

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1}(t) dt = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

# Analyse Réelle, Calcul intégral Équations différentielles

Modeste ESSOH

Bérenger KPATA

---

# Table des matières

<b>I Calcul Intégral</b>	<b>3</b>
Introduction	5
1 Fonction Riemann intégrable	7
I Fonctions ayant une propriété par morceaux . . . . .	7
II Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	11
III Intégrale de Riemann d'une fonction bornée . . . . .	13
III.1 Intégrales inférieure et supérieure d'une fonction bornée sur un segment. . . . .	14
III.2 Intégrale d'une fonction bornée sur un segment. . . . .	15
III.3 Propriétés des fonctions intégrables . . . . .	17
III.4 Exemples importants de fonctions intégrables . . . . .	22
III.5 Somme de Riemann . . . . .	25
IV Notations et extension de $\int_a^b f(x)dx$ . . . . .	28
2 Intégrale de fonctions continues	29
I Théorème fondamental . . . . .	29
II Techniques d'intégration . . . . .	36
II.1 Changement de variable . . . . .	36
II.2 Intégration par parties . . . . .	37
II.3 Primitive de fonction rationnelle . . . . .	38
II.4 Primitives d'une fonction rationnelle en cos et sin . . . . .	40
II.5 Primitives d'une fonction rationnelle en $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$ . . . . .	44
II.6 Intégrale abélienne . . . . .	45
<b>II Équations différentielles</b>	<b>49</b>
Introduction et généralité	51
3 Équations différentielles d'ordre 1	55
I Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables . . . . .	55
I.1 Définition et méthode de résolution . . . . .	55
I.2 Équations apparentées aux équations séparables . . . . .	56
II Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .	57
II.1 Solution générale de l'équation sans second membre . . . . .	57
II.2 Solution particulière de l'équation différentielle ( $E$ ) . . . . .	58
II.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire . . . . .	60
II.4 Équations de Bernoulli et équations de Riccati . . . . .	63

---

<b>4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2</b>	<b>67</b>
I Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants . . . . .	67
I.1 Solution générale de l'équation homogène . . . . .	68
I.2 Solution particulière de l'équation différentielle ( $E$ ) . . . . .	69
I.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle . . . . .	73
I.4 Unicité de la solution sous conditions initiales . . . . .	73
I.5 Exercices . . . . .	74
II Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients quelconques . . . . .	78

# Première partie

## Calcul Intégral



---

## Introduction

L'intégrale est un des plus beaux et des plus puissants objet mathématique. Il s'agit sans aucun doute d'une des plus belles inventions de l'esprit humain. En effet, il s'agit tout d'abord d'un pure création de l'esprit au sens où c'est un objet limite, obtenu en passant à la limite sur des subdivisions etc., pas un objet qui existe dans la nature (ou du moins „ca se discute!). Ensuite c'est un objet qui permet de calculer des choses très compliquées : pratiquement toutes les surfaces. Imaginez comment on s'y prenait il y a plusieurs siècles pour calculer des surfaces compliquées : on ne dispose en général que de peu d'outils ou de formules, on est obligé de passer par des approximations par des figures simples (comme les grecs avec le disque qu'ils encadraient par des polygones réguliers). L'intégrale fournit une réponse très puissante et extrêmement simple : il suffit de calculer une primitive et de prendre la différence de sa valeur en deux points ! C'est vraiment surprenant de simplicité.

Il n'y a pas un seul pan des sciences, qu'elles soient physiques, chimiques, biologiques, économiques, informatiques etc. qui ne fasse pas aujourd'hui un usage intensif de l'intégrale. C'est clairement un objet-clef de l'analyse mathématique et des sciences en général.

Il existe des théories plus ou moins fines de l'intégration. Des théories qui permettent de calculer l'intégrale de fonctions plus ou moins compliquées, ou de fonctions qui vivent sur des espaces plus ou moins bizarres (mais nécessaires à un certain niveau). En Licence 1 de Mathématiques, nous étudierons l'intégrale dite de Riemann, qui est déjà très puissante et générale. La forme la plus générale de l'intégrale est celle de Lebesgue, que nous étudierons en Licence 3 de Mathématiques.



## Fonction Riemann intégrable

### I Fonctions ayant une propriété par morceaux

Dans tout ce chapitre  $f$  désigne une fonction d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  (avec naturellement  $a < b$ ).

#### Définition 1 (Subdivision d'un intervalle)

On appelle subdivision d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de l'intervalle  $[a, b]$  toute liste  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $n + 1$  réels vérifiant :

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

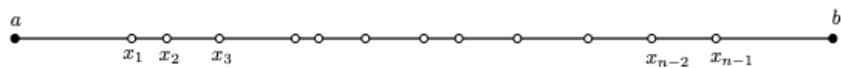


FIGURE 1.1 – Exemple de subdivision de l'intervalle  $[a, b]$

$(1, 2, 3, 4)$  est une subdivision de  $[1, 4]$  mais  $(1, 2, 4, 5, 3)$  n'est pas une subdivision de  $[1, 5]$ .

- Les  $x_k$  sont appelés les *points* de la subdivision, les intervalles  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = 1, \dots, n$ , les *intervalles fermés de la subdivision*, et les intervalles  $]x_{k-1}, x_k[$  les *intervalles ouverts*; le réel

$$\boxed{\max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_k - x_{k-1})}$$

s'appelle le *pas* (ou le *module*) de la subdivision.

- La subdivision est dite *régulière* si les nombres  $x_k - x_{k-1}$  sont égaux entre eux : donc égaux à  $\frac{b-a}{n}$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### Remarque 1

La subdivision de  $[a, b]$  est régulière d'ordre  $n$  si et seulement si  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$  pour tout  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  ;

ce qui donne en particulier, lorsque  $a = 0$  et  $b = 1$  :  $x_k = \frac{k}{n}$ .

### Remarque 2

Soient  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  et  $\sigma' = \{x'_0, \dots, x'_p\}$  deux subdivisions de  $[a, b]$ . On note  $\sigma \cup \sigma'$  la subdivision obtenue en prenant la réunion des ensembles  $\{x_0, \dots, x_n\}$  et  $\{x'_0, \dots, x'_p\}$  et en rangeant les éléments par ordre croissant.

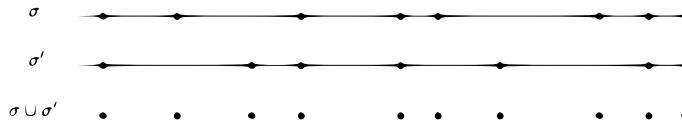


FIGURE 1.2 – Exemple de réunion de deux subdivisions

### Définition 2

Soit  $P$  une propriété concernant des fonctions sur un intervalle ; on dira que la fonction  $f$  possède la propriété  $P$  par morceaux (ou par intervalles) sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que les  $n$  restrictions de  $f$  aux intervalles ouverts  $]x_{k-1}, x_k[$  de la subdivision  $\sigma$  sont prolongeables en des fonctions ayant la propriété  $P$  sur les intervalles fermés  $[x_{k-1}, x_k]$ .

- Une subdivision ayant cette propriété sera dite *adaptée* à la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  pour la propriété  $P$ .

### Exemple 1 (Fonction continue par morceaux.)

Une fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que

- les  $n$  restrictions de  $f$  aux intervalles ouverts  $]x_{k-1}, x_k[$  sont continues
- $f$  possède une limite finie à droite en  $x_0, \dots, x_{n-1}$  et une limite finie à gauche en  $x_1, \dots, x_n$ .

Si l'on définit un point de discontinuité de première espèce d'une fonction comme étant un point de discontinuité où la fonction possède cependant une limite finie à gauche et à droite, alors :

une fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $[a, b]$  sauf en un nombre fini de points où la discontinuité de la fonction est de première espèce.

### Proposition 1

Une fonction continue par morceaux sur un segment  $[a, b]$  est bornée sur ce segment.

L'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition  $[a, b]$  continues par morceaux sur  $[a, b]$  est noté  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ .

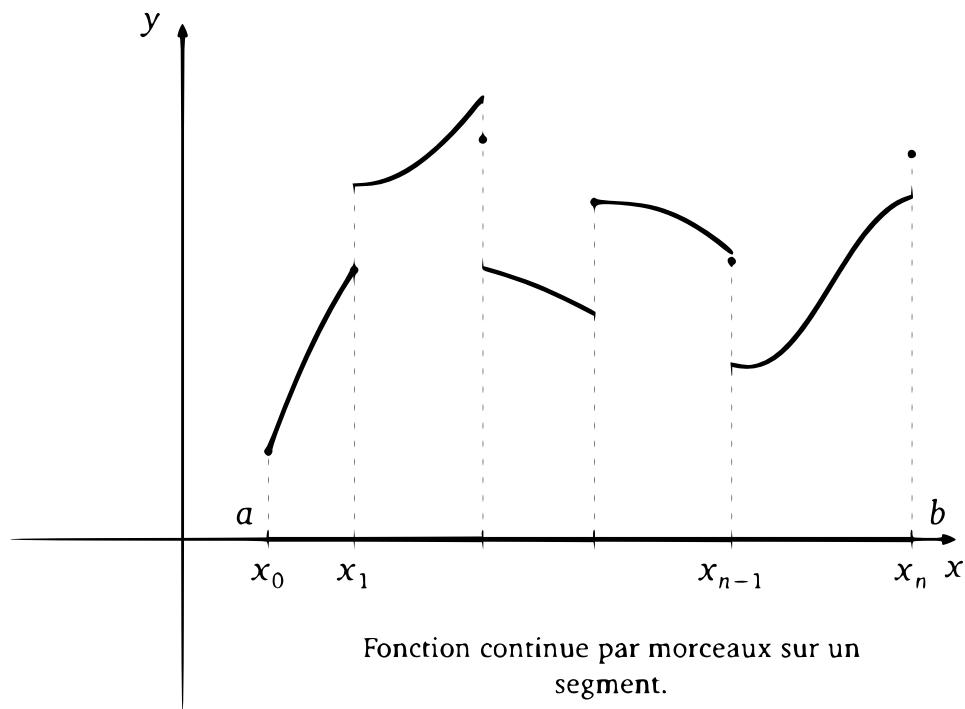


FIGURE 1.3 – Exemple de représentation graphique d'une fonction continue par morceaux

**Théorème 1**

$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{[a, b]}$  : c'est-à-dire pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues par morceaux sur  $[a, b]$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

**Exemple 2 (Fonctions affines par morceaux.)**

Une fonction  $f$  est affine par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  et  $2n$  réels  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  tels que

$$\forall k \in [1, n] \quad \forall x \in ]x_{k-1}, x_k[ \quad f(x) = a_k x + b_k$$

- L'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition  $[a, b]$  affines par morceaux sur  $[a, b]$  est noté  $\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$ .

**Théorème 2**

$\mathcal{AM}([a, b], \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  : c'est-à-dire pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  affines par morceaux sur  $[a, b]$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est affine par morceaux sur  $[a, b]$ .

**Exemple 3 (Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux.)**

Une fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i = 0, \dots, n - 1$  la restriction  $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$  de  $f$  à  $]x_i, x_{i+1}[$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$ .

- L'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition  $[a, b]$  de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$  est noté  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ .

### Théorème 3

$\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  : c'est-à-dire pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $[a, b]$ .

### Exemple 4 (Fonctions en escalier.)

Une fonction  $f$  est en escalier sur  $[a, b]$  si et seulement si il existe une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$  et  $n$  réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \forall x \in ]x_{k-1}, x_k[ \quad f(x) = \lambda_k$$

Par exemple, la fonction ci-dessous est en escalier (les images des points de la subdivision sont représentées par des  $\bullet$ ) :

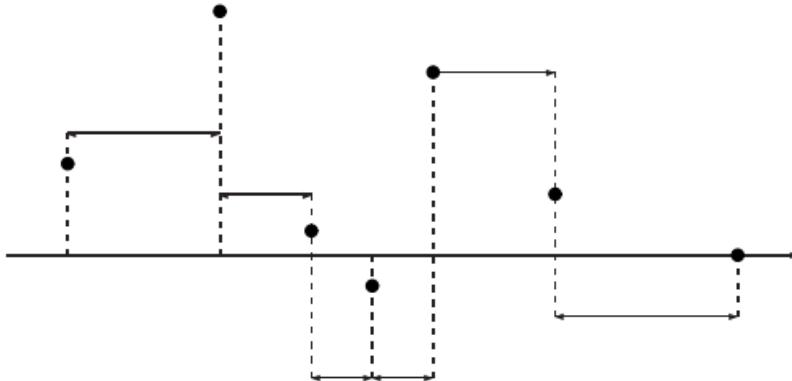


FIGURE 1.4 – Exemple de représentation graphique d'une fonction en escalier

- Soient  $f$  une fonction en escalier et  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$ . On dit que  $\sigma$  est adaptée à  $f$ , si  $f$  est constante sur chaque intervalle ouvert  $]x_{i-1}, x_i[$  de la subdivision  $\sigma$ .
- L'ensemble des fonctions réelles d'ensemble de définition  $[a, b]$  en escalier sur  $[a, b]$  est noté  $Esc([a, b], \mathbb{R})$ .

### Théorème 4

$Esc([a, b], \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$  : c'est-à-dire toute fonction en escalier sur  $[a, b]$  est continue par morceaux ; et pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  en escalier sur  $[a, b]$  et pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est en escalier sur  $[a, b]$ .

**Preuve :** Soient  $f, g \in Esc([a, b], \mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et soit  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ) une subdivision adaptée à  $f$  (resp.  $g$ ). Alors la subdivision  $\sigma \cup \sigma' = \{x_0, \dots, x_n\}$  est adaptée à la fois à  $f$  et à  $g$ , c'est-à-dire que  $f$  et  $g$  sont constantes sur chaque intervalle  $]x_{i-1}, x_i[$ , de valeurs respectives  $c_i$  et  $d_i$ , et donc  $\alpha f + \beta g$  y est aussi constante, de valeur  $\alpha c_i + \beta d_i$ . Ceci montre que  $\alpha f + \beta g$  est en escalier, donc que  $Esc([a, b], \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de toutes les fonctions  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

□

**Remarque 3**

Il est facile de prouver que si  $f$  et  $g$  sont des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  alors les fonctions  $|f|$  et  $fg$  sont en escalier sur  $[a, b]$ .

**Exercice 1**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . Montrer que la fonction partie entière  $E$  est en escalier sur  $[a, b]$ .

**II Intégrale d'une fonction en escalier****Propriété 1**

Soit  $f$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$ ,  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision adaptée à  $f$ , et  $\lambda_k$  la valeur constante de  $f$  sur  $]x_{k-1}, x_k[$ ; alors le réel

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1})$$

est indépendant du choix de la subdivision adaptée.

**Preuve :** Pour toute subdivision  $\tau = (t_0, t_1, \dots, t_p)$  de  $[a, b]$  adaptée de  $f$ , posons  $I_\tau(f) = \sum_{i=1}^p c_k(t_i - t_{i-1})$

où  $c_k$  est la valeur de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]t_{i-1}, t_i[$ .

Considérons deux subdivisions  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  et  $\sigma' = \{y_0, \dots, y_m\}$  adaptées à  $f$  avec  $\lambda_k$  et  $\alpha_l$  la valeur constante de la fonction  $f$  respectivement sur  $]x_{k-1}, x_k[$  et  $]x_{l-1}, x_l[$ .

Posons  $\sigma_1 = \sigma \cup (a, y_1, b)$ . Dans le cas  $y_1$  est un point de la subdivision  $\sigma$  alors  $\sigma_1 = \sigma$  et  $I_\sigma(f) = I_{\sigma_1}(f)$ . Si  $y_1$  n'est pas un point de  $\sigma$  alors il existe un entier  $p$  tel  $x_{p-1} < y_1 < x_p$ . Alors  $\sigma_1 = (x_0, \dots, x_{p-1}, y_1, x_p, \dots, x_n)$ . D'où

$$\begin{aligned} I_\sigma(f) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) = \lambda_1(x_1 - x_0) + \dots + \lambda_{p-1}(x_{p-1} - x_{p-2}) \\ &\quad + \lambda_p(y_1 - x_{p-1}) + \lambda_p(x_p - y_1) + \dots + \lambda_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= I_{\sigma_1}(f) \end{aligned}$$

En posant pour tout  $l \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,  $\sigma_l = \sigma_{l-1} \cup (a, y_l)$  où on pris  $\sigma_0 = \sigma$  et en raisonnant de proche en proche, on obtient

$$I_\sigma(f) = I_{\sigma_1}(f) = I_{\sigma_2}(f) = \dots = I_{\sigma_{m-1}}(f).$$

En remarquant que  $\sigma_{m-1} = \sigma \cup \sigma'$ , on a donc

$$I_\sigma(f) = I_{\sigma \cup \sigma'}(f) = I_{\sigma' \cup \sigma}(f) = I_{\sigma'}(f).$$

□

**Définition 3**

La quantité ci-dessus est appelée l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et on la note  $\int_a^b f(x)dx$  ( $x$  étant ici une variable muette).

