Algèbre 2 ECUE 1

Dr Vincent Kouassi KOUAKOU

3 mars 2025

Table des matières

Chapitre 1

Matrices

1.1 Introduction

Très souvent, non seulement en physique et en sciences de l'ingénieur mais aussi en biologie tout comme en sciences de la Terre, il est très utile et souvent beaucoup plus rapide de représenter et de manipuler des données sous la forme de tableaux. Un tableau de données qui obéit à certaines règles d'opérations algébriques est appelé **matrice**. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, les matrices sont importantes pour représenter et résoudre les **systèmes d'équations linéaires**.

Les matrices codent les systèmes d'équations linéaires et ce codage est à la source du produit «**ligne-colonne**». Il existe plus précisement une correspondance entre système d'équations linéaires et équation matricielle que nous expliquons dans le dernier paragraphe.

Objectifs :

1. Savoir multiplier des matrices et pratiquer le yoga des opérations sur les matrices.

2. Savoir calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 ou 3 par les deux méthodes.

3. Savoir passer d'un système d'équations linéaires à une équation matricielle et inversement.

4. Savoir résoudre matriciellement un système linéaire de n équations à n inconnues quand la matrice associée à ce système est inversible.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2 Généralités sur les matrices

1.2.1 Matrices : définition et notation

Les matrices sont des tableaux habituellement délimités par des parenthèses ou des crochets, et nous utiliserons ici des crochets. De plus, les lettres majuscules sont habituellement utilisées pour nommer les matrices. Par exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

est une matrice avec deux **lignes** et trois **colonnes**. Les termes individuels de la matrice sont appelés **éléments** ou **cœfficients** : l'élément sur la deuxième ligne et la troisième colonne est -4. On dit que cette matrice est d'**ordre** «2 par 3», noté 2×3, ou encore qu'il s'agit d'une matrice de **type** (2×3) ou encore de une matrice de **taille** (2×3). Dans le cas général, on note une matrice $(n \times p)$ avec n lignes et p colonnes de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} = [a_{i,j}] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p),$$

où $a_{i,j}$ est l'élément sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de la matrice A. Dans le cas précédent, $a_{23} = -4$, $a_{12} = 2$, etc. On peut aussi écrire la matrice encore plus simplement

$$A = [a_{i,j}] \,,$$

si on connait l'ordre de la matrice $(n \times p)$.

Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes, c-à-d quand $n = p$, est appelée **matrice carrée** de taille n. Par contre, si $n \neq p$, alors on dit qu'il s'agit d'une **matrice rectangulaire**.

Une matrice de type (1×1) est simplement un nombre : par exemple $[5] = 5$.

Les matrices peuvent aussi ne posséder qu'une seule ligne ou qu'une seule colonne.

$$A = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,5 & 2,11 & 4,6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0,11 \\ 6,05 \\ -2,10 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.2.1 - *Une matrice de $(n, 1)$ est appelée* ***matrice colonne****. On la note*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}.$$

- *Une matrice de $(1, p)$ est appelée* ***matrice ligne****. On la note*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.2.1 *Ecrire la matrice A dont les éléments sont $a_{i,j} = (-i)^j$, avec $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.*

1.2.2 Vocabulaire et notation

- Une matrice qui possède n lignes et p colonnes est appelée une (n, p)-matrice ou une matrice de type (n, p) ou encore une matrice de taille (n, p) sur $\mathbb{K}$.

- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des $(n,p)-$matrices réelles.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des $(n,p)-$matrices complexes.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$ se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Soit une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

alors les éléments a_{11}, a_{22}, ..., $a_{i,i}$, ..., $a_{n-1,n-1}$, $a_{n,n}$ sont appelés les **éléments diagonaux** et forment la **diagonale principale** de la matrice carrée A.

Définition 1.2.2 *On appelle* ***trace*** *d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le nombre*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{n-1,n-1} + a_{n,n} \in \mathbb{K}.$$

Les matrices possèdent des propriétés particulières qui restent les mêmes qu'elles aient été transformées ou non. On appelle ces propriétés qui ne changent pas des **invariants**, et l'un de ces invariants est la trace d'une matrice carrée. La trace n'existe que pour les matrices carrées.

1.3 Règles d'algèbre matricielle

Nous avons besoin de règles algébriques cohérentes pour pouvoir manipuler les matrices (les additionner, les multiplier, etc.). Comme nous le verrons par la suite, ces règles ont leur origine dans la représentation des équations linéaires et des transformations linéaires, mais pour le moment nous allons les considérer simplement comme une liste de règles.

1.3.1 Égalité

Deux matrices ne peuvent être égales entre elles que si elles sont du même ordre : c-à-d si elles possèdent le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Dans ce cas, elles sont égales si leurs éléments sont égaux un à un. Donc si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},$$

alors $a = e, b = f, c = g, d = h$. Plus généralement, si $A = a_{i,j}$ et $B = b_{i,j}$ sont deux matrices $(n \times p)$, alors $A = B$ si et seulement si $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tous $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., p$.

Exercice 1.3.1 *Résoudre l'équation $A = B$ avec*

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - y & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-2 \end{bmatrix}.$$

1.3.2 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, on définit une addition et une multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ comme suit :

Addition sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient A et B deux matrices ayant la **même taille** (n, p). Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille (n, p) définie par

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

En d'autres termes, on somme cœfficients par cœfficients.

Exemple 1.3.1 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+0 & -2+5 \\ 1+2 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Par contre pour $B' = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$; la somme $A + B' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ n'est pas (possible) définie.

Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est la matrice $(\lambda a_{i,j})$ formée en multipliant chaque cœfficient de A par λ. Elle est notée : $\lambda.A$ (ou simplement λA).

Exemple 1.3.2 $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, -\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$

$$-2C = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 2 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'**opposée** de A et est notée $-A$.

La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises.

1.3.3 Matrice nulle

Toute matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro est une matrice nulle. Si A est une matrice nulle, on peut écrire simplement $A = 0$.

On note $0_{n,p}$ ou tout simplement 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les cœfficients sont nuls.

Les règles arithmétiques appliquées aux éléments des matrices fournissent les résultats suivants :

Proposition 1.3.1 *Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Alors on a :*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$: *l'addition est associative.*

   Autrement dit, l'ordre dans lequel les matrices sont additionnées n'est pas important.
2. $A + 0 = A = 0 + A$: *la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
3. $A + (-A) = 0$.
4. $A + B = B + A$: *l'addition est commutative,*

   Conclusion *: $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.*
5. $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$,
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
7. $(\alpha\lambda)A = \alpha\,(\lambda A)\,$,
8. $1_{\mathbb{K}}A = A$.

