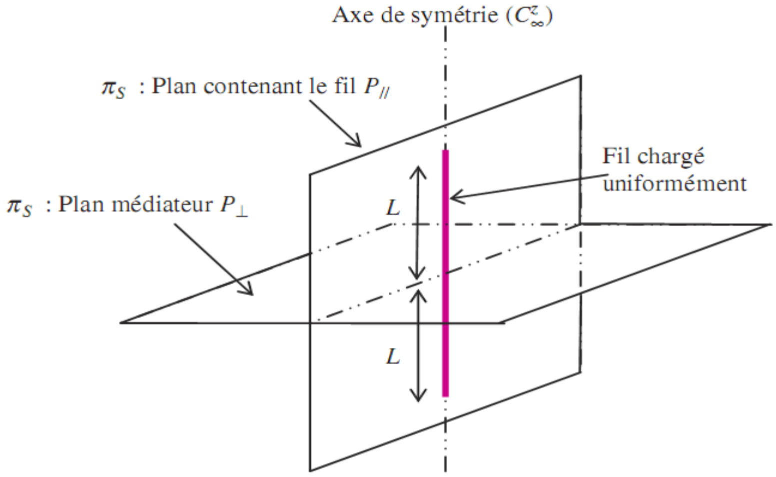
CHAPITRE 4 : Calcul de champ et potentiel électrostatiques

1. Champ et potentiel électrostatiques crées par un fil chargé

On considère un fil de longueur $2L$ chargé uniformement avec une densité lineique (λ_0)

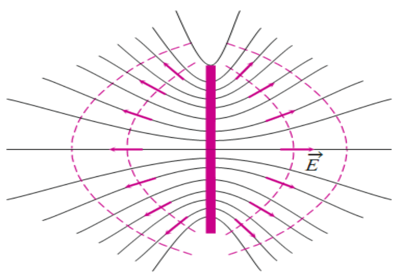
1.1. Eléments de symétrie



Les éléments de symétrie des charges sont :

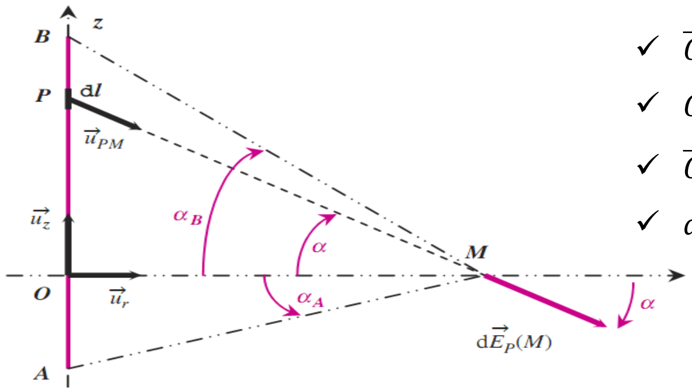
- ✓ Les plans $P_{//}$ contenant le fil sont des plans de symétrie (π_S) : il y'en a une infinité
- ✓ L'axe du fil est un axe de symétrie C_∞^z
- ✓ Le plan médiateur $P_\perp$ (perpendiculaire au fil passant par son milieu est un plan de symetrie

D'après le principe de Curie, les symétries des causes (charges) doivent se retrouver dans les effets produits (champ et potentiel électrostatiques). Le calcul du champ peut se limiter à un demi-plan parallèle contenant le fil. On déduit le champ et le potentiel en tout point par rotation autour de l'axe. L'existence du plan médiateur réduit l'étude au quart du plan au dessus du plan médiateur. La figure suivante donne un aperçu des lignes de champ électrostatique crée par un fil en accord avec les éléments de symétrie des charges.



