, b \cdot c), \quad \text{per ogni } a, b, c \in V.$$

In modo simile, un algebra di Lie ciclica è data da una parentesi di Lie $[-, -] : V \otimes V \rightarrow V$ e una forma bilineare simmetrica non degenera $B : V \otimes V \rightarrow \mathbf{k}$ tale che

$$B([a, b], c) = B(a, [b, c]), \quad \text{per ogni } a, b, c \in V.$$

2.3 PROP, properad e dioperad

Vediamo in questa sezione alcune nuove strutture algebriche, che possono essere ricondotte alla teoria degli operad grazie al punto di vista fornito dalla definizione combinatorica. In particolare, studiamo ora una struttura che ci permette di avere, oltre a diversi input come negli operad, anche diversi output.

Definizione 2.3.1. Un PROP (abbreviazione di categoria di PROdotti e Permutazioni) \mathbf{k} -lineare è una categoria simmetrica strettamente monoidale $\mathbf{P} = (\mathbf{P}, \odot, S, 1)$ arricchita in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ tale che

- (i) gli oggetti sono indicizzati dall'insieme (o identificati con l'insieme) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali,
- (ii) il prodotto soddisfa $m \odot n = m + n$, per ogni $m, n \in \mathbb{N} = \text{Ob}(\mathbf{P})$ (quindi l'unità $1 \in \mathbf{P}$ corrisponde a $0 \in \mathbb{N}$).

Nella Definizione 2.3.1, \mathbf{P} è una categoria arricchita in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ (detta anche $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$ -categoria) se $Mor_{\mathbf{P}}(m, n)$ è un \mathbf{k} -modulo per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e le operazioni della categoria monoidale \mathbf{P} (la composizione \circ , il prodotto \odot e la simmetria S) sono compatibili con questa struttura \mathbf{k} -lineare.

Per un PROP \mathbf{P} si definisca $\mathbf{P}(m, n) := Mor_{\mathbf{P}}(m, n)$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$. Su ogni $\mathbf{P}(m, n)$ si ha non solo una struttura di \mathbf{k} -modulo ma di (Σ_m, Σ_n) -bimodulo. Tale struttura è infatti indotta dalla simmetria S grazie alle identificazioni canoniche $m \cong 1^{\odot m}$ e $n \cong 1^{\odot n}$ date da (ii) della Definizione 2.3.1. Le permutazioni di Σ_m e Σ_n agiscono su una certa $f \in \mathbf{P}(m, n)$ permutando gli elementi di $m \cong 1^{\odot m}$ e di $n \cong 1^{\odot n}$ attraverso la simmetria S . Un PROP è una collezione $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ di (Σ_m, Σ_n) -bimoduli, con due tipi di composizioni, una detta orizzontale

$$\otimes : \mathbf{P}(m_1, n_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(m_s, n_s) \rightarrow \mathbf{P}(m_1 + \cdots + m_s, n_1 + \cdots + n_s),$$

indotta, per ogni $m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s \geq 0$, $s \geq 1$, dal prodotto monoidale \odot di \mathbf{P} , e una composizione detta verticale

$$\circ : \mathbf{P}(m, n) \otimes \mathbf{P}(n, k) \rightarrow \mathbf{P}(m, k),$$

data, per ogni $m, n, k \geq 0$, dalla legge di composizione di morfismi della categoria \mathbf{P} . L'unità monoidale è un elemento $e := 1 \in \mathbf{P}(1, 1)$.

Osservazione 2.3.2. Siano $P = \{P(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ e $Q = \{Q(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ due PROP. Un omomorfismo $f : P \rightarrow Q$ è una collezione $f = \{f(m, n) : P(m, n) \rightarrow Q(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ di mappe bi-equivarianti che commutano con la composizione orizzontale e con la composizione verticale. Un ideale in un PROP P è una collezione $I = \{I(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ di sottospazi $I(m, n) \subseteq P(m, n)$ (Σ_m, Σ_n) -invarianti, chiusa, nel solito senso della nozione di ideale, per composizioni orizzontali e composizioni verticali. Quozienti di un PROP per ideali PROPici sono definiti componente per componente, così come, dato un omomorfismo tra PROP, sono definiti componente per componente kernel, immagini, eccetera.

Esempio 2.3.3. Il PROP degli endomorfismi di un \mathbf{k} -modulo V è definito come

$$\text{End}_V = \{\text{End}_V(m, n)\}_{m, n \geq 0}$$

dove $\text{End}_V(m, n)$ è lo spazio delle mappe lineari $\text{Lin}(V^{\otimes n}, V^{\otimes m})$ con n input e m output, $e \in \text{End}_V(1, 1)$ è l'identità id_V di V , la composizione orizzontale è data dal prodotto tensore di mappe lineari e la composizione verticale è la classica composizione di mappe lineari.

Possiamo dare la seguente definizione di algebra su un PROP.

Definizione 2.3.4. Una P -algebra è un funtore simmetrico strettamente monoidale $\lambda : P \rightarrow \text{Mod}_{\mathbf{k}}$ di categorie monoidali arricchite. Il valore $\lambda(1)$ è il supporto dell'algebra λ .

Si può vedere che una P -algebra è la stessa cosa di un omomorfismo di PROP $\rho : P \rightarrow \text{End}_V$. Basta porre $V := \lambda(1)$ e ρ sarà definito a partire da come λ è definito sui morfismi di P . Le proprietà del funtore simmetrico strettamente monoidale sono in corrispondenza con le proprietà di omomorfismo di PROP.

Viceversa, dato ρ basterà porre $\lambda(1) := V$ e poi estendere λ sugli altri oggetti rispettando l'isomorfismo canonico dato da (ii) della Definizione 2.3.1. Infine λ sarà definito sui morfismi a partire da ρ . Come nella Proposizione 1.3.2, una P -algebra è determinata da un sistema

$$\alpha : P(m, n) \otimes V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes m}, \quad m, n \geq 0,$$

di mappe lineari che soddisfano assiomi appropriati, in corrispondenza con le proprietà di un certo omomorfismo di PROP $\rho : P \rightarrow \text{End}_V$.

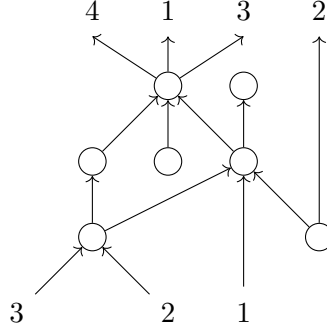
Vediamo ora come dare una definizione non distorta di PROP. Un Σ -bimodulo è un sistema $E = \{E(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ tale che $E(m, n)$ è un $(\mathbf{k}[\Sigma_m], \mathbf{k}[\Sigma_n])$ -bimodulo, per ogni $m, n \geq 0$. Sia $\Sigma\text{-bimod}$ la categoria dei Σ -bimoduli. Per $E \in \Sigma\text{-bimod}$ e $Y, X \in \text{Set}_f$ formati da m e n elementi rispettivamente, sia

$$E(Y, X) := (\text{Bij}(Y, [m]) \times E(m, n) \times \text{Bij}([n], X)) / \sim, \quad m, n \geq 0,$$

dove $\text{Bij}(-, -)$ è definito come in (2.6) e con $(r, x, t) \sim (r', x', t')$ se e solo se esiste $\tau \in \Sigma_m$ e $\sigma \in \Sigma_n$ tali che $x' = \tau x \sigma$, $r' = r \tau^{-1}$, $t' = \sigma^{-1} t$. I diagrammi legati ai PROP sono gli (m, n) -digrafi, ossia grafi finiti, non necessariamente connessi, tali che

- (i) ogni lato ha un verso;
- (ii) non ci sono dicicli (ovvero cicli orientati, cioè percorribili nel verso dei lati adiacenti);
- (iii) l'insieme delle gambe è bipartito nel sottoinsieme degli input, etichettati da $\{1, \dots, n\}$, e in quello degli output, etichettato da $\{1, \dots, m\}$.

Indicheremo con $\mathbf{Gr}(m, n)$ la categoria dei (m, n) -digrafi e dei loro isomorfismi. Il seguente diagramma



rappresenta, ad esempio, un elemento di $\mathbf{Gr}(4, 3)$. Il verso dei lati determina, per ogni vertice interno $v \in \text{vert}(G)$ di un digrafo G , una decomposizione

$$\text{edge}(v) = \text{in}(v) \sqcup \text{out}(v)$$

dei lati adiacenti a v nei due insiemi $\text{in}(v)$ dei lati in input e $\text{out}(v)$ dei lati in output. La coppia $(\#(\text{out}(v)), \#(\text{in}(v))) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è detta biarietà di v . Per aggiungere l'unità, abbiamo bisogno di estendere la categoria $\mathbf{Gr}(m, n)$, quando $m = n$, alla categoria $\mathbf{UGr}(n, n)$ aggiungendo il grafo eccezionale

$$\uparrow \uparrow \uparrow \cdots \uparrow \in \mathbf{UGr}(n, n), \quad n \geq 1,$$

con n input, n output e nessun vertice interno. Per un grafo $G \in \mathbf{UGr}(m, n)$ e un Σ -bimodulo E , sia

$$E(G) := \bigotimes_{v \in \text{vert}(G)} E(\text{out}(v), \text{in}(v))$$

e

$$\Gamma_{\mathbf{P}}(E)(m, n) := \text{colim}_{G \in \mathbf{UGr}(m, n)} E(G), \quad m, n \geq 0. \quad (2.19)$$

Il Σ -bimodulo $\Gamma_{\mathbf{P}}(E)$ è un PROP, con composizione verticale data dall'unione disgiunta di grafi, con composizione orizzontale data dall'innesto di gambe e con l'unità data dal grafo eccezionale $\uparrow \in \Gamma_{\mathbf{P}}(E)(1, 1)$.

Come visto in precedenza, (2.19) definisce una tripla $\Gamma_{\mathbf{P}} : \Sigma\text{-bimod} \rightarrow \Sigma\text{-bimod}$ con la moltiplicazione della tripla data dalla cancellazione delle parentesi. Si possono ora formulare i due seguenti risultati, analoghi a quelli visti nella teoria degli operad, corrispondenti alla Proposizione 57 e alla Proposizione 58 di [Mar06].

Proposizione 2.3.5. *Il PROP $\Gamma_{\mathbf{P}}(E)$ è il PROP libero generato dal Σ -modulo E .*

Proposizione 2.3.6. *I PROP sono algebre sulla tripla $\Gamma_{\mathbf{P}}$.*

Come abbiamo fatto in precedenza, potremmo considerare PROP non unitali definiti come algebre sulla tripla

$$\Psi_{\mathbf{P}}(E)(m, n) := \text{colim}_{G \in \mathbf{Gr}(m, n)} E(G), \quad m, n \geq 0,$$

sviluppando una teoria parallela a quella degli operad non unitali.

Esempio 2.3.7. Una bialgebra (associativa) è un \mathbf{k} -modulo V con una moltiplicazione $\mu : V \otimes V \rightarrow V$ e una comoltiplicazione $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$. La moltiplicazione è associativa

$$\mu(\mu \otimes \text{id}_V) = \mu(\text{id}_V \otimes \mu), \quad (2.20)$$

la comoltiplicazione è coassociativa

$$(\Delta \otimes \text{id}_V)\Delta = (\text{id}_V \otimes \Delta)\Delta. \quad (2.21)$$

Inoltre, data $\tau : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ la mappa lineare tale che $\tau(u \otimes v) = v \otimes u$ per ogni $u, v \in V$, moltiplicazione e comoltiplicazione sono compatibili, ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V & \xrightarrow{\Delta} & V \otimes V \\
 \Delta \otimes \Delta \downarrow & & & & \uparrow \mu \otimes \mu \\
 V \otimes V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{id_V \otimes \tau \otimes id_V} & & & V \otimes V \otimes V \otimes V
 \end{array} \quad (2.22)$$

commuta.

Con gli stessi simboli usati nell'Esempio 2.1.12, sia ora $\Gamma(\wedge, \vee)$ il PROP libero generato dalle due operazioni \wedge e \vee , rispettivamente di biarità $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Il PROP B che descrive le bialgebre è dato da

$$B = \Gamma(\wedge, \vee) / I_B,$$

dove I_B è l'ideale PROPico generato da

$$\wedge - \wedge, \quad \vee - \vee, \quad \chi - \text{diagramma}, \quad (2.23)$$

dove abbiamo usato le seguenti notazioni

$$\begin{aligned}
 \wedge &:= \wedge \circ (\wedge \otimes e), \quad \wedge := \wedge \circ (e \otimes \wedge), \quad \vee := (\vee \otimes e) \circ \vee, \quad \wedge := (e \otimes \vee) \circ \vee, \\
 \chi &:= \vee \circ \wedge, \quad \text{diagramma} := (\wedge \otimes \wedge) \circ \kappa \circ (\vee \otimes \vee),
 \end{aligned}$$

con $\Sigma_4 \ni \kappa = (2, 3)$. Infatti, moltiplicazione e comoltiplicazione corrispondono rispettivamente alle operazioni di biarità $(1, 2)$ e $(2, 1)$, quozientare per la prima relazione di (2.23) corrisponde a (2.20), quozientare per la seconda relazione di (2.23) corrisponde a (2.21), quozientare per la terza relazione di (2.23) corrisponde alla commutatività del diagramma (2.22).

Esempio 2.3.8. Come osservato in [Fio06], ogni operad \mathcal{P} genera un PROP P non simmetrico (ossia tale che per ogni $m, n \geq 0$ si ha che $P(m, n)$ non ha necessariamente struttura di (Σ_m, Σ_n) -bimodulo) tale che $P(1, n) = \mathcal{P}(n)$ per ogni $n \geq 0$. Le componenti di tale PROP sono date da

$$P(m, n) = \bigoplus_{r_1 + \dots + r_m = n} P(1, r_1) \otimes \dots \otimes P(1, r_m),$$

per ogni $m, n \geq 0$. Dati dunque

$$\begin{aligned}
 P(m, n) &= \bigoplus_{r_1 + \dots + r_m = n} P(1, r_1) \otimes \dots \otimes P(1, r_m), \\
 P(n, k) &= \bigoplus_{t_1 + \dots + t_n = k} P(1, t_1) \otimes \dots \otimes P(1, t_n),
 \end{aligned}$$

con $m, n, k \geq 0$, si ha che la composizione verticale $\circ : P(m, n) \otimes P(n, k) \rightarrow P(m, k)$ è definita componente per componente nel modo seguente. Dato l'isomorfismo

$$\begin{array}{c}
 (P(1, r_1) \otimes \dots \otimes P(1, r_m)) \otimes (P(1, t_1) \otimes \dots \otimes P(1, t_n)) \\
 \cong \downarrow \\
 (P(1, r_1) \otimes P(1, t_1) \otimes \dots \otimes P(1, t_{r_1})) \otimes \dots \otimes (P(1, r_m) \otimes P(1, t_{r_1 + \dots + r_{m-1} + 1}) \otimes \dots \otimes P(1, t_n))
 \end{array}$$

che commuta le componenti, possiamo definire

$$\begin{array}{c}
 (\mathbf{P}(1, r_1) \otimes \mathbf{P}(1, t_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(1, t_{r_1})) \otimes \cdots \otimes (\mathbf{P}(1, r_m) \otimes \mathbf{P}(1, t_{r_1+\cdots+r_{m-1}+1}) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(1, t_n)) \\
 \downarrow \underbrace{\gamma \otimes \cdots \otimes \gamma}_m \\
 \mathbf{P}\left(1, \sum_{i=1}^{r_1} t_i\right) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}\left(1, \sum_{i=r_1+\cdots+r_{m-1}+1}^n t_i\right).
 \end{array}$$

Dati invece

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(m, n) &= \bigoplus_{r_1+\cdots+r_m=n} \mathbf{P}(1, r_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(1, r_m), \\
 \mathbf{P}(l, k) &= \bigoplus_{t_1+\cdots+t_l=k} \mathbf{P}(1, t_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(1, t_l),
 \end{aligned}$$

con $m, n, l, k \geq 0$, la composizione orizzontale $\otimes : \mathbf{P}(m, n) \otimes \mathbf{P}(l, k) \rightarrow \mathbf{P}(m+l, n+k)$, che per semplicità di notazione scriveremo solo nel caso particolare di due bimoduli, è data dall'inclusione

$$\left\{ (r_1, \dots, r_m) \mid \sum_{i=1}^m r_i = n \right\} \times \left\{ (t_1, \dots, t_l) \mid \sum_{i=1}^l t_i = k \right\} \hookrightarrow \left\{ (s_1, \dots, s_{m+l}) \mid \sum_{i=1}^{m+l} s_i = n+k \right\}$$

che manda la coppia $(r_1, \dots, r_m), (t_1, \dots, t_l)$ in $(r_1, \dots, r_m, t_1, \dots, t_l)$. Risulta chiaro come definire tale inclusione nel caso generale. Per avere invece un PROP (simmetrico) bisogna definire

$$\mathbf{P}(m, n) = \bigoplus_{r_1+\cdots+r_m=n} ((\mathbf{P}(1, r_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}(1, r_m)) \times \Sigma_n) / \sim,$$

per ogni $m, n \geq 0$, con

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, \tau) \sim (g_1 \otimes \cdots \otimes g_n, \sigma)$$

se e solo se esistono $\sigma_1 \in \Sigma_{r_1}, \dots, \sigma_m \in \Sigma_{r_m}$ tale che

$$\begin{aligned}
 g_1 &= f_1 \sigma_1, \dots, g_m = f_m \sigma_m, \\
 \sigma &= (\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_m)^{-1} \tau.
 \end{aligned}$$

Le composizioni orizzontali e verticali funzionano esattamente come prima, a differenza dell'elemento appartenente al gruppo simmetrico, con la scelta di un rappresentante. Tali composizioni sono invarianti per scelta del rappresentante grazie agli assiomi di equivarianza degli operad. Per quanto riguarda gli elementi del gruppo simmetrico, con le notazioni delle precedenti composizioni, dati $\sigma \in \Sigma_n$ e $\tau \in \Sigma_k$ si ha che nella composizione orizzontale tali elementi si sommano $\sigma \oplus \tau \in \Sigma_{n+k}$, mentre nella composizione verticale si ottiene l'elemento $\sigma(t_1 + \cdots + t_n) \circ \tau \in \Sigma_k$. Non tutti i PROP sono però di questo tipo. Si può dimostrare che un PROP \mathbf{P} è generato da un operad se e solo se ha una presentazione del tipo $\mathbf{P} = \Gamma_{\mathbf{P}}(E)/(R)$, dove E è un Σ -bimodulo tale che $E(m, n) = 0$ per $m \neq 1$ e R è generato da elementi di $\Gamma_{\mathbf{P}}(E)(1, n)$, con $n \geq 0$. L'Esempio 2.3.7 mostra quindi un PROP che non può essere generato da alcun operad.