Exercice 1.3.2 *On donne*

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4E$.

Trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A + \alpha C$ soit la matrice nulle.

1.3.4 Multiplication des matrices

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$u.v = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{K}.$$

Ce nombre s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs u et v.

Nous avons maintenant besoin de définir le concept du produit de matrices, ou **produit matriciel**. Toutes les matrices ne peuvent pas être multipliées entre elles : elles doivent avoir la «bonne forme». Le produit matriciel d'une matrice par une autre n'est possible que **si le nombre de colonnes de la première matrice est identique au nombre de lignes de la seconde (condition de compatibilité)**. La multiplication de la matrice A par la matrice B est notée AB. Attention : l'ordre est important ! En général le produit matriciel AB est différent du produit BA. En effet, pour que AB existe il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B, alors que pour BA il faut que le nombre de colonnes de B soit égal au nombre de lignes de A. Ainsi, si le produit matriciel AB existe, cela ne garantie pas que la multiplication BA soit aussi possible.

Définition

Définition 1.3.1 *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Par définition, le produit $A \times B$ *des matrices* A *et* B *est la matrices*

$$A \times B = C = (c_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

définie par :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$$

pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *et tout* $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

On peut écrire le cœfficient $c_{i,k}$ de façon plus développée, à savoir :

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,j}b_{j,k} + \ldots + a_{i,p}b_{p,k}.$$

Remarque 1.3.1 *- On a le schéma ci- dessous*

$$\begin{array}{rccc} \times : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ & (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}.$$

- Le produit $A \times B$ *de deux matrices* A *et* B *n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de* A *est égal au nombre de lignes de* B.

Exemples

1. Calculer le produit $A \times B$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Quelles matrices peut-on multiplier ? Les calculer.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

3. Peut-on effectuer les multiplications suivantes ? Si oui, donner le résultats.

$a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R}),\quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$c)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},\quad d)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$e)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$,\ f)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ g)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad h)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},\ k)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 11 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Remarque 1.3.2 *Calculer le cœfficient $c_{i,j}$ dans le produit AB revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la ième ligne de A et la jème colonne de B.*

Même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 1.3.3 *Calculer les produits AB et BA avec*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

On a $AB = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ *et* $BA = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{bmatrix}.$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Deuxième piège

$A \times B = 0$ n'implique pas ($A = 0$ ou $B = 0$).

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir ($A \neq 0$ et $B \neq 0$) et ($A \times B = 0$).

Exemple 1.3.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

On a $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *alors que* $BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Propriétés du produit de matrices

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit des matrices vérifie les proporiétés suivantes :

Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

2. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} (A + B) \times C &= A \times C + B \times C, \\ A \times (C + D) &= A \times C + A \times D. \end{aligned}$$

3. Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\lambda (A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B).$$

4. Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\begin{aligned} A \times 0_{p,\bullet} &= 0_{n,q}, \\ 0_{\bullet,p} \times B &= 0_{n,q}. \end{aligned}$$

5. La multiplication des matrices n'est en générale pas commutative.

La matrice unité ou matrice identité

La matrice carrée ci-dessous s'appelle la matrice unité ou matrice identité d'ordre n. Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$I_{\bullet,n} \times A = A \text{ et } A \times I_{p,\bullet} = A.$$

$$I_n \times A = A \text{ et } A \times I_p = A.$$

En particulier pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Dans le calcul matriciel, la matrice unité I_n joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées.

Théorème 1.3.1 *L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$.*

Matrices carrées inversibles

Définition 1.3.2 ***(Inverse d'une matrice carrée)***

*Soit A une **matrice carrée** de taille $n \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une matrice carrée B de taille n telle que*

$$AB = BA = I_n,$$

*on dit que la matrice A est **inversible** (ou **regulière** ou **non-singulière**), et on appelle B la matrice **inverse** de A qu'on note A^{-1}.*

En fait il suffit de vérifier une seule des conditions $A \times B = I$ ou bien $B \times A = I$.

Théorème 1.3.2 *- L'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication noté $GL_n(\mathbb{K})$ ou $GL(n, \mathbb{K})$.*

*- Ce groupe est non commutatif dès que $n \geqslant 2$, est appelé **le groupe linéaire général de degré** n sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 1.3.2 *a) La matrice I_n est inversible d'inverse I_n.*

b) Si A est inversible, alors son inverse est unique.

c) Soit A une matrice inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

d) Soient A et B deux matrices de même taille inversibles, alors $A \times B$ est inversible et

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons vu que la relation

$$A \times C = B \times C$$

où A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$.

En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition 1.3.3 *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors on a*

$$\begin{aligned} A \times C &= B \times C \underset{\times C^{-1}}{\Longrightarrow} A = B, \\ C \times A &= C \times B \underset{\times C^{-1}}{\Longrightarrow} A = B. \end{aligned}$$

1.3.5 Polynôme d'une matrice carrée

Puissance d'une matrice carrée

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication des matrices est une opération interne :

$$\text{si } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{n+1} = A^n A \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \quad . \\ A^0 = \mathrm{I}_n \quad \text{si } A \neq 0_n. \end{cases}$$

Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $\forall p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = A^{-1 \times p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1} \times ... \times A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

Polynôme d'une matrice carrée

Définition 1.3.3 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et*

$$P = a_0 X^0 + a_1 X + ... + a_p X^p \in \mathbb{K}[X],$$

alors on définit

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_p A^p \in \mathcal{M}_n(K).$$

Définition 1.3.4 ***Un polynôme annulateur*** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est, par définition, un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(A) = 0_n$.*

Calcul de l'inverse par un polynôme annulateur

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_0 + a_1X + ... + a_pX^p \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P(A) = 0_n$.

$P(A) = 0_n \iff a_0\mathrm{I}_n + a_1A + a_2A^2 + ... + a_pA^p = 0_n \iff a_0\mathrm{I}_n = -(a_1A + a_2A^2 + ... + a_pA^p)$.

Alors si $a_0 \neq 0$, $\mathrm{I}_n = -\dfrac{1}{a_0}(a_1A + a_2A^2 + ... + a_pA^p) \iff \mathrm{I}_n = A \times [-\dfrac{1}{a_0}(a_1\mathrm{I}_n + a_2A + ... + a_pA^{p-1})]$. Donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(\sum_{k=1}^{n} a_kA^{k-1}).$$

Exercice 1.3.3 *On donne* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calculer $A^2; A^3; A^4$.

b) Montrer que $A^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{bmatrix}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.3.4 *Soit* $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $2A - A^2$ *; puis en déduire* A^{-1}.

