## 3.2 Étude et tracée de courbes définies en coordonnées polaires

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

### 3.2.1 Représentation d'une courbe en coordonnées polaires

Tout d'abord, on rappelle que tout point du plan peut être repéré par un système de coordonnées polaires.

Soit M un point du plan de coordonnées $(x, y)$.

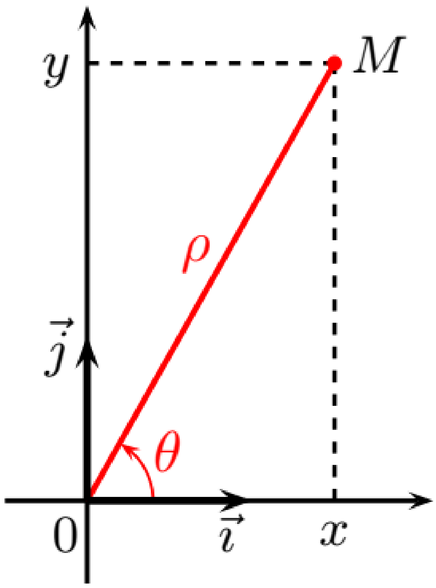


FIGURE 3.3 –

Alors $M$ peut être repéré par son **rayon polaire** $\rho$ et par son **angle polaire** $\theta$. On a alors

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{x}{\rho}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho}.$$

Lorsque $x \neq 0$ alors on a $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

**Notation** : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la base orthonormale $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ définie par

- $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$
- $\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$

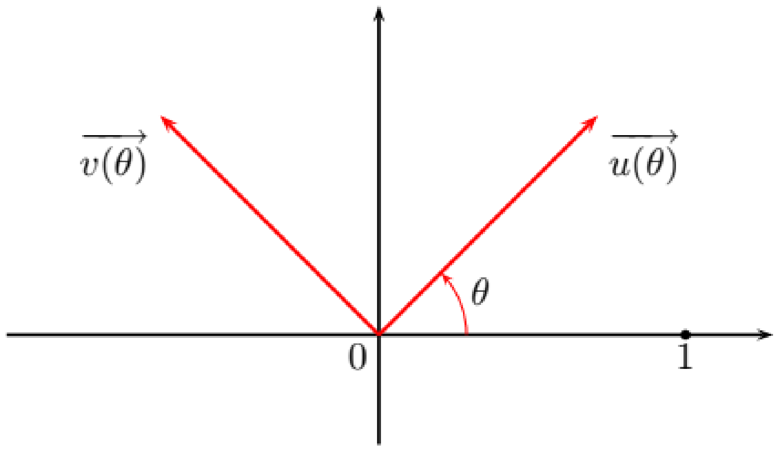


FIGURE 3.4 –

Notons que, en tant que fonction de la variable $\theta$, on a $\overrightarrow{u'(\theta)} = \overrightarrow{v(\theta)}$.

**Définition 3.2.1.1.** – *On dit qu'une courbe* $\Gamma$ *du plan est définie en coordonnées polaires s'il existe deux fonctions* $f$ *et* $g$ *telles que les points de* $\Gamma$ *soient les points de coordonnées polaires* $(f(t), g(t))$.

– *Le cas le plus fréquent est celui où il existe une application* $f$ *telle que les points de* $\Gamma$ *soient les points de coordonnées polaires* $(f(\theta), \theta)$. *On dit alors que* $\rho = f(\theta)$ *est une équation polaire de* $\Gamma$.

### 3.2.2 Étude locale d'une courbe en coordonnées polaires

Soit $\Gamma$ une courbe définie par une équation polaire $\rho = f(\theta)$ où l'application $f$ est supposée suffisamment dérivable.
On note $M(\theta)$ le point de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta)$ et on pose $\overrightarrow{F(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)}$.