1.2. Calcul du champ électrostatique

On décompose le fil en longueur élémentaire dl autour d'un point P et portant la charge $dq = \lambda_0 dl$



- $r = OM$
- $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
- $OP = z$
- $\overrightarrow{OP} = z\vec{u}_z$
- $dl = dz$

Le champ électrostatique élémentaire s'écrit :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

$$\overrightarrow{PM} = PM\vec{u}_{PM} \Longrightarrow \vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = PM\cos\alpha\,\vec{u}_r - PM\sin\alpha\,\vec{u}_z = PM(\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_z)$$

$$\overrightarrow{PM} = PM\vec{u}_{PM} \Longrightarrow \vec{u}_{PM} = \cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_z$$

$$\Longrightarrow d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 dz}{PM^2}(\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_z)$$

z est compris entre $z_A \leq z \leq z_B$ et α est compris entre $\alpha_A \leq \alpha \leq \alpha_B$

$$\tan\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{z}{r} \Longrightarrow z = r\tan\alpha \Longrightarrow dz = \frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

D'autre part

$$PM^2 = OP^2 + OM^2 = z^2 + r^2 = r^2\tan^2\alpha + r^2 = r^2(1+\tan^2\alpha) = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{r^2} \Longrightarrow \frac{dz}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\frac{r}{\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{d\alpha}{r}$$

$$\Longrightarrow d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 d\alpha}{r}(\cos\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,\vec{u}_z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0}{r}(\cos\alpha\,d\alpha\,\vec{u}_r - \sin\alpha\,d\alpha\,\vec{u}_z)$$

Le champ total en M s'obtient par :

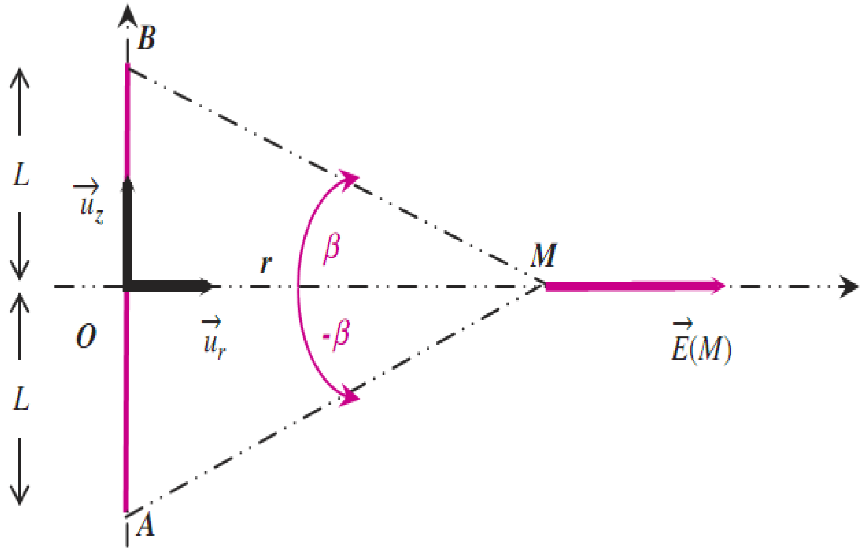
$$\vec{E}(M) = \int d\vec{E}_P(M) \Longrightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{u}_r\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\cos\alpha\,d\alpha - \vec{u}_z\int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\sin\alpha\,d\alpha\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\left([\sin\alpha]_{\alpha_A}^{\alpha_B}\vec{u}_r + [\cos\alpha]_{\alpha_A}^{\alpha_B}\vec{u}_z\right)$$

Il vient finalement :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}[(\sin\alpha_B - \sin\alpha_A)\vec{u}_r + (\cos\alpha_B - \cos\alpha_A)\vec{u}_z] \\ \cos\alpha_A = \frac{r}{\sqrt{z_A^2 + r^2}} \quad \sin\alpha_B = \frac{z_B^2}{\sqrt{z_B^2 + r^2}}\end{gathered}}$$

- Si OM est la mediatrice du fil on a $\alpha_A = -\alpha_B = -\beta$. Il n'y a donc pas de composantes suivant z.