Exercice 1.3.5 *On donne Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $A - A^2$ *; puis en déduire* A^{-1}.

Exercice 1.3.6 *La matrice* A *s'écrit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix},$$

où $a, b, c,$ *et* d *sont des constantes non-nulles. Calculer* A^2, A^3, A^4. *En déduire l'inverse de* A.

1.3.6 Transposée d'une matrice

Définition

Définition 1.3.5 *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle ***transposé*** *de* A*, la* (p,n)*-matrice notée* ${}^tA$ *(ou* ${}^TA$ *ou* A^T*) obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice* A*; i.e la* (p,n)*-matrice notée* ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$ *définie par*

$$b_{j,i} = a_{i,j}$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ *et tout* $j \in \{1, ..., p\}$.

$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Longrightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & ... & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & ... & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & ... & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1.3.5 $A = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 7 & 11 \\ -2 & -5 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 22 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^tA = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 15 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & -4 \\ 11 & 0 & 22 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

Propriétés

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$,

1. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$^t\left({}^tA\right) = A.$$

2. Pour tous A, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(\lambda A) &= \lambda\left({}^tA\right). \end{aligned}$$

3. Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a :

$${}^t(A \times B) = {}^tB\,{}^tA.$$

4. L'application

$$\begin{array}{rccc} {}^t\boxdot : & (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), +) \\ & A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Théorème 1.3.3 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *La matrice* A *est inversible si, et seulement si* ${}^tA$ *est inversible.*
2. *Si la matrice* A *est inversible, alors* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

1.4 Matrices carrées particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

1.4.1 Matrices diagonales

Définition 1.4.1 *On appelle* ***matrice diagonale****, toute matrice carrée dont les éléments non diagonaux sont tous nuls.*

– La matrice $D = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq j$, on a $a_{i;j} = 0$, i.e si et seulement si D est de la forme

$$D = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice se note $D = diag\,(a_{1,1}, ..., a_{n,n})$.

1.4.2 Matrices scalaires

Définition 1.4.2 *On appelle* ***matrice scalaire****, toute matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux.*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- La matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice scalaire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$A = \lambda I_n.$$

1.4.3 Matrices triangulaires

Définition 1.4.3 *On appelle* ***matrice triangulaire supérieure*** *(respectivement* ***inférieure****) toute matrice carrée dont tous les éléments situés au-dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.*

- La matrice $T = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i > j$, on ait $a_{i;j} = 0$, i.e si et seulement si T est de la forme

$$T = \begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} \\ 0 & a_{2;2} & \dots & a_{2;n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n;n} \end{bmatrix}.$$

- La matrice $T = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire inférieure si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i < j$, on ait $a_{i;j} = 0$, i.e si et seulement si T est de la forme

$$T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

1.4.4 Matrices symétriques

Définition 1.4.4 *On appelle **matrice symétrique** toute matrice carrée A telle que*

$${}^tA = A.$$

– La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$.

1.4.5 Matrices anti-symétriques

Définition 1.4.5 *On appelle **matrice anti-symétrique** toute matrice carrée A telle que*

$${}^tA = -A.$$

- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice anti-symétrique si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ on a $a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1.4.6 Matrices de permutation

Définition

Définition 1.4.6 *Une **matrice de permutation** d'ordre n est une matrice carrée de taille n dont tous les cœfficients sont égaux à 0, sauf un cœfficient sur chaque ligne et sur chaque colonne qui vaut 1.*

Propriétés

Proposition 1.4.1 *Les matrices de permutation d'ordre n sont associées aux permtutations de $\{1, 2, ..., n\}$.*

Preuve 1.4.1 *Pour tout $\sigma \in S_n$, posons P_σ la matrice de permutation $(a_{i,j})$ de taille n où*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(j) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit

Associons à la permutation $\sigma \in S_n$ la matrice P_σ telle que j-ème colonne de P_σ ne comporte que des 0, sauf le cœfficient sur la $\sigma(j)$-ème ligne qui est égal à 1. Alors (d'après la définition) la matrice P_σ est une matrice de permutation. Reciproquement, toute matrice de permutation définit une permutation par la transformation inverse. □

Dans ce cas,

Corollaire 1.4.1 *Soit $\sigma \in S_n$ et P_σ la matrice de permutation associée à σ. Alors on a*

$$tr(P_\sigma) = |Inv(\sigma)|.$$

Par ailleurs, pour tous $\sigma, \tau \in S_n$

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}.$$

Ainsi

Proposition 1.4.2 *L'ensemble des matrices de permutation forme un un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ isomorphe à S_n.*

Exemple 1.4.1 *Pour*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_6,$$

on a la matrice de permutation

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition 1.4.3 *Les matrices de permutation permettent de permuter les lignes et les colonnes d'une matrice A.*

- *$A \times P_\sigma$ est la matrice déduite de la matrice A, en permutant les colonnes de A suivant la permutation σ.*
- *$P_\sigma \times A$ est la matrice déduite de la matrice A, en permutant les lignes de A suivant la permutation σ^{-1}.*

1.4.7 Matrices circulantes

Définition 1.4.7 *Une* ***matrice circulante*** *est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire (décalage vers la droite) des cœfficients. Une matrice circulante de taille n est donc de la forme*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{bmatrix}.$$

Nous allons notons une matrice circulante C de taille d, de première ligne $c_0, c_1, ..., c_{d-1}$, par

$$C = circ(c_0, c_1, ..., c_{d-1}).$$

Un exemple de matrice 5×5 circulante est :

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_0 \end{bmatrix}.$$

On parle parfois de

Définition 1.4.8 *Matrice* ***anticirculante*** *ou* ***circulante gauche*** *quand on effectue un décalage à gauche des cœfficients en passant d'une ligne à la suivante.*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Chaque ligne est un décalage cyclique de la ligne du dessus vers la gauche.

Exemple 1.4.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.4.8 Carré latin

Définition 1.4.9 ***Un carré latin*** *est un tableau carré de n lignes (donc de n colonnes) remplies de n éléments distincts dont chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul exemplaire.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Opérations élémentaires

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **opérations élémentaires** sur la matrice A, l'une des opérations suivantes portant sur les lignes (resp. sur les colonnes de A).

1. Permutation de deux lignes (resp. de colonnes) de A, $L_i \longleftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \longleftrightarrow C_j$).