Vediamo ora costruzioni intermedie tra operad e PROP. Per fare ciò considereremo tipi intermedi di grafi.

Sia $\mathbf{UGr}_c(m, n)$ la sottocategoria piena di $\mathbf{UGr}(m, n)$ che ha come oggetti i grafi connessi. Per

$E \in \Sigma\text{-bimod}$, consideriamo quindi la tripla definita da

$$\Gamma_c(E)(m, n) := \operatorname{colim}_{G \in \mathbf{UGr}_c(m, n)} E(G), \quad m, n \geq 0. \quad (2.24)$$

Definizione 2.3.9. *Un properad è un'algebra sulla tripla $\Gamma_c : \Sigma\text{-bimod} \rightarrow \Sigma\text{-bimod}$.*

Siccome Γ_c è una sotto-tripla di Γ_P , ogni properad è automaticamente un PROP. Possiamo quindi definire algebre sui properad, così come algebre su altri tipi di PROP, come abbiamo definito le algebre sui PROP.

Osservazione 2.3.10. Il PROP descritto nell'Esempio 2.3.7 è di fatto un properad.

Esempio 2.3.11. Vediamo ora una struttura che è un PROP ma non un properad. Siano date una moltiplicazione $\mu = \wedge : V \otimes V \rightarrow V$, una comoltiplicazione $\Delta = \vee : V \rightarrow V \otimes V$ e una mappa lineare $f = \circ : V \rightarrow V$ tali che $\Delta \circ \mu = f \otimes f$, corrispondente alla relazione tra diagrammi

$$\vee = \circ \circ.$$

Questa struttura non può essere un properad perché il membro di destra non è un grafo connesso.

Consideriamo ora invece la sottocategoria piena $\mathbf{UGr}_D(m, n)$ della categoria $\mathbf{UGr}(m, n)$ che ha come oggetti i grafi connessi semplicemente connessi. Sia

$$\Gamma_D(E)(m, n) := \operatorname{colim}_{G \in \mathbf{UGr}_D(m, n)} E(G), \quad m, n \geq 0, \quad (2.25)$$

la tripla corrispondente.

Definizione 2.3.12. *Un dioperad è un'algebra sulla tripla $\Gamma_D : \Sigma\text{-bimod} \rightarrow \Sigma\text{-bimod}$.*

Esempio 2.3.13. Si può vedere che le bialgebre di Lie sono associate al PROP $\text{LieB} = \Gamma(\wedge, \vee) / \mathbf{I}_{\text{LieB}}$, con \wedge e \vee antisimmetriche in questo caso e con l'ideale \mathbf{I}_{LieB} generato da

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 1 & 2 & 3 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 2 & 3 & 1 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 3 & 1 & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 1 & 2 & 3 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 2 & 3 & 1 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 1 & 2 & 3 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 3 & 1 & 2 \\ & \diagdown & & \diagup \\ 1 & 2 & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 \end{array} - \begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 \end{array} - \begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ & \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 \end{array} + \begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup \\ 2 & 1 \end{array}, \quad (2.26) \end{array}$$

dove le etichette indicano le corrispondenti permutazioni degli input e degli output. Siccome tutti i grafi di (2.26) sono non solo connessi ma anche semplicemente connessi, il PROP associato alle bialgebre di Lie è di fatto un dioperad.

Osservazione 2.3.14. Il properad descritto nell'Esempio 2.3.7 contiene un grafo non semplicemente connesso (l'ultimo grafo in (2.23)) e non vi è modo di descriverlo utilizzando solamente grafi semplicemente connessi, quindi non può essere descritto da alcun dioperad.

Proposizione 2.3.15. *Sia $E = \{E(m, n)\}_{m, n \geq 0}$ un Σ -bimodulo tale che*

$$E(m, n) = 0 \quad \text{per} \quad m + n \leq 2 \quad (2.27)$$

e tale che $E(m, n)$ è finito-dimensionale per i restanti $m, n \geq 0$. Allora le componenti $\Gamma_D(E)(m, n)$ del dioperad libero $\Gamma_D(E)$ sono finito-dimensionali per ogni $m, n \geq 0$.

Dimostrazione. Come per la Proposizione 2.1.8, da (2.27) segue che il colimite (2.25) si riduce a una somma su classi di isomorfismo di alberi ridotti. \square

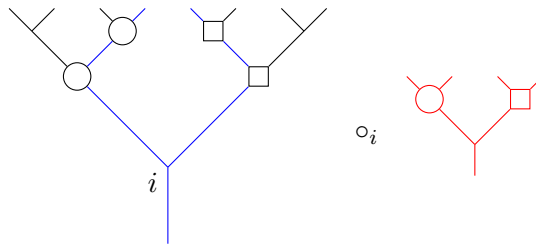
Capitolo 3

Operad e alberi

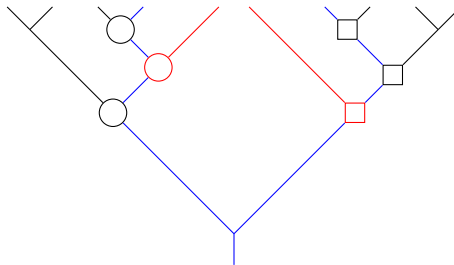
3.1 Operad dendriforme

Vediamo adesso alcuni operad che si costruiscono a partire da particolari tipi di alberi. A partire da ciò, vedremo come la teoria degli operad può essere applicata alla risoluzione di alcuni problemi combinatori. Sia ora \mathbf{k} un campo. Considereremo quindi in questa e in alcune prossime sezioni operad su spazi vettoriali invece che su moduli. In particolare, riprendo quanto fatto in [Cha07].

Vediamo ora come descrivere l'operad non simmetrico dendriforme $\mathcal{Dend} = \{\mathcal{Dend}(n)\}_{n \geq 1}$. Per ogni $n \geq 1$, $\mathcal{Dend}(n)$ è il \mathbf{k} -spazio vettoriale libero generato dagli alberi planari binari con n vertici interni, che chiameremo anche di grado n . Ricordiamo che un albero planare binario è un albero planare con radice tale che ogni vertice interno ha esattamente due lati in input, prendendo lati direzionati verso la radice, come abbiamo sempre fatto. L'unità dell'operad è data dall'albero $\Upsilon \in \mathcal{Dend}(1)$. Diamo ora un'idea di come definire le composizioni operadiche. Dati due alberi planari binari T e S , nella composizione $T \circ_i S$ si deve identificare la parte sinistra di S con uno specifico cammino in T e la parte destra di S con un altro cammino. Ad esempio, un termine della composizione

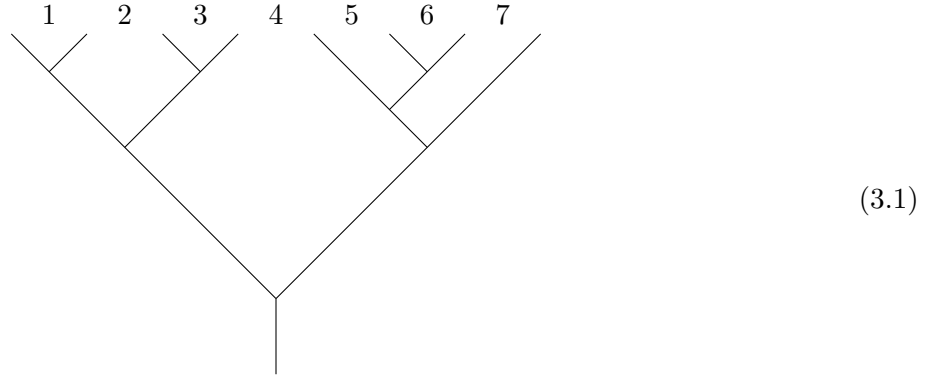


è dato dall'albero



dove abbiamo evidenziato i cammini coinvolti.

Tra le peculiarità di questo operad, si ha che possiamo definire su $\mathcal{Dend}(n)$ un'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$. Vediamo come introdurre questa azione tramite una corrispondenza tra i generatori di $\mathcal{Dend}(n)$ e particolari funzioni razionali. Fissiamo un intero n e n variabili u_1, \dots, u_n . Sia T un albero planare binario con n vertici interni. Una numerazione standard è data dall'identificare con numeri da 1 a n gli intervalli tra due foglie adiacenti, si veda ad esempio il seguente albero



(3.1)

con 7 vertici interni. Ogni vertice interno v dell'albero T definisce inoltre un insieme I_v di tutti e soli gli $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che, nella numerazione standard, tra le foglie che discendono dal vertice v , i compare tra la foglia più a sinistra e la foglia più a destra. L'albero T viene poi mappato nell'elemento

$$\frac{1}{\prod_{v \in \text{vert}(T)} \sum_{i \in I_v} u_i}, \quad (3.2)$$

dove abbiamo indicato con $\text{vert}(T)$ l'insieme di tutti i vertici interni di T , come fatto in precedenza. L'albero planare binario (3.1) viene quindi mappato nell'elemento

$$\frac{1}{(u_1)(u_1 + u_2 + u_3)(u_3)(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7)(u_5 + u_6 + u_7)(u_5 + u_6)(u_6)}.$$

Inoltre, fattorizzando le funzioni razionali, risulta che tale mappa è iniettiva per costruzione. Si può inoltre dimostrare che la mappa estesa per linearità a un elemento qualsiasi di $\mathcal{Dend}(n)$ è anch'essa iniettiva.

Possiamo ora definire un'azione di $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ sulle frazioni, in particolare ci basta definire l'azione del generatore $1 \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$. Tale azione è data dalla sostituzione

$$u_i \mapsto \begin{cases} u_{i-1}, & \text{per } i \neq 1; \\ -(u_1 + \dots + u_n), & \text{per } i = 1. \end{cases}$$

Tale azione è inoltre compatibile con la mappa iniettiva che abbiamo descritto in precedenza e dà quindi un'azione su $\mathcal{Dend}(n)$. In particolare l'azione del gruppo $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ è data dalla struttura di operad anticiclico di \mathcal{Dend} . Per una definizione precisa di operad anticiclico si veda [GK95]. Vediamo ora un esempio. Sia dato un generatore di $\mathcal{Dend}(3)$ rappresentato dall'elemento

$$\frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)}.$$

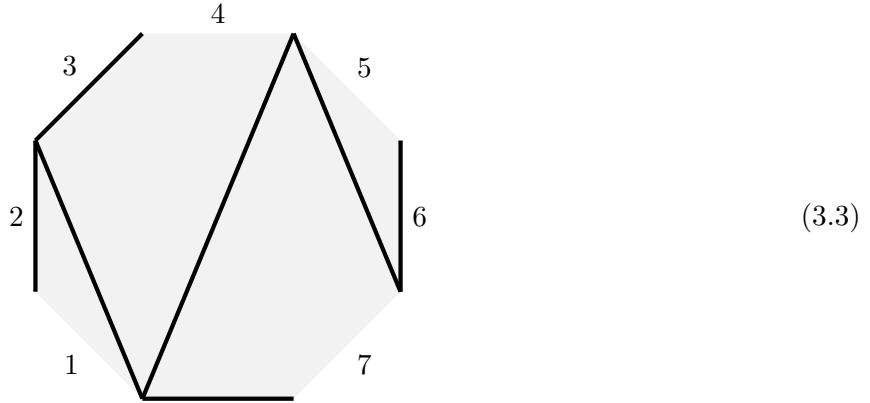
L'azione del gruppo $\mathbb{Z}/(3+1)\mathbb{Z}$ è la seguente

$$\begin{aligned} 0 \left(\frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)} \right) &= \frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)}; \\ 1 \left(\frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)} \right) &= -\frac{1}{(u_2)(u_2 + u_3)}; \\ 2 \left(\frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)} \right) &= -\frac{1}{(u_1)(u_1 + u_2)}; \\ 3 \left(\frac{1}{(u_3)(u_1 + u_2)} \right) &= -\frac{1}{(u_1 + u_2 + u_3)(u_2 + u_3)}. \end{aligned}$$

Vediamo ora un sotto-operad dell'operad dendriforme. Consideriamo, per ogni $n \geq 1$, i poligoni regolari con $n + 1$ lati, identifichiamo per ognuno di essi un lato che chiameremo base e etichettiamo infine i restanti lati con i numeri $1, \dots, n$. Ricordiamo ora che un n -albero senza intersezioni T è definito da un insieme $Edg(T)$ di lati e diagonali di uno di questi poligoni tale che

- (i) presi comunque $a, b \in T$, $a \cap b$ è l'insieme vuoto o un vertice del poligono;
- (ii) per ogni vertice v del poligono, esiste $a \in T$ tale che $v \in a$;
- (iii) non ci sono cicli;

i vertici $Vert(T)$ di T sono invece i vertici del poligono. Definiamo ora gli n -alberi senza intersezioni con base come gli n -alberi senza intersezioni tali che la base del poligono appartiene all'albero. Il seguente albero



mostra ad esempio un 7-albero senza intersezioni con base. Definiamo come prima una mappa da questi alberi alle funzioni razionali. Preso un n -albero senza intersezioni con base T , per ogni $a \in Edg(T)$ definiamo l'insieme I_a di tutti e soli gli $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che il lato i del poligono si trova dalla parte opposta della base rispetto alla divisione data dal lato o dalla diagonale a . Per i casi limite, se a è un certo lato j del poligono, allora $I_a = \{j\}$, mentre se a è la base del poligono, allora $I_a = \{1, \dots, n\}$. L'albero T viene poi mappato nell'elemento

$$\frac{1}{\prod_{a \in Edg(T)} \sum_{i \in I_a} u_i} . \quad (3.4)$$

L'albero (3.3) viene ad esempio mappato nell'elemento

$$\frac{1}{(u_2)(u_1 + u_2)(u_3)(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(u_5 + u_6)(u_6)(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7)} .$$

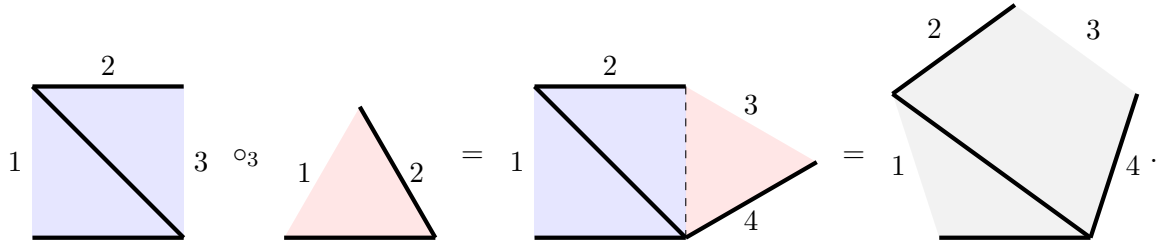
Inoltre, fattorizzando le funzioni razionali, risulta che tale mappa è iniettiva per costruzione.

Possiamo inoltre definire un operad non simmetrico $\mathcal{NCT} = \{\mathcal{NCT}(n)\}_{n \geq 1}$ degli alberi senza intersezioni con base. Per ogni $n \geq 1$, si prenda come $\mathcal{NCT}(n)$ il \mathbf{k} -spazio vettoriale libero generato dagli n -alberi senza intersezioni con base. L'unità dell'operad è l'unico albero senza intersezioni con base in un 2-poligono. Vediamo ora come definire le composizioni operadiche sui generatori. Sia T un n -albero senza intersezioni con base e sia S un m -albero senza intersezioni con base, con $n, m \geq 1$. Siano inoltre P e Q i loro rispettivi poligoni. La composizione

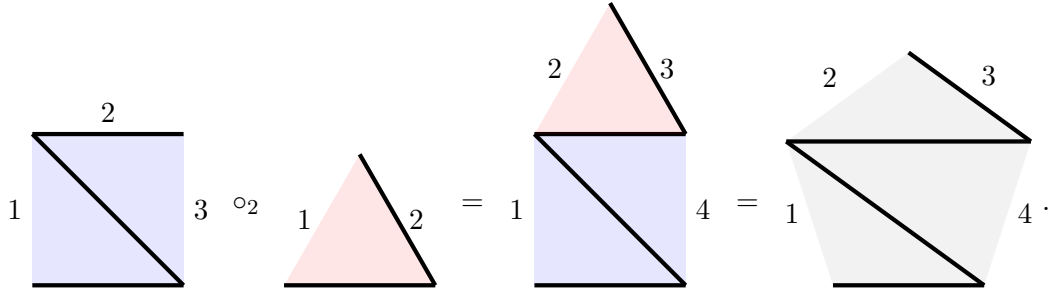
$$T \circ_i S \quad (3.5)$$

è data dal $(n + m - 1)$ -albero senza intersezioni con base che si ottiene incollando la base di Q al lato i -esimo di P e cancellando poi la base di Q se il lato i di P non appartiene all'albero, come nel

seguito esempio



Chiaramente se la base del secondo albero viene incollata a un lato del primo poligono che fa parte del primo albero, nel risultato della composizione questo lato non deve essere cancellato:



3.2 Operad di pre-Lie

Come nella sezione precedente, sia \mathbf{k} un campo. Iniziamo dando la definizione di algebra di pre-Lie. Vedremo in seguito come poter definire una struttura di algebra di pre-Lie su ogni operad non simmetrico non unitale su spazi vettoriali.