**Théorème 3.2.1.** *Si la courbe passe par l'origine en* $M(\alpha)$, *c'est-à-dire* $f(\alpha) = 0$, *alors la tangente en ce point est la droite d'équation polaire* $\theta = \alpha$ *(*$y = \tan(\theta)x$ *en coordonnées cartésiennes).*

*Démonstration.* On a $\overrightarrow{OM(\theta)} = f(\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$ donc la droite $(OM(\theta))$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ et ce dernier tend vers $\overrightarrow{u(\alpha)} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$ quand $\theta$ tend vers $\alpha$.

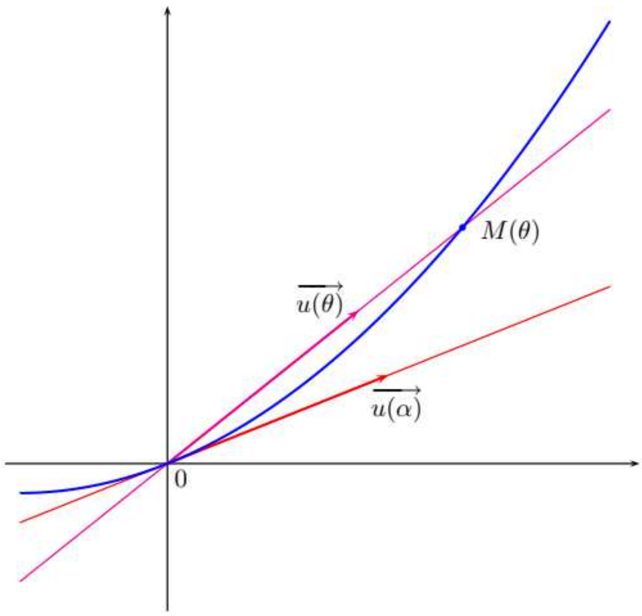


FIGURE 3.5 –

□

**Théorème 3.2.2.** *Soit $M(\alpha)$ un point de $\Gamma$ distinct de l'origine c'est-à-dire tel que $f(\alpha) \neq 0$, alors :*

– *La courbe $\Gamma$ admet une tangente en $M(\alpha)$*

– *On note $V$ la mesure de l'angle entre $\overrightarrow{u(\alpha)}$ et la tangente en $M(\alpha)$. Alors*

$$V = \arctan\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right).$$

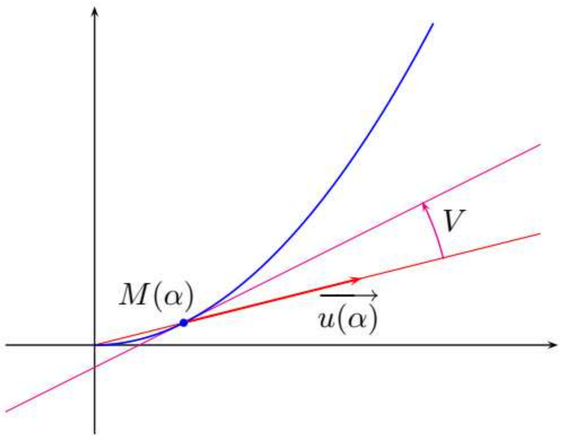


FIGURE 3.6 –

*Démonstration.* L'équation de $\Gamma$ en cartésiennes est $\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ donc

$$\overrightarrow{V_1(\theta)} = \begin{pmatrix} f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta) \\ f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} = f'(\theta)\overrightarrow{u(\theta)} + f(\theta)\overrightarrow{v(\theta)}.$$

