

# TP 3 : Filtrage de Kalman et suivi de trajectoires



Probabilistic Models and Machine Learning

Ambroise LAROYE–LANGOUËT

Télécom Paris

9 novembre 2025

## 1 Introduction

Le but de ce TP est de se familiariser avec les chaînes de Markov cachées continue et le filtrage de Kalman l'objectif sera de poursuivre une cible (tracking).

## 2 Filtre de Kalman

### 2.1 Principe et Implémentation

Le filtre de Kalman sert à estimer l'état caché d'un système dynamique bruité à partir d'observations également bruitées. L'état du système (position et vitesse) évolue selon un modèle linéaire. Soient  $X = (X_1, \dots, X_N)$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$  deux séquences stochastiques prenant respectivement leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^2$ . Le système linéaire gaussien caché modélise les liens entre les différentes variable grâce à deux équations d'états :

**fonction :** `creer_trajectoire(F, Q, N, x_init)`

$$x_n = Fx_{n-1} + U_n \quad \text{avec} \quad u_n \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

**fonction :** `creer_observations(H, R, x)`

$$y_n = Hx_n + V_n \quad \text{avec} \quad v_n \sim \mathcal{N}(0, R)$$

$$X_0 \sim \mathcal{N}(m_{0|0}, P_{0|0})$$

$$\hat{x}_{n|n} = \text{meilleure estimation de } x_n \text{ sachant } y_1, \dots, y_n$$

**fonction :** `filtre_de_kalman_iter(F, Q, H, R, y_n, x_kalm_prec, P_kalm_prec)`

Cette fonction réalise une itération du filtre de Kalman : Le principe du filtre de Kalman est de calculer récursivement  $\hat{x}_{n+1|n+1}$  et  $\hat{P}_{n+1|n+1}$ , à partir de  $\hat{x}_{n|n}$  et  $\hat{P}_{n|n}$ , ie elle met à jour l'état estimé et sa covariance, en 2 étapes :

#### Etape de prédiction

On prédit l'état et sa covariance avant d'avoir la nouvelle mesure :

$$\hat{x}_{n+1|n} = F_n \hat{x}_{n|n}$$

$$P_{n+1|n} = F_n \hat{P}_{n|n} F_n^T + Q$$

#### Etape de mise à jour

Une fois qu'on reçoit la mesure  $y_n$ , on corrige la prédiction :

$$\hat{y}_n = y_n - H \hat{x}_{n+1|n}$$

$$K = \hat{P}_{n+1|n} H^T (H \hat{P}_{n+1|n} H^T + R)^{-1}$$

Puis on met à jour :

$$\hat{x}_{n+1|n+1} = \hat{x}_{n+1|n} + K \hat{y}_n$$

$$P_{n+1|n+1} = (I - KH) P_{n+1|n}$$

### 3 Résultats

#### 3.0.1 Initialisation

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & T_e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \sigma_Q^2 \begin{pmatrix} \frac{T_e^3}{3} & \frac{T_e^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T_e^2}{2} & T_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_e^3}{3} & \frac{T_e^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T_e^2}{2} & T_e \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_{p_x}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{p_y}^2 \end{pmatrix}.$$

#### 3.0.2 Trajectoire Rectiligne

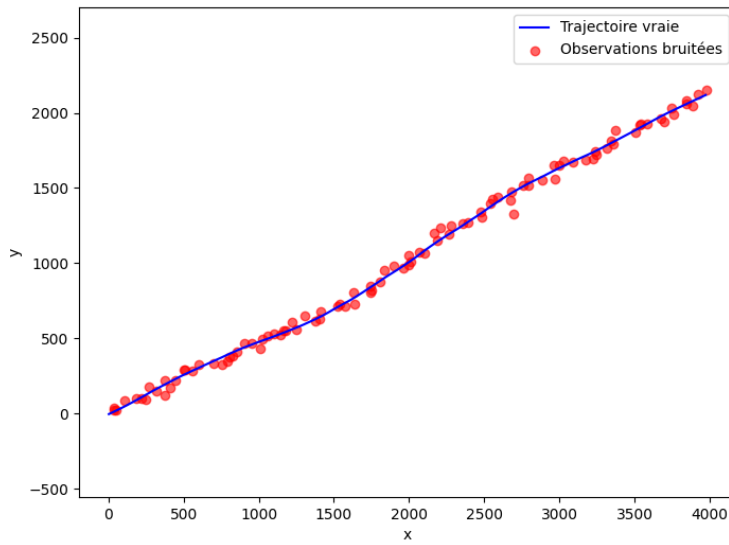


FIGURE 1 – Trajectoire et observations bruitées

**Remarque :** Pourquoi ajouter du bruit sur x ?

Sans ajouter de bruit, le mouvement serait parfaitement rectiligne uniforme, et donc on ne pourrait segmenter que des droites car si le modèle suppose que le mouvement est rectiligne uniforme, alors les trajectoires qu'il peut prédire ou représenter sont des droites.