2. Multiplication des éléments d'une ligne (resp. d'une colonne) de A par un scalaire non-nul, $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ (resp. $C_i \longleftarrow \alpha C_i$).

3. Ajouter à la i-ème ligne (resp. à la j-ème colonne) de A la k-ème ligne multipliée par $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ (resp. la l-ème colonne de A par $\alpha \in \mathbb{K}- \{0\}$) avec $i \neq k$ (resp. $j \neq l$), $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_k$ (resp. $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_l$).

Attention : On prend garde à effectuer les opérations élémentaires successivement et non simultanément.

Exemple 1.4.3 *Sur la matrice unité d'ordre* 3, *effectuer les opérations suivantes :*

1. *Permuter les lignes L_2 et L_3.*
2. *Remplacer la ligne L_2 par $-6L_2$.*
3. *Remplacer la ligne L_3 par $-4L_1 + L_3$.*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1.\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2.\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3.\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Application : Inversion d'une matrice-Exemples

Première méthode : Méthode de Gauss ou méthode de la matrice compagnon

Pour inverser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la méthode de la matrice compagnon :

1. Ecrire côte à côte la matrice A et la matrice identité I_n pour former une **matrice augmentée**

$$(A \mid I_n).$$

2. En suivant la méthode du pivot de Gauss, il est possible en opérant **uniquement sur les lignes**[1] de transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & p_n \end{pmatrix} \text{ où } p_1, ..., p_n \neq 0.$$

En opérant à nouveau sur ces lignes on peut poursuivre la transformation de A en

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis en la matrice unité

$$\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

NB : On appliquera au fur et à mesure les mêmes modifications à la matrice compagnon.

3. On obtient la matrice augmentée

$$(I_n \mid B = A^{-1}).$$

En effet, effectuer les opérations élémentaires sur les lignes transformant la matrice A en la matrice identité I_n, revient à multiplier la matrice A à gauche par des matrices $T_1, ..., T_m$. Ainsi la transformation de la matrice A en la matrice identité I_n correspond à écrire $T_m ... T_1 . A = I_n$.

En multipliant à droite par A^{-1}, on en déduit $T_m ... T_1 = A^{-1}$.

Ainsi la série d'opérations élémentaires sur les ligne qui transforme la matrice A en I_n transforme parallèlement la matrice identité I_n en A^{-1}.

Nous pouvons exploiter cette idée pour calculer A^{-1} de façon algorithmique.

Remarque 1.4.1 *S'il est impossible de faire apparaître la matrice I_n à gauche (**par exemple si on obtient une ligne entière de zéros**), c'est que la matrice A n'est pas inversible et donc il est inutile de continuer.*

Exemple 1.4.4 *Trouver l'inverse de la matrice A, si elle existe.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

[1] Comme l'inverse d'une matrice M est égale à la transposée de l'inverse de ${}^tM$, il est possible de raisonner sur ${}^tM$. Or toute opération sur les lignes de ${}^tM$ revient à faire l'opération correspondante sur les colonnes de M. Il est donc possible d'inverser M en agissant exclusivement sur les colonnes de M.

Solution

Pour ce faire, nous écrivons la matrice unité à la droite de la matrice A et nous appliquons les mêmes opérations élémentaires à cette matrice que celles effectuées sur la matrice A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow -L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_3}{\overset{L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow -L_3}{\overset{L_2 \longleftarrow -L_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

On a bien

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.4.1 *Inverser les matrices suivantes par la méthode de la matrice compagnon*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.4.2 *On peut aussi transformer A en I_n, en ne manipulant que les colonnes de A, les opérations correspondantes transforme alors aussi I_n en A^{-1}.*

Attention : On manipule lignes ou colonnes mais jamais les deux !

Exercice 1.4.2 *Calculer l'inverse de* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Solution

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1}{\overset{L_3 \longleftarrow L_3 + L_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow 2L_3 + L_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 + 5L_3}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -8 & 0 & -14 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{L_2 \longleftarrow -\frac{1}{8}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

On a bien

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chapitre 2

Déterminant

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Une combinaison particulière des éléments d'une matrice carrée, appelée le **déterminant**, permet de déterminer si cette matrice est inversible : si ce nombre est nul, la matrice est dite **singulière** et son inverse n'existe pas. Nous allons d'abord définir le déterminant d'une matrice ainsi que ces propriétés. Dans ce chapitre, nous allons commencer tout d'abord par les matrices $(1 \times 1), (2 \times 2)$, avant de passer aux matrices (3×3), ce qui nous permettra ensuite de généraliser pour les ordres plus élevés.

2.1 Déterminants 1×1 et 2×2

Définition 2.1.1 *i) Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre 1 (ne contenant donc qu'un seul cœfficient, $A = (a_{11})$. Alors,*

$$det(A) = a_{11}.$$

ii) Considérons la matrice : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 2.1.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (3 \times 2) = -2.$

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2.$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 2.$$

On constate que :

1) Si deux lignes (ou deux colonnes) sont permutées, alors le déterminant est multiplié par -1.

2) Le déterminant reste inchangé lorsque l'on échange les colonnes et les lignes (dans le même ordre).

2.2 Déterminant d'ordre $n \geqslant 3$

On se ramène à des calculs de déterminants d'ordres inférieurs à n en développant suivant une ligne ou une colonne par la méthode des co-facteurs.

2.2.1 Calcul du déterminant par la méthode des co-facteurs

Calcul du déterminant par la méthode des co-facteurs

Proposition 2.2.1 *Le determinant d'une matrice triangulaire inférieure ou supérieure d'ordre n est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

C'est vrai aussi pour une matrice diagonale.

Exemple 2.2.1 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 6 \times 3 \times 1 = 36.$

Définitions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $A_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant dans A les i-ème ligne et j-ème colonne.

Définition 2.2.1 - *On appelle* ***mineur*** *du cœfficient $a_{i,j}$ de la ième ligne et jème colonne de A le déterminant de la matrice $A_{i,j}$.*

- Le ***co-facteur*** *associé à un élément a_{ij} d'une matrice A est le scalaire $\Delta_{i,j}$ produit du mineur associé à cet élément par $(-1)^{i+j}$.*

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

Calcul du développement suivant une colonne j (qui est fixée)

Définition 2.2.2 *On appelle déterminant de A et on note $\det A$ ou $|A|$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

Cette formule est dite l'expression du développement du déterminant de A suivant la colonne j (qui est fixée) de A.