Comme $f(\alpha) \neq 0$, on a $\overrightarrow{V_1(\alpha)} \neq 0$ et ce vecteur dirige la tangente en $M(\alpha)$.
La mesure $V$ de l'angle entre $\overrightarrow{u(\alpha)}$ et la tangente en $M(\alpha)$ est donc la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u(\alpha)}, \overrightarrow{V_1(\alpha)}}\right)$, d'où

$$\tan V = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

□

**Exemple :** Soit $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.
Déterminons la tangente à $\Gamma$ au point $A$ de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$ et en l'origine $O$ du repère.
Ici, $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ et les coordonnées polaires de $A$ sont $\rho = 1 + \cos\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $A$ est le point de coordonnées cartésiennes $(0,1)$ ($\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$).
D'autre part, $\overrightarrow{u(\frac{\pi}{2})} = \vec{j}$, donc $V$ est la mesure de l'angle entre $\vec{j}$ et la tangente en $A$. D'où

$$V = \arctan\left(\frac{1 + \cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-\pi}{4}.$$

Donc la tangente en $A$ est la droite d'équation $y = x + 1$.

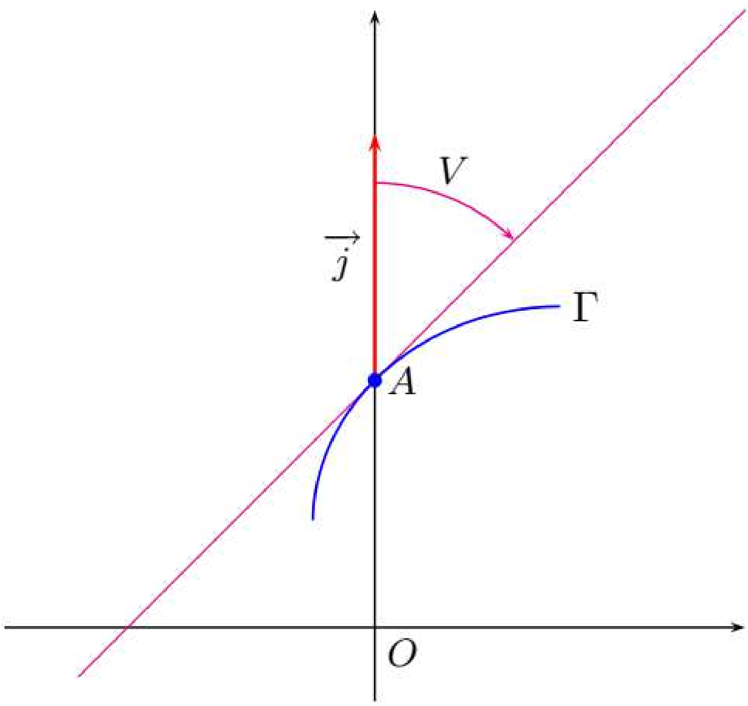


FIGURE 3.7 –

**Passage à l'origine**
Par ailleurs $f(\theta) = 0$ si et seulement si $\cos(\theta) = -1$ c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi$ modulo $2\pi$. La tangente à $\Gamma$ en $O$ est donc la droite d'équation polaire $\theta = \pi$. Il s'agit de la droite dirigée par $\vec{i}$ $(y = \tan\pi \times x) = 0$ qui n'est autre que l'axe des abscisses.

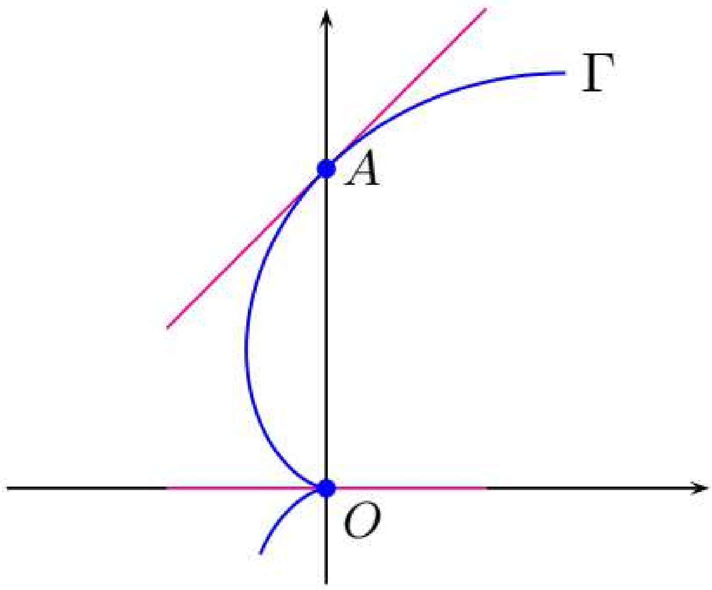


FIGURE 3.8 –

### 3.2.3 Branches infinies

Soit $\Gamma$ une courbe définie par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