Autrement dit, si la cible tourne ou accélère, le modèle ne pourra pas le prévoir.

### 3.0.3 Estimation de la trajectoire

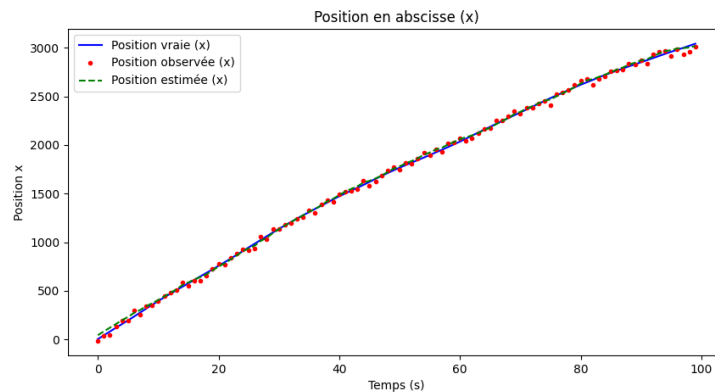


FIGURE 2 – Position réelle, estimée et observée en abscisse

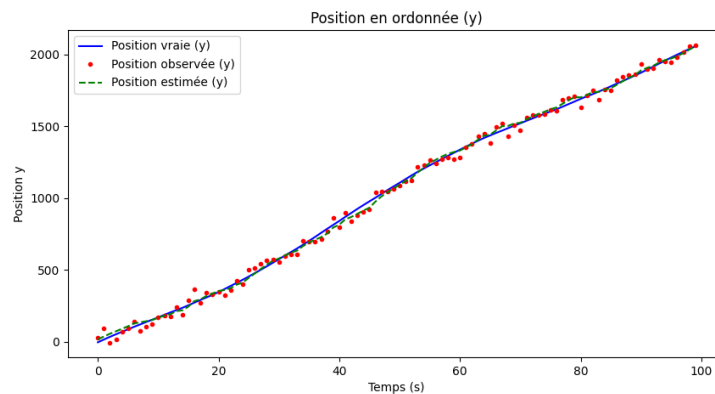


FIGURE 3 – Position réelle, estimée et observée en ordonnée

La figure 2 montre l'évolution de la position selon l'axe des abscisses : la trajectoire estimée (en vert) suit quasiment la trajectoire réelle (en bleu), tandis que les observations (en rouge) présentent des fluctuations autour de l'axe. On constate que le filtre de Kalman parvient à "lisser" les observations tout en conservant la dynamique du mouvement.

De même, la figure 3 donne le même comportement sur l'axe des ordonnées. Cependant nous observons des fluctuations plus importante. Nous notons également que la position est moins rectiligne que celle sur l'axe des abscisses. Nous pouvons néanmoins, voir que le filtre de Kalman est plutôt robuste sur les deux dimensions.

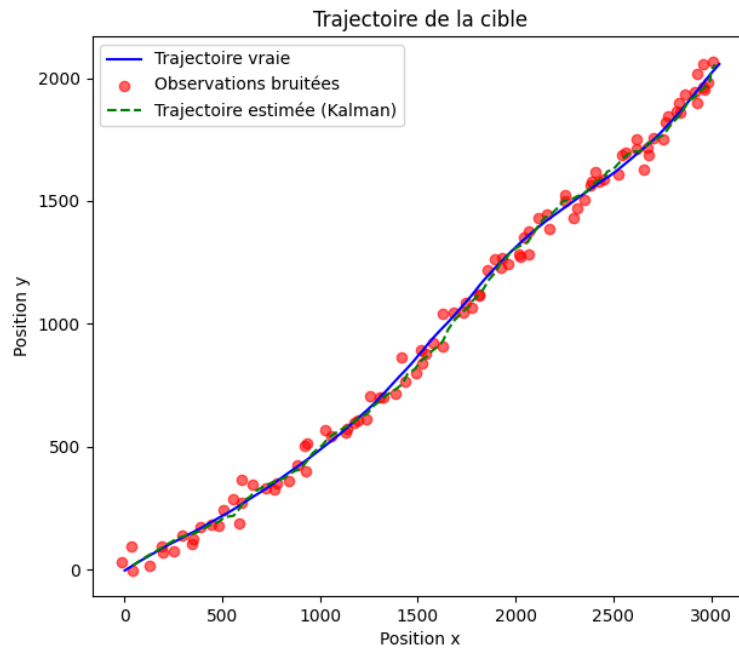


FIGURE 4 – Trajectoire réelle, observée et estimée par le filtre de Kalman

Enfin, pour la trajectoire complète, nous observons sur la figure 4 que la trajectoire estimée (en vert) est plus stable que les observations. Le filtre de Kalman corrige les erreurs de mesure et réduit la dispersion du bruit.