$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\beta + \sin\beta)\vec{u}_r = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r}(2\sin\beta)\vec{u}_r = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\beta\,\vec{u}_r$$

Du fait que $\sin\beta = L/\sqrt{L^2 + r^2}$, on obtient :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}\vec{u}_r \\ \text{le champ est suivant } \vec{u}_r\end{gathered}}$$

1.3. Calcul du potentiel électrostatique

On considère le cas où le point M est sur la médiatrice du fil

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow dV = -E\,dr$$

Dans ce calcul le point M bouge et r est donc variable

$$dV = -E\,dr = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\beta\,dr$$

$$\tan\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow r = \frac{L}{\tan\beta} \Rightarrow dr = \frac{-L}{\sin^2\beta}d\beta \Rightarrow dV = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tan\beta}{L}\sin\beta\,.\frac{-L}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$\Longrightarrow dV = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{d\beta}{\cos\beta} = \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\beta}{\cos\beta} \Longrightarrow V(M) = \int dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{2d\beta}{\cos\beta}$$

$$\int\frac{2d\beta}{\cos\beta} = \ln\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} \Longrightarrow V(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} + cte$$

$$V(\infty) = 0 \Longrightarrow \beta \longrightarrow 0 \Longrightarrow V(r \longrightarrow \infty) = cte = 0$$

Il vient finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\sin\beta}{1-\sin\beta} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1+\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}}{1-\frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}}}}$$

- ***Cas particulier : le fil chargé a une longueur infinie***

Lorsque le fil est infini, une opération de symétrie supplémentaire apparait. Il s'agit de la symétrie de translation le long de l'axe Oz. Le système possédant en plus la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, on dit qu'il possède la symétrie cylindrique.

Le fil devient infini ($L \gg r$), le point M est très proche du fil, l'angle β tend vers $\pi/2$.

$$\beta \longrightarrow \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\frac{\pi}{2}\vec{u}_r$$

Il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}}$$

Pour déterminer le potentiel résultant on utilise la relation différentielle

$$dV = -E\,dr = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} \Longrightarrow V(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + cte$$

Le fil étant infini, on ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini car il existe des charges à l'infini et qu'il n'est plus possible de fixer un potentiel nul à l'infini. En prenant par exemple $V(r_0) = 0$ on a :

$$V(r_0) = 0 \Longrightarrow cte = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$$

Le potentiel s'écrit donc

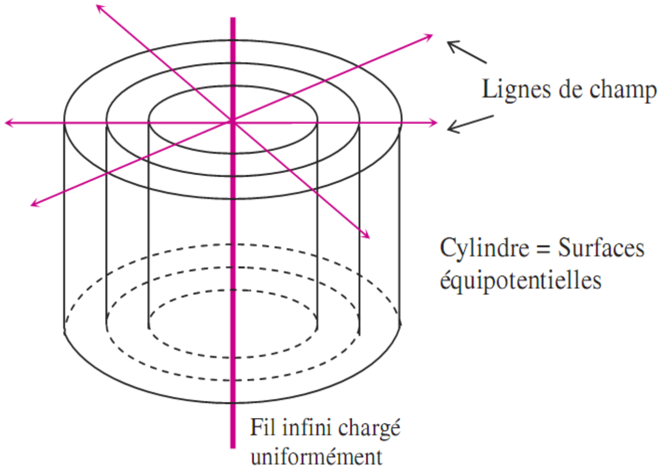
$$V(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$$

Soit

$$\boxed{\boldsymbol{V(r) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}}}$$

➢ *Détermination des surfaces équipotentielles*

Les surfaces équipotentielles s'obtiennent en cherchant l'ensemble des points se trouvant au même potentiel c'est-à-dire $V(M) = V(r) = cte$. $V(r) = cte \Longrightarrow r = cte$: on a l'équation d'un cylindre de rayon de r dont l'axe est confondu avec le fil.