Definizione 3.2.1. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbf{k} . Un'algebra di pre-Lie è data dalla coppia (V, \curvearrowright) , con $\curvearrowright: V \otimes V \rightarrow V$ mappa bilineare tale che per ogni $x, y, z \in V$ vale

$$(x \curvearrowright y) \curvearrowright z - x \curvearrowright (y \curvearrowright z) = (x \curvearrowright z) \curvearrowright y - x \curvearrowright (z \curvearrowright y). \quad (3.6)$$

Osservazione 3.2.2. Osserviamo che ogni algebra di pre-Lie (V, \curvearrowright) definisce un'algebra di Lie $(V, [\cdot, \cdot])$ con parentesi di Lie

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$$

date da

$$[x, y] := x \curvearrowright y - y \curvearrowright x$$

per ogni $x, y \in V$. Tali parentesi di Lie sono chiaramente bilineari per bilinearità della mappa \curvearrowright . Sono inoltre nilpotenti, infatti

$$[x, x] = x \curvearrowright x - x \curvearrowright x = 0.$$

Verifichiamo infine che vale l'identità di Jacobi. Siano $x, y, z \in V$, si ha che

$$\begin{aligned} [[x, y], z] &= (x \curvearrowright y - y \curvearrowright x) \curvearrowright z - z \curvearrowright (x \curvearrowright y - y \curvearrowright x), \\ [[z, x], y] &= (z \curvearrowright x - x \curvearrowright z) \curvearrowright y - y \curvearrowright (z \curvearrowright x - x \curvearrowright z), \\ [[y, z], x] &= (y \curvearrowright z - z \curvearrowright y) \curvearrowright x - x \curvearrowright (y \curvearrowright z - z \curvearrowright y), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] &= (x \curvearrowright y) \curvearrowright z - (y \curvearrowright x) \curvearrowright z - z \curvearrowright (x \curvearrowright y) + z \curvearrowright (y \curvearrowright x) + \\
&+ (z \curvearrowright x) \curvearrowright y - (x \curvearrowright z) \curvearrowright y - y \curvearrowright (z \curvearrowright x) + y \curvearrowright (x \curvearrowright z) + \\
&+ (y \curvearrowright z) \curvearrowright x - (z \curvearrowright y) \curvearrowright x - x \curvearrowright (y \curvearrowright z) + x \curvearrowright (z \curvearrowright y) = \\
&= a - b - c + d + e - f - g + h + i - j - k + l = \\
&= (a - k - f + l) + (e - c - j + d) + (i - g - b + h) = 0.
\end{aligned}$$

Vediamo un primo collegamento tra gli operad e le algebre di pre-Lie, che vale in particolare grazie solamente all'assioma di associatività.

Proposizione 3.2.3. *Ogni operad non simmetrico non unitale $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 0}$ genera un'algebra di pre-Lie data da $(\bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{P}(n), \curvearrowright)$, con*

$$x \curvearrowright y := \sum_{i=1}^n x \circ_i y, \quad (3.7)$$

per ogni $x \in \mathcal{P}(n), y \in \mathcal{P}(m), n, m \geq 1$.

Dimostrazione. Verifichiamo che vale l'identità (3.6). Siano dunque $x \in \mathcal{P}(n), y \in \mathcal{P}(m), z \in \mathcal{P}(l)$, $n, m, l \geq 1$. Dalla definizione (3.7) si ha che

$$\begin{aligned}
(x \curvearrowright y) \curvearrowright z - x \curvearrowright (y \curvearrowright z) &= \sum_{j=1}^{n+m-1} \left(\sum_{i=1}^n x \circ_i y \right) \circ_j z - \sum_{t=1}^n x \circ_t \left(\sum_{k=1}^m y \circ_k z \right), \\
(x \curvearrowright z) \curvearrowright y - x \curvearrowright (z \curvearrowright y) &= \sum_{j=1}^{n+l-1} \left(\sum_{i=1}^n x \circ_i z \right) \circ_j y - \sum_{t=1}^n x \circ_t \left(\sum_{k=1}^l z \circ_k y \right).
\end{aligned}$$

Applicando l'assioma di associatività della Definizione 1.1.8 si ottengono rispettivamente

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+m-1} \left(\sum_{i=1}^n x \circ_i y \right) \circ_j z - \sum_{t=1}^n x \circ_t \left(\sum_{k=1}^m y \circ_k z \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j < i \\ j > i+m-1}}^{n+m-1} (x \circ_i y) \circ_j z, \\
\sum_{j=1}^{n+l-1} \left(\sum_{i=1}^n x \circ_i z \right) \circ_j y - \sum_{t=1}^n x \circ_t \left(\sum_{k=1}^l z \circ_k y \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j < i \\ j > i+l-1}}^{n+l-1} (x \circ_i z) \circ_j y.
\end{aligned}$$

Applicando nuovamente l'assioma di associatività della Definizione 1.1.8, si ha che

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j < i \\ j > i+m-1}}^{n+m-1} (x \circ_i y) \circ_j z = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j < i \\ j > i+l-1}}^{n+l-1} (x \circ_i z) \circ_j y,$$

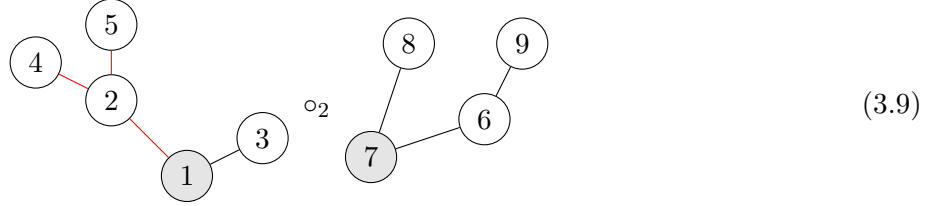
ossia vale l'identità (3.6). \square

Vediamo ora come definire l'operad \mathcal{PreLie} . Per comodità indicizzeremo gli elementi di \mathcal{PreLie} con sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} invece che con i numeri naturali. Dato un tale insieme I di cardinalità $n \geq 1$, sia $\mathcal{PreLie}(I)$ il \mathbf{k} -spazio vettoriale libero generato dagli alberi radicati su I , con lati orientati verso la radice. L'azione del gruppo simmetrico, che lo rende di fatto un $\mathbf{k}[\Sigma_n]$ -spazio vettoriale, è data dalla permutazione delle etichette dei vertici. L'unità dell'operad è l'unico albero radicato sull'insieme $\{i\}$ per un qualsiasi singoletto. Vediamo infine di descrivere le composizioni operadiche. Per linearità, vediamo come comporre due alberi radicati T e S . Sia T un albero radicato su

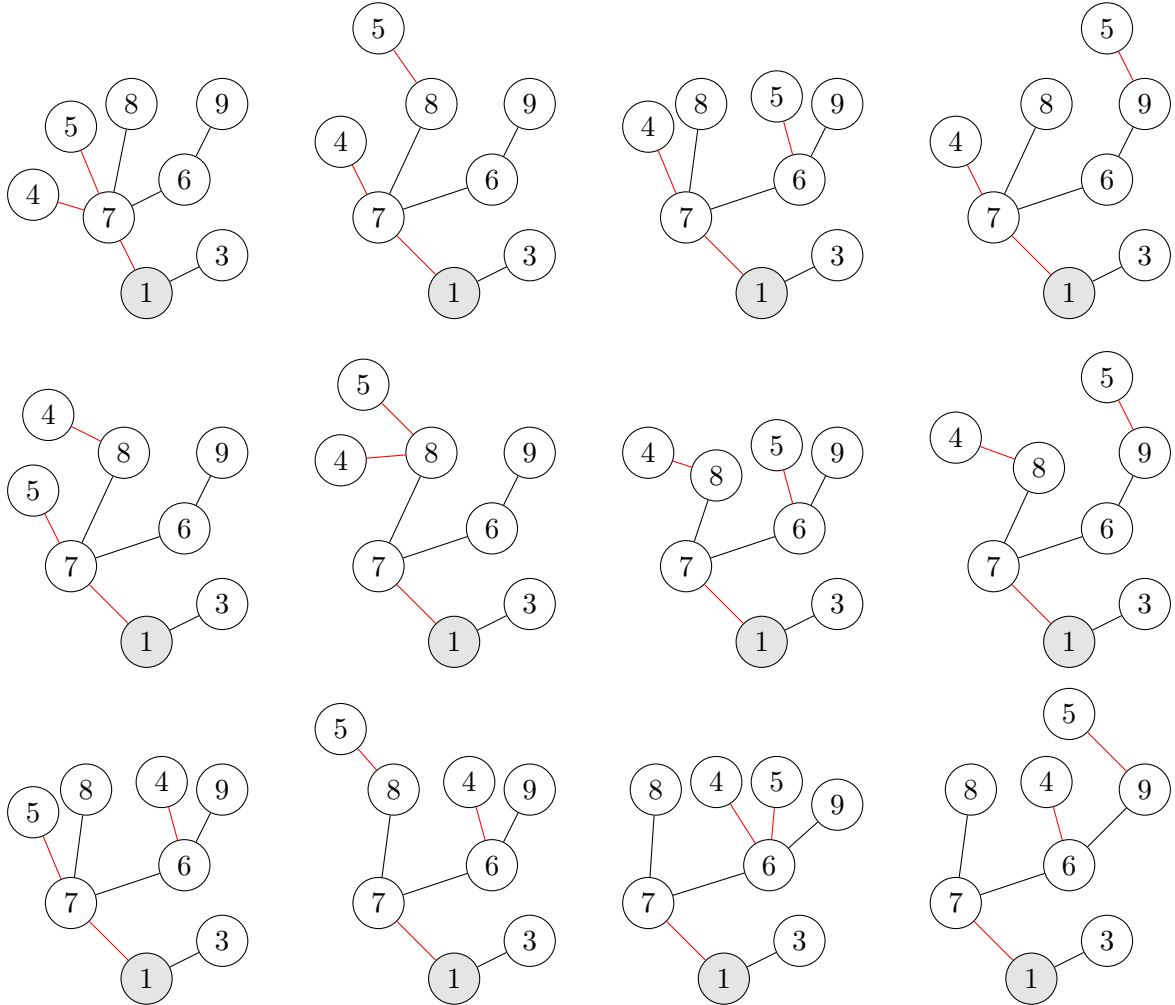
$\{i_1, \dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_n\}$ e sia S un albero radicato su $\{k_1, \dots, k_m\}$. La composizione

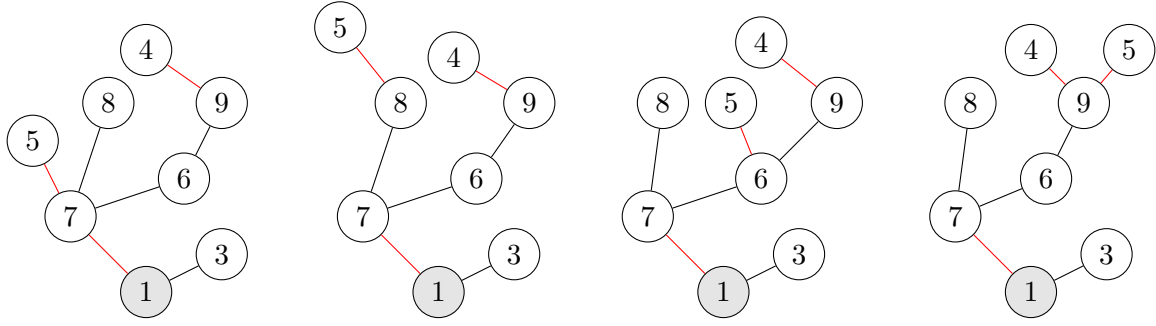
$$T \circ_{i_j} S \quad (3.8)$$

è una somma di alberi radicati su $\{i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_n, k_1, \dots, k_m\}$. Tale somma è indicizzata dalle funzioni $\phi : \text{inVert}(T, i_j) \rightarrow \text{Vert}(S)$ dai vertici in input al vertice i_j di T ai vertici di S . Sia ϕ una di queste funzioni. L'albero corrispondente è così costruito: si rimuova il vertice i_j da T e si prenda l'unione disgiunta di questa foresta con l'albero S ; se i_j aveva un lato in output che lo collegava ad un vertice i_l , si connetta la radice di S a i_l ; si connettano i vertici $\text{inVert}(T, i_j)$ con i vertici di S secondo la funzione ϕ ; infine si prenda come radice del nuovo albero la radice di T se i_j non era la radice di T , si prenda come radice la radice di S altrimenti. Vediamo ora un esempio. Sia data la seguente composizione



di un elemento di $\mathcal{PreLie}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ con elemento di $\mathcal{PreLie}(\{6, 7, 8, 9\})$, dove abbiamo indicato in grigio le radici e in rosso i lati coinvolti nella composizione. Tale composizione è data dalla somma dei seguenti elementi di $\mathcal{PreLie}(\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$





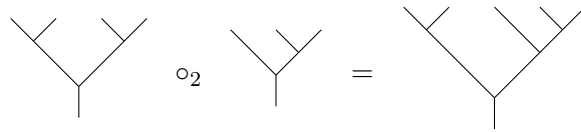
per i quali le corrispondenti funzioni ϕ sono le seguenti

$\phi(4) = 7, \phi(5) = 7;$	$\phi(4) = 7, \phi(5) = 8;$	$\phi(4) = 7, \phi(5) = 6;$	$\phi(4) = 7, \phi(5) = 9;$
$\phi(4) = 8, \phi(5) = 7;$	$\phi(4) = 8, \phi(5) = 8;$	$\phi(4) = 8, \phi(5) = 6;$	$\phi(4) = 8, \phi(5) = 9;$
$\phi(4) = 6, \phi(5) = 7;$	$\phi(4) = 6, \phi(5) = 8;$	$\phi(4) = 6, \phi(5) = 6;$	$\phi(4) = 6, \phi(5) = 9;$
$\phi(4) = 9, \phi(5) = 7;$	$\phi(4) = 9, \phi(5) = 8;$	$\phi(4) = 9, \phi(5) = 6;$	$\phi(4) = 9, \phi(5) = 9.$

3.3 L'operad dupliciale e l'operad non-associativo commutativo

Vediamo in questa sezione due esempi di operad nella categoria monoidale $\mathbf{Set} = (\mathbf{Set}, \times)$ degli insiemi e del loro prodotto cartesiano. Definiamo ora l'operad non simmetrico dupliciale $\mathcal{OU} = \{\mathcal{OU}(n)\}_{n \geq 1}$ tale che, per ogni $n \geq 1$, $\mathcal{OU}(n)$ è l'insieme degli alberi planari binari con n vertici interni. Possiamo numerare in maniera canonica i vertici interni di un albero planare binario ricorsivamente: numerando i vertici interni della parte sinistra da 1 a $k-1$, etichettando con k l'unico vertice collegato alla radice e numerando i vertici della parte destra da $k+1$ a n .

L'unità dell'operad è data dall'unico albero planare binario con un vertice interno $\Upsilon \in \mathcal{OU}(1)$. La mappa unitaria η è definita nel modo seguente: per ogni insieme con un solo elemento $\{*\}$ si ha $\eta(*) = \Upsilon \in \mathcal{OU}(1)$. Le composizioni operadiche sono definite tramite sostituzione locale di vertici interni nel seguente modo: dati due alberi $T \in \mathcal{OU}(n)$, $S \in \mathcal{OU}(m)$, con $m, n \geq 1$, si ha che $T \circ_i S$ è l'albero ottenuto sostituendo un intorno del vertice i di T con l'albero S identificando la foglia più a sinistra di S con il lato sinistro del vertice i e identificando la foglia più a destra di S con il lato destro del vertice i . Si veda ad esempio la seguente composizione



data da $T \circ_2 S \in \mathcal{OU}(4)$, con $T \in \mathcal{OU}(3)$, $S \in \mathcal{OU}(2)$.

In questo operad possiamo inoltre definire due operazioni associative: il prodotto over

$$/_{(n,m)} : \mathcal{OU}(n) \times \mathcal{OU}(m) \rightarrow \mathcal{OU}(n+m)$$

e il prodotto under

$$\backslash_{(n,m)} : \mathcal{OU}(n) \times \mathcal{OU}(m) \rightarrow \mathcal{OU}(n+m),$$

che indicheremo semplicemente con $/$ e \backslash quando m e n saranno chiari dal contesto o quando non sarà necessario specificarli. Dati due alberi T e S , il prodotto over T/S è dato dall'albero ottenuto innestando la radice di T sulla foglia più a sinistra di S ; il prodotto under $T \backslash S$ è dato dall'albero ottenuto innestando la radice di S sulla foglia più a destra di T . Prendiamo nuovamente i due alberi definiti nell'esempio di composizione precedente e vediamo come sono definiti i prodotti over e under.

Abbiamo in particolare

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} & / & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}, \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} & \backslash & \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array}.
 \end{array}
 \end{array}$$

È chiaro che i due prodotti sono associativi. Dati infatti T, S, R tre alberi, è equivalente innestare la radice di T/S sulla foglia più a sinistra di R o innestare la radice di T sulla foglia più a sinistra di S/R , ossia vale

$$(T/S)/R = T/(S/R).$$

Allo stesso modo è equivalente innestare la radice di R sulla foglia più a destra di $T \backslash S$ o innestare la radice di $S \backslash R$ sulla foglia più a destra di T , ossia vale

$$(T \backslash S) \backslash R = T \backslash (S \backslash R).$$

I prodotti over e under soddisfano inoltre

$$(T/S) \backslash R = T/(S \backslash R),$$

le due operazioni sono infatti entrambe equivalenti a innestare la radice di T sulla foglia più a sinistra di S e la radice di R sulla foglia più a destra di S . Da ciò e dall'associatività dei prodotti over e under si ha che è possibile scrivere il seguente albero

$$T_1/T_2/\cdots/T_{i-1}/T_i/S \backslash R_k \backslash R_{k-1} \backslash \cdots \backslash R_2 \backslash R_1$$

senza alcuna ambiguità. Il discorso è ben diverso se si hanno prodotti over a destra di prodotti under. In generale infatti si ha che

$$(T \backslash S)/R \neq T \backslash (S/R).$$

Presi infatti $T = S = R = \Upsilon$ si ha che

$$\begin{array}{c}
 (\Upsilon \backslash \Upsilon) / \Upsilon = \Upsilon \backslash (\Upsilon / \Upsilon) \\
 \Upsilon \backslash (\Upsilon / \Upsilon) \neq (\Upsilon \backslash \Upsilon) / \Upsilon
 \end{array}$$

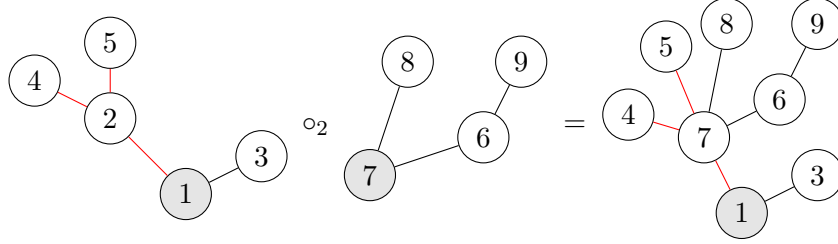
da cui $(\Upsilon \backslash \Upsilon) / \Upsilon \neq \Upsilon \backslash (\Upsilon / \Upsilon)$.