Le développement du determinant de

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

par rapport à la $1ère$ colonne de A est

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}\Delta_{1,1} + a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{3,1}\Delta_{3,1} \\ &= a_{1,1}\det A_{1,1} - a_{2,1}\det A_{2,1} + a_{3,1}\det A_{3,1}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\textit{mineur} \text{ de } a_{1,1}} - a_{2,1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}_{\textit{mineur} \text{ de } a_{2,1}} + a_{3,1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}}_{\textit{mineur} \text{ de } a_{3,1}}.$$

Calcul du développement suivant une ligne i (qui est fixée)

Définition 2.2.3 *Le déterminant de A est également donné par les formules :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

L'expression du développement du déterminant de A suivant la ligne i de A.

Exercice 2.2.1 *Calcul de* $\det(A)$, *avec* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solution

• En développant suivant la première colonne, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 - 12 = -12.$$

• En développant suivant la deuxième ligne, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 = -12.$$

Remarque 2.2.1 *Cette formule transforme le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de n déterminants d'ordre $n-1$.*

Conclusion 2.2.1 *Le déterminant de la matrice A est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée de cette matrice par les co-facteurs associés à ces éléments.*

2.2.2 Intérêt de la méthode des co-facteurs

1) La règle des co-facteurs est valable pour calculer le déterminant de toute matrice carrée.

2) La règle des co-facteurs est très simple lorsqu'elle est appliquée à une rangée qui comporte beaucoup de zéros.

Exemple 2.2.2 *Calculons le determinant de*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

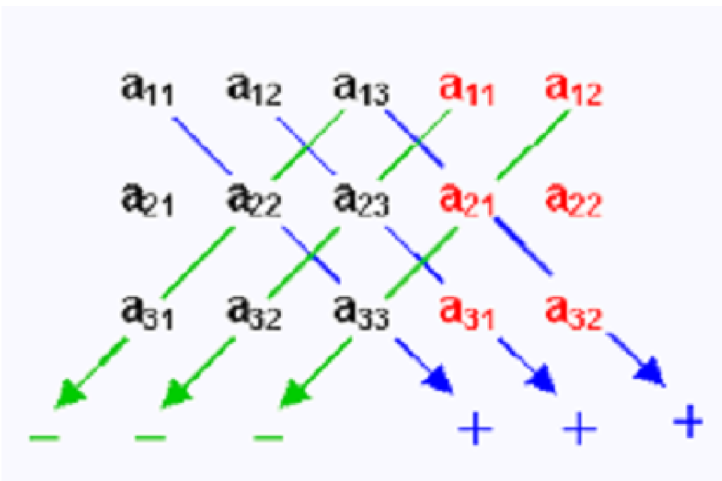
La rangée comportant le plus de zéros est la deuxième ligne : $\begin{matrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \end{matrix}$.
La règle des co-facteurs appliquée à cette ligne donne

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \times \Delta_{2,1} + 0 \times \Delta_{2,2} + 0 \times \Delta_{2,3} \\ &= 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \times (42 + 20) \\ &= -124. \end{aligned}$$

2.2.3 Calcul du déterminant par la méthode de SARRUS

La règle suivante, appelée règle de Sarrus, permet de calculer le déterminant des matrices 3×3. On complète $\det(A)$ par les 2 premières colonnes à droite (ou par les 2 premières lignes en bas).

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}.$$



Rgle de Sarrus

Et alors

$$\det(A) = (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}) - (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}).$$

Exemple 2.2.3 *Calculer* $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Solution 2.2.1 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{matrix}$

$= (0 + 2 + 36) - (0 - 4 - 30) = 72.$

2.2.4 Propriétés des determinants

Proposition 2.2.2 *Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors*

(1) *Si on intervertit deux lignes de A, on change son determinant en son opposé.*

(2) *Si on intervertit deux colonnes de A, on change son determinant en son opposé.*

(3) *Si on remplace une ligne de A par elle-même plus une combinaison linéaire d'autres lignes, on ne change pas son determinant.*

(4) *Si on remplace une colonne de A par elle-même plus une combinaison linéaire d'autres colonnes, on ne change pas son determinant.*

(5) *Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par $\alpha \neq 0$, alors on multiplie son determinant par α.*

(6) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors* $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(7) $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

(8) *Si A a deux lignes identiques ou proportionnelle, alors* $\det(A) = 0$.

(9) *Si une ligne de A est combinaison linéaire d'autres lignes, alors* $\det(A) = 0$.

(10) *Si A a deux colonnes identiques ou proportionnelle, alors* $\det(A) = 0$.

(11) *Si une colonne de A est combinaison linéaire d'autres colonnes, alors* $\det(A) = 0$.

(12) *Le determinant d'une matrice et de sa transposée sont égaux :* $\det(A) = \det({}^tA)$.

Exercice 2.2.2 *Calculer* $\det(A), \det(B)$ *et* $\det(C)$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 30 & -1 & 6 \\ 40 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 34 & 72 & 60 \end{pmatrix}$$

• $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times$
$5 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 38.$

• $\det(B) = 10 \times \det(A)$.

• Pour C, on a $L_3 = 10L_1 + L_2$. D'après (9), $\det(C) = 0$.

Exercice 2.2.3 *Calculer* $\det A$, *avec*

$$A = \begin{pmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 99 & -99 \\ 999 & 1000 & 1001 \\ 1000 & 1001 & 998 \end{pmatrix}.$$

Vous pouvez tenter votre chance avec la règle de Sarrus, mais l'utilisation des opérations élémentaires conduit à des calculs beaucoup plus simples !

Solution

On a en effet

$$\begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12\times 12 & 11\times 11 & 10\times 10 \\ 12\times 3 & 11\times 3 & 10\times 3 \\ 12\times 8 & 11\times 9 & 10\times 9 \end{vmatrix} = 12\times 11\times 10\times \begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 12\times 11\times 10\times 3\times \begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première colonne aux deux suivantes, on obtient

$$\begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix} = 12\times 11\times 10\times 3\times \begin{vmatrix} 12 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant alors par rapport à la deuxième ligne on obtient

$$\begin{vmatrix} 144 & 121 & 100 \\ 36 & 33 & 30 \\ 96 & 99 & 90 \end{vmatrix} = 12\times 11\times 10\times 3\times 1\times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -3960.$$

Exercice 2.2.4 *Calculer* $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$, *pour* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solution

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \underset{C_3 \longrightarrow C_3 - C_1}{\overset{C_2 \longrightarrow C_2 - C_1}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$
$$= \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a = \end{pmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (b+a) & (c+a) \end{pmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)(c-a)$. Donc

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Remarque 2.2.2 *En général on a* $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Conséquence 2.2.1 *Soit* $\sigma \in S_n$ *de signature* ε, *et* P_σ *la matrice de permutation associée à* σ. *Alors on a*

$$\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

Proposition 2.2.3 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \det : & GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

Preuve 2.2.1 $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ *et* $(\mathbb{K}^*, \times)$ *sont deux groupes et* $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$ *pour tout* $A, B \in (GL_n(\mathbb{K}), \times)$. $\square$

Définition 2.2.4 *Le noyau du morphisme de groupes* det *est noté* $SL_n(\mathbb{K})$, *on l'appelle* ***groupe spécial linéaire d'ordre*** n.

