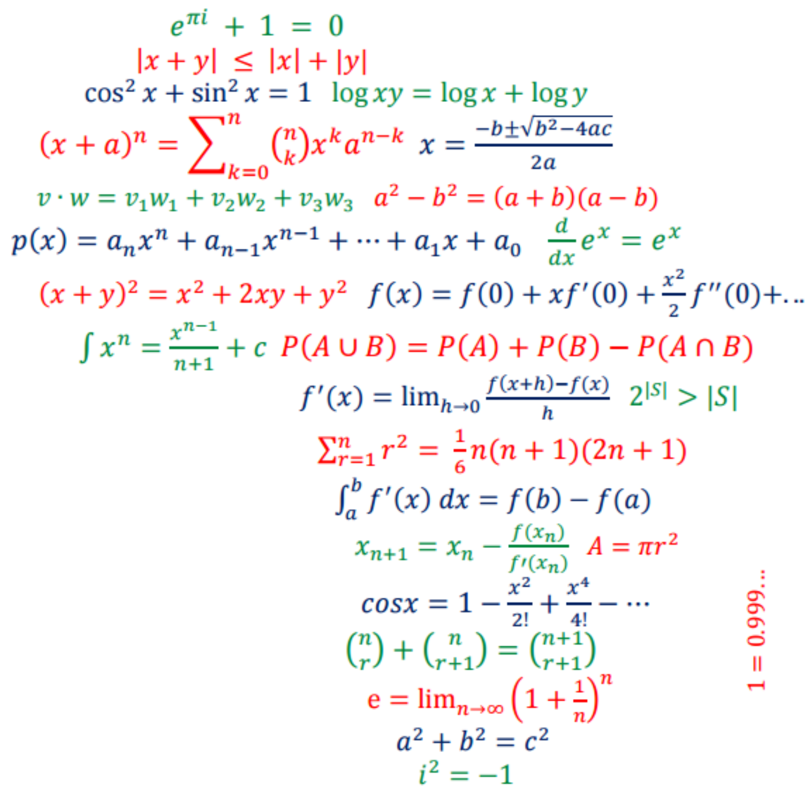
ANALYSE MATHÉMATIQUE

Licence 1

Modeste ESSOH

15 octobre 2024
(version 4.0)



Typeset in LaTeX.

Copyright ©2019–2020 Essoh Modeste

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Prérequis et compléments

L'objectif de ce chapitre est de préciser et completer des notions dont les étudiants ont déjà des représentations au moins intuitives. Il y a un grand intérêt à introduire immédiatement les quantificateurs, les notions du langage ensembliste et les principales méthodes de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde, par contraposée ou le raisonnement par récurrence. Ces différentes notions sont fondamentales et constituent la base même du travail mathématique ; il est plus que nécessaire, de maîtriser le vocabulaire et les outils qui concernent toute ses notions. Il s'agit, dans cet premier chapitre, de faire un récapitulatif des concepts fondamentaux qui sont en liaison avec le cours d'analyse de la licence 1.

1.1 Objets mathématiques, lettres grèques

Objets mathématiques

Les *objets mathématiques* sont les éléments des ensembles de base (nombres, vecteurs, points) et les diverses constructions faites à partir de ces objets, comme les ensembles, les relations, les fonctions, les opérations.

Un même objet mathématique peut avoir diverses *expressions* ou *écritures*, par exemple : $2, \sqrt{4}, \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$ sont diverses écritures du même objet.

Alphabet grec

Les mathématiciens ont besoin, pour bien distinguer les différents objets qu'ils manipulent de notations variées. Des notations bien choisies, en harmonie avec ce qu'elles doivent représenter et avec les traditions, permettent des économies de pensée considérables.

En plus des lettres de l'alphabet latin, on utilise les lettres de l'alphabet grec que nous rappelons :

Minuscule	Majuscule	Nom des lettres	Correspondance en alphabet latin
α	A	alpha	a
β	B	bêta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	é
ζ	Z	dzêta	dz
η	H	êta	è
θ	Θ	thêta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rhô	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	y
φ	Φ	phi	ph
χ	X	khi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	oméga	ô

1.2 Propositions

Définition 1.2.1. Une *proposition* ou un *énoncé* (*mathématique*) est une phrase faisant intervenir des objets mathématiques et ayant un sens mathématique précis, et à laquelle on peut attribuer une valeur de vérité, soit « vrai » , soit « faux »

Exemple 1.2.2 : « π est un entier » (valeur de vérité = « faux »).
« $2 \geq 1$ » est une proposition vraie.
« $1 = 2$ » est une proposition fausse.

Une proposition fait toujours intervenir un verbe, souvent sous la forme d'un symbole de relation, comme $=$, $\leq$, $\subset$, $\perp$.

Exemple 1.2.3 : $3+5$ est un objet mathématique, $3+5=8$ est une proposition mathématique dont la valeur de vérité est vraie.

Une proposition peut dépendre de certaines variables, par exemple :

$$P(x,y) : xy = 1$$

et sa valeur de vérité dépend alors des valeurs données aux variables (dans l'exemple ci dessus, $P(2,1/2)$ est vrai alors que $P(2,2)$ est faux)

À partir de propositions P et Q données, on peut définir de nouvelles propositions (non P), (P et Q), (P ou Q), ($P \Rightarrow Q$), ($P \Longleftrightarrow Q$), dont on connait la valeur de vérité dès que l'on connait celles de P et Q.

1.2.1 Négation

Définition 1.2.4. Soit P une proposition. La négation de P est une proposition notée (non$P$). Elle est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.
On obtient la table de vérité suivante (où V est mis pour vraie et F pour fausse) :

P	(non P)
V	F
F	V

Exemple 1.2.5 : – Soit x un réel. La proposition (non $(x = 2)$) est notée ($x \neq 2$).
– Soit x un réel. La proposition (non $(x > 2)$) est notée ($x \leq 2$).

Remarque :
Si P est une assertion, alors non (non P) est P.

1.2.2 Conjonction et disjonction

Définition 1.2.6. Soient P et Q deux propositions.

— La conjonction des deux propositions P et Q est une proposition notée (P et Q). Elle est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont vraies, et elle est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.
On obtient la table de vérité :

P	Q	(P et Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

— La disjonction des deux propositions P et Q est une proposition notée (P ou Q). Elle est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie et elle est fausse lorsque les deux propositions P et Q sont fausses.
On obtient la table de vérité :

P	Q	(P ou Q)
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.2.7 : Soient n un entier naturel, P la proposition “n est un carré parfait” et Q la proposition “n est divisible par 3”.
Alors lorsque n est égal à 9, la proposition (P et Q) est vraie et lorsque n est égal à 18, la proposition (P ou Q) est vraie.

Proposition 1.2.8. *Soient P et Q deux propositions. Alors :*
– non (P ou Q) a même valeur de vérité que (non P) et (non Q)
– non (P et Q) a même valeur vérité que (non P) ou (non Q).

Pour démontrer cette proposition, il suffit d’établir la table de vérité des assertions considérées. Par exemple les tables de vérité de non (P ou Q) et (non P) et (non Q) coïncident et sont données par :

non(P ou Q)	P vraie	P fausse
Q vraie	F	F
Q fausse	F	V

(non P) et (non Q)	P vraie	P fausse
Q vraie	F	F
Q fausse	F	V

***Exercice* 1.2.1 :** *Déterminer l’ensemble des réels x vérifiant la proposition :*

$$\Big((x^2 > 1 \textit{ et } x < 3) \textit{ ou } (x^2 < 4 \textit{ et } x < 0)\Big)$$

1.2.3 Implication

Définition 1.2.9. Soient P et Q deux propositions. Alors ($P \Longrightarrow Q$) est une proposition qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse. Elle est vraie dans tous les autres cas. On l’énonce “P implique Q” ou “si P, alors Q”. Elle s’énonce aussi “P entraine Q”, ou encore “pour que P, ou encore il faut que Q”, ou “pour que Q, il suffit que P”, oubien “une condition nécessaire pour que P est que Q” ou “une condition suffisante pour que Q est que P”.

Proposition 1.2.10. *Soient P et Q deux propositions. La proposition ($P \Longrightarrow Q$) a la même table de vérité que la proposition ((non P) ou Q).*

On dresse les tables de vérité de ces deux propositions :
Par définition la table de ($P \Longrightarrow Q$) est donnée par

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Celle de ((non P) ou Q) est :

P	Q	non P	(non P) ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Exemple 1.2.11 : • Soit x un réel. Considérons la proposition ($x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$). Si $x \neq 3$, elle est vraie, parce qu’alors la proposition ($x = 3$) est fausse et si $x = 2$ elle est vraie, parce qu’alors la proposition ($x^2 = 9$) est vraie. Cette proposition est donc toujours vraie. On l’énonce aussi “si x est égal à 3, alors x^2 est égal à 9”.
• La proposition ($1 = 0 \Rightarrow 2 = 3$) est vraie, parce que la proposition ($1 = 0$) est fausse.

Corollaire 1.2.12. *Soient P et Q deux propositions. La négation de la proposition ($P \Longrightarrow Q$) a la même table de vérité que la proposition (P et (non Q)).*

En effet d'après la proposition précédente, la proposition (non($P \Longrightarrow Q$)) a la même table de vérité que la proposition (non ((non P) ou Q)), qui a la même table de vérité que la proposition (non(non P) et (non Q)) et cette dernière a la la même table de vérité que la proposition (P et (non Q)).

Proposition 1.2.13 (L'implication est transitive)**.** *Soient P, Q et R trois propositions. Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors $P \Rightarrow R$ est vraie.*

On dresse les différentes tables de vérité :

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V

Définition 1.2.14. Soient P et Q deux propositions.
— La contraposée de la proposition ($P \Longrightarrow Q$) est la proposition ((non Q) $\Longrightarrow$ (non P)).
— La réciproque de la proposition ($P \Longrightarrow Q$) est la proposition ($Q \Longrightarrow P$)

***Exercice* 1.2.2** *: Écrire les implications suivantes en utilisant les symboles $\neq$, $\Rightarrow$, $\geq$, $>$ et dire si elles sont vraies pour tous les réels x.*

1. *Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il faut que x soit strictement supérieur à 2.*
2. *Pour que x soit supérieur ou égal à 1, il suffit que x soit strictement supérieur à 2.*
3. *Une condition nécessaire pour que x soit supérieur ou égal à 1, est que x soit différent de 1.*
4. *Si x est dans l'intervalle $[0,1]$, alors $x^2 - 4x + 3$ est négatif.*

1.2.4 Equivalence

Définition 1.2.15. Soient P et Q deux propositions. La proposition ($P \Longleftrightarrow Q$) qui s'énonce "P est équivalente à Q" ou "P et Q sont équivalentes" est la conjonction de l'implication et de sa réciproque : (($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)) . Elle est vraie lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Elle est fausse dans les autres cas.
Cette proposition s'énonce aussi "P si et seulement si Q", ou bien "pour que P, il faut et il suffit que Q", ou encore "une condition nécessaire et suffisante pour que Q est que P".

Dire que P et Q sont équivalentes, c'est donc dire que ces propositions ont mêmes valeurs de vérité, c'est-à-dire qu'elles signifient la même chose.

Proposition 1.2.16. *Soient P et Q deux propositions. La proposition ($P \Longleftrightarrow Q$) est vraie quand P et Q ont la même valeur de vérité, fausse sinon.*

Pour le voir, on peut écrire la table dev érité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Proposition 1.2.17. *Soient P et Q deux propositions. Les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

1. *(non(non P))$\Longleftrightarrow$P.*
2. *(non(P et Q))$\Longleftrightarrow$ ((nonP) ou (nonQ)).*
3. *(non(P ou Q))$\Longleftrightarrow$ ((nonP) et (nonQ)).*
4. *(non($P \Rightarrow Q$))$\Longleftrightarrow$ ((nonQ) $\Rightarrow$ (nonP)).*
5. *($P \Rightarrow Q$)$\Longleftrightarrow$ ((nonQ) $\Rightarrow$ (nonP)).*

Exercice 1.2.3 : *1. Soit x un réel. L'équivalence ($x^2 + |x| - 6 \leq 0 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$) est-elle vraie ?*

2. *Soit E l'ensemble des entiers naturels pairs. Peut-on caractériser les éléments de E par l'une des propositions suivantes ?*
   a) $x \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$.
   b) $x \in \mathbb{R}$ *et* $2x \in \mathbb{N}$.
   c) $x \in \mathbb{R}$ *et* x^2 *est un entier pair.*

1.2.5 Quantificateurs.

Soit $P(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément d'un ensemble E. La valeur de vérité de $P(x)$ peut dépendre de x et il est souvent important de savoir si elle est vraie pour tous les éléments x de E, pour au moins un, pour un et un seul. Les quantificateurs sevent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition.

Il y en a deux :

le quantificateur universel, noté $\forall$ et le quantificateur existentiel, noté $\exists$

Définition 1.2.18. Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E.

— La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie si la proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E ; elle est fausse sinon. Elle se lit "quelque soit x de E, on a $P(x)$", ou "pour tout x de E, on a $P(x)$".

— La proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie s'il existe au moins un élément x de E tel $P(x)$ soit vraie ; elle est fausse sinon. Elle se lit "il existe au moins un x de E, tel que $P(x)$".

— La proposition « $\exists! x \in E, P(x)$ » est vraie s'il existe un élément x de E et un seul tel $P(x)$ soit vraie ; elle est fausse sinon. Elle se lit "il existe un et un seul x de E, tel que $P(x)$".

Exemple 1.2.19 : – La proposition ($\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$) est vraie.
– La proposition ($\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$) est fausse.

Remarque 1.2.20. Une variable qui a été quantifiée devient "muette" : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf ceux figurant ailleurs dans l'énoncé).

La phrase « l'équation $\cos x = 0$ possède au moins une solution réelle » se traduit en langage formalisé par :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0$$

ou encore par

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \cos \alpha = 0$$

L'énoncé « l'entier n est un multiple de 3 » se traduit en langage formalisé par :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, n = 3k$$

Dans cet énoncé, on peut remplacer k par n'importe quelle variable autre que n, ainsi on pourrait écrire

$$\exists t \in \mathbb{Z}, n = 3t.$$

Remarque 1.2.21. Il résulte de la définition que toute proposition de la forme « $\forall x \in \emptyset,\ P(x)$ » est toujours vraie, tandis que toute proposition de la forme « $\exists x \in \emptyset,\ P(x)$ » est toujours fausse. Cette remarque est très utile pour trancher des cas litigieux dans des définitions ou des théorèmes.

Remarque 1.2.22. Si on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut donc échanger des quantificateurs est lorsqu'ils sont de même type et successifs. Ainsi les propositions « $\forall x \in E\, \forall y \in E,\ P(x,y)$ » est équivalente à og $\forall y \in E\, \forall x \in E,\ P(x,y)$ ».
Mais on ne peut pas toujours intervertir $\forall$ et $\exists$ dans une proposition. Par exemple, dans l'écriture « $\forall x \in E\, \exists y \in E,\ P(x,y)$ » y dépend de x, par contre dans l'écriture « $\exists x \in E\, \forall y \in E,\ P(x,y)$ » y est indépendant de x.

Exemple 1.2.23 : Les propositions « $\forall x \in \mathbb{R}^*\ \exists y \in \mathbb{R}\ /\ xy = 1$ » et « $\exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}^*\ \ xy = 1$ » sont deux propositions différentes ; la première est vraie tandis que la seconde est fausse.

Proposition 1.2.24. *Soient E un ensemble, F un sous-ensemble de E et $P(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E*

1. *La proposition ($\forall x \in E, (x \in F \Rightarrow P(x))$) est équivalente à la proposition ($\forall x \in F, P(x)$).*
2. *La proposition ($\exists x \in E, (x \in F$ et $P(x))$) est équivalente à la proposition ($\exists x \in F, P(x)$).*

Exemple 1.2.25 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
– La proposition ($\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 0$ et $f(x) > 2)$) est équivalente à la proposition ($\exists x \in [0, +\infty[, f(x) > 2$).
– De même, il est équivalent de dire ($\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \Longrightarrow f(x) > 2)$) ou ($\forall x \in [0, +\infty[, f(x) > 2$).

Proposition 1.2.26. *Soient E un ensemble et $P(x)$ une proposition qui contient une variable x, où x désigne un élément de E. On a les équivalences suivantes :*

1. *(non($\forall x \in E, P(x)$)) est équivalente à la proposition ($\exists x \in E$, (non $P(x)$)).*
2. *(non($\exists x \in E, P(x)$)) est équivalente à la proposition ($\forall x \in E$, (non $P(x)$)).*

1.3 Raisonnement mathématique

Une des tâches essentielles en mathématique est de chercher à s'assurer que telle ou telle proposition est vraie ou fausse. Il ne suffit pas de bien la comprendre pour cela.

Pour s'assurer de la vérité d'une proposition, on écrit des textes spécifiques, appelés démonstrations. Ces textes sont souvent complexes, ce qui explique que de nombreuses erreurs soient commises par les étudiants. Ils mettent en oeuvre un certain nombre de règles dont la connaissance est le plus souvent seulement implicite, ce qui rend la compréhension et la correction de ses erreurs difficiles. Ils s'articulent autour de la distinction entre propositions données (qu'on appelle hypothèses) et propositions à démontrer, qui n'est pas toujours clairement perçue.

Tout ceci explique qu'il soit difficile d'apprendre à rédiger soi-même une démonstration. L'objet de cette section est de vous y aider.

Pour cela, on va d'abord donner quelques éléments pour mieux comprendre la structure des démonstrations.

Quand on rédige une démonstration, la proposition que l'on cherche à démontrer s'appelle la conclusion. Au cours de la démonstration, on utilise des résultats déjà connus, par exemple, des définitions, des theorèmes ou des propositions déjà démontrés dans le cours ; mais aussi les prémices offerts par l'énoncé ou des résultats intermédiaires que l'on a obtenus préalablement. Toutes ces propositions s'appellent des données.

Une des raisons de la complexité des démonstrations est que l'on peut être amené pendant la démonstration à ajouter provisoirement de nouvelles données qui ne font pas partie de celles dont nous venons de parler et aussi de nouveaux objets qui ne sont pas décrits dans l'énoncé. Leur introduction est signalée par des expressions comme « Supposons que ... », « Soit ... », “Considérons ... ».

Il faut aussi noter qu'une démonstration ne contient pas que des propositions vraies.
L'exemple le plus évident en est celui des raisonnements par l'absurde où l'on ajoute aux données une proposition (non(A)) afin de montrer que c'est A qui est vraie.

Les paragraphes suivants essaieront d'expliquer tout ceci, en explicitant les principales règles d'écriture sous-jacentes. Ils permettront de mieux comprendre les différents statuts des propositions qui apparaissent dans un texte de démonstration.

1.3.1 Raisonnement direct

Dans beaucoup d'énoncés, on cherche à montrer que l'assertion « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie. Pour ce faire, on procède comme suit :

— On ajoute la proposition P aux données en écrivant par exemple supposons que P est vraie.

— On démontre ensuite que Q est vraie.

Exemple 1.3.1 :
Voici un énoncé : Montrer que si un entier est pair, alors le carré de cet entier est aussi pair.
Voilà une démonstration : Soit n un entier. On va démontrer que

$$n \text{ est pair } \Longrightarrow n^2 \text{ est pair.}$$

Supposons que n est pair. Par définition d'un nombre pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On en déduit que $n^2 = 4k^2$, donc $n^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2 \in \mathbb{Z}$. Par suite n^2 est pair.
On vient donc de montrer que si un entier est pair, alors le carré de cet entier est aussi pair.

Dans cet exemple on est à amener à montrer une proposition du type $(\forall x \in E, \quad P(x))$.
Dans la pratique, on commence en écrivant une expression du style « Soit x un élément de E », ou « Considérons un élément x de E », puis on écrit une démonstration de $P(x)$
En résumé :

— on choisit une lettre x qui n'a pas déjà été utilisée ailleurs et on ajoute la donnée $x \in E$;

— on démontre ensuite que $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.3.2 :
Démontrer que pour tout réel x, on a $(x > 2 \Longrightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 2$. Montrons que $2e^x + x^2 - 3x > 0$.
Comme $x > 2$, donc $e^x > 1$. on en déduit que $2e^x > 2$. Par suite $2e^x + x^2 - 3x > x^2 - 3x + 2$.
Or $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, comme $x > 2$, on a $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x^2 - 3x + 2 > 0$.
On a $2e^x + x^2 - 3x > x^2 - 3x + 2$ et $x^2 - 3x + 2 > 0$, donc $2e^x + x^2 - 3x > 0$.
On vient de montrer que pour tout réel x, on a $(x > 2 \Longrightarrow 2e^x + x^2 - 3x > 0)$.

Pour démontrer une proposition P, on peut vouloir se servir d'une proposition déjà démontrée de la forme (A ou B). Pour cela :

— on suppose A vraie et on démontre P ;

— on suppose B vraie et on démontre P.

Exemple 1.3.3 :
Démontrer que pour tout entier naturel n, n^2+3n est pair.

Soit n un entier naturel. Soit n est pair ou n est impair, il ya donc deux cas.

Premier cas : Supposons que n est pair.
Par définition, il existe un entier k tel que $n=2k$. On en déduit que $n^2+3n=4k^2+6k$, donc $n^2+3n=2k'$ où $k'=2k^2+3k$ est un entier. Par suite n^2+3n est pair.

Deuxième cas : Supposons que n est impair.
Par définition, il existe un entier k tel que $n=2k+1$. On en déduit que $n^2+3n=4k^2+8k+4$, donc $n^2+3n=2k'$ où $k'=2k^2+4k+2$ est un entier. Par suite n^2+3n est pair.

Dans tous les cas n^2+3n est pair, donc on vient de montrer que pour tout entier naturel n, n^2+3n est pair.

1.3.2 Raisonnement par l'absurde

Démontrer une proposition P par l'absurbe, c'est procéder comme suit :

— on ajoute (non P) aux données ;

— on démontre qu'on a à la fois Q et (non Q) pour une certaine proposition Q.

En pratique, le premier point s'exprime en disant « supposons (non P) ». La démonstration contient souvent des phrases au conditionnel. La fin du raisonnement par l'absurde est indiquée par une expression comme "Il y a contradiction" ou "C'est impossible". On peut annoncer "Raisonnons par l'absurde" et conclure "On a donc P".

Exemple 1.3.4 :
Montrons qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres entiers.
Supposons, par l'absurde, qu'il y ait un plus grand nombre entier, et appelons le n_0. Alors, n_0+1 est un nombre entier, et $n_0+1>n_0$, ce qui est absurde de par notre choix de n_0. Ceci montre donc qu'il n'y a pas de plus grand nombre entier naturel.

Exemple 1.3.5 :
Montrons que pour tout réel $x\neq -2$, on a $\dfrac{x+1}{x+2}\neq 1$.
Supposons qu'il existe un nombre réel $x_0\neq -2$ tel que $\dfrac{x_0+1}{x_0+2}=1$. On a

$$\begin{aligned}\frac{x_0+1}{x_0+2}=1 &\Longleftrightarrow x_0+1=x_0+2\\ &\Longleftrightarrow 1=2\end{aligned}$$

ce qui absurde.
Donc pour tout réel $x\neq -2$, on a $\dfrac{x+1}{x+2}\neq 1$.

1.3.3 Raisonnement par contraposition

Ce raisonnement est basée sur l'équivalence entre la proposition implication ($P\Longrightarrow Q$) et sa proposition contraposée ((non$Q$) $\Longrightarrow$ (non P)).
Ainsi pour démontrer ($P\Longrightarrow Q$), on peut donc démontrer ((non$Q$) $\Longrightarrow$ (non P)).

Exemple 1.3.6 :
Soit a et b deux nombres réels. Montrer que

$$(\forall \varepsilon > 0, a < b+\varepsilon) \Longrightarrow (a \leq b).$$

Nous allons donc montrer cette propriété par contraposition : la contraposée de « $(\forall \varepsilon > 0, a < b+\varepsilon) \Longrightarrow (a \leq b)$ » est « $(a > b) \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b+\varepsilon)$. »
Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b$. On a donc $a-b > 0$. En prenant $\varepsilon = a-b$, on a $b+\varepsilon = a$ et donc

$$a \geq b+\varepsilon.$$

C'est-à-dire que « $(a > b) \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b+\varepsilon)$. » et donc $(\forall \varepsilon > 0, a < b+\varepsilon) \Longrightarrow (a \leq b)$.

1.3.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n. Il est une conséquence du fait que tout entier naturel admet toujours un « un suivant ».

On distingue en général deux types de raisonnement par récurrence :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Récurrence simple

C'est le type le plus utilisé.
Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geq n_0$, il suffit de prouver que :

Initialisation : la propriété est vraie pour un certain entier n_0, ($P(n_0)$ est vrai)
Hérédité : pour tout $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Exemple 1.3.7 : Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$.

Solution : Considérons $P(n)$ la formule "$n! \geq 2^n$".
$P(4)$ s'écrit $4! \geq 2^4$, c'est à dire $24 \geq 16$ donc $P(4)$ est vraie.
Supposons que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$. Soit $n \geq 4$. On a $(n+1)! = (n+1)n!$, or $n! \geq 2^n$ car $P(n)$ est vraie. Donc $(n+1)! \geq (n+1)2^n$. Comme $n \geq 4$, on a $n+1 \geq 2$, d'où $(n+1)! \geq 22^n$, c'est-à-dire $(n+1)! \geq 2^{n+1}$.

On vient de montrer que si $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$ alors $P(n+1)$ est vraie. Par conséquent, pour tout $n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$.

Exemple 1.3.8 : Montrer que pour toutl $c \neq 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$1+c+c^2+\cdots+c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}.$$

Solution : Considérons la formule $P(n)$:$'' \; 1+c+c^2+\cdots+c^n = \dfrac{1-c^{n+1}}{1-c}.''$
Pour $n = 1$, on a $1+c = \dfrac{1-c^2}{1-c}$, donc $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$. Alors

$$\begin{aligned} 1+c+c^2+\cdots+c^n+c^{n+1} &= (1+c+c^2+\cdots+c^n)+c^{n+1} \\ &= \frac{1-c^{n+1}}{1-c}+c^{n+1} \text{ car } P(n) \text{ est vraie} \\ &= \frac{1-c^{n+1}+(1-c)c^{n+1}}{1-c} \\ &= \frac{1-c^{n+2}}{1-c}. \end{aligned}$$

Récurrence forte

C'est la forme la plus générale du raisonnement par récurrence.
Pour montrer que $P(n)$ est vrai pour tout entier naturel $n \geq n_0$, il suffit de prouver que :
— $P(n_0)$ est vrai,
— Pour tout entier $k \geq n_0$, si $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $\cdots$ $P(k)$ sont vrais alors $P(k+1)$ est vrai

Exemple 1.3.9 : Montrer que "tout entier $n \geq 2$, admet un diviseur premier".
Solution : Soit $H(n)$ la proposition "n admet un diviseur premier"
— Pour l'initialisation à $n = 2$, pas de problème : 2 admet 2 comme diviseur premier.
— Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose que tous les entiers $2 \leq k \leq n$ admettent un diviseur premier. Si $n+1$ est premier, alors H_{n+1} est vérifiée ($n+1$ est son propre diviseur premier), sinon $n+1$ n'est pas premier et il admet alors un diviseur r, avec $2 \leq r \leq n$.
D'après l'hypothèse de récurrence, l'entier r admet un diviseur premier qui est alors également un diviseur de $n+1$.
On a donc montré que tout entier n admet un diviseur premier.

1.3.5 Raisonnement par analyse et synthèse

Pour justifier l'existence (et parfois l'unicité) d'une solution à un problème, on peut être amené à déterminer la forme de celle-ci, qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé. On raisonne alors par analyse et synthèse :

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution, et on essaie d'en tirer le maximum de renseignements la concernant, afin d'établir une liste (courte !) de solutions possibles.

Synthèse : On reporte dans le problème initial la ou les solution(s) trouvée(s) précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution (puis une unique, ou plusieurs).

Conclusion : On énonce le résultat demandé.

Exemple 1.3.10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+6} = x$
Solution : Soit x une solution de l'équation. En élevant au carré chaque membre de l'équation, on obtient $x+6 = x^2$.
L'équation du second degré $x^2 - x - 6 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = 25$, donc $x = \dfrac{1-5}{2} = -2$ ou $x = \dfrac{1+5}{2} = 3$.
On teste maintenant les valeurs de x trouvées :
– Pour -2, on a $\sqrt{-2+6} = 2 \neq 2$. -2 n'est donc pas solution de l'équation.
– Pour 3, on a $\sqrt{3+6} = 3$. 3 est donc solution de l'équation.
Conclusion : L'équation admet 3 comme unique solution ; $\mathscr{S} = \{3\}$.

1.4 Ensembles

Premières définitions

La notion d'ensemble est considérée comme primitive. Étant donné un ensemble X, on doit être capable de dire sans ambiguité qu'un objet x est dans X ou non. Plus précisement,

Définition 1.4.1. Un *ensemble* est une collection d'objets appelés *éléments* ou *membres*. Un ensemble sans objets est appelé *ensemble vide* et est noté $\emptyset$ (ou parfois $\{\}$).
Soit E un ensemble non vide. Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$ et on dit aussi que a appartient à E. Pour dire qu'un objet b n'appartient pas à E, on écrit $b \notin E$.

Définition 1.4.2.
— Un ensemble contenant un seul élément est appelé *singleton*. Si l'élément est a, on notera l'ensemble correspondant $\{a\}$.
— Un ensemble contenant que deux éléments est appelé *paire*. Si ces élément sont a et b, on notera l'ensemble correspondant $\{a, b\}$.

Définition 1.4.3.
(i) Un ensemble A est un *sous-ensemble* (ou *une partie*) d'un ensemble B si $x \in A$ implique $x \in B$, et on écrit $A \subset B$. On dit aussi que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.
(ii) Deux ensembles A and B sont *égaux* si $A \subset B$ et $B \subset A$. On écrit $A = B$. Ce qui signifie que , A et B ont exactement les mêmes éléments. Si A and B ne sont pas égaux, alors on écrit $A \neq B$.
(iii) Un ensemble A est un *sous-ensemble propre* d'un ensemble B si $A \subset B$ et $A \neq B$. On écrit $A \subsetneq B$.
(iv) L'ensemble des parties d'un ensemble B est noté $\mathscr{P}(B)$. Dire que $A \in \mathscr{P}(B)$ signifie que $A \subset B$.

Remarque 1.4.4.
— **Définition en extension** : on peut définir un ensemble fini (c'est un ensemble qui a un nombre fini d'éléments) en énumérant les éléments qui le constituent. Par exemple :
$\{1,2,3,4,5\}$ est un ensemble constitué des 5 éléments 1, 2, 3, 4 et 5.
On utilisera des accolades pour délimiter les éléments de l'ensemble. L'ordre des éléments, et le fait qu'ils soient redoublés n'a aucune importance dans la définition de l'ensemble. Ainsi, les ensembles $\{4,2,1,4\}$ et $\{1,2,3,4,1,4\}$ sont-ils égaux à l'ensemble ci-dessus.
— **Définition en compréhension** : on s'appuie sur un ensemble déjà existant, dont on sélectionne les éléments vérifiant une certaine propriété. Par exemple :
(i) L'ensemble *des entiers naturels*, $\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\ldots\}$.
(ii) L'ensemble *des entiers relatifs* entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, est constitué des entiers naturels et de leurs opposés.
(iii) L'ensemble *des nombres rationnels* , $\mathbb{Q} := \left\{\dfrac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z} \text{ and } n \neq 0\right\}$, c'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme de quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul.
(iv) L'ensemble des entiers naturels pairs, $2\mathbb{N} = \{2m : m \in \mathbb{N}\}$.
(v) L'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$.

Remarque 1.4.5. Notons que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.4.6 : Considérons l'ensemble $A = \{0,\ 1,\ 2\}$.
On a : $1 \in A$, $4 \notin A$, $\{0,\ 2\} \subsetneq A$ et $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{0\},\ \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

***Exercice* 1.4.1** *: Mettre le signe ($\subset$ ou $\in$) à la place des pointillés.*

a) $\{1\} \cdots \{1,3\}$

b) $1 \cdots \{1,3\}$

c) $\{1\} \cdots \{\{1\},\{3\}\}$

d) $\emptyset \cdots \{1,3\}$

Opérations sur les ensembles

Définition 1.4.7. Soient X un ensemble, A et B des sous-ensembles de X.

(i) La *réunion* des ensembles A et B est définie par

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

(ii) l'*intersection* des ensembles A et B est définie par

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

(iii) Le *complémentaire* de B dans X est défini par

$$B^c := \{x \in X \text{ et } x \notin B\}.$$

(iv) La *différence de A et B* est définie par

$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c.$$

(v) On dit que les ensembles A and B sont *disjoints* if $A \cap B = \emptyset$.

(vi) La *différence symétrique de A et B* est définie par

$$A \triangle B := \{x \in X : (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

***Exercice* 1.4.2** *: Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$, $A = \{a,b,d\}$ et $B = \{b,d,e\}$. Déterminer*

1. *$A \cap B$ et $A \cup B$.*
2. *A^c et $B \setminus A$.*
3. *$A^c \cap B$*
4. *$A \cup B^c$.*
5. *$(A \cap B^c)^c$.*
6. *$(B^c \cup A)^c$.*

Proposition 1.4.8.

Soient E un ensemble, et A, B et C des parties de E. On a :

(i) $A \cap B \subset A$ *et* $A \subset A \cup B$

(ii) $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité) et* $A \cap B = B \cap A$ *(commutativité)*

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(associativité) et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(associativité)*

(iv) $A \cup \emptyset = A$ *($\emptyset$ est l'élément neutre de $\cup$) et* $A \cap E = A$ *(E est l'élément neutre de $\cap$)*

(v) $(A^c)^c = A$, $A \cup A^c = E$ *et* $A \cap A^c = \emptyset$

(vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$)*

(vii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$)*

Démonstration. Les relations (i) à (iv) sont évident !
Prouvons (v) :

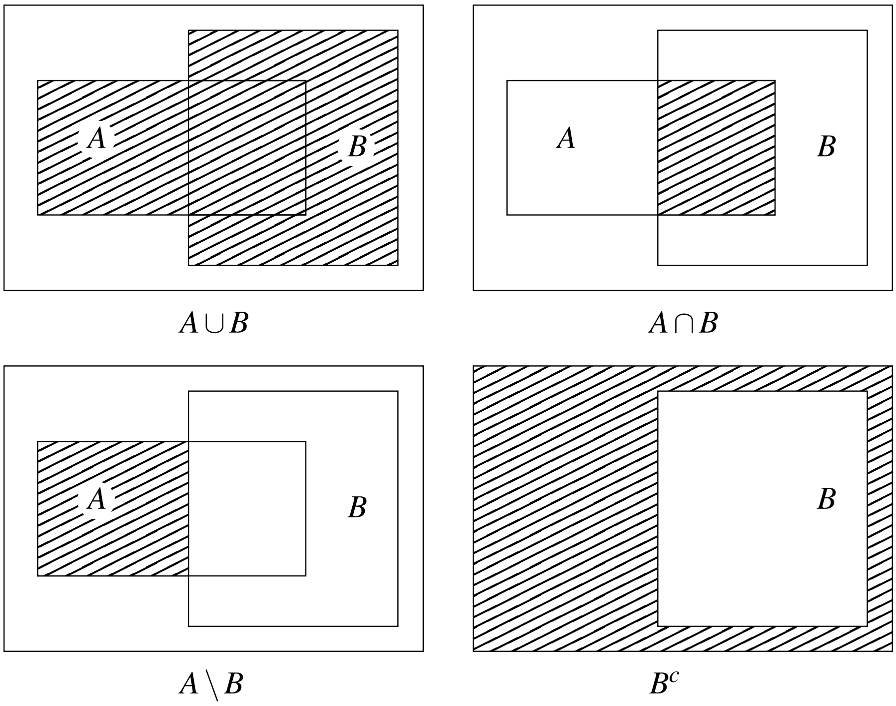


FIGURE 1.1 – Diagrammes de Venn des opérations sur les ensembles.

— $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in (A^C)^C$ par définition du complémentaire. D'où $(A^c)^c = A$.
— soit $x \in E$. On a soit $x \in A$, soit $x \notin A$ par définition, donc $x \in A^C$. D'où $A \cup A^C = E$.
— Supposons l'existence d'un x dans l'intersection $A \cap A^c$. On a alors $x \in A$ et $x \notin A$, ce qui est absurde. D'où $A \cap A^c = \emptyset$.

Prouvons (vi) : nous procédons par une double inclusion.
On a évidemment $A \cap B \subset A$, d'où $(A \cap B) \cup C \subset A \cup C$ et de même $A \cap B \subset B$ entraîne $(A \cup B) \cup C \subset B \cup C$. Par conséquent $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Réciproquement, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Si $x \in C$ alors $x \in (A \cap B) \cup C$.
Si $x \notin C$ alors, comme $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, on a nécessairement $x \in (A \cap B)$. Par suite $x \in (A \cap B) \cup C$. D'où $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.
Des deux inclusions ci dessus, on obtient $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Prouvons (vii) en utilisant le langage de la logique :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in C \text{ et } x \in A \cup B \\
&\Leftrightarrow x \in C \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in C \text{ et } x \in A) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \in B) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ ou } x \in B \cap C \\
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}$$

On a bien $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

Théorème 1.4.9 (Lois de De Morgan)**.** *Soient A, B, C des sous ensembles d'un ensemble E. Alors*

$$\begin{aligned}
(B \cup C)^c &= B^c \cap C^c, \\
(B \cap C)^c &= B^c \cup C^c,
\end{aligned}$$

plus généralement,

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Démonstration. Dans un premier temps, nous prouvons la deuxième assertion.

Montrons que $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$:

– Soit $x \in A \setminus (B \cup C)$. Alors x appartient à A, mais n'appartient pas à $B \cup C$. Comme x n'appartient pas à $B \cup C$, donc $x \notin B$ et $x \notin C$. Par suite $x \in A$ et $x \notin B$, c'est à dire, $x \in A \setminus B$. De même $x \in A \setminus C$. D'où $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Par conséquent $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

– Soit $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Donc $x \in (A \setminus B)$ et $x \in (A \setminus C)$. Comme $x \in (A \setminus B)$, on a $x \in A$ et $x \notin B$. Aussi $x \in (A \setminus C)$, donc $x \in A$ et $x \notin C$. De $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \in A$ et $x \notin C$ il vient que $x \in A \setminus (B \cup C)$.

– En conclusion, on a $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Montrons que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:

– Supposons que $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors x appartient à A, mais n'appartient pas à $B \cap C$. Comme x n'appartient pas à $B \cap C$, donc $x \notin B$ ou $x \notin C$. Par suite $x \in A$ et $x \notin B$ ou $x \in A$ et $x \notin C$, c'est à dire, $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

– Supposons que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Donc $x \in (A \setminus B)$ ou $x \in (A \setminus C)$. Si $x \in (A \setminus B)$, alors $x \in A$ et $x \notin B$. Aussi si $x \in (A \setminus C)$, alors $x \in A$ et $x \notin C$. Par conséquent $x \in A$ et $x \notin B$ ou $x \in A$ et $x \notin C$, c'est à dire $x \in A$

Pour démontrer la première assertion, il suffit de prendre $A = E$. □

Produits cartésien des ensembles

Définition 1.4.10 (Ensemble produit)**.**

On appelle *ensemble produit* ou *produit cartésien* de deux ensembles A et B l'ensemble $A \times B$ des *couples* (x,y) avec $x \in A$, $y \in B$:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

avec la convention $A \times B = \emptyset$ si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Soit A , B et C trois ensembles. On définit de la même manière l'ensemble

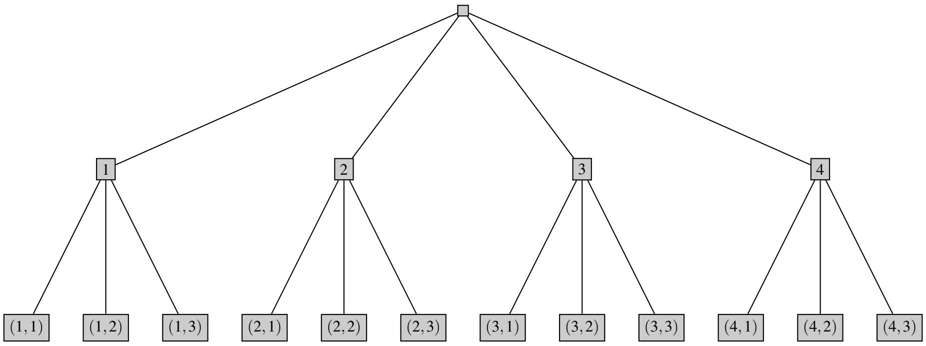
$$A \times B \times C := \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

D'une manière générale si $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n ensembles (avec $n \in \mathbb{N}^*$) alors on pose

$$A_1 \times A_2 \cdots \times A_n := \{(x_1, x_2, \cdots x_n) \mid x_i \in A_i, \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}.$$

Un $(x_1, \cdots, x_n)$ de $A_1 \times A_2 \cdots \times A_n$ est appelé un *n-uplet*.
Notation : Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $A^n = A \times A \cdots \times A$.

Exemple 1.4.11 : Soit $A = \{1,2,3,4\}$, et $B = \{1,2,3\}$.
Alors, $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.
Attention, l'ordre des éléments dans le couple est important : $(1,3) \neq (3,1)$.



***Exercice* 1.4.3 :** *Soit E et F deux ensembles.*
Montrer que $E \times F = F \times E$ si et seulement si $E = F$ ou $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

Famille d'éléments d'un ensemble indexée par un ensemble

Définition 1.4.12. Soit E un ensemble et I un ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de E indexée par l'ensemble I (appélé l'index ou ensemble des indices), la donnée d'un élément de E pour chaque $i \in I$. Si nous notons x_i cet élément alors la famille correspondante est notée $(x_i)_i \in I$. Plus précisement $(x_i)_i \in I$ est une famille d'éléments de E, indexée par l'ensemble I, lorsque pour tout $i \in I$, x_i appartient à E.

Réunions et intersections indexées par des ensembles

Définition 1.4.13.
Soit E un ensemble, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E indexée par un un ensemble non vide I (c'est à dire pour tout $i \in I$, on a $X_i \subset E$).

— On appelle **réunion** de $(X_i)_{i \in I}$ et on note $\bigcup\limits_{i \in A} X_i$ le sous-ensemble de E défini par $x \in \bigcup\limits_{i \in A} X_i$ si et seulement

$$\exists i \in I \ \ x \in X_i$$

— On appelle **intersection** de $(X_i)_{i \in I}$ et on note $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$ le sous-ensemble de E défini par $x \in \bigcap\limits_{i \in A} X_i$ si et seulement si

$$\forall i \in I \ \ x \in X_i.$$

Remarque 1.4.14. Dans le cas fini, cette définition est cohérente avec la définition de la réunion et de l'intersection déjà données en 1.4.7. Par exemple, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_n$.
Par analogie si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties d'un ensemble E, indexée par $\mathbb{N}$ alors on notera

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} X_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i = \bigcap_{i=0}^{+\infty} X_i.$$

***Exercice* 1.4.4 :** *On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n := \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$.*

a) Déterminer $A_1 \cap A_2$. *b) Déterminer $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.* *c) Déterminer $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Partition

Définition 1.4.15.
Soit E un ensemble, et $P \subset \mathscr{P}(E)$ un ensemble de sous-ensembles de E. On dit que P est une partition de E si et seulement si on a les trois propriétés suivantes :

— $\emptyset \notin P$ (aucun élément de P n'est vide)

— $\bigcup_{X \in P} X = E$ (P est un recouvrement de E)

— $\forall (X,Y) \in P^2,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ (les éléments de P sont deux-à-deux disjoints)

Exemple 1.4.16 :

— Considérons l'ensemble $E = \{0,1,2\}$. Les partitions de cet ensemble sont $\{\{0,1\},\{2\}\}$, $\{\{0,2\},\{1\}\}$, $\{\{1,2\},\{0\}\}$, $\{\{0\},\{1\},\{2\}\}$ et $\{E\}$.

— $\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$. Plus généralement, si A est une partie de E non non vide et différente de E, alors $\{A, A^C\}$ est une partition de E.

— Soit $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs, et $2\mathbb{N}+1$ l'ensemble des entiers impairs. $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ est une partition de $\mathbb{N}$

***Exercice* 1.4.5 :** *Soit $E = \{a,b,c,d,e,f,g\}$; dans chacun des cas suivants, dire si la famille de parties est une partition de E.*

1. $A_1 = \{a,b,e\}$, $A_2 = \{c,g\}$ *et* $A_3 = \{d\}$.
2. $B_1 = \{c,e,g\}$, $B_2 = \{a,d,f\}$ *et* $B_3 = \{b,e\}$
3. $C_1 = \{a,b,e,g\}$, $C_2 = \{c,d\}$
4. $D = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

1.5 Fonctions

1.5.1 Définition, graphe, image, antécédent

Définition 1.5.1. Soit E et F deux ensembles.
Une *fonction* $f : E \longrightarrow F$ (de E dans F) est définie par un sous-ensemble de $G_f \subseteq E \times F$ (appelé *graphe* de f) tel que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que $(x,y) \in G_f$, on note $y = f(x)$. L'ensemble E est l'ensemble de départ et l'ensemble F est l'ensemble d'arrivée de la fonction f.