Vediamo ora come definire l'operad non-associativo commutativo \mathcal{NAP} . Tale operad è una sorta di equivalente insiemistico dell'operad di pre-Lie visto nella Sezione 3.2. Per comodità indicizzeremo anche in questo caso gli elementi di \mathcal{NAP} con sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} invece che con i numeri naturali. Dato un tale insieme I di cardinalità $n \geq 1$, sia $\mathcal{NAP}(I)$ l'insieme degli alberi radicati su I , con lati orientati verso la radice. L'azione del gruppo simmetrico è data dalla permutazione delle etichette dei vertici. L'unità dell'operad è l'unico albero radicato sull'insieme $\{i\}$ per un qualsiasi singoletto. La mappa unitaria η associa all'insieme $\{i\}$ tale albero. Vediamo infine di descrivere le composizioni

operadiche. Sia T un albero radicato su $\{i_1, \dots, i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, \dots, i_n\}$ e sia S un albero radicato su $\{k_1, \dots, k_m\}$. La composizione

$$T \circ_{i_j} S$$

è l'albero radicato così costruito: si rimuova il vertice i_j da T e si prenda l'unione disgiunta di questa foresta con l'albero S ; se i_j aveva un lato in output che lo collegava ad un vertice i_l , si connetta la radice di S a i_l ; si connettano poi i vertici $\text{inVert}(T, i_j)$ alla radice di S ; infine si prenda come radice del nuovo albero la radice di T se i_j non era la radice di T , si prenda come radice la radice di S altrimenti. Questa definizione è equivalente a quella fatta per l'operad PreLie prendendo come unica funzione $\phi : \text{inVert}(T, i_j) \rightarrow \text{Vert}(S)$ quella che manda ogni lato in input al vertice i_j di T nella radice di S . Ricordando il risultato della composizione (3.9), il risultato di quella stessa composizione nell'operad \mathcal{NAP} è il seguente albero



che in PreLie equivale all'elemento della sommatoria corrispondente alla funzione $\phi(4) = \phi(5) = 7$.

3.4 Da operad a gruppi

Vediamo ora come associare ad ogni operad un particolare gruppo, definito su un certo insieme di serie di potenze formali generalizzate, con l'operazione di gruppo definita a partire dalle mappe di composizione dell'operad. Cominciamo dando una costruzione di questo gruppo per operad non simmetrici su spazi vettoriali. Sia $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$ un tale operad. Definiamo l'insieme

$$\widehat{\mathcal{P}} := \prod_{n \geq 1} \mathcal{P}(n). \quad (3.10)$$

Dati due elementi $x, y \in \widehat{\mathcal{P}}$ tali che $x = \sum_{j \geq 1} x_j$, $y = \sum_{k \geq 1} y_k$, definiamo il seguente prodotto

$$x \circ y := \sum_{j \geq 1} \sum_{k_1, \dots, k_j \geq 1} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j}), \quad (3.11)$$

che è \mathbf{k} -lineare nel primo argomento

Proposizione 3.4.1. *Il prodotto $\circ : \widehat{\mathcal{P}} \times \widehat{\mathcal{P}} \rightarrow \widehat{\mathcal{P}}$ è associativo e l'unità dell'operad $e \in \mathcal{P}(1)$ è elemento neutro per il prodotto \circ . Si ha quindi che $(\widehat{\mathcal{P}}, \circ)$ è un monoide.*

Dimostrazione. Siano $x, y, z \in \widehat{\mathcal{P}}$, con $x = \sum_{j \geq 1} x_j$, $y = \sum_{k \geq 1} y_k$, $z = \sum_{l \geq 1} z_l$. Per ogni $m \geq 1$ e per ogni $t_1, \dots, t_m \geq 1$, definiamo $h_m = t_1 + \dots + t_m$. Si ha che

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= \sum_{n \geq 1} \sum_{p_1, \dots, p_n \geq 1} \gamma((x \circ y)_n, z_{p_1}, \dots, z_{p_n}) = \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{t_1, \dots, t_r \geq 1} \sum_{s_1, \dots, s_{h_r} \geq 1} \gamma(\gamma(x_r, y_{t_1}, \dots, y_{t_r}), z_{s_1}, \dots, z_{s_{h_r}}), \\ x \circ (y \circ z) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{p_1, \dots, p_n \geq 1} \gamma(x_n, (y \circ z)_{p_1}, \dots, (y \circ z)_{p_n}) = \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{t_1, \dots, t_r \geq 1} \sum_{s_1, \dots, s_{h_r} \geq 1} \gamma(x_r, \gamma(y_{t_1}, z_{s_1}, \dots, z_{s_{h_1}}), \dots, \gamma(y_{t_r}, z_{s_{h_{r-1}+1}}, \dots, z_{s_{h_r}})). \end{aligned}$$

Per l'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 risulta $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, ossia il prodotto \circ è associativo. Sia ora $x = \sum_{j \geq 1} x_j \in \widehat{\mathcal{P}}$. Si ha che

$$x \circ e = \sum_{j \geq 1} \gamma(x_j, e, \dots, e) = \sum_{j \geq 1} x_j = x,$$

$$e \circ x = \sum_{k_1 \geq 1} \gamma(e, x_{k_1}) = \sum_{k_1 \geq 1} x_{k_1} = x,$$

ossia e è elemento neutro per \circ . □

La proposizione seguente definisce il gruppo $G_{\mathcal{P}}$ associato all'operad \mathcal{P} .

Proposizione 3.4.2. *Sia $\widehat{\mathcal{P}}^*$ il gruppo degli elementi invertibili di $\widehat{\mathcal{P}}$. Definiamo $G_{\mathcal{P}}$ il sottoinsieme di $\widehat{\mathcal{P}}^*$ formato dagli elementi del tipo $e + \sum_{j \geq 2} x_j$. Tale $G_{\mathcal{P}}$ risulta essere un gruppo, che chiameremo anche \mathcal{P} -gruppo.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $G_{\mathcal{P}}$ è chiuso rispetto al prodotto \circ e all'inverso e che effettivamente $G_{\mathcal{P}} \subset \widehat{\mathcal{P}}^*$, ossia che ogni elemento di $G_{\mathcal{P}}$ è invertibile.

Siano dunque $x, y \in \widehat{\mathcal{P}}$, con $x = \sum_{j \geq 1} x_j, y = \sum_{k \geq 1} y_k$ tali che $x_1 = y_1 = e$. Risulta

$$\begin{aligned} x \circ y &= \sum_{j \geq 1} \sum_{k_1, \dots, k_j \geq 1} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j}) = \\ &= \gamma(x_1, y_1) + \sum_{k_1 \geq 2} \gamma(x_1, y_{k_1}) + \sum_{j \geq 2} \gamma(x_j, y_1, \dots, y_1) + \sum_{j \geq 2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j \geq j+1}} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j}) = \\ &= \gamma(e, e) + \sum_{k_1 \geq 2} \gamma(e, y_{k_1}) + \sum_{j \geq 2} \gamma(x_j, e, \dots, e) + \sum_{j \geq 2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j \geq j+1}} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j}) = \\ &= e + \sum_{k \geq 2} y_k + \sum_{j \geq 2} x_j + \sum_{l \geq 3} z(\bar{x}, \bar{y})_l, \end{aligned}$$

risulta dunque che $G_{\mathcal{P}}$ è chiuso rispetto al prodotto \circ . In particolare abbiamo definito

$$z(\bar{x}, \bar{y})_l := \sum_{j \geq 2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j = l}} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j})$$

per ogni $l \geq 3$, in modo tale che in $z(\bar{x}, \bar{y})_l$ compaiano tutti e soli i termini di

$$\sum_{j \geq 2} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_j \geq j+1}} \gamma(x_j, y_{k_1}, \dots, y_{k_j})$$

che appartengono a $\mathcal{P}(l)$. Vediamo ora che ogni elemento di $G_{\mathcal{P}}$ è invertibile. Per fare ciò, siccome siamo in un monoide, è sufficiente dimostrare che ogni elemento è invertibile a destra e a sinistra. Con le notazioni precedenti, sia dato $x \in G_{\mathcal{P}}$. Cerchiamo $y \in G_{\mathcal{P}}$ tale che $x \circ y = e$. Deve quindi risultare

$$\sum_{k \geq 2} y_k + \sum_{j \geq 2} x_j + \sum_{l \geq 3} z(\bar{x}, \bar{y})_l = 0,$$

da cui possiamo costruire y ponendo $y_2 = -x_2$ e $y_k = -(x_k + z(\bar{x}, \bar{y})_k)$ per $k \geq 3$. Notiamo infatti che in $z(\bar{x}, \bar{y})_k$ compaiono i termini y_{i_1}, \dots, y_{i_j} tali che $j \geq 2$, $i_1 + \dots + i_j = k$ e $i_1, \dots, i_j \geq 1$ da cui $i_1, \dots, i_j < k$. Infatti, se esistesse $i_m \geq k$, con $1 \leq m \leq j$, siccome $j \geq 2$, esisterebbe $i_n \geq 1$, con $n \neq m$, da cui $i_1 + \dots + i_j \geq i_m + i_n \geq k + 1$, assurdo. Possiamo quindi calcolare ogni y_k a partire da y_2, \dots, y_{k-1} . Vediamo ora l'invertibilità a sinistra. Con le notazioni precedenti, sia dato $x \in G_{\mathcal{P}}$.

Cerchiamo $y \in G_{\mathcal{P}}$ tale che $y \circ x = e$. Deve quindi risultare

$$\sum_{k \geq 2} y_k + \sum_{j \geq 2} x_j + \sum_{l \geq 3} z(\bar{y}, \bar{x})_l = 0,$$

da cui possiamo costruire y ponendo $y_2 = -x_2$ e $y_k = -(x_k + z(\bar{y}, \bar{x})_k)$ per $k \geq 3$. Notiamo infatti che in $z(\bar{y}, \bar{x})_k$ compaiono i termini y_j con $j < k$. Infatti, se fosse $j \geq k$, per come abbiamo definito $z(\bar{y}, \bar{x})_k$ si avrebbe $\gamma(y_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_j}) \in \mathcal{P}(i_1 + \dots + i_j)$ con $i_1 + \dots + i_j \geq j + 1 \geq k + 1$, assurdo. Possiamo quindi calcolare ogni y_k a partire da y_2, \dots, y_{k-1} . Inoltre sia per l'inverso a destra che per quello a sinistra abbiamo preso $y_1 = e$, quindi $G_{\mathcal{P}}$ è chiuso rispetto all'inverso. \square

L'analogia di (3.10) per un operad simmetrico è il seguente prodotto di coinvarianti

$$\widehat{\mathcal{P}} := \prod_{n \geq 1} (\mathcal{P}(n))/R(n) \quad (3.12)$$

dove $R(n)$ è il sottospazio vettoriale generato dagli elementi del tipo $f - f\sigma$, al variare di f in $\mathcal{P}(n)$ e di $\sigma \in \Sigma_n$. Il prodotto \circ è definito come in precedenza, scegliendo dei rappresentanti e calcolando su questi la mappa γ come in (3.11).

Proposizione 3.4.3. *Siano $x, y \in \widehat{\mathcal{P}}$ tali che $x = \sum_{j \geq 1} x_j$, $y = \sum_{k \geq 1} y_k$. Si scelgano inoltre, per ogni $j, k \geq 1$, dei rappresentanti \bar{x}_j e \bar{y}_k rispettivamente di x_j e y_k . Allora è ben definito il prodotto*

$$x \circ y := \sum_{j \geq 1} \sum_{k_1, \dots, k_j \geq 1} \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_1}, \dots, \bar{y}_{k_j}). \quad (3.13)$$

Dimostrazione. Presi comunque $\sigma_j \in \Sigma_j$ e $\tau_k \in \Sigma_k$, per ogni $j, k \geq 1$, si ha che

$$\gamma(\bar{x}_j \sigma_j, \bar{y}_{k_1} \tau_{k_1}, \dots, \bar{y}_{k_j} \tau_{k_j}) = \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \tau_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}} \tau_{k_{\sigma^{-1}(j)}})$$

per il primo diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1. Per il secondo diagramma dell'assioma di associatività della Definizione 1.1.1 si ha che

$$\gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \tau_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}} \tau_{k_{\sigma^{-1}(j)}}) = \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}})(\tau_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \oplus \dots \oplus \tau_{k_{\sigma^{-1}(j)}}),$$

inoltre, per definizione di $\widehat{\mathcal{P}}$, risulta che

$$\gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}})(\tau_{k_{\sigma^{-1}(1)}} \oplus \dots \oplus \tau_{k_{\sigma^{-1}(j)}}) = \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}}).$$

È chiaro ora che

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{k_1, \dots, k_j \geq 1} \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_1}, \dots, \bar{y}_{k_j}) = \sum_{j \geq 1} \sum_{k_1, \dots, k_j \geq 1} \gamma(\bar{x}_j, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(1)}}, \dots, \bar{y}_{k_{\sigma^{-1}(j)}})$$

come volevamo. \square

Una volta dimostrato che tale prodotto è ben definito, siccome tutti i calcoli vengono fatti sui rappresentanti, possiamo ricondurci a quanto visto prima e dimostrare allo stesso modo della Proposizione 3.4.1 che $(\widehat{\mathcal{P}}, \circ)$ è un monoide che ha come elemento neutro la classe dell'unità $e \in \mathcal{P}(1)$. Ancora, si dimostra allo stesso modo della Proposizione 3.4.2 che il sottospazio affine $G_{\mathcal{P}}$ delle serie che hanno la classe di e come termine di $\mathcal{P}(1)/R(1)$ è un gruppo, che chiameremo nuovamente \mathcal{P} -gruppo. Per quanto riguarda un operad su insiemi \mathcal{P} , come analogo di (3.10) sarà sufficiente prendere il \mathbf{k} -spazio vettoriale libero generato dagli elementi del tipo $\sum_{n \geq 1} x_n$ con $x_n \in \mathcal{P}(n)$ se l'operad \mathcal{P} non è simmetrico, con $x_n \in \mathcal{P}(n)/R(n)$ altrimenti, con le notazioni usate in precedenza.

Vediamo ora un esempio nel gruppo $G_{\mathcal{NAP}}$. Sia $\mathbf{C} \in G_{\mathcal{NAP}}$ la serie delle corolle

$$\mathbf{C} = \text{corolla} + \text{corolla con 1 figlio} + \text{corolla con 2 figli} + \text{corolla con 3 figli} + \dots \quad (3.14)$$

e sia $\mathbf{L} \in G_{\mathcal{NAP}}$ la serie a segni alterni degli alberi lineari

$$\mathbf{L} = \text{albero lineare a 1 nodo} - \text{albero lineare a 2 nodi} + \text{albero lineare a 3 nodi} - \text{albero lineare a 4 nodi} + \dots \quad (3.15)$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.4. *In $G_{\mathcal{NAP}}$ si ha che $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{L}$.*

Dimostrazione. Per prima cosa, definiamo un insieme di prodotti su \mathcal{NAP} nel seguente modo. Per ogni $n, m \geq 1$ sia

$$\triangleleft_{(n,m)} : \mathcal{NAP}(n) \times \mathcal{NAP}(m) \rightarrow \mathcal{NAP}(n+m)$$

tale che, presi due alberi T, S , il prodotto $T \triangleleft_{(n,m)} S$ è l'albero radicato così costruito: si prenda la foresta data dall'unione disgiunta dei due alberi T e S e si aggiunga un lato che parte dalla radice di S e arriva alla radice di T , si prenda infine la radice di T come radice dell'albero. Abbiamo qui usato per maggiore chiarezza la notazione classica per gli operad invece di quella insiemistica introdotta per l'operad \mathcal{PreLie} e l'operad \mathcal{NAP} . L'insieme di prodotti appena introdotto induce per linearità un prodotto

$$\triangleleft : G_{\mathcal{NAP}} \times G_{\mathcal{NAP}} \rightarrow G_{\mathcal{NAP}} \quad (3.16)$$

sul gruppo $G_{\mathcal{NAP}}$. Per definizione, vale una proprietà di distributività tra questo prodotto e il prodotto (3.11) del gruppo $G_{\mathcal{NAP}}$, in particolare si ha che

$$(x \triangleleft y) \circ z = (x \circ z) \triangleleft (y \circ z) \quad (3.17)$$

per ogni $x, y, z \in G_{\mathcal{NAP}}$. Sia ora data la seguente equazione in $G_{\mathcal{NAP}}$

$$A = \text{corolla} + A \triangleleft \text{corolla}. \quad (3.18)$$

Si ha che \mathbf{C} definito in (3.14) è l'unica soluzione di (3.18). Il fatto che sia soluzione è chiaro dalla definizione del prodotto (3.16). Sia ora \mathbf{B} un'altra soluzione di (3.18). Per differenza, si ha allora che

$$\mathbf{C} - \mathbf{B} = (\mathbf{C} - \mathbf{B}) \triangleleft \text{corolla}$$

e dalla definizione di \triangleleft , per un fatto di cardinalità di alberi, si ha necessariamente che $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Grazie a (3.17) possiamo ora calcolare

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \circ \mathbf{C}^{-1} &= \text{corolla} \circ \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} \triangleleft \text{corolla}) \circ \mathbf{C}^{-1}, \\ \text{corolla} &= \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{C} \circ \mathbf{C}^{-1}) \triangleleft (\text{corolla} \circ \mathbf{C}^{-1}), \\ \mathbf{C}^{-1} &= \text{corolla} - \text{corolla} \triangleleft \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned}$$

si ha inoltre che l'elemento \mathbf{L} definito in (3.15) soddisfa questa ultima equazione, da cui $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{L}$ per unicità della soluzione dell'equazione (3.18). \square

Vediamo ora due esempi di morfismi dal gruppo $G_{\mathcal{NAP}}$ al gruppo moltiplicativo delle serie di potenze formali, che indicheremo con H_m . Introduciamo quindi i due morfismi

$$\begin{aligned}\pi_c : G_{\mathcal{NAP}} &\rightarrow H_m, \\ \pi_l : G_{\mathcal{NAP}} &\rightarrow H_m,\end{aligned}\tag{3.19}$$

che chiameremo rispettivamente di proiezione sulle corolle e di proiezione sugli alberi lineari. Descriviamo come agiscono questi due morfismi. Dato un elemento $T \in G_{\mathcal{NAP}}$ possiamo riscrivere T in modo unico come la somma di tutti gli alberi radicati nel seguente modo

$$T = \sum_{n \geq 1} \sum_{T_j^n \in \mathcal{NAP}(n)} a_j T_j^n.$$

Per ogni $n \geq 1$ sia ora $T_{c(n)}^n$ l'unica corolla con n vertici e sia $T_{l(n)}^n$ l'unico albero lineare con n vertici. Notiamo ad esempio che $T_{c(i)}^i = T_{l(i)}^i$ per $i = 1, 2$ e che $T_{c(i)}^i \neq T_{l(i)}^i$ per $i \geq 3$. Definiamo i due morfismi di (3.19) nel modo seguente

$$\begin{aligned}\pi_c(T) &= \sum_{n \geq 0} a_{c(n+1)} t^n, \\ \pi_l(T) &= \sum_{n \geq 0} a_{l(n+1)} t^n.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Intuitivamente, il morfismo π_c “vede” tutte e sole le corolle e il morfismo π_l “vede” tutti e soli gli alberi lineari. Tali morfismi sono chiaramente suriettivi e non iniettivi. Ricordando che il prodotto di due elementi in F è dato dal prodotto di Cauchy