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}.$$

2.2.5 Rang d'une matrice

Définition

Définition 2.2.5 *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle* ***rang*** *de la matrice* A *et on note* $rg\,(A)$, *l'ordre maximum des matrices carrées de déterminant non nul qu'on peut extraire de* A.

Proposition 2.2.4 *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $rg(A) \leqslant \min(n,p)$.

Remarque 2.2.3 *On ne modifie pas le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.*

Théorème 2.2.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a équivalence entre :*

(i) *A est inversible ;*

(ii) $rg(A) = n$.

Exemple 2.2.4 *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

On a $\det(A) = 0$, donc $rg\,(A) < 3$. On cherche alors une matrice carrée A' d'ordre 2 de determinant non nul. Prenons $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\det(A') = -11 \neq 0$, donc $rg(A) = 2$.

Proposition 2.2.5 - *Les opérations élémentaires sur une matrice* A, *transforme cette matrice en une matrice de même rang que* A.

- *Le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre d'éléments diagonaux non nuls.*

Calcul du rang par le pivot de Gauss

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrices sont appelées **opérations élémentaires de Gauss.**

A l'aide des opérations élémentaires de Gauss on transforme la matrice de départ en une matrice triangulaire supérieure de la manière suivante :

1.- Si le cœfficient $a_{11} \neq 0$, alors on l'utilise pour éléminer tous les autres cœfficients non nuls de sa colonne.

Si $a_{11} = 0$, on échange la ligne L_1 avec celle ayant un cœfficient non nul de la colonne de a_{11}, puis on élimine tous les cœfficients en dessous de a_{11}.

2. On procède de la même manière en utilisant a_{22} sur la colonne 2 et ainsi de suite jusqu'à la dernière colonne, alors le nombre de lignes non nulles est le rang de la matrice initiale.

Exemple 2.2.5 *Déterminer à l'aide du* ***pivot de Gauss*** *le rang de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ donc $rg\,(A) \leqslant 3$. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftrightarrow L_4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \longleftrightarrow L_4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \longleftarrow L_3 - 6L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 6L_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $rg\,(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ nombre d'éléments diagonaux non nuls $= 2$.

Exercice 2.2.5 *Déterminer le rang de la matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Rang dépendant d'un paramètre

Pour déterminer le rang d'une matrice dépendant d'un paramètre, on cherche à calculer celui-ci de la façon la plus générale possible avant de traiter les valeurs particulières des paramètres.

Exemple 2.2.6 *Déterminons en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le rang de*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$rgM = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ 0 & 1-2m & 2-m \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m-2 & 1 \\ 0 & 1-2m & 2-m \end{pmatrix}.$$

En échangeant les deux dernières colonnes

$$rgM = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m-2 \\ 0 & 2-m & 1-2m \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m-2 \\ 0 & 0 & (m-1)(m-5) \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$rgM = \begin{cases} 3 \text{ si } m \notin \{1,5\} \\ 2 \text{ si } m \in \{1,5\} \end{cases}.$$

Exercice 2.2.6 *Déterminer le rang de la matrice B suivant les valeurs de m.*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ -3 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

2.2.6 Application : inversion d'une matrice par la méthode de la matrice adjointe

Cette **deuxième méthode** est aussi appelée **méthode des co-facteurs**.

Définition 2.2.6 *On appelle **comatrice** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice notée $com(A)$ dont les cœfficients sont les co-facteurs de A.*

Matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, alors $com(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Proposition 2.2.6 *Soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$.

Proposition 2.2.7 *La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.
Et l'on a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \,^t(com(A)) = \frac{1}{\det(A)} \times com(\,^tA).$$

La transposée $^t(com(A))$ est appelée la ***matrice adjointe*** *de A notée $adj(A)$. Ainsi*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times adj(A).$$

Méthodologie

1. Calculer le determinant de la matrice A à inverser.
• Si $\det(A) = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible
• Si $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible.
2. Ecrire la matrice des co-facteurs.
3. Transposer la matrice des co-facteurs. On obtient la matrice adjointe $adj(A)$.
4. La matrice inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times adj(A).$$

Remarque 2.2.4 *Le signe de $(-1)^{i+j}$ est donné par le tableau suivant*

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{1+n} \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ (-1)^{n+1} & & & & + \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.7 *Vérifier que les matrices A et M sont inversibles puis calculer leurs inverses.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solution

• Pour la matrice A

1. Calcul de $\det(A)$

En développant par rapport à la première ligne, on a

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$
$2 \neq 0$, donc la matrice A est inversible.

2. Calcul de A^{-1}

Calculons les 9 cofacteurs de A

- $\Delta_{1,1} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9,$
- $\Delta_{1,2} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -8,$
- $\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$
- $\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3,$
- $\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 4,$
- $\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$
- $\Delta_{3,1} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -1,$
- $\Delta_{3,2} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2,$
- $\Delta_{3,3} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1.$

Donc $com(A) = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $com\,({}^tA) = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} = Adj(A).$

On vérifie que

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -3 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Pour la matrice M

1. Calcul de $\det(M)$

$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$
$-46 \neq 0$, donc la matrice M est inversible.

2. Calcul de M^{-1}

Calculons les 9 cofacteurs de M

- $\Delta_{1,1} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18,$

- $\Delta_{1,2} = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,$
- $\Delta_{1,3} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$
- $\Delta_{2,1} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11,$
- $\Delta_{2,2} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14,$
- $\Delta_{2,3} = (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$
- $\Delta_{3,1} = (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10,$
- $\Delta_{3,2} = (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$
- $\Delta_{3,3} = (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8.$

Donc $com(A) = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}$ et ${}^{t}com(M) = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$.