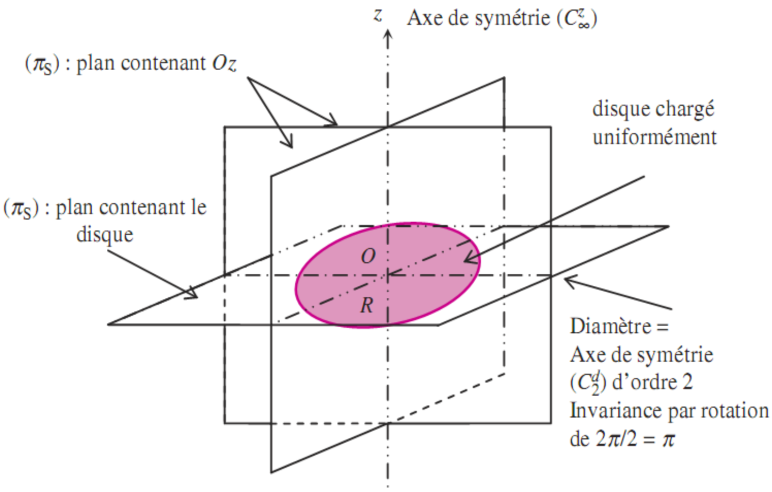


Les lignes de champ sont radiales (champ dirigé suivant $\vec{u}_r$) c'est-à-dire perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

2. Champ et potentiel électrostatiques crées par un disque chargé

On considère un disque de centre O d'axe de révolution Oz, de rayon R, d'épaisseur négligeable uniformément chargé en surface avec une densité σ_0.

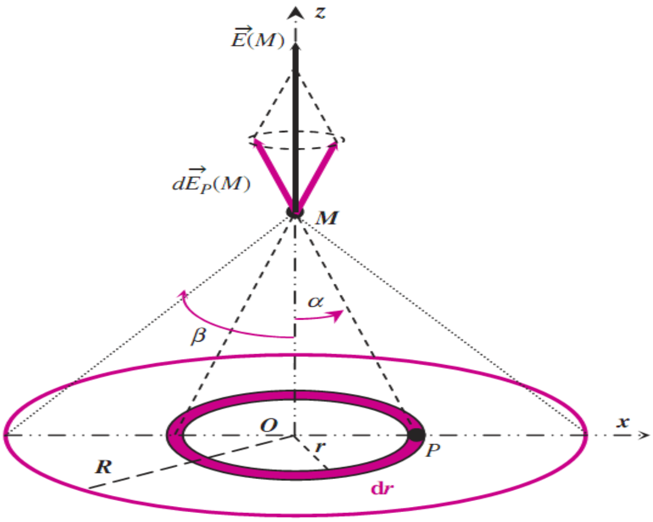
2.1. Eléments de symétrie



Le plan du disque étant un plan de symétrie, on peut se limiter à l'étude du champ et du potentiel dans le demi-espace $z > 0$. Le système admet un axe de symétrie Oz : l'étude peut donc se réduire à un demi-plan. Sur l'axe de symétrie Oz, le champ électrostatique est suivant cet axe.

2.2. Calcul du champ électrostatique

On décompose la surface chargée en aires élémentaires dS, chacune etant definie autour d'un point P et portant la charge $dq = \sigma_0 dS$. Le point M est repéré par $OM = z$



Le champ résultant étant suivant Oz seule la composante E_{P_z} suivant Oz intervient dans le calcul. Le champ électrostatique élémentaire s'écrit :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0 dS}{PM^2}\vec{u}_{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0 dS}{PM^3}\overrightarrow{PM}$$

$$dE_{P_z}(M) = \vec{u}_z . d\vec{E}_P(M) = \frac{\sigma_0 dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}.\vec{u}_z}{PM^3} = \frac{\sigma_0 dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{PM\cos\alpha}{PM^3} = \frac{\sigma_0 dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{PM^2}$$

$$dS = 2\pi r dr \Longrightarrow dE_{P_z}(M) = \frac{\sigma_0 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{PM^2} = \frac{\sigma_0 r\cos\alpha}{2\varepsilon_0 PM^2}dr$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha = \frac{dr}{z} \Longrightarrow \cos\alpha\, dr = \frac{z}{\cos\alpha}d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{PM} \Longrightarrow \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2\alpha}{z^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\, dr &= \frac{z}{\cos\alpha}d\alpha \\ \frac{1}{PM^2} &= \frac{\cos^2\alpha}{z^2}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow dE_{P_z}(M) = \frac{\sigma_0\cos^2\alpha}{2\varepsilon_0 z^2}\frac{zr}{\cos\alpha}dr = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{r}{z}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Longrightarrow dE_{P_z}(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\tan\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$E(M) = E(z) = \int dE_{P_z}(M) \Longrightarrow E(M) = E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_0^\beta \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}[-\cos\alpha]_0^\beta$$

$$\Longrightarrow E(M) = E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(1-\cos\beta)$$