Une fonction f de E dans F se note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

cela signifie qu'à tout élément de x de départ E, la fonction f associe s'il existe l'élément $f(x)$ de l'ensemble d'arrivée F. Plus précisement, dans cette notation :

— la première flèche reliant E à F qui s'écrit $\longrightarrow$ sans barre verticale à l'extrémité gauche se lit : “dans”. (on lit donc f va de E dans F).

— la deuxième flèche reliant x à $f(x)$ possède, elle, une barre verticale à l'extrémité gauche et se lit : “a pour image” (on lit donc x a pour image $f(x)$).

Remarque 1.5.2. Le fait que chaque élément de E possède au plus une image dans F signifie que certains éléments de E peuvent ne pas avoir d'éléments dans F du tout. Mais d'un autre côté, cela veut également dire que les éléments de E ne peuvent pas avoir plus d'une image dans F.

Définition 1.5.3. Soit f une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.
— Soit $x \in E$. Si $f(x)$ existe alors $f(x)$ est appelé l'*image* de x par f.
— Soit $y \in F$. S'il existe $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$ alors x est appelé l'*antécédent* de y par f.

Exemple 1.5.4 : On donne la représentation d'une fonction $f : E \longrightarrow F$ par son diagramme de Venn où $E = \{a,b,c,d,e,f\}$ et $F = \{1,2,3,4,5\}$

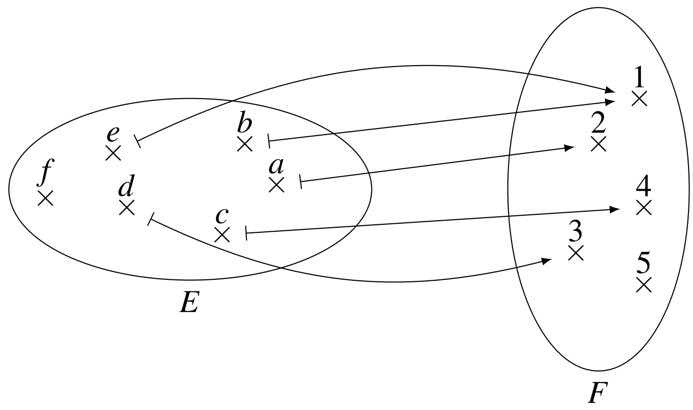


FIGURE 1.2 – Représentation d'une fonction par un diagramme de Venn

— dans l'ensemble de départ E l'élément f n'a pas d'image dans l'ensemble d'arrivée F par f;
— 1 admet deux antécédents qui sont b et e;
— dans l'ensemble d'arrivée F l'élément 5 n'a pas d'antécédent dans de départ E par f

Exemple 1.5.5 : 1. Un exemple de fonction définie par son graphe.
Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et $F = \{a,b,c\}$. On définit la fonction f par le graphe :

$$G_f = \{(1,a),(2,c),(4,a)\} \subset E \times F$$

Autrement dit
$$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & 1 & \longmapsto & a \\ & 2 & \longmapsto & c \\ & 4 & \longmapsto & a \end{array}$$

ou encore $f(1) = a$, $f(2) = c$ et $f(4) = a$.

2. Un exemple de fonction définie par sa formule algébrique.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

L'image d'un élément x de $\mathbb{R}$ est $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

3. Soit E un ensemble. L'application *identité* $\mathrm{Id}_E : E \to E$, définie par $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.
4. La fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ appelée *conjugaison*, qui, à un nombre complexe $z = x + iy$ (avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) associe son conjugué $\bar{z} = x - iy$.

Remarque 1.5.6. On prendra garde à ne pas confondre la fonction f et $f(x)$ qui est l'image de l'élément x de l'ensemble de départ.

Remarque 1.5.7. On notera que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et que pour tout x appartenant à l'ensemble de départ E, on a $f(x) = g(x)$.
Comme exemple, les fonctions $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ sont des fonctions différentes.

***Exercice* 1.5.1** *: On considère la relation f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe $f(n) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$). Cette relation définit-elle une fonction ?*

Image directe et image réciproque

Définition 1.5.8. Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une fonction de E dans F.

— Soit $A \subset E$. On appelle l'image (directe) de A par le sous ensemble noté $f(A)$ de F défini par

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in F \text{ tel qu'il existe } x \in A \text{ vérifiant } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}. \end{aligned}$$

En particulier l'image de E, $f(E)$ appelé image de f et est notée $\mathrm{Im}(f)$.

— Soit $B \subset F$. On appelle l'image réciproque de B par le sous ensemble noté $f^{-1}(B)$ de E défini par

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E \text{ tel qu'il existe } y \in B \text{ vérifiant } f(x) = y\} \\ &= \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.5.9. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Soient A et B deux sous ensembles de F. Alors*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c.$$

Démonstration. Soient A et B deux sous ensembles de F.
• Démontrons que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ ou } (f(x) \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ ou } (x \in f^{-1}(B)) \\ x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
• Démontrons que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in A) \text{ et } (f(x) \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(A)) \text{ et } (x \in f^{-1}(B)) \\ x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.
• Démontrons que $f^{-1}(A^c)=\left(f^{-1}(A)\right)^c$. Soit $x\in E$,

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(A^c) &\Leftrightarrow f(x)\in A^c\\ &\Leftrightarrow f(x)\notin A\\ &\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(A)\\ x\in f^{-1}(A^c) &\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)^c. \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(A^c)=\left(f^{-1}(A)\right)^c$. □

Proposition 1.5.10. *Soient E et F deux ensembles et $f\colon E\to F$ une fonction. Soient A et B deux sous ensembles de E. Alors*

$$\begin{aligned} f(A\cup B)&=f(A)\cup f(B),\\ f(A\cap B)&\subset f(A)\cap f(B). \end{aligned}$$

Démonstration. Soient A et B deux sous ensembles de E.
• Démontrons que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$. Soit $y\in f(A\cup B)$, il existe alors $x\in A\cup B$ tel que $y=f(x)$.
Si $x\in A$ alors $y=f(x)\in f(A)$, de même si $x\in B$ alors $y=f(x)\in f(B)$. Donc $y\in f(A)\cup f(B)$, par conséquent $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.
Réciproquement, soit $y\in f(A)\cup f(B)$. Si $y\in f(A)$ alors il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$, or $A\subset A\cup B$, donc $x\in A\cup B$. Par suite $y\in f(A\cup B)$. De même, si $y\in f(B)$ alors il existe $x\in B\subset A\cup B$ tel que $y=f(x)$, d'où $y\in f(A\cup B)$. En conclusion $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.
Finalement $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
• Démontrons $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. Soit $y\in f(A\cap B)$, il existe alors $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$. Comme $x\in A$ et $y=f(x)$, donc $y\in f(A)$; de même comme $x\in B$ et $y=f(x)$, donc $y\in f(B)$. D'où $y\in f(A)\cap f(B)$. Ce qui prouve que $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
• En général, il n'y a pas d'égalité : considérons $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x|\end{array}$, $A=]-\infty,0]$ et $B=[0,+\infty[$.
On a $f(A\cap B)=f(\{0\})=\{0\}$ mais $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty[\cap[0,+\infty[=[0,+\infty[$. □

***Exercice* 1.5.2 :**

1.5.2 Ensemble de définition, Application

Définition 1.5.11. Soient E et F deux ensembles, et $f:E\longrightarrow F$ une fonction. On appelle *ensemble de définition* (ou *domaine de définition*) de la fonction f l'ensemble noté $\mathscr{D}(f)$ défini par

$$\mathscr{D}(f)=\{x\in E\ :\ \exists y\in F\,;\, f(x)=y\}.$$

C'est donc l'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble de départ qui possèdent une image dans l'ensemble d'arrivée F.

Du coup, on peut carrément définir les fonctions à partir de leur ensemble de définition. Dans ce cas là, on ne les appellera plus fonctions mais applications.

Définition 1.5.12. Soient E et F deux ensembles. Une application $f:E\longrightarrow F$ une fonction dont le domaine de définition est égal à l'ensemble de départ E.

1.5.3 Fonction injective, fonction surjective, fonction bijective

Définition 1.5.13. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est *injective* si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent.
Autrement dit : f est injective si $\forall x, y \in E$ on a $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

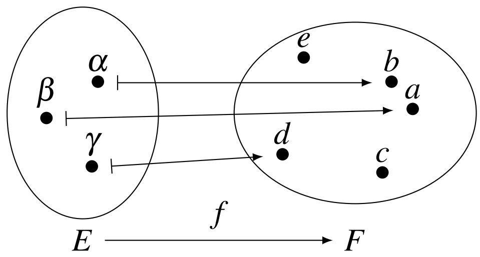


FIGURE 1.3 – Exemple de diagramme de Venn d'une fonction injective

Proposition 1.5.14. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Alors f est injective si et seulement si $\forall x, y \in E$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient par contraposée à partir de la définition de l'injectivité d'une fonction. □

Définition 1.5.15. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est *surjective* si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent.
Autrement dit : f est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$.

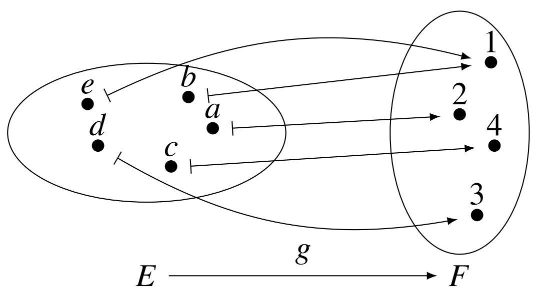


FIGURE 1.4 – Exemple de diagramme de Venn d'une fonction surjective

Définition 1.5.16. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est *bijective* si tout $y \in F$ admet exactement un antécédent.
Autrement dit : f est surjective si f est une application injective et surjective.

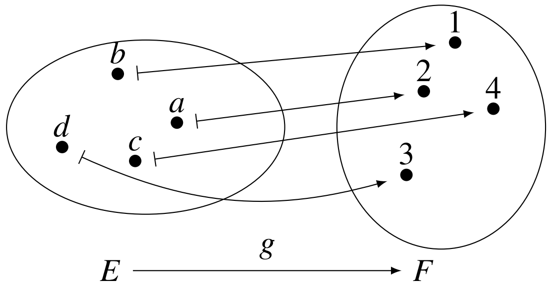


FIGURE 1.5 – Exemple de digramme de Venn d'une fonction bijective

Théorème 1.5.17. *Soient E et F deux ensembles. Si* $\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ *est une bijection, alors il existe une unique application notée f^{-1}, qui est appelée l'*application réciproque *(ou la bijection réciproque) de f et qui est définie par*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Remarque 1.5.18. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Fixons $m \in F$ et considérons l'équation $f(x) = m$, d'inconnue x dans E. Alors

— f est surjective si et seulement si l'équation admet au moins une solution;
— f est injective si et seulement si l'équation admet au plus une solution;
— f est bijective si et seulement si l'équation admet une et une seule solution;

Exemple 1.5.19 :

1. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car elle n'est pas injective. En effet $1 \in \mathbb{R}_+$ et l'équation $f(x) = 1$ qui s'écrit $x^2 = 1$ admet deux solutions -1 et 1 dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car elle n'est pas surjective. En effet $-1 \in \mathbb{R}$ et l'équation $f(x) = -1$ qui s'écrit $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective car pour tout $m \in [0,4]$ et l'équation $f(x) = m$ qui s'écrit $x^2 = m$ admet une unique solution $x = \sqrt{m}$ dans l'ensemble de départ $[0,2]$.

Remarque 1.5.20.

— Une application injective est appelée une injection.
— Une application surjective est appelée une surjection.
— Une application bijective est appelée une bijection.

***Exercice* 1.5.3 :** *L'application* $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 2x & si\ x \geq 0 \\ -2x-1 & si\ x < 0 \end{cases} \end{array}$ *est bijective*

1.5.4 Composition de fonctions

Définition 1.5.21. Soient E, F et G trois ensembles, et $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux fonctions. On définit la fonction composée de g par f, notée $g \circ f$, par

$$\begin{array}{rcl} g\circ f : E & \to & F \\ x & \mapsto & (g\circ f)(x) := g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

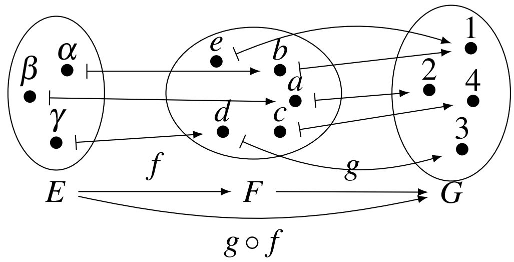


FIGURE 1.6 – Diagramme de Venn de composée de deux fonctions

Proposition 1.5.22. *Soient E, F et G trois ensembles, et $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux fonctions. Alors l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$ est*

$$\mathscr{D}(g\circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in \mathscr{D}(g)\}.$$

Remarque 1.5.23. Soient E, F, G et H des ensembles.
— Si $f\colon E \to E$ et $g\colon E \to E$ deux fonctions, alors en général $f\circ g \neq g \circ f$.
— Si $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$ trois fonctions, alors on a $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

Exercice* 1.5.4 *:

Théorème 1.5.24. *Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$f\circ g = Id_F \quad \textit{et} \quad g\circ f = Id_E.$$

Démonstration.
– Supposons que $f : E \to F$ est une application bijective. Alors d'après la définition de l'application réciproque donnée dans 1.5.17, l'application réciproque f^{-1} de f vérifie bien $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E$.
– Réciproquement, supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g\circ f = \mathrm{Id}_E$.

- Montrons que f est injective :
  Soit x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ g(f(x)) &= g(f(y)) \\ (g\circ f)(x) &= (g\circ f)(y) \\ \mathrm{Id}_E(x) &= \mathrm{Id}_E(y) \\ x &= y. \end{aligned}$$

  Donc f est injective.

- Montrons que f est surjective :
  Soit $y \in F$. Comme $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, on a $(f \circ g)(y) = \mathrm{Id}_F(y)$ c'est-à-dire $f(g(y)) = y$. Il existe donc $x = g(y)$ tel que $y = f(x)$, par conséquent f est surjective.
- En conclusion, f étant injective et surjective, elle est donc bijective.

□

Remarque 1.5.25. Si une application $f : E \to F$ est une bijection alors sa bijection réciproque f^{-1} est l'unique application de F dans E qui vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1.5.5 Restriction et prolongement d'une fonction

Définition 1.5.26 (Restriction)**.** Soient E et F deux ensembles, et A un sous ensemble de E. Soit $f : E \to F$ une fonction.
On appelle *restriction* de f à A et on note $f_{|A}$ l'application de $f_{|A} : A \to F$ définie pour tout $x \in A$ par $f_{|A}(x) = f(x)$.

Définition 1.5.27 (Prolongement)**.** Soient E et F deux ensembles, et E' un ensemble tel que $E \subset E'$. Soit $f : E \to F$ une fonction.
Une fonction $g : E' \to F$ est un *prolongement* de f à E' si pour tout $x \in E$ par $g(x) = f(x)$ (en d'autre terme $g_{|E} = f$).

1.5.6 Fonctions réelles

Définition 1.5.28. Nous dirons qu'une fonction $f : E \to F$ est une fonction réelle lorsque E et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Représentation graphique d'une fonction réelle

On munit le plan $\mathbb{R}^2$ d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble $M(x,y)$ du plan lorsque x prend toutes les valeurs de $\mathscr{D}(f)$:

$$\mathscr{C}_f \;=\; \{M(x, f(x)) \;:\; x \in \mathscr{D}(f)\}.$$

On dit que $y = f(x)$ est une équation de la courbe représentative de la fonction f.

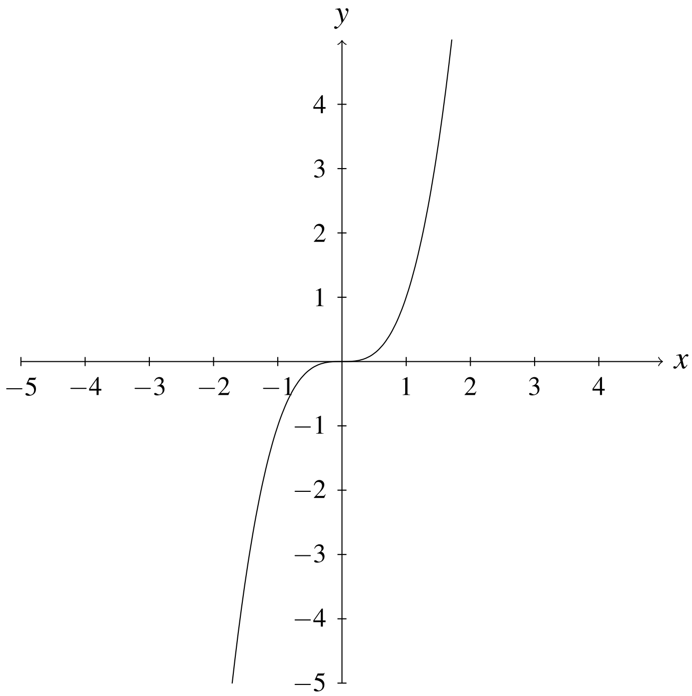


FIGURE 1.7 – Courbe de la fonction réelle $x \to x^3$

La représentation graphique d'une fonction donne un aspect géométrique de la fonction.

Opérations algébriques sur les fonctions réelles

Définition 1.5.29. Soient E un sous ensemble de $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes :

1. la fonction λf par
$$\begin{array}{rccl} \lambda f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}$$
dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}(\lambda f) = \mathscr{D}(f)$,
2. la fonction somme $f+g$ par
$$\begin{array}{rccl} f+g : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$
dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}(f+g) = \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$,
3. la fonction produit fg par
$$\begin{array}{rccl} fg : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (fg)(x) = f(x)g(x) \end{array}$$
dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}(fg) = \mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$,
4. la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ par
$$\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g} : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathscr{D}(f) \cap \{x \in \mathscr{D}(g) : g(x) \neq 0\}$,

Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et I un sous-ensemble de l'ensemble de définition $\mathscr{D}(f)$ de f.

Définition 1.5.30. On dit que f est :
- *majorée* sur I si il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$, (et le réel M est appelé un majorant de f)
- *minorée* sur I si il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$, (et le réel m est appelé un minorant de f)
- *bornée* sur I si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$.

Remarque 1.5.31. On dira que f est minorée (majorée ou bornée) si f est minorée (majorée ou bornée) sur $\mathscr{D}(f)$.

Extremum d'une fonction

Définition 1.5.32. Soit f une fonction réelle. On dit que :
- f admet un *maximun* (global) en $x_0 \in \mathscr{D}(f)$ si :

$$\forall x \in \mathscr{D}(f), \quad f(x) \leq f(x_0),$$

- f admet un *minimun* (global) en $x_0 \in \mathscr{D}(f)$ si :

$$\forall x \in \mathscr{D}(f), \quad f(x) \geq f(x_0),$$

- f admet un *maximun* local en $x_0 \in \mathscr{D}(f)$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que :

$$\forall x \in I \cap \mathscr{D}(f), \quad f(x) \leq f(x_0),$$

- f admet un *minimun* local en $x_0 \in \mathscr{D}(f)$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que :

$$\forall x \in I \cap \mathscr{D}(f), \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Remarque 1.5.33. Ont dit que f admet un *extremum local* si f admet un maximum local ou un minimum local.

Ont dit que f admet un *extremum*si f admet un maximum ou un minimum.

Relation d'ordre sur les fonctions

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles définies sur un même sous-ensemble I de $\mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g)$.

Définition 1.5.34. On dit que f est :
- *inférieure* à g sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$,
- *supérieure* à g sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$,
- *égale à* g (ou *coïncide* avec g) sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$.

Fonctions monotones

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et I un sous-ensemble de l'ensemble de définition $\mathscr{D}(f)$ de f.

Définition 1.5.35. On dit que f est :

— *croissante* sur I si pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ on a :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y),$$

— *décroissante* sur I si pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ on a :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y),$$

— *strictement croissante* sur I si pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ on a :

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y),$$

— *strictement décroissante* sur I si pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$ on a :

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

Remarque 1.5.36. On dira que f est croissante (décroissante) si f est croissante (décroissante) sur $\mathscr{D}(f)$.

Définition 1.5.37.

— On dit que f est *monotone* sur I si elle soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

— On dit que f est *strictement monotone* sur I si elle soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

Remarque 1.5.38. Étudier les variations d'une fonction c'est partager son ensemble de définition en intervalles tels que sur chacun d'eux, f y soit monotone.

Proposition 1.5.39. *Soient f et g deux fonctions réelles et $I \subset \mathscr{D}(f)$.*

— *La somme de deux fonctions croissantes sur I est une fonction croissante sur I.*

— *La somme de deux fonctions décroissantes sur I est une fonction décroissante sur I.*

— *Si f est croissante sur I et si g est croissante sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.*

— *Si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur I.*

— *Si f est croissante sur I et si g est décroissante sur$f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.*

— *Si f est décroissante sur I et si g est croissante sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.*

Fonctions paires, fonctions impaires

Définition 1.5.40. Soit f une fonction réelle. On dit que :

— f est paire si

- pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a $-x \in \mathscr{D}(f)$,

  - pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a $f(-x) = f(x)$.

— f est impaire si
  - pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a $-x \in \mathscr{D}(f)$,
  - pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Remarque 1.5.41. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction paire est une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ tandis que celle d'une fonction impaire est une courbe symétrique par rapport à l'origine du repère O.

Fonctions périodiques

Définition 1.5.42. Soit f une fonction réelle. On dit que f est *périodique* s'il existe un réel $T \in \mathbb{R}^*$ tel que :
— pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, on a $x+T \in \mathscr{D}(f)$ et $x-T \in \mathscr{D}(f)$
— pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$, $f(x+T) = f(x)$.
Le nombre réel T est appelé une période de la fonction f et f est T- périodique.

Remarque 1.5.43. Soit f une fonction réelle périodique. Si l'ensemble des périodes strictement positives de f a un plus petit élément P, celui-ci est appelé la période de f (la notion de plus pétit n'étant pas encore définie, on peut donc croire que la période est une période qui est plus petite que toutes les autres). Toutes les périodes de f sont alors de la forme nP, où n est un entier relatif.

Remarque 1.5.44. Si une fonction f est périodique et de période T alors sa courbe représentative est invariante par les translations de vecteurs $nT\vec{i}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Fonctions lipschitziennes

Définition 1.5.45. Soit f une fonction réelle et I un sous ensemble de $\mathscr{D}(f)$. On dit que f est *lipschitzienne* sur I s'il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in I \forall y \in I, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

On dit aussi que f est *k-lipschitzienne* ou *lipschitzienne* de rapport k.

Exemple 1.5.46 :

1. Toute fonction affine sur $\mathbb{R}$ est lipschitzienne : En effet si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |ax+b-ay-b| \\ &= |ax-ay| \\ |f(x) - f(y)| &\leq |a||x-y|. \end{aligned}$$

   f est donc lipschitzienne de rapport $|a|$.

2. La somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne. En effet, soit f et g deux fonctions lipschitzienne sur un ensemble I. Il existe des réels k_1 et k_2 tels que pour pour tout $(x,y) \in I^2$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq k_1|x-y| \qquad \text{et} \qquad |g(x) - g(y)| \leq k_2|x-y|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \\
&= |(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))| \\
&\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
& k_1|x-y|+k_2|x-y| \\
|(f+g)(x)-(f+g)(y)| & (k_1+k_2)|x-y|.
\end{aligned}$$

Par suite $f+g$ est lipschitzienne de rapport k_1+k_2.

Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles telles que les polynômes, le sinus, le cosinus, le logarithme népérien, l'exponentiel népérien doivent être familières dès le début du calcul. Nous pouvons faire référence à certaines de leurs propriétés au besoin, même si celles ci n'ont pas été prouvées rigoureusement pour le moment. Nous présenterons des preuves rigoureuses au fur et à mesure du développement de cet cours.

– Fonction polynôme et fonction rationnelle

Définition 1.5.47. Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction polynôme si il existe un entier naturel n et des réels $a_1, a_2, \cdots, a_n$ avec $a_n \neq 0$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

On dit aussi que f est une fonction polynôme de degré n.

Remarque 1.5.48. Les fonctions polynômes sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.5.49. Une fonction affine est une fonction polynôme de degré 1 et une fonction polynôme f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=ax$ avec $a\in\mathbb{R}$ est appelée une fonction linéaire. Un cas particulier est celui des fonctions polynômes de degré 2 : il s'agit des fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a,b,c sont trois réels donnés, a étant différent de zéro.

Rappelons la définition

Définition 1.5.50. Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ une fonction polynôme de degré 2 de la variable réelle x.
— Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé discriminant $f(x)=ax^2+bx+c$.
— L'expression $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique de $f(x)$.

L'étude des polynôme de degré 2 permet de résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré

$$ax^2+bx+c=0$$

selon le signe du discriminant :

Théorème 1.5.51.
Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de racine réelle.
Lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une racine double, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

De plus le signe de $ax^2 + bx + c$ est égal à celui du coefficient a.
Lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

De plus le signe de $ax^2 + bx + c$ est égal à celui du coefficient a pour tout $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, et égal au signe contraire de celui du coefficient a pour tout $x \in]x_1, x_2[$ (si on suppose par exemple que $x_1 < x_2$.)

On résume cela par le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Définition 1.5.52. Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômes.

Remarque 1.5.53. Les fonctions rationnelles sont définies et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ où le dénominateur ne s'annule pas.

Les limites à connaître des fonctions polynômes et rationnelles sont :
– Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

– Si n et p sont des entiers naturels, $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_p$ des réels tels $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ alors :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x \cdots + b_p x^p} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n}{b_p} x^{n-p}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x \cdots + b_p x^p} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n}{b_p} x^{n-p}$.

– Fonction logarithmique

Définition 1.5.54. La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$ et c'est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Plus précisement, ln est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$, telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0.$$

Les limites à connaître de la fonction logarithme sont :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$
- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Proposition 1.5.55. *Pour tout réel strictement positif x et y et pour tout nombre rationnel α on a :*

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$

La fonction logarithmique est strictement croissante et c'est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Notons que e est l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$. La représentation graphique de la fonction logarithme est donnée ci-dessous

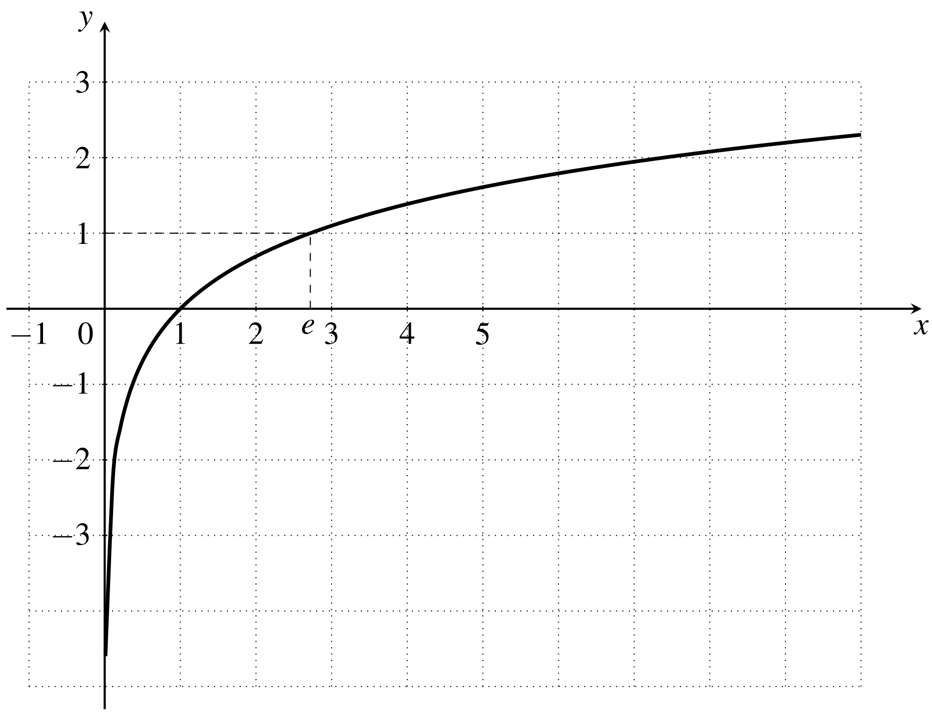


FIGURE 1.8 – Courbe de la fonction logarithme : ln

– Fonction exponentielle

Définition 1.5.56. La fonction exponentielle, notée exp, est définie sur $\mathbb{R}$. C'est la fonction réciproque de la fonction logarithme. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(x) > 0.$$

On a la relation fondamentale avec la fonction logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln y.$$

Les limites à connaître de la fonction exponentielle sont :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\alpha e^x = 0$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}_+$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Proposition 1.5.57. *Pour tous réels x et y et pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a*

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$

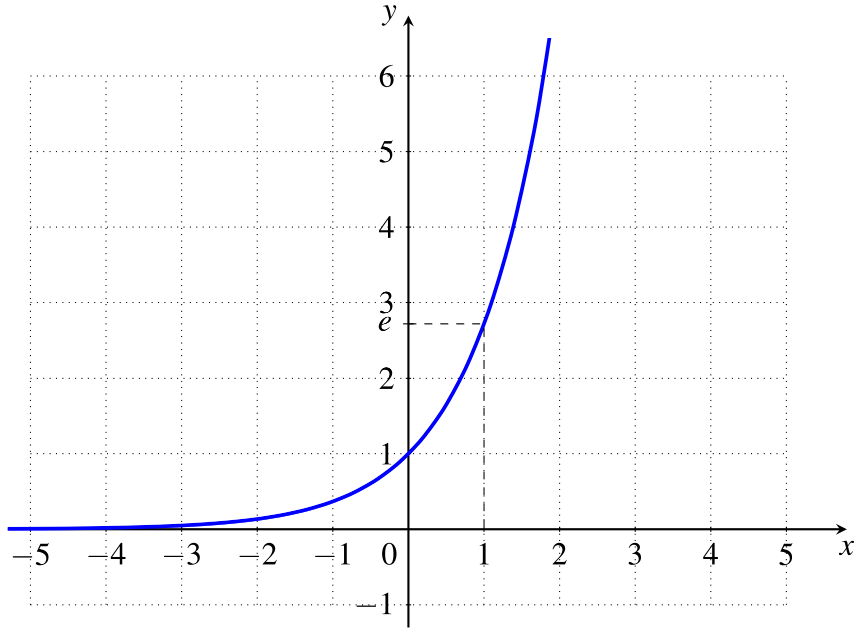


FIGURE 1.9 – Courbe de la fonction exponentielle : exp

– Fonction puissance et fonction racine n-ième

Définition 1.5.58. Une fonction puissance est une fonction de la forme $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, appelé l'exposant. La définition, les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions puissances dépendent de l'exposant α.

— Par convention, pour tout réel x non nul on pose $x^0 = 1$.

— Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, f_α a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_\alpha(x) = x^\alpha := \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}.$$

De plus, f_α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}_-^*)$, f_α a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f_\alpha(x) = x^\alpha := \frac{1}{x^{-\alpha}}.$$

De plus, f_α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

— Pour $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, f_α a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ si n est impair et $\mathbb{R}_+$ si est n pair. On a pour tout $x \in \mathscr{D}(f_\alpha)$,

$$y = x^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow y^n = x.$$

De plus, lorsque n est impair f_α est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et lorsque n est pair f_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarquons que la fonction $f_{\frac{1}{n}}$ est appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$ est notée $\sqrt[n]{}$. Lorsque $n = \dfrac{1}{2}$ on parle de racine carrée et on note simplement pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
Dans le cas où $n = \dfrac{1}{3}$ on parle de racine cubique et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

— Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ avec $\alpha = \dfrac{m}{n}$, f_α a le même ensemble de définition que la fonction $f_{\frac{1}{n}}$ et pour tout $x \in \mathscr{D}(f_\alpha)$

$$f_\alpha(x) = x^\alpha := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

De plus, lorsque n est impair f_α est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et lorsque n est pair f_α est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$, f_α a pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_\alpha(x) = x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

De plus, f_α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.5.59. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Lorsque f_α est dérivable en x alors*

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

La propriété suivante est donnée pour $x > 0$ et $y > 0$ afin qu'elle soit vraie pour toute valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de l'adapter pour les autres valeurs de x et y dans $\mathbb{R}$ lorsqu'on peut écrire x^α et x^β.

Proposition 1.5.60 (Propriétés)**.** *Soient $x > 0$ et $y > 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors*

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.
- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$ *et* $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ *et* $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\beta$.

- *Pour* $\alpha \neq 0$, $y = x^\alpha \Longleftrightarrow x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.

***Exercice* 1.5.5 :** *Démontrer la proposition 1.5.60.*

***Exercice* 1.5.6 :** *Calculer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Solution de l'exercice 1.5.6 :
Par définition pour $x > 0$, $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $X \to 0$ quand $x \to +\infty$, par conséquent

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

En conclusion $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Proposition 1.5.61 (Croissance comparée)**.**
- *Si* α *et* β *sont des réels strictement positifs alors*

$$\lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

- *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta > 0$ *alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$

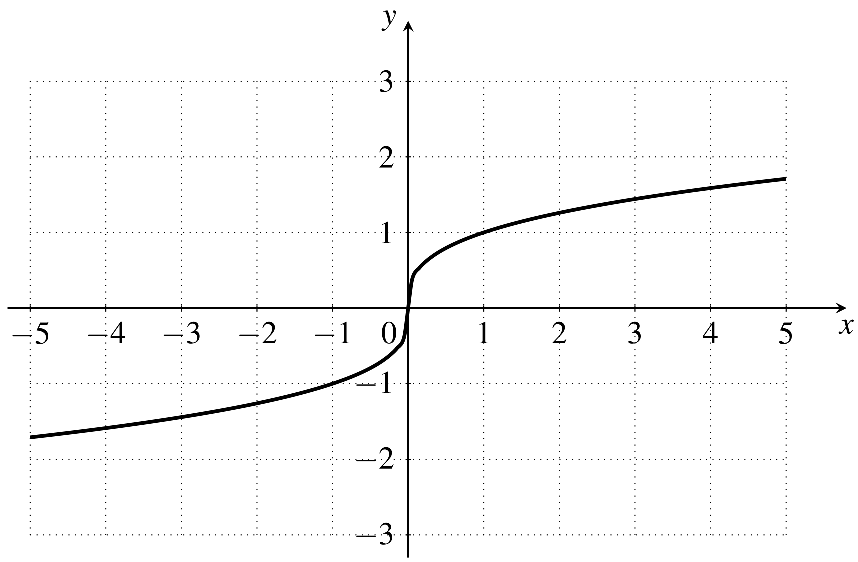


FIGURE 1.10 – Courbe des fonctions : $x \to \sqrt[3]{x}$

– Fonctions trigonométriques

Définition 1.5.62 (Cercle trigonométrique)**.** On appelle *cercle trigonométrique* tout cercle dont le rayon est égal à l'unité de longueur et sur lequel on a choisi un sens de rotation *direct* ou sens positif (contraire à celui des aiguilles d'une montre).

Les fonctions trigonométriques sont définies à partir des points du cercle trigonométrique. On considère dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ le cercle trigonométrique centré en O et on note $A(0,1)$ comme le montre la figure 1.11.

Soient a un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{(\vec{i},\overrightarrow{OM})} = a$, a est exprimé en radian.. On appelle H et K les projetés de M respectivement sur les axes $(O,\vec{i})$ et $(O,\vec{j})$. On pose alors

$$\overline{OH} = \cos a \qquad \text{et} \qquad \overline{OK} = \sin a.$$

En fait $\sin a$ et $\cos a$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Si le réel a n'est pas de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, alors la perpendiculaire en A à l'axe $(O,\vec{i})$ coupe la droite (OM) en T et on pose

$$\tan a = \overline{AT}.$$

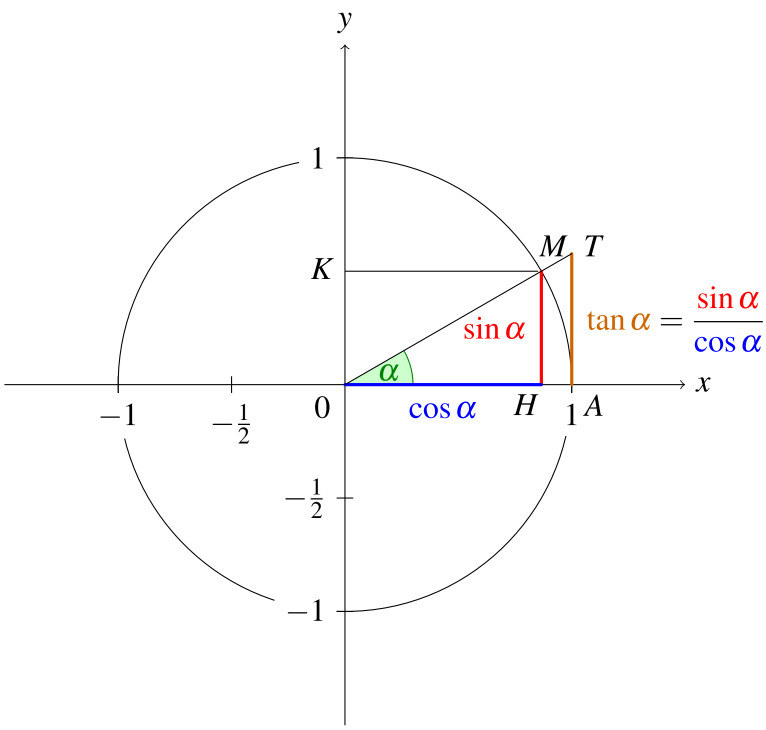


FIGURE 1.11 – Définition du sinus, du cosinus et de la tangente

Définition 1.5.63. On définit, ainsi, géométriquement, les fonctions

sinus, $\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$, *cosinus*, $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ et *tangente*, $\tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$

d'ensembles de définition respectifs

$$\mathscr{D}(\sin) = \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}(\cos) = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}(\tan) = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Valeurs particulières

Les valeurs particulières suivantes des fonctions sin, cos et tan sont à connaitre absolument :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	0

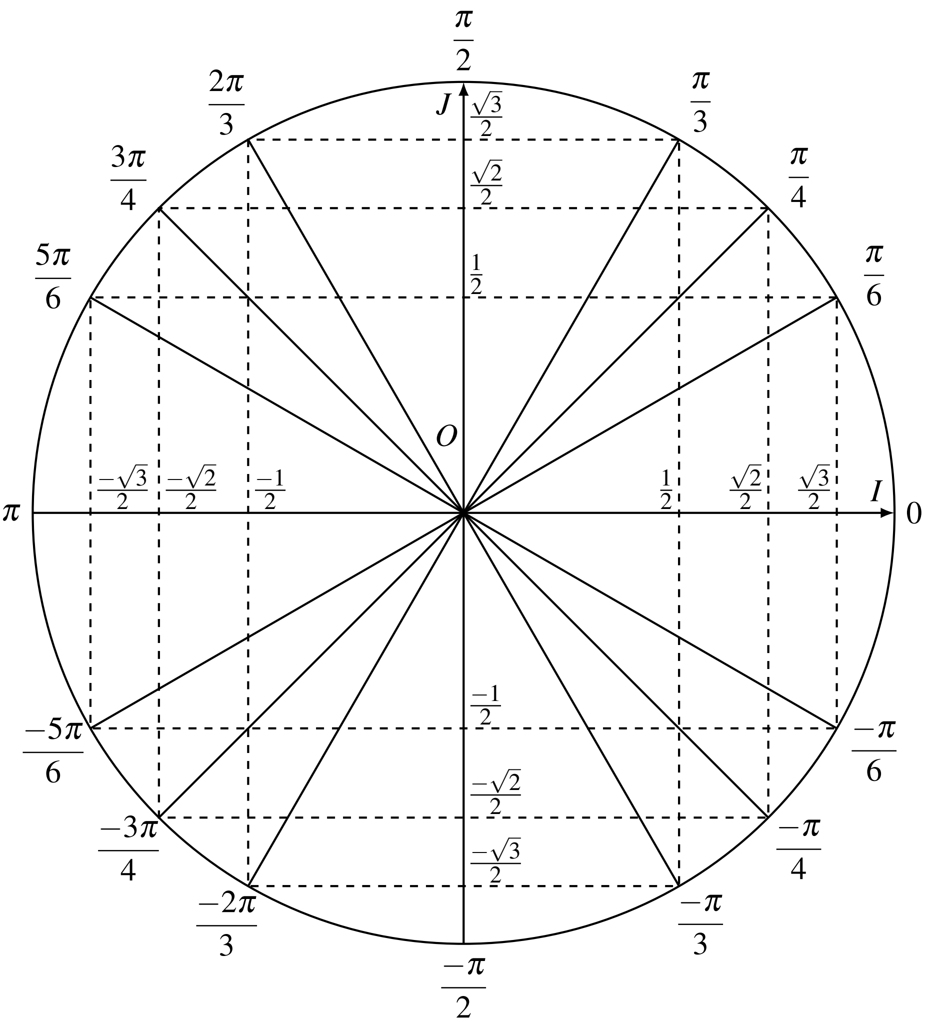


FIGURE 1.12 – Lecture sur le cercle trigonométrique

Premières relations

— On a les relations fondamentales suivantes :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin a \leq 1,\ -1 \leq \cos a \leq 1 \text{ et } \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \text{ et } 1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}.$$

— La fonction cos est paire et les fonctions sin et tan sont impaires :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x \text{ et } \cos(-x) = \cos x\,; \qquad \forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(-x) = -\tan x.$$

— Les fonctions cos et sin sont $2\pi-$périodiques et la fonction tan est $\pi-$périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x + k\pi) = \tan x \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

— Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan a$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$	$\tan(x+\pi) = \tan a$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

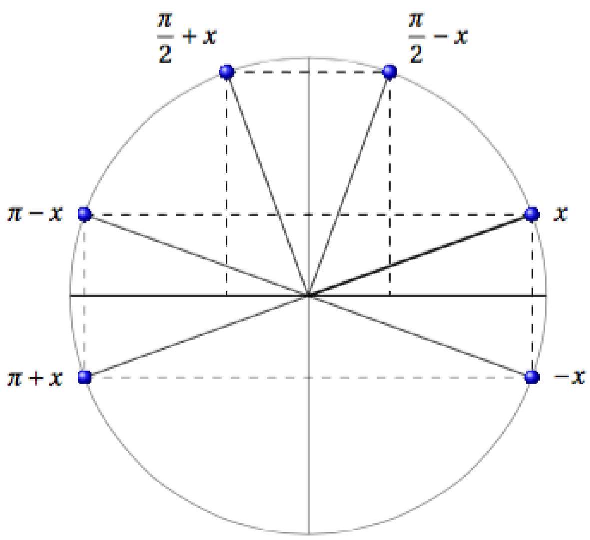


FIGURE 1.13 – Exemple d'utilisation du cercle trigonométrique

— Les fonctions cos, sin et tan sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin x \text{ et } \sin'(x) = \cos x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan'(x) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

— De plus :
- La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante.
- La restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ est strictement décroissante.
- La restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante.

Les formules qui suivent n'ont parfois pas de sens pour certaines valeurs de la variable : par exemple, la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ n'est valable que pour tous réels a et b vérifiant $a,b \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi,\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $\tan a \tan b \neq 1$.

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$	$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$	$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

En particulier, quand $a=b$, on a :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1-2\sin^2 a$	
$\sin 2a = 2\sin a\cos a$	$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Transformation de produits en sommes

En sommant ou en faisant la différence de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ (même chose pour sin), on obtient les formules de transformation de produits en sommes :

$\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
$\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
$\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

Transformation de sommes en produits

En posant $p=a+b$ et $q=a-b$) dans les formules précédentes, on obtient les formules suivantes de transformation de sommes en produits :

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Limites à connaître

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ <}}\tan x = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ >}}\tan x = -\infty$

Équations et inéquations trigonométriques

Pour résoudre une équation trigonomérique, on utilise généralement les équivalences suivantes :

- Pour tout x et α dans $\mathbb{R}$, $\sin x = \sin\alpha \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,;\ x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.
- Pour tout x et α dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \cos\alpha \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,;\ x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.
- Pour tout x et α dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, $\tan x = \tan\alpha \Longleftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,;\ x = \alpha + k\pi$.

