1 Manipulation des intégrales

1.1 Calculs directs

Exercice 1

Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{4}(x^3+x-2)\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_{3}^{11}\sqrt{2x+3}\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1+\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_{0}^{1}t\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_{1}^{2}t\ln(t)\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt[3]{t^2+2}}\mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$

10) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{1+t^2}{t}\mathrm{d}t$

11) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$

12) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1+\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$

13) $\displaystyle\int_{-1/3}^{0}2^{3x+1}\mathrm{d}x$

14) $\displaystyle\int_{1}^{x}\frac{(\ln t)^\alpha}{t}\mathrm{d}t$
($x>1$ et $\alpha>0$)

15) $\displaystyle\int_{-1}^{1}t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t.$

16) (*) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t.$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}|1+t|\mathrm{d}t,$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+|t|}\mathrm{d}t,$

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|t|}{1+t^2}\mathrm{d}t,$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2}|t^3-t^2+t-1|\mathrm{d}t,$

5) $\displaystyle\int_{0}^{5}t\,|t^2-1|\mathrm{d}t,$

6) $\displaystyle\int_{0}^{5}\frac{t-1}{|t^2-2t|+1}\mathrm{d}t.$

(On identifiera le signe de la quantité dans les valeurs absolue, et décomposera l'intégrale sur les domaines correspondants.)

1.2 Une astuce bonne à connaître

Exercice 3

1) On pose $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2-2x-3}$. On note α et β les deux racines du polynôme $x\mapsto x^2-2x-3$. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\forall\, x\in\mathcal{D}_f,\ f(x)=\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}.$$

En déduire une primitive de f sur tout intervalle de son domaine de définition.

2) On pose $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2-1}$. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :

$$\forall\, x\in\mathcal{D}_f,\ f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}.$$

En déduire une primitive de f sur tout intervalle de son domaine de définition.

3) *(*)* On pose $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2+1}{x(x+1)^2}$. Montrer qu'il existe des réels a,b,c,d,e tels que :

$$\forall\, x\in\mathcal{D}_f,\ f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{(x+1)^2}.$$

En déduire une primitive de f sur tout intervalle de son domaine de définition.

1.3 Intégration par partie

Exercice 4

1) Calculer, $\displaystyle\int_2^4 t\ln(2t)\mathrm{d}t$.
2) Calculer, pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n\ln t\mathrm{d}t$ et $J_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n\big(\ln t\big)^2\mathrm{d}t$.
3) Soit a,b,c trois réels. Calculer $\displaystyle\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x$.
4) (*) Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, calculer $I(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t$.

Exercice 5

L'objectif est de calculer $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$, $J=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x$ et $K=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

1) **Calcul de I.** Soit la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\ln\big(x+\sqrt{x^2+2}\big)$
   a) Calculer la dérivée de f.
   b) En déduire la valeur de I.
2) **Calcul de J et K.**
   a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J+2I=K$.
   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $K=\sqrt{3}-J$.
   c) En déduire les valeurs de J et K.

1.4 Changements de variables

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t$, $u=t+1$,
2) $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{2t+1}\mathrm{d}t$, $u=2t+1$,
3) $\displaystyle\int_1^{4/3}\frac{t^2}{(3t-2)^5}\mathrm{d}t$, $u=3t-2$,
4) $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{2t}}{1-\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$, $u=\mathrm{e}^t$,
5) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{t}-t}{\sqrt{t}+1}\mathrm{d}t$, $u=\sqrt{t}+1$,
6) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, $u=\sqrt{t}$,
7) $\displaystyle\int_1^2 t\sqrt{3-t}\mathrm{d}t$, $u=\sqrt{3-t}$,
8) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$, $u=\mathrm{e}^t$.
9) $\displaystyle\int_1^2\sqrt{\frac{\ln(t)}{t^2}}\mathrm{d}t$, $u=\ln(t)$.

Exercice 7

1) Trouver les réels a,b,c tels que pour tout $u\in]-1,1[$, on a :

$$\frac{u^2}{1-u^2}=a+\frac{b}{1-u}+\frac{c}{1+u}.$$

2) A l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t}$, calculer $\displaystyle\int_0^x\frac{\sqrt{t}}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x\in[0,1[$.

Exercice 8 (*)

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $x\in[0,a]$, $f(x)\neq-1$ et $f(x)f(a-x)=1$.
On pose $I=\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

À l'aide d'un changement de variable judicieux, exprimer I d'une autre façon, puis la calculer.
Bonus : Sauriez-vous trouver une telle fonction (sur $[0,2]$, par exemple) et vérifier ce résultat ?

2 Suites définies par une intégrale

2.1 Avec des comparaisons d'intégrales

Exercice 9
On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (I_n).

2) En déduire que $A_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (chercher une relation simple entre I_n et A_n).

3) On pose pour tout entier naturel n : $J_n = nI_n$.

   a) Montrer que $J_n = \ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$ (penser à une intégration par parties).

   b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$, et en déduire la limite de (J_n).

Exercice 10
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1) a) Calculer J_1.

   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+2}$.

   b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 11
On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

2.2 Et des méthodes plus abstraites

Exercice 12
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de I_n. Calculer I_0 et I_1.
2) Étudier la monotonie de la suite (I_n) et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
4) En déduire la valeur de ℓ, que $nI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13
Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = t\ln t$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$

1) Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a : $f(k-1) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$.

2) En déduire que : $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + n\ln n$.

3) Calculer $\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t$.

4) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(1^1 2^2 \dots n^n\right)^{4/n^2}$.

2.3 Un exercice plus complet

Exercice 14
On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\,\varepsilon(n) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1) Calculer I_0, I_1.
2) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4) Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5) a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$.
   b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
6) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$
7) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8) Déterminer la limite de la suite $\big(n(nI_n - 1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
9) Donner alors les valeurs de a, b, c.

3 Fonctions définies par une intégrale

3.1 Études "directes"

Exercice 15
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

1) $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$,
2) $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}\mathrm{d}t$,
3) $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{-4} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$,
4) $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t}$.

Exercice 16
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le signe sur le domaine de définition et étudier la parité éventuelle.

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$,
2) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$,
3) $F(x) = \displaystyle\int_0^x |t|\mathrm{d}t$,
4) $F(x) = \displaystyle\int_0^x |t|^3\mathrm{d}t$,
5) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t^4+1}\mathrm{d}t$,
6) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,
7) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$,
8) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$,
9) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1-t^4}\mathrm{d}t$,

3.2 Études guidées

Exercice 17
Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner son sens de variation, sa concavité et étudier ses points d'inflexion.
2) Montrer que pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x)$.
3) Montrer que pour tout $t > 0$, on a $e^t \geqslant \dfrac{t^2}{2}$. En déduire la limite et la branche infinie de g en $+\infty$.
4) Tracer la courbe représentative de g.

Exercice 18 (*)
On considère la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition, la parité et le signe de f.
2) Montrer que f est de classe C^1, préciser sa dérivée et donner le sens de variation de f.
3) Montrer que pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, on a $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 19 (*)
On considère les fonctions définies par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1) Donner le domaine de définition de F et étudier la parité de F.
2) Montrer que pour tout $t > 0$, on a : $\dfrac{1}{t+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{t}$. En déduire un encadrement de F et déterminer sa limite en $+\infty$.
3) Exprimer F à l'aide de G. En déduire que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et calculer F'.
4) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathcal{D}_F$. En déduire le tableau de variations de F et l'allure de la courbe représentative de F.