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n\right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n t^n\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) t^n,\tag{3.21}$$

verifichiamo che tutto funziona bene nel caso dei due elementi \mathbf{C} e \mathbf{L} definiti rispettivamente in (3.14) e in (3.15). Cominciamo dal morfismo di proiezione sulle corolle. Si ha che

$$\begin{aligned}\pi_c(\mathbf{C}) &= \sum_{n \geq 0} t^n, \\ \pi_c(\mathbf{L}) &= 1 - t,\end{aligned}$$

riscrivendo quindi

$$\begin{aligned}\pi_c(\mathbf{C}) &= \sum_{n \geq 0} c_n t^n, & (c_n)_{n \geq 0} &= (1, 1, 1, 1, \dots), \\ \pi_c(\mathbf{L}) &= \sum_{n \geq 0} l_n t^n, & (l_n)_{n \geq 0} &= (1, -1, 0, 0, \dots),\end{aligned}$$

per (3.21) si ha che

$$\pi_c(\mathbf{C})\pi_c(\mathbf{L}) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n c_k l_{n-k}\right) t^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n l_{n-k}\right) t^n = 1 + \sum_{n \geq 1} ((n-1) \cdot 0 - 1 + 1) t^n = 1 = \pi_c(\mathbf{C} \circ \mathbf{L}).$$

Vediamo ora il morfismo di proiezione sugli alberi lineari. In questo caso si ha che

$$\begin{aligned}\pi_l(\mathbf{C}) &= 1 + t, \\ \pi_l(\mathbf{L}) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n t^n,\end{aligned}$$

riscrivendo quindi

$$\begin{aligned}\pi_l(\mathbf{C}) &= \sum_{n \geq 0} c_n t^n, & (c_n)_{n \geq 0} &= (1, 1, 0, 0, \dots), \\ \pi_l(\mathbf{1}) &= \sum_{n \geq 0} l_n t^n, & (l_n)_{n \geq 0} &= (1, -1, 1, -1, \dots),\end{aligned}$$

per (3.21) si ha che

$$\pi_l(\mathbf{C})\pi_l(\mathbf{L}) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n c_k l_{n-k} \right) t^n = 1 + \sum_{n \geq 1} (l_n + l_{n-1}) t^n = 1 + \sum_{n \geq 1} ((-1)^n + (-1)^{(n-1)}) t^n = 1 = \pi_l(\mathbf{C} \circ \mathbf{L}).$$

In generale, dati due elementi $x, y \in G_{\mathcal{NAP}}$, si ha che $\pi_c(x \circ y) = \pi_c(x)\pi_c(y)$ e $\pi_l(x \circ y) = \pi_l(x)\pi_l(y)$. Questo perché, dalla definizione del prodotto (3.11) per $G_{\mathcal{NAP}}$, si ha che la composizione di due elementi contiene una corolla se e solo se i due elementi contengono corolle e la composizione di due elementi contiene un albero lineare se e solo se i due elementi contengono alberi lineari e le composizioni corrispondono al prodotto del gruppo moltiplicativo delle serie di potenze generalizzate. Ricordiamo che, per la Proposizione 3.4.2, in ogni elemento di $G_{\mathcal{NAP}}$ compare l'unità dell'operad \bigcirc , fondamentale nella composizione in $G_{\mathcal{NAP}}$. Infatti, per ottenere la corolla con $n - 1$ vertici, si deve comporre la corolla con j vertici con l'unità dell'operad all'altezza delle foglie e con la corolla con $n - j$ vertici all'altezza della radice. Si prenda ad esempio la seguente composizione

$$(\bigcirc + \text{diagramma}) \circ (\bigcirc + \text{diagramma}).$$

Denotiamo con K_n la corolla con n vertici, etichettati nel modo seguente: la radice etichettata con il numero 1 e le foglie etichettate da sinistra verso destra con i numeri da 2 a n . Nel nostro caso

$$\begin{aligned}(K_1 + K_3) \circ (K_1 + K_4) &= \gamma(K_1, K_1) + \gamma(K_1, K_4) + \gamma(K_3, K_1, K_1, K_1) + \gamma(K_3, K_1, K_1, K_4) + \\ &\quad + \gamma(K_3, K_1, K_4, K_1) + \gamma(K_3, K_4, K_1, K_1) + \gamma(K_3, K_1, K_4, K_4) + \\ &\quad + \gamma(K_3, K_4, K_1, K_4) + \gamma(K_3, K_4, K_4, K_1) + \gamma(K_3, K_4, K_4, K_4) = \\ &= K_1 + K_4 + K_3 + T_1 + T_2 + K_6 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6,\end{aligned}$$

dove l'albero T_i non è una corolla, per $i = 1, \dots, 6$. Questo corrisponde esattamente a

$$(1 + t^2)(1 + t^3) = 1 + t^3 + t^2 + t^5.$$

È inoltre chiaro che questo è l'unico modo di ottenere una corolla tramite composizione di alberi. Risulta quindi che π_c è un omomorfismo di gruppi. Lo stesso discorso vale per π_l con una differenza: per ottenere un albero lineare è necessario comporre un albero lineare con l'unità dell'operad all'altezza di tutti i vertici tranne l'unica foglia, all'altezza della quale si deve comporre l'albero lineare con un altro albero lineare. Vediamo un esempio. Denotiamo con L_n l'albero lineare con n vertici, etichettati con numeri da 1 a n dalla radice alla foglia. La seguente composizione

$$(\bigcirc + \text{diagramma}) \circ (\bigcirc + \text{diagramma})$$

è data da

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2) \circ (L_1 + L_3) &= \gamma(L_1, L_1) + \gamma(L_1, L_3) + \gamma(L_2, L_1, L_1) + \gamma(L_2, L_1, L_3) + \\ &\quad + \gamma(L_2, L_3, L_1) + \gamma(L_2, L_3, L_3) = L_1 + L_3 + L_2 + L_4 + S_1 + S_2,\end{aligned}$$

dove l'albero S_i non è un albero lineare, per $i = 1, 2$. Questo corrisponde esattamente a

$$(1+t)(1+t^2) = 1+t^2+t+t^3.$$

Passiamo ora al gruppo G_{OU} . È utile cominciare dando una definizione.

Definizione 3.4.5. Un albero planare binario è detto *pettine sinistro* (rispettivamente *pettine destro*) se può essere scritto come potenza dell'albero \swarrow per il prodotto over $/$ (rispettivamente per il prodotto under \searrow).

Un albero planare binario è detto *V-albero* se è l'albero \swarrow oppure se può essere scritto come l/r o come $l\searrow r$ per un certo pettine sinistro l e un certo pettine destro r .

Sia ora $E \in G_{OU}$ la serie di tutti gli alberi planari binari

$$E = \swarrow + \swarrow\swarrow + \swarrow\searrow + \swarrow\swarrow\swarrow + \swarrow\swarrow\searrow + \swarrow\searrow\swarrow + \swarrow\searrow\searrow + \swarrow\swarrow\swarrow\swarrow + \dots \quad (3.22)$$

e sia $V \in G_{OU}$ la serie a segni alterni dei V-alberi

$$V = \swarrow - \swarrow\swarrow - \swarrow\searrow + \swarrow\swarrow\swarrow + \swarrow\swarrow\searrow + \swarrow\searrow\swarrow + \swarrow\searrow\searrow + \dots, \quad (3.23)$$

dove per segni alterni intendiamo che il segno di un albero T con n vertici interni è dato da $(-1)^{(n-1)}$. Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.6. In G_{OU} si ha che $E^{-1} = V$.

Dimostrazione. Indichiamo sempre con $/$ e con \searrow l'estensione lineare in G_{OU} del prodotto over e del prodotto under rispettivamente. Per definizione, vale una proprietà di distributività tra questo prodotto e il prodotto (3.11) del gruppo G_{OU} , in particolare si ha che

$$\begin{aligned} (x/y) \circ z &= (x \circ z)/(y \circ z), \\ (x\searrow y) \circ z &= (x \circ z)\searrow(y \circ z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

per ogni $x, y, z \in G_{OU}$. Sia ora data la seguente equazione in G_{OU}

$$A = \swarrow + A/\swarrow + \swarrow\searrow A + A/\swarrow\searrow A. \quad (3.25)$$

Si ha che E definito in (3.22) è l'unica soluzione di (3.25). Il fatto che sia soluzione è chiaro dalla definizione dei prodotti $/$ e \searrow . Sia ora B un'altra soluzione di (3.25). Per differenza, si ha allora che

$$E - B = (E - B)/\swarrow + \swarrow\searrow(E - B) + (E - B)/\swarrow\searrow(E - B)$$

e dalla definizione di $/$ e di \searrow , per un fatto di cardinalità di alberi, si ha necessariamente che $B = E$. Grazie a (3.24) possiamo ora calcolare

$$\begin{aligned} E \circ E^{-1} &= \swarrow \circ E^{-1} + (E/\swarrow) \circ E^{-1} + (\swarrow\searrow E) \circ E^{-1} + (E/\swarrow\searrow E) \circ E^{-1}, \\ \swarrow &= E^{-1} + (E \circ E^{-1})/(\swarrow \circ E^{-1}) + (\swarrow \circ E^{-1})\searrow(E \circ E^{-1}) + (E \circ E^{-1})/(\swarrow \circ E^{-1})\searrow(E \circ E^{-1}), \\ E^{-1} &= \swarrow - \swarrow\swarrow/E^{-1} - E^{-1}\searrow\swarrow - \swarrow\searrow/E^{-1}\searrow\swarrow, \end{aligned}$$

si ha inoltre che l'elemento V definito in (3.23) soddisfa questa ultima equazione, da cui $E^{-1} = V$ per unicità della soluzione dell'equazione (3.25). \square

Vediamo ora due esempi di morfismi dal gruppo delle serie di potenze formali con operazione di gruppo data dalla composizione, che indicheremo con H_c , al gruppo G_{OU} . Ricordiamo che, dati

$f, g \in H_c$, con $f = \sum_{n \geq 1} f_n t^n$ e $g = \sum_{n \geq 1} g_n t^n$, l'operazione di gruppo è data da

$$fg = \left(\sum_{n \geq 1} f_n t^n \right) \left(\sum_{n \geq 1} g_n t^n \right) = \sum_{n \geq 1} f_n (g)^n = \sum_{n \geq 1} c_n t^n, \quad (3.26)$$

con

$$c_n = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ j_1 + \dots + j_k = n}} f_k g_{j_1} g_{j_2} \dots g_{j_k}.$$

Introduciamo quindi i due morfismi

$$\begin{aligned} \phi_l : H_c &\rightarrow G_{OU}, \\ \phi_r : H_c &\rightarrow G_{OU}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

che chiameremo rispettivamente di pettine sinistro e di pettine destro. Descriviamo come agiscono questi due morfismi. Dato un elemento $f \in H_c$, per quanto riguarda rispettivamente il morfismo di pettine sinistro e il morfismo di pettine destro, si tratta di identificare la potenza n -esima di t in f con la potenza n -esima dell'unità dell'operad per mezzo rispettivamente del prodotto over e del prodotto under, che chiameremo anche n -pettine sinistro o pettine sinistro di grado n e n -pettine destro o pettine destro di grado n rispettivamente. Più precisamente si ha che

$$\begin{aligned} f = \sum_{n \geq 1} f_n t^n &\xrightarrow{\varphi_l} \varphi_l(f) = f_1 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + f_2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + f_3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + \dots, \\ f = \sum_{n \geq 1} f_n t^n &\xrightarrow{\varphi_r} \varphi_r(f) = f_1 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + f_2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + f_3 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + \dots. \end{aligned}$$

Il prodotto (3.11) in G_{OU} di pettini sinistri corrisponde esattamente al prodotto (3.26) per le serie di potenze. Lo stesso si può dire per i pettini destri. Risulta quindi che ϕ_l e ϕ_r sono due omomorfismi di gruppi. Vediamo un caso semplice. Chiamiamo P_n il pettine sinistro di grado n . Usando la numerazione canonica introdotta nella scorsa sezione, la seguente composizione

$$\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} \right)$$

è data da

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_3) &= \gamma(P_1, P_1) + \gamma(P_1, P_3) + \gamma(P_2, P_1, P_1) + \gamma(P_2, P_1, P_3) + \gamma(P_2, P_3, P_1) + \\ &+ \gamma(P_2, P_3, P_3) = P_1 + P_3 + P_2 + P_4 + P_4 + P_6 = P_1 + P_3 + P_2 + 2P_4 + P_6, \end{aligned}$$

che corrisponde esattamente a

$$(t + t^2)(t + t^3) = (t + t^3) + (t + t^3)^2 = t + t^3 + t^2 + 2t^4 + t^6.$$

Si ha inoltre che esiste un morfismo nel verso contrario

$$\phi : G_{OU} \rightarrow H_c \quad (3.28)$$

tale che, dato un elemento $F \in G_{OU}$, si ha che

$$F \xrightarrow{\phi} \sum_{n \geq 1} f_n t^n$$

dove f_n è la somma dei coefficienti di tutti gli alberi planari binari di grado n . Dalla definizione del prodotto (3.11) in G_{OU} e del prodotto (3.26), grazie alla linearità delle composizioni operadiche γ si ha che ϕ è un omomorfismo di gruppi.

Proposizione 3.4.7. *Si ha ad esempio che*

$$\phi(\mathbf{E}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n$$

con $\mathbf{E} \in G_{OU}$ definito in (3.22).

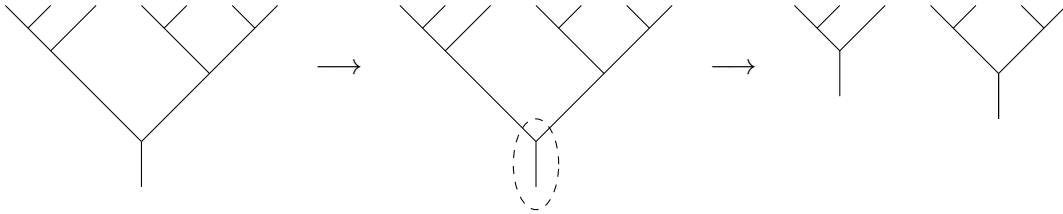
Dimostrazione. Sia definita la seguente successione di numeri naturali detti numeri di Catalan

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}, \quad n \geq 0.$$

Tale successione può essere riscritta nel seguente modo

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

Una dimostrazione di questo fatto può essere trovata in [Sta15]. Visto che \mathbf{E} è la somma di tutti e soli gli alberi planari binari, ci basta provare che le cardinalità degli insiemi di alberi planari binari dello stesso grado rispettano la definizione dei numeri di Catalan. Sia dunque b_n , con $n \geq 0$, la cardinalità dell'insieme degli alberi planari binari con n vertici interni. Si ha che $b_0 = 1$, infatti esiste un unico albero planare binario con zero vertici interni, l'albero eccezionale radicato \mathbf{l} . Vediamo ora di contare gli alberi planari binari con $n+1$ vertici interni. Dato un albero planare binario T con $n+1$ vertici interni si ha che eliminando la radice, il lato in input alla radice e l'unico vertice interno il cui lato in output era il lato in input alla radice, ci troviamo con una foresta formata da due alberi planari binari, tali per cui la somma dei loro vertici interni è uguale a n . In particolare esisterà un unico i , con $0 \leq i \leq n$ tale che l'albero formato dalla parte sinistra di T è di grado i e quello formato dalla parte destra di T è di grado $n-i$. Si veda il seguente esempio



dove abbiamo $n = 5$ e $i = 2$. In particolare, possiamo dire che, dato un albero planare binario T , esistono unici due alberi planari binari S_l, S_r tali che

$$T = S_l / \text{Y} \setminus S_r,$$

la nostra operazione di eliminazione ci fa passare dall'albero T alla foresta $S_l \cup S_r$. I modi per costruire un albero planare binario di grado $n+1$ che, dopo la nostra operazione di eliminazione, risulti essere una foresta di due alberi planari di grado i e $n-i$ rispettivamente sono dunque $b_i b_{n-i}$. I modi per costruire un albero planare binario di grado $n+1$ equivalgono alla somma dei modi per costruire un albero planare binario di grado $n+1$ che, dopo la nostra operazione di eliminazione, risulti essere una foresta di due alberi planari di grado i e $n-i$, al variare di i tra zero e n . Si ha dunque che

$$b_{n+1} = \sum_{i=0}^n b_i b_{n-i}, \quad n \geq 0.$$

□

Grazie a questo risultato è possibile contare i V-alberi della Definizione 3.4.5. Infatti, dalla Proposizione 3.4.6 si ha che

$$\phi(\mathbf{E}) \circ \phi(\mathbf{V}) = \phi(\mathbf{E} \circ \mathbf{V}) = \phi(1_{G_{OU}}) = 1_{H_c}.$$

Da ciò è possibile ricavare la successione $(a_n)_{n \geq 1}$ dei coefficienti di $\phi(\mathbf{V})$ calcolando l'inverso di $\phi(\mathbf{E})$. A questo punto, per ogni $n \geq 1$, si ha che $(-1)^{n-1}a_n$ è il numero di V-alberi con n vertici interni. Siccome da [A181983] risulta che

$$(\phi(\mathbf{E}))^{-1} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n t^n$$

si ha che ci sono esattamente n diversi V-alberi di grado n .

3.5 Risultati combinatori

Vediamo ora un altro metodo che utilizza gli operad per contare oggetti combinatori. In particolare, vedremo come calcolare il numero di alberi senza intersezioni con base, che costituiscono i generatori dell'operad non simmetrico su spazi vettoriali \mathcal{NCT} . In questa sezione indicheremo invece con \mathcal{NCT} l'operad non simmetrico su insiemi degli alberi senza intersezioni con base. La descrizione di questo operad è identica a quella già vista per l'operad su spazi vettoriali. Ciò che segue è un accenno a una teoria degli operad volta alla risoluzione di problemi combinatori. Per una descrizione più precisa e generale del metodo che andremo ad utilizzare, si veda [Gir20].