Exemple 1.5.64 :

Courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente

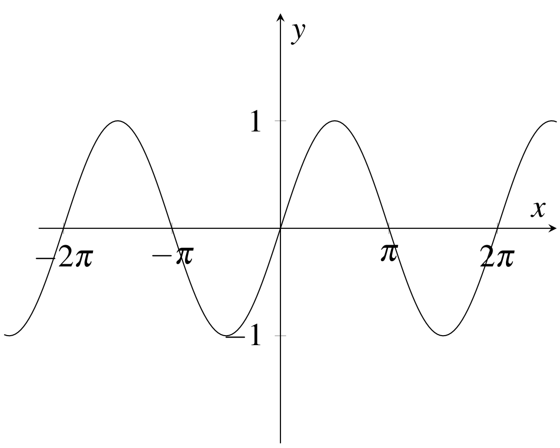


FIGURE 1.14 – Courbe de la fonction sinus

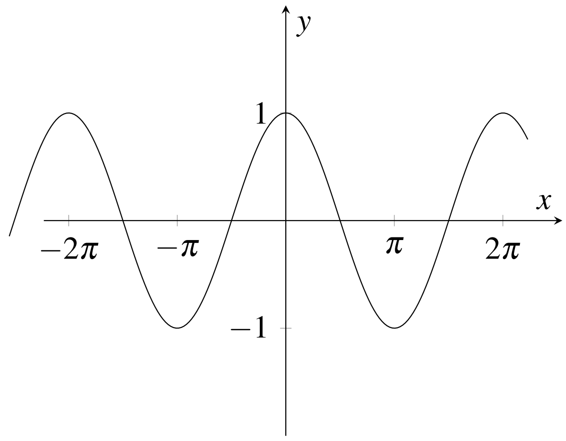


FIGURE 1.15 – Courbe de la fonction cosinus

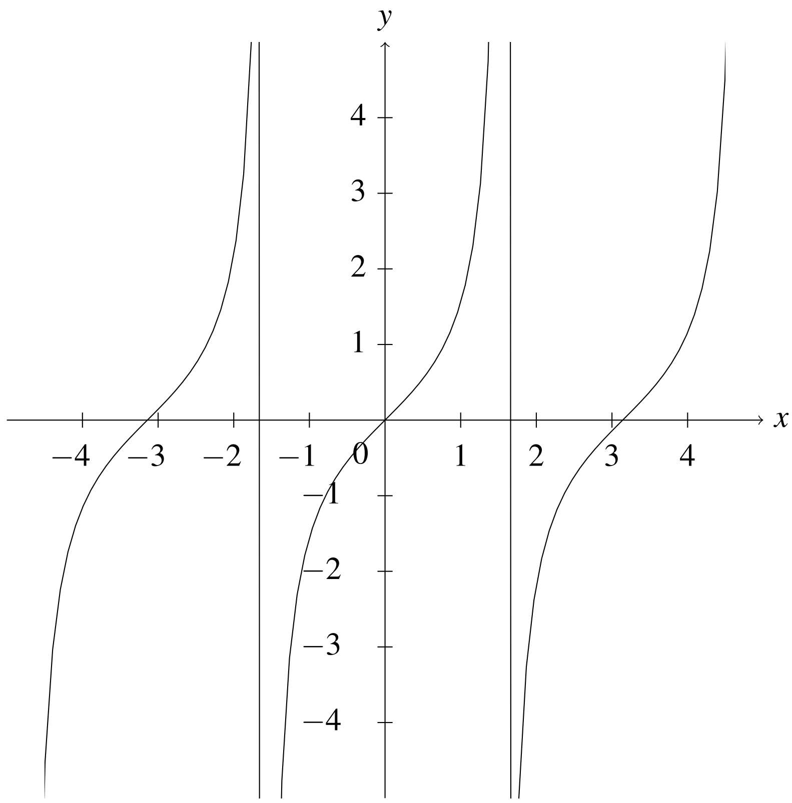


FIGURE 1.16 – Courbe de la fonction tangente

– Fonctions hyperboliques

Définition 1.5.65. Les fonctions *cosinus hyperbolique*, *sinus hyperbolique*, *tangente hyperbolique* notées respectivement ch, sh et th sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Remarquons immédiatement les relations :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x, \quad \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}, \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

La fonction ch est paire, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
La fonction sh est impaire, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.
La fonction th est mpaire, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.
Dans toutes formules qui suivent a et b sont des réels.

Formule d'addition

$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$	$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b + \mathrm{ch}a\,\mathrm{sh}b$	$\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}a + \mathrm{th}b}{1 + \mathrm{th}a\,\mathrm{th}b}$
$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b$	$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b - \mathrm{ch}a\,\mathrm{sh}b$	$\mathrm{th}(a-b) = \dfrac{\mathrm{th}a - \mathrm{th}b}{1 - \mathrm{th}a\,\mathrm{th}b}$

En particulier pour $a = b$,

$\mathrm{ch}2a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2 a$	$\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}2a - 1}{2}$ et $\mathrm{ch}^2 a = \dfrac{\mathrm{ch}2a + 1}{2}$
$\mathrm{sh}2a = 2\mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}a$	$\mathrm{th}2a = \dfrac{2\mathrm{th}a}{1 + \mathrm{th}^2 a}$

Transformation de produit en somme

$\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b))$	$\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b))$
$\mathrm{sh}a\,\mathrm{sh}b = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b))$	$\mathrm{sh}a\,\mathrm{ch}b = \dfrac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b))$

Transformation de somme en produit

$\mathrm{ch}a + \mathrm{ch}b = 2\mathrm{ch}\dfrac{a+b}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{a-b}{2}$	$\mathrm{ch}a - \mathrm{ch}b = 2\mathrm{sh}\dfrac{a+b}{2}\,\mathrm{sh}\dfrac{a-b}{2}$
$\mathrm{sh}a + \mathrm{sh}b = 2\mathrm{sh}\dfrac{a+b}{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{a-b}{2}$	$\mathrm{th}a + \mathrm{th}b = \dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b}$

Limites à connaître

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}x}{x} = 1$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}x}{x} = 1$

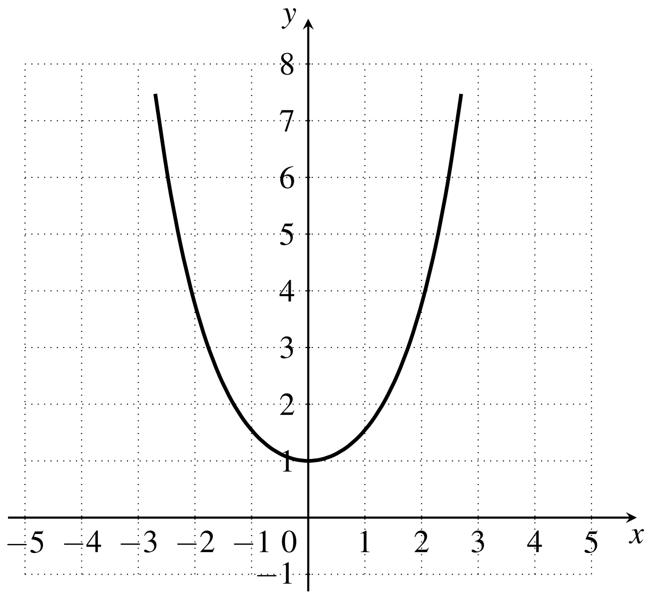


FIGURE 1.17 – Courbe de la fonction cosinus hyperbolique : ch

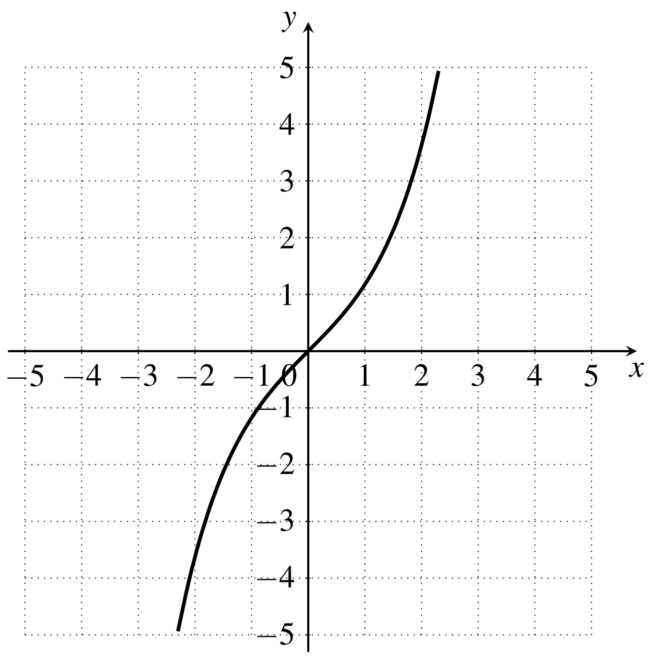


FIGURE 1.18 – Courbe de la fonction sinus hyperbolique : sh

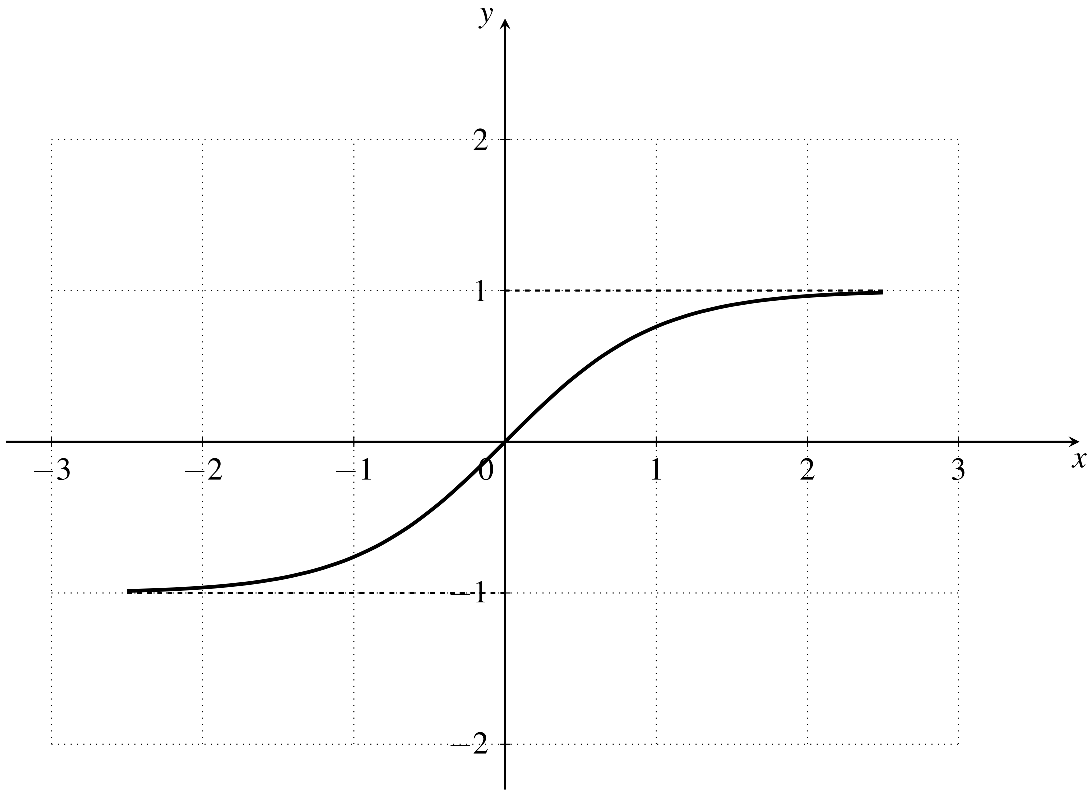


FIGURE 1.19 – Courbe de la fonction tangente hyperbolique : th

1.6 Exercices

***Exercice* 1.6.1 :** *Si A, B et C sont des sous-ensembles d'un ensemble E, montrer que,*

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

***Exercice* 1.6.2 :** *Montrer que le principe de récurrence forte est équivalent à la récurrence simple.*

***Exercice* 1.6.3 :** *Soit A, B et C sont des sous-ensembles d'un ensemble E Montrer que*
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

***Exercice* 1.6.4 :** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *let* $A_n := \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$.
a) Déterminer $A_1 \cap A_2$.
b) Déterminer $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
c) Déterminer $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

***Exercice* 1.6.5 :** *Déterminer* $\mathscr{P}(S)$ *l'ensemble des parties de l'ensemble S dans les cas suivants :*
a) $S = \emptyset$,
b) $S = \{1\}$,
c) $S = \{1, 2\}$,
d) $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

***Exercice* 1.6.6 :** *Soient* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *deux applications.*
a) Montrer que si $g \circ f$ *est injective, alors* f *est injective.*

b) *Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

c) *Donner un exemple explicite d'applications f et g telles que $g \circ f$ est bijective, mais ni f ni g n'est bijective.*

Exercice* 1.6.7 *: *Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n < 2^n$.*

Exercice* 1.6.8 *: *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.*

Exercice* 1.6.9 *: *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.*

Exercice* 1.6.10 *: *Trouver le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2(n_0+5)^2 < n_0^3$. Montrer que $2(n+5)^2 < n^3$ pour tout $n \geq n_0$.*

Exercice* 1.6.11 *: *Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 < 2^n$.*

Chapitre 2

Nombres réels

L'objet principal avec lequel nous travaillons en analyse est l'ensemble des nombres réels. Comme cet ensemble est si fondamental, souvent beaucoup de temps est consacré à la construction formelle de l'ensemble des nombres réels. Cependant, nous adoptons une approche plus facile ici et supposons simplement qu'un tel ensemble avec les propriétés correctes existe.

2.1 Ensemble ordonné, Borne supérieure, Borne inférieure

Ensemble ordonné

Définition 2.1.1. Une *relation d'ordre* $\leq$ sur un ensemble E, est une relation, qui est
— Réflexive : pour tout $x \in E$, $x \leq x$.
— Antisymétrique : pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ et $y \leq x$ entraîne $x = y$.
— Transitive : pour tous $x, y, z \in E$, $x \leq y$ et $y \leq z$ entraîne $x \leq z$.

Définition 2.1.2 (ordre total)**.** Un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ est dit *totalement ordonné* si deux éléments sont toujours comparables, c'est-à-dire :
pour tous $x, y \in E$ ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$.

Remarque 2.1.3. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$ et $x, y \in E$. Si $x \leq y$ alors on dit que x est plus petit que y ou que y est plus grand que x.

Majorant, Minorant, Borne supérieure, Borne inférieure

Définition 2.1.4 (Majorant, Minorant)**.** Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. Soit $A \subset E$. Un élément $M \in E$ est un *majorant* de A si pour tout $x \in A$, $x \leq M$. (On dit aussi A est majoré par M.)
Un élément $m \in E$ est un *minorant* de A si pour tout $x \in A$, $m \leq x$. (On dit aussi A est minoré par m.)

Définition 2.1.5. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. Soit $A \subset E$.
On dit que A est borné s'il est majoré et minoré. En d'autre terme il existe des éléments m et M dans E tels que pour tout $x \in A$,

$$m \leq x \leq M.$$

Définition 2.1.6 (Plus grand élément, plus petit élément)**.** Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. Soit $A \subset E$.

Un élément $y \in A$ est *le plus grand élément (maximum)* de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq y$. Lorsqu'il existe, on note le plus grand élément $y = \max A$.
De même, $y \in A$ est *le plus petit élément (minimum)* de A si, pour tout $x \in A$, $x \geq y$. Lorsqu'il existe, on note le plus petit élément $y = \min A$.

Remarque 2.1.7. Si A possède un plus grand élément y, alors y est un majorant de A, et c'est évidemment le plus petit possible.
Si A possède un plus petit élément y, alors y est un minorant de A, et c'est évidemment le plus grand possible.

Définition 2.1.8 (Borne supérieure, borne inférieure)**.** Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. Soit $A \subset E$.
Un élément $y \in E$ est appelé *borne supérieure* de A, noté $y = \sup A$, si
— y est un majorant de A.
— y est le plus petit des majorants de A.
De même, on dit que $y \in E$ est la *borne inférieure* de A, noté $y = \inf A$, si
— y est un minorant de A.
— y est le plus grand des minorants de A.

Clairement, si la borne supérieure de A existe, elle est unique. De même si la borne inférieure de A existe, elle est unique.

Remarque 2.1.9. Si $A \subset E$ possède une borne supérieure y et $y \in A$, alors y est le plus grand élément de A. Dans ce cas, on dit que la borne supérieure est *atteinte*.
De même si $A \subset E$ possède une borne inférieure y et $y \in A$, alors y est le plus petit élément de A et on dit que la borne inférieure est atteinte.

Ce n'est pas toujours le cas.

***Exercice* 2.1.1** *: Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E muni de la relation d'inclusion "$\subset$". Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.*

1. *Montrer la relation d'inclusion "$\subset$" est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.*
2. *Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de $\{A,B\}$ et dire s'il s'agit de plus grand ou plus éléments.*

Solution :

1. On a bien évidemment :
   — Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $X \subset X$.
   — Pour tout $X,Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \subset Y$ et $Y \subset X$, on a $X = Y$.
   — Pour tout $X,Y,Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \subset Y$ et $Y \subset Z$, on a $X \subset Z$.
   Donc a relation d'inclusion "$\subset$" est bien une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.
2. • On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $A \cup B$ est un majorant de $\{A,B\}$. D'autre part si M est un majorant de $\{A,B\}$, alors on a $A \subset M$ et $B \subset M$. Par conséquent $A \cup B \subset M$. Ainsi $A \cup B$ est le plus petit des majorants de $\{A,B\}$, c'est donc la borne supérieure de $\{A,B\}$.
   • On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $A \cap B$ est un minorant de $\{A,B\}$. Si M est un minorant de $\{A,B\}$, alors on a $M \subset A$ et $M \subset B$. Donc $M \subset A \cap B$. Ainsi $A \cap B$ est le plus grand des minorants de $\{A,B\}$, par conséquent $A \cap B$ est la borne inférieure de $\{A,B\}$.
   • Si $A \cap B \in \{A,B\}$ alors $A \subset B$ ou $B \subset A$, et si $A \cup B \in \{A,B\}$ alors $A \subset B$ ou $B \subset A$. Par conséquent $A \cap B$ est le plus petit élément de $\{A,B\}$ et $A \cap B$ est le plus grand élément de $\{A,B\}$ si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

***Exercice* 2.1.2** *: Soit S un ensemble totalement ordonné et $A \subset S$ un sous ensemble fini. Montrer que A est borné. De plus,* $\inf A$ *et* $\sup A$ *existent et que* $\inf A \in A$ *et* $\sup A \in A$.

***Exercice* 2.1.3** *: Soit S un ensemble ordonné et $B \subset S$ un sous ensemble borné. Soit $A \subset B$ un sous ensemble non vide.*
Supposons que A et B admettent des bornes supérieures et inférieures. Montrer que

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

***Exercice* 2.1.4** *: Soit S un ensemble ordonné et A un sous ensemble non vide de S. On suppose que A admet un majorant b et que $b \in A$. Montrer que $b = \sup A$.*

***Exercice* 2.1.5** *: Soit S un ensemble ordonné et A un sous ensemble non vide de S tel que* $\sup A$ *existe. Supposons un ensemble B, $B \subset A$ tel que pour tout $x \in A$ il existe $y \in B$ vérifiant $x \leq y$. Montrer que* $\sup B$ *existe et* $\sup B = \sup A$.

2.2 Ensembles des nombres réels

Motivations

Sur l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ des entiers naturels, on considère l'équation

$$x + n = 0, \tag{2.1}$$

où n est un entier naturel fixé.

L'équation (2.1) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. Pour régler ce défaut de l'ensemble $\mathbb{N}$, on construit par un procédé de symétrisation, un ensemble plus grand dans lequel toute équation du type (2.1) admet une solution. Cet ensemble noté $\mathbb{Z}$ est appelé l'ensemble des entiers relatifs. On a donc $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation

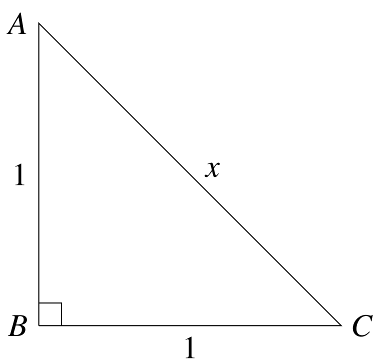
$$qx = p, \tag{2.2}$$

(où $p \in Z$ et $q \in \mathbb{Z}^*$) n'a pas de solution lorsque q ne divise pas p. On construit toujours par symétrisation, un ensemble noté $\mathbb{Q}$ tel que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et dans lequel toute équation de la forme (2.2) admet toujours une solution. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \, ; \, p \in Z \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Une application du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle isocèle de côtés perpendiculaire de longueur 1 montre que l'hypothénuse a pour longueur un nombre "x" vérifiant

$$x^2 = 2.$$



Proposition 2.2.1. *Le nombre x tel que $x^2 = 2$, dont l'existence a été observée géométriquement, n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.*

Preuve :
Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$. On peut écrire $x = \dfrac{m}{n}$ comme fraction irréductible. Donc $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$ par suite $m^2 = 2n^2$. On en déduit que m^2 est divisible par 2 et donc m est divisible par 2. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$, d'où $2k^2 = n^2$. Par conséquent n est divisible par 2. Ce qui est absurde, car la fraction $\dfrac{m}{n}$ est irréductible. □

Il est donc nécessaire de construire un ensemble $\mathbb{R}$ contenant strictement $\mathbb{Q}$ dans lequel les équations du type
$$x^2 = 2$$
admettent une solution.

2.2.1 Existence et Propriété de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 2.2.2. Il existe un ensemble $\mathbb{R}$ (dont les éléments sont appelés les nombres réels) contenant $\mathbb{Q}$, muni de deux lois de compositions internes + (addition) et $\cdot$ (multiplication), et d'une relation d'ordre $\leq$, vérifiant les propriétés 2.2.3 à 2.2.8 ci-dessous :

Propriété 2.2.3 ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif)**.**

(A1) *Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $x + y \in \mathbb{R}$.*

(A2) (commutativité de l'addition) *$x + y = y + x$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.*

(A3) (associativité de l'addition) *$(x + y) + z = x + (y + z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(A4) *Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$, tel que $0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(A5) *Pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$, tel que $x + (-x) = 0$.*

(M1) *Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $xy \in \mathbb{R}$.*

(M2) (commutativité de la multiplication) *$xy = yx$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.*

(M3) (associativité de la multiplication) *$(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(M4) *Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$ (avec $1 \neq 0$), tel que $1x = x$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

(M5) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$, il existe un élément, $1/x \in \mathbb{R}$ tel que $x(1/x) = 1$.*

(D) (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition) *$x(y + z) = xy + xz$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

Il est intéressant de noter que plusieurs propriétés simples de nombres réels sont obtenues par application des propriétés ci-dessus. Par exemple, pour montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $0x = 0$, on procède comme suit : de $(A4)$, on a $0 + 0 = 0$; par (D), $x0 = x(0 + 0) = x0 + x0$. Maintenant par $(A5)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x0 + y = 0$. Par suite
$$0 = x0 + y = (x0 + x0) + y = x0 + (x0 + y) = x0 + 0 = x0,$$
la troisième égalité provient de $(A3)$ et la dernière de $(A4)$.

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on notera respectivement $a + a$, $a + a + a$ par $2a$, $3a$ et d'une manière générale si $n \in \mathbb{N}^*$, $a + \cdots + a = na$ où a apparait n fois dans la somme $a + \cdots + a$.

Étant donné $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la nième puissance a^n de a comme étant le produit $a \cdots a$ de a avec lui-même pris n fois. De plus, si $a \neq 0$, alors on pose $a^0 = 1$ et $a^{-n} = (1/a)^n$. Les propriétés élémentaires suivantes sont des conséquences immédiates des propriétés algébriques de $\mathbb{R}$ ci-dessus :

(i) $(a_1a_2)^n = a_1^n a_2^n$ pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (avec $a_1a_2 \neq 0$ si $n \leq 0$).
(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ et $a^{m+n} = a^m a^n$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$ si $m \leq 0$ ou $n \leq 0$).

Propriété 2.2.4 (la relation d'ordre $\leq$ est totale dans $\mathbb{R}$)**.**
(O1) (Réflexivité) *Si $x \in \mathbb{R}$ alors $x \leq x$.*
(O2) (Antisymétrie) *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.*
(O3) (Transitivité) *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.*
(O4) (Totalité) *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$ ou $x = y$.*

Remarque 2.2.5.
— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \leq y$ alors on dit que x est inférieur à y. On dit aussi y est supérieur ou égal à x et l'on note $y \geq x$.
— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \leq y$ et $x \neq y$ alors on dit que x est strictement inférieur à y ou que y est strictement supérieur à x ; et l'on note respectivement $x < y$ ou $y > x$.
— On note

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 0\},\ \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\},\ \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\} \text{ et } \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < 0\}.$$

• Un nombre réel x est dit positif si $x \in \mathbb{R}_+$ et strictement positif lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
• Un nombre réel x est dit négatif si $x \in \mathbb{R}_-$ et strictement négatif lorsque $x \in \mathbb{R}_-^*$.

Propriété 2.2.6 (Compatibilité de $\leq$)**.**
(C1) (par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$) *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$.*
(C2) (par rapport à multiplication dans $\mathbb{R}_+$) *Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, si $x \leq y$ alors $xz \leq yz$.*

Remarque 2.2.7. Soient x, y, z des nombres réels.
(i) $x > 0 \iff -x < 0$.
(ii) Si $x > 0$ et $y < z$, alors $xy < xz$.
(iii) Si $x < 0$ et $y < z$, alors $xy > xz$.
(iv) Si $x \neq 0$, alors $x^2 > 0$.
(v) Si $0 < x < y$, alors $0 < {}^1\!/\!_y < {}^1\!/\!_x$.
(vi) Si $0 \leq x < y$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $0 \leq x^n < y^n$.

Démonstration. Prouvons (i). L'inégalité $x > 0$ implique d'après (C1) que $x + (-x) > 0 + (-x)$. D'où $0 > -x$. La réciproque s'obtient de façon similaire.

Pour (ii), l'inégalité $y < z$ implique $0 < z - y$ par (C1). En appliquant (C2) on obtient $0 < x(z - y)$. D'où $0 < xz - xy$, et en appliquant à nouveau (C1) on a $xy < xz$.

Pour (iii) : Supposons que $x < 0$ et $y < z$. Alors $-x > 0$, en appliquant (ii), on obtient $-xy < -xz$. Puis grâce à (C1), on aboutit à $xy > xz$.

Pour (iv) : Supposons dans un premier temps que $x > 0$. Alors par (C2) on obtient que $x^2 > 0$. Maintenant supposons que $x < 0$, en utilisant (iii) pour $y = x$ et $z = 0$, on aboutit à $x^2 > 0$.

Prouvons (v) : soit $0 < x < y$. Il est clair que ${}^1\!/\!_x \neq 0$ (car $x{}^1\!/\!_x = 1$).
Supposons que ${}^1\!/\!_x < 0$, alors ${}^{-1}\!/\!_x > 0$ d'après (i). D'où par application de (ii) (puisque $x > 0$) on obtient $x({}^{-1}\!/\!_x) > 0 \cdot x$ c'est-à-dire $-1 > 0$, ce qui absurbe car $1 > 0$ (en effet $1 = 1^2$ et $1 \neq 0$). Par suite ${}^1\!/\!_x > 0$. De façon similaire, on montre que ${}^1\!/\!_y > 0$. Par conséquent $({}^1\!/\!_x)({}^1\!/\!_y) > 0$ et de (ii) on obtient

$$({}^1\!/\!_x)({}^1\!/\!_y)x < ({}^1\!/\!_x)({}^1\!/\!_y)y.$$

D'où ${}^1\!/\!_y < {}^1\!/\!_x$.

Enfin prouvons (vi) : soit $0 \leq x < y$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n < y^n$. La formule à prouver est vraie pour $n = 1$ par hypothèse. Supposons qu'elle est vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et montrons que $0 \leq x^{n+1} < y^{n+1}$. Comme $0 \leq x < y$ et $0 \leq x^n < y^n$, de (ii), on a $0 \leq x^{n+1} \leq xy^n$ et $0 \leq xy^n < y^{n+1}$, en appliquant $(O3)$, on obtient $0 \leq x^{n+1} < y^{n+1}$. On vient donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n < y^n$. □

Exercice 2.2.1 : *Soient a, b, c et d des réels tels que $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$. Montrer que $0 \leq ac \leq bd$.*

Propriété 2.2.8 (Propriété de la borne supérieure)**.**
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure.

Proposition 2.2.9. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons $xy > 0$. Alors soit x et y sont soit strictements positifs, soit strictement négatifs.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy > 0$. Alors nécessairement $x \neq 0$ et $y \neq 0$ (car si $x = 0$ ou $y = 0$ on aurait $xy = 0$, ce qui est absurbe.)
Supposons sans perte de généralité $x > 0$ et $y < 0$. Comme $y < 0$, en multipliant par x on obtient $xy < 0 \cdot x = 0$. Ce qui absurbe. Par conséquent x et y sont de même signe. □

Corollaire 2.2.10. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

$$xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } y = 0.$$

Remarque 2.2.11. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ vérifie évidemment les propriété 2.2.3 à 2.2.6 mais pas la propriété de la borne supérieure :

« toute partie non vide et bornée admet une borne supérieure. »

En effet, le sous ensemble de $\mathbb{Q}$, $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ qui est non vide et majoré, n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Prouvons le :

Notons $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. On a $1^2 = 1 < 2$, donc $1 \in A$ c'est-à-dire $A \neq \emptyset$.
Soit $x \in A$. Comme $x^2 < 2$, on a $x^2 < 4$ et donc $x < 2$. Par suite A est majoré par 2.
Supposons que A admet dans $\mathbb{Q}$ une borne supérieure que l'on note $r := \sup A$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Comme $1 \in A$, on a $r \geq 1 > 0$.
– Montrons que $r^2 \geq 2$.
Soit s un nombre rationnel strictement positif tel que $s^2 < 2$. Choisissons un rationnel strictement positif h tel que $h < 1$ et $h < \dfrac{2-s^2}{2s+1}$. Alors :

$$\begin{aligned}(s+h)^2 - s^2 &= h(2s+h) \\ &< h(2s+1) \qquad \big(\text{car } h < 1\big) \\ &< 2 - s^2 \qquad \left(\text{car } h < \frac{2-s^2}{2s+1}\right).\end{aligned}$$

Par suite, $(s+h)^2 < 2$. D'où $s + h \in A$, mais comme on a choisi $h > 0$, on a $s + h > s$. Donc $s < r = \sup A$. Par conséquent $r^2 \geq 2$.
– Montrons que $r^2 \leq 2$.
Soit s un nombre rationnel strictement positif tel que $s^2 > 2$. Choisissons un rationnel strictement positif h tel que $h < s$ et $h < \dfrac{s^2-2}{2s}$. Alors :

$$\begin{aligned}s^2 - (s-h)^2 &= 2sh - h^2 \\ &< 2sh \\ &< s^2 - 2 \qquad \left(\text{car } h < \frac{s^2-2}{2s}\right).\end{aligned}$$

Par suite, $(s-h)^2 > 2$. D'où $s-h \notin A$.

D'autre part, pour tout $x \in A$ on a $x^2 < 2$ et comme $(s-h)^2 > 2$ alors $x^2 < (s-h)^2$. D'où $x < s-h$ car $s-h > 0$.
Par suite $s-h$ est un majorant de A. Et comme $s-h < s$, il s'ensuit que $s > r = \sup A$. Par conséquent $r^2 \leq 2$.

– En conclusion de $r^2 \geq 2$ et $r^2 \leq 2$ on obtient $r^2 = 2$. Ce qui est absurbe car nous avons dans la proposition 2.2.1 qu'il n'existe pas de nombre rationnel r tel que $r^2 = 2$.

$\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de borne supérieure, c'est l'une des raisons pour lesquelles on travaille en analyse sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

2.2.2 Le symbole somme $\sum$ et le symbole produit $\prod$

Le symbole somme $\sum$

Définition 2.2.12. Soit n un entier naturel non nul. Étant donné n nombres nombres réels $a_1, \cdots, a_n$, la somme $a_1 + \cdots + a_n$ qui a un sens grace à la propriété $(A3)$ peut être représentée en utilisant la «notation sigma» :

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Plus généralement si p est un entier tel que $1 \leq p \leq n$, on définit la somme suivante par :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n.$$

Le nombre i est appelé indice de sommation, et l'expression se lit somme des a_i pour i allant de p à n.

Dans la définition ci-dessus l'indice de sommation i est une variable muette, c'est à dire qu'une fois la somme calculée, le résultat ne dépend plus de i. On peut donc lui donner le nom que l'on veut : k, j, etc, à l'exception des bornes de la somme, par exemple, on peut écrire

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

La somme $\sum\limits_{i=p}^{n} a_i$ est souvent notée $\sum\limits_{p \leq i \leq n} a_i$.
Enfin, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels indexée par un ensemble fini I, la somme de tous les éléments x_i, i décrivant I, sera noté $\sum\limits_{i \in I} x_i$. Par exemple, si $I = \{1, 4, 6\}$: $\sum\limits_{i \in I} x_i = x_1 + x_4 + x_6$.

Remarque 2.2.13. Par convention, on pose $\sum\limits_{k \in \emptyset} a_k = 0$.

Exemple 2.2.14 : On a pour tout entier n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \rho^k = \rho^0 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^n \quad \text{où } \rho \in \mathbb{R}.$$

Propriété 2.2.15. *Soient n et p deux entiers tels que $n \geq p$.*
– ***Relation de Chasles :*** *Soit n nombres nombres réels $a_1, \cdots, a_n$. Alors pour tout entier m tel que $p \leq m < n$, on a :*

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i.$$

– ***Linéarité :*** *Soient n un nombre entier naturel non nul, $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ des nombres réels. Alors pour tout entier p tel que $n \geq p$ et pour tous réels α et β,*

$$\sum_{i=p}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) = \alpha \sum_{i=p}^{n} a_i + \beta \sum_{i=p}^{n} b_i.$$

– ***Produit :*** *pour toutes suites $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ et pour $m \geq p$,*

$$\left(\sum_{i=p}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=p}^{m} b_j\right) = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=p}^{m} a_i b_j.$$

– ***Changement d'indice :*** *pour tout entier m et pour toute suite $(a_i)_i$,*

$$\sum_{i=p}^{n} a_{m+i} = \sum_{i=m+p}^{m+n} a_i.$$

Propriété 2.2.16 (Sommes télescopiques)**.** *Soient n et pdeux entiers naturel avec $n \geq p$ et a_k, $(k = p, \cdots, n)$ des nombres réels ou complexes quelconques, alors*

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

Démonstration. On a $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} a_k$. En effectuant un changement d'indice, on obtient $\sum_{k=p}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} a_k = \sum_{k=p+1}^{n} a_k + a_{n+1}$. D'autre part, $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n} a_k + a_p$. Finalement,

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p+1}^{n} a_k + a_{n+1} - \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k + a_p\right) = a_{n+1} - a_p.$$

□

Exercice 2.2.2 : *Soit n un entier naturel non nul. Donner un expression simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.*

Pour tout entier k non nul, on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(-\frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$.

Proposition 2.2.17. *Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

La preuve de la proposition ci dessus peut se faire par de simples raisonnement par récurrence.

Le symbole somme $\prod$

Définition 2.2.18. Soit $(a_i)_i$ une suite de nombres réels. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on définit le produit suivante par :

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n.$$

Comme pour la définition de la somme, l'indice de sommation i dans le produit est une variable muette. Par conséquent, on pourra écrire par exemple

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \prod_{j=p}^{n} a_j = \prod_{k=p}^{n} a_k.$$

Le produit $\prod_{i=p}^{n} a_i$ est aussi notée $\prod_{p \leq i \leq n} a_i$.
Plus généralement, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels indexée par un ensemble fini I, le produit de tous les éléments x_i, i décrivant I, sera noté $\prod_{i \in I} x_i$. Par exemple, si $I = \{1, 4, 6\}$: $\prod_{i \in I} x_i = x_1 x_4 x_6$.

Remarque 2.2.19. Par convention, on pose $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.

De façon analogue à la somme, nous avons les propriétés sur le produit suivante

Propriété 2.2.20. *Soient n et p deux entiers tels que $n \geq p$.*
– ***Relation de Chasles :*** *pour tout entier m tel que $p \leq m < n$ et pour toute suite $(a_i)_i$,*

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \left(\prod_{i=p}^{m} a_i\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i\right).$$

– ***Produit :*** *pour toutes suites $(a_i)_i$ et $(b_i)_i$ et pour $m \geq p$,*

$$\prod_{i=p}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=p}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=p}^{m} b_i\right).$$

– ***Changement d'indice :*** *pour tout entier m et pour toute suite $(a_i)_i$,*

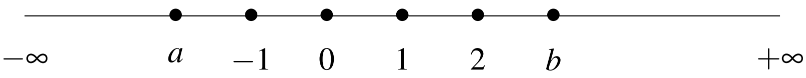
$$\prod_{i=p}^{n} a_{m+i} = \prod_{i=m+p}^{m+n} a_i.$$

2.2.3 Droite réelle et quelques relations utiles

Droite réelle

Il existe une correspondance entre l'ensemble des nombres réels et les points sur une droite. Les points sur une ligne sont associés aux nombres réels comme suit : Un point sur la droite est sélectionné comme origine. L'origine correspond au nombre reel 0. Une longueur unitaire est sélectionnée et le point correspondant au nombre 1 est placé à une distance unitaire de l'origine. L'origine et le point correspondant au nombre 1 déterminent la direction positive le long de la

droite et la direction opposée est la direction négative.
Habituellement, on plaçe la droite horizontalement et on sélectionne la direction positive à droite. Si x est un nombre positif, le point correspondant à x est placé à une distance x de l'origine, dans le sens positif. Si x est un nombre négatif, le point correspondant est à la distance $-x$ de l'origine, dans le sens négatif. Ainsi, nous établissons une correspondance entre l'ensemble des nombres réels et une droite. Cette droite est appelée la droite réelle et on identifiera le nombre x avec le point qui correspond à x. Par exemple, nous pouvons faire référence au "point 2" ou au "nombre 2". Nous avons $a < b$ si et seulement si a est à gauche de b sur la droite réelle (en supposant que la direction positive de la droite est vers la droite).



Coefficients binomiaux

Définition 2.2.21. Soit n un entier naturel non nul. Le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ est appelé *factorielle n*. On note

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Conventionnellement, $0! = 1$.

Définition 2.2.22. Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$, on appelle *coefficient binomial* d'indices n et p, le nombre noté C_n^p (ou $\binom{n}{p}$) , qui se lit « p parmi n » et défini par

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque 2.2.23. Par convention, on pose $\mathrm{C}_n^p = 0$, lorsque $p > n$.

Proposition 2.2.24.

(i) Pour tout entier $n \geq 2$, $\mathrm{C}_n^0 = 1$, $\mathrm{C}_n^1 = n$, $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(ii) Pour tous entiers n et k tels que $n \geq k$, $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ (propriété de symétrie).

(iii) Pour tous entiers n et k tels que $n \geq k \geq 1$, $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

(iv) Pour tous entiers n et k tels que $n \geq k \geq 1$, $\mathrm{C}_{n-1}^k + \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = \mathrm{C}_n^k$ (formule de Pascal).

Démonstration. Pour le point (i), il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux :

$$\mathrm{C}_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \mathrm{C}_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La propriété de symétrie (ii) est facile aussi :

$$\mathrm{C}_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \mathrm{C}_n^k.$$

Pour (iii) : on a

$$k\mathrm{C}_n^k = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}.$$

Enfin, la formule de Pascal (iv), on a

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)+k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)![(n-k)+k]}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\
C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1} &= C_{n}^{k}.
\end{aligned}$$

□

La formule de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire appelé *triangle de Pascal* :

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	C_1^0	C_1^1				
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2			
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3		
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 2.2.25 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel. On a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binôme dit simplement que $(a+b)^0 = \mathrm{C}_0^0 a^0 b^0 = 1$, ce qui est vrai. Supposons que pour un certain entier n, on a $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$. Montrons que la formule est vraie pour l'entier $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}\right)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} \qquad \text{en posant } j = k+1 \\
&= \mathrm{C}_n^n a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} + \mathrm{C}_n^0 b^{n+1} \\
&= \mathrm{C}_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k) a^k b^{n-k+1} + \mathrm{C}_n^n a^{n+1} \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1},
\end{aligned}$$

grâce aux propriétés (i) et (iv) de la proposition 2.2.24. Donc

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.$$

□

Il est important de voir que l'on a aussi $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$, car $a+b = b+a$.

Corollaire 2.2.26. *Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel non nul. Alors*

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Démonstration. On a

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n.$$

□

À présent,nous décrivons et prouvons certaines inégalités qui nous seront utiles dans la suite.

Inégalité de Bernoulli

Théorème 2.2.27 (Inégalité de Bernoulli)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout réel a tel que $1+a \geq 0$, on a*

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

Plus généralement, soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels tous de même signe et tels que $1+a_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, alors

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Démonstration. La première inégalité est une conséquence immédiate de la seconde si on pose $a_1 = a_2 = \cdots = a$. Nous montrons la deuxième inégalité par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$ ou $n = 1$ la deuxième inégalité est trivialement vraie. Supposons qu'elle soit pour un certain entier n. Soient $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des réels tous de même signe tels que $1+a_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n+1\}$. Comme $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$ et $1+a_{n+1} \geq 0$, donc

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \geq (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+a_{n+1}).$$

D'autre part $a_1+a_2+\cdots+a_n$ et a_{n+1} sont de même signe, donc $(a_1+a_2+\cdots+a_n)a_{n+1} \geq 0$, par suite

$$\begin{aligned}
(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+a_{n+1}) &= 1+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+(a_1+a_2+\cdots+a_n)a_{n+1} \\
(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)(1+a_{n+1}) &\geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}.
\end{aligned}$$

On déduit que $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$, ce qui donne l'inégalité pour l'entier $n+1$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$ tous de même signe vérifiant $1+a_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a : $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$. □

Remarque 2.2.28. Lorsque $a \geq 0$, la première inégalité est une conséquence immédiate de la formule du binôme de Newton du théorème 2.2.25 :

$$(1+a)^n = 1+na+\sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k \geq 1+na.$$

Pour cette raison, l'inégalité de Bernoulli est aussi appelée inégalité binomiale.

Inégalité de la moyenne

Théorème 2.2.29 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels positifs. Alors*

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}. \tag{2.3}$$

De plus, l'inégalité ci-dessus est une égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

Remarque 2.2.30. Le théorème dit que pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$ positifs la moyenne arithmétique $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ est supérieure à la moyenne géométrique $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$.

Démonstration. Si l'un des a_i est nul alors le théorème est trivial puisque dans ce cas $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = 0$. On peut donc considérer que tous les a_i sont strictement positifs. Posons

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad \text{et} \quad b_i = \frac{a_i}{g}, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Donc

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \Longleftrightarrow b_1 + b_2 + \cdots b_n \geq n,$$

avec $b_i > 0 \; \forall i$ et $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$.
Montrons par une récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tous réels $b_1, b_2, \cdots, b_n$ strictement positifs vérifiant $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$, on a : $b_1 + b_2 + \cdots b_n \geq n$.
Pour $n = 1$, l'inégalité est triviale. Supposons qu'elle est vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Soient $b_1, \cdots, b_{n+1}$, $n+1$ nombres réels positifs stictement vérifiant $b_1 b_2 \cdots b_{n+1} = 1$.
Lorsque tous les b_i valent 1, on a $b_1 + b_2 + \cdots b_{n+1} = n$, donc l'inégalité est vérifiée.
Supposons que pour tout i, $b_i < 1$, alors $b_1 + b_2 + \cdots + b_{+n} < n+1$, ainsi l'inégalité n'est pas vérifiée. Aussi si pour tout i, $b_i > 1$, alors $b_1 b_2 \cdots b_{n+1} > 1$, ce qui est absurbe. Par conséquent parmi les b_i, il en existe un strictement plus petit que 1 et un autre strictement plus grand que 1. On peut donc sans perte de généralité que $b_1 < 1$ et $b_{n+1} > 1$ quitte à réordonner les b_i. Posons à présent $c_1 = b_1 b_{n+1}$. Alors c_1, b_2, $\cdots$, b_n sont des n réels strictement positifs tels que $c_1 b_2 \cdots b_n = b_1 b_2 \cdots b_n b_{n+1} = 1$. L'hypothèse de récurrence donne $c_1 b_2 \cdots b_n \geq n$. Par suite

$$\begin{aligned}
b_1 \cdots b_{n+1} &= (c_1 + b_2 + \cdots + b_n) + b_1 + b_{n+1} - c_1 \\
&\geq n + b_1 + b_{n+1} - b_1 b_{n+1} \\
&= n + 1 + (b_{n+1} - 1)(1 - b_1) \\
b_1 \cdots b_{n+1} &> n + 1 \qquad \text{car } b_1 < 1 \text{ et } b_{n+1} > 1.
\end{aligned}$$

On vient de montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs $b_1, b_2, \cdots, b_n$ vérifiant $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$, on a : $b_1 + b_2 + \cdots b_n \geq n$ avec égalité si et seulement si $b_i = 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Ce qui termine la preuve. □

Inégalité de Cauchy–Schwarz

Théorème 2.2.31 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, $\cdots$, a_n et b_1, b_2, $\cdots$, b_n des nombres réels. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

De plus, l'inégalité ci-dessus est une égalité si et seulement si les n-uplets $(a_1, \cdots, a_n)$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ sont proportionnels.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, $\cdots$, a_n et b_1, b_2, $\cdots$, b_n des nombres réels.
Posons $a = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}$ et $b = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}$.