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1})$$

**Proposition 2**

Soit  $f$  et  $g$  sont en escalier sur  $[a, b]$ .

1. Pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2. Si  $f$  est positive sur  $[a, b]$  ( $\forall x \in [a, b] f(x) \geq 0$ ), alors

$$\int_a^b f(x) \geq 0$$

3. Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4. On a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Preuve :**

1. Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont des subdivisions adaptées aux fonctions  $f$  et  $g$  alors  $\sigma \cup \sigma' = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  est une subdivision adaptée de  $\alpha f + \beta g$ . Si  $f$  et  $g$  prenaient respectivement les valeurs  $c_k$  et  $d_k$  sur les intervalles  $]x_{k-1}, x_k[$  alors la fonction  $\alpha f + \beta g$  prend les valeurs  $\alpha c_k + \beta d_k$  sur ces mêmes intervalles. On obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx &= \sum_{k=1}^n (\alpha c_k + \beta d_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^n d_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

2. Comme  $f$  est positive sur  $[a, b]$ , toutes les valeurs  $\lambda_k$  de  $f$  sur  $]x_{k-1}, x_k[$  sont positives pour une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ . Comme les  $x_{k-1} - x_k$  sont tous positifs, on a bien

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

3. Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors  $x \in [a, b]$ ,  $g(x) - f(x) \geq 0$ . D'après 2.  $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$  et de 1, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4. Pour tout  $x \in [a, b]$  on a  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ . Donc on a de 3,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

### Interprétation géométrique :

Si  $f$  est une fonction en escalier sur  $[a, b]$  alors l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  est la somme des aires algébriques des rectangles délimités par le graphe de  $f$ , les aires des rectangles situés au-dessus (resp. en dessous) de l'axe des abscisses étant comptées positivement (resp. négativement).

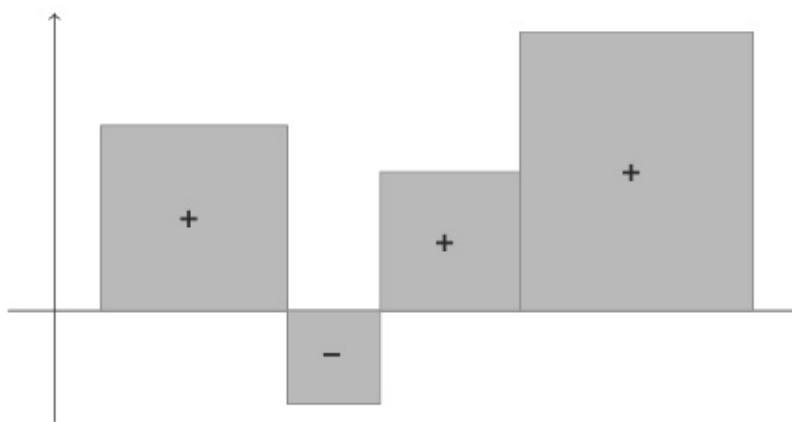


FIGURE 1.5 – Interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction en escalier

## III Intégrale de Riemann d'une fonction bornée

Nous allons quitter les fonctions en escalier pour s'attaquer au calcul de l'intégrale de fonctions plus compliquées.

Dans cette section  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée.

### III.1 Intégrales inférieure et supérieure d'une fonction bornée sur un segment.

#### Définition 4 (Intégrale inférieure)

On désigne par intégrale inférieure de  $f$  sur  $[a, b]$  la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier minorant  $f$  sur  $[a, b]$ . On la note  $I^-(f)$  :

$$I^-(f) = \sup_{\substack{g \text{ en escalier sur } [a, b] \\ \forall x \in [a, b] \ g(x) \leq f(x)}} \int_a^b g(x) dx.$$

#### Définition 5 (Intégrale supérieure)

On désigne par intégrale supérieure de  $f$  sur  $[a, b]$  la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant  $f$  sur  $[a, b]$ . On la note  $I^+(f)$  :

$$I^+(f) = \inf_{\substack{g \text{ en escalier sur } [a, b] \\ \forall x \in [a, b] \ g(x) \geq f(x)}} \int_a^b g(x) dx.$$

#### Remarque 4

- Supposons que  $\forall x \in [a, b] \ m \leq f(x) \leq M$ . Pour toutes fonctions  $g_1$  et  $g_2$  en escalier sur  $[a, b]$  telles que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $g_1(x) \leq f(x)$  et  $g_2(x) \geq f(x)$ , on a

$$\int_a^b g_1(x) dx \geq m(b-a) \quad \text{et} \quad \int_a^b g_2(x) dx \leq M(b-a).$$

Les ensembles

$$\left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in \mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{R}) ; \forall x \in [a, b] \ g(x) \leq f(x) \right\}$$

et

$$\left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in \mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{R}) ; \forall x \in [a, b] \ g(x) \geq f(x) \right\}$$

sont non vides car ils contiennent respectivement les fonctions constantes  $x \rightarrow m$  et  $x \rightarrow M$ ; de plus ils sont respectivement majoré par  $m(b-a)$  et minoré par  $M(b-a)$ , donc

$$\left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in \mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{R}) ; \forall x \in [a, b] \ g(x) \leq f(x) \right\}$$

admet une borne supérieure  $I^-(f)$  et

$$\left\{ \int_a^b g(x) dx \mid g \in \mathcal{E}sc([a, b], \mathbb{R}) ; \forall x \in [a, b] \ g(x) \geq f(x) \right\}$$

admet une borne inférieure  $I^+(f)$  et on a

$$m(b-a) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq M(b-a)$$

- D'une manière générale si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  telles que  $\psi \leq f \leq \varphi$  alors

$$\int_a^b \psi(x) dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

### III.2 Intégrale d'une fonction bornée sur un segment.

#### Définition 6

$f$  est dite intégrable (au sens de Riemann) sur  $[a, b]$  dès que son intégrale inférieure sur  $[a, b]$  est égale à son intégrale supérieure :

$$f \text{ est intégrable sur } [a, b] \Leftrightarrow I^-(f) = I^+(f).$$

La valeur commune des intégrales inférieure et supérieure de  $f$  sur  $[a, b]$  est appelée intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et notée  $\int_a^b f(x) dx$  ( $x$  étant ici une variable muette).

#### Remarque 5

Lorsque  $f$  est en escalier, cette définition coïncide avec celle donnée dans la définition 3.

#### Exemple 5 (Exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann)

Soit la fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases}$$

Si  $g$  est une fonction en escalier qui majore  $f$  sur  $[a, b]$ , alors sur tout intervalle où  $g$  est constante il y a un rationnel, donc doit être supérieure ou égale à 1 sur cet intervalle. Donc  $g \geq 1$  sur  $[a, b]$  par conséquent  $I^+(f) \geq 1$ . De même si  $g$  est une fonction en escalier qui minore  $f$  sur  $[a, b]$ , alors sur tout intervalle où  $g$  est constante il y a un irrationnel, donc doit être inférieure ou égale à 0 sur cet intervalle. Donc  $g \leq 0$  sur  $[a, b]$  par conséquent  $I^-(f) \leq 0$ .

On ne peut donc pas avoir  $I^-(f) = I^+(f)$ .

#### Exemple 6 (Exemple de calcul de l'intégrale d'une fonction intégrable au sens de Riemann)

Soit la fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[0, 1]$  par  $f(x) = x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Considérons la subdivision  $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1\}$  ( $x_k = \frac{k}{n}$ ) et les fonctions en escaliers  $\varphi$  et  $\psi$  définies pour tout  $x \in ]x_k, x_{k+1}[$  par

$$\varphi(x) = \frac{k+1}{n} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{k}{n}.$$

Alors  $\psi \leq f \leq \varphi$  et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} \\ \int_0^1 \psi(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

Comme  $\int_0^1 \psi(x) dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_0^1 \varphi(x) dx$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{n-1}{2n} \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Par passage à la limite, on a  $\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n} \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ , par suite  $I^-(f) = I^+(f) = \frac{1}{2}$ . Donc  $f$  est intégrable sur  $[0, 1]$  et on a  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ .

## Exercice 2

Soit  $a$  et  $b$  deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . Calculer  $\int_a^b E(x)dx$  où  $E$  est la fonction partie entière.

Donnons maintenant une caractérisation des fonctions intégrables au sens de Riemann.

### Théorème 5

Une fonction  $f$  définie et bornée sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe des fonctions en escalier  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sur  $[a, b]$  telles  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$  et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0.$$

Dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx$  et cette valeur commune est égale à l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Preuve :** Supposons que  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ . Alors  $I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f(x) dx$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $I^-(f)$  est une borne supérieure il existe une fonction en escalier  $\psi_n$  telle  $\psi_n \leq f$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = I^-(f)$ . De même comme  $I^+(f)$  est une borne inférieure il existe une fonction en escalier  $\varphi_n$  telle  $\varphi_n \geq f$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = I^+(f)$ . D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0.$$

Réciproquement, supposons que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  il existe des fonctions en escalier  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sur  $[a, b]$  telles  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$  et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0.$$

Comme  $\int_a^b \psi_n(x) dx \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \int_a^b \varphi_n(x) dx$ , alors

$$0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx,$$

mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0$  donc par passage à la limite, on obtient  $I^+(f) = I^-(f)$  et par conséquent  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

De plus, si tel est le cas, des relations  $0 \leq I^-(f) - \int_a^b \psi_n(x) dx \leq \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx$  et  $0 \leq \int_a^b \psi_n(x) dx - I^+(f) \leq \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx$ , par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = I^-(f) = \int_a^b f(x) dx = I^+(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

□

**Exercice 3**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des fonctions en escalier  $\psi$  et  $\varphi$  sur  $[a, b]$  vérifiant :

$$\psi \leq f \leq \varphi \text{ sur } [a, b] \quad \text{et} \quad \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Montrer que  $f$  est intégrable au sens de Riemann.

### III.3 Propriétés des fonctions intégrables

#### Propriété 2 (Égalité de Chasles)

Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$  et  $c \in [a, b]$ .

- (i) Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  alors  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ .
- (ii) Si  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$  alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- (iii) Si  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  alors on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Preuve :** Soit  $f$  une fonction bornée sur  $[a, b]$  et  $c \in [a, b]$ .

(i) : Comme la fonction  $f$  est intégrable, il existe pour tout entier  $n$ , il existe des fonctions en escalier  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  vérifiant  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0.$$

Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des subdivisions adaptées respectivement aux fonctions  $\psi_n$  et  $\varphi_n$  alors on obtient une subdivision adaptée  $\sigma$  commune en ajoutant au besoin le point  $c$  à  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ , soit  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_p = c, x_{p+1}, \dots, x_m)$ . Les restrictions  $\varphi'_n$  et  $\psi'_n$  de  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  respectivement à  $[a, c]$  sont des fonctions en escalier sur  $[a, c]$  vérifiant  $\psi'_n \leq f \leq \varphi'_n$  sur  $[a, c]$ . De plus

$$0 \leq \int_a^c (\varphi'_n(x) - \psi'_n(x)) dx \leq \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx,$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c (\varphi'_n(x) - \psi'_n(x)) dx = 0$ . Ainsi  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$ . Le même raisonnement montre que  $f$  est intégrable sur  $[c, b]$ .

(ii) : Comme la fonction  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , il existe pour tout entier  $n$ , il existe des fonctions en escalier  $\varphi_n, \psi_n$ , sur  $[a, c]$ ,  $\theta_n$  et  $\beta_n$  sur  $[c, b]$ , vérifiant  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$  sur  $[a, c]$  et  $\theta_n \leq f \leq \beta_n$  sur  $[c, b]$ . De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (\beta_n(x) - \theta_n(x)) dx = 0.$$

En posant  $\alpha_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{si } x \in [a, c[ \\ \beta_n(x) & \text{si } x \in [c, b] \end{cases}$  et  $\eta_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{si } x \in [a, c[ \\ \theta_n(x) & \text{si } x \in [c, b] \end{cases}$ , on obtient des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  vérifiant  $\eta_n \leq f \leq \alpha_n$  sur  $[a, b]$ .

Si  $\sigma_1 = (x_0, \dots, x_p)$  est une subdivision de  $[a, c]$  adaptée à  $\varphi_n$  et à  $\psi_n$  et que  $\sigma_2 = (y_0, \dots, y_m)$  est une subdivision  $[c, b]$  adaptée à  $\beta_n$  et à  $\theta_n$  alors  $\sigma = (x_0, \dots, x_p, y_1, \dots, y_m)$  est une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $\eta_n$  et à  $\alpha_n$ . En notant  $\lambda_k$  respectivement  $\mu_k$  les valeurs constantes prises sur les intervalles ouverts de la subdivision  $\sigma_1$  par  $\varphi_n$  et  $\psi_n$ , et  $\lambda'_k$  respectivement  $\mu'_k$  les valeurs constantes prises sur les intervalles ouverts de la subdivision  $\sigma_2$  par  $\beta_n$  et  $\theta_n$ , on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha_n(x) - \eta_n(x)) dx &= \sum_{k=1}^p (\lambda_k - \mu_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^m (\lambda'_k - \mu'_k)(y_k - y_{k-1}) \\ &= \int_a^c (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx + \int_c^d (\beta_n(x) - \theta_n(x)) dx.\end{aligned}$$

Par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\alpha_n(x) - \eta_n(x)) dx = 0$ . Ce qui prouve que  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

(ii) : En conservant les même notations et en raisonnant comme dans (ii), on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha_n(x) dx &= \sum_{k=1}^p \lambda_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^m \lambda'_k (y_k - y_{k-1}) \\ &= \int_a^c \varphi_n(x) dx + \int_c^b \beta_n(x) dx,\end{aligned}$$

en passant à la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

□

#### Exercice 4

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $a < b < c < d$ , et soit  $f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Riemann-intégrable sur  $[a, d]$ . Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d f(x) dx + \int_a^c f(x) dx \cdot \int_d^b f(x) dx + \int_a^d f(x) dx \cdot \int_b^c f(x) dx = 0.$$

#### Propriété 3 (Linéarité de l'intégrale)

Si  $f, g$  sont des fonctions bornées et intégrables sur  $[a, b]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors les fonctions  $\lambda f$  et  $f + g$  sont intégrables sur  $[a, b]$  et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx. \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.\end{aligned}$$

**Preuve :** Comme les fonctions  $f$  et  $g$  sont intégrables, il existe pour tout entier  $n$ , il existe des fonctions en escalier  $\varphi_n, \psi_n, \theta_n$  et  $\beta_n$  vérifiant  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$ ,  $\theta_n \leq g \leq \beta_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\beta_n(x) - \theta_n(x)) dx = 0.$$

- Si  $\lambda = 0$  alors  $\lambda f = 0$  est intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b \lambda f(x)dx = 0 = 0 \cdot \int_a^b f(x)dx$ .
- Pour  $\lambda > 0$ , les fonctions  $\lambda\varphi_n$  et  $\lambda\psi_n$  sont en escalier sur  $[a, b]$ , de plus  $\lambda\psi_n \leq \lambda f \leq \lambda\varphi_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n(x) - \lambda\psi_n(x)) dx = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0.$$

Donc  $\lambda f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(x)dx = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

- Le cas  $\lambda < 0$  est similaire au précédent.

Montrons que  $f + g$  est intégrable. Pour tout entier  $n$ , les fonctions  $\psi_n + \theta_n$  et  $\varphi_n + \beta_n$  sont des fonctions en escalier vérifiant  $\psi_n + \theta_n \leq f + g \leq \varphi_n + \beta_n$ . De plus

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b ((\varphi_n(x) + \beta_n(x)) - (\psi_n(x) + \theta_n(x))) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\beta_n(x) - \theta_n(x)) dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b ((\varphi_n(x) + \beta_n(x)) - (\psi_n(x) + \theta_n(x))) dx &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $f + g$  est intégrable et

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) + \beta_n(x)) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \beta_n(x)dx \\ \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

□

#### Propriété 4 (Intégrale et inégalité)

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions bornées et intégrables sur  $[a, b]$ .

1. Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$  alors  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .
2. Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  alors  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .

#### Preuve :

1. Si  $f$  intégrable sur  $[a, b]$  alors il existe pour tout entier  $n$  une fonction en escalier  $\varphi_n$  telle que  $\varphi_n \geq f$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ . De plus  $f$  est positive sur  $[a, b]$ , donc  $\varphi_n \geq 0$ , d'où  $\int_a^b \varphi_n(x)dx \geq 0$ . Par conséquent

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx \geq 0.$$

2. Si  $f \geq g$  sur  $[a, b]$ , alors on applique tout ce précède à la fonction  $f - g \geq 0$  pour obtenir  $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$ . Par linéarité, on a  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ .  $\square$

### Propriété 5 (Intégrabilité de la valeur absolue)

Soit  $f$  une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ . Alors la fonction  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$  et on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Avant de passer à la preuve adoptons les notations suivantes : Pour toute fonction  $f$  à valeur réelle, on pose

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad \text{et} \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Il est clair que les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  ainsi définies sont positives et

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_-$$

**Preuve de la propriété 5 :** Comme la fonction  $f$  est intégrables, il existe pour tout entier  $n$ , des fonctions en escalier  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  vérifiant  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

D'autre part, comme  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n$ , les fonctions en escalier  $(\psi_n)_+$  et  $(\varphi_n)_+$  vérifie  $(\psi_n)_+ \leq f_+ \leq (\varphi_n)_+$  et  $0 \leq (\varphi_n)_+ - (\psi_n)_+ \leq \varphi_n - \psi_n$ . D'où

$$0 \leq \int_a^b ((\varphi_n)_+(x) - (\psi_n)_+(x))dx \leq \int_a^b ((\varphi_n)(x) - (\psi_n)(x))dx,$$

par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b ((\varphi_n)_+(x) - (\psi_n)_+(x))dx = 0$$

car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx = 0$ . Ce qui prouve que  $f_+$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

Aussi  $f_- = \max\{-f, 0\} = (-f)_+$ . Comme  $f$  est intégrable alors  $-f$  est intégrable et le raisonnement précédent montre que  $f_- = (-f)_+$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

Finalement comme  $|f| = f_+ + f_-$  et que  $f_-$  et  $f_+$  sont intégrables sur  $[a, b]$ , donc  $|f|$  est intégrable sur  $[a, b]$ . Comme de plus  $-|f| \leq f \leq |f|$ , on a  $-\int_a^b |f|(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f|(x)dx$ , donc

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

### Définition 7 (Valeur moyenne)

Soit  $f$  une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ . On appelle valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  la quantité

$$V = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

**Théorème 6 (Théorème de la moyenne)**

Soit  $f$  une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ . Alors

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

**Preuve :** Comme  $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ , par intégration on obtient  $\inf_{x \in [a,b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{x \in [a,b]} f(x)(b-a)$ . D'où le résultat.

□

Nous allons maintenant montrer que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable.

**Propriété 6 (Intégrabilité du produit de fonctions)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées et intégrables sur  $[a, b]$ . Alors la fonction  $fg$  est bornée et intégrable sur  $[a, b]$ .

**Preuve :** Il est clair que si  $f$  et  $g$  sont bornées alors  $fg$  est également bornée.

Supposons dans un premier temps que  $f$  et  $g$  sont positives. Posons  $M = \max \left\{ \sup_{x \in [a,b]} f(x), \sup_{x \in [a,b]} g(x) \right\}$ .

Comme  $f$  et  $g$  sont intégrables, il existe pour tout entier  $n$  des fonctions en escalier  $\varphi_n, \psi_n, \theta_n$  et  $\beta_n$  vérifiant  $\psi_n \leq f \leq \varphi_n, \theta_n \leq g \leq \beta_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\beta_n(x) - \theta_n(x)) dx = 0.$$

Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi'_n = (\psi_n)_+, \quad \varphi'_n = \min\{M, \varphi_n\}, \quad \theta'_n = (\theta_n)_+ \quad \text{et} \quad \beta'_n = \min\{M, \beta_n\}.$$

Donc  $\psi_n \leq \psi'_n \leq f \leq \varphi'_n \leq \varphi_n$  et  $\theta_n \leq \theta'_n \leq g \leq \beta'_n \leq \beta_n$ . Comme  $\varphi'_n \geq 0$  et  $\theta'_n \geq 0$ , on a

$$\psi'_n \theta'_n \leq fg \leq \varphi'_n \beta'_n.$$

Les fonctions  $\psi'_n \theta'_n$  et  $\varphi'_n \beta'_n$  étant des fonctions en escalier, il suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi'_n(x) \beta'_n(x) - \psi'_n(x) \theta'_n(x)) dx = 0$$

pour justifier l'intégrabilité de  $fg$ . On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b (\varphi'_n(x)\beta'_n(x) - \psi'_n(x)\theta'_n(x))dx &= \int_a^b [(\varphi'_n(x) - \psi'_n(x))\beta'_n(x) + \psi'_n(x)(\beta'_n(x) - \theta'_n(x))] dx \\ &= \int_a^b (\varphi'_n(x) - \psi'_n(x))\beta'_n(x)dx + \int_a^b \psi'_n(x)(\beta'_n(x) - \theta'_n(x))dx \\ &\leq M \int_a^b (\varphi'_n(x) - \psi'_n(x))dx + M \int_a^b (\beta'_n(x) - \theta'_n(x))dx \\ &\leq M \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx + M \int_a^b (\beta_n(x) - \theta_n(x))dx. \end{aligned}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\beta_n(x) - \theta_n(x))dx = 0$ , le théorème des gendarmes permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi'_n(x)\beta'_n(x) - \psi'_n(x)\theta'_n(x))dx = 0$ . Ce qui prouve que  $fg$  est intégrable.

Pour terminer, dans le cas général notons  $m = \min \left\{ \inf_{x \in [a,b]} f(x), \inf_{x \in [a,b]} g(x) \right\}$ . alors les fonctions  $f - m$ ,  $g - m$  et  $(f - m)(g - m)$  sont positives, bornées et intégrables sur  $[a, b]$ . De plus  $fg = (f - m)(g - m) + m(f + g) - m^2$ , donc  $fg$  est intégrable comme somme de fonctions intégrables.

□

### Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées et intégrables sur  $[a, b]$ . Alors

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx.$$

**Preuve :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées et intégrables sur  $[a, b]$ . Soit  $t$  un réel quelconque. La fonction  $(f + tg)^2$  est intégrable et positive, donc son intégrale est positive. C'est-à-dire

$$\int_a^b (f(x) + tg(x))^2dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f(x))^2dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b (g(x))^2dx \geq 0.$$

Le polynôme  $P(t) = t^2 \int_a^b (g(x))^2dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2dx$  est positif pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , donc son discriminant est négatif ou nul. D'où

$$4 \left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \int_a^b f(x)^2dx \int_a^b g(x)^2dx \leq 0.$$

Ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz. □

## III.4 Exemples importants de fonctions intégrables

**Proposition 4**

Soit  $f$  est une fonction bornée et intégrable sur  $[a, b]$ . Si  $g$  est une fonction définie sur  $[a, b]$  est égale à  $f$  sauf sur un nombre finis de points, alors  $g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

**Preuve :** Comme  $f$  est égale à  $g$  sauf un nombre finis de points, il existe alors une subdivision  $\sigma = (x_k)_{k=0,\dots,n}$  de  $[a, b]$  telle que  $f = g$  sur chacun des intervalles  $]x_k, x_{k+1}[$ . Par conséquent la fonction  $f - g$  est donc nulle sur chacun des intervalles  $]x_k, x_{k+1}[$ , c'est donc une fonction en escalier et  $\int_a^b (f(x) - g(x))dx = 0$ . Puisque  $g = f - (f - g)$ ,  $g$  est donc intégrable et

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx.$$

□

**Proposition 5 (Intégrabilité des fonctions monotones)**

Toute fonction monotone sur un intervalle  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

**Preuve :** On peut supposer par exemple que  $f$  est croissante (sinon, on remplace  $f$  par  $-f$ ). Soit  $\varepsilon > 0$ . Considérons la subdivision régulière d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma = (x_k)_{0 \leq i \leq n}$  :

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

On construit les fonctions en escalier : pour tout  $x \in [x_{k-1}, x_k[$  avec  $(k \in \{1, \dots, n\})$ ,

$$\psi_n(x) = f(x_{k-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = f(x_k)$$

On a donc  $\psi \leq f \leq \varphi$  et

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x))dx = 0$ , et donc  $f$  est intégrable. □

**Corollaire 1**

Toute fonction monotone par morceaux sur  $[a, b]$  est intégrable.

Pour la preuve, on applique le résultat précédent et la proposition 4 □

### Proposition 6 (Intégrabilité des fonctions continues)

Toute fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

**Preuve :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème de Heine  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $\delta_n > 0$  tel que pour tous  $x, y \in [a, b]$ , on ait

$$|x - y| \leq \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}.$$

Soit  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision de  $[a, b]$  de pas inférieur à  $\delta_n$ .

Considérons les fonctions en escalier  $\psi$  et  $\varphi$  définies pour tout  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ , ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ), par

$$\psi_n(x) = f(x_k) - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = f(x_k) + \frac{1}{n}.$$

Pour tout  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ , on a  $|x - x_k| \leq \delta_n$ , donc  $|f(x) - f(x_k)| \leq \frac{1}{n}$ . Par conséquent  $\psi \leq f \leq \varphi$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \left( f(x_k) + \frac{1}{n} - (f(x_k) - \frac{1}{n}) \right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{2}{n} (b - a). \end{aligned}$$

On obtient donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n(x) - \psi_n(x)) dx = 0$ . Par conséquent  $f$  est intégrable. □

### Corollaire 2

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est intégrable.

Pour la preuve, on applique le résultat précédent et la proposition 4. De plus si  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  et  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  on note  $f_k$  le prolongement par continuité sur  $[x_k, x_{k+1}]$  de la restriction de  $f$  à  $]x_k, x_{k+1}[$  alors

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x) dx$$

**Proposition 7 (Première formule de la moyenne)**

Soient  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable et positive sur  $[a, b]$   $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

**Preuve :** En notant  $m$  et  $M$  le minimum et le maximum respectivement de  $f$ , on pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ . Comme  $g$  est positive, on déduit que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . D'où

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Si  $\int_a^b g(x)dx = 0$  alors  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , et l'égalité à démontrer est vraie pour tout  $c \in [a, b]$ .

Si  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$  alors

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe  $c \in [a, b]$

tel que  $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ . Ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 6**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ . En appliquant le résultat précédent à la fonction  $g$  constante égale à 1 sur  $[a, b]$ , on montre  $c \in [a, b]$  tel  $f(c)$  soit égale à la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  c'est-à-dire  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .

### III.5 Somme de Riemann

**Définition 8**

Soit  $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision de  $[a, b]$  et  $\xi_i$   $i = 1, \dots, n$  des nombres réels tels que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1} - x_i]$ .

On appelle somme de Riemann de  $f$  relativement à la subdivision  $\sigma$  et à la famille  $(\xi_i)$  le réel

$$R_\sigma(f, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

où  $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

---

**Remarque 7**

Lorsque  $f$  est une fonction en escalier sur  $[a, b]$  et que  $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ , on a exactement pour  $\xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[$ ,

$$R_\sigma(f, \xi) = \int_a^b f(x)dx.$$

**Théorème 7**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Soient  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une subdivision de  $[a, b]$  et  $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille de points de  $[a, b]$  tels que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

où  $h$  désigne le pas de la subdivision  $\sigma$ .

En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

**Preuve :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème de Heine  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $\delta_n > 0$  tel que pour tous  $x, y \in [a, b]$ , on ait

$$|x - y| \leq \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}.$$

Soit  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision de  $[a, b]$  de pas  $h \leq \delta_n$ . On a pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_k - x_{k-1} \leq \delta_n$ . D'où pour tout  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ,  $|x - \xi_k| \leq \delta_n$  et par conséquent,

$$|f(x) - f(\xi_k)| \leq \frac{1}{n}.$$

On a par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)dx \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))dx \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)| dx \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{n} dx \\
 &\leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{1}{n} \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{h}{n} \\
 \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) \right| &\leq h.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\xi_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

Pour le cas particulier, on considère la subdivision régulière d'ordre  $n$ ,  $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$  et  $\xi_k = x_k$  pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Le pas  $h = \frac{b-a}{n}$  tend vers 0 si et seulement si  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'où le résultat.  $\square$

### Exemple 7

Calculer les intégrales  $\int_0^1 x^2 dx$  et  $\int_0^1 x^3 dx$  à l'aide des sommes de Riemann.

En utilisant les sommes de Riemann appliquée à la fonction continue  $f : [0, 1] \mapsto x^2$  et à la subdivision régulière d'ordre  $n$ , on obtient :

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

De même, en appliquant les sommes de Riemann à la fonction continue  $f : [0, 1] \mapsto x^3$ , on obtient :

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

### Exercice 5

Soit  $x > 0$ .

1. Montrer que  $\sum_{k=1}^{n-1} e^{kx/n} = \frac{e^x - 1}{x}$ .
2. En déduire  $\int_0^x e^t dt$ .

## IV Notations et extension de $\int_a^b f(x)dx$

Dans tout ce qui précède nous avons défini l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  pour tous réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ . En fait, on peut s'affranchir de cette condition.

### Définition 9

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est localement intégrable sur  $I$  si elle intégrable sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .

### Définition 10

Soit  $f$  une fonction localement intégrable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in I$

- si  $a = b$ , on pose  $\int_a^b f(x)dx = 0$ .
- si  $a > b$ , on pose par convention :  $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ .

Avec cette convention, on obtient une version plus générale de la relation de Chasles.

### Propriété 7 (Égalité de Chasles version générale)

Si  $a, b, c$  sont trois réels quelconques d'un intervalle  $I$  et  $f$  une fonction localement intégrable sur  $I$  alors,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

### Définition 11 (Intégrale d'une fonction à valeur complexe)

Une  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes est intégrable sur  $[a, b]$  si seulement si sa partie réelle  $\Re(f)$  et sa partie imaginaire  $\Im(f)$  sont intégrables sur  $[a, b]$ . Dans ce cas on appelle intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  le nombre complexe noté  $\int_a^b f(x)dx$  défini par

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Re f(x)dx + i \int_a^b \Im f(x)dx.$$

## Intégrale de fonctions continues

### I Théorème fondamental

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Considérons une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I$  et localement intégrable sur  $I$ ; étant donné un point  $a$  de  $I$ , on définit la fonction  $F$  sur  $I$  par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in I. \quad (\text{Formule 1})$$

La relation donnée par (Formule 1) a un sens puisque  $f$  est intégrable sur l'intervalle fermé borné d'extrémités  $a$  et  $x$ .

Remarquons que  $F$  ne dépend de  $a$  qu'à une constante près; en effet, si  $b \in I$  et  $G(x) = \int_b^x f(t)dt$ , alors de l'égalité de Chasles, on a  $G(x) - F(x) = \int_b^a f(t)dt = cte.$

#### Théorème 8

1. La fonction  $F$  ainsi définie est continue sur  $I$ .
2. La fonction  $F$  est dérivable à droite, respectivement à gauche en tout point  $x_0$  de  $I$  où  $f$  est admet une limite à droite, respectivement une limite gauche et dans ce cas

$$F'_g(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x), \quad F'_d(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x).$$

3. Si la fonction  $f$  est continue en un point  $x_0$  qui n'est pas une borne de  $I$  alors la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $x_0$  et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

4. Si la fonction  $f$  est continue sur  $I$ , alors la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et vérifie  $F' = f$ ; plus généralement, si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$ , la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$  sur  $I$ .

## Preuve :

- Supposons dans un premier temps que  $I = [a, b]$  où  $b \in \mathbb{R}$  et  $b > a$ . Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$ , on a

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M|x - y|$$

où  $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$  dont l'existence est prouvée par l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b]$ . Ce qui prouve que  $f$  est uniformément continue donc continue sur  $I = [a, b]$ . Dans le cas général, soit  $x \in I$ . D'après ce qui précède  $f$  est continue sur le segment  $[a, x+1]$  si  $a < x$  ou sur  $[x-1, a]$  si  $a > x$ , donc  $f$  est continue en  $x$  et par conséquent  $f$  est continue sur  $I$ .