**Définition 3.2.3.1.** *1. Si $f(\theta) \longrightarrow 0$ quand $\theta \longrightarrow \pm\infty$ alors on dit que $O$ est un* ***point-asymptote*** *à $\Gamma$.*

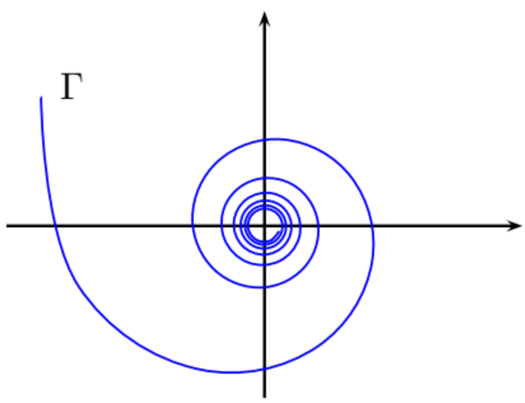


FIGURE 3.9 –

2. *Si* $f(\theta) \longrightarrow a \neq 0$ *quand* $\theta \longrightarrow \pm\infty$ *alors on dit que le cercle de centre* $O$ *et de rayon* $|a|$ *est un* ***cercle-asymptote*** *à* $\Gamma$.

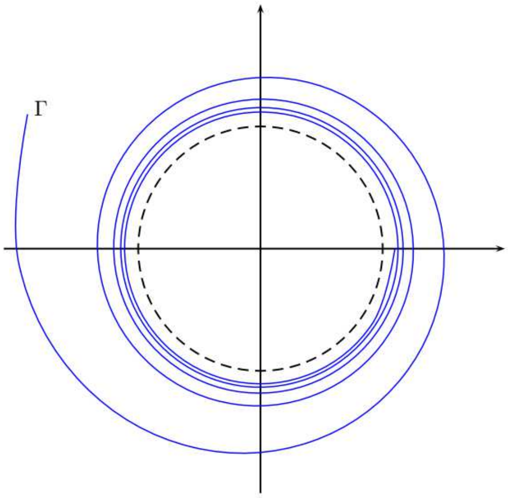


FIGURE 3.10 –

3. *Si* $f(\theta) \longrightarrow \pm\infty$ *quand* $\theta \longrightarrow \pm\infty$ *alors on dit que* $\Gamma$ *présente une* ***branche-spirale***.

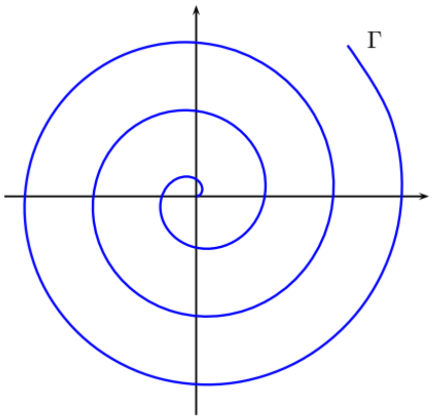


FIGURE 3.11 –

En revanche, pour déterminer une branche infinie de $\Gamma$ lorsque $\theta$ tend vers $\theta_0$, on utilise les coordonnées cartésiennes (éventuellement dans un nouveau repère).

### 3.2.4 Plan d'étude d'une courbe définie par une équation polaire

On considère une courbe $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.