Si $a = 0$ alors $a_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, par suite $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$. Il en de même lorsque $b = 0$. Ainsi l'inégalité est triviale lorsque $a = 0$ ou $b = 0$.

Supposons maintenant que $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a d'après l'inégalité de la moyenne (théorème 2.2.29),

$$\frac{a_k}{a}\frac{b_k}{b} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_k^2}{a^2} + \frac{b_k^2}{b^2}\right),$$

avec égalité si et seulement si $\dfrac{a_k}{a} = \dfrac{b_k}{b}$. Par suite

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a}\frac{b_k}{b} &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{a^2} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}{b^2}\right) = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a}\frac{b_k}{b} &\leq 1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $\dfrac{a_k}{a} = \dfrac{b_k}{b}$. □

Inégalité de Minkowski

Théorème 2.2.32 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ des nombres réels. Alors*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ des nombres réels. On a

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.4), $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$, par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\right)^2 \\ \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

2.2.4 Nombres irrationnels

Proposition 2.2.33. *Soit a un nombre réel positif et $n \in N^*$. Il existe un unique nombre réel positif r tel que $r^n = a$.*

Remarque 2.2.34. Nous avons constaté dans la définition 1.5.58 que le résultat découle de manière évidente car l'application $x \longmapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$. Nous proposons cependant une démonstration directe à l'aide de la notion de borne supérieure.

Démonstration. Les cas $a = 0$ et $a = 1$ sont triviaux. Comme $r^n = a \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{1}{a}$, on peut sans perte de généralité, supposer que $a > 1$.
Pour l'existence, considérons le sous ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$. Cet ensemble est non vide ($1 \in A$) et majoré (par a^n) dans $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure $r = \sup A \in \mathbb{R}$ puisque l'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure. Comme $1 \in A$ donc $r \geq 1 > 0$.
Notons que pour tout $\delta \in \mathbb{R}$, par la formule du binôme de Newton, on a

$$(r+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{n-k} \delta^k.$$

Supposons que $r^n < a$. Posons :

$$M = \max\left\{C_n^k r^{n-k} \ : \ k \in \{1, \cdots, n\}\right\} \qquad \text{et } \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a-r^n}{nM}\right\}.$$

Alors $M \geq 1$ car $C_n^k \geq 1$ et $r^{n-k} \geq 1$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$; et $0 < \delta^k < \delta$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ car $\delta < 1$. Par suite

$$\begin{aligned}
(r+\delta)^n &= r^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k r^{n-k} \delta^k \\
&< r^n + \sum_{k=1}^{n} M\delta \qquad \left(\text{car } M \geq C_n^k r^{n-k} \text{ et } \delta^k < \delta, \ \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}\right) \\
&= r^n + nM\delta \\
&< r^n + a - r^n \qquad \left(\text{car } \delta \leq \frac{a-r^n}{nM}\right) \\
(r+\delta)^n &< a.
\end{aligned}$$

Donc $r + \delta \in A$. Ce qui est en contradition avec le fait que r est la borne supérieure de A et $r + \delta > r$.
Supposons que $r^n > a$. Posons :

$$M = \max\left\{C_n^k r^{n-k} \ : \ k \in \{1, \cdots, n\}\right\} \qquad \text{et } \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r^n - a}{nM}\right\}.$$

Comme dans le cas précédent, $M \geq 1$ et $0 < \delta^k < \delta$. Par suite

$$\begin{aligned}
(r-\delta)^n &= r^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k r^{n-k} \delta^k \\
&\geq r^n - \sum_{k=1}^{n} C_n^k r^{n-k} \delta^k \qquad \Big(\text{ car } (-1)^k \geq -1 \ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}\Big) \\
&> r^n - \sum_{k=1}^{n} M\delta \qquad \Big(\text{car } M \geq C_n^k r^{n-k} \text{ et } \delta^k < \delta,\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}\Big) \\
&= r^n - nM\delta \\
&> r^n + a - r^n \qquad \left(\text{car } \delta \leq \frac{r^n - a}{nM}\right) \\
(r-\delta)^n &> a.
\end{aligned}$$

Donc $r-\delta \notin A$. Mais $r-\delta < r$ donc $r-\delta$ n'est pas un majorant de A. Par suite il existe $x \in A$ tel que $x > r-\delta > 0$. D'où $a \geq x^n > (r-\delta)^n$. Ce qui est absurde.
En conclusion $r^n = a$.

Pour l'unicité : supposons qu'il existe un autre réel s tel que $s^n = a$ et $s > 0$. Donc $s^n = r^n$.
Si $0 < s < r$, alors $s^n < r^n$, ce qui est absurde.
Si $0 < r < s$, alors $r^n < s^n$, ce qui est absurde.
En conclusion $s = r$. □

Définition 2.2.35. Soit x un nombre réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de x et on note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$, l'unique réel tel que $(\sqrt[n]{x})^n = x$.
Dans le cas où $n = 2$, on parle de racine carrée et on note $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$.

On sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (proposition(2.2.1)) et d'une manière générale lorsque qu'un entier d n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Donc l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non vide.

Définition 2.2.36. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels.

Remarque 2.2.37.

— Un nombre réel est soit rationnel, soit irrationnel.
— Si x est irrationnel et y rationnel alors $x+y$ est irrationnel.
En effet, supposons par l'absurde que $x+y$ est rationnel. Comme $x = (x+y)-y$ et que la somme de deux rationnels est un rationnel alors x serait rationnel. Ce qui est absurde. Par suite $x+y$ est irrationnel.
— Si x est irrationnel et y un rationnel non nul alors xy est irrationnel.
En effet, supposons par l'absurde que xy est rationnel. Comme $y \neq 0$, on a $x = \frac{xy}{y}$ et que le quotient de deux rationnels (le dénominateur non nul bien sûr) est un rationnel alors x serait rationnel. Ce qui est absurde. Par suite xy est irrationnel.
— La somme de deux irrationnels n'est pas forcément irrationnelle.
$1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels alors que $1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2$ est rationnel.
— Le produit de deux irrationnels n'est pas forcément irrationnel.
$1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ sont des nombres irrationnels alors que $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1$ est rationnel.

Le résultat suivant utile pour décider si un nombre réel est rationnel ou non.

Proposition 2.2.38. *Si le nombre $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible, est une racine de l'équation polynômiale*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

où les coefficients $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ et $a_n \neq 0$, alors p divise a_0 et q divise a_n.

Démonstration. Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, où la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible, est une racine de l'équation polynômiale $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, alors

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Donc

$$a_n p^n = -\left[a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right] q \tag{2.6}$$

et

$$a_0 q^n = -\left[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1 q^{n-1}\right] p. \tag{2.7}$$

Comme p et q n'ont pas de facteur commun, on obtient de 2.6 que q divise a_n et 2.7 que p divise a_0. □

Exemple 2.2.39 : Montrons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. On a $x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ et $(x^2 - 5)^2 = 24$. Donc $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
Si x est rationnel de la forme $\dfrac{p}{q}$ irréductible alors p divise 1 et q divise 1. Par conséquent $x = 1$ ou $x = -1$. Mais ni 1, ni -1 ne vérifie la relation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Ainsi $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

2.2.5 Borne supérieure et borne inférieure dans $\mathbb{R}$

Il ressort de la définition de $\mathbb{R}$ que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Aussi $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne inférieure qui stipule que :

Théorème 2.2.40 (Propriété de la borne inférieure)**.** *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Posons $E = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a, \ \forall \, a \in A\}$. Comme A est non vide E est non vide, de plus E est majoré n'importe quel élément a de A. Donc E admet une borne supérieure que nous notons $m = \sup E$.
Pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$. Ce qui montre que m est un minorant de A. Nous allons montrer pour conclure que m le plus grand des minorants de A. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ un minorant de A. Alors $\beta \in E$ et par suite $\beta \leq m$. En conclusion A admet m comme borne inférieure. □

Exemple 2.2.41 :

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels admet 0 pour borne inférieure c'est même le minimum mais n'a pas de borne supérieure.
2. L'ensemble des entier relatifs $\mathbb{Z}$ n'a ni borne inférieure, ni borne supérieure.
3. Les ensembles $[0,1]$ et $[0,1[$ admettent 0 pour borne inférieure et pour minimun ; et 1 pour borne supérieure. De plus 1 est maximum $[0,1]$ mais pas pour $[0,1[$.

Exemple 2.2.42 (borne supérieure et borne inférieure d'une fonction)**:** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function et D une partie de son ensemble de définition.

— Si f est majorée sur D alors $f(D)$ est majoré et non vide dans $\mathbb{R}$ donc il admet une borne supérieure. On l'appelle borne supérieure de f sur D et note $\sup\limits_{x\in D} f(x) := \sup f(D)$.

— Si f est minorée sur D alors $f(D)$ est minoré et non vide dans $\mathbb{R}$ donc il admet une borne inférieure. On l'appelle borne inférieure de f sur D et note $\inf\limits_{x\in D} f(x) := \inf f(D)$.

***Exercice* 2.2.3 :** *Soient $f\colon D \to \mathbb{R}$ et $g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont bornées sur D. Montrer que si*

$$f(x) \leq g(x) \qquad \textit{pour tout } x \in D,$$

alors

$$\sup_{x\in D} f(x) \leq \sup_{x\in D} g(x) \qquad \textit{et} \qquad \inf_{x\in D} f(x) \leq \inf_{x\in D} g(x).$$

Caractérisation de la borne supérieure

Théorème 2.2.43. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Le réel y est la borne supérieure de A si et seulement si*

— *y est un majorant de A ;*

— *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x > y - \varepsilon$.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

– Supposons que $y = \sup A$. Alors y est un majorant de A et c'est d'ailleurs le plus petit des majorants de A. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, $y - \varepsilon < y$, donc $y - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, par suite il existe $x \in A$ tel que $x > y - \varepsilon$.

– Réciproquement, soit y un majorant de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x > y - \varepsilon$. Si y n'est pas le plus petit, il existe un autre majorant $M < y$. En prenant $\varepsilon = y - M > 0$, on voit que pour tout $x \in A$, $x \leq M = y - \varepsilon$. Ce qui est absurde. Donc $y = \sup A$. □

Caractérisation de la borne inférieure

Théorème 2.2.44. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Le réel y est la borne inférieure de A si et seulement si*

— *y est un minorant de A ;*

— *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < y + \varepsilon$.*

Démonstration. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

– Supposons que $y = \inf A$. Alors y est un minorant de A et c'est d'ailleurs le plus grand des minorants de A. Comme pour tout $\varepsilon > 0$, $y + \varepsilon > y$, donc $y + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A, par suite il existe $x \in A$ tel que $x < y + \varepsilon$.

– Réciproquement, soit y un minorant de A tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $x < y + \varepsilon$. Si y n'est pas le plus grand, il existe un autre minorant $m > y$. En prenant $\varepsilon = m - y > 0$, on voit que pour tout $x \in A$, $x \geq m = y + \varepsilon$. Ce qui est absurde. Donc $y = \inf A$. □

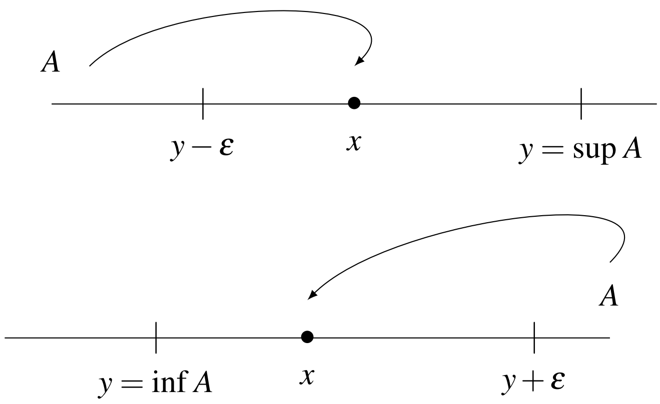


FIGURE 2.1 – Illustration de la borne supérieure et de la borne inférieure de A

Quelques exemples

Définition 2.2.45. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et un nombre $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$x+A := \{x+y \in \mathbb{R} : y \in A\},$$
$$xA := \{xy \in \mathbb{R} : y \in A\}.$$

Proposition 2.2.46. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.*

(i) Si $x \in \mathbb{R}$ et A est majoré, $x+A$ est majoré et $\sup(x+A) = x+\sup A$.

(ii) Si $x \in \mathbb{R}$ et A est minoré, alors $\inf(x+A) = x+\inf A$.

(iii) Si $x > 0$ et A est majoré, alors xA est majoré et $\sup(xA) = x(\sup A)$.

(iv) Si $x > 0$ et A est minoré, xA est minoré et $\inf(xA) = x(\inf A)$.

(v) Si $x < 0$ et A est minoré, alors xA est majoré et $\sup(xA) = x(\inf A)$.

(vi) Si $x < 0$ et A est majoré, alors xA est minoré et $\inf(xA) = x(\sup A)$.

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $x \in \mathbb{R}$.

(i) Supposons que A est majoré. Comme il est non vide il admet une une borne supérieure $\sup A$. Pour tout $y \in A$, on a $x+y \leq x+\sup A$, donc $x+\sup A$ est un majorant de $x+A$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a$. En ajoutant x à chaque membre, on a $x+\sup A - \varepsilon < a+x$ et $a+x \in (x+A)$, par suite par la caractérisation de la borne supérieure $x+\sup A$ est la borne supérieure de $x+A$: $\sup(x+A) = x+\sup A$.

(ii) On raisonne de façon similaire. Supposons que A est minoré. Comme il est non vide il admet une borne inférieure $\inf A$. Pour tout $y \in A$, on a $x+y \geq x+\inf A$, donc $x+\inf A$ est un minorant de $x+A$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $a \in A$ tel que $\inf A + \varepsilon > a$. En ajoutant x à chaque membre, on a $x+\inf A + \varepsilon > a+x$ et $a+x \in (x+A)$, par suite, par la cractérisation de la borne inférieure $x+\inf A$ est la borne inférieure de $x+A$: $\inf(x+A) = x+\inf A$.

(iii) Supposons que A est majoré et $x > 0$. Comme A est non vide il admet une borne supérieure $\sup A$. Pour tout $y \in A$, on a $y \leq \sup A$, donc $xy \leq x\sup A$. D'où $x\sup A$ est un majorant de xA. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \dfrac{\varepsilon}{x} < a$. En multipliant par x chaque membre de l'inégalité, on a $x\sup A + \varepsilon < ax$ et $ax \in (xA)$, par suite par la cractérisation de la borne supérieure $x\sup A$ est la borne supérieure de xA : $\sup(xA) = x(\sup A)$.

(iv) Supposons que A est minoré et $x>0$. Comme A est non vide il admet une borne inférieure $\inf A$. Pour tout $y\in A$, on a $y\geq \inf A$, donc $xy\geq x\inf A$. D'où $x\inf A$ est un minorant de xA. D'autre part, pour tout $\varepsilon>0$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $a\in A$ tel que $\inf A+\dfrac{\varepsilon}{x}>a$. En multipliant par x chaque membre de l'inégalité, on a $x\inf A+\varepsilon>ax$ et $ax\in(xA)$, par suite par la caractérisation de la borne inférieure $x\inf A$ est la borne inférieure de xA : $\inf(xA)=x(\inf A)$.

(v) Supposons que A est minoré et $x<0$. Comme A est non vide il admet une borne inférieure $\inf A$. Pour tout $y\in A$, on a $y\geq \inf A$, donc $xy\leq x\inf A$. D'où $x\inf A$ est un majorant de xA. Ce qui prouve que xA est majoré. D'autre part, pour tout $\varepsilon>0$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $a\in A$ tel que $\inf A+\dfrac{\varepsilon}{-x}>a$. En multipliant par x chaque membre de l'inégalité, on a $x\inf A-\varepsilon<ax$ et $ax\in(xA)$, par suite par la cractérisation de la borne supérieure $x\inf A$ est la borne supérieure de xA : $\sup(xA)=x(\inf A)$.

(vi) Supposons que A est majoré et $x<0$. Comme A est non vide il admet une borne supérieure $\sup A$. Pour tout $y\in A$, on a $y\leq \sup A$, donc $xy\geq x\sup A$. D'où $x\sup A$ est un minorant de xA. Ce qui prouve que xA est minoré. D'autre part, pour tout $\varepsilon>0$, d'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $a\in A$ tel que $\sup A-\dfrac{\varepsilon}{-x}<a$. En multipliant par x chaque membre de l'inégalité, on a $x\sup A+\varepsilon>ax$ et $ax\in(xA)$, par suite par la caractérisation de la borne inférieure $x\sup A$ est la borne inférieure de xA : $\inf(xA)=x(\sup A)$.

□

***Exercice* 2.2.4** *: Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose*

$$A+B=\{z\in\mathbb{R}:\ \exists x\in A\,\exists y\in B\ \text{ tel que } z=x+y\}.$$

Montrer $A+B$ admet une borne supérieure et $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

Proposition 2.2.47. *Soit $A,B\subset\mathbb{R}$ non vides tel que*

$$\forall x\in A\ \forall y\in B\quad x\leq y.$$

Alors A est majoré, B est minoré et $\sup A\leq\inf B$.

Démonstration. Soient A et B comme dans la proposition. Alors n'importe quel élément de B est un majorant de A et n'importe quel élément de A est un minorant de B. Ainsi A majoré et B minoré. Comme ils sont non vides sup A et inf B existent.
Tout $x\in A$ étant un minorant de B donc $x\leq$ inf B. Par suite inf A est un majorant de A. Par conséquent sup $A\leq$ inf A. □

***Exercice* 2.2.5** *: Soient A et B deux sous ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}_+$. Posons $C:=\{ab : a\in A, b\in B\}$.*
Montrer que C est borné et que $\sup C=(\sup A)(\sup B)$ *and* $\inf C=(\inf A)(\inf B)$.

Droite réelle achevée

Pour rendre l'utilisation de suprema et infima encore plus facile, nous pouvons écrire $\sup A$ et $\inf A$ sans se soucier que A soit borné et non vide. Nous faisons les définitions naturelles suivantes.

Définition 2.2.48. On appelle *droite réelle achevée* l'ensemble

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On prolonge la relation d'ordre "$\leq$" de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \leq +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \geq -\infty.$$

Il est clair que $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$ et $-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$. C'est qui nous amène à généraliser la définition de borne supérieure et de borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.49. Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est l'ensemble vide, alors $\sup A := -\infty$.

(ii) Si A n'est pas majoré, alors $\sup A := +\infty$.

(iii) Si A est l'ensemble vide, alors $\inf A := +\infty$.

(iv) Si A n'est pas minoré, alors $\inf A := -\infty$.

On prolonge partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations de $\mathbb{R}$ selon les tables d'addition et de multiplication suivantes :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéfinie
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	Indéfinie	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indéfinie	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	Indéfinie	0	0	0	Indéfinie
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéfinie	$+\infty$	$+\infty$

2.2.6 Intervalles de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ jouent un rôle fondamental dans l'étude des fonctions réelles (c'est à dire les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$), tant du point de vue global (ensemble de définition par exemple) que local (voisinage d'un point) : ce sont les parties *connexes*, c'est à dire d'un seul tenant, de $\mathbb{R}$.

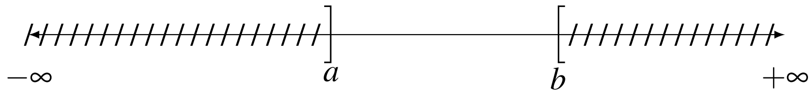
Définition 2.2.50 (intervalle de $\mathbb{R}$)**.** Une partie I de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* si

$$\forall a, b \in I \text{ tel que } a \leq b, \forall x \in \mathbb{R}, (a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I).$$

L'ensemble $\emptyset$ étant un intervalle. La propriété de la borne supérieure (resp. inférieure) permet de classer les intervalles non vides de $\mathbb{R}$ en neufs types distincts suivant l'existence ou non d'un majorant, d'un minorant, d'un plus grand, d'un plus petit élément. On montre qu'un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est d'un des neuf types suivants :

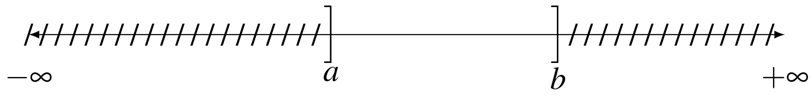
(I) Intervalle borné

— ouvert : $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

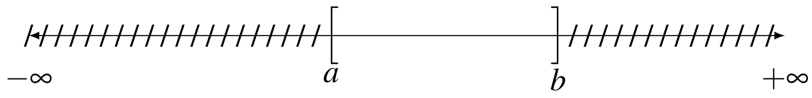


— semi-ouvert (ou semi-fermé) : $[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

et $]a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



— fermé : $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$



où a et b sont des réls tels que $a \leq b$.

(II) Intervalle non borné, minoré, non majoré

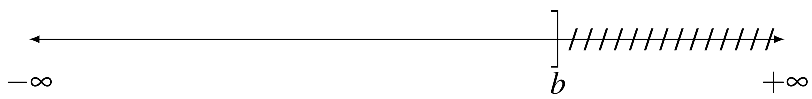
— avec minimum : $[a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

— sans minimum : $]a,+\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

où $a \in \mathbb{R}$.

(III) Intervalle non borné, majoré, non minoré

— avec maximum : $]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$



— sans maximum : $]-\infty,b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

où $b \in \mathbb{R}$.

(IV) non minoré, non majoré : $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

Exercice 2.2.6 : *Montrer qu'effectivement les intervalles sont de l'une des formes énumérées ci-dessus.*

2.3 Propriété d'Archimède, partie entière

Propriété d'Archimède

Proposition 2.3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. Par conséquent, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $-p < x$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$, ce qui implique que $\mathbb{N}$ est majoré. Donc $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure. Posons $M = \sup\ \mathbb{N}$. Alors $M - 1$ n'est pas un majorant de $\mathbb{N}$. Par la caractérisation de la borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M - 1 < n_0$. Par suite, on a $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ et $M < n_0 + 1$, ce qui est absurde, puisque M est la borne supérieure de $\mathbb{N}$. D'où l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.
Pour la deuxième assertion, d'après ce qui précède il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que à $p > -x$, ce qui nous donne $-p < x$. □

Théorème 2.3.2 ($\mathbb{R}$ est un corps archimédien)**.** *Pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > a$.*

On peut comprendre le théorème précédent de la façon suivante : même si ε est très petit et a très grand, on pourra dépasser a en additionnant ε suffisamment de fois.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$. Pour $a \leq 0$ il suffit de prendre $n = 1$. Supposons maintenant que $a > 0$. En appliquant la proposition 2.3.1 (pour $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$), il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \dfrac{a}{\varepsilon}$. Par suite $n\varepsilon > a$. □

Exemple 2.3.3 : L'ensemble $E := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet pour borne inférieure 0.
L'ensemble E est non vide (car $1 \in E$) et minoré (par 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$) donc E est admet une borne inférieure $\inf\ E$. En appliquant la propriété d'Archimède (Théorème 2.3.2), il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0\varepsilon > 1$. D'où $0 + \varepsilon > \frac{1}{n_0}$. Par la caractérisation de la borne inférieure on a bien $\inf\ E = 0$.

Partie entière

Proposition 2.3.4. *Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$n_0 \leq x < n_0 + 1.$$

Démonstration. **Existence :** Si $x = 0$ alors $n_0 = 0$ convient. Supposons que $x > 0$ et considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}\ :\ x \geq n\}$. En appliquant la propriété d'Archimède (à x et à $\varepsilon = 1$), il existe $p \in \mathbb{N}^*$ avec $x > p$. Donc A est non vide. D'autre part A est majoré par x et $A \subset \mathbb{N}$, donc A admet un plus grand élément. Posons $n_0 = \max(A)$. On a par conséquent $n_0 \leq x$ et comme $n_0 + 1 > n_0$, on a bien $n_0 + 1 > x$.
Supposons $x < 0$. Alors d'après la proposition 2.3.1, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $-p < x$. Comme $x + p > 0$, on applique le raisonnement précédent pour obtenir un eniter k tel que $k \leq x + p < k + 1$. En posons $n_0 = k - p$, on a bien $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_0 \leq x < n_0 + 1$.
Unicité : Soient p et q deux entiers relatifs vérifiant $p \leq x < p + 1$ et $q \leq x < q + 1$. Si $p < q$ alors $p + 1 \leq q$, mais $x < p + 1$ donc $x < q$ □

Définition 2.3.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie l'unique entier relatif noté $\mathrm{E}(x)$ vérifiant

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

Propriété 2.3.6.
— *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a,* $\mathrm{E}(n) = n$.
— *Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, on a* $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(y)$.
— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$0 \leq \mathrm{E}(nx) - n\mathrm{E}(x) \leq n-1.$$

— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ réel et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x).$$

La coube de fonction partie entière est donnée ci-dessous, elle a la forme d'un escalier. On dit que la fonction partie entière est une fonction en escalier.

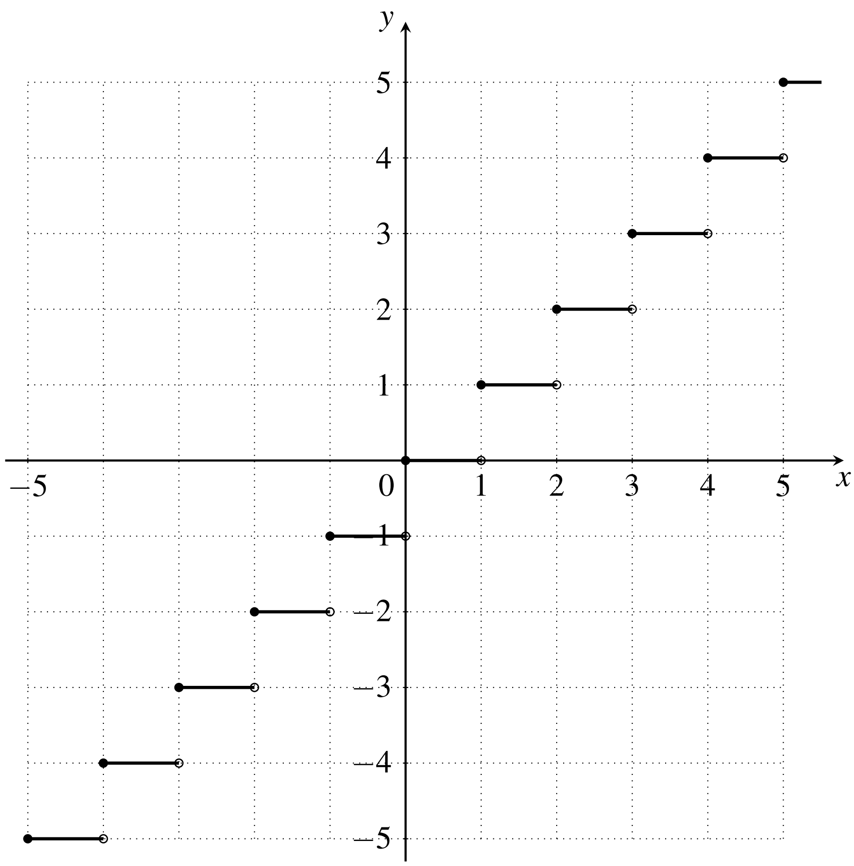


FIGURE 2.2 – courbe de la fonction partie entière

Approximation d'un réel par un nombre décimal

Définition 2.3.7 (Nombre décimal)**.** Un nombre réel x est dit décimal s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{m}{10^n}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^n} \ : \ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathrm{E}(10^n x) \leq 10^n x < \mathrm{E}(10^n x) + 1$. Donc

$$\frac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n} \leq x < \frac{\mathrm{E}(10^n x) + 1}{10^n}.$$

Définition 2.3.8. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

– Le nombre décimal $\dfrac{\mathrm{E}(10^n x)}{10^n}$ est appelé valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près.

– Le nombre décimal $\dfrac{\mathrm{E}(10^n x)+1}{10^n}$ est appelé valeur approchée par excès de x à 10^{-n} près.

Exemple 2.3.9 : Prenant $a = \sqrt{2}$. On a $1 < a^2 = 2 < 4$ donc $1 < a < 2$, par suite $\mathrm{E}(a) = 1$.

— Approximation de $\sqrt{2}$ à $0,1$ près : Comme $(10a)^2 = 200$, $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$, donc $14^2 < (10a)^2 < 15^2$, d'où $14 < 10a < 15$. Par suite $1,4 < a < 1,5$.

— Approximation de $\sqrt{2}$ à $0,01$ près : Comme $(100a)^2 = 20000$, $141^2 = 19881$ et $142^2 = 20164$, donc $141^2 < (10a)^2 < 142^2$, d'où $141 < 100a < 142$. Par suite $1,41 < a < 1,42$.

2.4 Densité dans $\mathbb{R}$

Définition 2.4.1. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense si pour tous nombres réels x et y avec $x < y$, il existe $z \in A$ tel que

$$x < z < y.$$

Exemples de parties denses de $\mathbb{R}$

Proposition 2.4.2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. En d'autre terme entre deux rationnels distincts, il existe toujours un nombre réel.*

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Comme $y - x > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$, soit encore $y > x + \dfrac{1}{n}$. Posons $m = \mathrm{E}(nx) + 1$ et montrons que le nombre rationnel $\dfrac{m}{n}$ est tel que $x < \dfrac{m}{n} < y$.

Par définition de la partie entière, on a $m - 1 \leq nx < m$ donc $\dfrac{m}{n} - \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{m}{n} \leq x + \dfrac{1}{n} < y$.

On a bien $x < \dfrac{m}{n} < y$, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Proposition 2.4.3. *L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Comme $x + \sqrt{2}$ et $y + \sqrt{2}$ sont des réels tels que $x + \sqrt{2} < y + \sqrt{2}$, il existe donc par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, un nombre rationnel r vérifiant $x + \sqrt{2} < r < y + \sqrt{2}$. On a $r - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x < r - \sqrt{2} < y$, donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 2.4.4 (Une preuve directe de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Comme $y - x > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$, soit encore $y > x + \dfrac{1}{n}$. Posons $m = \mathrm{E}(nx\sqrt{2}) + 1$. Remarquons qu'on peut toujours

choisir $n \in \mathbb{N}$ pour que $m \neq 0$.
Par définition de la partie entière, on a $m-1 \leq nx\sqrt{2} < m$ donc

$$\frac{m}{n\sqrt{2}} - \frac{1}{n\sqrt{2}} \leq x < \frac{m}{n\sqrt{2}} \leq x + \frac{1}{n\sqrt{2}} < x + \frac{1}{n} < y.$$

Comme $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ donc $\frac{m}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $x < \frac{m}{n\sqrt{2}} < y$. Ce qui prouve que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 2.4.5. *L'ensemble des décimaux relatifs $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. Comme $y - x > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(y-x) > 1$, soit encore $y > x + \frac{1}{n}$. Posons $m = \mathrm{E}(10^n x) + 1$.
Une récurrence simple permet de voir que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k < 10^k$. On a $m-1 \leq 10^n x < m$ donc

$$\frac{m}{10^n} - \frac{1}{10^n} \leq x < \frac{m}{10^n} \leq x + \frac{1}{10^n} < x + \frac{1}{n} < y.$$

Il existe donc un nombre décimal $d = \frac{m}{10^n}$ tel que $x < d < y$, $\mathbb{D}$ est par conséquent dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 2.4.6. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Ce qui fournit une autre preuve de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.7. C'est par dessein que nous avons utilisé la même technique dans la preuve des propositions 2.4.2, 2.4.3 et 2.4.5, espérant ainsi que les étudiants sauront la maîtriser.

2.5 Valeur absolue

Définition 2.5.1. La valeur absolue d'un nombre réel x est le réel noté $|x|$ défini par

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On donne les principales propriétés de la valeur absolue dans la proposition ci-dessous

Proposition 2.5.2.

(i) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|x| \geq 0$*
(ii) *Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
(iii) *$|-x| = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
(iv) *$|xy| = |x|\,|y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.*
(v) *$|x|^2 = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En général pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^n| = |x|^n$.*
(vi) *Pour tout $\in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.*
(vii) *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. $|x| \leq r$ si et seulement $-r \leq x \leq r$.*
(viii) *$-|x| \leq x \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
(ix) *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. $|x| \geq r$ si et seulement $x \leq -r$ ou $x \geq r$.*

(x) *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a* $\max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ *et* $\min\{x,y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Démonstration.
(i) et (ii) découlent immédiatement de la définition.

(iii) : Si $x \geq 0$, alors $|-x| = -(-x) = x = |x|$. Si $x < 0$, alors $|-x| = -x$. Finalement on a $|-x| = |x|$.

(iv) : Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Si x et y sont tous les deux positifs alors $xy = |xy|$ et $|x|\,|y| = xy$.
Si x et y sont tous les deux négatifs alors $xy = |xy|$ et $|x|\,|y| = (-x)(-y) = xy$.
Si $x \geq 0$ and $y \leq 0$ alors $|xy| = -xy$ et $|x|\,|y| = x(-y) = -xy$.
Si $x \leq 0$ and $y \geq 0$ alors $|xy| = -xy$ et $|x|\,|y| = (-x)y = -xy$.
Dans tous les cas $|x|\,|y| = |x|\,|y|$.

(v) : C'est évident si $x \geq 0$. Si $x < 0$, alors $|x|^n = (-x)^n = |x^n|$.

(vi) : Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, comme $x\dfrac{1}{x} = 1$, en appliquant (iv) on obtient $|x|\left|\dfrac{1}{x}\right| = 1$. Donc $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

(vii) : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. Supposons que $|x| \leq r$. Si $x \geq 0$, alors $0 \leq x \leq r$. Si $x \leq 0$, alors $|x| \leq r$ entraîne $-x \leq r$ soit encore $0 \geq x \geq -r$. Par conséquent $|x| \leq r \Longrightarrow -r \leq x \leq r$.

Réciproquement, supposons que $-r \leq x \leq r$. Si $x \geq 0$, alors l'inégalité $x \leq r$ donne $|x| \leq r$. Si $x \leq 0$, alors $-r \leq x$ qui s'écrit aussi $-x \leq r$, donne $|x| \leq r$. Par conséquent $-r \leq x \leq r \Longrightarrow |x| \leq r$.

En conclusion : $|x| \leq r \Longleftrightarrow r \leq x \leq r$.

(viii) : Il suffit d'appliquer (vii) avec $r = |x|$.

(ix) : Il suffit de prendre la négation de (vii) puis de prendre en compte le cas d'égalité.

(x) : Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Supposons que $x \leq y$. On a

$$\max\{x,y\} = y,\ |x-y| = y-x \ \text{ et } \ \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = y = \max\{x,y\}$$

et

$$\min\{x,y\} = x,\ |x-y| = x-y \ \text{ et } \ \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \min\{x,y\}.$$

Pour $x \geq y$ on fait le même raisonnement que le cas $x \leq y$. □

La proposition ci dessous donne une importante inégalité connue sur le non d'inégalité triangulaire *inégalité triangulaire*.

Proposition 2.5.3 (Inégalité triangulaire)**.** $|x+y| \leq |x| + |y|$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. D'après la proposition 2.5.2 on a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. D'où

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|\,.$$

Encore de la proposition 2.5.2, on obtient $|x+y| \leq |x| + |y|$. □

L'inégalité triangulaire a les conséquences immédiates suivantes

Corollaire 2.5.4. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$

(i) (Inégalité triangulaire renversée) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$.

(ii) $|x-y| \leq |x|+|y|$.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. En écrivant $x=(x-y)+y$ et appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient $|x| \leq |x-y|+|y|$, soit $|x|-|y| \leq |x-y|$. En faisant de même pour $y=(y-x)+x$, on obtient $-(|x|-|y|) \leq |x-y|$. En appliquant la proposition 2.5.2 on obtient $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$. Pour la deuxième inégalité, il suffit de remarquer que $x-y=x+(-y)$ et d'appliquer l'inégalité triangulaire. □

Corollaire 2.5.5. *Soit* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

Démonstration. Nous allons par récurrence : Le résultat est trivial pour $n=1$, et pour $n=2$ il s'agit de l'inédalité trianglulaire.
Supposons que pour un certain entier n et pour des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

Considérons maintenant $n+1$ nombes réels $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. On a $x_1+\cdots+x_{n+1}=(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}|x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}| &\leq |x_1+x_2+\cdots+x_n|+|x_{n+1}| \\ &\leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|+|x_{n+1}|\end{aligned}$$

car $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$. □

***Exercice* 2.5.1 :** *Pour quel nombre réel M a-t-on $|x^3-x^2+8x| \leq M$ pour tout $-2 \leq x \leq 10$.*

Chapitre 3

Suites numériques

L'analyse consiste essentiellement à prendre des limites. Le type le plus élémentaire d'une limite est une limite d'une suite de nombres réels. Nous avons déjà vu et utilisés les suites de manière informelle. Donnons la définition formelle.

3.1 Suites et limites

Définition 3.1.1. Une *suite* (de nombres réels) est une fonction $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dont le domaine de définition est de la forme $\{n \in \mathbb{N} \ : \ n \geq p\}$; p est généralement égal à 0 ou 1. Au lieu d'écrire $u(n)$ nous utiliserons la notation u_n pour désigner l'image de n par u. Nous utilserons la notation $(u_n)_{n\geq p}$ ou $(u_p, u_{p+1}, \cdots)$ pour la suite u. Si $p = 0$ alors on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_0, u_1, \cdots)$.

1. Une suite doit être vue comme une liste infinie de nombre réels : u_0, u_1, u_2, *etc*, qui sont appelés les *termes* de la suite.
2. Si nous ne fixons pas une valeur particulière pour n nous dirons que u_n (le nombre) est le *terme général* de la suite.
3. n est appelé le *rang* (et il est placé en indice) de u_n. Ainsi u_n est terme de rang n.

Exemple 3.1.2 : 1. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Il s'agit de la suite $\left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \cdots\right)$. L'ensemble des valeurs prises est $\left\{1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \cdots\right\}$.

2. Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = (-1)^n$. Il s'agit de la suite $(1, -1, 1, -1, \cdots)$. L'ensemble des valeurs prises est $\{-1, 1\}$.

Il est important de faire la distinction entre une suite et son ensemble de valeurs, car la validité de nombreux résultats dans ce livre dépend de si nous travaillons avec une suite ou un ensemble.

3.1.1 Limite finie et suite convergente

La limite d'une sute $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un nombre réel dont les valeurs u_n sont proches pour les grandes valeurs de n.

Définition 3.1.3. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ ou a pour *limite* ℓ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in N$

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n := \ell$ ou $u_n \longrightarrow \ell$.

Définition 3.1.4 (suite convergente)**.** On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* s'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n := \ell$.
Une suite qui converge est dite *convergente*. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*. On dit d'une suite divergente qu'elle *diverge*.

Écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$, signifie deux choses. Premièrement que, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et deuxièment que sa limite est ℓ.

Exemple 3.1.5 : Soit $p > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^p}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$.
D'après la propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\varepsilon^{1/p} > 1$, soit $\dfrac{1}{N} < \varepsilon^{1/p}$.
Pour tout entier n vérifiant $n \geq N$ on a

$$|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \varepsilon.$$

Ce qui est $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.

Exemple 3.1.6 : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = (-1)^n$ est divergente.
En effet, supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$. Alors pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ on ait $|v_n - \ell| < \dfrac{1}{2}$. Comme $2N > N$ et $2N+1 > N$, on a

$$\frac{1}{2} > |v_{2N} - \ell| = |1-\ell| \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} > |v_{2N+1} - \ell| = |-1-\ell|.$$

D'autre part

$$2 = |1-\ell-(-1-\ell)| \leq |1-\ell| + |-1-\ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On aboutit à $2 < 1$, ce qui est absurde, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 3.1.7 (unicité de la limite)**.** *Une suite convergente a unique limite.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$, ℓ et ℓ' deux réels.
Supposons que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ et pour limite ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. De même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$, $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout entier n vérifiant $n \geq N$ (donc on a à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$) on a

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &= |u_n - \ell - (u_n - \ell')| \\ &\leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $|\ell' - \ell| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|\ell' - \ell| = 0$ c'est-à-dire $\ell = \ell'$. Par conséquent la limite d'une suite si elle existe est unique. $\square$

Remarque 3.1.8.
— La convergence d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

— Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergence on peut montrer la négation de la convergence d'une suite, c'est-à-dire :

$$\forall \ell \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0\ :\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}\, n \geq N\ :\ |u - n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Exemple 3.1.9 : Montrons que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n$ est divergente.
En effet, soit $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \ell + 1$. Alors pour tout $n > N$, on a $|u_n - \ell| \geq 1$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Définition 3.1.10. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
1. *stationnaire* si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p$;
2. *périodique* s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que, pour tout entier n, on ait $u_{n+p} = u_n$;
3. *majorée* s'il existe un réel M (appelé majorant de la suite) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$;
4. *minorée* s'il existe un réel m (appelé minorant de la suite) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$;
5. *bornée* s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$; ce qui revient au même de dire que la suite est à la fois majorée et minorée.

Proposition 3.1.11. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un nombre reel ℓ. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < 1$. Posons $M_1 := |\ell| + 1$. Pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_n - \ell + \ell| \\ &\leq |u_n - \ell| + |\ell| \\ &< 1 + |\ell| = M_1. \end{aligned}$$

L'ensemble $\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|\}$ est fini par conséquent il admet un maximum. Posons

$$M_2 := \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{M-1}|\}.$$

Enfin en posant $M := \max\{M_1, M_2\}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

□

Remarque 3.1.12. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n| = 1$) mais elle ne converge pas d'après l'exemple 3.1.6.
Par conséquent une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

***Exercice* 3.1.1 :** *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe d'après la proriété d'Archimède $N \in \mathbb{N}$ tel que $M\varepsilon > 1$, soit $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Pour tout $n \geq M$ on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+1}{n^2+n} - 1\right| = \left|\frac{n^2+1-(n^2+n)}{n^2+n}\right| &= \left|\frac{1-n}{n^2+n}\right| \\ &= \frac{n-1}{n^2+n} \\ &\leq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1} \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{M} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1$.

Proposition 3.1.13. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers un réel ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$, donc pour tout $n \geq N$, $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$. □

La réciproque n'est pas forcément vraie. En effet, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors que $(|(-1)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (car $|(-1)^n| = 1$).

Cependant, on a la résultat suivant

Proposition 3.1.14. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite. On a $|u_n| = |u_n - 0| = ||u_n| - 0| = ||u_n||$ donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow ||u_n| - 0| < \varepsilon) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - 0| < \varepsilon) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.15. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et à partir d'un certain rang*

$$|u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ comme dans l'énoncé. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a $|\alpha_n| < \varepsilon$. En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \alpha_n < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

***Exercice* 3.1.2 :** *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(n)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\sin(n)| \leq 1$, donc $\left|\frac{1}{n}\sin(n)\right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la proposition précédente permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(n) = 0$.

***Exercice* 3.1.3 :** *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général* $u_n = \frac{\mathrm{E}(nx)}{n}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(nx) \leq nx < \mathrm{E}(nx)+1$, donc $0 \leq \frac{nx-\mathrm{E}(nx)}{n} < \frac{1}{n}$. Ainsi $|u_n - x| < \frac{1}{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la proposition précédente permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers x.

3.1.2 Limite infinie d'une suite

Définition 3.1.16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (on dit aussi a pour limite $+\infty$) et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \longrightarrow +\infty$ si :
$$\forall A > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geq N \Longrightarrow u_n > A \tag{3.2}$$
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (on dit aussi a pour limite $-\infty$) et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \longrightarrow -\infty$ si :
$$\forall A < 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geq N \Longrightarrow u_n < A \tag{3.3}$$

Remarque 3.1.17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On montre aisement que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geq N \Longrightarrow u_n > A)$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geq N \Longrightarrow u_n < A).$$

Exemple 3.1.18 : Pour tout $p > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$. En effet, soit $A > 0$, en posant $N = (\mathrm{E}(A)+1)^{1/p}$, on a bien pour tout $n \geq N$, $n^p \geq N^p = \mathrm{E}(A)+1 > A$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Exemple 3.1.19 : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
Soit $A > 0$. Posons $N = \mathrm{E}(\mathrm{e}^A)+1$. Pour tout $n \geq N$, on a $n > \mathrm{e}^A$, d'où $\ln n > A$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.

Exemple 3.1.20 : Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty.$$
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 \leq 2n$ donc $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ et $\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$.
Soit $A > 0$. Choisissons N dans $\mathbb{N}$ tel que $N > 2A$ (dont l'existence est assurée par la propriété d'Archimède.) Pour tout $n \geq N$ on a $n > 2A$ donc $\frac{n}{2} > A$. Par conséquent
$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n}{2} > A.$$
Ce qui veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$.

Exemple 3.1.21 : Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1-n} = -\infty.$$
On a pour tout $n \geq 2$, $n-1 < n$ donc $\dfrac{1}{n-1} > \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{n^2}{n-1} < \dfrac{n^2}{-n} = -n$.
Soit $A < 0$. Choisissons N dans $\mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$ et $N > -A$. Pour tout $n \geq N$ on a $n > -A$ donc $-n < A$. Par conséquent
$$\frac{n^2}{1-n} < -n < A.$$
Ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1-n} = -\infty$.