- Supposons  $x_0$  est un point de  $I$  en lequel la limite à droite de  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$  existe. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h > 0$  tel que pour tout  $t \in I$ ,

$$x_0 < t < x_0 + h \implies |f(t) - l| \leq \varepsilon.$$

Donc pour tout  $t \in I$  tel que  $x_0 < t < x_0 + h$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - l \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - l) dt}{h} \right| \\ &\leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - l| dt}{h} \\ &\leq \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt}{h} \\ \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - l \right| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = l$  et par conséquent  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  avec  $F'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

On démontre de la même manière que  $F$  est dérivable à gauche en  $x_0$  lorsque la limite à gauche de  $f$  en  $x_0$  existe.

- Si  $f$  est continue en  $x_0$  alors  $f$  admet des limites égales à droite et à gauche en  $x_0$ . D'après ce qui précède  $F$  est dérivable à droite et à gauche en  $x_0$ . De plus

$$F'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = F'_d(x_0).$$

Ainsi  $F$  est dérivable en  $x_0$  et  $F'(x_0) = f(x_0)$ . La continuité de  $f$  en  $x_0$  assure que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $x_0$ .

- C'est une conséquence de ce qui précède.

□

**Définition 12**

Une fonction  $F$  est appelée une primitive d'une  $f$  sur un intervalle  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

**Théorème 9 (Corollaire du théorème 8)**

Toute fonction *continue* sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

La preuve découle immédiatement point 4. du théorème 8 : si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , la fonction  $F$  définie sur  $I$  par :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in I.$$

où  $a \in I$ , est une primitive de  $f$  sur  $I$ , c'est même l'unique primitive de  $f$  s'annulant en  $a$  sur  $I$ .

**Remarque 8**

Si  $f$  est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  sans y être continue, elle ne possède pas de primitive sur  $I$  ; la fonction  $F$  définie par (Formule 1) n'est pas dérivable sur  $I$  tout entier.

**expression de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à l'aide de l'une de ses primitives****Théorème 10 (Théorème fondamental du calcul intégral)**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et si  $G$  est une primitive quelconque de  $f$  sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a), \text{ que l'on note } [G(x)]_a^b$$

**Preuve :** Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$ . La fonction  $h : x \mapsto \int_a^x f(x) dx - G(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  et sa dérivée vaut  $x \mapsto f(x) - G'(x) = 0$ . Elle est donc constante d'après le théorème des accroissements finis. En prenant ses valeurs en  $a$  et en  $b$ , on obtient :

$$h(a) = h(b) \implies -G(a) = \int_a^b f(x) dx - G(b).$$

D'où

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

□

---

A cause du lien entre les intégrales et les primitives, une primitive quelconque de  $f$ , continue sur un intervalle qu'il faut préciser, est notée

$$\int f(x)dx.$$

Il faut bien prendre garde au fait que, dans la notation  $\int_a^b f(x)dx$  la variable  $x$  est muette, alors qu'elle ne l'est pas dans l'écriture  $\int f(x)dx$  (que l'on appelle « intégrale indéfinie »).

Par exemple on écrit  $\int \sin x dx = -\cos x + c$  où  $c$  est une constante réelle pour dire que la fonction  $x \rightarrow -\cos x + c$  est une primitive de la fonction  $x \rightarrow \sin x$ .

## Nouvelles primitives

### Théorème 11 (Théorème de la bijection)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ .

Alors 1.  $f(I)$  est un intervalle (noté  $J$ )

2.  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J$

3. la bijection réciproque, notée  $f^{-1}$  est automatiquement continue de  $J$  sur  $I$   
et strictement monotone, de même variation que  $f$ .

De plus si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  tel que  $f'(a) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$  et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

## Fonction arc sinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

Par application du théorème de la bijection, la restriction de la fonction sinus sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  admet donc une fonction réciproque définie de  $[-1; 1]$  vers  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  qui est continue et strictement croissante.

Cette fonction est appelée arc sinus et notée  $\arcsin$ .

Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = \arcsin x$  signifie que  $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  et  $x = \sin y$ .

D'autre part pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$  ou  $x = -\frac{\pi}{2}$  et que  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  et  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ . Donc pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $\sin'(x) \neq 0$ . Par conséquent la fonction arc sinus est dérivable sur  $] -1, 1[$ .

Soit  $x \in ] -1, 1[$ .

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \quad (\text{car } \arcsin(x) \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \text{ et } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}) \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

La fonction  $\arcsin$  est donc une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  sur  $] -1, 1[$ .

## Fonction arc cosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

Par application du théorème de la bijection, la restriction de la fonction cosinus sur l'intervalle  $[0; \pi]$

admet donc une fonction réciproque définie de  $[-1; 1]$  vers  $[0; \pi]$  qui est continue et strictement décroissante.

Cette fonction est appelée arc cosinus et notée  $\arccos$ .

Pour  $x \in [-1, 1]$ ,  $y = \arccos x$  signifie que  $y \in [0; \pi]$  et  $x = \cos y$ .

D'autre part pour tout  $x \in [0; \pi]$ ,  $\cos'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$  ou  $x = 0$  et que  $\cos(\pi) = -1$  et  $\cos(0) = 1$ . Donc pour tout  $x \in ]0, \pi[$ , on a  $\cos'(x) \neq 0$ . Par conséquent la fonction arc cosinus est dérivable sur  $] -1, 1[$ .

Soit  $x \in ] -1, 1[$ .

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arcsin(x))} \\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} \quad (\text{car } \arccos(x) \in ]0, \pi[ \text{ et } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}) \\ \arccos'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

La fonction  $\arccos$  est donc une primitive de la fonction  $x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$  sur  $] -1, 1[$ .

## Fonction arc tangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Par application du théorème de la bijection, la restriction de la fonction tangente sur l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  admet donc une fonction réciproque définie de  $\mathbb{R}$  vers  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  qui est continue et strictement croissante.

Cette fonction est appelée arc tangente et notée  $\arctan$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y = \arctan x$  signifie que  $y \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $x = \tan y$ .

D'autre part pour tout  $x \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$ . Par conséquent la fonction arc tangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

La fonction  $\arctan$  est donc une primitive de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1 + x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Liste de primitives usuelles

Il ne faut pas perdre de vue que les primitives sont données à une constance  $c$  près.

Fonction $x \rightarrow f(x) =$	Fonction primitive $x \rightarrow F(x) =$	Intervalle
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty, 0[ \text{ ou } ]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{1-n} = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$] -\infty, 0[ \text{ ou } ]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha > 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln  \tan(x/2) $	$]k\pi; (k+1)\pi[ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln  \tan(x/2 + \pi/4) $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$
$chx$	$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
$shx$	$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
$1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$	$thx = \frac{shx}{chx}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right $	$] -\infty, -1[ \text{ ou } ]-1, 1[ \text{ ou } ]1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln  x + \sqrt{x^2-1} $	$] -\infty, -1[ \text{ ou } ]1, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln (x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$

## II Techniques d'intégration

### II.1 Changement de variable

#### Théorème 12 (Changement de variable)

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $\phi : I \rightarrow J$  une application continûment dérivable strictement monotone (croissante ou décroissante) et  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors, quelque soient  $\alpha, \beta \in I$ , on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(y)dy. \quad (2.1)$$

**Preuve :**

Considérons les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2$  définies sur  $[a, b]$  par :

$$\psi_1(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx \text{ et } \psi_2(t) = \int_a^t f(\varphi(y))\varphi'(y)dy; \quad \forall t \in [a, b].$$

Comme la fonction  $(f \circ \varphi)\varphi'$  est continue sur  $[a, b]$ , on déduit du théorème fondamental de l'analyse que la fonction  $\psi_2$  est dérivable sur  $[a, b]$  et on a :

$$\forall t \in [a, b], \psi_2'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

La fonction  $\psi_1$  est la composée des fonctions  $t \mapsto \int_{\varphi(a)}^t f(x)dx$  et de  $\varphi$  qui sont toutes les deux dérivables respectivement sur  $\varphi([a, b])$  et  $[a, b]$ , donc  $\psi_1$  est dérivable sur  $[a, b]$  et on a

$$\forall t \in [a, b], \psi_1'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Comme  $\forall t \in [a, b], \psi_1'(t) = \psi_2'(t)$ , donc il existe une constante  $c$  telle que  $\forall t \in [a, b], \psi_1(t) - \psi_2(t) = c$ . En particulier pour  $t = a$ , on a  $c = \psi_1(a) - \psi_2(a) = 0$  et par suite  $\psi_1 = \psi_2$ . Par suite l'égalité  $\psi_1(b) = \psi_2(b)$  donne la formule voulue.

□

Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{x}$$

donc  $x = u^2$  et  $dx = 2udu$  et  $x = 1 \Rightarrow u = 1$ ,  $x = 4 \Rightarrow u = 2$ .

On en déduit la valeur de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx &= \int_1^2 \frac{1 - u}{u} \cdot 2 \cdot u \cdot du \\
 &= \int_1^2 (2 - 2 \cdot u) \cdot du \\
 &= \left[ 2 \cdot u - u^2 \right]_1^2 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

## II.2 Intégration par parties

### Théorème 13 (Intégration par parties)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continûment dérivables sur  $I$ . Alors quels que soient  $a, b \in I$  on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt. \quad (2.2)$$

**Preuve** : les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $[a, b]$  et on a  $(uv)' = u'v + uv'$ . Donc  $uv$  est une primitive de  $u'v + uv'$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  étant continûment dérivables sur  $[a, b]$ , la fonction  $u'v + uv'$  est continue sur  $[a, b]$  et le théorème fondamental de l'analyse donne alors

$$\int_a^b [u(t)v'(t) + u'(t)v(t)]dt = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Et enfin, par linéarité

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

□

### Exemple 8

Calculons l'intégrale  $\int_0^1 xe^x dx$ .

**Solution** : On intègre par parties en posant :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\
 v'(x) &= e^x & v(x) &= e^x
 \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - e + 1 \\ \int_0^1 xe^x dx &= 1.\end{aligned}$$

### Exemple 9

Calculer la primitive de la fonction suivante :

$$\int \frac{x - x \ln x - 1}{x(\ln x)^2} dx$$

**Solution :** Intégrons par parties en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{1}{x(\ln x)^2} \implies u = -\frac{1}{\ln x} \\ v = x - x \ln x - 1 \implies v' = -\ln x \end{array} \right.$$

En appliquant la formule de l'intégration par parties  $\int u'.v = u.v - \int u.v'$  on obtient rapidement la primitive recherchée :

$$\begin{aligned}\int \frac{x - x \ln x - 1}{x(\ln x)^2} dx &= -\frac{x - x \ln x - 1}{\ln x} - \int dx \\ &= -\frac{x - x \ln x - 1}{\ln x} - x \\ &= \frac{1 - x}{\ln x}\end{aligned}$$

## II.3 Primitive de fonction rationnelle

Une fonction rationnelle  $f$  admet des primitives sur tout intervalle sur lequel le dénominateur de  $f$  ne s'annule pas. On peut les obtenir à partir de la décomposition en éléments simples de  $f$ .

Toutefois au préalable on peut regarder si  $f$  n'est pas de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  à un coefficient multiplicatif constant près.

Dans tout ce qui va suivre et dans le but d'alléger les écritures, les constantes d'intégration ne figurent pas et sont à ajouter par le lecteur.

La décomposition en éléments simples de  $f$  s'écrit

$$\begin{aligned}f &= E + \left( \frac{a_{11}}{X - x_1} + \dots + \frac{a_{1\alpha_1}}{(X - x_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \left( \frac{a_{p1}}{X - x_p} + \dots + \frac{a_{p\alpha_p}}{(X - x_p)^{\alpha_p}} \right) \\ &\quad + \left( \frac{b_{11}X + c_{11}}{X^2 + u_1X + v_1} + \dots + \frac{b_{1\beta_1}X + c_{1\beta_1}}{(X^2 + u_1X + v_1)^{\beta_1}} \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left( \frac{b_{q1}X + c_{q1}}{X^2 + u_qX + v_q} + \dots + \frac{b_{q\beta_q}X + c_{q\beta_q}}{(X^2 + u_qX + v_q)^{\beta_q}} \right).\end{aligned}$$

On est amené à intégrer des fonctions polynômes, des éléments simples de première espèce et des éléments simples de deuxième espèce .

**1) Intégration d'une fonction polynôme.** On ne s'attarde pas. Tout le monde sait intégrer une fonction polynôme !

**2) Intégration des éléments simples de première espèce** Un élément simple de première espèce est de la forme  $\frac{A}{(x-\alpha)^n}$  où  $A$  est une constante réelle et  $n$  un entier naturel non nul. On a

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n} dx = \begin{cases} A \ln|x-\alpha| & \text{si } n=1 \\ \frac{-A}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} & \text{si } n>1 \end{cases}$$

**3) Intégration des éléments simples de deuxième espèce** Les éléments simples de deuxième espèce sont de la forme :  $\frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$  avec  $\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles et  $n$  un entier naturel non nul.

En remarquant que  $Ax+B = \frac{A}{2}(2x+\alpha) + B - \frac{A}{2}\alpha$ , on obtient

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx + \left(B - \frac{A}{2}\alpha\right) \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx.$$

La quantité  $\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx$  est de la forme  $\int \frac{u'(x)}{u^n(x)} dx$  que l'on sait intégrer.

Pour la quantité  $\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx$ , on met  $x^2+\alpha x+\beta$  sous forme canonique et on obtient :

$$x^2 + \alpha x + \beta = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4\beta - \alpha^2}{4} = \frac{4\beta - \alpha^2}{4} \left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}\right)^2 + 1\right]$$

En effectuant le changement de variable  $t = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}$  dans  $\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx$ , on est ramené au calcul de

$$I_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

On reconnaît  $I_1 = \arctan(t)$  ! Par une intégration par parties de  $I_n$ , on obtient

$$I_{n+1} = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

En effet, posons  $u(t) = (t^2+1)^{-n}$  et  $v'(t) = 1$ , donc  $u'(t) = \frac{-2nt}{(t^2+1)^{n+1}}$  et  $v(t) = 1$ . Ainsi

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt &= \int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^n} dt \\ &= I_n - I_{n+1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}.$$

$$\text{D'où } I_{n+1} = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

### Remarque 9

Pour tout nombre réel  $a \neq 0$ , on a :

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + k$$

où  $k$  est une constante réelle.

### Exemple 10

Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1)  $x \rightarrow f(x) = \frac{24x^3 + 18x^2 + 10x - 9}{(3x - 1)(2x + 1)^2}$  sur  $] -1/2, 1/3[$    et   2)  $x \rightarrow g(x) = 2 \cdot x \mapsto \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution :**

1. La décomposition en éléments simples donne pour tout  $x \in ] -1/2, 1/3[$

$$f(x) = a + \frac{b}{3x - 1} + \frac{c}{2x + 1} + \frac{d}{(2x + 1)^2}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels à déterminer. On trouve :  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$  et  $d = 5$ , d'où

$$f(x) = 2 + \frac{-1}{3x - 1} + \frac{1}{2x + 1} + \frac{5}{(2x + 1)^2}.$$

On en déduit que une primitive de  $f$  sur  $] -1/2, 1/3[$  est la fonction

$$x \rightarrow F(x) = 2x - \frac{1}{3} \ln(-3x + 1) + \frac{1}{2} \ln(2x + 1) - \frac{5}{2} \frac{1}{2x + 1} + k$$

où  $k$  est une constante réelle.

2. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur :

$$\frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

On a  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \ln(x^2 + x + 1)$ . En remarquant que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ , par le changement de variable  $u = x + \frac{1}{2}$ , on obtient :

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement, une primitive de la fonction  $g$  est la fonction :

$$x \rightarrow G(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + k$$

où  $k$  est une constante réelle.

## II.4 Primitives d'une fonction rationnelle en cos et sin

Soit  $R(X, Y)$  une fonction rationnelle « à deux indéterminées » (c'est-à-dire que un quotient de sommes de monômes de la forme  $aX^rY^s$ ). On cherche à calculer les primitives  $\int R(\cos(x), \sin(x))dx$  sur des intervalles bien définis.

**1) Cas où  $R$  est un polynôme** Par linéarité de l'intégrale, on est ramené au calcul de  $\int \cos^p x \sin^q x dx$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels..