L'erreur quadratique moyenne (**MSE**) entre la trajectoire estimée et la trajectoire réelle est d'environ **545**. Pour généraliser le résultat de la MSE nous relevons l'erreur sur 500 itérations nous obtenons **497** en moyenne. Cette valeur est assez faible et indique que le filtre "converge" bien vers la vraie position malgré le bruit d'observation.

### 3.1 MSE en fonction de $\sigma_Q$

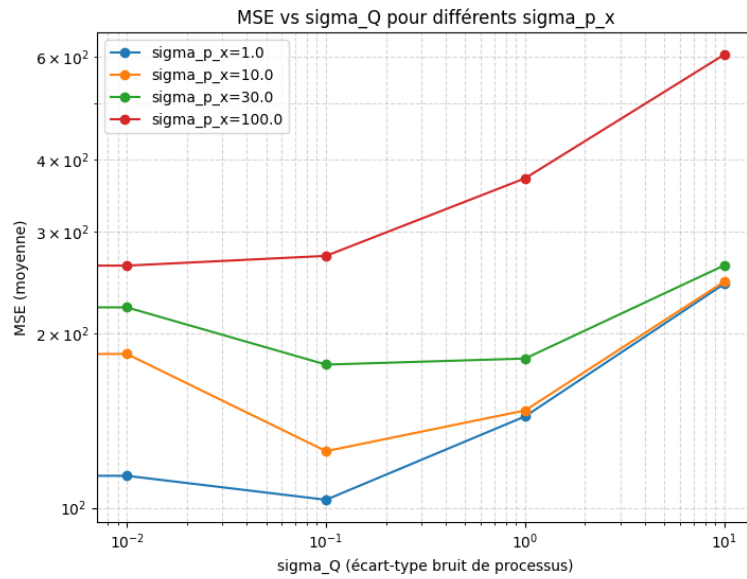


FIGURE 5 – MSE vs  $\sigma_Q$   $\sigma_{px}$

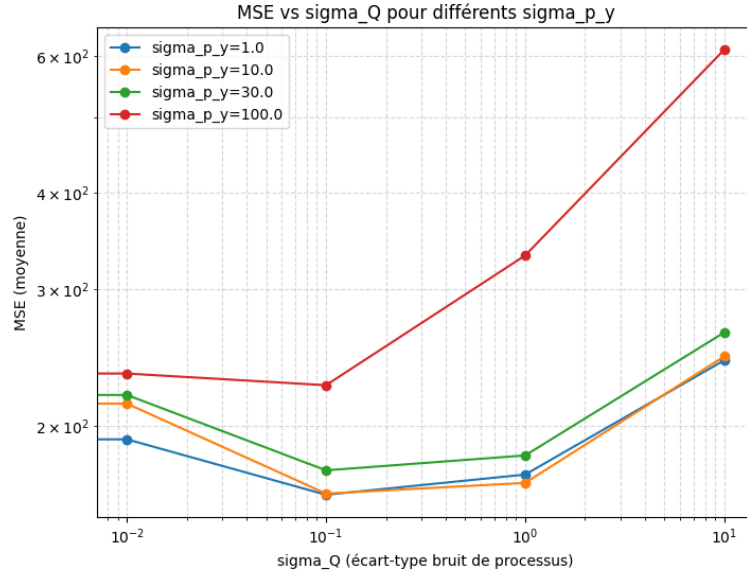
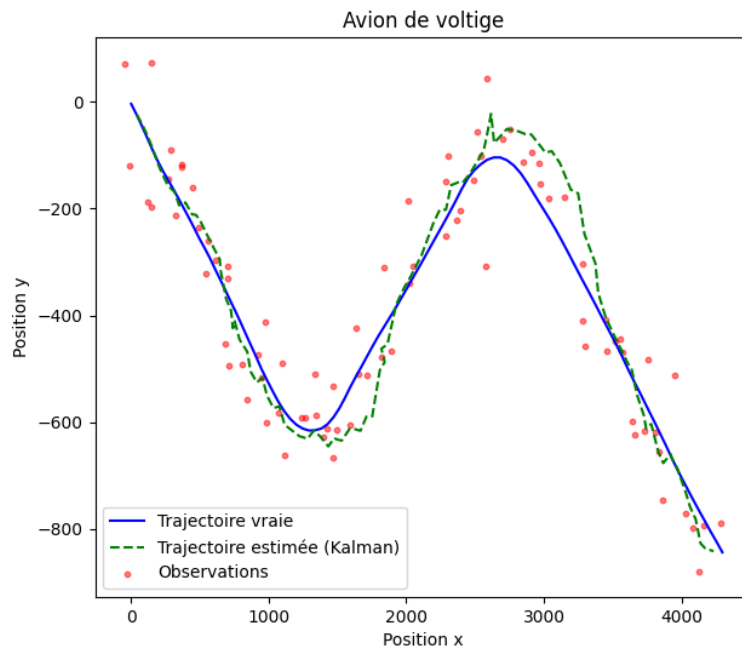
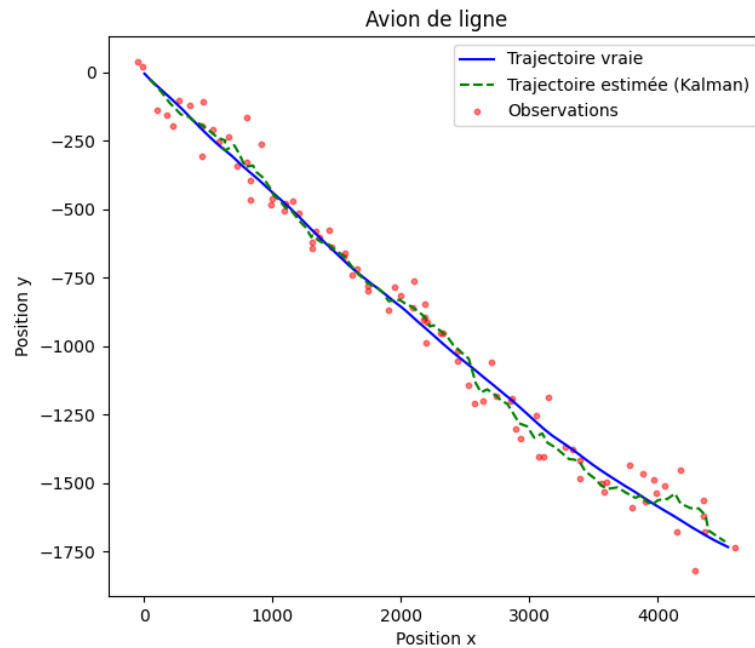


FIGURE 6 – MSE vs  $\sigma_Q$   $\sigma_{py}$

Lorsque  $\sigma_Q$  augmente, la MSE augmente. Le filtre accorde alors moins de confiance au modèle dynamique et plus aux mesures, ce qui dégrade la précision. À l'inverse, si  $\sigma_Q$  est trop petit, le filtre devient trop rigide et ne s'adapte plus aux variations de trajectoire. On peut choisir  $\sigma_Q$  optimal autour de 0.1. De plus il faut également choisir  $\sigma_{px}$  tel que la MSE est minimale. La MSE augmente lorsque  $\sigma_{px}$  est plus élevé. Dans notre cas il serait judicieux de choisir une valeur proche de 1.0.

### 3.2 Filtrage de Kalman et poursuite d'avion



— Erreur quadratique moyenne (avion de ligne) : 2294.41