**Domaine d'étude**

On commence par déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

1. Si la fonction $f$ est $T$-périodique alors on peut restreindre l'étude au cas où $\theta$ appartient à un intervalle de longueur $T$. On passe du point de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta)$ à celui

de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta + T)$ en effectuant la rotation de centre $O$ et d'angle $T$, on obtient donc la courbe $\Gamma$ en la traçant pour $\theta \in [0, T]$ puis en effectuant les rotations de centre $O$ et d'angles $T$, $2T$, ...

2. On peut utiliser des symétries. Par exemple :
   (a) Si $f$ est paire alors on étudie la courbe pour $\theta \geq 0$ puis on effectue la symétrie par rapport à $(Ox)$ (car les points de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta)$ et $(f(\theta), -\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses) ;
   (b) Si $f$ est impaire alors on étudie la courbe pour $\theta \geq 0$ puis on effectue la symétrie par rapport à $(Oy)$ (car les points de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta)$ et $(-f(\theta), -\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées) ;

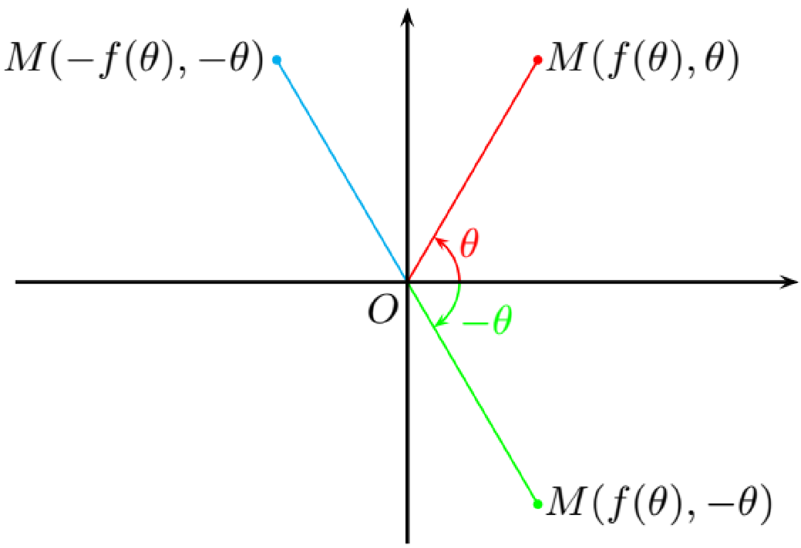


FIGURE 3.12 –

### Étude de la fonction $f$

1. On commence par étudier pour quelles valeurs $f$ s'annule (c'est-à-dire pour quelles valeurs de $\theta$ la courbe passe par $O$).
2. On étudie le signe de $f$ et ses limites aux bornes des intervalles de définition.
3. Éventuellement, on étudie les variations de $f$.
4. On dresse un tableau de variation de la fonction $f$.
5. Si la courbe passe par l'origine (éventuellement plusieurs fois), on détermine la tangente (éventuellement les tangentes) en $O$.
6. On étudie les branches infinies.
7. On détermine les points multiples, c'est-à-dire les points de la courbe qui correspondent à plusieurs paramètres $\theta$, en précisant la tangente en ces points.
8. On peut alors tracer la courbe.

**Exercice d'application**
Étudier puis tracer la courbe $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.
Le tracé de la courbe $\Gamma$ pour $\theta \in [0, \pi]$ est donc le suivant