- si  $p$  (respectivement  $q$ ) est impair, on peut poser  $t = \sin x$  (respectivement  $t = \cos x$ ) pour se ramener à la primitive d'un polynôme ;

- si  $p$  et  $q$  sont pairs, on linéarise par l'intermédiaire des exponentielles complexes (formule de Moivre) ou de formules de trigonométrie.

### Exemple 11

Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1). } x \mapsto \sin^5 x \quad \mathbf{2). } x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$$

#### Solution :

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x$$

En faisant le changement de variable  $t = \cos x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx \\ &= \int (1 - t^2)^2 (-dt) \\ &= \int (-t^4 + 2t^2 - 1) dt \\ \int \sin^5 x dx &= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 - t \\ \int \sin^5 x dx &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x. \end{aligned}$$

Une primitive de  $x \mapsto \sin^5 x$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + k$  où  $k$  est une constante réelle.

2. On va linéariser l'expression  $\cos^4 x \sin^2 x$  en utilisant les formules de Moivre :

$$\begin{aligned} \cos^4 x \sin^2 x &= \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \cdot \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + e^{-i4x} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6) \cdot \left( -\frac{1}{2^2} \right) (e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) \\ &= -\frac{1}{2^6} (e^{i6x} + e^{-i6x} + 2e^{i4x} + 2e^{-i4x} - e^{i2x} - e^{-i2x} - 4) \\ &= -\frac{1}{2^6} (2\cos(6x) + 4\cos(4x) - 2\cos(2x) - 4x). \end{aligned}$$

Une primitive de  $x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$  sur  $\mathbb{R}$  est

$$x \mapsto \frac{-1}{192} \sin(6x) - \frac{1}{64} \sin(4x) + \frac{1}{64} \sin(2x) + \frac{x}{16} + k$$

où  $k$  est une constante réelle.

**2) Méthode générale :** Si  $x \in ]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ) alors le changement de variable  $t = \tan \frac{x}{2}$  dans  $\int R(\cos(x), \sin(x)) dx$  nous ramène à la primitive d'une fonction rationnelle.

Rappelons qu'en posant  $t = \tan \frac{x}{2}$ , on a

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

---

**Exemple 12**

Calculer l'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x}$ .

**Solution :**

On fait le changement de variable  $u = \tan(x/2)$ , d'où  $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ ,  $x = 0 \Rightarrow u = 0$ ,  $x = \pi/2 \Rightarrow u = 1$  et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2 + u + 1} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x} &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

**3) Règles de Bioche :** On calcule  $\int R(\cos x, \sin x)dx$  en effectuant un changement de variable selon les règles suivantes : si  $R(\sin x, \cos x)dx$  est invariant quand on change

- $x$  en  $\pi - x$ , alors on effectue le changement de variable  $\sin x = t$
- $x$  en  $-x$ , alors on effectue le changement de variable  $\cos x = t$
- $x$  en  $\pi + x$ , alors on effectue le changement de variable  $\tan x = t$

Exemple :

Calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2 - 5\sin(x) + 6} dx$$

Pour convertir la fraction rationnelle en  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  en une fraction rationnelle en  $u$  il faut faire un changement de variable. Comme la fonction à intégrer est invariante quand on remplace  $x$  par  $\pi - x$  (règle de Bioche), on effectue alors le changement de variable  $u = \sin(x)$  :

$$u = \sin(x) \implies du = \cos(x) dx$$

Après le changement de variable l'intégrale devient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2 - 5\sin(x) + 6} dx = \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du$$

Il nous faut maintenant intégrer une fraction rationnelle en  $u$ . Pour cela on commence par la décomposer en éléments simples. La forme de la décomposition en éléments simples est :

$$f(u) = \frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{a}{u - 2} + \frac{b}{u - 3},$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels à déterminer. On a :

$$a = \lim_{u \rightarrow 2} (u - 2)f(u) = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{1}{u - 3} = -1$$

et

$$b = \lim_{u \rightarrow 3} (u - 3)f(u) = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{1}{u - 2} = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{1}{u - 3} - \frac{1}{u - 2}.$$

Nous pouvons maintenant intégrer directement les deux fractions obtenues qui sont des éléments simples de première espèce :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 5u + 6} du &= \int_0^1 \left( \frac{1}{u - 3} - \frac{1}{u - 2} \right) du \\ &= \int_0^1 \frac{1}{u - 3} du - \int_0^1 \frac{1}{u - 2} du \\ &= \left[ \ln |u - 3| \right]_0^1 - \left[ \ln |u - 2| \right]_0^1 \\ &= \left[ \ln \left| \frac{u - 3}{u - 2} \right| \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On en déduit la valeur recherchée de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2 - 5 \sin(x) + 6} dx = \ln \frac{4}{3}$$

### Exemple 13

Calculer l'intégrale  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2 t} dt$ .

**Solution :** par la règle de Bioche, on fait le changement de variable  $u = \cos t$ , de sorte que  $du = -\sin t dt$ ,  $t = 0 \implies u = 1$  et  $t = \pi/4 \implies u = \sqrt{2}/2$ . D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2 t} dt &= - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1 - u^2}{1 + u^2} du \\ &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1 - u^2}{1 + u^2} du \\ &= - \int_{\sqrt{2}/2}^1 du + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{u^2 + 1} du \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

## II.5 Primitives d'une fonction rationnelle en $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$

Soit  $R(X, Y)$  une fonction rationnelle « à deux indéterminées ». On cherche à calculer les primitives  $\int R(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$ .

- Le cas d'un polynôme en  $\operatorname{ch}(x)$  et  $\operatorname{sh}(x)$  est similaire à celui des polynômes en cos et sin.
- Méthode générale :

Le changement de variable  $t = e^x$  dans  $\int R(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))dx$  nous ramène à la primitive d'une fonction rationnelle.

Rappelons qu'en posant  $t = e^x$ , on a

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1+t^2}{2t}; \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{t^2-1}{2t}; \quad \operatorname{th}(x) = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

### Exemple 14

Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution :**

Faisons le changement de variable  $u = e^x$  dans  $\int \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}dx$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}dx &= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}dx \\ &= \int \frac{2u}{1+u^2}du \\ &= 2 \arctan(u) \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}dx = \arctan(e^x).$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \arctan(e^x) + k$  où  $k$  est une constante réelle.

- Règle de Bioche :

Elles s'appliquent, en remplaçant au préalable  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$  respectivement par  $\cos$ ,  $\sin$ , puis en appliquant les règles précédentes à la nouvelle intégrale obtenue. Si elles conduisent au changement de variable  $u = \cos x$  (respectivement  $u = \sin x$ , respectivement  $u = \tan x$ ), c'est qu'on peut poser, dans l'intégrale initiale,  $u = \operatorname{ch}(x)$  (respectivement  $u = \operatorname{sh}(x)$ , respectivement  $u = \operatorname{th}(x)$ )

### Exemple 15

Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{(1+\operatorname{sh}(x)) \operatorname{ch}(x)}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Solution :**

Faisons le changement de variable  $u = \operatorname{sh}(x)$  dans  $\int \frac{1}{(1+\operatorname{sh}(x)) \operatorname{ch}(x)}dx$ . Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+\operatorname{sh}(x)) \operatorname{ch}(x)}dx &= \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} \\ &= \int \frac{-u/2+1/2}{u^2+1}du + \int \frac{1/2}{1+u}du \\ &= \frac{-1}{4} \int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{1}{2} \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{2} \ln|1+u| \\ &= \frac{-1}{4} \ln(u^2+1) + \frac{1}{2} \arctan(u) + \frac{1}{2} \ln|1+u| \\ &= \frac{-1}{2} \ln(\operatorname{ch}(x)) + \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{sh}(x)| \end{aligned}$$

Une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{(1+\operatorname{sh}(x)) \operatorname{ch}(x)}$  sur  $\mathbb{R}_+$  est  $x \mapsto \frac{-1}{2} \ln(\operatorname{ch}(x)) + \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{sh}(x)| + k$  où  $k$  est une constante réelle.

## II.6 Intégrale abélienne

Soit  $R(X, Y)$  une fonction rationnelle à deux indéterminées.

**1) Primitives de  $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ , où  $n$  est un entier tel que ( $n \geq 2$  et  $a, b, c$  et  $d$  des réels vérifiant  $ad - bc \neq 0$ ).** Le changement de variable  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  conduit à intégrer une fonction rationnelle en  $t$

Exemple : Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x-1}}$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x-1}}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ , donc elle y admet des primitives. Effectuons le changement de variable  $t = \sqrt{x-1}$  dans  $\int \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx$  :

$$t = \sqrt{x-1} \iff t^2 = x-1, \text{ d'où } 2tdt = dx, \text{ par suite}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{2tdt}{t^2 + t + 1} \\ &= \int \frac{2t+1}{t^2 + t + 1} dt - \int \frac{1}{t^2 + t + 1} dt \\ &= \ln(t^2 + t + 1) - \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt \\ &= \ln(t^2 + t + 1) - \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt \\ &= \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (\text{on a posé } u = \frac{2t+1}{\sqrt{3}}) \\ &= \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(u) + c \\ &= \ln(t^2 + t + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c \\ &= \ln(x-1 + \sqrt{x-1} + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right) + c \\ \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} dx &= \ln(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}\right) + c; \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**2) Primitives de  $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ , où  $a, b$  et  $c$  tels que  $b^2 - 4ac > 0$ .** En utilisant la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  et par un changement de variable approprié on est amené à l'une des primitives suivantes  $\int R\left(t, \sqrt{1+t^2}\right) dt$ ,  $\int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt$  et  $\int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt$

- Pour  $\int R\left(t, \sqrt{1+t^2}\right) dt$ , on fait le changement de variable  $t = sh(u)$  et on obtient ainsi une primitive de fonction rationnelle

- Pour  $\int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt$ , on fait le changement de variable  $t = \sin(u)$  ou  $t = \cos(u)$  et on obtient ainsi une primitive de fonction rationnelle

- Pour  $\int R(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt$ , on fait le changement de variable  $t = ch(u)$  si  $t \geq 1$  ou  $t = -ch(u)$  si  $t \leq -1$  et on obtient ainsi une primitive de fonction rationnelle

Remarque :

Lorsque que  $a > 0$ , changement de variable  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$  ou  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -x\sqrt{a} + t$  nous ramène égalité à la primitive d'une fonction rationnelle.

### Exemple 16

Calculer l'intégrale  $\int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$ .

**Solution :** On sait que pour tout réel  $x$ ,

$$-x^2 + 2x + 8 = -(x^2 - 2x - 8) = -((x-1)^2 - 9) = 9 - (x-1)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx &= \int_1^{5/2} \sqrt{9 - (x-1)^2} dx \\ &= 3 \int_1^{5/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2} dx \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $u = \frac{x-1}{3}$  dans l'intégrale  $\int_1^{5/2} \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2} dx$ , on a  $dx = 3du$ ,  $x = 1 \Rightarrow u = 0$ ,  $x = \frac{5}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$  et

$$\int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - u^2} du.$$

Pour terminer, posons  $u = \sin t$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 - u^2} du \\ &= 9 \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\ &= 9 \int_0^{\pi/6} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos(2t)) dt \\ &= \frac{9}{2} \left[ t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/6} \\ \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx &= \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

### Exemple 17

Calculer l'intégrale  $\int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx$ .

**Solution :** On a

$$\int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = 2 \int_1^2 x \sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} dx.$$

En posant  $u = \frac{x-1}{2}$ , on obtient

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx = 2 \int_1^2 x\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}dx = 4 \int_0^{1/2} (2u+1)\sqrt{u^2 + 1}du.$$

Posons maintenant  $u = \operatorname{sh}(t)$ , on obtient :

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx = 4 \int_0^{1/2} (2u+1)\sqrt{u^2 + 1}du = 4 \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} (2\operatorname{sh}(t) + 1)\sqrt{\operatorname{sh}^2(t) + 1}\operatorname{ch}(t)dt.$$

D'où

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx = 8 \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} \operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}^2(t)dt + 4 \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} \operatorname{ch}^2(t)dt.$$

Comme  $2\operatorname{ch}^2(t) = 1 + \operatorname{ch}(2t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx &= 8 \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} \operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}^2(t)dt + 4 \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} \operatorname{ch}^2(t)dt \\ &= \frac{8}{3} [\operatorname{ch}^3(t)]_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} + \int_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} (2 + 2\operatorname{ch}(2t))dt \\ &= \frac{8}{3} \operatorname{ch}^3(\arg \operatorname{sh}(1/2)) - \frac{8}{3} + [2t + \operatorname{sh}(2t)]_0^{\arg \operatorname{sh}(1/2)} \\ &= \frac{8}{3} \operatorname{ch}^3(\arg \operatorname{sh}(1/2)) - \frac{8}{3} + 2\arg \operatorname{sh}(1/2) + \operatorname{sh}(2\arg \operatorname{sh}(1/2)). \end{aligned}$$

On va simplifier ce résultat :

$$\operatorname{ch}^3(\arg \operatorname{sh}(1/2)) = (1 + \operatorname{sh}^2(\arg \operatorname{sh}(1/2)))^{3/2} = \frac{5\sqrt{5}}{3},$$

$$\operatorname{sh}(2\arg \operatorname{sh}(1/2)) = 2\operatorname{sh}(\arg \operatorname{sh}(1/2))\operatorname{ch}(\arg \operatorname{sh}(1/2)) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\arg \operatorname{sh}(1/2))} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et

$$\arg \operatorname{sh}(1/2) = \ln \left( \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Finalement,

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2 - 2x + 5}dx = 2 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \frac{13\sqrt{5}}{6} - \frac{8}{3}.$$



# **Deuxième partie**

## **Équations différentielles**



---

# Introduction et généralités

C'est au début du dix-septième siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles.

Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du dix-septième siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernouilli notamment) furent découvertes.

Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...)

De nombreux phénomènes physiques continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale amènent à rechercher une fonction vérifiant une relation entre elle-même et ses dérivées successives. Une telle relation s'appelle une équation différentielle. L'ordre de cette équation étant l'ordre maximum de la dérivée intervenant dans l'équation.

Par exemple en électricité, l'équation :  $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$ .

L'inconnue est la fonction  $i : t \mapsto i(t)$  et une condition initiale permet de la définir de façon unique. Dans la suite, la fonction inconnue sera notée  $f : t \mapsto f(t)$ . Elle sera définie et continue sur un intervalle  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (ou dans  $\mathbb{C}$ ).

Notons qu'il existe en réalité très peu d'équations différentielles que l'on sait résoudre de façon exactes. Elles sont en général issues de modèles simples, qui donnent une première idée du comportement de l'objet étudié. Ces équations sont donc triées en différentes classes. Chaque méthode étudier ne s'appliquera qu'à certains types d'équations.

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP).

Une EDO est une équation exprimée sous la forme d'une relation

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(p)}(t)) = g(t)$$

dont les inconnues sont une fonction  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et son intervalle de définition  $I$  dans laquelle cohabitent à la fois  $y$  et ses dérivées  $y', y'', \dots, y^{(p)}$  ( $p$  est l'ordre de l'équation). Si la fonction  $g$ , appelée second membre de l'équation, est nulle, on dit que l'équation en question est homogène.

## Exemple 18

L'équation suivante est une équation différentielle du second ordre

$$\sin ty''(t) + 3t^5 y'(t)y^3(t) + y(t) = 2t^2 + 1$$

dans laquelle le second membre est la fonction  $g$  définie par  $g(t) = 2t^2 + 1$ .

Remarquons que par abus de langage (je dirai par paresse) l'équation ci dessus s'écrit simplement

$$\sin ty'' + 3t^5 y'y^3 + y = 2t^2 + 1$$

où on a ignoré la variable  $t$  dans les fonctions  $y''$ ,  $y'$  et  $y$ .

Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , qui satisfont l'équation (on dit aussi intégrer l'équation différentielle).

### Exemple 19

Résoudre l'équation différentielle  $y' = -y$  signifie chercher toutes les fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in I$   $f'(x) = -f(x)$ .

On peut vérifier que toutes les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -ce^{-x}$  où  $c$  est une constante réelle sont solutions de cette équation.

### Définition 13

Par le terme *solution générale* d'une équation différentielle on désigne l'ensemble des solutions. L'une des solutions de l'équation différentielle sera appelée *solution particulière*. On appelle *courbes intégrales* d'une équation différentielle les courbes représentatives des solutions de l'équation.

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés, comme le montre les deux exemples suivants.