— Erreur quadratique moyenne (avion de voltige) : 3864.48

Pour l'avion de ligne, soit une trajectoire plus rectiligne et uniforme, la MSE est de 2294, ce qui montre que le filtre suit bien une trajectoire quasi-linéaire. Cette valeur reste faible mais semble assez élevée par rapport au résultat trouvé précédemment sur la trajectoire parfaitement rectiligne uniforme à un bruit près.

En revanche, pour l'avion de voltige soit un mouvement très saccadé, la MSE est plus élevée (3864), car le filtre de Kalman linéaire ne peut pas bien suivre des accélérations ou changements de direction rapides. Le filtre de Kalman semble corriger l'erreur et la trajectoire avec un retard.

Pour conclure, ce TP nous a permis de comprendre le fonctionnement du filtre de Kalman et son application au suivi de trajectoires bruitées. Nous avons observé que le filtre fournit une estimation précise et stable de la position, tout en atténuant efficacement le bruit de mesure. L'étude du MSE en fonction de  $\sigma_Q$  a mis en évidence l'importance du bon choix des paramètres de bruit pour garantir des performances optimales. Enfin, nous avons constaté que le filtre de Kalman classique est performant pour des trajectoires linéaires (avion de ligne), mais limité pour des mouvements non linéaires (avion de voltige).