Ricordiamo che un insieme graduato \mathcal{S} è un insieme che ammette una decomposizione come unione disgiunta della forma

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{S}(n).$$

Quando, descrivendo un certo insieme graduato \mathcal{T} , per un certo $m \geq 1$ non specificheremo $\mathcal{T}(m)$, intenderemo che $\mathcal{T}(m) = \emptyset$. Sia ora \mathcal{S} l'insieme graduato tale che $\mathcal{S}(2) = \{a, b\}$. Definiamo $FO(\mathcal{S}) = \{FO(\mathcal{S})(n)\}_{n \geq 1}$ l'operad non simmetrico tale che, per ogni $n \geq 1$, $FO(\mathcal{S})(n)$ sia l'insieme di alberi planari con radice con n foglie i cui vertici interni sono etichettati da elementi di $\mathcal{S}(n)$. Questi vengono anche detti \mathcal{S} -alberi. L'unità dell'operad è data dall'albero eccezionale radicato $\mathbf{1}$ e le composizioni sono definite nel modo seguente: dati due alberi siffatti T e R , l'albero $T \circ_i R$ è ottenuto dall'identificazione dell' i -esima foglia di T con la radice di R , dove le foglie degli alberi planari sono numerate da sinistra verso destra. Sia inoltre data una relazione di congruenza operadica \equiv su $FO(\mathcal{S})$ tale che \equiv sia la più fine congruenza operadica tale che

$$\mathbf{b} \circ_1 \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} \circ_2 \mathbf{b}, \quad (3.29)$$

dove abbiamo indicato con \mathbf{a} e con \mathbf{b} gli alberi planari con radice con 2 foglie e con un solo vertice interno etichettato rispettivamente da a e da b , ossia gli elementi

$$\mathbf{a} = \begin{array}{c} | \\ \textcircled{a} \\ / \quad \backslash \end{array}, \quad \mathbf{b} = \begin{array}{c} | \\ \textcircled{b} \\ / \quad \backslash \end{array};$$

la relazione (3.29) corrisponde dunque a

$$\begin{array}{c} | \\ \textcircled{b} \\ | \\ \textcircled{a} \\ / \quad \backslash \end{array} \equiv \begin{array}{c} | \\ \textcircled{a} \\ | \\ \textcircled{b} \\ / \quad \backslash \end{array}.$$



$A =$

 $, \quad B =$

 $,$

Diagram illustrating the multiplication of two triangles to form a square. A red triangle with sides 1 and 2 is multiplied by a blue triangle with sides 1 and 2. The result is a parallelogram composed of the two triangles, which is then transformed into a gray square with side length 2. The side length 3 of the square is also indicated.

Definiamo ora la serie di Hilbert di \mathcal{NCT} come

dove si ha che $|x| = n$ se e solo se $x \in \mathcal{NCT}(n)$. Data la successione dei coefficienti $(a_n)_{n \geq 1}$ di questa serie, si ha che, per ogni $n \geq 1$, a_n risulta essere il numero di alberi senza intersezioni con base costruiti su un n -poligono. Vediamo ora come calcolare questa serie. Per ogni $M, N \subset \mathcal{NCT} \setminus I$, con $I \in \mathcal{NCT}$ unità dell'operad, definiamo

dove t e q sono variabili e $|int(x)|$ è il numero dei vertici interni di x , con

dove, per ogni $y \in \mathcal{S}$, q_y è una variabile e $|int_y(x)|$ è il numero di vertici interni di x etichettati da y . Inoltre, l'insieme $\mathcal{NCT}(M, N)$ è definito come l'insieme di tutti gli alberi di \mathcal{NCT} che non hanno come fattore nessun albero di M e che non hanno come prefisso nessun albero di N . In particolare, dati due alberi R e T , si ha che T è un fattore di R quando possiamo scrivere

per certi alberi R_1, T_1, \dots, T_n . Se $R_1 = I$ si dice che T è un prefisso di R . Si scelga ora un'orientazione \rightarrow di (3.29) (da sinistra a destra o da destra a sinistra) in modo tale che l'orientazione sia fedele. Per la proprietà di fedeltà di una orientazione si veda 3.2.3 di [Gir20]. Nel nostro caso \rightarrow sarà l'orientazione

da sinistra a destra. Si definisca successivamente P_{\rightarrow} come l'insieme degli alberi che compaiono a sinistra di \rightarrow , quindi nel nostro caso il membro a sinistra di (3.29). Definiamo infine la serie di \rightarrow -Hilbert di \mathcal{NCT} nel seguente modo

$$H_{\rightarrow} := F(P_{\rightarrow}, \emptyset),$$

nel nostro caso si ha quindi

$$H_{\rightarrow} = F(\mathbf{b} \circ_1 \mathbf{a}, \emptyset).$$

In particolare, H_{\rightarrow} è una serie nelle variabili t, q, q_a, q_b e si ha che tale serie, calcolata per $q = q_a = q_b = 1$ coincide con la serie di Hilbert di \mathcal{NCT} . Grazie alla Proposizione 2.3.4 di [Gir20], possiamo calcolare la serie di \rightarrow -Hilbert di \mathcal{NCT}

$$H_{\rightarrow} = t + qq_a H_{\rightarrow}^2 + qq_b F(P_{\rightarrow}, \mathbf{a}) H_{\rightarrow}, \quad (3.31)$$

dove, ancora per la Proposizione 2.3.4 di [Gir20], si ha che

$$F(P_{\rightarrow}, \mathbf{a}) = t + qq_b F(P_{\rightarrow}, \mathbf{a}) H_{\rightarrow}. \quad (3.32)$$

Ricavando $F(P_{\rightarrow}, a)$ da (3.32) si ottiene

$$F(P_{\rightarrow}, \mathbf{a}) = \frac{1}{1 - qq_b H_{\rightarrow}} t$$

e sostituendolo in (3.31) si ottiene

$$H_{\rightarrow} = t + q(q_a + q_b) H_{\rightarrow}^2 - q^2 q_a q_b H_{\rightarrow}^3. \quad (3.33)$$

Una volta definita la serie di Hilbert per gli alberi senza intersezioni con base

$$H := H_{\rightarrow}(q = 1, q_a = 1, q_b = 1) = \mathcal{H}_{\mathcal{NCT}},$$

da (3.33) segue

$$\begin{aligned} H &= t + 2H^2 - H^3, \\ H - 2H^2 + H^3 &= t, \end{aligned} \quad (3.34)$$

siccome $t \in H_c$ è l'elemento neutro del gruppo delle serie di potenze generalizzate con composizione, per (3.34) H risulta essere l'inverso della serie di potenze $G = t - 2t^2 + t^3$. Da [A006013] si ha che

$$H = G^{-1} = (t - 2t^2 + t^3)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} \binom{3n+1}{n} t^n,$$

per cui, per ogni $n \geq 1$ ci sono esattamente

$$\frac{1}{n+1} \binom{3n+1}{n}$$

alberi senza intersezioni con base costruiti su un n -poligono.

Capitolo 4

Operad colorati

4.1 Introduzione alle multicategorie

Vediamo ora come definire quelle che vengono dette multicategorie. Vedremo in seguito come queste sono legate alla nozione di operad colorato, una generalizzazione del concetto classico di operad, in particolare una sua categorificazione orizzontale.

Definizione 4.1.1. Una multicategoria \mathcal{C} è data dai seguenti oggetti:

- una classe \mathcal{C}_0 di elementi detti oggetti o tipi di \mathcal{C} ;
- per ogni $n \geq 0$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathcal{C}_0$, una classe $\mathcal{C}(a_1, \dots, a_n, a)$, i cui elementi θ sono detti frecce o mappe, rappresentati sia come classiche frecce

$$a_1, \dots, a_n \xrightarrow{\theta} a \quad (4.1)$$

che come diagrammi del seguente tipo



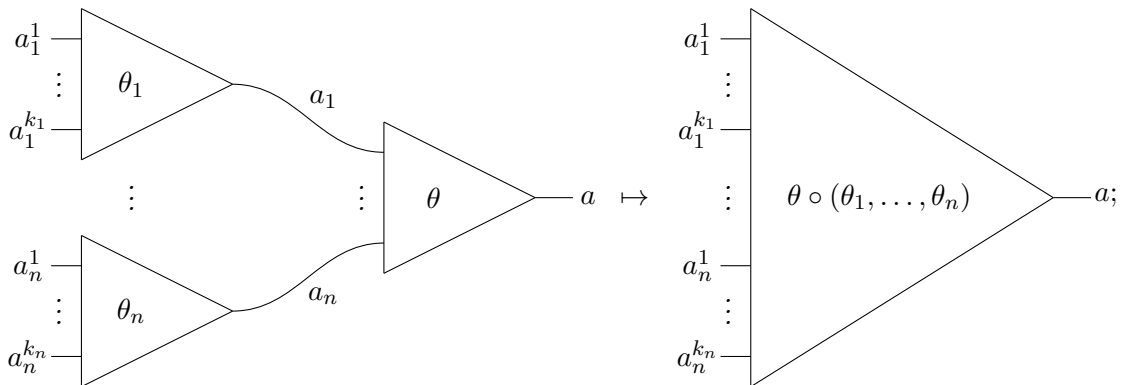
$$a_1, a_2, \dots, a_n \xrightarrow{\theta} a; \quad (4.2)$$

- per ogni $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$ e per ogni $a, a_i, a_i^j \in \mathcal{C}_0$, con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k_i$, una funzione

$$\mathcal{C}(a_1, \dots, a_n, a) \times \mathcal{C}(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, a_1) \times \dots \times \mathcal{C}(a_n^1, \dots, a_n^{k_n}, a_n) \rightarrow \mathcal{C}(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n}, a)$$

$$(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto \theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

detta composizione, che possiamo rappresentare graficamente nel seguente modo



- per ogni $a \in \mathcal{C}_0$, un elemento $1_a \in \mathcal{C}(a, a)$ detto identità su a .

Questi dati soddisfano i seguenti assiomi.

Associatività. Per ogni $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 0$, $m_1, \dots, m_{k_1 + \dots + k_n} \geq 1$, siano $t_s = k_1 + \dots + k_{s-1}$, per $s = 1, \dots, n-1$, sia inoltre $h = k_1 + \dots + k_n$. Siano dati $a, a_i, a_i^j, a_{i,l}^j \in \mathcal{C}_0$, con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k_i$,

$l = 1, \dots, m_{t_i+j}$. Definiamo inoltre $v = (a_1, \dots, a_n)$, $v_i = (a_i^1, \dots, a_i^{k_i})$, $v_i^j = (a_{i,1}^j, \dots, a_{i,m_{t_i+j}}^j)$. Allora il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathbb{C}(v, a) \times \prod_{i=1}^n \mathbb{C}(v_i, a_i) \right) \times \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{C}(v_i^j, a_i^j) & \xrightarrow{\circ \times id} & \mathbb{C}(v_1, \dots, v_n, a) \times \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{C}(v_i^j, a_i^j) \\
 \downarrow \text{mescolamento} & & \downarrow \circ \\
 & & \mathbb{C}(v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, \dots, v_n^1, \dots, v_n^{k_n}, a) \\
 & & \uparrow \circ \\
 \mathbb{C}(v, a) \times \prod_{i=1}^n \left(\mathbb{C}(v_i, a_i) \times \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{C}(v_i^j, a_i^j) \right) & \xrightarrow{id \times (\prod_{i=1}^n \circ)} & \mathbb{C}(v, a) \times \prod_{i=1}^n \mathbb{C}(v_i^1, \dots, v_i^{k_i}, a_i)
 \end{array}$$

commuta, ossia, per ogni $\theta \in \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a)$, $\theta_i \in \mathbb{C}(a_i^1, \dots, a_i^{k_i}, a_i)$, $\theta_i^j \in \mathbb{C}(a_{i,1}^j, \dots, a_{i,m_{t_i+j}}^j, a_i^j)$, con le stesse notazioni precedenti per gli indici, si ha

$$\theta \circ (\theta_1 \circ (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}), \dots, \theta_n \circ (\theta_n^1, \dots, \theta_n^{k_n})) = (\theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)) \circ (\theta_1^1, \dots, \theta_1^{k_1}, \dots, \theta_n^1, \dots, \theta_n^{k_n}).$$

Identità. Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbb{C}_0$, valgono le seguenti composizioni:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) \times \mathbb{C}(a_1, a_1) \times \dots \times \mathbb{C}(a_n, a_n) &\rightarrow \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) \\
 (\theta, 1_{a_1}, \dots, 1_{a_n}) &\mapsto \theta \\
 \mathbb{C}(a, a) \times \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) &\rightarrow \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) \\
 (1_a, \theta) &\mapsto \theta
 \end{aligned}$$

ossia

$$\theta \circ (1_{a_1}, \dots, 1_{a_n}) = \theta = 1_a \circ (\theta).$$

Data l'evidente somiglianza di nomenclatura con le categorie, vediamo come poterci ricondurre al caso classico a partire da una multicategoria e come ottenere una multicategoria banale a partire da una categoria.

Osservazione 4.1.2. È facile osservare che, fissando $n = 1$ nella Definizione 4.1.1, si ottiene la definizione classica di categoria: le classi delle frecce sono le usuali classi di morfismi e gli assiomi di associatività e identità delle composizioni corrispondono esattamente agli assiomi di associatività e di identità della composizione di morfismi. Viceversa, data una categoria \mathbf{B} , è sufficiente definire \mathbb{C}_0 come la classe degli oggetti di \mathbf{B} , per ogni $x, y \in \mathbb{C}_0$ definire $\mathbb{C}(x, y) := \mathbf{B}(x, y)$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbb{C}_0$, con $n > 1$, definire $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a)$ come la classe vuota per ottenere una multicategoria.

Vediamo ora alcuni esempi di multicategorie definite a partire da categorie strettamente monoidali e da categorie con tutti i prodotti finiti.

Esempio 4.1.3. Sia (A, \otimes) una categoria strettamente monoidale. Possiamo allora definire una multicategoria \mathbb{C} a partire da A ponendo, con la notazione della Definizione 4.1.1, $\mathbb{C}_0 := \text{Ob}(A)$ e $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) := \text{Mor}_A(a_1 \otimes \dots \otimes a_n, a)$ per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbb{C}_0$. Vediamo ora come definire le composizioni. Siano $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, a, a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n} \in \mathbb{C}_0$. Si ha che

$$\mathbb{C}(a_1, \dots, a_n, a) \times \mathbb{C}(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, a_1) \times \dots \times \mathbb{C}(a_n^1, \dots, a_n^{k_n}, a_n)$$

è dato da

$$Mor_A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, a) \times Mor_A(a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_1^{k_1}, a_1) \times \cdots \times Mor_A(a_n^1 \otimes \cdots \otimes a_n^{k_n}, a_n).$$

Dati perciò $f \in Mor_A(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, a)$, $g_i \in Mor_A(a_i^1 \otimes \cdots \otimes a_i^{k_i}, a_i)$, per $i = 1, \dots, n$, basta definire

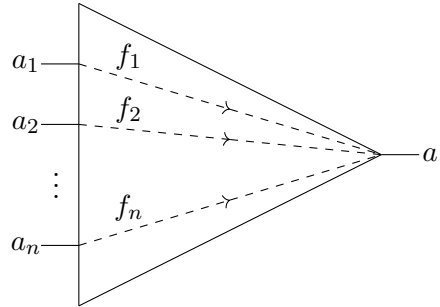
$$f \circ (g_1, \dots, g_n) := f(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) \in Mor_A(a_1^1 \otimes \cdots \otimes a_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes a_n^1 \otimes \cdots \otimes a_n^{k_n}, a).$$

Per ogni $a \in \mathbf{C}_0$, l'identità su a è data dall'identità su a in A . È chiaro che le composizioni sono associative e che vale l'assioma di identità. Data la categoria monoidale $(\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}, \otimes)$, con \mathbf{k} anello commutativo, otteniamo in questo modo la multicategoria dei \mathbf{k} -moduli e delle mappe \mathbf{k} -multilineari. Allo stesso modo, per una categoria A che possiede tutti i prodotti finiti, possiamo definire una multicategoria ponendo $\mathbf{C}_0 := Ob(A)$ e $\mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) := Mor_A(a_1 \times \cdots \times a_n, a)$ per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$. Questa costruzione ci sarà utile in particolare per la categoria **Set**. Indicheremo con \mathbf{Set}_m la multicategoria ottenuta da **Set** attraverso il procedimento che abbiamo appena descritto per le categorie con tutti i prodotti finiti.

Esempio 4.1.4. Sia A una categoria. Possiamo definire una multicategoria \mathbf{C} a partire da A definendo $\mathbf{C}_0 := Ob(A)$ e $\mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) := Mor_A(a_1, a) \times \cdots \times Mor_A(a_n, a)$ per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$. Vediamo ora come definire le composizioni. Siano $n \geq 1$, $k_1, \dots, k_n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, a, a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{k_n} \in \mathbf{C}_0$, per ogni $f_i \in Mor_A(a_i, a)$, con $i = 1, \dots, n$, e per ogni $f_i^j \in Mor_A(a_i^j, a)$ con $j = 1, \dots, k_i$, definiamo

$$(f_1, \dots, f_n) \circ (f_1^1, \dots, f_1^{k_1}, \dots, f_n^1, \dots, f_n^{k_n}) := (f_1 \circ f_1^1, \dots, f_1 \circ f_1^{k_1}, \dots, f_n \circ f_n^1, \dots, f_n \circ f_n^{k_n}).$$

Le identità sono quelle definite su A . Le composizioni sono ben definite e questi dati soddisfano gli assiomi di associatività e di identità. Una freccia in \mathbf{C} può essere rappresentata anche nel seguente modo



Vediamo ora come definire i morfismi tra multicategorie.

Definizione 4.1.5. Siano \mathbf{C} e \mathbf{C}' due multicategorie. Un morfismo di multicategorie $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ è una funzione $f_0 : \mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{C}'_0$ insieme a delle funzioni

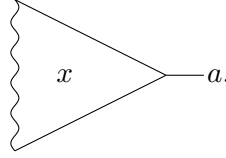
$$\begin{aligned} \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) &\rightarrow \mathbf{C}'(f(a_1), \dots, f(a_n), f(a)) \\ \theta &\mapsto f(\theta) \end{aligned}$$

per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$, tali che sono preservate le composizioni e le identità. Definiamo inoltre la categoria **MultiCat** delle multicategorie piccole (quelle la cui classe degli oggetti è un insieme) e dei loro morfismi.

Vediamo ora il concetto di algebra su una multicategoria. Daremo inizialmente la definizione classica per poi precisarne i dettagli in maniera più esplicita.

Definizione 4.1.6. Sia \mathbf{C} una multicategoria. Un'algebra sulla multicategoria \mathbf{C} , anche detta \mathbf{C} -algebra, è un morfismo di multicategorie $\rho : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}_m$, con \mathbf{Set}_m la multicategoria degli insiemi definita nell'Esempio 4.1.3.