→ Exemple (Thermodynamique) :

Considérons un corps ponctuel de masse  $m$  et de température interne  $T$  situé dans un environnement de température constante  $T_e$ . Le transfert de chaleur entre le corps et l'extérieur peut être décrit par la loi de Stefan-Boltzmann

$$v(t) = \sigma\gamma S(T^4(t) - T_e^4),$$

où  $t$  est la variable temporelle,  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann,  $\gamma$  est la constante d'émissivité du corps,  $S$  sa surface et  $v$  est la vitesse de transfert de chaleur. Le taux de variation de l'énergie  $E(t) = mCT(t)$  (où  $C$  est la capacité calorifique du corps) est égal, en valeur absolue, à la vitesse  $v$ . Par conséquent, en posant  $T(0) = T_0$ , le calcul de  $T(t)$  nécessite la résolution de l'équation différentielle

$$T'(t) = -\frac{v(t)}{mC}.$$

→ Considérons le circuit électrique de la figure 2.1. On veut calculer la fonction  $v(t)$  la chute de potentiel aux bornes du condensateur  $C$  sachant que l'interrupteur  $I$  a été fermé à  $t = 0$ .

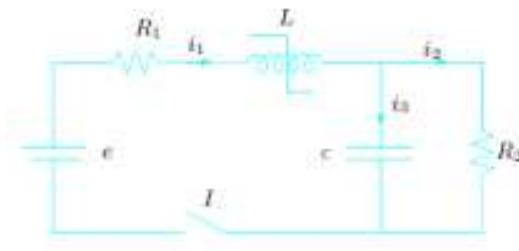


FIGURE 2.1 –

On suppose que l'inductance  $L$  s'exprime comme une fonction explicite de l'intensité du courant  $i$ , c'est-à-dire  $L = L(i)$ . La loi d'Ohm donne

$$e - \left( i_1(t)L(i_1(t)) \right)' = i_1(t)R_1 + v(t)$$

où  $R_1$  est une résistance. En supposant que le courant est dirigé comme indiqué sur la Figure 1, on trouve, en dérivant par rapport à  $t$  la loi de Kirchhoff  $i_1 = i_2 + i_3$  et en remarquant que  $i_3 = Cv'(t)$  et  $i_2 = \frac{v(t)}{R_2}$ , l'équation supplémentaire

$$i'_1(t) = Cv''(t) + \frac{1}{R_2}v'(t).$$

On a donc trouvé un système de deux équations différentielles dont la résolution permet de décrire le comportement en temps des deux inconnues  $i_1$  et  $v$ . La seconde équation est d'ordre deux.



# Équations différentielles d'ordre 1

## I Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables

### I.1 Définition et méthode de résolution

#### Définition 14

Une équation différentielle à variables séparables d'ordre 1 est équation différentielle de la forme

$$f(y(x))y'(x) = g(x)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions données continues sur un même intervalle  $I$ .

Pour résoudre l'équation différentielle à variables séparables  $f(y(x))y'(x) = g(x)$ , en pratique, on pose  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$  et on écrit l'équation  $f(y(x))y'(x) = g(x)$  sous la forme

$$f(y)dy = g(x)dx,$$

puis on intègre formellement les deux membres puis

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx,$$

pour obtenir  $F(y) = G(x) + C$  et exprimer  $y$  en fonction de  $x$ ,  $F$  et  $G$  étant des primitives respectives de  $f$  et  $g$ .

#### Remarque 10

On trouve en réalité une infinité de solutions. Une solution unique est déterminée à partir de conditions initiales connues qui consiste à poser  $y(x_o) = \alpha$ .

---

**Exemple 20**Résoudre  $y' = e^{x+y}$ 

Cette équation différentielle est à variables séparables.

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x+y} \\
\frac{y'}{e^y} &= e^x \\
\frac{1}{e^y} dy &= e^x dx \\
\int \frac{1}{e^y} dy &= \int e^x dx \\
-e^{-y} &= e^x + c \\
-y &= \ln(-e^x - c) \\
y &= \ln\left(\frac{1}{-e^x - c}\right)
\end{aligned}$$

Les solutions  $y$  sont valables sur des intervalle  $I_c$  telles que pour tout  $x \in I_c$   $x < \ln(-c)$  où  $c$  est une constante réelle strictement positive.**Exemple 21**Résoudre sur  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

avec  $y(e) = 1$ .

On a :

$$\begin{aligned}
xy' \ln x &= (3 \ln x + 1)y \\
\frac{y'}{y} &= \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} \\
\frac{1}{y} dy &= \frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x} dx \\
\int \frac{1}{y} dy &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}\right) dx \\
\ln |y| &= 3 \ln |x| + \ln |\ln x| + c \\
\ln |y| &= \ln(e^c x^3 |\ln x|) \\
y &= e^c x^3 |\ln x| \\
y &= kx^3 \ln x.
\end{aligned}$$

Comme  $y(e) = 1$ , on a  $ke^3 = 1$  d'où  $k = e^{-3}$ . Par suite la solution de l'équation différentielle vérifiant  $y(e) = 1$  est la fonction  $y(x) = e^{-3}x^3 \ln x$ .

## I.2 Équations apparentées aux équations séparables

**Équations différentielles du type  $y' = f(\frac{y}{x})$  où  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ .**Pour résoudre ce type d'équation différentielle le changement de variable  $u = \frac{y}{x}$ , nous ramène à une équation différentielle à variable séparable  $xu' = f(u) - u$ .**Exemple 22**Résoudre l'équation différentielle  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y}$ .On la résout sur un intervalle  $I$  ne contenant pas 0. Comme  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{1+y/x}{1-y/x}$ , posons  $u = \frac{y}{x}$ . On obtient donc  $xu' = \frac{1+u}{1-u}$ .

**Équations différentielles du type  $y' = f(ax + by)$  où  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ .**

Pour résoudre ce type d'équation différentielle le changement de variable  $u = ax + by$ , nous ramène à une équation différentielle à variable séparable  $u' = a + bf(u)$ .

### Exemple 23

Résoudre l'équation différentielle  $y' = (x + 4y)^2$ .

En posant comme indiqué ci-dessus  $u = x + 4y$ , on obtient donc  $u' = 1 + 4u^2$ .

## II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### Définition 15

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions définies et continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On suppose de plus que la fonction  $a$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$ .

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x). \quad (\text{E})$$

l'équation différentielle

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \quad (\text{E}_h)$$

est appelée équation différentielle homogène associée à  $(\text{E})$  ou équation sans second membre associée à  $(\text{E})$ .

### Exemple 24

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$2x(1+x)y' + (1+x^2)y = xe^x$$

Dans cet exemple, les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définies sur un intervalle  $I$  (qui est soit  $]-\infty, -1[$ , soit  $] -1, 0[$ , soit  $]0, +\infty[$ ) par :

$$\rightarrow a(x) = 2x(1+x), b(x) = -1 + x^2 \text{ et } c(x) = xe^x.$$

### II.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Soit  $(\text{E}_h) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ , une équation homogène. Cette équation différentielle est à variables séparables que l'on résoud comme dans la section précédente. En résumé, on a le théorème suivant :

### Théorème 14

$a$  et  $b$  étant des fonctions continues sur  $I$  avec  $a$  ne s'annulant pas sur  $I$ , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \quad (\text{E}_h)$$

est l'ensemble des fonctions  $y$  définies sur  $I$  par  $y(x) = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$  où  $k$  est une constante réelle.

### Remarque 11

Dans le théorème 14, la notation  $\int \frac{a(x)}{b(x)}dx$  désignera une primitive de la fonction  $\frac{a}{b}$  dont la variable sera toujours de la manière que celle de  $y$ .

### Exemple 25

Résoudre l'équation différentielle  $y' - y \sin x = 0$ .

On va résoudre cette équation sur  $\mathbb{R}$  : ici  $a(x) = 1$  et  $b(x) = -\sin x$ .

On a :

$\frac{b(x)}{c(x)} = -\sin x$  donc  $\int \frac{b(x)}{a(x)}dx = -\int \sin x dx = \cos x$ . La solution de l'équation différentielle est

$$y(x) = ke^{-\cos x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

## II.2 Solution particulière de l'équation différentielle ( $E$ )

### Définition 16

On appelle solution particulière de l'équation différentielle  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$  toute fonction  $y$  vérifiant cette équation.

On notera  $y_p$  une solution particulière.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle de la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x), \quad t \in I, \tag{E}$$

où  $a, b, c: I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions données,  $a$  ne s'annulant pas sur  $I$ , on utilise la méthode dite de variation de la constante :

La solution générale de l'équation homogène associée ( $E_h$ ) que nous noterons  $y_h$  est donnée par

$$y_h = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La méthode de la variation de la constante consiste à considérer une solution particulière  $y_p$  de la forme

$$y_p = k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

où  $k: I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable sur  $I$ .

Comme  $y_p$  est une solution de l'équation différentielle (E), on a  $a(x)y'_p(x) + b(x)y_p(x) = c(x)$  et

$y'_p(x) = k'(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} - \frac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$ . En remplaçant ,on obtient

$$\begin{aligned} a(x) \left[ k'(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} - \frac{b(x)}{a(x)}k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \right] + b(x)k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} &= c(x) \\ a(x)k'(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} &= c(x) \\ k'(x) &= \frac{c(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}. \end{aligned}$$

En intégrant  $k'$ , on trouve  $k$  et enfin  $y_p$ . En résumé, on a

### Théorème 15

$a, b$  et  $c$  étant des fonctions continues sur  $I$  avec  $a$  ne s'annulant pas sur  $I$ , une solution particulière de l'équation différentielle

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad (E)$$

est donnée par les formules

$$y_p = k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \quad \text{où } k \text{ est une fonction vérifiant } k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \quad \forall x \in I.$$

### Exemple 26

Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle  $y' - y \sin x = \sin x$ .

→ d'après l'exemple 25, la solution de l'équation homogène associée est

$$y_h = ke^{-\cos x}$$

→ D'après le théorème 15 une solution particulière est de la forme

$$y_p = k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} = k(x)e^{-\cos x} \quad \text{avec } k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}.$$

On a  $k'(x) = \sin x e^{\cos x}$ , donc  $k(x) = -e^{\cos x}$  d'où la solution particulière  $y_p = -e^{-\cos x} e^{\cos x} = -1$ .

### Remarque 12

Les formules données dans les théorèmes 14 et 15 ne sont pas à connaître par coeur, il faut à chaque fois les retrouver pour éviter des surprises désagréables.

Cependant pour la recherche d'une solution particulière, si la solution de l'équation homogène est  $y_h = ky_0$  (où  $y_0$  est une solution de l'équation homogène), on pose comme solution particulière

$$y_p = k(x)y_0 \quad \text{avec } k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)y_0(x)}$$

### Exemple 27

Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle  $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ .

→ Ici  $a(x) = 1$  et  $b(x) = -2x$  et donc  $\int \frac{b(x)}{a(x)} dx = \int -2x dx = -x^2$ . La solution de l'équation homogène associée est

$$y_h = ke^{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

→ D'après le théorème 15 une solution particulière est de la forme

$$y_p = k(x)e^{x^2} = k(x)e^{-\cos x} \text{ avec } k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)e^{x^2}}.$$

On a  $k'(x) = \frac{-(2x-1)e^x}{e^{x^2}} = -(2x-1)e^{x-x^2}$ , donc  $k(x) = e^{x-x^2}$  d'où une solution particulière  $y_p = e^x$ .

## II.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

### Théorème 16

La solution d'une équation différentielle linéaire

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad (E)$$

est  $y = y_h + y_p$  où  $y_h$  est la solution de l'équation sans second membre ( $E_h$ ) et  $y_p$  une solution particulière de l'équation complète ( $E$ ).

### Exemple 28

→ Dans notre exemple 25, on a  $y_h(x) = ke^{-\cos x}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  et  $y_p(x) = -1$ .

Donc, la solution de l'équation ( $E$ ) est :  $y(x) = ke^{-\cos x} - 1$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

→ Dans notre exemple 27, on a  $y_h(x) = ke^{x^2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$  et  $y_p(x) = e^x$ .

Donc, la solution de l'équation ( $E$ ) est :  $y(x) = ke^{x^2} + e^x$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

### Théorème 17 (Unicité de la solution sous condition initiale)

Une équation différentielle linéaire du premier ordre ( $E$ ) possède une unique solution vérifiant une condition initiale du type  $y(x_0) = \alpha$  où  $x_0 \in I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Exemple 29

Dans l'exemple 25, on recherche la solution  $f$  de ( $E$ ) vérifiant  $f(0) = 0$ .

→ On a alors :  $f(0) = 0 \iff ke^{-\cos 0} + 1 = 0 \iff ke^{-1} - 1 = 0 \iff k = e$ .

→ Soit  $f(x) = e^{1-\cos x} - 1$ .

## Exercices

EXO – ) Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

$$1. xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x.$$

$$2. x^2y' - y = (x^2 - 1)e^x.$$

$$3. xy' - y = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}.$$

### Solution :

→ 1) Résolution de l'équation différentielle  $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$ .

Ici  $a(x) = x \ln x$ ,  $b(x) = -1$  et  $c(x) = 3x^2 \ln^2 x$  sont continues sur  $]0, +\infty[$  et

$$a(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff x = 1.$$

Les intervalles sur lesquels on peut résoudre cette équation différentielle sont  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

- **Solution de l'équation homogène sur  $I = ]0, 1[$  ou  $I = ]1, +\infty[$  :**

On a

$$\begin{aligned} xy' \ln x - y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x \ln x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{1}{x \ln x} dx \\ \ln |y| &= \ln(|\ln x|) + c \\ y &= k \ln x \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène sur  $I$  est

$$y_h = k \ln x \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- **Solution particulière de l'équation sur  $I = ]0, 1[$  ou  $I = ]1, +\infty[$  :**

La solution particulière de l'équation sur  $I$  est  $y_p = k(x) \ln x$ . On a  $y'_p = k'(x) \ln x + \frac{1}{x}k(x)$  et en reportant dans l'expression  $xy'_p \ln x - y_p = 3x^2 \ln^2 x$  on obtient de

$$x \left( k'(x) \ln x + \frac{1}{x}k(x) \right) \ln x - k(x) \ln x = 3x^2 \ln^2 x$$

que  $k'(x) = 3x$ , donc  $k(x) = \frac{3}{2}x^2$ , par suite

$$y_p = \frac{3}{2}x^2 \ln x.$$

- **Solution générale de l'équation différentielle sur  $I = ]0, 1[$  ou  $I = ]1, +\infty[$  :**

$y = y_h + y_p$  donc

$$y = \left( \frac{3}{2}x^2 + k \right) \ln x \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

→ 2) Résolution de l'équation différentielle  $x^2y' - y = (x^2 - 1)e^x$ .

Ici  $a(x) = x^2$ ,  $b(x) = -1$  et  $c(x) = (x^2 - 1)e^x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et

$$a(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Les intervalles sur lesquels on peut résoudre cette équation différentielle sont  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

- **Solution de l'équation homogène sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

On a

$$\begin{aligned} x^2y' - y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x^2} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{1}{x^2} dx \\ \ln|y| &= -\frac{1}{x} + c \\ y &= ke^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène sur  $I$  est

$$y_h = ke^{-\frac{1}{x}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- **Solution particulière de l'équation sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

La solution particulière de l'équation sur  $I$  est  $y_p = k(x)e^{-\frac{1}{x}}$ . On a  $y'_p = k'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}k(x)e^{-\frac{1}{x}}$  et en reportant dans l'expression  $x^2y'_p - y_p = (x^2 - 1)e^x$  on obtient de

$$x^2 \left( k'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}k(x)e^{-\frac{1}{x}} \right) - k(x)e^{-\frac{1}{x}} = (x^2 - 1)e^x$$

que  $k'(x) = \frac{(x^2 - 1)e^x}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}$ , donc  $k(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$ , par suite

$$y_p = e^x.$$

- **Solution générale de l'équation différentielle sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

$y = y_h + y_p$  donc

$$y = ke^{-\frac{1}{x}} + e^x \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

→ 3) Résolution de l'équation différentielle  $xy' - y = \frac{2x+1}{x^2+1}$ .