Remarque 3.1.22. Il est clair que toute suite ayant une limite infine diverge mais la réciproque n'est pas vraie en général. il existe bien des suites divergentes qui ne tendent ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$, comme le montre la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$:
– Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = +\infty$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $(-1)^n > 2$. Ce qui absurde car $(-1)^n = 1$ ou -1 est toujours plus petit que 2.
– Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = -\infty$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $(-1)^n < -2$. Ce qui absurde car $(-1)^n = 1$ ou -1 est toujours plus grand que -2.
Par conséquent la limite de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'existe pas. Ici le terme n'existe signifie n'appartient pas à $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.1.23. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*
— $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

— *Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.*
— *Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Démonstration. Le premier point est trivial, le troisième se déduit du deuxième par l'intermédiaire du premier. Montrons donc le deuxième.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n > 1$. Posons $m = \min\{1, u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}\}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$, ce qui signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. □

Exercice 3.1.4 : *Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & si\ a > 1 \\ 1 & si\ a = 1 \\ 0 & si\ |a| < 1 \end{cases}$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n$ *n'existe pas si $a \leq -1$.*

Si $a > 1$, alors par l'inégalité de Bernoulli, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$$a^n = (1+(a-1))^n \geq 1+n(a-1).$$
Soit $A > 0$. En posant $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{A-1}{a-1}\right)+1$, on a pour tout $n \geq N$, $n > \dfrac{A-1}{a-1}$ et $a^n \geq 1+n(a-1) > 1+A-1 = A$. D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
Si $a = 1$, alors $a^n = 1$ pour tout n et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^n = 1$.
Si $|a| < 1$, alors $\dfrac{1}{|a|} > 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$ d'après ce qui précède. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\dfrac{1}{|a|^n} = \left(\dfrac{1}{|a|}\right)^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, soit $|a^n| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
Si $a \leq -1$, alors pour n pair, $a^n \geq 1$ et pour n impair, $a^n \leq -1$.
– Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $a^n > 1$. En prenant un entier impair $n_0 \geq N$, on aurait $-1 \geq a^{n_0} > 1$. Ce qui est absurde.
– Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = -\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a^n < -1$. En prenant un entier pair $n_0 \geq N$, on aurait $1 \leq a^{n_0} < -1$. Ce qui est absurde.
– Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \ell \in \mathbb{R}$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a^n - \ell| < 1$, soit $-1 + a^n < \ell < 1 + a^n$. En prenant un entier pair $n_0 \geq N$, on aurait de $a^{n_0} > 1$, $\ell > 0$ et en prenant un entier impair $n_0 \geq N$, on aurait de $a^{n_0} < -1$, $\ell < 0$. Ce qui est impossible

Ce qui prouve $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a ni une limite finie, ni une limite infinie.

3.1.3 Opérations algébriques sur les limites de suites

Les limites de suites convergentes sont compatibles avec les opérations algébriques. plus précisement, on a la proposition suivante :

Proposition 3.1.24. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes.*

(i) La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha u_n) = \alpha \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

(iii) La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right).$$

(iv) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$, de plus la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}.$$

Démonstration. Prouvons (i) : Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et posons $\ell_1 := \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\ell_2 := \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Soit $\varepsilon > 0$.
– Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_n - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
– Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a $|v_n - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned}
|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |u_n - \ell_1 + v_n - \ell_2| \\
&\leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\ell_1+\ell_2$. Ainsi (i) est prouvé.
Prouvons (ii) : Si $\alpha=0$ alors il n'y a rien à faire. Supposons $\alpha\neq 0$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$.
Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Alors pour tout $n\geq N$, on a

$$\begin{aligned}|\alpha u_n-\alpha\ell| &= |\alpha|\,|u_n-\ell|\\ &\leq |\alpha|\,\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\\ |\alpha u_n-\alpha\ell| &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha u_n)=\alpha\ell$. Ce qui prouve (ii) .

Prouvons (iii) : Supposons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et posons $\ell_1:=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\ell_2:=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Soit $\varepsilon>0$.

– Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée. il existe donc $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\leq M$.
– Il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_1$ on a $|u_n-\ell_1|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\ell_2|+1)}$.
– Il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N_2$ on a $|v_n-\ell_2|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$.

Posons $N:=\max\{N_1,N_2\}$. Pour tout $n\geq N$ on a

$$\begin{aligned}|u_nv_n-\ell_1\ell_2| &= |u_nv_n-(\ell_1+u_n-u_n)\ell_2|\\ &= |u_n(v_n-\ell_2)+(u_n-\ell_1)\ell_2|\\ &\leq |u_n(v_n-\ell_2)|+|(u_n-\ell_1)\ell_2|\\ &= |u_n(v_n-\ell_2)|+|(u_n-\ell_1)\ell_2|\\ &\leq M|v_n-\ell_2|+|u_n-\ell_1|\,|\ell_2|\\ &< M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2|+1)}|\ell_2|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui prouve que la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Pour prouver (iv) montrons d'abord le résultat suivant :

Lemme : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que $\lim\limits_{n\to=\infty} v_n\neq 0$ alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $v_n\neq 0$ pour tout $n\geq n_0$ et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}.$$

Preuve du lemme : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell\neq 0$. Alors il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, on a $|\ell-v_n|<\dfrac{|\ell|}{2}$. De $|\ell|-|v_n|\leq|\ell-v_n|<\dfrac{|\ell|}{2}$, on obtient pour tout $n\geq n_0$, $|v_n|>\dfrac{|\ell|}{2}>0$. ce qui prouve la première partie du lemme.
Maintenant, soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$, il existe n_1 tel que pour tout $n\geq n_1$, on a

$$|v_n-\ell|<\frac{\varepsilon\,|\ell|^2}{2}.$$

Posons $N = \max\{n_0, n_1\}$, alors pour tout $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}\right| &= \left|\frac{\ell - v_n}{\ell v_n}\right| \\ &= \frac{|\ell - v_n|}{|\ell|\,|v_n|} \\ &< \frac{|\ell - v_n|}{|\ell|}\,\frac{2}{|\ell|} \\ &< \frac{1}{|\ell|}\,|\ell|^2\,\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{2}{|\ell|} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. Pour terminer la preuve, on applique (iii) aux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Remarque 3.1.25. — La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. En effet, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite divergente. Si la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, alors, d'après la proposition ci-dessus $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est égale à $((u_n + v_n) - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait convergente, ce qui est absurde.

— On ne peut rien dire de la somme ou du produit de deux suites divergentes. Par exemple les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = 1 + (-1)^n$ et $u_n = 1 - (-1)^n$ sont divergentes mais les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 2$ et $u_n v_n = 0$. Un deuxième exemple, les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $t_n = (-1)^n$ et $s_n = n$ divergent ainsi les suites somme $(t_n + s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et produit $(t_n s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.1.26. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques admettant des limites ℓ_1 et ℓ_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

— *Si la forme $\ell_1 + \ell_2$ n'est pas indéterminée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$.*

— *Si la forme $\ell_1 \ell_2$ n'est pas indéterminée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell_1 \ell_2$.*

Démonstration. (se référer à la page 74 pour l'extension des opérations à $\overline{\mathbb{R}}$)

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont des réels alors le résultat est bien celui démontré dans la proposition 3.1.24.

Somme :

— Si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = +\infty$ alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(n \geq N_1 \Longrightarrow u_n > \frac{A}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(n \geq N_2 \Longrightarrow u_n > \frac{A}{2}\right).$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n + v_n \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$. Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty = +\infty + \infty$.

— Si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (car bornée) et il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq m$. D'autre part pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow u_n > A - m.$$

On voit donc que pour tout $n \geq N$, $u_n + v_n > m + A - m = A$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty = \ell_1 + \infty$.

— Le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = -\infty$ et le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ se traitement comme précedemment en considérant le suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Produit :

— Si $\ell_1 = +\infty$ et $\ell_2 = +\infty$ alors pour tout $A > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n \geq N_1 \Longrightarrow u_n > 1) \quad \text{et} \quad (n \geq N_2 \Longrightarrow u_n > A).$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a $u_n v_n > A$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty = (+\infty)(+\infty)$.

— Si $\ell_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ell_2 = +\infty$ alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| < \dfrac{\ell_1}{2}$ et pour tout $A > 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $v_n > \dfrac{2A}{\ell_1}$. Comme $|u_n - \ell_1| < \dfrac{\ell_1}{2} \Longrightarrow u_n > \dfrac{\ell_1}{2}$, en posant $N = \max(N_1, N_2)$, on voit que pour tout $n \geq N$, $u_n v_n > \dfrac{\ell_1}{2} \cdot \dfrac{2A}{\ell_1} = A$.
Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty = (\ell_1)(+\infty)$.

— Si $\ell_1 \in \mathbb{R}_-^*$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le cas précédent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}((-u_n)v_n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = -\infty = \ell_1(+\infty)$.

— Le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 = -\infty$, le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}_-^*$ et le cas $\ell_1 = -\infty$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}_+^*$ se traitement comme précedemment en considérant le suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Remarque 3.1.27. On ne peut rien dire quant à la limite :
— de la somme de deux suites qui tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$,
— du produit de deux suites dont l'une tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et l'autre vers 0.

Proposition 3.1.28. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors à partir d'un certain rang tous les termes sont strictement positifs et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors à partir d'un certain rang tous les termes sont strictement négatifs et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si à partir d'un certain rang tous les termes sont strictement positifs alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

(iv) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si à partir d'un certain rang tous les termes sont strictement négatifs alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Démonstration. Montrons (i). Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $u_n > 1$. À partir du rang N tous les termes sont strictement positifs.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
Pour montrer (ii), il suffit d'appliquer (i) à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De même, pour montrer (iv), il suffit d'appliquer (iii) à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cette raisons on montre seulement (iii) : Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Pour tout $A > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $u_n = |u_n| < \dfrac{1}{A}$. En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a pour tout $n \geq N$, $\dfrac{1}{u_n} > A$. On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Exemple 3.1.29 : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Par contre la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend ni vers $+\infty$ (car elle n'est pas minorée), ni vers $-\infty$ (car elle n'est pas majorée). Ce qui prouve que l'hypothèse de signe constant à partir d'un certain rang a une grande importance dans la proposition 3.1.28.

Notation :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ alors on écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell^+$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell^-$) pour signifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et tous les termes de la suite sont strictement supérieur (respectivement strictement inférieur) à ℓ à partir d'un certain rang.
On résume les opérations sur les limites dans les tableaux suivants (F.I signifie forme indéterminée)
Somme de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Produit de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

Quotient de limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$	$\ell\neq0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Proposition 3.1.30. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $a_0, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$, $b_0, \cdots, b_p \in \mathbb{R}$ tels que $a_k \neq 0$ et $b_p \neq 0$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_p n^p} = \begin{cases} 0, & si\ p > k \\ +\infty, & si\ p < k\ et\ \dfrac{a_k}{b_p} > 0 \\ -\infty, & si\ p < k\ et\ \dfrac{a_k}{b_p} < 0 \\ \dfrac{a_p}{b_p}, & si\ p = k \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p} = \frac{n^k}{n^p} \cdot \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots \frac{a_0}{n^k}}{b_p + \frac{b_{p-1}}{n} + \cdots \frac{b_0}{n^p}}$$

puis appliquer les opérations sur les limites ci-dessus. □

On admettra les résultats suivants qui s'avèrent très utiles pour le calcul de limites. Il s'agit en fait de la limite de composée de fonctions, dont l'étude est faite au chapitre 4.

Proposition 3.1.31. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle qu'à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^\alpha = \ell^\alpha.$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{u_n} = \sqrt[m]{\ell}$$

avec $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang si m est pair et u_n quelconque si m est impair.

Proposition 3.1.32. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $a > 0$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{u_n} = a^\ell.$$

Exercice 3.1.5 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \geq 0$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\ell}.$$

– Supposons dans un premier cas que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = u_n - \ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|\alpha_n| < \ell$. D'où $\dfrac{\alpha_n}{\ell} \geq -1$ pour $n \geq n_1$. Soit $n \geq n_1$. On a

$$\sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\ell + \alpha_n} = \sqrt[p]{\ell}\sqrt[p]{1 + \frac{\alpha_n}{\ell}},$$

donc

$$\left|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{\ell}\right| = \sqrt[p]{\ell}\left|\sqrt[p]{1 + \frac{\alpha_n}{\ell}} - 1\right|.$$

Si $\alpha_n \geq 0$ alors, comme $0 < |\alpha_n| < \ell$, on a $0 < \alpha_n < \ell$ et donc $1 - \dfrac{\alpha_n}{\ell} < 1 < 1 + \dfrac{\alpha_n}{\ell}$. Ces dernières inégalités nous donnent

$$1 - \frac{\alpha_n}{\ell} < \sqrt[p]{1 + \frac{\alpha_n}{\ell}} < 1 + \frac{\alpha_n}{\ell}$$

c'est-à-dire

$$\left|\sqrt[p]{1+\frac{\alpha_n}{\ell}}-1\right| < \frac{\alpha_n}{\ell}.$$

Si $\alpha_n < 0$ alors, $0 < -\frac{\alpha_n}{\ell} < 1$, d'où $0 < 1+\frac{\alpha_n}{\ell} < 1$. Ce qui donne

$$0 < 1+\frac{\alpha_n}{\ell} < \sqrt[p]{1+\frac{\alpha_n}{\ell}} < 1$$

ou encore

$$\left|\sqrt[p]{1+\frac{\alpha_n}{\ell}}-1\right| < -\frac{\alpha_n}{\ell}.$$

Dans tous les cas, on a $\left|\sqrt[p]{1+\frac{\alpha_n}{\ell}}-1\right| < \frac{|\alpha_n|}{\ell}$. Par conséquent,

$$\left|\sqrt[p]{u_n}-\sqrt[p]{\ell}\right| < \sqrt[p]{\ell}\frac{|\alpha_n|}{\ell}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{\ell}\frac{|\alpha_n|}{\ell} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\ell}$.

– Supposons dans maintenent que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|u_n| < \varepsilon^p$. Ainsi pour tout $n \geq n_2$, $\left|\sqrt[p]{u_n}\right| < \varepsilon$. Ce qui est $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[p]{u_n} = 0$.

3.1.4 Limites et inégalités

Théorème 3.1.33. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques.*

1) Supposons qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2) Supposons qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3) (Théorème des gendarmes :) Supposons qu'à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Démonstration. 2) découle immédiatement de 1) en considérant les suites $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cette raison, on montre 1). Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$. En prenant $N = \max(n_0, n_1)$, on a pour tout $n \geq N$, $v_n \geq u_n > A$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Montrons 3) : Supposons qu'à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a $|w_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$. Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$. Soit $n \geq N$. On a

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| = u_n - v_n &\leq w_n - v_n \\
&= |w_n - \ell + \ell - v_n| \\
&\leq |w_n - \ell| + |\ell - v_n| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|u_n-\ell| &= |u_n-v_n-\ell+v_n| \\ &\leq |u_n-v_n|+|v_n-\ell| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Exemple 3.1.34 : Déterminer si elle existe la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}1\leq k &\leq n \\ 1\leq \sqrt{k} &\leq \sqrt{n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\leq \frac{1}{\sqrt{k}} &\leq 1.\end{aligned}$$

En sommant, on obtient $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq \sum_{k=1}^{n}1$, soit $\sqrt{n}=\frac{n}{\sqrt{n}}\leq u_n\leq n$.
Comme $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $u_n\geq\sqrt{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exemple 3.1.35 : Déterminer si elle existe la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in\{1,\cdots,n\}$, on a

$$\begin{aligned}1\leq k &\leq n \\ n^2+1\leq n^2+k &\leq n^2+n \\ \frac{1}{n^2+n}\leq \frac{1}{n^2+k} &\leq \frac{1}{n^2+1} \\ \frac{n}{n^2+n}\leq \frac{n}{n^2+k} &\leq \frac{n}{n^2+1}\end{aligned}$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k} &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1} \\ \frac{n^2}{n^2+n}\leq u_n &\leq \frac{n^2}{n^2+1}.\end{aligned}$$

De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$, par le théorème des gendarme, on a $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

Les propositions suivantes indiquent que l'inégalité stricte entre les limites est héritée par des termes d'indice suffisamment grand, tandis que l'inégalité non stricte entre les termes est héritée par des limites.

Proposition 3.1.36. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Si $\ell < \ell'$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < v_n$.*

Démonstration. Comme $\ell < \ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $\left(n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \dfrac{\ell'-\ell}{2}\right)$ et $\left(n \geq N_1 \Longrightarrow |v_n - \ell'| < \dfrac{\ell'-\ell}{2}\right)$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$ on a, $u_n < \ell + \dfrac{\ell'-\ell}{2} = \dfrac{\ell'+\ell}{2}$ et $\dfrac{\ell'+\ell}{2} = \ell' - \dfrac{\ell'-\ell}{2} < v_n$, d'où $u_n < v_n$. □

Proposition 3.1.37. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.
Supposons par l'absurde que $\ell > \ell'$. d'après la proposition 3.1.36, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n > v_n$. Ce qui absurde. □

On a comme corollaire de la proposition 3.1.37.

Corollaire 3.1.38.

(i) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq 0$.

(ii) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $a \leq u_n \leq b$, à partir d'un certain rang, alors $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq b$.

Notons que dans la proposition 3.1.37 et le corollaire 3.1.38 on ne peut pas remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, si $u_n := \dfrac{-1}{n}$ et $v_n := \dfrac{1}{n}$. Alors $u_n < v_n$, $u_n < 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cependant, ces inégalités ne sont pas préservées par passage à la limite, plus précisement, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.
La moralité de cet exemple est qu'une inégalité stricte peut devenir une inégalité large par passage à la limite.
En fait, si on a $u_n < v_n$ même pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on ne peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

3.1.5 Sous-suite

Définition 3.1.39. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite*, ou *sous-suite*, d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple 3.1.40 :
— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
— Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 3.1.41. *Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Démonstration. On va raisonner par récurrence. Comme $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application, alors $\varphi(0) \geq 0$. Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geq n+1$. Comme φ est strictement croissante, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, or $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n+1) > n$. Par conséquent $\varphi(n+1) \geq n+1$.
On prouve ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. □

Proposition 3.1.42. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique admettant une limite $\ell \in \overline{R}$. Alors pour toute sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Démonstration. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

— Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Pour $n \geq N$, comme l'assure le lemme 3.1.41, $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n) \geq N$, par suite $v_n = u_{\varphi(n)} > A$. Ce qui est bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
— Le cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ est similaire au précédent.
— Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Pour $n \geq N$, comme l'assure le lemme 3.1.41, $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n) \geq N$, par suite $|v_n - \ell| = \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$. Ce qui est bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

□

Une conséquence de cette proposition est que toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et de même limite. Il est à noter que la réciproque n'est pas forcément vraie. On utilise généralement la proposition 3.1.42 pour établir qu'une suite diverge.

Exemple 3.1.43 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente, car la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

Proposition 3.1.44. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Supposons que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que ;

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad n \geq N_1 \Longrightarrow |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon.$$

En posant $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, on obtient alors pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Définition 3.1.45 (valeur d'adhérence)**.** On dit qu'un nombre réel x est une *valeur d'adhérence* d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.1.46 :

— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$ admet -1 et 1 pour valeurs d'adhérence, car la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et a suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
— L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \cos(n)$ est $[-1, 1]$.

Proposition 3.1.47. *Une suite de nombres réels convergente admet exactement une unique valeur d'adhérence.*

La preuve découle immédiatement de la proposition 3.1.42.

Remarque 3.1.48. La réciproque de la proposition précédente n'est vraie. En effet la suite $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 0 pour unique valeur d'adhérence, cependant, elle diverge.

Proposition 3.1.49. *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si toutes ses sous-suites convergent vers la même limite.*

La preuve découle des propositions 3.1.42 et 3.1.44.

***Exercice* 3.1.6** *: Déterminer, dans chacun des cas suivant les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par :*

1. $u_n = 5 + \dfrac{\sqrt{n}\sin(n)}{2n^2} + (-1)^{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $u_n = (-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. $u_n = \dfrac{7n}{11} - \mathrm{E}\left(\dfrac{7n}{11}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

***Exercice* 3.1.7** *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

***Exercice* 3.1.8** *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $v_{2k} := u_{k^2}$ et $v_{2k+1} := u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergence, et en cas de convergence*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

3.2 Suite monotone et suites adjacentes

3.2.1 Suite monotone

Définition 3.2.1. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- ⋆ *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- ⋆ *strictement croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- ⋆ *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- ⋆ *strictement décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$;
- ⋆ *monotone* si elle soit croissante, soit décroissante ;
- ⋆ *monotone* si elle soit strictement croissante, soit strictement décroissante ;

Par exemple, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une strictement décroissante ; la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante, elle n'est donc pas monotone.

La figure 3.1 donne la repreesentation graphique des premiers termes d'une suite croissante.

Théorème 3.2.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.*

— *Si elle est majorée, alors elle converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

— *Si elle n'est pas majorée alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

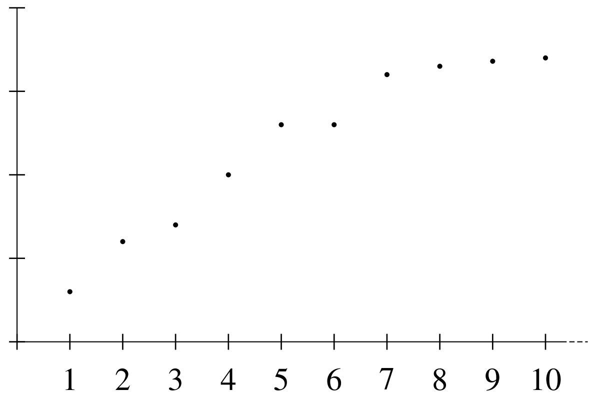


FIGURE 3.1 – Graphe d'une suite croissante

— Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Alors l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré, il possède donc une borne supérieure ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq \ell$. Pour tout $n \geq n_0$, par la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$. D'où $|u_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

— Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$, alors A n'est pas un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} > A$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

□

Corollaire 3.2.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.*
— *Si elle est minorée, alors elle converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

— *Si elle n'est pas minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Pour démontrer le corollaire 3.2.3, il suffit d'appliquer le théorème 3.2.2 à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.2.4 :

Proposition 3.2.5. *De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Considérons l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : u_n > u_m \quad \text{pour tout } m > n\}.$$

Supposons que E admet un nombre fini d'élément. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > n$ pour tout $n \in E$. Puisque $n_0 \notin E$, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 > n_0$ et $u_{n_0} \leq u_{n_1}$. De même, puisque $n_1 \notin E$, on peut trouver $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 > n_1$ et $u_{n_1} \leq u_{n_2}$. Ainsi de suite en poursuivant le processus, une fois $n_k \in \mathbb{N}$ choisie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $n_k \notin E$, il existe alors $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $n_{k+1} > n_k$ et $u_{n_{k+1}} \geq u_{n_k}$. On construit ainsi une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
Supposons que E est infini. Il suffit d'ordonner les éléments de E : $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$. Alors $n_k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $u_{n_k} > u_m$ pour tout $m > n_k$. En particulier pour $m = n_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_{n_k} > u_{n_{k+1}}$. On construit ainsi une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. □

Théorème 3.2.6 (Théorème de Bolzano-Weierrstrass)**.** *De toute suite de nombres réels bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique bornée. D'après la proposition 3.2.5, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monotone. Si la sous-suite est croissante et comme elle est majorée, alors elle converge. Si la sous-suite est décroissante et comme elle est minorée, alors elle converge. □

***Exercice* 3.2.1** *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $u_n \neq 0$ pour tout n et la limite*

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$$

existe. Montrer que
1) Si $L < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim u_n = 0$.
2) Si $L > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Comme application, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Solution. 1) Supposons que $L < 1$. Comme $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq 0$, donc $L \geq 0$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $L < r < 1$.
Comme $r - L > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\left|\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - L\right| < r - L.$$

Par suite,

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < r.$$

Pour $n > N$, on a

$$|u_n| = |u_N| \frac{|u_{N+1}|}{|u_N|} \frac{|u_{N+2}|}{|u_{n+1}|} \cdots \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < |u_n| rr\cdots r = |u_N| r^{n-N} = (|u_N| r^{-N}) r^n.$$

La suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et par conséquent $|u_N| r^{-N} r^n$ converge vers 0.

Supposons que $L > 1$. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $1 < r < L$. Comme $L - r > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\left|\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - L\right| < L - r.$$

Par suite,

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > r.$$

Aussi pour $n > N$ on a

$$|u_n| = |u_N| \frac{|u_{n+1}|}{|u_N|} \frac{|u_{N+2}|}{|u_{N+1}|} \cdots \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} > |u_N| rr\cdots r = |u_N| r^{n-N} = (|x_n| r^{-N}) r^n.$$

La suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car $r > 1$, et par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Application : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

□

3.2.2 Suites adjacentes

Définition 3.2.7. Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

(i) l'une est croissante et l'autre décroissante

(ii) $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.2.8 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.*
De plus, en notant ℓ cette limite commune et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est la suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite décroissante, on a : $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = u_n - v_n$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_n - v_{n+1} \geq 0$. Alors $w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - u_n) + (v_n - v_{n+1}) \geq 0$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, et comme elle est de limite nulle (par hypothèse $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$).
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 0$, c'est-à-dire $u_n \leq v_n$. Par suite $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. La suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0 donc converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et on a $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 donc converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \geq \ell'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme les suites convergent, $0 = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell - \ell'$, donc $\ell = \ell'$. □

Exercice 3.2.2 : *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général*

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

est convergente.

Exercice 3.2.3 : *(Suites arithmético-géométriques)*
Les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},$$

et $0 < v_0 < u_0$ sont adjacentes.

Démonstration. Par récurrence immédiate, toutes les valeurs des termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positives.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$. En effet, pour $n = 0$ c'est l'une des hypothèses. Pour $n \geq 1$,

$$u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} + v_{n-1}) = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geq 0,$$

donc $u_n \geq v_n$.
De plus

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \geq 1 \qquad \text{car} \qquad u_n \geq v_n,$$

donc $(u_n)_n$ est décroissante et $(v_n)_n$ est croissante. On a $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$ donc les deux suites sont monotones et bornées, elles convergent donc. Notons donc $l := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Alors en passant à la limite sur,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

on obtient

$$l = \frac{l + l'}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l = l'.$$

Et donc finalement les deux suites sont bien adjacentes. □

Proposition 3.2.9 (Théorème des segments emboités)**.** *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que*
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$;
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;
— $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.
Alors il existe un nombre réel ℓ unique tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a-n, b_n] = \{y\}$.

Démonstration. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes par construction, par conséquent elles convergent vers la même limite ℓ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$. Donc $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a-n, b_n] = \{y\}$.
D'autre part, soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a-n, b_n] = \{y\}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$. Par passage à la limite, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq x \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$ et donc $x = \ell$.
En conclusion $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a-n, b_n] = \{y\}$. □

3.3 Caractérisation séquentielle

Plusieurs notions ont été précédemment caractérisées à l'aide de "ε" ; borne supérieure, borne inférieure. Dans cette section, nous donnons une caractérisation de la borne supérieure, de la borne inférieure et de la densité à l'aide des suites. Il est important de connaître ces différents types de caractérisation. En effet, pour certaines résolutions d'exercices, ou démonstrations de théorèmes, il serait plus avantagieux d'utiliser telle caractérisation plutôt qu'une autre.

Proposition 3.3.1 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) M est la borne supérieure de A.
(2) Il existe une suite d'élément de A convergente vers M.
(3) Il existe une suite croissante d'élément de A convergente vers M.

Démonstration. Pour la preuve, on procède on montre successivement $(1) \Longrightarrow (3)$, $(3) \Longrightarrow (2)$ et $(2) \Longrightarrow (1)$. D'où l'équivalence.

(1) Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (3) : soit M est la borne supérieure de A. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après la caractérisation de la borne supérieure (Proposition 2.2.43), il existe $a_n \in A$ vérifiant

$$M - \frac{1}{1+n} < a_n \leq M.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \max\{a_0, \cdots, a_n\}$. On construit ainsi une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M - \frac{1}{1+n} < a_n \leq u_n \leq M < M + \frac{1}{1+n},$$

donc $|u_n - M| < \dfrac{1}{1+n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$, alors on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$

(2) (3) $\Longrightarrow$ (2) est évident.

(3) Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (1) : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de A convergente vers M. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - M| < \varepsilon$. En particulier, on a, $a_N \in A$ et $a_N > M - \varepsilon$, donc M est bien la borne supérieure de A.

□

Proposition 3.3.2 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure)**.** *Soit A une partie non vide, minoré de $\mathbb{R}$ et m un minorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) m est la borne inférieure de A.

(2) Il existe une suite d'élément de A convergente vers m.

(3) Il existe une suite décroissante d'élément de A convergente vers m.

La preuve est similaire à celle de la proposition précédente. On peut si on le souhaite, appliquer la proposition 3.3.1 à l'ensemble $-A$.

Proposition 3.3.3 (Caractérisation séquentielle de la densité)**.** *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.*

Démonstration. Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x < x + \dfrac{1}{n+1}$, il existe donc un élément $u_n \in A$ tel que $x < u_n < x + \dfrac{1}{n+1}$. On construit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x| < \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$, alors on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x. Soient x et y des réels tels que $x < y$. Il existe par hypothèse une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{x+y}{2}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ telle pour tout $n \geq n_0$, on ait $\left|u_n - \dfrac{x+y}{2}\right| < \dfrac{y-x}{2}$. En particulier il existe $u_{n_0} \in A$ tel que $x = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{y-x}{2} < u_{n_0} < \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{x+y}{2} = y$. Ce qui prouve que A est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque 3.3.4. Au vu de la preuve, la suite de la proposition 3.3.3 est d'éléments dans $A \setminus \{x\}$.

Corollaire 3.3.5.

— *Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*

— *Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres irrationnels.*

Démonstration. Rien à prouver, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. □

***Exercice* 3.3.1 :** *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer qu'il existe une suite croissante de nombres rationnels convergeant vers x.*
2. *Montrer qu'il existe une suite décroissante de nombres rationnels convergeant vers x.*
3. *Montrer qu'il existe une suite croissante de nombres irrationnels convergeant vers x.*
4. *Montrer qu'il existe une suite décroissante de nombres irrationnels convergeant vers x.*

3.4 Suite de Cauchy

Nous avons déjà vu des critères nécessaires de convergence qui ne faisaient pas intervenir la valeur de la limite. La proposition 3.1.11 montre que toute suite convergeante vers un réel doit être bornée. Cependant, on a aussi vu qu'être borné est loin d'être une condition suffisante de convergence. Essayons de trouver une condition nécessaire plus fine, plus proche de la notion de convergence.

Définition 3.4.1. On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de ε) tel que, pour tout $m \geq N$ et tout $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon$.

Remarque 3.4.2. Il est équivalent de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, on ait $\left|u_{n+p} - u_n\right| < \varepsilon$.

Intuitivement, cela signifie que les termes de la suite sont finalement arbitrairement proches les uns des autres. Nous nous attendons à ce qu'une telle suite soit convergente.

Exemple 3.4.3 : La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

En effet : Soit $\varepsilon > 0$, Choisissons un entier N tel que $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$. Alors pour tout $n,k \geq N$, on a $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par suite pour tout $n,k \geq N$ on a

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proposition 3.4.4.

(i) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(ii) *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.*

(iii) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique.

(i) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tous entiers p et q tels que $p \geq N$ et $q \geq N$, on a

$$\left|u_p - u_q\right| \leq \left|u_p - \ell\right| + \left|u_q - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(ii) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p,q \geq N$, $\left|u_p - u_q\right| < \varepsilon$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Ainsi $\varphi(p) \geq N$ et $\varphi(q) \geq N$, donc $\left|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(q)}\right| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

(iii) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p,q \geq N$, $\left|u_p - u_q\right| < 1$. Alors pour tout entier $n \geq N$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

En posant $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

□

Théorème 3.4.5 (Critère de Cauchy pour la convergence des suites)**.** *Toute suite numérique est de Cauchy si et seulement si elle est converge.*

Démonstration. D'après la proposition 3.4.4, toute suite convergente est de Cauchy. Réciproquement soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. D'après a proposition 3.4.4, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, par le théorème de Bolzano-Weierstrass 3.2.6. Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p,q \geq N_2$, $\left|u_p - u_q\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Exercice 3.4.1 *: Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

est divergente en utilisant le critère de Cauchy.

Exercice 3.4.2 *: Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de terme général $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$, est une sune suite de Cauchy, en utilisant la définition.*

Exercice 3.4.3 *: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $0 < C < 1$ telle que*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq C\,|x_n - x_{n-1}|.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Exercice 3.4.4 *: Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \geq k$,*

$$|x_m - x_k| \leq y_k.$$

Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 3.4.5 *: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $|x_n - x_k| \leq \dfrac{n}{k^2}$ pour tout n et k. Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

3.5 Suites particulières

3.5.1 Suite arithmético-géométriques

Suite arithmétique

Définition 3.5.1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque 3.5.2. Une suite arithmétique de raison r est :
— strictement croissante si $r > 0$,
— strictement croissante si $r < 0$,
— constante si $r = 0$.

Proposition 3.5.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.*
— *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$.*
— *Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$ par récurrence.
On a $u_0 = u_0 + 0 \times n$, la relation à prouver est vraie pour $n = 0$. Supposons que pour un certain entier n, on ait $u_n = u_0 + nr$. Montrons alors que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$. On a

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r,$$

la relation est vraie pour l'entier $n+1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. La deuxième assertion se déduit aisement de la première. □

Proposition 3.5.4. *La somme des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 est :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

De manière générale pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}.$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots u_n$$

et d'autre part

$$\sum_{k=n}^{2n} u_{2n-k} = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0.$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n}^{2n} u_{2n-k}$, en sommant, on obtient

$$2\sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0+u_n) + (u_1+u_{n-1}) + \cdots + (u_n+u_0) = \sum_{k=0}^{n} (u_{n-k}+u_k).$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $u_{n-k}+u_k = u_0+(n-k)r+u_0+kr = u_0+u_0+nr = u_0+u_n$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(u_0+u_n) = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}.$$

La deuxième assertion se déduit de ce qui précède en remarquant que $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=o}^{p-1} u_k$. □

Suite géométrique

Définition 3.5.5. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de la suite tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ru_n$.

Remarque 3.5.6. Lorsque $r = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 0$. On va donc supposer dans la suite que la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de raison $r \neq 0$.

Remarque 3.5.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.
— Si $q >1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour $u_0 > 0$ et décroissante pour $u_0 < 0$.
— Si $q = 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
— Si $0 < q < 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$.
— Si $q < 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Proposition 3.5.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $r \neq 0$.*
— *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 r^n$.*
— *Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p r^{n-p}$.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $r \neq 0$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 r^n$ par récurrence.
On a $u_0 = u_0 + r \times 0$, la relation à prouver est vraie pour $n = 0$. Supposons que pour un certain entier n, on ait $u_n = u_0 r^n$. Montrons alors que $u_{n+1} = u_0 r^{n+1}$. On a

$$u_{n+1} = ru_n = u_0 r^n.r = u_0 r^{n+1},$$

la relation est vraie pour l'entier $n+1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 r^n$. La deuxième assertion se déduit aisement de la première. □

Proposition 3.5.9. *La somme des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 est :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+u_2\ldots+u_{n-1}+u_n = \begin{cases} u_0\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & si\ r \neq 1 \\ \\ (n+1)u_0 & si\ r = 1 \end{cases}.$$

De manière générale pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}\ldots+u_{n-1}+u_n = \begin{cases} u_p\dfrac{1-r^{n-p+1}}{1-r} & si\ r \neq 1 \\ \\ (n-p+1)u_0 & si\ r = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r. Pour $r=1$ la suite est constante, d'où le résultat. Soit $r\neq 1$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\cdots+u_n = \sum_{k=0}^{n} u_0 r^k = u_0\sum_{k=0}^{n} r^k.$$

On a

$$r\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1}-1.$$

D'où $(r-1)\sum_{k=0}^{n} r^k = r^{n+1}-1$, ce qui est $\sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$. Par suite $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

La deuxième assertion se déduit de ce qui précède en remarquant que $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=o}^{p-1} u_k$. □

Suite arithmético-géométrique

Définition 3.5.10. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=au_n+b$.

Remarque 3.5.11. On a les deux particuliers classiques :
— Lorsque $a=1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est artihmétique de raison b, quelque soit la valeur de b.
— Lorsque $b=0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, quelque soit la valeur de a.

Dans la suite, on considère une suite arithmético-géométrique comme dans la définition et on suppose $a\neq 1$.

On commence par montrer qu'il existe α tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n+\alpha$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est géométrique de raison a. On a donc

$$v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha = au_n+b+\alpha = av_n-a\alpha+b+\alpha.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison α si et seulement si $-a\alpha+b+\alpha=0$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha=\dfrac{b}{a-1}$.

Les résultats concernant les suites géométriques permettent d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en considérant la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(u_n+\dfrac{b}{a-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison a. On obtient finalement : pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=u_0a^n+b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

3.5.2 Suite homographique

Définition 3.5.12. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *homographique* s'il existe des rées a,b,c,d tels que $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}.$$

Théorème 3.5.13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite homographique définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} \end{cases}, \qquad \text{avec } c \neq 0 \text{ et } ad-bc \neq 0.$$

(i) Si α est une racine de l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \alpha$, alors pour tout $n \geq p$, $u_n = \alpha$.

(ii) Si l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ admet deux racines distincte α et β (réelles ou complexes), alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$.
De plus la relation $u_{n+1} = \dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ définie une suite si et seulement si $v_0 \notin \left\{ \left(\dfrac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^{k+1},\ k \in \mathbb{N} \right\}$.

(iii) Si l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ admet une racine double α, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n-\alpha}$ est une suite arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a+d}$.
De plus la relation $u_{n+1} = \dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$ définie une suite si et seulement si $v_0 \notin \left\{ -(k+1)\left(\dfrac{2c}{a+d}\right),\ k \in \mathbb{N} \right\}$

Démonstration. (i) : Soit α est une racine de l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $p \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que : $u_p = \alpha \Longleftrightarrow u_{p+1} = \alpha$.
Si $u_p = \alpha$ alors $u_{p+1} = \dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d} = \alpha$. Réciproquement, supposons que $u_{p+1} = \alpha$. Donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{au_p+b}{cu_p+d} \\
acu_p + \alpha d &= au_p + b \\
u_p(\alpha c - a) &= b - \alpha d \\
u_p &= \frac{b-\alpha d}{\alpha c - a} \\
u_p &= \frac{b - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}d}{\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}c - a}, \qquad \text{car } \alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} \\
u_p &= \frac{cb\alpha + bd - ad\alpha - bd}{ac\alpha + bc - ac\alpha - ad} \\
u_p &= \alpha.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve si $u_p = \alpha$ alors $u_n = \alpha$, pour tout $n \geq p$

(ii) : Soit α et β deux racines distinctes de l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Il est clair que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} \\
&= \frac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\alpha}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\beta} \\
&= \frac{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}-\dfrac{a\beta+b}{c\beta+d}}, \qquad \text{car } \alpha = \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d} \text{ et } \beta = \frac{a\beta+b}{c\beta+d} \\
&= \frac{(au_n+b)(c\alpha+d)-(cu_n+d)(a\alpha+b)}{(au_n+b)(c\beta+d)-(cu_n+d)(a\beta+b)} \cdot \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \\
&= \frac{(ad-bc)u_n+bc\alpha-da\alpha}{(ad-bc)u_n+bc\beta-da\beta} \cdot \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \\
&= \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \cdot \frac{u_n+\dfrac{bc\alpha-da\alpha}{ad-bc}}{u_n+\dfrac{bc\beta-da\beta}{ad-bc}} \\
v_{n+1} &= \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} \cdot \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = \frac{c\beta+d}{c\alpha+d} v_n.
\end{aligned}
$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$.

D'autre part $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\dfrac{d}{c}$. On a

$$
u_n = -\frac{d}{c} \iff v_n = \frac{-\dfrac{d}{c}-\alpha}{-\dfrac{d}{c}-\beta} \iff v_n = \frac{\alpha c+d}{\beta c+d} \iff \left[\frac{\beta c+d}{\alpha c+d}\right]^n v_0 = \frac{\alpha c+d}{\beta c+d} \iff v_0 = \left(\frac{\alpha c+d}{\beta c+d}\right)^{n+1},
$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_0 \neq \left(\dfrac{\alpha c+d}{\beta c+d}\right)^{n+1}$.

(iii) : Si l'équation $x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ qui est équivalente à $cx^2+(d-a)x-b=0$ admet une racine double α alors son discriminant $(d-a)^2+4bc=0$ et $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}-\alpha} \\
&= \frac{1}{\dfrac{au_n+b}{cu_n+d} - \dfrac{\alpha a+b}{\alpha c+d}} \\
&= \frac{(cu_n+d)(\alpha c+d)}{u_n(a\alpha c+ad-c\alpha a-bc)+b\alpha c+bd-d\alpha a-bd} \\
&= \frac{\alpha c+d}{ad-bc}\cdot\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha} \\
&= \frac{\alpha c+d}{ad-bc}\cdot\frac{c(u_n-\alpha)+c\alpha+d}{u_n-\alpha} \\
v_{n+1} &= c\frac{\alpha c+d}{ad-bc} + \frac{(\alpha c+d)^2}{ad-bc}\cdot\frac{1}{u_n-\alpha}.
\end{aligned}$$

Comme $(d-a)^2+4bc=0$ et $\alpha = \dfrac{a-d}{2c}$, on a

$$ad-bc = ad+\frac{(d-a)^2}{4} = \frac{(a+d)^2}{4},\ c\alpha+d = \frac{a-d}{2}+d = \frac{a+d}{2}.$$

Donc $c\dfrac{\alpha c+d}{ad-bc} = \dfrac{2c}{a+d}$, $\dfrac{(\alpha c+d)^2}{ad-bc} = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{2c}{a+d}+v_n$. Par conséquent la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r = \dfrac{2c}{a+d}$. D'autre part $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -\dfrac{d}{c}$. On a

$$\begin{aligned}
u_n = -\frac{d}{c} &\iff v_n = \frac{1}{-\frac{d}{c}-\alpha} \iff v_n = -\frac{c}{\alpha c+d} \iff v_n = -\frac{2c}{a+d} \\
&\iff v_0+n\frac{2c}{a+d} = -\frac{2c}{a+d} \iff v_0 = -(n+1)\frac{2c}{a+d},
\end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_0 \neq -(n+1)\dfrac{2c}{a+d}$. □

3.5.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 3.5.14. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéairesd'ordre 2 à coefficients constants* sans second membre s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n.$$

L'équation $r^2-ar-b=0$ est appelée *équation caractéristique* de la suite.

Désisignons par $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ où } \quad a,b \in \mathbb{R}. \tag{R}$$

Dans cette section, la connaissance de quelques notions d'algèbre linéaire sera nécessaire, cependant, en première lecture, on peut se contenter de connaître et savoir appliquer le théorème 3.5.18.