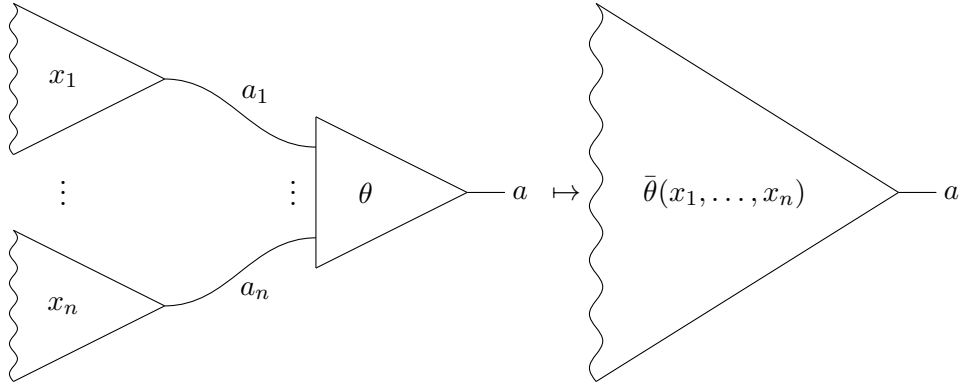
Sia \mathbf{C} una multicategoria. Vediamo più esplicitamente cosa vuol dire dare una \mathbf{C} -algebra X . Per ogni oggetto a di \mathbf{C} , si deve dare un insieme $X(a)$, i cui elementi $x \in X(a)$ possono essere rappresentati nel modo seguente



Per ogni freccia $\theta : a_1, \dots, a_n \rightarrow a$ in \mathbf{C} , si deve dare una funzione

$$\bar{\theta} = X(\theta) : X(a_1) \times \dots \times X(a_n) \rightarrow X(a)$$

che possiamo rappresentare nel modo seguente



tali che sono preservate le composizioni e le identità. In questo modo è facile definire un morfismo tra due algebre. Siano date X e Y due \mathbf{C} -algebre. Un morfismo di \mathbf{C} -algebre $\alpha : X \rightarrow Y$ è una famiglia di funzioni

$$(X(a) \xrightarrow{\alpha_a} Y(a))_{a \in \mathbf{C}_0}$$

tali che, per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$, data una freccia $\theta : a_1, \dots, a_n \rightarrow a$ in \mathbf{C} , si ha che

$$Y(\theta) \circ (\alpha_{a_1} \times \dots \times \alpha_{a_n}) = \alpha_a \circ X(\theta).$$

Definiti i morfismi tra \mathbf{C} -algebre, possiamo quindi definire la categoria $\mathbf{Alg}_{\mathbf{C}}$ delle algebre su \mathbf{C} e dei loro morfismi.

Vediamo ora un modo equivalente di definire le algebre sulle multicategorie. Avremo prima bisogno di una definizione.

Definizione 4.1.7. *Sia S una classe e sia $X = (X(a))_{a \in S}$ una famiglia di insiemi. La multicategoria $\mathbf{End}(X)$ degli endomorfismi di X è la multicategoria che ha come classe di oggetti la classe S , come frecce $a_1, \dots, a_n \rightarrow a$ le funzioni*

$$X(a_1) \times \dots \times X(a_n) \rightarrow X(a)$$

e come composizioni e identità quelle di \mathbf{Set}_m .

Una volta data questa definizione è facile osservare che, data una multicategoria \mathbf{C} , dare una \mathbf{C} -algebra equivale a dare una famiglia di insiemi $X = (X(a))_{a \in \mathbf{C}_0}$ insieme a un morfismo di multicategorie $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{End}(X)$ che sia l'identità sugli oggetti.

Sia ora \mathbf{C} una multicategoria arricchita in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$, con \mathbf{k} anello commutativo, ossia una multicategoria \mathbf{C} tale che, per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$, la classe $\mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a)$ è un \mathbf{k} -modulo. Sia inoltre \mathbf{C} con un solo oggetto, ossia $\mathbf{C}_0 = \{*\}$. Definendo

$$\mathcal{P}(n) := \mathbf{C}(\underbrace{*, \dots, *}_n, *)$$

per ogni $n \geq 0$, definendo

$$\gamma(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n) := \theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

per ogni $\theta \in \mathcal{P}(n), \theta_1 \in \mathcal{P}(k_1), \dots, \theta_n \in \mathcal{P}(k_n)$, per $n \geq 1, k_1, \dots, k_n \geq 0$, definendo infine

$$\eta(1) := id_*,$$

estendendo poi $\eta : \mathbf{k} \rightarrow \mathcal{P}(1)$ per linearità, si ottiene che \mathbf{C} non è altro che un operad non simmetrico nella categoria dei \mathbf{k} -moduli. Se avessimo dato un'azione del gruppo simmetrico sulla multicategoria \mathbf{C} , rendendola una multicategoria simmetrica, avremmo ritrovato il concetto di operad simmetrico. In generale poi, prendendo \mathbf{C} come sopra ma arricchita in una categoria monoidale \mathbf{V} invece che in $\mathbf{Mod}_{\mathbf{k}}$, si ottiene il concetto di operad non simmetrico nella categoria \mathbf{V} . Questo giustifica il fatto che le multicategorie vengono anche chiamate operad colorati, dove l'aggettivo 'colorato' sta ad indicare il fatto che l'operad in questione possa prendere in input diversi tipi ('colori') di oggetti, un tipo per ogni oggetto della classe degli oggetti \mathbf{C}_0 . Un operad non simmetrico dunque è un operad colorato con un solo colore, ossia una multicategoria con un solo oggetto. La stessa corrispondenza si ha tra morfismi di multicategorie e morfismi di operad non simmetrici. Notiamo che, seguendo la nomenclatura di [Lei04], parleremo di operad colorati riferendoci alle multicategorie (non simmetriche) e di operad colorati simmetrici riferendoci alle multicategorie simmetriche, al contrario di quanto fatto per gli operad, che per noi sono sempre stati simmetrici se non diversamente specificato.

Alla luce di quanto appena detto, possiamo ripercorrere quanto fatto all'inizio della trattazione per gli operad di May e gli operad di Markl e invece di definire la funzione che abbiamo chiamato composizione nella Definizione 4.1.1, possiamo definire altre funzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) \times \mathbf{C}(b_1, \dots, b_m, a_i) &\rightarrow \mathbf{C}(a_1, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_m, a_{i+1}, \dots, a_n, a) \\ (\theta, \phi) &\mapsto \theta \circ_i \phi \end{aligned} \quad (4.3)$$

per ogni $1 \leq i \leq n, m \geq 0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, a \in \mathbf{C}_0$, che chiameremo composizioni parziali, tali che valgano i seguenti assiomi.

Associatività. Siano $1 \leq i \leq n, m, l \geq 0, 1 \leq k \leq m + n - 1$. Per ogni $a_1, \dots, a_{n+m}, a, b_1, \dots, b_l \in \mathbf{C}_0$ e per ogni $\theta \in \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a), \phi \in \mathbf{C}(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}, a_i), \psi \in \mathbf{C}(b_1, \dots, b_l, a_j)$, con

$$j = \begin{cases} k, & \text{per } 1 \leq k < i, \\ k + n - i + 1, & \text{per } i \leq k < m + i, \\ km + 1, & \text{per } m + i \leq k \leq m + n - 1, \end{cases}$$

si ha che

$$(\theta \circ_i \phi) \circ_k \psi = \begin{cases} (\theta \circ_k \psi) \circ_{i+l-1} \phi, & \text{per } 1 \leq k < i, \\ \theta \circ_i (\phi \circ_{k-i+1} \psi), & \text{per } i \leq k < m + i, \\ (\theta \circ_{k-m+1} \psi) \circ_i \phi, & \text{per } m + i \leq k \leq m + n - 1. \end{cases}$$

Identità. Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbf{C}_0$, valgono le seguenti composizioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) \times \mathbf{C}(a_i, a_i) &\rightarrow \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) \\ (\theta, 1_{a_i}) &\mapsto \theta \\ \mathbf{C}(a, a) \times \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) &\rightarrow \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a) \\ (1_a, \theta) &\mapsto \theta \end{aligned}$$

ossia

$$\theta \circ_i 1_{a_i} = \theta = 1_a \circ (\theta).$$

Per passare da composizioni a composizioni parziali e viceversa, il discorso è analogo a quello fatto

nella Proposizione 1.1.11: si definiscono rispettivamente

$$\theta \circ (\theta_1, \dots, \theta_n) := (\dots((\theta \circ_n \theta_n) \circ_{n-1} \theta_{n-1}) \dots) \circ_1 \theta_1,$$

$$\theta \circ_i \phi := \theta \circ (id_{a_1}, \dots, id_{a_{i-1}}, \phi, id_{a_{i+1}}, \dots, id_{a_n}),$$

per ogni $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$, $a_1, \dots, a_n, a, a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, \dots, a_1^1, \dots, a_n^{k_n}, b_1, \dots, b_m \in \mathbf{C}_0$, $\theta \in \mathbf{C}(a_1, \dots, a_n, a)$, $\theta_1 \in \mathbf{C}(a_1^1, \dots, a_1^{k_1}, a_1)$, \dots , $\theta_n \in \mathbf{C}(a_n^1, \dots, a_n^{k_n}, a_n)$, $\phi \in \mathbf{C}(b_1, \dots, b_m, a_i)$.

Vediamo ad esempio come riscrivere la multicategoria \mathbf{Set}_m in termini di composizioni parziali.

Esempio 4.1.8. La multicategoria \mathbf{Set}_m ha come oggetti gli oggetti di \mathbf{Set} , ovvero gli insiemi. Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $X_1, \dots, X_n, Y \in \mathbf{Set}$, la classe $\mathbf{Set}_m(X_1, \dots, X_n, Y)$ è quella dei morfismi $\mathbf{Set}(X_1 \times \dots \times X_n, Y)$. Per ogni $n \geq 1$, $m \geq 0$ dati $X_1, \dots, X_n, Y, W_1, \dots, W_m \in \mathbf{Set}$ e

$$\begin{aligned} f &\in \mathbf{Set}(X_1 \times \dots \times X_n, Y), \\ g &\in \mathbf{Set}(W_1 \times \dots \times W_m, X_i), \end{aligned}$$

per un qualsiasi $1 \leq i \leq n$, si ha che la composizione parziale

$$f \circ_i g \in \mathbf{Set}(X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times W_1 \times \dots \times W_m \times X_{i+1} \times \dots \times X_n, Y)$$

è data dalla funzione definita come segue

$$\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_{i-1}, w_1, \dots, w_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ \downarrow f \circ_i g \\ f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(w_1, \dots, w_m), x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$

per ogni $x_j \in X_j$, $w_k \in W_k$, al variare di $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$. Infine, per ogni $X \in \mathbf{Set}$, le identità $id_X \in \mathbf{Set}_m$ sono date dalle identità $id_X \in \mathbf{Set}$.

4.2 Circuiti elettrici

Vediamo ora come definire un operad colorato che potremo utilizzare per descrivere circuiti elettrici. Sia dunque \mathbf{Cospa} l'operad colorato descritto in [FS18] che ha come classe degli oggetti l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{N}$, la classe delle frecce $\mathbf{Cospa}(a_1, \dots, a_n, b)$ è data dall'insieme delle classi di isomorfismo dei cospan

$$\mathbf{Cospa}(a_1, \dots, a_n, b) = \left\{ [a_1] + \dots + [a_n] \xrightarrow{\alpha_1} [p] \xleftarrow{\alpha_2} [b] \mid p \in \mathbb{N}, \alpha_1 : \sum_{i=1}^n [a_i] \rightarrow [p], \alpha_2 : [b] \rightarrow [p] \right\}$$

dove abbiamo usato le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} [d] &:= \{1, \dots, d\}, \quad [0] := \emptyset, \\ \sum_{i=1}^m [c_i] &:= \bigsqcup_{i=1}^m \{1, \dots, c_i\}, \end{aligned}$$

per ogni $d, m \geq 1$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{N}$. Chiamiamo isomorfi due cospan

$$\begin{aligned} [a_1] + \dots + [a_n] &\xrightarrow{\alpha_1} [p] \xleftarrow{\alpha_2} [b], \\ [a_1] + \dots + [a_n] &\xrightarrow{\alpha'_1} [p'] \xleftarrow{\alpha'_2} [b], \end{aligned}$$

se e solo se $p = p'$ ed esiste $\sigma \in \Sigma_p$ tale che $\sigma\alpha_1 = \alpha'_1$ e $\sigma\alpha_2 = \alpha'_2$, ossia se, per ogni $\zeta_1 \in \sum_{i=1}^n [a_i]$ e per ogni $\zeta_2 \in [b]$ si ha che $\alpha_1(\zeta_1) = \alpha_2(\zeta_2)$ se e solo se $\alpha'_1(\zeta_1) = \alpha'_2(\zeta_2)$.

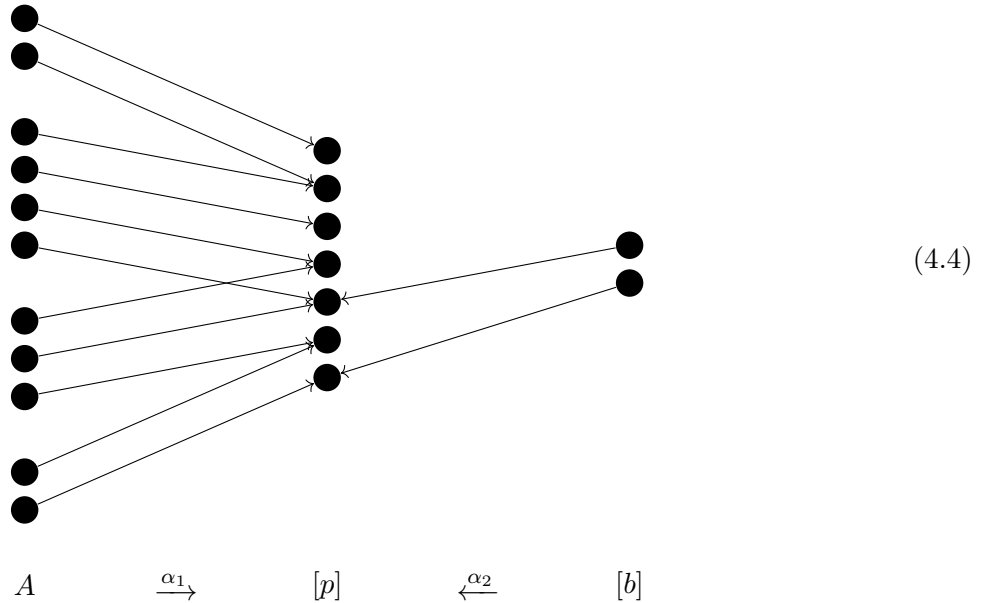
Vediamo ora un esempio di un elemento in $\mathbf{Cospan}(2, 4, 3, 2, 2)$. Abbiamo dunque

$$A := [a_1] + [a_2] + [a_3] + [a_4] = [2] + [4] + [3] + [2], \quad [b] = [2],$$

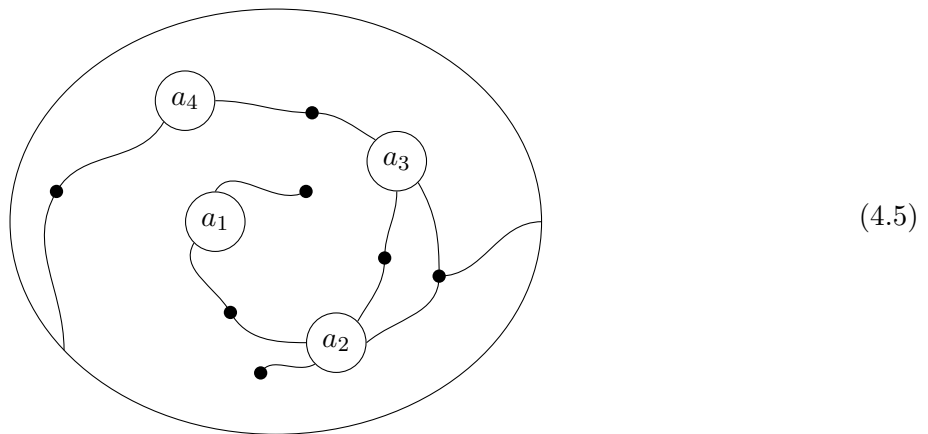
prendiamo inoltre come codominio comune $[p] = [7]$. Il nostro elemento sarà dunque del tipo

$$[2] + [4] + [3] + [2] \xrightarrow{\alpha_1} [7] \xleftarrow{\alpha_2} [2],$$

basta ora definire le funzioni α_1 e α_2 , che possiamo descrivere con il seguente diagramma



in cui abbiamo descritto elemento per elemento la funzione α_1 e la funzione α_2 con frecce da A a $[p]$ e con frecce da $[b]$ a $[p]$ rispettivamente. Possiamo descrivere il diagramma (4.4) anche nel seguente modo: prendiamo un grafo con n nodi etichettati da a_1, \dots, a_n , p nodi non etichettati e infine prendiamo un bordo che racchiuda tutti i nodi, che rappresenterà in un certo senso l'insieme $[b]$. Colleghiamo adesso i nodi etichettati con quelli non etichettati con dei lati non direzionati come descritto dalla funzione α_1 . Successivamente colleghiamo b punti del bordo qualsiasi ma tutti diversi tra loro ai nodi non etichettati con dei lati non direzionati come descritto dalla funzione α_2 . Nel nostro caso si ottiene il seguente diagramma



che chiameremo anche diagramma a grafo, con 4 nodi etichettati, 7 nodi non etichettati e 2 collegamenti tra il grafo ed il bordo. Vedremo che questo modo di vedere gli elementi di \mathbf{Cospan} ci sarà utile per avere un'idea più intuitiva delle composizioni. Prima di vedere la definizione di queste ultime, definiamo quali sono le identità. Per ogni $a \in \mathbb{N}$ l'identità in $\mathbf{Cospan}(a, a)$ è data da

$$[a] \xrightarrow{id_{[a]}} [a] \xleftarrow{id_{[a]}} [a],$$

dove id_{\emptyset} è la funzione vuota.