On vérifie que

$$-\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$M^{-1} = -\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Chapitre 3

Systèmes de n équations linéaires à p inconnues sur $\mathbb{K}$

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Théorie des systèmes linéaires

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 • *On appelle **équation linéaire à** p **inconnues à cœfficients dans** $\mathbb{K}$ toute équation de la forme*

$$a_1x_1 \quad + \quad a_2x_2 \quad + \quad ... \quad + \quad a_px_p \quad = \quad b, \tag{3.1.1}$$

*où $a_1, ..., a_p$ et b sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$ et $x_1, ..., x_p$ sont des inconnues **à chercher dans** $\mathbb{K}$.*

$a_1, ..., a_p$ sont les cœfficients de $(3.1.1)$.

$$a_1x_1 \quad + \quad a_2x_2 \quad + \quad ... \quad + \quad a_px_p$$

est le premier membre de $(3.1.1)$.

b est le second membre de $(3.1.1)$.

• *On appelle système de n équations linéaires à p inconnues sur $\mathbb{K}$ toute famille de n équations linéaires à p inconnues sur $\mathbb{K}$, notée*

$$(S): \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & ... & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & ... & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & ... & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & ... & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. .$$

Les $a_{i,j} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$ et les $b_i : 1 \leqslant i \leqslant n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

• *On appelle **solution** de (S) tout p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).*

• *Deux systèmes linéaires* (S_1) *et* (S_2) *sont dits* ***équivalents*** *si, et seulement si* (S_1) *et* (S_2) *ont le même ensemble de solutions.*

• *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

est appelée la matrice de (S).

• *En posant* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, *l'écriture*

$$AX = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

est dite ***écriture matricielle*** *du système linéaire* (S).

• *Le rang de la matrice* A *est le rang du système linéaire* (S) *et* $(A \mid b)$ *est* ***la matrice élargie*** *de* (S).

• *Par définition, résoudre* (S) *c'est déterminer l'ensembles des solutions de* (S).

3.1.2 Différents types de systèmes linéaires

Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 3.1.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

En particulier, si vous trouvez 2 solutions différentes à un système linéaire, alors c'est que vous pouvez en trouver une infinité !

Définition 3.1.2 *Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit* ***incompatible.***

3.1.3 Système linéaire homogène

Définition 3.1.3 • *Si* $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, *on dit que le système linéaire* (S) *est* ***homogène.***

• *Le système*

$$(S') : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

est appelé le système linéaire homogène associé à (S) .

De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $x_1 = x_2 = ... = x_p = 0$. Cette solution est appelée **solution triviale**.

3.2 Méthodes de résolution

3.2.1 Opérations sur les équations d'un système

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

1. $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$: on peut multiplier une équation par un élément non nul de $\mathbb{K}$.

2. $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j$: on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation $L_{j.}$

3. $L_i \longleftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire dit **échélonné** équivalent, facile à manipuler .

3.2.2 Exemples

Exemple 3.2.1 *Résoudre le système linéaire suivant*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ -\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array} \right. .$$

Faisons les opérations élémentaires sur la matrice élargie de (S) .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \underset{L_3 \longleftarrow L_1}{\overset{L_1 \longleftarrow L_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 + L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -2 \end{array} \right)$$

$$\overset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right) .$$

La dernière ligne est équivalente à

$$4z = 3 \Longrightarrow z = \frac{3}{4}.$$

La deuxième ligne nous donne

$$3y - 7z = 3y - 7\left(\frac{3}{4}\right) = -2 \Longrightarrow y = \frac{13}{12}.$$

Et enfin avec la première ligne, nous avons

$$x - y + 3z = 1 \Longrightarrow x - \frac{13}{12} + 3\left(\frac{3}{4}\right) \Longrightarrow x = -\frac{1}{6}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(-\frac{1}{6}, \frac{13}{12}, \frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Exercice 3.2.1 *Resoudre* (S)

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array}\right. .$$

Les opérations élémentaires sur la matrice élargie de (S) nous conduisent à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

La dernière ligne est équivalente à

$$-8x_3 = 8 \Longrightarrow x_3 = -1.$$

La deuxième ligne nous donne

$$-3x_2 - 2x_3 = 11 \Longrightarrow x_2 = -3.$$

Et enfin avec la première ligne, nous avons

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \Longrightarrow x_1 = 2.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(2, -3, -1)\}.$$

Exercice 3.2.2 *Resoudre* (S)

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ & & 11x_2 & + & 20x_3 & - & 9x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Les opérations élémentaires sur la matrice élargie de (S) nous conduisent à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \underset{L_4 \longleftrightarrow 5L_4 - 11L_2}{\overset{L_3 \longrightarrow 5L_3 - 16L_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 88 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 98 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_4 \longrightarrow L_4 - L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

La dernière ligne donne une équation incompatible : $0 = 10$, donc

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^4} = \varnothing.$$

3.2.3 Méthode de Cramer

Un système d'équations linéaires de n équations avec n inconnues $AX = b$, peut être resolu à l'aide des déterminants lorsque $\det(A) \neq 0$.

Définition-Théorème

Définition 3.2.1 *On appelle* ***système de Cramer d'ordre*** n*, tout système à* n *équations,* n *inconnues et de rang* n*.*

Remarque 3.2.1 *La matrice associée à un système de Cramer est une matrice carrée inversible.*

Théorème 3.2.1 *Un système de Cramer possède une et une seule solution.*

Preuve 3.2.1 *L'équation matricielle associée à un système de Cramer d'ordre* n *est de la forme* $AX = b$ *avec* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*. Comme* A *est inversible,* $A^{-1}AX = A^{-1}b \Longrightarrow I_nX = X = A^{-1}b$*.*

Cette équation possède une unique solution $X = A^{-1}\ b$*.* $\square$

Remarque 3.2.2 *La méthode du pivot s'applique aux systèmes de Cramer et permet de déterminer l'unique solution. Cependant, si on sait préalablement que le système étudié est de Cramer, on peut le résoudre plus efficacement :*

- en déterminant une solution évidente ;

- ou en déterminant sa solution par des combinaisons judicieuses d'équations.

Exemple 3.2.2 *On donne* (S)

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array}\right. .$$

Les opérations élémentaires sur la matrice élargie de (S) nous conduisent à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \underset{L_3\longleftarrow L_3-3L_1}{\overset{L_2\longleftarrow L_2-L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \overset{L_3\longleftarrow L_3-4L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

Le rang de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ associée à (S) est 3, donc (S) est un système de Cramer.