Proposition 3.5.15. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux $\mathscr{E}$, α et β deux nombres réels, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ appartient aussi à $\mathscr{E}$.*
Plus précisemment $\mathscr{E}$ un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

Démonstration. Il suffit de montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (R). En effet, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$., on a :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha(au_{n+1} + bu_n) + \beta(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b(\alpha u_n + \beta v_n) \\ w_{n+2} &= aw_{n+1} + bw_n. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.16. *$\mathscr{E}$ un espace vectoriel réel de dimension 2.*

Démonstration. L'application $\begin{aligned} \varphi : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$ est trivialement linéaire. Montrons que φ est injective :

$$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0,0) \Longleftrightarrow u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 0 \Longleftrightarrow u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

φ est donc injective. Montrons que φ est surjective :
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$ appartient à $\mathscr{E}$ et $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a,b)$. Donc φ est surjective.
En conclusion φ est un isomorphisme linéaire, par conséquent $\dim(\mathscr{E}) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. □

Grâce à la proposition précédente, on sait que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites non proportionnelles de $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire qu'il n'existe de constante réelle k telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = kv_n$) alors toute suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}$ est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \lambda u_n + \mu v_n \qquad \text{où} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.5.17. *Si q est une racine réelle de l'équation caractéristique alors la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.*

Démonstration. Comme q est racine de l'équation caractéristique, alors $q^2 - aq - b = 0$ et $q \neq 0$ car $b \neq 0$. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} q^2 &= aq + b \\ q^n \cdot q^2 &= q^n(aq + b) \\ q^{n+2} &= aq^{n+1} + bq^n. \end{aligned}$$

La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à $\mathscr{E}$. □

Théorème 3.5.18. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, et une suite récurrente linéaires d'ordre 2 à coefficients constants $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

(i) Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\exists\,(\lambda,\mu)\in R^2 \quad \textit{tel que} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n.$$

(ii) Si l'équation caractéristique admet une solution double r_0, alors :

$$\exists\,(\lambda,\mu)\in R^2 \quad \textit{tel que} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r_0^n+\mu n r_0^n.$$

(iii) Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1=\rho e^{i\theta}$ et $r_2=\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$), alors :

$$\exists\,(\lambda,\mu)\in R^2 \quad \textit{tel que} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\rho^n\left[\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right].$$

Remarque 3.5.19. En imposant $b\neq 0$, on assure ainsi qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Démonstration. On cherche dans le théorème précédent à caractériser les éléments de $\mathscr{E}$.
(i) : Supposons d'abord que l'équation admette deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors d'après la proposition 3.5.17 les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathscr{E}$ et en plus elles ne sont pas proportionnelles. Par conséquent, il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n.$$

(ii) : Supposons maintenant que l'équation caractéristique admet une solution double r_0. On sait d'après la proposition 3.5.17 que la suite $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$. On cherche un autre élément de $\mathscr{E}$ non proportionnelle à la suite $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifiant que la suite $(n\cdot r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. Il est clair que cette dernière n'est pas proportionnelle à $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elle appartient à $\mathscr{E}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(n+2)r_0^{n+2} &= (n+2)r_0^n\cdot r_0^2\\
(n+2)r_0^{n+2} &= (n+2)r_0^n(ar_0+b)\\
(n+2)r_0^{n+2} &= (anr_0+2ar_0+nb+2b)r_0^n\\
(n+2)r_0^{n+2} &= (anr_0+ar_0+ar_0+nb+2b)r_0^n\\
(n+2)r_0^{n+2} &= a((n+1)r_0^{n+1})+b(nr_0^n)+(ar_0+2b)r_0^n.
\end{aligned}$$

Pour terminer, on doit montrer que $ar_0+2b=0$. Comme r_0 est une racine double de l'équation $r^2-ar-b=0$, alors $r_0=\dfrac{a}{2}$ et le discriminant $\triangle=a^2+4b=0$, d'où $ar_0+2b=\dfrac{a^2}{2}+2b=\dfrac{a^2+4b}{2}=0$. On a finalement $(n+2)r_0^{n+2}=a((n+1)r_0^{n+1})+b(nr_0^n)$, ce qui signifie que la suite $(n\cdot r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$. Par conséquent, il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda r_0^n+\mu n r_0^n.$$

(iii) : Supposons pour terminer que l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1=\rho e^{i\theta}$ et $r_2=\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$). Il suffit de vérifier que les suites $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments non proportionnels de $\mathscr{E}$. On a $r_1^2=ar_1+b$, $r_2^2=ar_2+b$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\rho^n\cos(n\theta)=\dfrac{1}{2}(r_1^n+r_2^n)$ et $\rho^n\sin(n\theta)=\dfrac{1}{2i}(r_1^n-r_2^n)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\rho^n\cos((n+2)\theta) &= \frac{1}{2}(r_1^{n+2}+r_2^{n+2}) \\
&= \frac{1}{2}(r_1^n\cdot r_1^2+r_2^n\cdot r_2^2) \\
&= \frac{1}{2}(r_1^n(ar_1+b)+r_2^n(ar_2+b)) \\
&= \frac{1}{2}(a(r_1^{n+1}+r_2^{n+1})+b(r_1^n+r_2^n)) \\
\rho^n\cos((n+2)\theta) &= a\rho^{n+1}\cos((n+1)\theta)+b\rho^n\cos(n\theta),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{E}$. De même

$$\begin{aligned}
\rho^n\sin((n+2)\theta) &= \frac{1}{2i}(r_1^{n+2}-r_2^{n+2}) \\
&= \frac{1}{2i}(r_1^n\cdot r_1^2-r_2^n\cdot r_2^2) \\
&= \frac{1}{2i}(r_1^n(ar_1+b)-r_2^n(ar_2+b)) \\
&= \frac{1}{2i}(a(r_1^{n+1}-r_2^{n+1})+b(r_1^n-r_2^n)) \\
\rho^n\sin((n+2)\theta) &= a\rho^{n+1}\sin((n+1)\theta)+b\rho^n\sin(n\theta),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{E}$.
Les suites $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments non proportionnels de $\mathscr{E}$, il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\rho^n\left[\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right].$$

□

3.5.4 Suites récurrentes de type $u_{n+1}=f(u_n)$.

On écartera ici les suites pour lesquelles on sait exprimer u_n en fonction de n, notamment les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.
On se donne $D\subset\mathbb{R}$ et une application $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$. On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0\in D \\ u_{n+1}=f(u_n), \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

On a alors $u_1=f(u_0)$, $u_2=f(u_1)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f(u_{n-1})$.

Il n'est pas toujours possible de définir une suite ainsi car on peut sortir du domaine de définition de f au bout d'un certain nombre de termes.

Exemple 3.5.20 : Si $D=[2,+\infty[$ et $f:x\longmapsto f(x)=\sqrt{x-2}$, pour $u_0=18$: $u_1=\sqrt{16}=4$ est bien défini, mais $u_2=\sqrt{2}\notin D$ donc on ne peut définir u_3.

Si $f(D)\subset D$, il n'y a pas de problème de définition : la suite $\begin{cases} u_0\in D \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ est bien définie. En particulier, si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application, il n'y a pas de problème de définition.

On supposera dans la suite que $f(D)\subset D$. En pratique, D est une réunion finie d'intervalles.

Théorème 3.5.21. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f(D) \subset D$ et considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

(i) Si f est croissante sur D, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Plus présement f est croissante si $u_0 \leq u_1$ et décroissante si $u_0 \geq u_1$.

(ii) Si f est décroissante sur D, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposés.

Démonstration. 1. Supposons que f est croissante sur D.
Cas où $u_1 \geq u_0$: considérons la formule $u_{n+1} \geq u_n$, $n \in \mathbb{N}$. La formule est évidemment vraie pour $n = 0$. Supposons que pour un certain entier n, $u_{n+1} \geq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. De $u_{n+1} \geq u_n$ et de la croissance de f, il découle $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Cas où $u_1 \leq u_0$: considérons la formule $u_{n+1} \leq u_n$, $n \in \mathbb{N}$. La formule est évidemment vraie pour $n = 0$. Supposons que pour un certain entier n, $u_{n+1} \leq u_n$ et montrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. De $u_{n+1} \leq u_n$ et de la croissance de f, il découle $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Supposons que f est décroissante sur D.
Alors la fonction $g = f \circ f$ est croissante et $g(D) \subset D$, de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{2(n+1)} = g(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = (g(u_{2n+1}).$$

La fonction g et la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient bien les hypothèses de (i).
Si $u_0 \leq u_2$ alors d'après (i), la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'autre part, comme f est décroissante, on a $u_1 = f(u_0) \geq f(u_2) = u_3$. Mais $u_{2(n+1)+1} = g(u_n)$, on déduit de (i), que la suite $(u_{2(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Maintenant si $u_0 \geq u_2$, en raisonnant de façon similaire, on montre que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(u_{2(n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

□

On admettera le lemme suivant qui sera démontré au chapitre 4.

Lemme 3.5.22. *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.*

Proposition 3.5.23. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(D) \subset D$ et considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in D \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. D'autre part f est continue sur D, donc en ℓ, en appliquant le lemme 3.5.22, on a

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

□

***Exercice* 3.5.1 :** *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dans cet exercice, on peut prendre $D = \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$, et $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$. On a f est croissante sur D et $u_0 = \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{16} = u_1$, d'après le théorème 3.5.21, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minoré par 0, elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\Longleftrightarrow \ell^2 + \frac{7}{16} = \ell \\ &\Longleftrightarrow 16\ell^2 - 16\ell + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ell = \frac{1}{4} \text{ ou } \ell = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Comme la suite est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_0 = \dfrac{1}{2}$; donc $\ell \leq \dfrac{1}{2}$. De $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{4}$, seul $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$ donc $\ell = \dfrac{1}{4}$. En conclusion la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{4}$.

3.6 Étude asymptotique des suites

On ne dispose jusqu'à présent que d'un seul outil permettant de comparer deux suites réelles : celui fourni par les inégalités. Elles donnent lieu à quelques résultats : passage à la limite, théorème des gendarmes, théorème de comparaison, convergence des suites adjacentes.

Dans cette section, il s'agit d'introduire deux nouvelles relations de comparaison : la négligeabilité et l'équivalence. Elles constituent un outil très puissant pour lever les formes indéterminées et trouver la limite d'une suite.

3.6.1 Suite négligeable devant une autre

Définition 3.6.1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit qu la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable devant la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
On note alors $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et on lit : u_n est un petit o de v_n.

Remarque 3.6.2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques. On écrira $u_n = v_n + o(w_n)$ si et seulement si $u_n - v_n = o(w_n)$.
On conviendra d'écrire toujours le $o(w_n)$ en dernière place, on évitera d'écrire dans la mesure du possible $u_n = o(w_n) + v_n$.

Proposition 3.6.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors*

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$.
– Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il exite une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_1$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. En prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on obtient pour tout $n \geq N$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
– Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$. Posons alors pour $n \geq n_0$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. □

Exemple 3.6.4 : Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ pour tout $\alpha > 1$, donc $n = o(n^\alpha)$, $\forall \alpha > 1$.

Propriété 3.6.5. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) Si $u_n = o(v_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
(ii) Si $u_n = o(w_n)$ et si $v_n = o(w_n)$ alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
(iii) Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
(iv) Si $u_n = o(v_n)$ et si $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
(v) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(u_n w_n)$.
(vi) Si $\lambda \neq 0$ alors : $u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow u_n = o(\lambda v_n)$.

Les preuves sont élémentaires. On les propose quand même.

Démonstration. (i) : Supposons que $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que $(n \geq n_1 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$, $(n \geq n_2 \Rightarrow v_n = \beta_n w_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. Posons $N = \max\{n_1, n_2\}$ et pour tout $n \geq N$, $\varepsilon_n = \alpha_n \beta_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \geq N$, $u_n = \varepsilon_n w_n$. C'est à dire $u_n = o(w_n)$.
(ii) : Supposons que $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que $(n \geq n_1 \Rightarrow u_n = \alpha_n w_n)$, $(n \geq n_2 \Rightarrow v_n = \beta_n w_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. Posons $N = \max\{n_1, n_2\}$ et pour tout $n \geq N$, $\varepsilon_n = \alpha_n + \beta_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \geq N$, $u_n + v_n = \varepsilon_n w_n$. C'est à dire $u_n + v_n = o(w_n)$.
(iii) : Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites telle que $(n \geq N \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Pour tout $n \geq N$, posons $\varepsilon_n = \lambda \alpha_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \geq N$, $\lambda u_n = \varepsilon_n v_n$. C'est à dire $\lambda u_n = o(v_n)$.
(iv) : Supposons que $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles que $(n \geq n_1 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$, $(n \geq n_2 \Rightarrow w_n = \beta_n t_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. Posons $N = \max\{n_1, n_2\}$ et pour tout $n \geq N$, $\varepsilon_n = \alpha_n \beta_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \geq N$, $u_n w_n = \varepsilon_n v_n t_n$. C'est à dire $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
(v) : Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites telle que $(n \geq N \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Pour tout $n \geq N$, $\lambda u_n w_n = \alpha_n (v_n w_n)$. C'est à dire $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
(vi) : Soit $\lambda \neq 0$. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites telle que $(n \geq N \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Pour tout $n \geq N$, posons $\varepsilon_n = \dfrac{\alpha_n}{\lambda}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour out $n \geq N$ $u_n = \varepsilon_n (\lambda v_n)$. C'est à dire $u_n = o(\lambda v_n)$. La réciproque se traite de la même manière. □

Remarque 3.6.6. De la propiété 3.6.5, on obtient pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. $o(u_n) = o(|u_n|)$.
2. $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$.
3. $o(u_n) - o(u_n) = o(u_n)$.
4. $o(o(u_n)) = o(u_n)$.

Théorème 3.6.7 (Croissance comparée de suites usuelles)**.** *Soient a, b, α et β des nombres réels.*
— *Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.*
— *Si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$.*
— *Si $a > 1$ alors $n^\alpha = o(a^n)$.*
— *Si $\alpha > 0$ alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.*
— *On a, $a^n = o(n!)$.*

Démonstration. – Soit $\alpha < \beta$. On a $\beta - \alpha > 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} = 0.$$

Par conséquent, $n^\alpha = o(n^\beta)$.
– Soit $0 < a < b$. On a $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0.$$

Par conséquent, $a^n = o(b^n)$.
– Soit $a > 1$. Si $\alpha \leq 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}a^n} = 0$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = +\infty$ (si $\alpha < 0$), $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = 1$ (si $\alpha = 0$), $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha}a^n = +\infty$.
Pour $\alpha > 0$, posons $n_0 = \mathrm{E}(\alpha) + 1$. Donc $n_0 > \alpha$. Comme $a > 1$, il existe $h > 0$ tel que $a = 1 + h$. Par la formule du binome de Newton, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$a^n = (1+h)^n > \frac{n(n-1)\cdots(n-n_0+1)}{n_0!} h^{n_0}$$

Soit $N = 2n_0$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n_0 \leq \dfrac{1}{2}n$ et donc $n - n_0 + 1 \geq \dfrac{1}{2}n + 1 > \dfrac{1}{2}n$. D'où

$$a^n = (1+h)^n > \frac{n^{n_0}}{2^{n_0} n_0!} h^{n_0},$$

par suite

$$0 < \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{2^{n_0} n_0!}{h^{n_0}} \frac{n^\alpha}{n^{n_0}} = \frac{2^{n_0} n_0!}{h^{n_0}} \frac{1}{n^{n_0-\alpha}}.$$

Finalement, de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{n_0-\alpha}} = 0$ (car $n_0 - \alpha > 0$), on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.
– Soit $\alpha > 0$. Si $\beta = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = 1$ et si $\beta < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = 0$. D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

Supposons maintenant $\beta > 0$. On a montré précédemment que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ pour tout $a > 1$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{n}{a^n} < 1$.
Soit $n \geq N$. On a $\dfrac{1}{a^{n^r}} < \dfrac{n}{a^{n^r}} < \dfrac{n}{a^n} < 1$, donc $1 < n < a^{n^r}$ où $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et posons $a = \mathrm{e}^{\sqrt[\beta]{\varepsilon}}$. Donc

$$\begin{aligned}
&1 < n < (\mathrm{e}^{\sqrt[\beta]{\varepsilon}})^{n^r}\\
&0 < \ln n < n^r \sqrt[\beta]{\varepsilon}\\
&0 < \frac{\ln n}{n^r} < \sqrt[\beta]{\varepsilon}\\
&0 < \left(\frac{\ln n}{n^r}\right)^{\beta} < \varepsilon\\
&0 < \frac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}} = 0$.

– Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons $N = \mathrm{E}(|a|) + 1$, donc $0 < \dfrac{|a|}{N} < 1$. Soit $n \geq N$,

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a^n}{N![(N+1)(N+2)\cdots(n-1)n]}\right|,$$

or pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n-N\}$, $N + k > N$, donc $(N+1)(N+2)\cdots(n-1)n > N^{n-N}$, par suite

$$0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| < \frac{N^N}{N!}\left(\frac{|a|}{N}\right)^n.$$

Comme $0 < \dfrac{|a|}{N} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{|a|}{N}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.
Par conséquent, $a^n = o(n!)$. □

Exercice 3.6.1 : *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Montrer que $u_n = o(v_n)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon |v_n|$.*

3.6.2 Suite dominant une autre

Définition 3.6.8. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée par la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On note alors $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et on lit : u_n est un grand o de v_n.

Remarque 3.6.9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques. On écrira $u_n = v_n + O(w_n)$ si et seulement si $u_n - v_n = O(w_n)$.
On conviendra d'écrire toujours le $O(w_n)$ en dernière place, on évitera d'écrire dans la mesure du possible $u_n = O(w_n) + v_n$.

Proposition 3.6.10. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors*

$$u_n = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n \quad \textit{est bornée à partir d'un certain rang.}$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$.
– Supposons que $u_n = O(v_n)$. Il exite une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_1$, $u_n = \alpha_n v_n$. En prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on obtient pour tout $n \geq N$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Par suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq N}$ est bornée.
– Supposons qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ telle que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_1}$ soit bornée. Posons pour tout $n \geq n_1$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq n_1}$ est bornée et pour tout $n \geq n_1$, $u_n = \alpha_n v_n$. D'où $u_n = O(v_n)$. □

Proposition 3.6.11. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} u_n = o(v_n) &\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ et une suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{tel que } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \alpha_n v_n,\ \forall n \geq N \\ &\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ et une suite bornée} (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{tel que} \quad u_n = \alpha_n v_n,\ \forall n \geq N \\ &\Longrightarrow u_n = O(v_n). \end{aligned}$$

□

3.6.3 Suites équivalentes

Définition 3.6.12. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.
On note alors $u_n \sim v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et on lit : u_n est équivalente à v_n.

Exemple 3.6.13 : On a
— $n+1 \sim n$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.
— $\ln(n+1) \sim \ln n$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\ln n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$

Proposition 3.6.14. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques.*
— *Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.*
— *Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*

Démonstration. – Supposons que $u_n \sim v_n$. Il existe alors une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$, il existe n_1 tel que $\alpha_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_1$. Pour tout $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$, on a $v_n = \dfrac{1}{\alpha_n} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha_n} = 1$, par conséquent $v_n \sim u_n$.

– Supposons que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$. Alors il existe des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et des entiers n_0 et n_1 tels que $(n \geq n_0 \Longrightarrow u_n = \alpha_n v_n)$ et $(n \geq n_1 \Longrightarrow v_n = \beta_n w_n)$. En posant $\gamma_n = \alpha_n\beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $u_n = \gamma_n w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = 1$. D'où $u_n \sim w_n$. □

Remarque 3.6.15. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On a

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(v_n) \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(u_n).$$

En effet, supposons que $u_n \sim v_n$, il existe une suite suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n - v_n = (\alpha_n - 1)v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n - 1) = 0$, par conséquent $u_n - v_n = o(v_n)$.
Réciproquement, supposons que $u_n - v_n = o(v_n)$. Il existe donc une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_1$, $u_n - v_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. On a, pour tout $n \geq n_1$, $u_n = (\alpha_n + 1)v_n$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n + 1) = 1$, par suite $u_n \sim v_n$.
On vient de montrer que $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$. Pour terminer, montrons que $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$. On a successivement,

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow v_n \sim u_n \Longleftrightarrow v_n - u_n = o(u_n) \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(u_n).$$

Proposition 3.6.16. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors*

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Démonstration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$.
– Supposons que $u_n \sim v_n$. Il exite une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_1$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. En prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on obtient pour tout $n \geq N$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
– Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $v_n \neq 0$. Posons alors pour $n \geq n_0$, $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \alpha_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. Donc $u_n \sim v_n$. □

Proposition 3.6.17 (équivalence et limite)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.*
— *Si $u_n \sim v_n$ et si l'une des suites admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors l'autre suite admet la même limite.*
— *Si les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie non nulle alors $u_n \sim v_n$.*

Démonstration. – Supposons que $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On sait qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tandant vers 1 et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n = \alpha_n v_n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha v_n = \ell$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
– Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Ainsi $u_n \sim v_n$. □

Remarque 3.6.18. Comme corollaire de la proposition ci-dessus, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^* \iff u_n \sim \ell.$$

Exemple 3.6.19 : Nous proposons des contre-exemples pour les cas $\ell = 0$ et $\ell + \infty$.

— Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termes généraux $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \neq 1$) alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

— Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = n^2$ ne sont par équivalentes (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} \neq 1$) alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Proposition 3.6.20 (équivalence et négligeabilité)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques.*

— $u_n = o(v_n) \iff u_n + v_n \sim v_n$.

— *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n = o(w_n)$.*

— *Si $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim w_n$ alors $w_n = o(v_n)$.*

Démonstration. – D'après la remarque 3.6.15, on a successivement

$$u_n + v_n \sim v_n \iff (u_n + v_n) - v_n = o(v_n) \iff u_n = o(v_n).$$

– Si $u_n = o(v_n)$ alors il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ $u_n = \alpha_n v_n$. Si $v_n \sim w_n$ alors il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$ $v_n = \beta_n w_n$. Pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, on a $u_n = \alpha_n\beta_n w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n = 0$. Par conséquent $u_n = o(w_n)$.

– Si $u_n = o(v_n)$ alors il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$ $u_n = \alpha_n v_n$. Si $u_n \sim w_n$ alors il existe une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$ $w_n = \beta_n u_n$. Pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, on a $w_n = \alpha_n\beta_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n = 0$. Par conséquent $w_n = o(v_n)$. □

Proposition 3.6.21 (équivalence et opérations algébriques)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques. Supposons que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Alors :*

— $u_n w_n \sim v_n t_n$.

— *si à partir d'un certain rang $w_n \neq 0$ et $t_n \neq 0$, alors*

$$\frac{1}{w_n} \sim \frac{1}{t_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}.$$

Démonstration. Supposons que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Il existe donc des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et des entiers n_1 et n_2 tels que $(n \geq n_1 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$ et $(n \geq n_2 \Rightarrow w_n = \beta_n t_n)$.

– On a pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, $u_n w_n = \alpha_n\beta_n v_n t_n$ et en plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n\beta_n = 1$, donc $u_n w_n \sim v_n t_n$.

– Supposons qu'il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que $w_n \neq 0$ et $t_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_3$. Alors pour tout $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$, on a $\dfrac{1}{w_n} = \dfrac{1}{\beta_n}\dfrac{1}{t_n}$; en plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\beta_n} = 1$, donc $\dfrac{1}{w_n} \sim \dfrac{1}{t_n}$. Enfin, en appliquant le point précédent, on obtient $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$. □

Remarque 3.6.22. L'équivalence n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction. Par exemple considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = n^3 + n^2 + 1$, $v_n = n^3 + n^2$, $w_n = -n^3 - n^2$ et $t_n = -n^3 - n^2 + 2$. On a bien $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Pourtant on n'a pas $u_n + w_n \sim v_n + t_n$, car pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n + w_n = 1$ et $v_n + t_n = 2$.

Proposition 3.6.23 (équivalence et composition de fonctions)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors :*
— $|u_n| \sim |v_n|$,
— *pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $u_n^k \sim v_n^k$,*
— *si à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.*

Démonstration. Supposons que $u_n \sim v_n$. Il existe donc une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et un entier n_1 tel que $(n \geq n_1 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$.
– On a pour tout $n \geq n_1$, $|u_n| = |\alpha_n||v_n|$ et en plus $\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n| = 1$. Donc $|u_n| \sim |v_n|$.
– Soit $k \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \geq n_1$, ${u_n}^k = {\alpha_n}^k {v_n}^k$ et en plus $\lim_{n\to+\infty} {\alpha_n}^k = 1$. Donc ${u_n}^k \sim {v_n}^k$.
– Si à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les suites $(u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies à partir d'un certain rang. Un raisonnement similaire au précédent donne le résultat. □

Remarque 3.6.24. On remarquera que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ impair, on a

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n^{1/k} \sim v_n^{1/k}.$$

La proposition 3.1.30 donne :

Proposition 3.6.25. *Soient $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $a_0, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$, $b_0, \cdots, b_p \in \mathbb{R}$ tels que $a_k \neq 0$ et $b_p \neq 0$. Alors*

$$\frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k}{b_0 + b_1 n + \cdots + b_p n^p} \sim \frac{a_k n^k}{b_p n^p}.$$

Théorème 3.6.26 (Équivalents usuels)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique tendant vers 0. Alors*

- $\sin u_n \sim u_n$,
- $1 - \cos u_n \sim \dfrac{u_n^2}{2}$,
- $\tan u_n \sim u_n$,
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

La preuve de cet théorème est omise. Elle fait référence aux limites usuelles de fonctions.

Exercice 3.6.2 : *Donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$.*

On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} \\
&= \frac{n^3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}\right)}{n^2\left(\frac{\ln n}{n^2} - 2\right)} \\
&\sim \frac{n^3}{-2n^2} \\
u_n &\sim -\frac{1}{2} n.
\end{aligned}$$

***Exercice* 3.6.3 :** *À l'aide des équivalents, calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right)$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1=0$ donc $\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right)\sim\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1$. D'autre part $\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1=\left(1+(\cos\frac{1}{n}-1)\right)^{1/2}-1\sim\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{n}-1)$ et $\cos\frac{1}{n}-1\sim-\frac{1}{2n^2}$. Finalement $n^2\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right)\sim-\frac{1}{4}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\tan\left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}}-1\right)=-\frac{1}{4}$.

3.7 Exercices

***Exercice* 3.7.1 :** *Soit q un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\cos\frac{2n\pi}{q}$.*

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+q}=u_n$.

2) Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Chapitre 4

Fonctions continues

4.1 Limites de fonctions

Avant de définir la continuité des fonctions, nous jetons un regard sur une notion plus générale, celle de la limite d'une fonction.

4.1.1 Fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 4.1.1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle. On dit que f est définie *au voisinage* de a s'il existe $\varepsilon > 0$, l'ensemble $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ soit égal à l'un des trois ensembles ci-dessous :

⋆ $[a-\varepsilon, a[$ (f est définie dans un voisinage à gauche de a et éventuellement non définie en a) ;
⋆ $]a, a+\varepsilon]$ (f est définie dans un voisinage à droite de a et éventuellement non définie en a) ;
⋆ $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ (f est définie dans un voisinage de a et éventuellement non définie en a).

En d'autre terme fonction définie au voisinage de a si f est définie sur un intervalle I contenant a, sauf peut-être en a.

Voyons quelques exemples :

(i) Les fonctions réelles$f$, g et h définies par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \ ; \ g(x) = \sqrt{x} \text{ et } h(x) = x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$$

sont bien définies au voisinages de 0.

(ii) Les fonctions réelles i, j et k définies par

$$i(x) = \sqrt{x-1} \ ; \ j(x) = \frac{1}{\mathrm{E}(x-\frac{1}{2})} \text{ et } k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(x-1)}{x} & \text{si } \in [1, +\infty[\end{cases}$$

ne sont pas définies au voisinages de 0.

Définition 4.1.2. Soit f une fonction réelle. On dit f est définie

— *au voisinage* de $+\infty$, s'il existe un réel A tel que $[A, +\infty[\subset \mathscr{D}(f)$,
— *au voisinage* de $-\infty$, s'il existe un réel A tel que $]-\infty, A] \subset \mathscr{D}(f)$.

Voici quelques exemples :

(i) La fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ est définie au voisinage de $+\infty$, mais pas au voisinage de $-\infty$.

(ii) La fonction $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x^3-x+1} \end{array}$ est définie au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. La fonction $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$ n'est ni définie au voisinage de $+\infty$ ni au voisinage de $-\infty$.

Définition 4.1.3. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie au voisinage de a. On dit qu'une propriété portant sur f est vraie au voisinage de a si cette propriété est vraie sur :
- $\mathscr{D}(f) \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,
- $\mathscr{D}(f) \cap [A, +\infty[$ pour un cetain $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$,
- $\mathscr{D}(f) \cap]-\infty, A]$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$, si $a = -\infty$.

Par exemple, une fonction réelle f est bornée au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f est définie au voisinage de a et qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$,

$$|x-a| \leq \varepsilon \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Exemple 4.1.4 : La fonction $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3-2x+1 \end{array}$ est positive au voisinage de $+\infty$.

En effet, f, étant définie sur $\mathbb{R}$, est bien définie au voisinage de $+\infty$.
D'autre part, comme $f(x) = (x-1)(x^2+x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \geq 1$, on a $x-1 \geq 0$ et $x^2+x-1 \geq 1$. Par conséquent $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 1$, ainsi f est positive au voisinage de $+\infty$.

Remarque 4.1.5. Remarquons qu'en vertu des définitions 4.1.1 et 4.1.2, on peut trouver un ε et $A \in \mathbb{R}$ tels
- $\mathscr{D}(f) \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\} = [a-\varepsilon, a[$ ou $]a, a+\varepsilon]$ ou $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ si f est définie au voisinage de a
- $\mathscr{D}(f) \cap [A, +\infty[= [A, +\infty[$ si f est définie au voisinage de $+\infty$,
- $\mathscr{D}(f) \cap]-\infty, A] =]-\infty, A]$ si f est définie au voisinage de $-\infty$.

4.1.2 Limites d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}$

Limite finie

Définition 4.1.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $L \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit f *a pour limite* L en a ou L est la limite de f en a et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) := L,$$

ou

$$f(x) \to L \quad \text{quand} \quad x \to a.$$

Remarque 4.1.7. Dans cette définition, on peut remplacer « $\forall \varepsilon > 0$ » par « $\forall 0 < \varepsilon < 1$ ».

Exemple 4.1.8 : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ tel tout $x \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $|x| \leq \delta$, on a $|x| < \varepsilon$. Par conséquent $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Exemple 4.1.9 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := x^2$. Alors.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}\right\}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leq \delta$, on a, $|x-a| < 1$. Par l'inégalité triangulaire renversée on obtient

$$|x| - |a| \leq |x-a| < 1.$$

D'où $|x| + |a| < 2\,|a| + 1$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - a^2\right| &= \left|x^2 - a^2\right| \\
&= |(x+a)(x-a)| \\
&= |x+a|\,|x-a| \\
&\leq (|x| + |a|)\,|x-a| \\
&< (2\,|a|+1)\,|x-a| \\
&< (2\,|a|+1)\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Exemple 4.1.10 : Considérons $f\colon [0,1[\to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

En effet : soit $\varepsilon > 0$. Let $\delta := \varepsilon$. Alors pour tout $x \in]0,1[$ tel que $|x-0| < \delta$ on a

$$|f(x) - 0| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

Remarquons que dans le premier exemple $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ alors que dans le deuxième exemple $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

Limite infinie

Définition 4.1.11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si l'on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f),\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en a ou $+\infty$ est la limite de f en a et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) := +\infty,$$

ou

$$f(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad x \to a.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a si et seulement si l'on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f),\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en a ou $-\infty$ est la limite de f en a et on écrit

$$\lim_{x\to a} f(x) := -\infty,$$

ou

$$f(x) \to -\infty \quad \text{quand} \quad x \to a.$$

Remarque 4.1.12. Dans l'assertion, $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A$, on peut remplacer « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \in \mathbb{R}_+$ » et même par « $\forall A > 0$ ».
Dans l'assertion, $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f),\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A$, on peut remplacer « $\forall A \in \mathbb{R}$ » par « $\forall A \in \mathbb{R}_-$ » et même par « $\forall A < 0$ ».

Exemple 4.1.13 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$. Alors.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

En effet, soit $A > 0$. Posons $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, tel que $|x-0| = |x| \leq \delta$, on a $\dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{\delta^2} = A$. Ce qui prouve que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

4.1.3 Limites d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

Limite finie

Définition 4.1.14. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f tend vers $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathscr{D}(f), x \geq B \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* L en $+\infty$ ou L est la limite de f en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) := L,$$

ou

$$f(x) \to L \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

— Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f tend vers $L\in\mathbb{R}$ en $-\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists B\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathscr{D}(f), x\leq B\Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* L en $-\infty$ ou L est la limite de f en $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) := L,$$

ou

$$f(x)\to L \quad \text{quand} \quad x\to-\infty.$$

Exemple 4.1.15 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x):=\frac{1}{|x|+1}$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0.$$

En effet, soit $\varepsilon>0$. Choisissons $B>0$ tel que $\dfrac{1}{B+1}<\varepsilon$. Pour tout $x\geq B$, on a

$$\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{B+1}<\varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Pour la limite en $-\infty$, nous choisissons $B'<0$ tel que $\dfrac{1}{-B'+1}<\varepsilon$.
Pour tout $x\leq B'$, on a $|x|=-x\geq -B'$, d'où

$$\frac{1}{|x|+1}\leq\frac{1}{-B'+1}<\varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Exemple 4.1.16 : Pour tout réel $r>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$.
En effet, soit $\varepsilon>0$, choisissons $B=\left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^{1/r}$, alors, pour tout $x\geq B$, on a

$$\left|\frac{1}{x^r}\right|=\frac{1}{x^r}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Limite infinie

Définition 4.1.17. — Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R} : \forall x\in\mathscr{D}(f), x\geq B\Longrightarrow f(x)>A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en $+\infty$ ou $+\infty$ est la limite de f en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) := +\infty,$$

ou

$$f(x)\to+\infty \quad \text{quand} \quad x\to+\infty.$$

— Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathscr{D}(f), x \geq B \Longrightarrow f(x) < A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de f en $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) := -\infty,$$

ou

$$f(x) \to -\infty \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

— Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathscr{D}(f), x \leq B \Longrightarrow f(x) > A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $+\infty$ en $-\infty$ ou $+\infty$ est la limite de f en $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) := +\infty,$$

ou

$$f(x) \to -\infty \quad \text{quand} \quad x \to +\infty.$$

— Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie au voisinage de $-\infty$. On dit que f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si et seulement si l'on a :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathscr{D}(f), x \leq B \Longrightarrow f(x) < A.$$

Dans ce cas on dit que f *a pour limite* $-\infty$ en $-\infty$ ou $-\infty$ est la limite de f en $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) := -\infty,$$

ou

$$f(x) \to -\infty \quad \text{quand} \quad x \to -\infty.$$

Exemple 4.1.18 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) := \dfrac{1+x^2}{1+x}$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1+x} = +\infty.$$

En effet, soit $A > 0$. Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\frac{1+x^2}{1+x} \geq \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2}.$$

Choisissons $B = \max\{2A+1, 1\}$. Alors pour tout $x \geq B$, on a $x \geq 1$ et $\dfrac{x}{2} > A$, par suite

$$\frac{1+x^2}{1+x} \geq \frac{x}{2} > A.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

***Exercice* 4.1.1 :** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *n'existe pas.*

Remarque 4.1.19. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— On dit que f admet une limite finie en a lorsqu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

— On dit que f admet une limite infinie en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

4.1.4 Propriétés sur les limites de fonctions

Proposition 4.1.20. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors la limite est unique.*

Démonstration. Les démonstrations étant très similaires, nous choisissons de prouver cette proposition dans le cas où $a \in \mathbb{R}$.
Soit L_1 et L_2 deux réels tels $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$. Supposons que $L_1 \neq L_2$ et posons $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$. Il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| < \delta_1$. et $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| < \delta_2$.

En choisissant $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| < \delta$, on a

$$2\varepsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui est absurde, donc $L_1 = L_2$. □

Proposition 4.1.21. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Démonstration. Nous faisons la preuve lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$, dès que $|x-a| \leq \delta$ alors on a $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Soit $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $|x-a| \leq \delta$. Par l'inégalité triangulaire renversée, on a

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$. □

La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

Proposition 4.1.22. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons qu'il existe une fonction g définie sur $\mathscr{D}(f)$ admettant une limite nulle en a et telle que*

$$\forall x \in \mathscr{D}(f),\ |f(x) - L| \leq g(x),$$

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Démonstration. On va prouver pour cette proposition par exemple lorsque $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(g)$,

$$|x-a| \leq \delta \Longrightarrow |g(x)| < \varepsilon.$$

Par suite il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$, $|x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. □

Exemple 4.1.23 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) := x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leq 1$, par conséquent $\left|x \sin \dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$. Or $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Proposition 4.1.24. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet en a une limite finie alors elle est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. On va prouver pour cette proposition par exemple lorsque $a \in \mathbb{R}$.
Posons $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\varepsilon = 1$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < 1.$$

En prenant $M = |L| + 1$, (ou $M = \max\{|f(a)|, L+1\}$ lorsque $a \in \mathscr{D}(f)$) on voit que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta, a+\delta]$,

$$|f(x)| \leq |L| + |f(x) - L| < |L| + 1 \leq M,$$

ce qui prouve que f est bornée au voisinage de a. □

Proposition 4.1.25. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et admetant en a une limite finie L. Si L' est un réel tel que $L > L'$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta, a+\delta] \setminus \{a\}$, $f(x) > L'$.*

Démonstration. Comme $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $L > L'$, pour $\varepsilon = L - L'$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ et $|x-a| \leq \delta$, on a $|f(x) - L| < L - L'$. Ce qui donne $f(x) > L'$ pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta, a+\delta] \setminus \{a\}$. □

Caractériation séquentielle de la limite

Nous allons donner la définition séquentielle de la limite d'une fonction par le lemme ci-dessous :

Lemme 4.1.26 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en a,

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite L.

Démonstration. On donne la démonstration dans le cas particulier où a et L sont des nombres réels. Les autres cas se démontre de façon similaire.

Supposons que $f(x) \to L$ quand $x \to a$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\mathscr{D}(f)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Montrons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ et $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - L| < \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|x_n - a| < \delta$. Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Démontrons la réciproque par contraposée, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers L quand $x \to a$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$, vérifiant $|x-a| < \delta$ et $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $\dfrac{1}{n+1}$ pour δ, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| < \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite tend vers a, mais la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas pour limite L. Ce qui prouve $(ii) \Longrightarrow (i)$. □

Remarque 4.1.27. Pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite en un point a, on peut exhiber deux suites admettant a pour limite, dont les images par f ont des limites différentes. On utilise ici la contraposée l'implication$(ii) \Longrightarrow (i)$ comme l'illustre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4.1.28 : $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. Voir Figure 4.1.

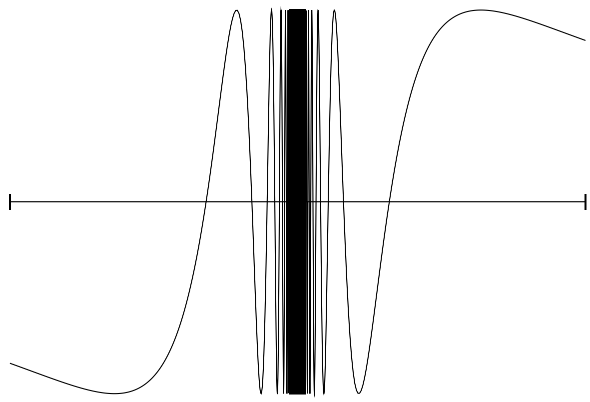


FIGURE 4.1 – Graphe de $x \to \sin(\frac{1}{x})$. Notons qu'au voisinage de 0 la courbe oscille trop vite.

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n := \dfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

La suite $\left(\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas donc pas de limite. Par conséquent, d'après le lemme 4.1.26, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

L'exemple qui suit montre qu'on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}(f)$ convergeant vers a et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq L$, bien que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Exemple 4.1.29 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $f(x) = 0$. D'où $|x| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$, pour $\delta > 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \neq 0$.

Exemple 4.1.30 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \end{cases}.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que f n'a pas de limite en a. On peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres irrationnels telles que $a < x_n < y_n < a + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont d'éléments dans $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et converge vers a. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = 1 \qquad \text{et } f(y_n) = 0,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. Par conséquent, f ne peut avoir de limite en a.

En appliquant le lemme 4.1.26 à tout ce que nous savons sur les limites de suites numériques aux limites des fonctions, nous obtenons les résultats suivants :

Corollaire 4.1.31. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que les limites de $f(x)$ et $g(x)$ quand x tend vers a existent toutes les deux, et que*

$$f(x) \leq g(x)$$

au voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}(f) \cap \mathscr{D}(g) \setminus \{a\}$ de limites a. Posons

$$L_1 := \lim_{x\to a} f(x), \qquad \text{et} \qquad L_2 := \lim_{x\to a} g(x).$$

Du lemme 4.1.26, on sait la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite L_1 et la suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite L_2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) \leq g(x_n)$, on obtient $L_1 \leq L_2$ d'après le lemme 3.1.37. □

Corollaire 4.1.32. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ayant une limite en a. Suppose qu'il existe deux nombres réels m et M tels que, au voisinage de a, on ait*

$$m \leq f(x) \leq M$$

alors

$$m \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq M.$$

Démonstration. Comme $m \leq f(x)$ et $f(x) \leq M$, le corollaire 4.1.31 assure que $m = \lim\limits_{x\to a} m \leq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq M = \lim\limits_{x\to a} M$. Ce qui donne le résultat. □

Opération sur les limites de fonctions

Les propriétés suivantes établissent les règles pratiques d'évaluation des limites. Malgré l'apparente simplicité de ces résultats, il faut se garder des conclusions trop hâtives obtenues en appliquant les propriétés sans en vérifier les hypothèses sous peine de commettre de graves erreurs.

Corollaire 4.1.33. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et admettant en a respectivement pour limites L_1 et L_2 dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Si la forme $L_1 + L_2$ n'est pas indéterminée alors la fonction $f + g$ admet une limite et on a

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = L_1 + L_2.$$

(ii) Si la forme $L_1 \cdot L_2$ n'est pas indéterminée alors la fonction $f \cdot g$ admet une limite et on a

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = L_1 \cdot L_2.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 4.1.26 et la proposition 3.1.26. $\square$

Comme pour les suites, on ne peut rien dire concernant la limite de la somme de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$. De même pour le produit de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et l'autre vers 0.

Exemple 4.1.34 : Pour toute fonction polynôme $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (avec $a_n \neq 0$), on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n$.
Il suffit d'écrire $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_nx^n\left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_nx} + \dfrac{a_{n-2}}{a_nx^2} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_nx^n}\right)$.

Proposition 4.1.35. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Si f tend vers un nombre réel L non nul, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{L}$.

(ii) Si f tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a, alors au voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f}(x) = 0$.

(iii) Si la restriction de f à $\mathscr{D}(f)\setminus\{a\}$ est strictement positive au voisinage de a et si f tend vers 0 en a, alors au voisinage de a, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f}(x) = +\infty$.

(iv) Si la restriction de f à $\mathscr{D}(f)\setminus\{a\}$ est strictement négative au voisinage de a et si f tend vers 0 en a, alors au voisinage de a, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f}(x) = -\infty$.

Démonstration. Nous faisons la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés en exercice.
(i) : Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$. Comme $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |L| > \dfrac{|L|}{2}$, d'après la proposition 4.1.25, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)\cap[a-\delta_1, a+\delta_1]\setminus\{a\}$, $|f(x)| > \dfrac{|L|}{2} > 0$. Par conséquent f ne s'annule pas au voisinage de a. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)\cap[a-\delta_2, a+\delta_2]\setminus\{a\}$, on a $|f(x) - L| < \dfrac{L^2}{2}\varepsilon$. Posons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, alors pour tout $x \in \mathscr{D}(f)\cap[a-\delta, a+\delta]\setminus\{a\}$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - L\right| = \left|\frac{f(x)-L}{Lf(x)}\right| = \frac{1}{|Lf(x)|}\,|f(x)-L| < \frac{2}{L^2}\frac{L^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{L}$.
(ii) : Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)\cap[a-\delta_1, a+\delta_1]\setminus\{a\}$, on ait $f(x) \geq \dfrac{2}{\varepsilon} > 0$. Ce qui prouve d'une part que f ne s'annule pas au voisinage de a et d'autre part par passage à l'inverse on a $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = \dfrac{1}{f(x)} < \varepsilon$,

$x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta_1, a+\delta_1] \setminus \{a\}$, donc $\lim_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = 0$. Le cas $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ s'obtient de ce qui procède en remarquant que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \to a} (-f)(x) = +\infty$.
(iii) : Par hypothèse, supposons qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta_1, a+\delta_1] \setminus \{a\}$, $f(x) > 0$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.
Soit $A > 0$. Comme $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta_2, a+\delta_2] \setminus \{a\}$, $|f(x)| < \frac{1}{A}$. Choisissons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, alors pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta, a+\delta] \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} > A.$$

Donc $\lim_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = +\infty$.
(iv) : Par hypothèse, supposons qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \cap [a-\delta_1, a+\delta_1] \setminus \{a\}$, $f(x) < 0$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Alors la fonction $-f$ vérifie les hypothèses de (iii), par conséquent $\lim_{x \to a} \frac{1}{-f}(x) = +\infty$, finalement de la proposition 4.1.33, il vient $\lim_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = -\infty$. □

Remarque 4.1.36. Si la restriction de f à $\mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ est strictement positive au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et si f tend vers 0 en a, on écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0^+$, de même si la restriction de f à $\mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ est strictement négative au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et si f tend vers 0 en a, on écrit alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0^-$.