Puisque $\cos\beta = z/\sqrt{z^2+R^2}$, le champ électrostatique s'écrit pour $z > 0$:

$$\boxed{\boldsymbol{E(M) = E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}}$$

- ✓ Pour $z < 0$, par symétrie par rapport au plan contenant le disque on a :

$$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$$

- ✓ Pour tout z on a :

$$\boxed{\boldsymbol{E(M) = E(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}}$$

2.3. Calcul du potentiel électrostatique sur l'axe Oz

$$dV = -\vec{E}(z).\vec{dl} = -E(z)\vec{u}_z.dz\vec{u}_z = -E(z)dz = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)dz$$

Posons $u = z^2 + R^2$

$$u = z^2 + R^2 \Longrightarrow du = 2zdz \Longrightarrow \int \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$V(z) = \int dV \Longrightarrow V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)dz = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right) + cte$$

On choisit de prendre le potentiel nul à l'infini :

$$V(z \longrightarrow \infty) = 0 \Longrightarrow cte = 0$$

Il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)}}$$

- ✓ Pour $z < 0$, par symétrie par rapport au plan contenant le disque on a :

$$V(z) = V(-z) \Longrightarrow \text{fonction paire}$$

- ✓ Pour tout z , il vient pour le potentiel électrostatique :

$$\boxed{\boldsymbol{V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right)}}$$

2.4. Calcul du potentiel électrostatique par la méthode directe

On découpe autour d'un point P appartenant au disque une surface élémentaire dS qui porte la charge $dq = \sigma_0 dS$. Elle crée en M un potentiel électrostatique élémentaire

$$dV_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0 dS}{PM}$$

$$dS = 2\pi r dr \Longrightarrow dV_{couronne}\ (M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_0 2\pi r dr}{PM} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Le potentiel crée par le disque de rayon R s'obtient par intégration sur r variant de 0 à R du potentiel électrostatique élémentaire obtenue sur la couronne:

$$V_{disque\ \ de\ Rayon\ \ R}(M) = \int_0^R dV_{couronne\ \ de\ rayon\ \ r}(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

$$V_{disque\ \ de\ Rayon\ \ R}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+r^2}\right]_0^R = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-\sqrt{z^2}\right)$$

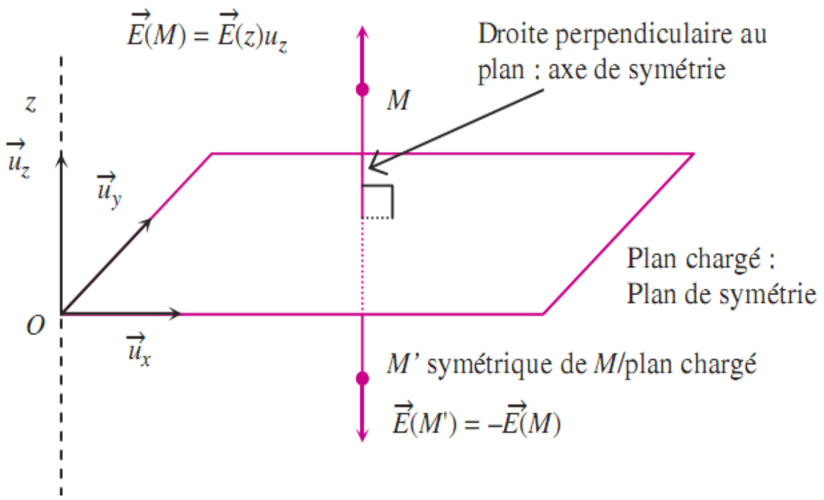
Il vient pour tout z :

$$\boxed{V_{disque\ de\ Rayon\ R}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2}-|z|\right)}$$

3. Champ et potentiel électrostatiques crées par un plan infini chargé uniformément en surface

Considérons un plan (O,x,y) chargé uniformément.