Vediamo infine come definire le composizioni parziali. Siano dati $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$, siano inoltre $a_1, \dots, a_n, b, p, c_1, \dots, c_m, q \in \mathbb{N}$. Dati due elementi

$$\begin{aligned} f &= ([a_1] + \dots + [a_n] \xrightarrow{\alpha_1} [p] \xleftarrow{\alpha_2} [b]) \in \mathbf{Cospan}(a_1, \dots, a_n, b), \\ g &= ([c_1] + \dots + [c_m] \xrightarrow{\beta_1} [q] \xleftarrow{\beta_2} [a_i]) \in \mathbf{Cospan}(c_1, \dots, c_m, a_i), \end{aligned} \quad (4.6)$$

vediamo come definire la composizione parziale $f \circ_i g$. Da (4.6) possiamo costruire il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & [b] \\ & & \downarrow \alpha_2 \\ & \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [a_i] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{\alpha_1} [p] \\ & \downarrow id + \beta_2 + id & \\ \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + \sum_{k=1}^m [c_k] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{id + \beta_1 + id} & \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [q] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] \end{array} \quad (4.7)$$

per completare il quale calcoliamo un coprodotto fibrato $[z]$ dei morfismi α_1 e $id + \beta_2 + id$ in modo tale da ottenere il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [a_i] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{\alpha_1} & [p] \\ \downarrow id + \beta_2 + id & & \downarrow i_2 \\ \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [q] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{i_1} & [z] \end{array}$$

che possiamo appunto utilizzare per completare (4.7) ed ottenere il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & [b] \\
 & & & & \downarrow \alpha_2 \\
 & & \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [a_i] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{\alpha_1} & [p] \\
 & & \downarrow id + \beta_2 + id & & \downarrow i_2 \\
 \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + \sum_{k=1}^m [c_k] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{id + \beta_1 + id} & \sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + [q] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] & \xrightarrow{i_1} & [z]
 \end{array}$$

grazie al quale abbiamo il cospan

$$f \circ_i g = \left(\sum_{j=1}^{i-1} [a_j] + \sum_{k=1}^m [c_k] + \sum_{l=i+1}^n [a_l] \xrightarrow{i_1 \circ (id + \beta_1 + id)} [z] \xleftarrow{i_2 \circ \alpha_2} [b] \right),$$

$$f \circ_i g \in \mathbf{Cospans}(a_1, \dots, a_{i-1}, c_1, \dots, c_m, a_{i+1}, \dots, a_n, b).$$

Il coprodotto fibrato è unico a meno di unico isomorfismo. Per insiemi finiti di tipo $[z]$, questo significa che una volta costruito il coprodotto fibrato $([z], i_1, i_2)$, ogni altro possibile coprodotto fibrato è del tipo $([z], \sigma i_1, \sigma i_2)$ per un certo $\sigma \in \Sigma_z$. Riferendoci a (4.4), applicare una permutazione σ a entrambe le funzioni di un cospan vuol dire semplicemente mescolare gli elementi della colonna centrale mescolando tutte le frecce di conseguenza. Questo nuovo cospan appartiene alla stessa classe di isomorfismo del cospan di partenza.

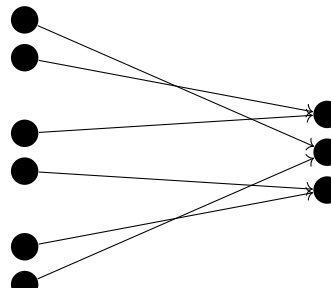
Vediamo ora un esempio di composizione. Sia $f \in \mathbf{Cospans}(a_1, a_2, a_3, b)$ tale che

$$f = ([a_1] + [a_2] + [a_3] \xrightarrow{\alpha_1} [p] \xleftarrow{\alpha_2} [b]),$$

con

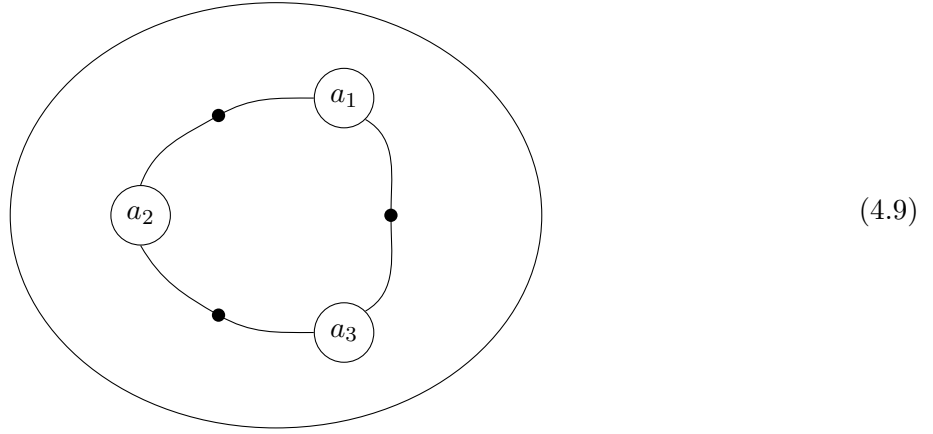
$$A := [a_1] + [a_2] + [a_3] = [2] + [2] + [2], \quad [b] = [0], \quad [p] = [3],$$

e con le funzioni α_1 e α_2 descritte da



$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha_1} & [p] \\
 & & \xleftarrow{\alpha_2} [b]
 \end{array} \quad (4.8)$$

e il cui diagramma a grafo può essere rappresentato come segue



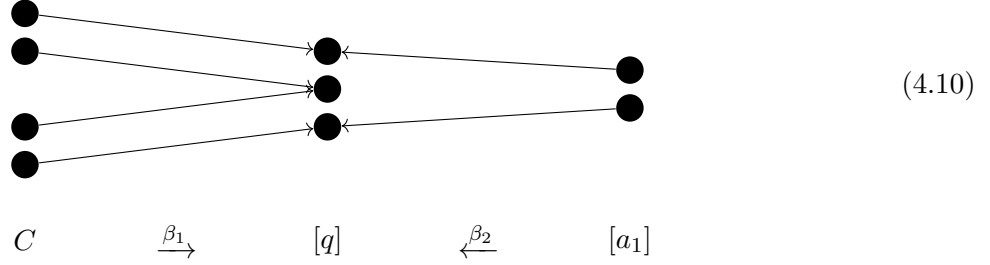
con 3 nodi etichettati, 3 nodi non etichettati e 0 collegamenti tra il grafo e il bordo. Sia ora $g \in \mathbf{Cospan}(c_1, c_2, a_1)$ tale che

$$g = ([c_1] + [c_2] \xrightarrow{\beta_1} [q] \xleftarrow{\beta_2} [a_1]),$$

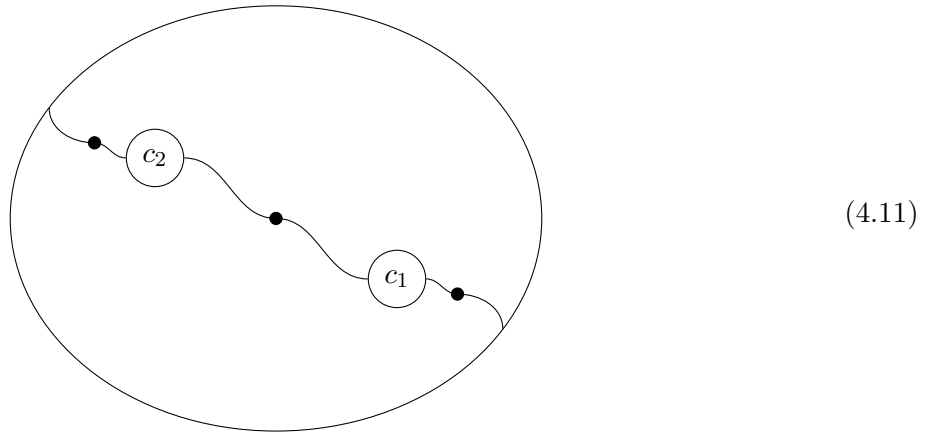
con

$$C := [c_1] + [c_2] = [2] + [2], \quad [q] = [3],$$

e con le funzioni β_1 e β_2 descritte da



e il cui diagramma a grafo può essere rappresentato come segue



con 2 nodi etichettati, 3 nodi non etichettati e 2 collegamenti tra il grafo e il bordo.

Vediamo ora come costruire un coprodotto fibrato di

$$\begin{array}{ccc}
 [a_1] + [a_2] + [a_3] & \xrightarrow{\alpha_1} & [p] \\
 \downarrow \beta_2 + id + id & & \downarrow i_2 \\
 [q] + [a_2] + [a_3] & \xrightarrow{i_1} & [z]
 \end{array}$$

attraverso i due diagrammi (4.8) e (4.10). Combinando questi due diagrammi infatti possiamo ottenere il seguente diagramma

(4.12)

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \xrightarrow{\beta_1} & [q] & \xleftarrow{\beta_2} & [a_1] & \xrightarrow{\alpha_1} & [p] & \xleftarrow{\alpha_2} & [b] \\
 + & + & + & + & + & & & & \\
 [a_2] & \xrightarrow{id} & [a_2] & \xleftarrow{id} & [a_2] & & & & \\
 + & + & + & + & + & & & & \\
 [a_3] & \xrightarrow{id} & [a_3] & \xleftarrow{id} & [a_3] & & & &
 \end{array}$$

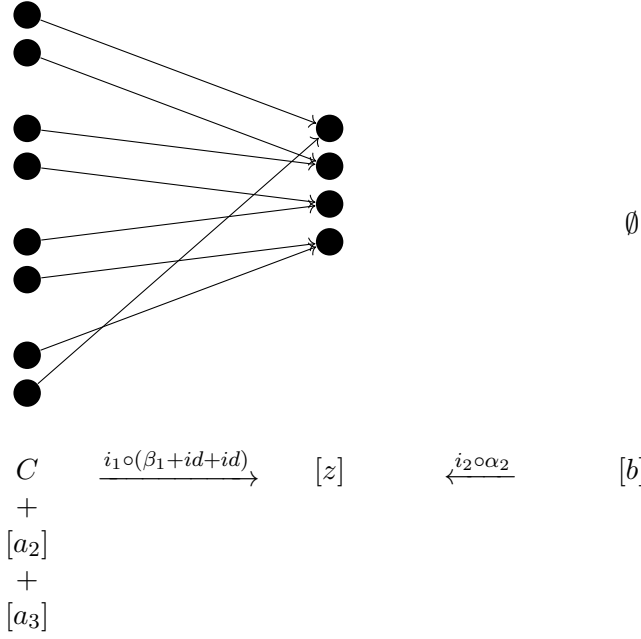
che non è altro che la rappresentazione di un diagramma di tipo (4.7). Ricordiamo ora che, dati insiemi finiti $W, X, Y \in \mathbf{Set}$ e due morfismi $h \in \mathbf{Set}(W, X)$, $k \in \mathbf{Set}(W, Y)$, un coprodotto fibrato

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{h} & X \\
 k \downarrow & & \downarrow j_2 \\
 Y & \xrightarrow{j_1} & Z
 \end{array}$$

è dato da

$$Z = (X \sqcup Y) / \sim$$

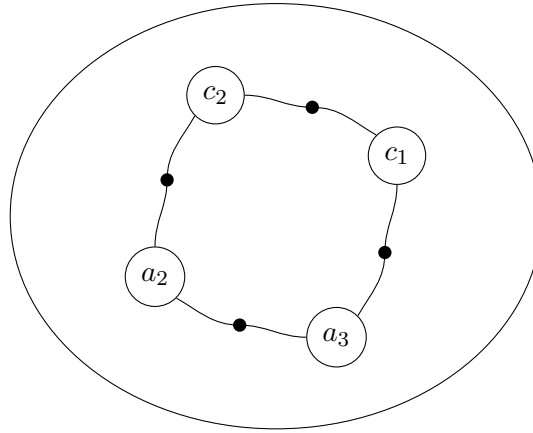
con \sim la più fine relazione di equivalenza tale che $h(w) \sim k(w)$ per ogni $w \in W$ e con j_1 e j_2 le rispettive proiezioni a quoziente. In particolare, da (4.12) è facile calcolare direttamente anche il cospan con tale coprodotto fibrato ottenendo il seguente diagramma



che descrive dunque il nostro elemento

$$f \circ_1 g = \left([2] + [2] + [2] + [2] \xrightarrow{i_1 \circ (id + \beta_1 + id)} [4] \xleftarrow{i_2 \circ \alpha_2} [0] \right).$$

Inoltre, il suo diagramma a grafo può essere rappresentato come segue



che si può anche ottenere sostituendo la componente a_1 con la componente g senza più il bordo, identificando i due nodi che si collegavano ad a_1 con i due nodi che si collegavano al bordo di g .




Vediamo ora più precisamente come costruire un circuito elettrico a partire dall'operad colorato **Cospan**. Sia data una **Cospan**-algebra

$$Circ : \mathbf{Cospan} \rightarrow \mathbf{Set}_m$$

definita come segue: per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $Circ(n)$ è dato dall'insieme di tutti i circuiti elettrici con n terminali etichettati dall'insieme $[n]$. Per ogni $n \geq 0$ e per ogni $a_1, \dots, a_n, a \in \mathbb{N}$, data $f \in \mathbf{Cospan}(a_1, \dots, a_n, a)$ dobbiamo dare un elemento $Circ(f) \in \mathbf{Set}_m(a_1, \dots, a_n, a)$, ovvero una funzione

$$Circ(f) : Circ(a_1) \times \dots \times Circ(a_n) \rightarrow Circ(a)$$

che associ ad ogni n -upla di circuiti (c_1, \dots, c_n) con a_1, \dots, a_n terminali rispettivamente, un circuito c con a terminali, facendo in modo che $Circ : \mathbf{Cospan} \rightarrow \mathbf{Set}_m$ sia un morfismo di operad colorati.

$c_1 =$  $, \quad c_2 =$  $, \quad c_3 =$  $,$

The diagram shows a circuit with the following components and connections:

- A voltage source (represented by two parallel vertical lines of unequal length) is connected between the leftmost node and a node above the first bottom node.
- A switch (represented by a horizontal line with a diagonal gap) is connected between a node above the second bottom node and a node above the third bottom node.
- A resistor (represented by a zigzag line) is connected between a node above the third bottom node and a node above the rightmost node.
- A dependent current source (represented by a circle with an 'X' inside) is connected between the rightmost node and the third bottom node.
- There are three nodes at the bottom of the circuit, each indicated by an arrow pointing to it from the text below.

The diagram shows a single loop circuit. At the top is a battery with two cells. To its right is an open switch. The wire continues to the right, then turns down to a light bulb (represented by a circle with a cross inside). From the light bulb, the wire goes left, then turns up to a resistor (represented by a zigzag line). Finally, the wire goes right and connects back to the positive terminal of the battery.

75

Bibliografia

- [A006013] OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2021. URL: <https://oeis.org/A006013> (cit. a p. 62).
- [A181983] OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2021. URL: <https://oeis.org/A181983> (cit. a p. 60).
- [BM08] Clemens Berger e Ieke Moerdijk. “On the derived category of an algebra over an operad”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:0801.2664 (gen. 2008). arXiv: 0801.2664 [math.AT] (cit. a p. 20).
- [BO17] John C. Baez e Nina Otter. *Operads and Phylogenetic Trees*. 2017. arXiv: 1512.03337 [math.CT] (cit. a p. v).
- [Cha07] Frédéric Chapoton. “Operads and algebraic combinatorics of trees.” In: *Séminaire Lotharingien de Combinatoire [electronic only]* 58 (2007), B58c–27 (cit. alle pp. vi, 43).
- [Chi10] Michael Ching. “Bar-cobar duality for operads in stable homotopy theory”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1009.5034 (set. 2010). arXiv: 1009.5034 [math.AT] (cit. a p. 11).
- [Fio06] Domenico Fiorenza. *An Introduction to the Language of Operads*. 2006. URL: <https://www1.mat.uniroma1.it/people/fiorenza/cv-pub.html#publications> (cit. a p. 40).
- [Fre18] Benoit Fresse. *Little discs operads, graph complexes and Grothendieck-Teichmüller groups*. 2018. arXiv: 1811.12536 [math.AT] (cit. a p. v).
- [FS18] Brendan Fong e David I. Spivak. *Seven Sketches in Compositionality: An Invitation to Applied Category Theory*. 2018. arXiv: 1803.05316 [math.CT] (cit. alle pp. vi, 68).
- [Gir20] Samuele Giraudo. “Tree series and pattern avoidance in syntax trees”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 176 (2020), p. 105285. ISSN: 0097-3165. DOI: 10.1016/j.jcta.2020.105285. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2020.105285> (cit. alle pp. 60–62).
- [GK95] Ezra Getzler e Mikhail M. Kapranov. “Cyclic Operads and Cyclic Homology”. In: *Geometry, Topology, and Physics*. International Press, 1995, pp. 167–201 (cit. a p. 44).
- [GT16] Alina R. Gaynullina e Sergei N. Tronin. “Towards an operad-based cryptography: Applications of commutative operads”. In: *Lobachevskii Journal of Mathematics* 37 (mag. 2016), pp. 234–239. DOI: 10.1134/S1995080216030100 (cit. alle pp. vi, 19).
- [KSV95] Takashi Kimura, Jim Stasheff e Alexander A. Voronov. “On operad structures of moduli spaces and string theory”. In: *Communications in Mathematical Physics* 171.1 (1995), pp. 1–25. DOI: 10.1007/bf02103769 (cit. a p. v).
- [Lei04] Tom Leinster. *Higher operads, higher categories*. 298. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/CB09780511525896 (cit. a p. 67).

- [LV12] Jean-Louis Loday e Bruno Vallette. *Algebraic operads*. Vol. 346. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Heidelberg: Springer-Verlag, ago. 2012 (cit. alle pp. 5, 32, 33).
- [Mar06] Martin Markl. “Operads and PROPs”. In: *Handbook of Algebra* 5 (gen. 2006), pp. 87–140. DOI: 10.1016/S1570-7954(07)05002-4 (cit. alle pp. vi, 39).
- [MSS02] Martin Markl, Steven Shnider e James D. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*. 96. American Mathematical Soc., 2002 (cit. alle pp. v, 1, 36).
- [RS13] Dylan Rupel e David I. Spivak. *The operad of temporal wiring diagrams: formalizing a graphical language for discrete-time processes*. 2013. arXiv: 1307.6894 [math.CT] (cit. a p. vi).
- [Sta15] Richard P. Stanley. *Catalan Numbers*. Cambridge University Press, 2015. DOI: 10.1017/CB09781139871495 (cit. a p. 59).
- [Tro06] Sergei N. Tronin. “Operads and varieties of algebras defined by polylinear identities”. In: *Siberian Mathematical Journal* 47.3 (2006), pp. 555–573. DOI: 10.1007/s11202-006-0067-9 (cit. a p. 17).
- [Val12] Bruno Vallette. *Algebra+Homotopy=Operad*. 2012. arXiv: 1202.3245 [math.AT] (cit. a p. v).

Ringraziamenti

Desidero ringraziare sinceramente il professor Canonaco per avermi seguito nella stesura di questo elaborato e tutti coloro che hanno contribuito a rendere speciale questo mio percorso: i professori che ho avuto il piacere di incontrare in questi cinque anni, la mia famiglia, i miei amici.