En combinant les résultats sur la limite du produit et sur la limite de l'inverse de fonctions, on obtient le résultat concernant le quotient de deux fonctions.
Comme pour les suites, on résume ces différents résultats dans les tableaux suivants :
f et g sont deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ admettant des limites en a
Somme de limites : $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Produit de limites : $\lim_{x \to a} (f(x)g(x))$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$L \in \mathbb{R}$	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \to a} g(x)$	$L' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} (f(x)g(x))$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

Inverse de limites : $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x \to a} f(x)$	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{L}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$L'<0$	0^-	0^+	$L'>0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I**
$L<0$	0^+	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{L}{L'}$	0^-
0	0	0	**F.I**	**F.I**	0	0
$L>0$	0^-	$\dfrac{L}{L'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{L}{L'}$	0^+
$+\infty$	**F.I**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I**

Théorème de comparaison

Proposition 4.1.37. *Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Supposons qu'au voisinage de a, $g(x)\le f(x)$, et que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

(ii) Supposons qu'au voisinage de a, $f(x)\le h(x)$, et que $\lim\limits_{x\to a} h(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

(iii) (Théorème des gendarmes) Supposons qu'au voisinage de a, $g(x)\le f(x)\le h(x)$, et que g et h admettent en a des limites finies égales, alors f admet une limite finie en a et

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x).$$

Démonstration. Nous faisons la preuve pour $a\in\mathbb{R}$. Les autres cas sont laissés en exercice.
(i) : Supposons par hypoyhèse qu'il existe $\delta_1>0$ tel que pour tout $x\in\mathscr{D}(f)\cap\mathscr{D}(g)\cap[a-\delta_1,a+\delta_1]\setminus\{a\}$, $g(x)\le f(x)$.
Soit $A\in\mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, il existe $\delta_2>0$ tel que pour tout $x\in\mathscr{D}(f)\cap\mathscr{D}(g)\cap[a-\delta_2,a+\delta_2]\setminus\{a\}$, $g(x)\ge A$. En posant $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, on a pour tout $x\in\mathscr{D}(f)\cap[a-\delta,a+\delta]\setminus\{a\}$, $f(x)\ge A$, ce qui dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
(ii) est obtenue par (i) en considérant les fonctions $-f$ et $-h$.
(iii) : Supposons par hypoyhèse qu'il existe $\delta_1>0$ tel que pour tout $x\in D=\mathscr{D}(f)\cap\mathscr{D}(g)\cap\mathscr{D}(h)\cap[a-\delta_1,a+\delta_1]\setminus\{a\}$, $g(x)\le f(x)\le h(x)$. Posons $L=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)$. Alors pour tout $x\in D$, on a $|f(x)-g(x)|\le|h(x)-g(x)|\le|h(x)-L|+|g(x)-L|$, par suite

$$|f(x)-L|=|(f(x)-g(x))+g(x)-L|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-L|\le|h(x)-L|+2|g(x)-L|.$$

Soit $\varepsilon>0$. Comme $L=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)$, il existe $\delta_2>0$ tel que pour tout $x\in D\cap[a-\delta_2,a+\delta_2]\setminus\{a\}$ tel que $|g(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ et il existe $\delta_3>0$ tel que pour tout $x\in D\cap[a-\delta_3,a+\delta_3]\setminus\{a\}$ tel que $|h(x)-L|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Posons $\delta=\min\{\delta_2,\delta_3\}$, pour tout $x\in D\setminus\{a\}$ tel que $|x-a|\le\delta$, on a

$$|f(x)-L|\le\frac{\varepsilon}{3}+2\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. □

Théorème de composition des limites

Théorème 4.1.38. *Soit g une fonction admettant une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f une fonction à valeurs dans $\mathscr{D}(g)$ admettant a pour limite en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la fonction $g \circ f$ admet L pour limite en x_0 lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $a \in \mathscr{D}(g)$ et $g(a) = L$

(ii) il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout x dans ce voisinage, $f(x) \neq a$.

Démonstration. On donne la preuve pour a, L et x_0 éléments de $\mathbb{R}$. les autres cas étant laissés en exercice.
Soit $\varepsilon > 0$.
– Sous l'hypothèse (i). Comme $\lim\limits_{t\to a} g(t) = L$ et $g(a) = L$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(g)$ vérifiant $|t-a| \leq \delta$, on a $|g(t)-L| < \varepsilon$. D'autre part $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x-x_0| \leq \delta_1$, on a $|f(x)-a| < \delta$.
Par conséquent, pour tout $x \in \mathscr{D}(g\circ f) \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x-x_0| \leq \delta_1$, on a $f(x) \in \mathscr{D}(g)$ et $|f(x)-a| < \delta$, donc $|g(f(x))-L| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = L$.
– Sous l'hypothèse (ii). De $\lim\limits_{t\to a} g(t) = L$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(g) \setminus \{a\}$ vérifiant $|t-a| \leq \delta$, on a $|g(t)-L| < \varepsilon$, et de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x-x_0| \leq \delta_1$, on a $|f(x)-a| < \delta$.
Comme au voisinage de x_0, $f(x) \neq a$, il existe donc $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{x_0\}$, vérifiant $|x-x_0| \leq \delta_2$, on ait $f(x) \neq a$.
En posant $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, pour tout $x \in \mathscr{D}(g\circ f) \setminus \{x_0\}$ vérifiant $|x-x_0| \leq \delta_3$, on a $f(x) \in \mathscr{D}(g)$, $f(x) \neq a$ et $|f(x)-a| < \delta$, donc $|g(f(x))-L| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = L$. □

La condition selon laquelle $f(x)$ ne se réduit pas à la constante a dans un voisinage de x_0 n'est pas fortuite. En effet, s'il en était ainsi, la valeur de la limite de la fonction composée $g \circ f$ n'aurait plus aucun rapport avec la limite de g en a mais uniquement avec la valeur de la fonction g en a.

Exemple 4.1.39 : Soient f et g les fonctions réelles définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0 \qquad \text{et } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0}(g\circ f)(x) = 0$. D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 1$. Ce qui montre bien l'importance de l'hypothèse (ii).

Remarque 4.1.40. Le calcul d'une limite par changement de variable consiste à appliquer le théorème 4.1.38, en procédant dans les conditions du théorème, comme suit :
on pose $X = f(x)$, comme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ donc X tend vers a quand x tend vers x_0, donc

$$\lim_{x\to +x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{X\to a} g(X).$$

Exemple 4.1.41 : On souhaite calculer $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$. On est bien en présence d'une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». On procède comme suit pour lever cette indétermination : pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$,

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

Posons $X=-\sin^2 x$, alors quand $x\to 0$ on a $X\to 0$, par suite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}=-\lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=-1$$

. D'autre part comme $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ on a $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=1$.

Par conséquent, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

4.1.5 Limites à droite et limites à gauche

Pour illuster le propos de cette partie, commençons par régarder l'exemple suivant. Soit $f:]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<0\\ x-1 & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

Alors f n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(1/n)=-1+\dfrac{1}{n}$ et $f(-1/n)=1-\dfrac{1}{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}f(1/n)=-1\neq 1\lim_{n\to+\infty}f(-1/n)$, en vertu du lemme 4.1.26, f n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

En fait il est possible démontrer que si l'on considère seulement les valeurs positives de x, alors $f(x)$ tend vers -1 quand x tend vers 0. De même, si l'on considère seulement les valeurs négatives de x, alors $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Définition 4.1.42. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a\in\mathbb{R}$. On dit que :

— On dit que f tend vers $L\in\mathbb{R}$ en a par valeurs supérieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=L$ (ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$), si et seulement si l'on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathscr{D}(f)\setminus\{a\},\ (x>a,\ |x-a|\leq\delta)\Longrightarrow|f(x)-L|<\varepsilon.$$

— On dit que f tend vers $L\in\mathbb{R}$ en a par valeurs inférieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)=L$ (ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$), si et seulement si l'on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathscr{D}(f)\setminus\{a\},\ (x<a,\ |x-a|\leq\delta)\Longrightarrow|f(x)-L|<\varepsilon.$$

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a par valeurs supérieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)=+\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$), si et seulement si l'on a :

$$\forall A>0,\ \exists\delta>0:\ \forall x\in\mathscr{D}(f)\setminus\{a\},\ (x>a,\ |x-a|\leq\delta)\Longrightarrow f(x)>A.$$

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a par valeurs inférieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$), si et seulement si l'on a :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ (x < a,\ |x-a| \leq \delta) \Longrightarrow f(x) > A.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a par valeurs supérieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$), si et seulement si l'on a :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ (x > a,\ |x-a| \leq \delta) \Longrightarrow f(x) < A.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a par valeurs inférieures, et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = L$ (ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$), si et seulement si l'on a :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\},\ (x < a,\ |x-a| \leq \delta) \Longrightarrow f(x) < A.$$

Exemple 4.1.43 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Alors

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Proposition 4.1.44. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \textit{si et seulement si} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ alors de manière triviale on a $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$. (On supposera à titre d'exemple que $L \in \mathbb{R}$, les autres cas se traitant avec de modifications legères). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $(x > a,\ |x-a| \leq \delta_1)$ on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$, et il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$ vérifiant $(x < a,\ |x-a| \leq \delta_2)$ on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$. En posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, on a bien pour tout $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{a\}$, ($|x-a| \leq \delta_1$), $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ce qui est $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. □

Théorème 4.1.45 (Théorème de limite des fonctions monotones)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f est monotone alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en a. Plus précisément :*

— *Si f est croissante alors*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, a[\} \ \textit{et} \ \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]a, +\infty[\}$$

— *Si f est décroissante alors*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, a[\} \ \textit{et} \ \lim_{x\to a^+} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]a, +\infty[\}$$

Démonstration. Nous supposons que f est croissante quitte à prendre $-f$ si $f$est décroissante. Posons $M = \sup\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, a[\}$.
Si $M = +\infty$, alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, c[$ tel que $f(y) > C$. Comme f est croissante, pour tout $\in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, a[$ tel que $x > y$, on a $f(x) \geq f(y) > C$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.
Supposons que $M \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $y \in \mathscr{D}(f) \cap]-\infty, a[$ tel que $f(y) > a - \varepsilon$. Comme f est croissante pour tout $y \in \mathscr{D}(f)$ vérifiant $y < x < a$, on a $M - \varepsilon < f(y) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = M$.
De façon similaire, on montre que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathscr{D}(f) \cap]a, +\infty[\}$. □

4.2 Fonctions continues

Dans la section précédente, on a vu que la limite d'une fonction f définie au voisinage d'un point a est indépendante de la valeur prise par la fonction en ce point. Dans le cas où la fonction est définie en a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors la fonction est dite continue en a.

4.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.2.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathscr{D}(f)$. On dit que f est *continue en a* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$ vérifiant $|x - a| \leq \delta$, alors on a $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en tout point $a \in \mathscr{D}(f)$, on dit que f est *une fonction continue*.
Plus généralement, si f est continue en tout a d'un sous-ensemble A de son ensemble de définition $\mathscr{D}(f)$ de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue sur A. Lorsque f est continue sur $\mathscr{D}(f)$, on dit simplement que f est continue. L'ensemble des fonction continue sur A est noté $\mathscr{C}(A)$ ou $\mathscr{C}^0(A)$.
Les points de $\mathscr{D}(f)$ où la fonction f n'est pas continue sont appelés des points de discontinuité et on dit que f est discontinue en ces points.

Proposition 4.2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathscr{D}(f)$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{D}(f)$ de limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, alors la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. • Supposons que f est continue en a et soit une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{D}(f)$ de limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
Soit $\varepsilon > 0$, Comme f est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathscr{D}(f)$ et $|x - a| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$. D'autre part il existe η tel que pour tout entier $n \geq \eta$, $|u_n - a| \leq \delta$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$. Par suite pour tout entierr $n \geq \eta$, on a $|f(u_n) - f(a)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.
• Supposons que pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{D}(f)$ de limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$. Par l'absude, on suppose que f n'est pas continue en a. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in \mathscr{D}(f)$ et $|x - a| \leq \delta$ mais$|f(x) - f(a)| > \eta$. En prenant $\delta = \dfrac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on construit ainsi une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{D}(f)$ vérifiant $|x_n - a| \leq \dfrac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(a)| > \eta$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n - a| \leq \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$;

mais la suite $(f(x_n))_n$ ne conerge pas vers $f(a)$ car $|f(x_n)-f(a)|>\eta$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ce qui contrédit notre hypothèse, donc f est continue en a. □

Exemple 4.2.3 : — Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
— les fonctions rationnelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
— La fonction racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$.
— Les fonctions trigonométriques : sinus, cosinus et tangente, sont continues sur leur ensemble de définition respectif $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.
— La fonction exponentielle $x\to \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction logarithme népérienne $x\to \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$
— Les fonctions hyperboliques : sinus hyperbolique $x\to \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, cosinus hyperbolique $x\to \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et tangente hyperbolique $x\to \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$, sont continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.4. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en a de $\mathscr{D}(f)$. Alors $|f|$ est continue en a.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Comme f est continue en a, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x\in\mathscr{D}(f)$ et $|x-a|\le\delta$, on ait $|f(x)-f(a)|\le\varepsilon$. Soit $x\in\mathscr{D}(f)$ tel que $|x-a|\le\delta$, on a

$$||f(x)|-|f(a)||\le|f(x)-f(a)|\le\varepsilon.$$

Donc $|f|$ est continue en a. □

Proposition 4.2.5. *Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (I étant un intervalle non vide et non réduit à un singleton), alors f est continue sur I.*

Démonstration. Comme f est lipschitzienne sur I, il existe $\lambda>0$ tel que pour tous x et y dans I, on ait $|f(x)-f(y)|\le\lambda\,|x-y|$.
Soit $a\in I$. Pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\lambda+1}$. Pour tout $x\in I$ tel que $|x-a|\le\delta$, on a

$$|f(x)-f(a)|\le\lambda\,|x-a|\le\frac{\lambda}{\lambda+1}\varepsilon\le\varepsilon.$$

Ce qui prouve que f est continue en tout point $a\in I$. Donc f est continue sur I. □

En utilisant la proposition 4.2.2, ou en raisonnant comme dans la proposition 4.1.35, on montre la proposition suivantes :

Proposition 4.2.6. *Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions continues en $a\in I$.*
(i) La fonction $f+g$ est a.
(ii) La fonction fg est a.
(iii) Si $g(a)\neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

***Exercice* 4.2.1 :** *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues en $a\in\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\max(f,g)$ est continue en a.*

Proposition 4.2.7. *Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions et $a\in\mathscr{D}(f\circ g)$. Si g est continue en a et f est continue en $g(a)$ alors la fonction $f\circ g$ est continue en a.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}(f\circ g)$ telle quet $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Comme g est continue en a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(a)$. Aussi f est continue en $g(a)$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} f\big(g(u_n)\big) = f\big(g(a)\big).$$

D'où $f\circ g$ est continue en a. □

***Exercice* 4.2.2 :** *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ les fonctions définies par*

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases} \qquad et \qquad g(x) = x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Les fonctions f, g, $f+g$, fg, $f\circ g$ et $g\circ f$ sont-elles continues ? Justifier.

Définition 4.2.8 (Prolongement par continuité)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point $a\in\mathbb{R}$ non définie en a. Si f est continue sur $\mathscr{D}(f)$ et si f admet une limite finie ℓ en a, alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathscr{D}(f)\cup\{a\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = a \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue en a et est appelée un prolongement par continuité en a de la fonction f.

Exemple 4.2.9 : Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, on peut prolonger la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par continuité en une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\in\mathbb{R}^* \end{cases}$$

Définition 4.2.10 (Continuité à gauche, continuité à droite)**.** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathscr{D}(f)$. On dit que f est :

— continue à gauche en a lorsque sa restriction à $\mathscr{D}(f)\cap]-\infty,a]$ est continue, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$.

— continue à droitee en a lorsque sa restriction à $\mathscr{D}(f)\cap[a,+\infty[$ est continue, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.

Il est évident qu'une fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 4.2.11 : Considérons la fonction partie entière et $n\in\mathbb{Z}$.
Pour tout $x\in[n,n+1[$, $\mathrm{E}(x) = n$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}}\mathrm{E}(x) = n = \mathrm{E}(n)$. Par conséquent la fonction partie entière est continue à droite en n.
Pour tout $x\in]n-1,n]$, $\mathrm{E}(x) = n-1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}}\mathrm{E}(x) = n-1 \neq \mathrm{E}(n)$. Par conséquent la fonction partie entière n'est pas continue à gauche en n.

***Exercice* 4.2.3 :** *Étudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & si\ x\ est\ rationnel, \\ 0 & si\ x\ est\ irrationnel. \end{cases}$$

Exercice* 4.2.4 *: *Soit* $f\colon \,]0,1[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \textit{si } x = {}^{m}\!/\!_{k} \textit{ où } m,k \in \mathbb{N} \textit{ sont premiers entre eux,} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Montrer que f *est continue en tout nombre irrational* $a \in]0,1[$ *et est discontinue en tout nombre rational* $a \in]0,1[$.

Exercice* 4.2.5 *: *La fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) := \begin{cases} x\sin({}^{1}\!/\!_{x}) & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice* 4.2.6 *: *Donner deux fonctions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que la fonction* $f+g$ *soit continue, mais aucune des fonctions* f *et* g *n'est continue.*

Exercice* 4.2.7 *: *Soient* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Supposons que pour tout nombre rationnel* r*,* $f(r) = g(r)$*. Montrer que* $f = g$*.*

4.2.2 Continuité sur un intervalle

Une fonction définie au voisinage d'un point a est nécessairement définie (sauf peut-être en a) sur un intervalle I contenant a ou dont a en est une extrémité. Par ailleurs une fonction définie sur un intervalle est définie au voisinage de chacun de ses points et même de ses extrémités. Par conséquent nous considérons dans toute la suite du chapitre, les fonctions définies sur les intervalles. On désigne par I un intervalle non vide et non réduit à un singleton.

Théorème 4.2.12. *Considérons deux réels a et b tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie et continue sur le segment $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes ; c'est-à-dire il existe $x_0, y_0 \in [a,b]$ tel que pour tout $x \in [a,b]$,*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0).$$

Démonstration. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie et continue sur le segment $[a,b]$.

• Raisonnons par l'absurde pour montrer que f est bornée. Supposons f n'est pas majorée, c'est-à-dire pour tout $A > 0$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $|f(x)| > A$. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $|f(x_n)| > n$. On vient ainsi de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ qui est bien évidemment bornée, on peut donc d''après le théorème de Bolzano Weirstrass (Théorème 3.2.6), en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers x_0.

Comme $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$ pour tout n, donc par passage à la limite, $a \leq x_0 \leq b$. Par conséquent la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$ car f est continue en x_0.

D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_{\varphi(n)})| > n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_{\varphi(n)})| = +\infty$. Ce qui est absurde. Donc f est bornée.

• Comme f est bornée, les réels $M = \sup\{x \in [a,b],\ f(x)\}$ et $m = \inf\{x \in [a,b],\ f(x)\}$ existent. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les caractérisations de la borne supérieure et inférieure assure l'existence des éléments y_n et z_n dans $[a,b]$ tels que

$$M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) < M \quad \text{et} \quad m \leq f(z_n) < m + \frac{1}{n}.$$

On construit ainsi des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = M$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = m$. Comme les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées, donc, d 'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, ils existent deux sous-suites $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{\varphi'(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ respectives des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = y_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{\varphi'(n)} = x_0$ avec $x_0, y_0 \in [a,b]$. Comme f est continue en x_0 et y_0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(y_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = f(x_0)$. Par suite $M = f(y_0)$ et $m = f(x_0)$. Ce qui fallait démontrer. □

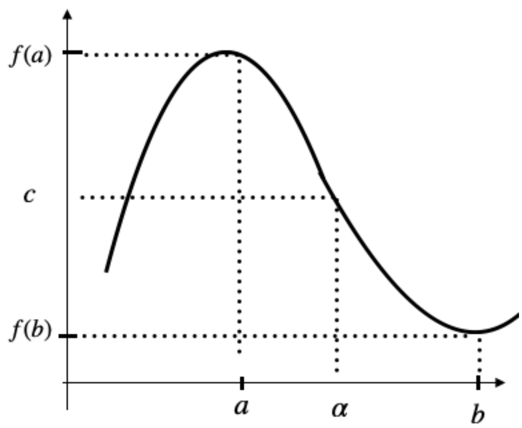
Le théorème 4.2.12 n'est pas forcement vrai si $f : I \to \mathbb{R}$ où I est intervalle qui n'est pas un segment comme le montre les exemples ci-dessous.

Exemple 4.2.13 : La fonction $x \longmapsto f(x) := \dfrac{1}{x}$, définie pour tout $x \in]0,1[$ est continue sur $]0,1[$ mais n'admet ni minimum, ni maximum. Elle est minorée par 1 mais elle n'est pas majorée.

Exemple 4.2.14 : La fonction $x \longmapsto f(x) := x^2$, définie pour tout $x \in]-1,1[$ est continue sur $]-1,1[$, elle est bornée mais n'admet ni minimum, ni maximum.

Théorème 4.2.15 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient f une application continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Pour tout élément c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un élément α de $[a,b]$ tel que $f(\alpha) = c$.*

Démonstration. Soient f une application continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et c compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Si $c = f(a)$ ou $C = f(b)$ alors il n'y a rien à faire. On peut supposer sans perte de généralité que $f(a) < c < f(b)$.
Considérons $A = \{x \in [a,b] \,:\, f(x) \leq c\}$. L'ensemble A est non vide, car $a \in A$, et, étant majoré par b, il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ que nous noterons α. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il exixte $x_n \in [a,b]$ tel que $\alpha - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \alpha$. Par conséquent, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α. Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$ et que $\alpha \in [a,b]$, donc $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.
D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, on a $f(x_n) \leq c$. Par passage à la limite, on obtient $f(\alpha) \leq c$.
Pour tout $x \in]\alpha, b]$, on a $f(x) > c$ par définition de α. Donc $f(\alpha) = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x) \geq c$. Par conséquent $f(\alpha) = c$.



□

Le corollaire suivant est très souvent utilisé pour localiser les racines d'une équation $f(x) = 0$ où f est une fonction continue.

Corollaire 4.2.16. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.2.15, à la fonction f en remarquant que la condition $f(a)f(b) < 0$ signifie que que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. □

***Exercice* 4.2.8 :** *Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,2]$.*

***Exercice* 4.2.9 :** *Montrer que toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue admet un point fixe.*

Corollaire 4.2.17. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. L'image de I par f est un intervalle.*

Démonstration. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. Il n'y a rien à montrer si $f(I)$ est réduit à un point. Sinon soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Il existe x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires tout élément de $[f(x_1), f(x_2)]$ est l'image d'un élément de $[x_1,x_2]$ ou de $[x_2,x_1]$ et donc $[y_1,y_2] = [f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$. Ce qui prouve que $f(I)$ est un intervalle. □

Remarque 4.2.18. Soit I un intervalle et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si I est un segment, $f(I)$ est encore un segment (Théorème 4.2.12).
Lorsque I n'est plus un segment, $f(I)$ est un intervalle qui n'est pas nécessairement de la même nature que I (Théorème 4.2.17) ; une condition suffisante pour que l'image de l'intervalle I soit un intervalle de même nature (ouvert, fermé, semi-ouvert) que I est que f soit strictement monotone.

Corollaire 4.2.19. *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. Si f est injective alors f est strictement monotone.*

Démonstration. Soit f une fonction réelle continue et injective sur un intervalle I. Supposons que f n'est pas strictement monotone. Il existe alors des éléments a,b,c,d de I tels que $a<b<c<d$, $f(a)\geq f(b)$ et $f(c)\leq f(d)$. Considérons la fonction $g;[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour tout $t\in[0,1]$ par
$$g(t)=f(ta+(1-t)c)-f(tb+(1-t)d).$$
Alors la fonction g est continue sur $[0,1]$ comme somme de composées de fonctions continues. De plus $g(0)=f(c)-f(d)\leq 0$ et $g(1)=f(a)-f(b)\geq 0$, il existe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\lambda\in[0,1]$ tel que $g(\lambda)=0$. Posons $x=\lambda a+(1-\lambda)c$ et $y=\lambda b+(1-\lambda)d$. Alors x et y sont des éléments de I, (puisque I est un intervalle) et $x<y$. D'autre part $g(\lambda)=0$, donc $f(x)=f(y)$. Ce qui est absurde puisque f est injective. Par conséquent f est strictement monotone. □

Remarque 4.2.20. Si $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ est strictement monotone sur un intervalle I alors f est injective. En effet : soient x et y dans I tels $x\neq y$. On doit avoir $x<y$, ou $y<x$, donc $f(x)<f(y)$ ou $f(y)<f(x)$ lorsque f strictement croissante, et $f(x)>f(y)$ ou $f(y)>f(x)$ lorsque f est strictement décroissante., selon le cas. On a bien $f(x)\neq f(y)$, donc f est injective.

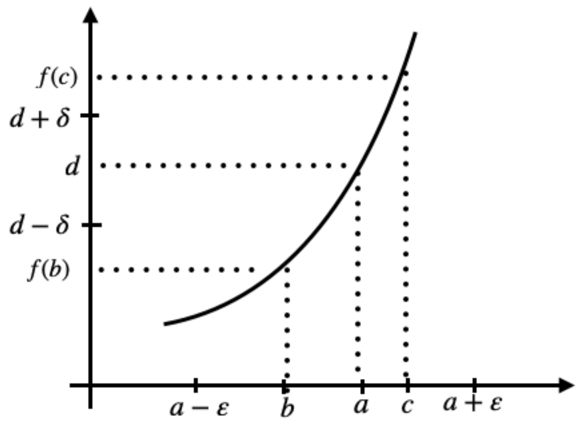
4.2.3 Théorème de la bijection d'une fonction continue

Théorème 4.2.21. *Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors :*
1. *f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J=f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1}: J\longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

Démonstration. Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que f est continue et strictement monotone sur I.

1. Comme f est strictement monotone sur I, elle est injective. Comme $J=f(I)$ la fonction qu'on va noter encore $f: I\longrightarrow J$ est surjective. Par conséquent, f réalise une bijection de I vers J. Il est clair que J est un intervalle comme image de l'intervalle I par une fonction continue. On pourra par ailleurs remarquer que les intervalles I et J sont de même nature.
2. On peut supposer sans perte de généralité que f est strictement croissante (quitte à considérer la fonction $-f$).
–Soient y_1 et y_2 dans J tels que $y_1<y_2$. Posons x_1 et x_2 les éléments de I tels que $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$. Comme $y_1<y_2$, nécessairement $x_1<x_2$, car f est strictement croissante. Par suite $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante sur J.
– Pour montrer que f^{-1} est continue sur J. Soit $\varepsilon>0$.
Soit $d\in J=f(I)$ et posons $a=f^{-1}(d)$. Si a n'est pas une extrémité de l'intervalle I, alors

on peut toujours trouver deux nombres réels b et c dans I vérifiant $a-\varepsilon<b<a<c<a+\varepsilon$. Comme f est strictement croissante, on a $f(b)<f(a)<f(c)$, c'est-à-dire $f(b)<d<f(c)$. Par conséquent, il existe un réel $\delta>0$ tel que $f(b)<d-\delta<d+\delta<f(c)$. Pour tout $x\in f(I)$ tel que $|x-d|\leq\delta$, on a $f(b)<x<f(c)$. Comme f^{-1} est strictement croissante, on a $b<f^{-1}(x)<c$ et par suite $a-\varepsilon<f^{-1}(x)<a+\varepsilon$, c'est-à-dire $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(d)\right|\leq\varepsilon$. Ainsi f^{-1} est continue en tout point d où $f^{-1}(d)$ n'est pas une extrémité de I.
Lorsque $a=f^{-1}(d)$ est un nombre réel qui est l'extrémité inférieure de I. Alors on peut trouver $c\in I$ tel que $a<c<a+\varepsilon$. Comme f est strictement croissante, on a $d<f(c)$. Par conséquent, on peut trouver $\delta>0$ tel que $d+\delta<f(c)$. Pour tout $x\in f(I)$ tel que $|x-d|\leq\delta$, on a $f(a)\leq x<f(c)$. Comme f^{-1} est strictement croissante, on a $a\leq f^{-1}(x)<c$ et par suite $a-\varepsilon<f^{-1}(x)<a+\varepsilon$, c'est-à-dire $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(d)\right|\leq\varepsilon$. Ainsi f^{-1} est continue en tout point d où $f^{-1}(d)$ est l'extrémité inférieure de I.
Le cas où $a=f^{-1}(d)$ est un nombre réel qui est l'extrémité supérieure de I se montre de façon similaire. En conclusion f^{-1} est continue sur $J=f(I)$.



□

4.3 Fonction uniformément continue

Définition 4.3.1. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction et $A\subset\mathscr{D}(f)$. On dit que f est *uniformément continue* sur A, lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tous $x,y\in A$

$$|x-y|\leq\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

On dit que f est uniformément continue si elle est uniformément continue sur $\mathscr{D}(f)$.

Il est clair que toute fonction f uniformément continue sur A est continue sur A. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple 4.3.2 : La fonction $f\colon\,]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, définie par $f(x):=\dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x>0$, n'est pas uniformément continue, bien qu'elle soit continue.

Preuve : Il suffit de montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\delta>0$, il existe $x,y\in]0,+\infty[$ vérifiant $|x-y|\leq\delta$ et $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$.
Soit $\delta>0$. Posons $n_0=\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\delta}\right)+1$, $x=\dfrac{1}{n_0}$ et $y=\dfrac{1}{n_0+1}$. Alors $|x-y|=\dfrac{1}{n_0}-\dfrac{1}{n_0+1}<\dfrac{1}{n_0}<\delta$ et

$$|f(x)-f(y)|=(n_0+1)^2-n_0^2=2n_0+1>1.$$

Ce qui prouve que f n'est pas uniformément continue.

Exemple 4.3.3 : Soit $a > 0$. La fonction $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) := \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq a$, est uniformément continue.

Preuve : Soit $x \geq a$ et $y \geq a$.

$$|f(x) - f(y)| = |x-y|\,\frac{x+y}{x^2y^2} = |x-y|\left(\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\right) \leq |x-y|\,\frac{2}{a^3}.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{a^3}$, on obtient pour tous $x \geq a$ et $y \geq a$ tels que $|x-y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve l'uniforme continuité de f.

Théorème 4.3.4 (Théorème de Heine)**.** *Considérons deux réels a et b tels que $a < b$ et soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x,y dans $[a,b]$ vérifiant $|x-y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Pour un tel $\varepsilon > 0$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe x_n et y_n dans $[a,b]$ tels que $|x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. On construit ainsi deux suites bornées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[a,b]$. D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers $x \in [a,b]$. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \dfrac{1}{\varphi(n)}$, on a par passage à la limite $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}) = 0$. Par suite, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers x, puisque $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.
On ainsi deux suites $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers l'élément x de $[a,b]$; alors comme f est continue en x, on aurait $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(x)$. Ce qui absurde puisque la relation $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| > \varepsilon$, pour tou n, conduit à $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)})$.
En conclusion, on vient de montrer f est uniformément continue.

$\square$

Chapitre 5

Dérivabilité des fonctions

5.1 Définition et propriétés premières

Définition 5.1.1. On dit que $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point $a \in \mathscr{D}(f)$ si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et sera appelée « nombre dérivé » de f au point a.

Exemple 5.1.2 :

1. Si $c \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \longmapsto c$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et on a $f'(a) = 0$.
   Preuve : Pour tout $x \neq a$, on a
   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{c-c}{x-a} = 0.$$
   Donc $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ et $f'(a) = 0$.
2. La fonction $f : x \longmapsto x$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et on a $f'(a) = 1$.
   Preuve : Pour tout $x \neq a$, on a
   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-a}{x-a} = 1.$$
   Donc $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1$ et $f'(a) = 1$.
3. Si n est un entier naturel non nul, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et on a $f'(a) = na^{n-1}$.
   Preuve : Pour tout $x \neq a$, on a
   $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1}$$
   Donc $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = na^{n-1}$ et $f'(a) = na^{n-1}$.

Remarque 5.1.3. Si f est dérivable en un point a alors f est continue en a mais la réciproque est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 mais y est continue. En effet : Soit f est dérivable en un point a alors f est continue en a. Alors on a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a}(x-a) = 0.$$

D'autre part

$$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a),$$

donc

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)=\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)=f'(a)\cdot 0=0.$$

Par suite $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, et f est continue en a.
Prouvons à présent que la fonction $f : x\mapsto |x|$ qui est évidemment continue en 0 n'est pas dérivable en 0 :
Pourn $x>0$, on a

$$\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{x-0}{x-0}=1,$$

et pour $x<0$

$$\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{-x-0}{x-0}=-1.$$

On voit bien que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<a0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|-|0|}{x-0}$, donc la limite de $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ en 0 n'existe pas. Par conséquent f n'est pas dérivable en 0.

Remarque 5.1.4. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathscr{D}(f)$. La fonction *taux d'accroissement* en a est définie pour tout $x\neq a$ par :

$$T_a(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

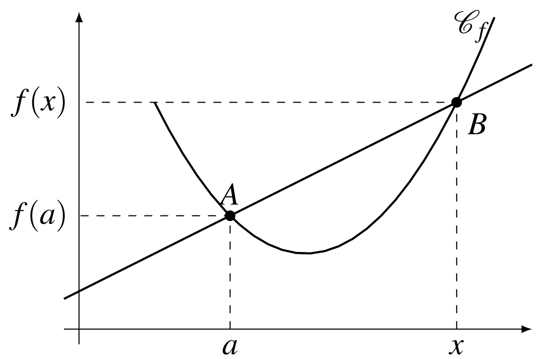
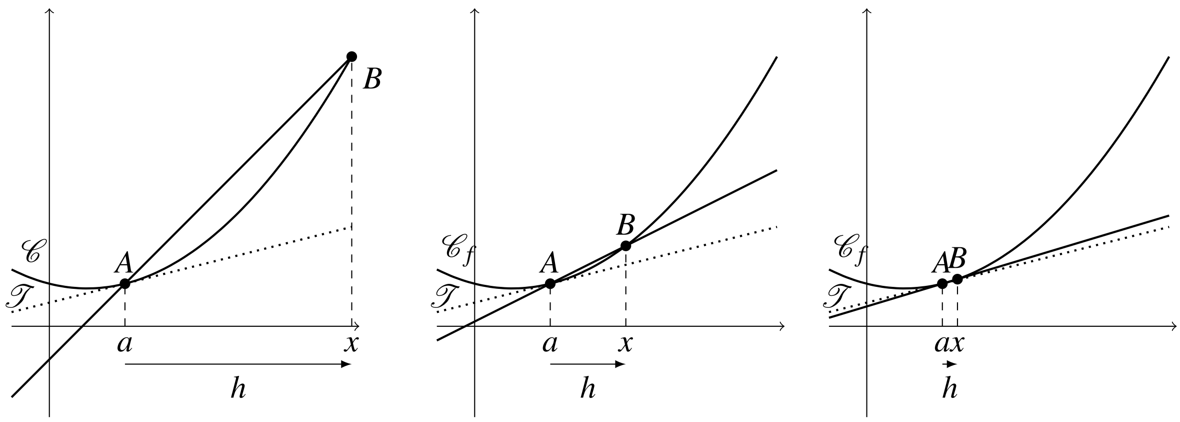


Figure du taux de variation

Soient A et B deux points du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, d'abscisses respectives a et x (voir la figure ci-dessus). Le taux d'accroissement $T_a(x)$ est la « pente » ou le coefficient directeur de la droite qui passe par $A(a,f(a))$ et par $B(x,f(x))$. Posons : $h=x-a$. Lorsque f est dérivable en a, quand h tend vers 0, le point B se rapproche infiniment du point A. Ainsi, la droite (AB) tend vers une position limite qu'on appelle la **tangente** en A à la courbe $\mathscr{C}_f$, c'est la droite passant par $A(a,f(a))$ et dont la pente est cette valeur limite $f'(a)$. L'équation de cette tangente est donnée par :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$



Lorsque $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $-\infty$, la fonction f n'est donc pas dérivable en a mais on peut parler de tangente verticale : la courbe de f présente une tangente d'équation $x=a$ au point d'abscisse a.

Définition 5.1.5. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et $a\in\mathscr{D}(f)$.

— Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{a}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite de a et on note cette limite $f'_d(a)$.

— Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{a}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à gauche de a et on note cette limite $f'_g(a)$.

Définition 5.1.6. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathscr{D}(f')$ l'ensemble des éléments $x\in\mathscr{D}(f)$ pour lesquels f est dérivable en x. On appelle *fonction dérivée* de f la fonction notée f' qui, à tout réel $x\in\mathscr{D}(f')$ associe $f'(x)$.

Définition 5.1.7. On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle I inclus dans $\mathscr{D}(f)$ si f est dérivable en tout point de I. La fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable si elle est dérivable sur $\mathscr{D}(f)$.

Dans toute la suite du chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et les fonctions considérées sont définies de I vers $\mathbb{R}$.

Proposition 5.1.8. *Soit une fonction $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ et a un élément de I qui n'est pas une de ses bornes.*

1. *Si f est dérivable à droite en a alors elle est continue à droite en a,*
2. *Si f est dérivable à gauche en a alors elle est continue à gauche en a,*
3. *f dérivable en a si et seulement si f est elle dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$. (Dans ce cas $f'(a)=f'_d(a)=f'_g(a)$.)*

Définition 5.1.9. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. On dit qu'une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$ lorsqu'elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

5.2 Opérations sur les fonctions dérivées

5.2.1 Théorèmes généraux sur la dérivabilité des fonctions

Dérivabilité de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions

Théorème 5.2.1. *Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en $a \in I$. Alors :*

1. *la fonction cf où c est une constante réelle, est dérivable en a et on a*
$$(cf)'(a) = cf'(a)$$
2. *la fonction $f+g$ est dérivable en a et on a*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
3. *la fonction fg est dérivable en a et on a*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
4. *la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en a lorsque $g(a) \neq 0$ et on a*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$
5. *la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a lorsque $g(a) \neq 0$ et on a*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Démonstration. Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en $a \in I$.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour tout x de I tel que $x \neq a$, on a
$$\frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x-a} = \frac{cf(x) - cf(a)}{x-a} = c\frac{f(x) - f(a)}{x-a},$$
par passage à la limite quand x tend vers a, on a bien cf dérivable en a et $(cf)'(a) = cf'(a)$.
2. Pour tout x de I tel que $x \neq a$, on a
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a},$$
par passage à la limite quand x tend vers a, on a bien $f+g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
3. Pour tout x de I tel que $x \neq a$, on a
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$
Comme f est dérivable en a, elle est continue en a, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Donc
$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$
Ce qui prouve le résultat.

4. Comme g est continue en a et que $g(a) \neq 0$, il existe un intervalle ouvert $j \subset I$ tel que $a \in J$ et pour tout $x \in J$ $g(x) \neq 0$. Pour tout $x \in J$ tel que $x \neq a$, on a
$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
La dérivabilité de g en a assure que $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ et $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$. Par suite $\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} -\frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$.
5. Il suffit d'appliquer les résultats des points 3 et 4.

□

Corollaire 5.2.2. *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors :*
1. *la fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$*
2. *la fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$*
3. *si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$*
4. *si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$*

Remarque 5.2.3. Si f est une fonction dérivable sur I, alors la fonction f^n est dérivable sur I pour tout entier naturel n et l'on a $(f^n)' = nf^{n-1}f'$. De plus si f ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{1}{f^n}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f^n}\right)' = \frac{-nf'}{f^{n-1}}$.

Dérivabilité de la composée de deux fonctions

Théorème 5.2.4. *Soient I et J deux intervalles, f une fonction de I dans J et g une fonction de J vers $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en $a \in I$ et g dérivable en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et on a :*
$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a).$$
Démonstration. Soient I et J deux intervalles, $f : I \longrightarrow J$ dérivable en $a \in I$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$.
Soit $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(f(a))}{x - f(a)} & \text{si } x \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si } x = f(a) \end{cases}$$
Cette fonction est bien continue en $f(a)$ et pour tout $x \in I \setminus \{a\}$
$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = F(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$
Donc
$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} F(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = F(f(a)).f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$
Ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 5.2.5. *Soient I et J deux intervalles, $f : I \longrightarrow J$ une fonction dérivable sur I et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.*

5.2.2 Théorème de la bijection d'une fonction dérivable

Théorème 5.2.6. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, et dérivable en $a \in I$. Alors la bijection réciproque f^{-1} de la fonction $f : I \longrightarrow J = f(I)$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et l'on a dans ce cas :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, et dérivable en $a \in I$.
Le théorème 4.2.21 assure que f^{-1} existe et est continue sur J.

— Supposons que f^{-1} est dérivable en b. Comme $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, le théorème 5.2.4 donne immédiatement $(f^{-1})'(b)f(a) = \mathrm{Id}_I{}'(a) = 1$. D'où

$$f'(a) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

— Réciproquement, supposons que $f'(a) \neq 0$. Soit F la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ tel que pour tout $x \neq a$, $F(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Pour tout $y \neq b$, comme f^{-1} est bijective, on a donc $f^{-1}(y) \neq a$ et

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \frac{1}{F(f^{-1}(y))}.$$

En appliquant le théorème de composition des limites (Théorème 4.1.38), on obtient :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{1}{F(f^{-1}(y))} = \lim_{x \to a} \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Comme $f'(a) \neq 0$, la fonction f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

□

Corollaire 5.2.7. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I telle que la dérivée ne s'annule pas sur I, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est dérivable sur $f(I)$ et :*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Application : Fonctions réciproques trigonométriques et hyperboliques

Fonction arc sinus : La fonction $f : \begin{array}{ll} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \sin t \end{array}$ est continue et strictement croissante et $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Donc l'application $\varphi : \begin{array}{ll} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow [-1, 1] \\ t & \longmapsto \sin t \end{array}$ bijective. Par définition, la fonction arc sinus notée arcsin est la bijection réciproque de la fonction φ : $\arcsin = \varphi^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a immédiatement la propriété suivante :

$$\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$$

Proposition 5.2.8.
— *La fonction arc sinus est impaire.*
— *La fonction arc sinus est continue sur* $[-1,1]$*, dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Montrons que la fonction arcsin est impaire. Soit $x \in [-1,1]$, alors

$$\begin{aligned} \sin(-\arcsin(x)) &= -\sin(\arcsin(x)) \quad \text{car sin est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in [-1,1]$, donc

$$\sin(-\arcsin(x)) = -x \Leftrightarrow -\arcsin(x) = \arcsin(-x).$$

Ce qui prouve que arcsin est impaire.

Montrons que arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. La fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ t & \longmapsto & \sin t \end{array}$ est continue sur $[-1,1]$, donc la fonction arcsin est continue sur $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$. La fonction φ étant également dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi'(x) = \cos x$. De plus, $\varphi'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc arcsin est dérivable sur $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1,1[$.
Pour tout $y \in]-1,1[$, et $y = \sin x$,

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)} \\ \arcsin'(y) &= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} \sin^2(\arcsin(y)) + \cos^2(\arcsin(y)) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(\arcsin(y)) = 1 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2} \quad \text{car} \arcsin(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Fonction arc cosinus : La fonction $f : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos t \end{array}$ est continue et strictement décroissante et $f([0,\pi]) = [-1,1]$. Donc l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ t & \longrightarrow & \cos t \end{array}$ bijective. Par définition, la fonction arc cosinus notée arccos est la bijection réciproque de la fonction φ : $\arccos = \varphi^{-1} : [-1,1] \longmapsto [0,\pi]$.

On a immédiatement la propriété suivante :

$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

Proposition 5.2.9. *La fonction arc cosinus est continue sur* $[-1,1]$*, dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$*,*

$$\arcsin'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La fonction $\begin{array}{rcl}\varphi : & [0,\pi] & \longrightarrow [-1,1] \\ & t & \longmapsto \cos t\end{array}$ est continue sur $[-1,1]$, donc la fonction arccos est continue sur $f([0,\pi]) = [-1,1]$. La fonction φ étant également dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout $x \in [0,\pi]$, $\varphi'(x) = -\sin x$. De plus , $\varphi'(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in]0,\pi[$ donc arccos est dérivable sur $\varphi(]0,\pi[) =]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, et $y = \cos x$,

$$\begin{aligned} \arccos'(y) &= \frac{1}{\varphi'(x)} \\ &= -\frac{1}{\sin(x)} \\ \arccos'(y) &= -\frac{1}{\sin(\arccos(y))} \end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} \sin^2(\arccos(y)) + \cos^2(\arccos(y)) = 1 &\Leftrightarrow \sin^2(\arccos(y)) = 1 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2} \quad \text{car} \arccos(y) \in [0,\pi] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y \in]-1,1[$,

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

□

Fonction arc tangente : La fonction $\begin{array}{rcl}f : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto \tan t\end{array}$ est continue et strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ donc $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$, ainsi l'application f bijective. Par définition, la fonction arc tangente notée arctan est la bijection réciproque de la fonction f : $\arctan = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a immédiatement la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x.$$

Proposition 5.2.10.

— *La fonction arc tangente est impaire.*
— *La fonction arc tangente est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. Montrons que la fonction arc tangente est impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \tan(-\arctan(x)) &= -\tan(\arctan(x)) \quad \text{car tan est impaire} \\ &= -x \end{aligned}$$

De plus $-\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-x \in \mathbb{R}$, donc

$$\tan(-\arctan(x)) = -x \Leftrightarrow -\arctan(x) = \arctan(-x)$$

Ce qui prouve que arctan est impaire.

Montrons que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$. De plus pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $f'(x) \neq 0$. Par conséquent la fonction arctan est dérivable sur $f(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \tan x$,

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{f'(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

$\square$

Fonction argument cosinus hyperbolique : La fonction cosinus hyperbolique ch définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On a donc $\operatorname{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$, ainsi on définit l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ t & \longmapsto & \operatorname{ch} t \end{array}$ bijective. Par définition, la fonction argument cosinus hyperbolique notée argch est la bijection réciproque de la fonction φ : $\operatorname{argch} = \varphi^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$.