Ici  $a(x) = x$ ,  $b(x) = -1$  et  $c(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et

$$a(x) = 0 \iff x = 0.$$

Les intervalles sur lesquels on peut résoudre cette équation différentielle sont  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

- **Solution de l'équation homogène sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

On a

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln|y| &= \ln|x| + c \\ y &= kx \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène sur  $I$  est

$$y_h = kx \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- **Solution particulière de l'équation sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

La solution particulière de l'équation sur  $I$  est  $y_p = k(x)x$ . On a  $y'_p = k'(x)x + k(x)$  et en reportant dans l'expression  $xy'_p - y_p = \frac{2x+1}{x^2+1}$ , on obtient de  $x(k'(x)x + k(x)) - k(x)x = \frac{2x+1}{x^2+1}$  que  $k'(x) = \frac{2x+1}{x^2(x^2+1)}$ .

Une décomposition en élément simple donne  $k'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}$ .  
D'où pour tout  $x \in I$ ,

$$k(x) = 2 \ln|x| - \frac{1}{x^2} - \arctan(x) - \ln(x^2+1)$$

Par suite

$$y_p = 2x \ln|x| - \frac{1}{x} - x \arctan(x) - x \ln(x^2+1).$$

- **Solution générale de l'équation différentielle sur  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$  :**

$y = y_h + y_p$  donc

$$y = kx + 2x \ln|x| - \frac{1}{x} - x \arctan(x) - x \ln(x^2+1) \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

## II.4 Équations de Bernoulli et équations de Riccati

### Équations de Bernoulli

#### Définition 17 (Équations de Bernoulli )

Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = y^\alpha f(x) \quad \text{avec } \alpha \neq 0, 1$$

Pour la recherche de solution d'une telle équation autre que la fonction identiquement nulle  $y = 0$ , on divise par  $y^\alpha$  puis on fait la changement d'inconnue  $z = y^{1-\alpha}$  pour obtenir une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'inconnue  $z$ .

#### Exemple 30

Résoudre l'équation différentielle  $2xy^2 - y + xy' = 0$

Il s'agit d'une équation du type Bernoulli. On a (en divisant par  $y^2$ )

$$2xy^2 - y + xy' = 0 \iff 2x - \frac{1}{y} + x\frac{y'}{y^2} = 0.$$

Posons donc  $z = \frac{1}{y}$ . On a  $z' = -\frac{y'}{y^2}$  et l'équation différentielle devient

$$xz' + z - 2x = 0.$$

Résolvons l'équation  $xz' + z - 2x = 0$  sur  $I$  où  $I$  est l'un des intervalles  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$  :

- **Solution de l'équation homogène :**

On a

$$\begin{aligned} xz' + z &= 0 \\ \frac{z'}{z} &= -\frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{z} &= - \int \frac{1}{x} dx \\ \ln |z| &= -\ln(|x|) + c \\ z &= \frac{k}{x} \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène sur  $I$  est

$$z_h = \frac{k}{x} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- **Solution particulière de l'équation :**

La solution particulière de l'équation sur  $I$  est  $z_p = \frac{k(x)}{x}$ . On a  $z'_p = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$  et en reportant dans l'expression  $xz'_p + z_p - 2x = 0$  on obtient de  $k'(x) = 2x$ , donc  $k(x) = x^2$ , par suite

$$z_p = x.$$

- **Solution générale de l'équation différentielle**

$$z = \frac{k}{x} + x \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

L'équation de Bernoulli  $2xy^2 - y + xy' = 0$  a pour solution

$$y = \frac{1}{z} = \frac{x}{k+x^2}.$$

Cette solution est valable sur un sous intervalle  $I_k$  (avec  $k \in \mathbb{R}$ ) de  $I$  vérifiant  $\forall x \in I_k, k + x^2 \neq 0$ .

## Équations de Riccati

### Définition 18 (Équations de Riccati )

Une équation de Riccati est une équation de la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$

Pour la recherche de solution d'une équation de Riccati, il faut connaître une solution particulière  $y_p$ . Puis on fait la changement d'inconnue  $u = y - y_p$  pour obtenir une équation de Bernoulli avec  $\alpha = 2$  et finalement le changement d'inconnue  $z = \frac{1}{u}$  donne une équation différentielle linéaire d'ordre 1 d'inconnue  $z$ .

On peut combiner les deux changements d'inconnues précédentes en posant directement  $z = \frac{1}{y - y_p}$ .

**Exemple 31**

Résoudre l'équation différentielle  $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$  sachant que  $y = \frac{1}{x}$  est solution.

Il s'agit d'une équation du type Riccati. Posons donc  $z = \frac{1}{y - \frac{1}{x}}$ , soit  $y = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}$ . On a

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \iff -\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{x^2} \iff z' + \frac{1}{x}z = -1.$$

Résolvons l'équation différentielle  $z' + \frac{1}{x}z = -1$  sur un intervalle  $I$  ne contenant pas 0.

- Solution de l'équation homogène associée :

$$\begin{aligned} z' + \frac{1}{x}z &= 0 \\ \frac{z'}{z} &= -\frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{z} &= -\int \frac{1}{x}dx \\ \ln|z| &= -\ln|x| + c \\ z &= \frac{k}{x} \end{aligned}$$

La solution de l'équation homogène est

$$z_h = \frac{k}{x}; \quad k \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière de l'équation :

La solution particulière est de la forme  $z_p = \frac{k(x)}{x}$ . On a  $z'_p = \frac{xk'(x) - k(x)}{x^2}$  et en reportant dans  $z'_p + \frac{1}{x}z_p = -1$  on obtient de  $\frac{xk'(x) - k(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{k(x)}{x} = -1$  que  $k'(x) = -x$ . D'où  $k(x) = -\frac{x^2}{2}$ . Par suite  $z_p = -\frac{x}{2}$

- Solution générale de l'équation en  $z$  :

$$z = \frac{k}{x} - \frac{x}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

La solution de l'équation de Riccati est

$$y = \frac{1}{\frac{k}{x} - \frac{x}{2}} + \frac{1}{x}$$

Cette solution est valable sur un sous intervalle  $I_k$  (avec  $k \in \mathbb{R}$ ) de  $I$  vérifiant  $\forall x \in I_k \quad \frac{k}{x} - \frac{x}{2} \neq 0$ .



## Équations différentielles linéaires d'ordre 2

### I Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

#### Définition 19

Soient  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  trois constantes réelles,  $d$  une fonction dérivable sur  $I$  et  $y$  la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur  $I$ .

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

Remarquons tout d'abord que si  $y$  et  $y_p$  sont deux solutions de l'équation  $(E)$ , alors la différence  $y - y_p$  est solution de l'équation homogène associée :

$$(E_h) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Ce qui montre la solution générale de l'équation  $(E)$  peut être obtenue en faisant la somme de la solution de l'équation homogène  $(E_h)$ , et d'une solution particulière  $y_p$  de  $(E)$ .

#### Théorème 18

La solution d'une équation différentielle linéaire

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

est  $y = y_h + y_p$  où  $y_h$  est la solution de l'équation sans second membre  $(E_h)$  et  $y_p$  une solution particulière de l'équation complète  $(E)$ .

En général, l'équation différentielle  $(E)$  admet une infinité de solution. Mais si on couple l'équation  $(E)$  avec des **conditions initiales** de sorte que le problème à résoudre soit :

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ y(x_0) = \alpha \text{ et } y'(x_0) = \beta \end{cases}, \quad (4.1)$$

avec  $\alpha, \beta$  données et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Dans ce cas, on commence par résoudre l'équation différentielle  $(E)$  : se reporter au paragraphe suivant. Résoudre le problème (4.1) revient alors à chercher parmi les solutions de  $(E)$  celles qui vérifient de plus la condition

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha \\ y'(x_0) = \beta \end{cases}.$$

Dans tous les cas, le problème admet une unique solution obtenue en résolvant le système linéaire ci-dessus.

## I.1 Solution générale de l'équation homogène

On considère l'équation homogène

$$(E_h) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(E_h)$  est un espace vectoriel : il suffit de vérifier que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions solutions de  $(E_h)$ , alors pour tout  $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu f + \nu g$  est également solution de cette équation différentielle. On admettra que cet espace vectoriel est de dimension 2. Pour le déterminer, il suffit donc de trouver deux fonctions solutions de l'équation différentielles  $(E_h)$  qui sont linéairement indépendantes.

On commence par chercher les fonctions de la forme  $u(x) = e^{rx}$  qui vérifient l'équation  $(E_h)$ . On obtient alors une équation du second degré en  $r$ , appelée **équation caractéristique** associée à l'équation différentielle  $(E_h)$  :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (E_c)$$

On a la propriété :  $r$  est une solution de l'équation  $(E_c)$  si et seulement si la fonction  $x \mapsto e^{rx}$  est solution de l'équation différentielle  $(E_h)$ .

Selon la valeur du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ , on obtient les résultats suivants :

### Théorème 19

On considère l'équation différentielle sans second membre  $(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$  d'équation caractéristique associée  $ar^2 + br + c = 0$ .

Le tableau ci-dessous donne les solutions de  $(E_h)$  en fonction du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  : (dans tous les cas,  $a, b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$ ).

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de $(E_0)$
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x) = e^{\alpha x}[A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles.

### Exemple 32

Résolution de l'équation différentielle  $(E_h)$  :  $y'' - 5y' + 6y = 0$  :

- L'équation caractéristique de  $(E_h)$  est  $r^2 - 5r + 6 = 0$  de discriminant  $\Delta = 1 > 0$ .  
Les solutions de cette équation sont  $r_1 = 2$  et  $r_2 = 3$ .
- Les solutions de  $(E_h)$  sont du type  $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles.

### Exemple 33

Résolution de l'équation différentielle  $(E_h)$  :  $y'' - 2y' + y = 0$ .

- L'équation caractéristique de  $(E_h)$  est  $r^2 - 2r + 1 = 0$  de discriminant  $\Delta = 0$ .  
L'équation admet donc une solution double  $r = 1$ .
- Les solutions de  $(E_h)$  sont donc du type  $y(x) = (Ax + B)e^x$  où  $A$  est une constante réelle.

### Exemple 34

Résolution de l'équation différentielle  $(E_h)$  :  $y'' - 2y' + 2y = 0$  :

- L'équation caractéristique de  $(E_h)$  est  $r^2 - 2r + 2 = 0$  de discriminant  $\Delta = -4 < 0$ .  
Les solutions de cette équation sont les nombres complexes  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 1 - i$ .
- Les solutions de  $(E_h)$  sont donc du type  $y(x) = e^x [A \cos(x) + B \sin(x)]$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles.

## I.2 Solution particulière de l'équation différentielle $(E)$

## Définition 20

On appelle solution particulière de l'équation différentielle  $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$  toute fonction  $f$  vérifiant cette équation.

### Proposition 8 (Principe de superposition)

Si  $y_{p1}$  est une solution particulière sur un intervalle  $I$  de

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x)$$

et si  $y_{p2}$  est une solution particulière sur  $I$  de

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x),$$

alors  $\lambda_1 y_{p1} + \lambda_2 y_{p2}$  est une solution particulière sur  $I$  de l'équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \lambda_1 d_1(x) + \lambda_2 d_2(x),$$

pour tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Dans cette section, nous déterminons les solutions particulières lorsque la fonction  $x \mapsto d(x)$  a une forme spécifique.

### Cas où $d(x)$ est un polynôme $P_n(x)$ de degré $n$ .

On cherchera alors une solution particulière  $y_p$  ayant une forme polynomiale. Plus généralement, on a

$$y_p = x^m Q_n \quad \text{où } Q_n \text{ est un polynôme de même degré que } P_n$$

et

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 & \text{si } 0 \text{ est une racine simple de l'équation caractéristique} \\ 2 & \text{si } 0 \text{ est une racine double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

#### Exemple 35

Trouvons une solution particulière de l'équation différentielle  $y'' + 2y' = x^2 + 1$  :

→ L'équation caractéristique  $r^2 + 2r = 0$  admet pour racines 0 et -2. 0 étant une racine simple et comme ici  $d(x) = x^2 + 1$  est un polynôme de degré 2, on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels à déterminer.

→ On a :

$$y'_p = 3ax^2 + 2bx + c \text{ et } y''_p = 6ax + 2b.$$

→ Remplacement dans l'équation :

$$y''_p(x) + 2y'_p = x^2 + 1 \Leftrightarrow 6ax + 2b + 2(3ax^2 + 2bx + c) = x^2 + 1 \Leftrightarrow 6ax^2 + (6a + 4b)x + 2b + 2c = x^2 + 1.$$

Par identification

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 6a + 4b = 0 \\ 2b + 2c = 1 \end{cases} . \text{ Donc } a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{4} \text{ et } c = \frac{3}{4}.$$

→ Finalement, on a obtenu pour solution particulière  $y_p = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$

### Cas où $d(x)$ est de la forme $P_n(x)e^{\alpha x}$

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

où  $P_n(x)$  un polynôme de degré  $n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Une méthode consiste à faire le changement d'inconnue en posant  $y = ze^{\alpha x}$  pour éliminer le terme  $e^{\alpha x}$  et se ramener à une équation avec un membre de droite de la forme  $P_n(x)$  traité dans le paragraphe précédent. Cependant on peut chercher  $y_p$  sous la forme :

$$y_p = x^m Q_n e^{\alpha x} \quad \text{où } Q_n \text{ est un polynôme de même degré que } P_n$$

et

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 & \text{si } \alpha \text{ est une racine simple de l'équation caractéristique} \\ 2 & \text{si } \alpha \text{ est une racine double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

### Cas où $d(x)$ est de la forme $P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  des polynômes de degré maximum égal à  $n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On cherchera alors une solution particulière  $y_p$  sous la forme

$$y_p = x^m R_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + S_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

où  $R_n$  et  $S_n$  sont des polynômes de même degré  $n$  (maximum des degrés de  $P_n$  et  $Q_n$ ) et

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ 1 & \text{si } \alpha + i\beta \text{ est une racine de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

### Cas où $d(x)$ est quelconque

Dans ce cas, on utilise la méthode de la variations de deux constantes, c'est-à-dire que si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène  $ay'' + by' + cy = 0$ , alors on cherchera une solution particulière de l'équation générale  $ay'' + by' + cy = d(x)$  sous la forme

$$y_p = \lambda(x)y_1 + \mu(x)y_2$$

ce qui donne

$$y'_p = \lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 + \lambda(x)y'_1 + \mu(x)y'_2.$$

Pour faciliter la recherche d'une solution particulière, on impose la condition supplémentaire suivante

$$\lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0. \quad (\text{condition 1})$$

Sous cette condition, on a  $y'_p = \lambda(x)y'_1 + \mu(x)y'_2$  et  $y''_p = \lambda'(x)y'_1 + \mu'(x)y'_2 + \lambda(x)y''_1 + \mu(x)y''_2$ . Comme  $ay''_p + by'_p + cy_p = d(x)$  on obtient

$$\lambda'(x)y'_1 + \mu'(x)y'_2 = \frac{d(x)}{a}. \quad (\text{condition 2})$$

La résolution du système  $\begin{cases} \lambda'(x)y'_1 + \mu'(x)y'_2 = 0 \\ \lambda'(x)y'_1 + \mu'(x)y'_2 = \frac{d(x)}{a} \end{cases}$  détermine  $\lambda(x)$  et  $\mu(x)$  et par conséquent  $y_p$ .

Avant de passer à un exemple pratique, précisons bien ce qu'on appelle deux solutions libres d'une équations différentielles linéaires d'ordre 2.

### Définition 21 (Le Wronskien)

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ .

On appelle wronskien de  $y_1$  et  $y_2$  la fonction  $W$  définie sur  $I$  par

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1y'_2 - y'_1y_2$$

### Définition 22

On dit que deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  sont libres lorsque leur wronskien  $W$  est non nul.

### Proposition 9

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions sur un intervalle  $I$  de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x),$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des fonctions continues sur  $I$ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

**P1** : Pour tout  $t \in I$ ,  $W(t) = 0$ .

**P2** : Il existe  $t \in I$ ,  $W(t) = 0$ .

### Exemple 36

On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$ .

Déterminer une solution particulière de  $(E)$ .

Solution :

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme  $A \cos x + B \sin x$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Cherchons une solution particulière sous la forme

$$y_p = A(x) \cos x + B(x) \sin x.$$

La méthode de variations des constantes donne

$$\begin{cases} A'(x)e \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

puis  $A'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$  et  $B'(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ . D'où  $A(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$  et  $B(x) = -\frac{1}{2 \sin^2 x}$ .  
Ainsi une solution particulière est  $y_p = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \frac{1}{2 \sin x}$ .