3.1. Eléments de symétrie



- ✓ Ce plan est un plan de symétrie pour les charges ce qui donne pour 2 points M et M' symétriques :

$$V(M) = V(M') \quad et \quad \vec{E}(M) = -\vec{E}(M')$$

- ✓ Toute droite perpendiculaire au plan passant par un point M (droite parallele à l'axe Oz) est un axe de symétrie. Le champ électrostatique est donc suivant la direction de cette droite :

$$\vec{E}(M) = -E(x,y,z)\vec{u}_z$$

- ✓ Pour toute translation parallèlement au plan il y a invariance : le champ et le potentiel ne dépendent pas des variables x, y :

$$\vec{E}(M) = -E(z)\vec{u}_z$$
$$V(M) = V(z)$$

3.2. Calcul du champ électrostatique

L'expression du champ électrostatique est obtenue en prenant l'expression du champ crée par un disque de rayon R en un point M sur son axe $(z > 0)$ et de chercher la limite quand R tend

vers l'infini $(R \longrightarrow \infty \; ou \; \alpha \longrightarrow \pi/2)$:

$$E_{plan}(z) = \lim_{R\longrightarrow\infty} E_{disque\ (R)}(z) = \lim_{R\longrightarrow\infty} \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{plan}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \Longrightarrow le\ champ\ est\ uniforme}}$$

Par symétrie on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{pour\ z < 0} & \boldsymbol{\vec{E}_{plan}(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z} \\ \boldsymbol{pour\ z > 0} & \boldsymbol{\vec{E}_{plan}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z} \end{array}}$$

Les lignes de champ sont des droites perpendiculaires au plan chargé.

- ✓ Si le point $M \in$ au plan de symétrie, il se confond avec son symétrique :

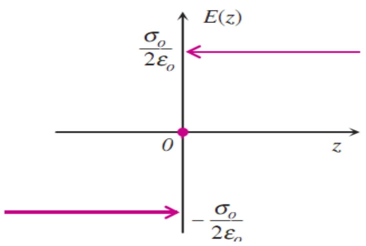
$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

- ✓ à la traversée du plan (surface de séparation)

$$\Delta\vec{E} = \vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_z}}$$

à la traversée du plan on constate donc une discontinuité du champ comme le montre la figure suivante



3.3. Calcul du potentiel électrostatique

Le potentiel se détermine à partir de la relation $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow dV = -\vec{E}(M).\vec{dl} = -E\,dz = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}dz$$

$$z > 0 \Rightarrow dV = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}dz \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z + cte$$

Il y a des charges à l'infini et il n'est plus possible de choisir le potentiel nul à l'infini. Ceci explique pourquoi on ne peut pas obtenir le potentiel crée par un plan à partir de l'expression du potentiel crée par un disque dont on ferait tendre vers le rayon vers l'infini. On fixe la constante en choisissant de prendre le potentiel nul à la surface du plan chargé :

$$V(z = 0) = cte = 0$$

Il vient donc :

$$\boxed{\boldsymbol{V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z}}$$

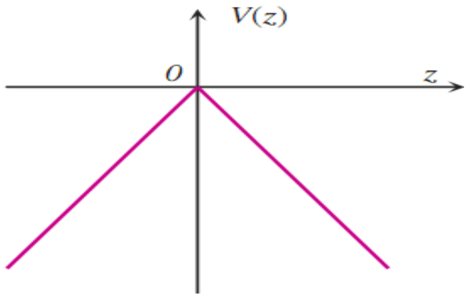
Par symétrie on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \boldsymbol{pour\ z > 0} & \boldsymbol{V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z} \\ \boldsymbol{pour\ z < 0} & \boldsymbol{V(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}z} \end{array}}$$

La fonction $V(z)$ étant paire on peut écrire pour tout z :

$$\boxed{\boldsymbol{V(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}|z|}}$$

En représentant le potentiel électrostatique on obtient :



On observe une continuité du potentiel à la traversée de la surface chargée.

- *Détermination des surfaces équipotentielles*

Les surfaces équipotentielles s'obtiennent en cherchant l'ensemble des points se trouvant au même potentiel c'est-à-dire $V(M) = V(z) = cte$. $V(z) = cte \Rightarrow z = cte$: ce sont donc des plans parallèles au plan chargé. Les lignes de champ sont perpendiculaires à ces surfaces équipotentielles.