Exemple 3.2.3 *On considère* (S)

$$(S):\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & - & 8x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ & & 11x_2 & + & 20x_3 & - & 9x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Les opérations élémentaires sur la matrice élargie de (S) nous conduisent à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3\longleftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\longleftarrow L_2-3L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2\longleftrightarrow L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right) \underset{L_4\longleftrightarrow 5L_4-11L_2}{\overset{L_3\longrightarrow 5L_3-16L_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 88 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 98 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_4\longrightarrow L_4-L_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 89 & -56 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

On a $rg\,(A) = 3$, donc le système (S) n'est pas de Cramer.

Théorème 3.2.2 *Un système linéaire* $AX = b$ *de* n *équations à* n *inconnues admet une solution unique si, et seulement si il est de Cramer et dans ce cas, l'unique solution* $(x_1, ..., x_n)$ *de* $\mathbb{K}^n$ *est obtenue par :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Résolution d'un système de Cramer : Formule de Cramer

Soit $AX = b$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un système de Cramer.

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, notons A_i la matrice obtenue à partir de la matrice A en y remplaçant la i-ème colonne par colonne b du second membre du système. Alors

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Remarque 3.2.3 *La formule de Cramer est limitée car elle ne s'applique qu'aux systèmes carrés.*

3.2.4 Exemples

Exercice 3.2.3 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$

$$(S) : \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}.$$

La matrice associée à (S) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ avec $\det(A) = -7 \neq 0$ donc (S) est un système de Cramer. Et

$x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{\begin{vmatrix} \boxed{10} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 2 \\ \boxed{4} & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = 1$, $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & \boxed{10} & 2 \\ 3 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & \boxed{4} & 3 \end{vmatrix}}{-7} = 2$, $z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{10} \\ 3 & 2 & \boxed{1} \\ 5 & 4 & \boxed{4} \end{vmatrix}}{-7} = -3.$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 2, -3)\}.$$

Exercice 3.2.4 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}.$$

La matrice associée à (S) est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\det(A) = 3 \neq 0$ donc la matrice A est inversible et (S) est de Cramer.

• Calculons l'inverse A^{-1} de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com\ {}^tA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

• Calculons x, y, z

(S) est de Cramer et l'unique solution x, y, z est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -2\right)\right\}.$$

Exercice 3.2.5 *Résoudre :*

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Solution

• Méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftrightarrow L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

La dernière ligne donne : $z = 1$.

Dans la seconde, on obtient : $y + 2z = 1 \Longrightarrow y = -1$.

Enfin la première ligne nous donne : $x + y + z = 1 \Longrightarrow x = 1$.

L'unique solution de (S) est donc (1, -1, 1).

• Méthode de Cramer :

Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice associée à (S). On a $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0.$

Le système (S) est de Cramer, il admet une seule solution qui est :

$$\left(-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, 1).$$

Application : Inversion d'une matrice-Exemples

Troisième méthode :

Soit à calculer l'inverse A^{-1} de la matrice carrée A.

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice A est inversible si et seulement si,

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y.$$

Il s'agira de déterminer x, y et z en fonction de x', y' et z'.

Exercice 3.2.6 *Calculer l'inverse de*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$AX = Y \iff \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x & - & 3y & + & z \\ 2x & - & 5y & - & 4z \\ 3x & - & 4y & + & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\iff (S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & + & z & = & x' \\ 2x & - & 5y & - & 4z & = & y' \\ 3x & - & 4y & + & 3z & = & z' \end{array} \right. .$$

Considérons la matrice augmentée ci-dessous obtenue à partir du système (S).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & x' \\ 2 & -5 & -4 & y' \\ 3 & -4 & 3 & z' \end{array} \right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & x' \\ 0 & 1 & -6 & y' - 2x' \\ 0 & 5 & 0 & z' - 3x' \end{array} \right).$$

On a

L_3 donne

$$5y = z' - 3x' \Longrightarrow y = \frac{1}{5}\left(-3x' + z'\right).$$

L_2 donne

$$\begin{aligned} y - 6z &= y' - 2x' \Longrightarrow 6z = \frac{1}{5}\left(-3x' + z'\right) - y' + 2x' \\ &\Longrightarrow z = \frac{1}{30}\left(7x' - 5y' + z'\right). \end{aligned}$$

Et dans $L_1 : x - 3y + z = x'$ on aboutit à

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}\left(-3x' + z'\right) - \frac{1}{30}\left(7x' - 5y' + z'\right) = x' \\ &\Longrightarrow \ x = \frac{1}{30}\left(-31x' + 5y' + 17z'\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{30}\left(-31x' + 5y' + 17z'\right) \\ y &=& y = \frac{1}{5}\left(-3x' + 0y' + z'\right) \\ z &=& \frac{1}{30}\left(7x' - 5y' + z'\right) \\ X &=& A^{-1}Y \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -31 & 5 & 17 \\ -18 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1}Y.$$

On vérifie que

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -31 & 5 & 17 \\ -18 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -31 & 5 & 17 \\ -18 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2.7 ***-Inversion d'une matrice-***

On considère le système $(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x &+& y &+& z &=& a \\ 2x &+& y &+& 3z &=& b \\ x &-& y &+& 2z &=& c \end{array}\right.$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. *Déterminer la matrice A du système (S).*
2. *Justifier que la matrice A est inversible.*
3. *a) Exprimer x, y, z en fonction de a, b, c.*
   b) En déduire la matrice A^{-1}.

Résolution

1. La matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Justifions que la matrice A est inversible

Calculons $\det A$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc la matrice A est inversible.

3. Expression de x, y, z en fonction de a, b et c

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 1 & -1 & 2 & c \end{array}\right] \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\rightsquigarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-2a \\ 0 & -2 & 1 & c-a \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & (c-a)-2(b-2a) = 3a-2b+c \end{array}\right].$$

La troisième ligne nous donne

$-z = 3a - 2b + c \Longrightarrow z = -3a + 2b - c.$

Dans la seconde ligne, on obtient

$-y + z = -y + (-3a + 2b - c) = b - 2a \Longrightarrow y = -a + b - c.$

Dans la première ligne, on obtient

$x + y + z = x + (-a + b - c) + (-3a + 2b - c) = a$

$\Longrightarrow x = 5a - 3b + 2c$. D'où$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & & 5a & - & 3b & + & 2c \\ y & = & - & a & + & b & - & c \\ z & = & - & 3a & + & 2b & - & c \end{array}\right.$.

Soit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

b) Déduction la matrice A^{-1}

On a

$$A \times \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2.8 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^4$

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 4x_2 & + & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 9 \end{array}\right..$$