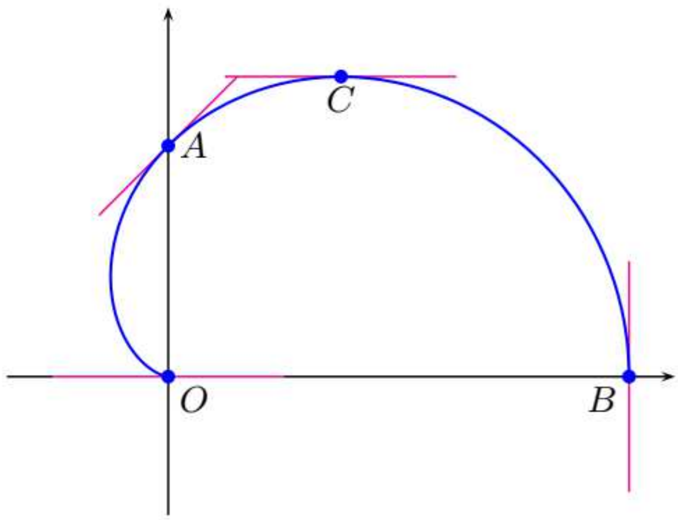


FIGURE 3.13 –

et par symétrie on obtient $\Gamma$ en entier

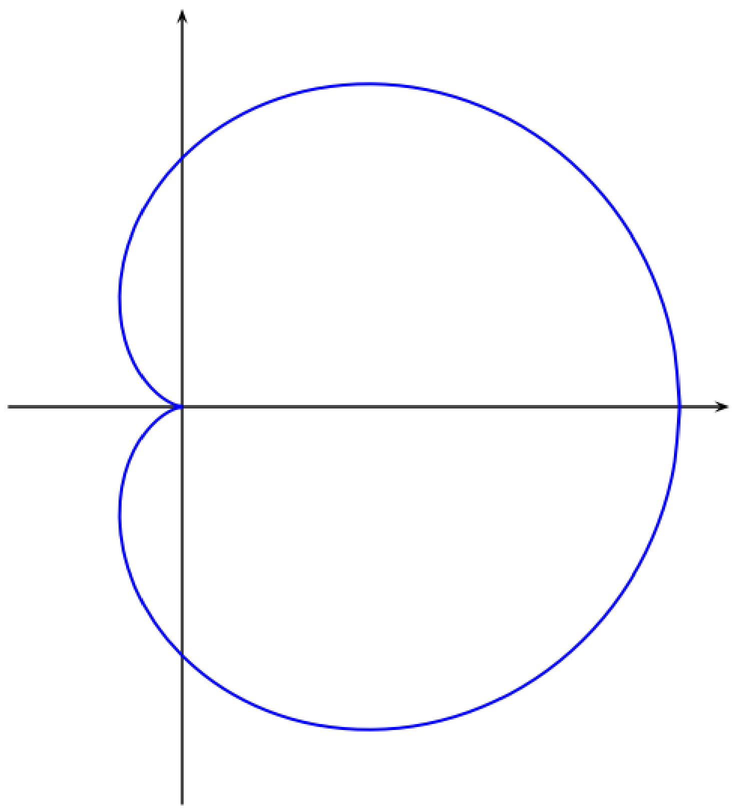

FIGURE 3.14 – La cardioïde $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

### 3.2.5 Proprietés métriques d'une courbe

On considère une courbe $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$.

**Longueur d'une courbe**

**Théorème 3.2.3.** *La longueur $l$ de la portion de courbe $\Gamma$ comprise entre $M(\theta_0)$ et $M_1(\theta_1)$ est*

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

**Exemple :**

- On considère le cercle de centre $O$ et de rayon $r$ défini par l'équation polaire $\rho = r$. Alors la longueur du cercle est

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (-r\sin\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r.$$

- On considère la cardioïde $\Gamma$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ alors sa longueur $l$ est donnée par :

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2} d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta} d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 8$$

**Abscisse curviligne**

**Définition 3.2.5.1.** *On appelle abscisse curviligne de $\Gamma$ dans le sens des ?$\theta$ croissants et d'origine $M(\theta_0)$ la fonction $s$ définie pour tout $\theta \in I$ par :*

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

**Remarque :** La fonction $s$ est dérivable et on a $s'(\theta) = \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}$.