### I.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

#### Théorème 20

Les solutions d'une équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (\text{E})$$

sont de la forme  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  où  $y_h$  est la solution de l'équation sans second membre et  $y_p$  une solution particulière de l'équation complète.

#### Exemple 37

Résolvons l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2. \quad (\text{E})$$

L'équation caractéristique  $r^2 - 3r + 2 = 0$  admet deux racines réelles distinctes : 1 et 2. Donc la solution de l'équation homogène est

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre  $x \rightarrow 4x^2$  est un polynôme de degré 2 et en plus 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution particulière sous la forme :

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

On a  $y'_p = 2ax + b$  et  $y''_p = 2a$ ; comme  $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 4x^2$ , on obtient :

$$2ax^2 + (2b - 6a)x + 2c - 3b + 2a = 4x^2.$$

Par identification,

$$\begin{cases} 2a &= 4 \\ 2b - 6a &= 0 \\ 2c - 3b + 2a &= 0 \end{cases}$$

Par suite  $a = 2$ ,  $b = 6$  et  $c = 7$ . Donc  $y_p = 2x^2 + 6x + 7$ .

La solution générale de l'équation (E) est  $y = y_h + y_p$  c'est-à-dire

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \text{avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

### I.4 Unicité de la solution sous conditions initiales

### Théorème 21

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (\text{E})$$

possède une unique solution  $f$  vérifiant les deux conditions initiales

$$f(x_0) = \alpha \quad \text{et} \quad f'(x_0) = \beta \quad \text{avec } x_0 \in I, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

### Exemple 38

Déterminer la solution  $f$  de (E) de l'exemple précédent vérifiant  $f(0) = 4$  et  $f'(0) = -1$ .

→ Comme  $f$  est une solution de l'équation (E), il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ae^x + be^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$

→  $f(0) = 4 \Leftrightarrow a + b + 7 = 4 \Leftrightarrow a + b = -3$ .

→ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = ae^x + 2be^{2x} + 4x + 6$ . Donc  $f'(0) = -1 \Leftrightarrow a + 2b + 6 = -1 \Leftrightarrow a + 2b = -7$ .

→ On a

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ a + 2b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - 4e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$ .

## I.5 Exercices

EXO – 1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1. y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}.$$

$$2. y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \cos x.$$

Solution :

1) On commence par résoudre l'équation homogène

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Son équation caractéristique est  $r^2 - 4r + 3 = 0$ , dont les racines sont 1 et 3. Donc La solution de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^x + Be^{3x}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ici  $d(x)$  est de la forme  $P_n(x)e^{\alpha x}$  où  $P$  est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme  $y_p = x^m(ax + b)e^{-x}$ .

Comme  $-1$  n'est pas racine de l'équation caractéristique,  $m = 0$ , donc  $y_p = (ax + b)e^{-x}$ .

En dérivant, on trouve

$$y'_p = \left( -ax + (-b + a) \right) e^{-x}, \quad y''_p = \left( ax + (b - 2a) \right) e^{-x}$$

En remplaçant dans  $y''_p - 4y'_p + 3y_p = (2x + 1)e^{-x}$ , on obtient le système

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases}$$

Donc  $a = \frac{1}{4}$  et  $b = \frac{5}{16}$   $y_p = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-x}$ .

La solution générale de l'équation est

$$y = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) Comme dans la question précédente, la solution de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^x + Be^{3x}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Ici  $d(x)$  est de la forme  $P_n(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + Q_n(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  avec  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  et  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynomes de degré maximum égal à 1.

On cherche une solution particulière sous la forme  $y_p = x^m \left( (ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x \right) e^{-x}$ . comme

$2+i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique,  $m = 0$ , donc  $y_p = \left( (ax+b) \cos x + (cx+d) \sin x \right) e^{2x}$ .

En dérivant deux fois  $y_p$  et en remplaçant dans  $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = xe^{2x} \cos x$  on trouve

$$y_p = \left( -\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^{2x}.$$

La solution générale de l'équation est

$$y = \left( -\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^{2x} + Ae^x + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

EXO – 2) Résoudre l'équation suivante :

$$4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-x/2}.$$

Solution :

$4y'' + 4y' + 5y = \sin xe^{-x/2}$ . L'équation caractéristique a deux racines complexes  $r_1 = -1/2 + i$  et  $r_2 = \bar{r}_1$  et les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a  $\sin xe^{-x/2} = \operatorname{Im}(e^{(-1/2+i)x})$ , on commence donc par chercher une solution  $z_p$  de l'équation avec le nouveau second membre  $e^{(-1/2+i)x}$ . Comme  $-1/2 + i$  est racine de l'équation caractéristique, on cherchera  $z_p(x) = P(x)e^{(-1/2+i)x}$  avec  $P$  de degré 1. Par conséquent la condition (\*) sur  $P$  :

$$4P'' + f'(-1/2 + i)P' + f(-1/2 + i)P = 1$$

s'écrit ici :  $8iP' = 1$  ( $P'' = 0$ ,  $f(-1/2 + i) = 0$  et  $f'(-1/2 + i) = 8i$ ), on peut donc prendre  $P(x) = -i/8x$  et  $z_p(x) = -i/8xe^{(-1/2+i)x}$ , par conséquent sa partie imaginaire  $y_p(x) = \operatorname{Im}(-i/8xe^{(-1/2+i)x}) = 1/8x \sin xe^{-x/2}$  est une solution de notre équation. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos x + (c_2 + 1/8x) \sin x) \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

EXO – 3) On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution  $h$  de (E) vérifiant  $h(0) = 1$  et  $h(1) = 0$ .
4. Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $]0, \infty[$  et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

- (a) On pose  $g(x) = f(e^x)$ , vérifier que  $g$  est solution de (E).
- (b) En déduire une expression de  $f$ .

Solution :

1. Le polynôme caractéristique associé à  $E$  est :  $p(x) = x^2 + 2x + 4$ ; son discriminant est  $\Delta = -12$  et il a pour racines les 2 nombres complexes  $-1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ . Les solutions de l'équation homogène sont donc toutes fonctions :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x)$$

obtenues lorsque  $a, b$  décrivent  $\mathbb{R}$ .

2. Le second membre est de la forme  $e^{\lambda x}Q(x)$  avec  $\lambda = 1$  et  $Q(x) = x$ . On cherchera une solution de l'équation sous la forme :  $y_p(x) = R(x)e^x$  avec  $R$  polynôme de degré égal à celui de  $Q$  puisque  $p(1) \neq 0$ . On pose donc  $R(x) = ax + b$ . On a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x.$$

Donc  $y_p$  est solution si et seulement si  $7ax + 7b + 4a = x$ . On trouve après identification des coefficients :

$$a = \frac{1}{7} \quad \text{et} \quad b = \frac{-4}{49}.$$

La fonction  $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$  est donc solution de  $E$  et la forme générale des solutions de  $E$  est :

$$y(x) = e^{-x}(a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x ; a, b \in \mathbb{R}.$$

3. Soit  $h$  une solution de  $E$ . Les conditions  $h(0) = 1$ ,  $h(1) = 0$  sont réaliséesssi

$$a = \frac{53}{49} \quad \text{et} \quad b = -\frac{53 \cos \sqrt{3} + 3e^2}{49 \sin \sqrt{3}}.$$

- 4.(a) On a :  $g'(x) = e^x f'(e^x)$  et  $g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$  d'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) = e^{2x} f''(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x \log e^x = xe^x$$

donc  $g$  est solution de  $E$ .

- (b) Réciproquement pour  $f(t) = g(\log t)$  où  $g$  est une solution de  $E$  on montre que  $f$  est 2 fois dérivable et vérifie l'équation donnée en 4. Donc les fonctions  $f$  recherchées sont de la forme :

$$\frac{1}{t}(a \cos(\sqrt{3} \log t) + b \sin(\sqrt{3} \log t)) + \frac{t}{7}(\log t - \frac{4}{7}) ; a, b \in \mathbb{R}.$$

EXO – 4) Résoudre l'équation sur  $]0, +\infty[$  :

$$y' = \frac{y}{x} - x^2 y^4, \quad y(1) = 1.$$

Solution :

Il s'agit d'une équation de Bernoulli. On fait le changement d'inconnue  $z = \frac{1}{y^3}$ . On a

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - x^2 y^4 \\ \frac{y'}{y^4} &= \frac{1}{xy^3} - x^2 \\ -\frac{1}{3}z' &= \frac{1}{x}z - x^2. \end{aligned}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre  $-\frac{1}{3}z' = \frac{1}{x}z - x^2$  qu'on résoud comme d'habitude.

Solution de l'équation homogène :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}z' &= \frac{1}{x}z \\ \frac{z'}{z} &= -3\frac{1}{x} \\ \ln|z| &= -3\ln x + c \\ z &= \frac{k}{x^3}. \end{aligned}$$

La solution homogène est  $z_h = \frac{k}{x^3}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Solution particulière de l'équation  $-\frac{1}{3}z' = \frac{1}{x}z - x^2$  :

Posons  $z_p = \frac{k(x)}{x^3}$  une solution particulière. On a  $z'_p = \frac{k'(x)x - 3k(x)}{x^4}$  et en remplaçant dans  $-\frac{1}{3}z'_p = \frac{1}{x}z_p - x^2$ , on a obtient de  $-\frac{1}{3}\left(\frac{k'(x)x - 3k(x)}{x^4}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{k(x)}{x^3}\right) - x^2$  que  $k'(x) = 3x^4$ . D'où  $k(x) = \frac{3}{5}x^5$ , par suite  $z_p = \frac{3}{5}x^2$ .

Solution générale de l'équation  $-\frac{1}{3}z' = \frac{1}{x}z - x^2$  :

La solution générale de l'équation en  $z$  est  $z = \frac{k}{x^3} + \frac{3}{5}x^2$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Solution générale de l'équation  $y' = \frac{y}{x} - x^2 y^4$  :

Comme on a posé  $z = \frac{1}{y^3}$ , on obtient la solution générale de l'équation  $y' = \frac{y}{x} - x^2 y^4$  est

$$y = \frac{1}{\frac{k}{x^3} + \frac{3}{5}x^2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

D'autre part  $y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{k}{1^3} + \frac{3}{5}} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$ . Par conséquent

$$y = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{x^3} + 3x^2}.$$

## II Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients quelconques

Nous allons maintenant entamer l'étude une classe importante d'équations différentielles linéaires d'ordre 2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients sont en général des fonctions. Nous l'écrirons

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (E)$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des fonctions continues sur un même intervalle  $I$  avec  $a$  ne s'annulant sur  $I$ . L'équation sans second membre

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (E_h)$$

est l'équation homogène associée à l'équation  $(E)$ .

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, on a le résultat suivant que l'on admettra :

### Proposition 10

La solution sur l'intervalle  $I$  de l'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (E)$$

est  $y = y_h + y_p$  où

- $y_h$  est la solution de l'équation homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (E_h),$$

- $y_p$  une solution particulière quelconque de  $(E)$ .

On dispose d'un algorithme de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients quelconques même si en général, on ne sait pas comment franchir chacune des différentes étapes de cet algorithme.

#### ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

Soit à résoudre l'équation différentielle  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ .

- Trouver deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  libres de l'équation homogène  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ .
- La solution générale de l'équation homogène sera  $y_h = ay_1 + by_2$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.
- Trouver une solution particulière  $y_p$  de l'équation  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ .
- La solution générale de l'équation  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$  s'écrit alors  $y = y_h + y_p$ .

On l'a dit plus haut, on ne peut pas exécuter aisement l'algorithme de résolution, cependant si on connaît une solution  $y_1$  de l'équation homogène le théorème suivant permet d'en trouver une deuxième :

**Théorème 22**

Étant donné trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  continues sur un intervalle  $I$  ( $a$  ne s'annule pas sur  $I$ ) et  $y_1$  une solution non nulle de l'équation homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (E_h)$$

il existe une fonction  $u : x \rightarrow u(x)$  pour laquelle la fonction  $y_2 : x \mapsto y_2(x) = u(x)y_1(x)$  est une autre solution de l'équation homogène  $(E_h)$ .

**Preuve :** Pour que  $y_2 = uy_1$  soit une solution de  $(E_h)$ , il faut et il suffit que

$$a(x)(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + b(x)(u'y_1 + uy_1') + c(x)uy_1 = 0$$

ou encore  $u[a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1] + a(x)[u''y_1 + 2u'y_1'] + b(x)u'y_1 = 0$  ce qui est équivalent à  $a(x)y_1u'' + (2y_1' + b(x)y_1)u' = 0$  car  $a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0$ . en posant  $w = u'$ , on a  $w$  qui est solution de l'équation différentielle à variable séparable d'ordre 1

$$a(x)y_1z' + (2y_1' + b(x)y_1)z = 0$$

que l'on sait résoudre. D'où le résultat. □

Le résultat suivant nous fournit une manière d'obtenir une solution particulière de l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \quad (E)$$

et ce à partir de deux solutions libres  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation homogène  $(E_h)$ .

**Théorème 23**

Étant donné des fonctions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  continues sur un intervalle  $I$  ( $a$  ne s'annule pas sur  $I$ ) et  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions libres de l'équation homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (E_h)$$

il existe deux fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$  est une solution particulière de l'équation  $(E)$ .

**Preuve :** On procède exactement comme dans la section I.2 (Cas où  $d(x)$  est quelconque). Avec la condition (de simplification de calcul)

$$\lambda'(x)y_1 + \mu'(x)y_2 = 0, \quad (\text{condition 1})$$

$y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$  une solution particulière de l'équation générale  $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$  si et seulement si

$$\lambda'(x)y_1' + \mu'(x)y_2' = \frac{d(x)}{a(x)}. \quad (\text{condition 2})$$

On résoud le système

$$\begin{cases} \lambda'(x)y_1(x) + \mu'(x)y_2(x) = 0 \\ \lambda'(x)y'_1(x) + \mu'(x)y'_2(x) = \frac{d(x)}{a(x)} \end{cases} \quad \text{pour trouver}$$

$$\lambda' = \frac{-y_2(x)d(x)}{a(x)[y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)]} \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{y_1(x)d(x)}{a(x)[y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)]}.$$

En intégrant, on obtient  $\lambda(x)$  et  $\mu(x)$  et par conséquent  $y_p$ . □

### Exemple 39

Soit à résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle

$$x^2y'' - 2y = x.$$

Il est clair que la fonction  $y_1 : x \mapsto y_1(x) = x^2$  est solution de l'équation homogène associée :  $x^2y'' - 2y = 0$ . Déterminons en une autre  $y_2$  en posant  $y_2 = uy_1$ . On a  $y_2(x) = ux^2$ ,  $y'_2(x) = u'x^2 + 2ux$  et  $y''_2(x) = u''x^2 + 2u'x + 2u$ .

$$\begin{aligned} x^2y''_2 - 2y_2 &= 0 \Leftrightarrow x^2(u''x^2 + 2u'x + 2u) - 2ux^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u''x^2 + 4u'x = 0 \end{aligned}$$

En résolvant la dernière équation différentielle, on a  $u(x) = \frac{1}{x^3}$  et donc  $y_2(x) = \frac{1}{x}$ .

Vérifions que  $y_1$  et  $y_2$  sont libres. On a

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0.$$

La solution de l'équation homogène est  $y_h = ax^2 + \frac{b}{x}$  où  $a$  et  $b$  sont constantes réelles.

Cherchons une solution particulière sous la forme  $y_p = \lambda x^2 + \frac{\mu}{x}$  sous la condition  $\lambda'x^2 + \frac{\mu'}{x} = 0$ . Comme  $x^2y''_p - 2y_p = x$  en remplaçant  $y_p$  et  $y''_p$  par leurs expressions, on obtient  $2x\lambda' - \frac{\mu'}{x^2} = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{cases} \lambda'x^2 + \frac{\mu'}{x} = 0 \\ 2x\lambda' - \frac{\mu'}{x^2} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \lambda' = \frac{1}{3x^2} \quad \text{et} \quad \mu' = -\frac{1}{3}x.$$

D'où  $\lambda = -\frac{1}{3x}$  et  $\mu = -\frac{1}{6}x^2$ . Par conséquent  $y_p(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 = -\frac{1}{2}x$ . En conclusion la solution de l'équation différentielle  $x^2y'' - 2y = x$  est  $y = ax^2 + \frac{b}{x} - \frac{1}{2}x$  où  $a$  et  $b$  sont constantes réelles.