Proposition 5.2.11. *La fonction argument cosinus hyperbolique est continue sur $[1, +\infty[$ et strictement croissante ; elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$:*

$$\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

On a en plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Fonction argument sinus hyperbolique : La fonction sinus hyperbolique sh définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc sh est bijective. Par définition, la fonction argument sinus hyperbolique notée argsh est la bijection réciproque de la fonction sh : $\mathrm{argsh} = \mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 5.2.12. *La fonction argument sinus hyperbolique est impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

On a en plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.

— Car c'est la réciproque de sh qui est elle-même strictement croissante et continue.

— Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}'x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{argsh}'x = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

— Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{argsh}'x$$

Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\mathrm{argsh}0 = 0$ (car $\mathrm{sh}0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{argsh}x$.

□

Fonction argument tangente hyperbolique : La fonction tangente hyperbolique th définie pour $x \in \mathbb{R}$ par : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$, ainsi on définit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ t & \longmapsto & \mathrm{th}(t) \end{array}$ bijective. Par définition, la fonction argument tangente hyperbolique notée argth est la bijection réciproque de la fonction φ : $\mathrm{argth} = \varphi^{-1} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 5.2.13. *La fonction argument tangente hyperbolique est impaire, continue sur $]-1,1[$ et strictement croissante ; elle est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$\mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

On a en plus, pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

5.3 Théorèmes fondamentaux sur les dérivées

Nous en arrivons aux théorèmes fondamentaux. Ces théorèmes seront souvent utilisés dans les preuves de propositions ou théorèmes.

5.3.1 Théorème de Darboux - Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis

Dans tout ce paragraphe on considérera un intervalle fermé, borné $[a,b]$ où a et b sont des réels vérifiant $a<b$.

Extremum d'une fonction

On rappèle la définition qui suit :

Définition 5.3.1. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$. On dit que f admet un maximum local en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap I$, $f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f admet un minimum local en x_0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \cap I$, $f(x) \geq f(x_0)$.
On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un minimum ou un maximum local en x_0.

Théorème 5.3.2. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et c un point I qui n'en est pas une borne. Si la fonction f présente un extremum local en a alors $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant un extremum local en un point $c \in I$ qui n'est pas une borne de I.
Comme c n'est pas une extrémité de l'intervalle I, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $[c-\varepsilon_1, c+\varepsilon_1] \subset I$. On peut supposer l'extremum est un maximum, sinon changer f en $-f$. Il existe donc $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [c-\varepsilon_1, c+\varepsilon_1] \cap I$, $f(x) \leq f(c)$. Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Pour $x \in [c-\varepsilon, c[$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ et comme f est dérivable en c, on obtient par passage à la limite $f'(c) = f'_g(c) \geq 0$.
Pour $x \in]c, c+\varepsilon]$, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ et comme f est dérivable en c, on obtient par passage à la limite $f'(c) = f'_d(c) \leq 0$.
On conclut que $f'(c) = 0$. □

Théorème de Darboux

Théorème 5.3.3 (Théorème de Darboux)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors pour tout réel y compris strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = y$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f'(a) < y < f'(b)$. Considérons la fonction g définie sur $[a,b]$ par

$$g(x) := yx - f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

La fonction g est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $g'(x) = y - f'(x)$. Donc $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$.

D'autre part, comme g est continue sur $[a,b]$, g atteint son maximum en point $c \in [a,b]$. Comme $g'(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} > 0$, il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $x_1 > a$ et $g(x_1) - g(a) > 0$. Ainsi $g(x_1) > g(a)$, par conséquent $g(a)$ n'est pas le maximun de g et $c \neq a$.
De la même manière, $g'(b) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} < 0$, il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $x_2 < b$ et $g(x_2) - g(b) > 0$. Ainsi $g(x_2) > g(b)$, par conséquent $g(b)$ n'est pas le maximun de g et $c \neq b$. Par suite $c \in]a,b[$. On conclut du théorème 5.3.2 que $g'(c) = 0$ et donc $f'(c) = y$. □

Théorème de Rolle

Théorème 5.3.4 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$.*
Alors il existe au moins un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable dans $]a,b[$. Comme f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes inférieures m et supérieure M.
Si f est constante sur $[a,b]$, alors $\forall c \in]a,b[$, on a $f'(c) = 0$.
Sinon, on doit avoir $m < f(a)$ ou $M > f(a)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer par exemple que $m < f(a)$. Soit $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = m$. Comme $f(b) = f(a) \neq m$, on a $c \in]a,b[$, et d'autre part pour tout $x \in [a,b]$, $f(c) \leq f(x)$, donc le théorème 5.3.2 assure que $f'(c) = 0$. □

Remarque 5.3.5 (Interprétation du théorème de Rolle). Le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que la tangente à la courbe de f au point $(c, f(c))$ soit horizontale .

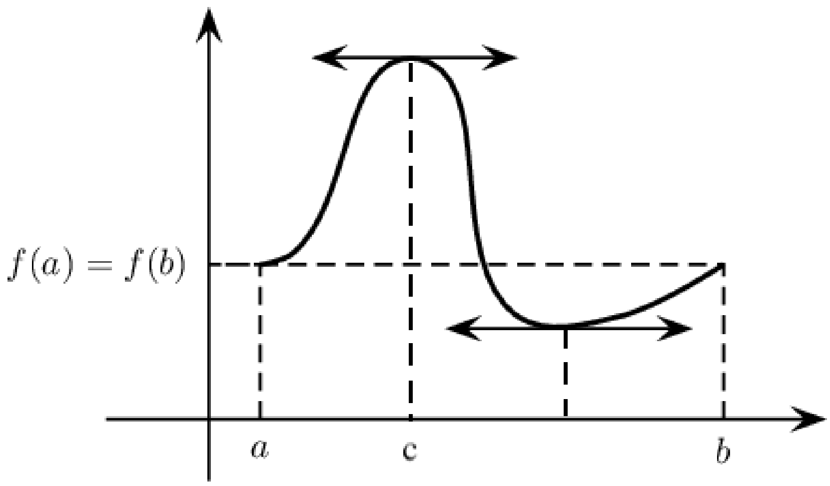


FIGURE 5.1 – Interprétation du théorème de Rolle

Théorème de accroissements finis

Théorème 5.3.6. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$. Alors il existe au moins un nombre $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Démonstration. il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

En effet, φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; donc en vértu du théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or pout tout $x \in]a,b[$,

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi'(c) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &\Longleftrightarrow \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c). \end{aligned}$$

□

Remarque 5.3.7 (Interprétation du théorème des accroissements finis).

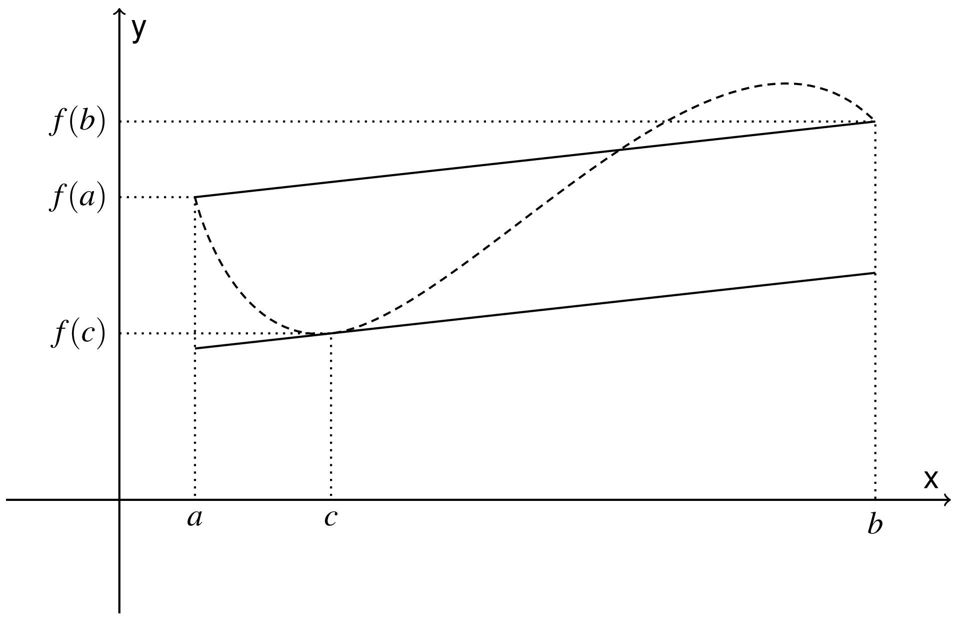


FIGURE 5.2 – Interprétation du théorème des accroissements finis

Graphiquement, le théorème des accroissements finis dit que la courbe représentative de f sur $[a,b]$ possède au moins une tangente parallèle à la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (figure 5.2). en cinématique, si $f(x)$ représente la position d'un mobile à l'instant x, le théorème des accroissements finis dit que en au moins un point, la vitesse instantanée doit être égale à la vitesse moyenne sur l'intervalle.

C'est plus ou moins le corollaire suivant qui justifie le nom « accroissements finis » : si f' est bornée, on peut majorer l'accroissement de f.

Corollaire 5.3.8 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans $[a,b]$, et dérivable dans $]a,b[$. S'il existe $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $m_1 \leq f'(x) \leq m_2 \ \ \forall x \in]a,b[$ alors*

$$m_1(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq m_2(b-a),$$

$$|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|, \qquad \text{où } M = \max(|m_1|,|m_2|)$$

Corollaire 5.3.9. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point de I ; alors, pour tout réel h tel que $x_0+h \in I$, il existe un nombre $\theta_h \in]0,1[$ tel que :*

$$f(x_0+h)-f(x_0) = hf'(x_0+\theta_h h).$$

Démonstration. On applique le théorème des accroissements finis :
Pour $h>0$, on prend $a=x_0$, $b=x_0+h$, $\theta_h = \dfrac{c-a}{b-a}$.
Pour $h<0$, on prend $a=x_0+h$, $b=x_0$, $\theta_h = \dfrac{b-c}{b-a}$. □

Théorème 5.3.10 (Théorème de la moyenne de Cauchy)**.** *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Alors :*
— *il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))\,f'(c) = (f(b)-f(a))\,g'(c)$;*
— *dans le cas où g' ne s'annule pas sur $]a,b[$, il existe un nombre réel $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(t) = (g(b)-g(a))\,f(t)-(f(b)-f(a))g(t)$. Cette fonction est bien continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et $\varphi(a)=\varphi(b)$. Il existe donc d'après le theorème de Rolle un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or pout tout $x \in]a,b[$,

$$\varphi'(x) = (g(b)-g(a))\,f'(t)-(f(b)-f(a))g'(t).$$

Donc $(g(b)-g(a))\,f'(c) = (f(b)-f(a))\,g'(c)$.
Si de plus g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ alors, par contraposée du théorème de Rolle, on a $g(b) \neq g(a)$ et par la suite $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. □

5.3.2 Applications

Caractérisation des fonctions constantes

Le corollaire suivant est considéré par certains auteurs comme la conséquence la plus importante du théorème des accroissements :

Proposition 5.3.11. *Soit I un intervalle qui n'est pas un singleton et f une fonction à valeur réelle définie sur I.*
f est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est la fonction nulle.

Démonstration. Si f est constante sur I alors il est évident que f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ $f'(x)=0$. Réciproquement, supposons que f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x)=0$. Soit $x,y \in I$ tels que $x<y$. Comme $[x,y] \subset I$, alors f est dérivable sur $[x,y]$ et par application du théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y) = 0$. Donc $f(x)=f(y)$. Par conséquent f est constante sur I □

Remarque 5.3.12. Le corrolaire précédent est faux si I n'est pas un intervalle, comme le montre l'exemple suivant : la fontion f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,2[\\ 2 & \text{si } x \in]2,3[\end{cases}$$

est bien dérivable sur $]0,2[\cup]2,3[$, de dérivée nulle mais n'est pas constante sur $]0,2[\cup]2,3[$.

Monotonie des fonctions dérivables

Proposition 5.3.13. *Soient I un intervalle qui n'est pas réduit à un singleton et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$,*
2. *f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$,*
3. *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I,*
4. *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. – Supposons que f est croissante sur I. Soit $a \in I$ qui n'est pas une borne supérieure de I. Pour tout $x > a$, on a $f(x) \geq f(a)$ et par suite $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Comme f est dérivable en a, $f'(a) = f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Si a est la borne inférieure de I alors $f'(a) = f'_g(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.
   – Soit $x, y \in I$ tel que $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x,y]$, il existe $c \in]x,y[$ tel que
   $$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y). \tag{5.1}$$
   Supposons que pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. Comme $f'(c) \geq 0$ et $x-y < 0$, donc $f(x) \leq f(y)$. Par conséquent f est croissante sur I.
2. f est décroissante sur I équivaut à $-f$ est croissante sur I. On obtient donc le deuxième point à partir du premier.
3. La relation (5.1) prouve les point trois et quatre.

□

Remarque 5.3.14. Dans les points trois et quatre, on a des implications et non des équivalences. Par exemples, la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais on n'a pas $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. De même la fonction $g : x \longmapsto -x^3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, mais on n'a pas $g' < 0$ sur $\mathbb{R}$.

La proposition suivante est la forme du théorème précédent qu'on utilise pour réaliser le tableau de variation d'une fonction.

Proposition 5.3.15. *Soient I un intervalle qui n'est pas un singleton et J une partie de I obtenue en retranchant un nombre fini de points à I. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur J, alors :*

— *si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I,*

— *si pour tout $x \in J$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.*

Exemple 5.3.16 : 1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x-1)(x-2)(x-3).$$
Par suite, $f'(x) > 0$ si $x > 3$ ou si $1 < x < 2$ et $f'(x) < 0$ si $x < 1$ ou $2 < x < 3$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1,2]$ et sur $[3,+\infty[$, puis f est strictement décroissante sur $[2,3]$ et sur $]-\infty,1]$. Plus précisément, on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

5.4 Convexité, Concavité

Définition 5.4.1. Soit f une fonctionà valeur réeelle définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est convexe sur I si et seulement si

$$\text{pour tout } (x_1,x_2) \in I^2, \text{ pour tout } t \in [0,1], \; f[tx_1+(1-t)x_2] \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

On dit que la fonction f est concave signifie que $-f$ est convexe

L'inégalité $f[tx_1+(1-t)x_2] \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ de la définition 5.4.1 est appélée inégalité de convexité.

Remarque 5.4.2 (Interprétation graphique). Soient A et B deux points du graphe de f d'abscisses respectives x_1 et x_2. Alors un point quelconque M du segment $[A,B]$ a pour abscisse $tx_1+(1-t)x_2$ avec $t \in [0,1]$ et pour ordonnée $tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ et le point P du graphe de f d'abscisse $(1-t)x_1+tx_2$ a pour ordonnée $f(tx_1+(1-t)x_2)$. Dire que f est convexe signifie donc que l'ordonnée de M est supérieure à l'ordonnée de P. On dit que la courbe est « au-dessous » de ses cordes.

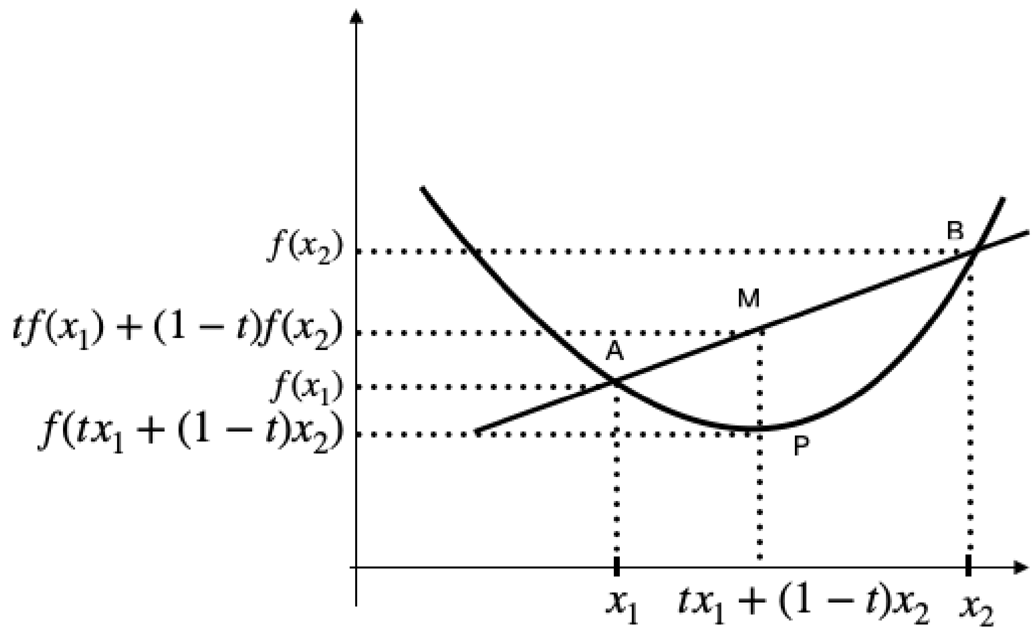


FIGURE 5.3 – Graphe d'une fonction convexe

Exemple 5.4.3 : — La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque, d'après l'inégalité triangulaire, pour tous les réels x_1 et x_2 et $t \in [0,1]$:

$$|(1-t)x_1 + tx_2| \leq (1-t)|x_1| + t|x_2|$$

— La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$

— Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

Proposition 5.4.4. *Soit f une fonction à valeur réelle convexe sur un intervalle I. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier n.
Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire, puisque $\lambda_1 = 1$.
Pour $n = 2$, il s'agit d'une variante de la définition de la convexité.
Supposons la propriété vraie au rang n et soient $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

— Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc le résultat est trivial.

— Si $\lambda_{n+1} \neq 1$, alors posons $y = \dfrac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Nous montrons que $y \in I$.
Notons $a = \min_{1 \leq k \leq n} x_k$ et $b = \max_{1 \leq k \leq n} x_k$. Ainsi, on a pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $a \leq x_k \leq b$. Comme les λ_k sont positifs, nous avons

$$a \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leq b \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$
$$a \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leq b$$
$$a \leq \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \leq b$$
$$a \leq y \leq b.$$

Comme $[a,b] \subset I$ et $y \in [a,b]$, donc $y \in I$.
En remarquant que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}$, par l'inégalité de convexité, on obtient :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Or $f(y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right)$, où tous les $\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$ sont positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Donc de l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$f(y) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k). \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat. □

Corollaire 5.4.5. *Soit f une fonction à valeur réelle concave sur un intervalle I. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Proposition 5.4.6. *Soientt I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient a et b deux points de I, tels que $a < b$ et c un point n'appartenant pas au segment $[a,b]$. Alors :*

$$f(c) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + f(a).$$

Géométrique la proposition ci-dessus exprime le fait qu'en dehors du segment $[a,b]$, courbe de f est au dessus de la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Démonstration. On traitele cas où $c > b$, le cas $c < a$ étant similaire.
Comme $b \in [a,c]$, donc $\frac{b-a}{c-a} \in [0,1]$ et $b = \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)a + \frac{b-a}{c-a}c$. De l'inégalité de convexité, il vient : $f(b) \leq \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right) f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c)$. Or,

$$\begin{aligned} f(b) \leq \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right) f(a) + \frac{b-a}{c-a} f(c) &\Leftrightarrow (c-a)f(b) \leq (c-b)f(a) + (b-a)f(c) \\ &\Leftrightarrow f(c) \geq \frac{(c-a)f(b) - (c-b)f(a)}{b-a} \\ &\Leftrightarrow f(c) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) + f(a). \end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.7. *Soientt I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction* $\begin{array}{rccc} \tau_a : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ *est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $\alpha \in I$, τ_α est croissante. Montrons que f est convexe. Soient alors $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On peut supposer $a \neq b$ et $\lambda \in]0,1[$ car les cas $a = b$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ sont triviaux. Et quitte à échanger a et b, on peut même supposer que $a < b$.
Comme $a < b$, donc $a < (1-\lambda)a + \lambda b < b$. De la croissance de τ_a, on déduit que $\tau_a((1-\lambda)a + \lambda b) \leq \tau_a(b)$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{(1-\lambda)a+\lambda b-a} &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
\frac{f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a)}{\lambda(b-a)} &\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
f((1-\lambda)a+\lambda b)-f(a) &\leq \lambda f(b)-\lambda f(a) \\
f((1-\lambda)a+\lambda b) &\leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que f est convexe sur I.
Réciproquement, supposons que f est convexe sur I, et soit $a \in I$. Montrons τ_a est croissante. Soient x et y deux points de $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.

— Si $y > a$ alors y est situé à l'extérieur du segment d'extrémités a et x (qui est donc soit $[a,x]$, soit $[x,a]$). De la proposition 5.4.6, on a $f(y) \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(y-a) + f(a)$. Ce qui est équivalent à $\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \geq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, par suite $\tau_a(y) \leq \tau_a(x)$.

— Si $y < a$ alors x est à l'extérieur du segment $[y,a]$, donc

$$f(x) \geq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}(x-a) \; + \; f(a).$$

D'où $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(y)-f(a)}{y-a}$ car $x - a < 0$. Par suite $\tau_a(y) \leq \tau_a(x)$.

Ce qui prouve que τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$. □

Corollaire 5.4.8 (Inégalité des pentes)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tous éléments a, b et c de I tels que $a < b < c$, on a*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Démonstration. De la croissante de τ_a, on obtient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et de la croissante de τ_c on obtient $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$. Ce prouve le résultat. □

Le corollaire ci dessous montre que les fonctions convexes sont très proche des fonctions continues.

Corollaire 5.4.9. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I, et donc continue sur I.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Comme I est un intervalle ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[\subset I$. La fonction τ_a étant croissante, le théorème de limites des fonctions monotones assure l'existence dans $\overline{\mathbb{R}}$ des limites à gauche et à droite en a de τ_a et on a

$$\lim_{x\to a^-} \tau_a(x) = \sup\{\tau_a(x) \mid x \in]a-r, a+r[\} \text{ et } \lim_{x\to a^+} \tau_a(x) = \inf\{\tau_a(x) \mid x \in]a-r, a+r[\}.$$

De plus l'ensemble $\{\tau_a(x) \mid x \in]a-r, a+r[\}$ est borné, donc les bornes supérieure et inférieure sont bien des nombres réels.
D'autre part, $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-a}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \tau_a(a)$ et $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-a}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \tau_a(a)$, donc f admet des dérivées à gauche et à droite en a.
Pour la continuité de f en a, il suffit de remarquer que pour tout $x \neq a$,

$$f(x)-f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

pour voir que $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$. □

Proposition 5.4.10. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.*
La fonction dérivée f' est croissante sur I si, et seulement si, la fonction f est convexe sur I, et on a alors, pour tout $x \in I$ et tout $a \in I$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

L'inégalité précédente s'interprète graphiquement : si la fonction est convexe et dérivable, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration. Supposons que la dérivée f' de f est croissante. Soient x et y deux points de I tels que $x < y$, $\lambda \in]0,1[$ et posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. En ppliquant le théorème des accroissements finis sur chacun des intervalles $[x,z]$ et $[z,y]$, il existe $c_1 \in]x,z[$ et $c_2 \in]z,y[$ tels que

$$f\text{''}(c_1) = \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \quad \text{et} \quad f\text{''}(c_2) = \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Comme $c_1 < c_2$ et que f' est croissante, on a $f\text{''}(c_1) \leq f\text{''}(c_2)$, donc

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité ci dessus par le produit $(z-x)(y-z)$, qui est positif, on obtient :

$$f(z)(y-x) \leq f(x)(y-z) + f(y)(z-x).$$

D'où

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

La fonction f est donc convexe.
Réciproquement, soient x et y deux points de I, tels que $x < y$. Pour tout $z \in [x,y]$, τ_z est croissante, donc

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

En faisant tendre z vers x, on obtient $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ puis en faisant tendre z vers y, il vient $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$. Donc $f'(x) \leq f'(y)$. Ce qui prouve la croissance de f'.
Comme pour tous $x \in I$ et $x \in I$, tels que $x < y$, on a

$$f'(x) < \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y),$$

on en déduit que $f(y) \geq f(x)(y-x) + f(x)$ et $f(x) \geq f(y)(x-y) + f(y)$. □

Corollaire 5.4.11. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.*

Démonstration. D'après la proposition ci dessus f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I, or f' est croissante sur I si et seulement si $f'' \geq 0$. □

5.5 Règle de l'Hôpital

Dans cette section, nous décrirons une méthode utile pour trouver des limites connue sous le nom de Règle de l'Hopital.

Règle de l'Hôpital pour la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$

Proposition 5.5.1. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Soit f et g comme dans la proposition. On peut prolonger f et g par continuité en a en posant $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$. Pour tout $x \in]a, b[$, il existe d'après le théorème de la moyenne de Cauchy, théorème 5.3.10, un réel c_x tel que $a < c < x$ et

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Comme c_x est compris entre a et x, $\lim_{x \to a} c_x = a$, donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

□

En apportant de legères modifications dans la preuve de la proposition ci-dessus, on obtient la proposition suivante

Proposition 5.5.2. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} g(x) = 0.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En combinant les propositions 5.5.1 et 5.5.2, on obtient le théorème ci-dessous

Théorème 5.5.3. *Soient a. b et c trois réels tels que $a < c < b$, et $f, g :]a, c[\cup]c, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, c[\cup]c, b[$ telles que*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, c[\cup]c, b[$ et que $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Corollaire 5.5.4. *Soient $a > 0$ et $f, g :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, +\infty[$ telles que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Soit f et g comme dans le corollaire. Considérons les fonction $F, G :]0, \frac{1}{a}[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$ par

$$F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \quad G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Les fonction F et G vérifient les hypothèses de la proposition 5.5.1 donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

De manière analogue, on a le corollaire suivant

Corollaire 5.5.5. *Soient $a < 0$ et $f, g :]-\infty, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]-\infty, a[$ telles que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]-\infty, a[$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple 5.5.6 : 1. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$:

Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}$. De plus les fonctions $x\longmapsto x-e^x+1$ et $x\longmapsto x(e^x-1)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x-e^x+1)=0=\lim\limits_{x\to 0}x(e^x-1)$. Par application de la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}$$

Appliquons à nouveau la règle de l'Hôpital, en remarquant que les fonctions $x\longmapsto 1-e^x$ et $x\longmapsto e^x-1+xe^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^x)=0=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1+xe^x)$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}.$$

2. Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$:

Pour tout $x>1$, $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln(1-\frac{1}{x})}$. En appliquant la règle de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{-1}$.

Règle de l'Hôpital pour la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$

Proposition 5.5.7. *Soient a et b deux réels tels que $a<b$, et $f,g:]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a,b[$ telles que*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}|g(x)|=+\infty.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Soient f et g comme dans la proposition. Pour tous x et y dans $]a,b[$ tels que $y>x$, du théorème de Rolle , on a $g(x)\neq g(y)$. Par conséquent,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\cdot\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}\tag{5.2}$$

– Supposons que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\delta_0>0$ tel que pour tout x vérifiant $0<x-a<\delta_0$, on ait

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

Soient x et y dans $]a,a+\delta_0[$ tels que $x<y$, d'après le théorème de la moyenne de Cauchy, il existe $c\in]x,y[$ vérifiant
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
Donc
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-l\right|<\varepsilon.$$
De la relation 5.2, on obtient
$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-l\right)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+l\cdot\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}-l.$$

En fixant y dans $]a,a+\delta_0[$, comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}|g(x)|=+\infty$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\left(l\cdot\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}-l\right)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)=1$. Par conséquent il existe $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tel que :
pour tout $x\in]a,a+\delta_1[$, $\left|l\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ et pour tout $x\in]a,a+\delta_2[$, $\left|1-\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2}$.
En définitive, choisissons $\delta=\frac{1}{2}\min(\delta_0,\delta_1,\delta_2)$ et $y=a+\frac{\delta+\delta_0}{2}$. Alors on a bien $y\in]a,a+\delta_0[$ et $x<y$ pour tout $x\in]a,a+\delta[$. Par conséquent, pour tout $x\in]a,a+\delta[$,
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|&\leq\left|\left(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-l\right)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\right|+\left|l\cdot\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}-l\right|\\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|&<\varepsilon\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|&<\varepsilon.\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

– Supposons que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$. Soit $A>0$. Il existe $\delta_0>0$ tel que pour tout x vérifiant $0<x-a<\delta_0$, on ait
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>2A+1.$$

Soient x et y dans $]a,a+\delta_0[$ tels que $x<y$, il existe $c\in]x,y[$ vérifiant $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Donc
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}>2A+1.$$

En fixant y dans $]a,a+\delta_0[$, comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}|g(x)|=+\infty$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(y)}{g(x)}=0$.
Par conséquent il existe $\delta_1>0$ et $\delta_2>0$ tel que :
pour tout $x\in]a,a+\delta_1[$, $1-\frac{g(y)}{g(x)}>\frac{1}{2}$ et pour tout $x\in]a,a+\delta_2[$, $\frac{f(y)}{g(x)}>-\frac{1}{2}$. En choisissant

$\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ et $y = a + \frac{\delta + \delta_0}{2}$, on a bien $y \in]a, a+\delta_0[$ et $x < y$ pour tout $x \in]a, a+\delta[$. Par conséquent, pour tout $x \in]a, a+\delta[$, de la relation 5.2, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \\
\frac{f(x)}{g(x)} &> (2A+1)\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
\frac{f(x)}{g(x)} &> A.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

– Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. On a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{(-g)'(x)} = +\infty$, d'après ce qui précède, on a donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{(-g)(x)} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. □

De légères modifications dans la preuve de la proposition précédente permettent d'obtenir ce qui suit :

Proposition 5.5.8. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} |g(x)| = +\infty.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Théorème 5.5.9. *Soient a. b et c trois réels tels que $a < c < b$, et $f, g :]a, c[\cup]c, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, c[\cup]c, b[$ telles que*

$$\lim_{x \to c} |g|(x) = +\infty$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, c[\cup]c, b[$ et que $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Corollaire 5.5.10. *Soient $a > 0$ et $f, g :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]a, +\infty[$ telles que*

$$\lim_{x \to +\infty} |g(x)| = 0 + \infty$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]a, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Corollaire 5.5.11. *Soient $a < 0$ et $f, g :]-\infty, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $]-\infty, a[$ telles que*

$$\lim_{x \to -\infty} |g(x)| = +\infty.$$

Suppososons que g' ne s'annule pas sur $]-\infty, a[$ et que $\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarque

On peut résumer tous ces résultats par l'énoncé suivant :

Théorème 5.5.12 (Règle de l'Hopital)**.** *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f et g des fonctions dérivables au voisinage de a sauf peut-être en a telles que g' ne s'annule pas sur cet voisinage. Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

ou

$$\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty.$$

Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.6 Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Nous avons alors deefini la fonction dérivée $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout point $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.
Si la fonction f' est à son tour dérivable sur I, alors la fonction $(f')'$ dérivée de f' est définie sur I , cette fonction se note f'' et s'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement, si n est un entier naturel non nul, on définit, si elle existe, la dérivée n-ième de f, en posant par convention, $f^{(0)} = f$ et

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \cdots, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Si la dérivée n-ième de f existe, alors on dit que f est n fois dérivables.

Définition 5.6.1. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable et si la dérivée f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On dit aussi que f est continûment dérivable sur I.

D'une manière générale, on a la définition

Définition 5.6.2. Soit I un intervalle ouvert , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et p un entier supérieur ou égal à 1. Si les dérivées f', f'', $\cdots$, $f^{(p)}$ existent et si $f^{(p)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout entier $n \geq 1$, on dit aussi f est indéfiniment dérivable sur I.

Théorème 5.6.3. *Soient f et g des fonctions n fois dérivables sur Un intervalle I, alors les fonctions $f+g$ et fg sont dérivables sur I et on a :*
— $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
— $(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ *(Formule de Leibniz).*

Démonstration. Le premier point se démontre de manière évidente par récurrence.
Montrons également par récurrence le deuxième point. Si $n = 1$, la formule de Leibniz correspond à la dérivée d'un produit de fonctions : $(fg)' = f'g + fg'$.

On suppose que, si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n sur $\mathbb{R}$, alors le produit fg est dérivable à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ et on a $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}$.

Soit n un entier naturel non nul. Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre $n+1$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc dérivables à l'ordre n sur $\mathbb{R}$ ainsi que leur produit et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Les fonctions f^i et g^{n-i} pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ sont dérivables car les fonctions f et g sont $n+1$ dérivables donc $(fg)^{(n)}$ est dérivable et (fg) est dérivable $n+1$ fois. De plus, on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \left(f^{(i)} g^{(n-i)}\right)' = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i \left(f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n+1-i)}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n+1-i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i f^{(i)} g^{(n+1-i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{C}_n^{i-1} + \mathrm{C}_n^i\right] f^{(i)} g^{(n+1-i)} + f^{(n+1)} + g^{(n+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^i f^{(i)} g^{(n+1-i)}
\end{aligned}$$

On a donc montré le résultat par récurrence.

□

Chapitre 6

Développement limité

6.1 Comportement local des fonctions

Définition 6.1.1. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est dominée par la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h bornée au voisinage de a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x)$$

et

$$\text{il existe } r > 0 \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]a-r, a+r[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]r, +\infty[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a = +\infty$$

$$\text{il existe } r \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } x \in I \cap]-\infty, r[, \quad |h(x)| \leq M \text{ pour } a = -\infty$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$ et on lit $g(x)$ est un grand O de $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 6.1.2 : $x \sin \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} O(x)$, car pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sin \dfrac{1}{x} = x. \sin \dfrac{1}{x}$ et $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$.

Définition 6.1.3. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est négligeable devant la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h de limite nulle en a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to a} h(x) = 0.$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{=} o(f(x))$ et on lit $g(x)$ est un grand o de $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 6.1.4 : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta)$.

On a donc en particulier $1 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$, $x \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^2)$, $x^2 \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(x^3) \ldots$

Proposition 6.1.5. *Soient f, g, h et k des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

— $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h) \Rightarrow f + g \underset{a}{=} o(h)$

— $f \underset{a}{=} o(h)$ *et* $g \underset{a}{=} o(k) \Rightarrow fg \underset{a}{=} o(hk)$

— $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow \lambda f \underset{a}{=} o(g)$

— $f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} o(\lambda g)$

Remarque 6.1.6. En revanche, on n'a la propriété suivante :

$$f = \mathrm{o}(h) \text{ et } g = \mathrm{o}(k) \Rightarrow f + g = \mathrm{o}(h + j)$$

En effet, $x \underset{0}{=} \mathrm{o}(1)$, $x \underset{0}{=} \mathrm{o}(-1)$ mais on n'a pas $2x \underset{0}{=} \mathrm{o}(0)$

Si f, g et h sont des fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, nous noterons $f \underset{a}{=} g + \mathrm{o}(h)$ pour $f - g \underset{a}{=} \mathrm{o}(h)$.

Définition 6.1.7. Soit I un intervalle et $a \in [-\infty, +\infty]$, élément ou extrémité de I . Soit f une fonction définie sur I. On dit qu'une fonction g est équivalente la fonction f au voisinage de a si g est le produit de f par une fonction h de limite 1 en a :

$$\text{pour tout } x \in I, \quad g(x) = f(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} h(x) = 1.$$

On écrit alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$ et on lit $g(x)$ est équivalente à $f(x)$ au voisinage de a.

Exemple 6.1.8 :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$	

Proposition 6.1.9. *Soient f, f', g et g' des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$*

— $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $f' \underset{a}{\sim} g' \Rightarrow ff' \underset{a}{\sim} gg'$

— $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $f \underset{a}{\sim} g' \Rightarrow \frac{f}{f'} \underset{a}{\sim} \frac{g}{g'}$

Proposition 6.1.10.

Soient f et g des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarque 6.1.11. — Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a, elles sont de même signe au voisinage de a.

— Il n'y a pas de règle d'addition pour les équivalents :
$1 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, mais on n'a pas $1 \underset{x \to +\infty}{\sim} 0\ldots$

— Il n'y a pas de règle de composition à gauche pour les équivalents.

6.2 Formule de Taylor

Théorème 6.2.1. *Soit I un intervalle ouvert, a un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ dérivable ($n \in \mathbb{N}$). Alors, pour tout $x \in I$, il existe un réel c compris entre a et x tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{6.1}$$

et il existe un réel d compris entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(d)}{n!}(x-d)^n(x-a) \tag{6.2}$$

La relation (6.1) est appelée formule de Taylor avec reste de Lagrange tandis que la relation (6.2) est appelée formule de Taylor avec reste de Cauchy.

Démonstration. Soit f une fonction $n+1$ dérivable sur I et $a \in I$. On prouve le résultat seulement pour $x > a$, le cas $x < a$ se traitant de la même manière. Considérons la fonction $R\colon [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [a,x]$ par

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!} - f(x).$$

Comme f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,x]$, R est dérivable sur $[a,x]$ et on a pour tout $t \in [a,x]$

$$R'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - kf^{(k)}(x-t)^{k-1}}{k!}$$
$$R'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$R'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!}$$
$$R'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - f'(t)$$
$$R'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}.$$

En appliquant le théorème de la moyenne de Cauchy aux fonctions R et $h\colon t \longmapsto (x-t)^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,x]$, il existe $c \in]a,x[$ tel que

$$\frac{R(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R(x)-R(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{R'(c)}{h'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!} \cdot \frac{-1}{(n+1)(x-c)^n}$$

d'où

$$R(a) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

Par conséquent

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-a)^k}{k!} - f(x)$$

ce qui donne la formule de Taylor avec reste de Lagrange.
Pour montrer a formule de Taylor avec reste de Cauchy, appliquons le théorème des accroissements à R : il existe $d \in]a,x[$ tel que

$$\frac{R(a)}{a-x} = \frac{R(a)-R(x)}{a-x} = R'(d) = \frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}.$$

Donc

$$R(a) = -\frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}(x-a)$$

Par conséquent

$$-\frac{f^{(n+1)}(d)(x-d)^n}{n!}(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-a)^k}{k!} - f(x)$$

ce qui donne la formule de Taylor avec reste de Cauchy. □

On a une autre formule de Taylor dite avec reste intégral,

Théorème 6.2.2. *Soit I un intervalle ouvert, a un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \tag{6.3}$$

Démonstration. On effectue une récurrence sur l'entier n. Si $n = 0$ alors la relation est vraie pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

donc la propriété est vraie.
Supposons que la formule est vraie pour un certain entier naturel n. Soit f une fonction $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I. Comme f estde classe $\mathscr{C}^{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par partie,

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

Théorème 6.2.3 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange (6.1) à l'ordre $n-1$ en a, on obtient : pour tout $x \in I$, il existe un réel compris entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c).$$

Donc

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)\right).$$

Par suite

$$\frac{f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}$$

Comme c est compris entre a et x, lorsque x tend vers a, c tend vers a et comme $f^{(n)}$ est continue en a, il vient que

$$\lim_{x\to a} f^{(n)}(c)=f^{(n)(a)}.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(c)-f^{(n)}(a)}{n!}=0,$$

c'est-à-dire

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\mathrm{o}((x-a)^n).$$

□

6.3 Développements limités

Une application très importante des formules de Taylor est la notion de développement limité. Les développements limités sont un produit de la théorie des comparaisons de fonctions. L'idée sous-jacente est de comparer toute une classe de fonctions à une certaine famille de fonctions fixées. Dans le cadre des développements limités, il s'agira de polynômes. Dit simplement, un développement limité est donc une approximation en un point d'une fonction par un polynôme.

6.3.1 Généralités et exemples

Soit $a\in\mathbb{R}$.

Définition 6.3.1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en au voisinage de a, ou un développement limité à l'ordre n en a (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $n+1$ nombres réels $c_0, \cdots, c_n$ tels qu'au voisinage de a, on ait

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\mathrm{o}((x-a)^n)$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k(x-a)^k=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n$ s'appelle partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a.

La proposition suivante dit qu'une fonction admet au plus un développement limité.

Proposition 6.3.2 (Unicité du développement limité)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe deux $n+1$ uplets de nombres réels $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$ et $(d_0, d_1, \cdots, d_n)$ vérifiant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \quad et \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n),$$

alors $(c_0, c_1, \cdots, c_n) = (d_0, d_1, \cdots, d_n)$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$ et qu'il existe $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $a_k \neq b_k$. Notons p le plus petit entier dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $a_p \neq b_p$. On a donc $a_k = b_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$. Par soustraction des deux développements limités, il vient :

$$0 = (c_p - d_p)(x-a)^p + (c_{p+1} - d_{p+1})(x-a)^{p+1} + \cdots + (c_n - d_n))(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Pour $x \neq a$, en divisant par $(x-a)^p$, il vient,

$$0 = (c_p - d_p) + (c_{p+1} - d_{p+1})x + (c_n - d_n)(x-a)^{p+1} + \cdots + \mathrm{o}((x-a)^{n-p}).$$

En faisant tendre x vers a,on obtient $0 = a_p - b_p$ et par conséquent $a_p = b_p$. Ce qui est absurde. □

La proposition suivante montre que si une fonction f possède un développement limité en un point a à un certain ordre n, on obtient facilement un un développement limité d'ordre $p < n$ en tronquant la partie régulière de ce développement limité à l'ordre p. Tronquer un polynôme à l'ordre p signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq p$.

Proposition 6.3.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet en a à l'odre $n \in \mathbb{N}$ le développement limité*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)),$$

alors f admet en a à l'odre p pour tout $0 \leq p \leq n$ pour développement limité

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^p)).$$

Démonstration. Supposons que f admette le développement limité en a à l'ordre n suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n))$$

. Alors pour tout $k \in \{p+1, \cdots, n\}$, on a $x^k = \mathrm{o}(x^p)$. Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^p)).$$

□

On peut donc intégrer terme à terme un développement limité.

Proposition 6.3.4 (Intégration d'un développement limité). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont le développement limité en $a \in I$ à l'ordre n, ($n \in \mathbb{N}$), est*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Notons F une primitive de f.
Alors F admet un développement limité en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}((x-a)^{n+1}).$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le développement limité de F à la constante $F(a)$ près.

Démonstration. Soit $x \in I$. Comme $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n)$, il existe une fonction ε telle $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. De plus ε est continue sur I. D'où

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt = a_0(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)dt.$$

Notons $\eta(x) = \int_a^x (t-a)^n\varepsilon(t)dt$. Alors η est dérivable sur I et par le théorème des accroissements, il existe un réel c_x compris entre a et x tel que

$$\eta(x) = \eta(x) - \eta(a) = (x-a)\eta'(c_x) = (x-a)(c_x-a)^n\varepsilon(c_x)$$

On a c_x compris entre a et x, donc $|c_x - a| \leq |x-a|$. Par conséquent

$$|\eta(x)| \leq |x-a|^{n+1}|\varepsilon(c_x)|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(c_x) = 0$. Par suite $\lim\limits_{x\to a}\frac{\eta(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$. Ce qui prouve que le développement limité de F.

□

Remarque 6.3.5. Attention, en général il n'ya pas de réciproque au théorème ci-dessus : l'existence d'un développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0 n'entraîne pas forcément l'existence d'un développement limité de sa fonction dérivée f' à l'ordre $n-1$ en 0. Cependant si l'on sait que f' possède un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, alors sa partie régulière peut être obtenue en dérivant la partie régulière du développement limité d'une fonction f à l'ordre n puisque cette dernière en est une primitive.

Exemple 6.3.6 : 1. Toute fonction polynôme admet un développement limité en tout point a et à tout ordre .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

et $\frac{x^{n+1}}{1-x} = \mathrm{o}(x^n)$ donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

est un développement limité en 0 à l'ordre n.

3. Toute fonction continue en a admet un développement limité en a à l'ordre 0 :

$$f(x) = f(a) + \mathrm{o}(1).$$

   En fait une fonction admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue (ou prolongeable par continuité) en a.
4. Toute fonction dérivable en a admet un développement limité en a à l'ordre 1 :

$$f(x) = f(a) + f(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a).$$

   En fait une fonction admet un développement limité en a à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable (ou prolongeable par dérivabilité) en a.
5. En revanche une fonction peut admettre un développement limité en a à l'ordre 2 sans être deux fois dérivable en a :

   En guise d'exemple la fonction $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1+x+x^2+x^3\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ admet pour développement limité en 0 à l'ordre 2, $f(x) = 1+x+x^2+\mathrm{o}(x^2)$ mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 6.3.7 (Propriété de parité)**.** *Soit* $f:]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$ *(*$r>0$*) une fonction ayant en* 0 *pour développement limité à l'ordre n :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

— *Si la fonction f est paire, alors n'y figurent dans le dévéloppement limité, avec des coefficients non nuls, que les termes d'exposant pair.*
— *Si la fonction f est impaire, alors n'y figurent dans le dévéloppement limité, avec des coefficients non nuls, que les termes d'exposant impair.*

Démonstration. Lorsque f est paire, on a pour tout $x \in]-r,r[$, $f(x) = f(-x)$. Donc

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n) &= a_0 + a_1(-x) + \cdots + a_n(-x)^n + \mathrm{o}(x^n) \\ &= a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^x + \mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $a_k = (-1)^k a_k$. Ce qui prouve que les coefficient a_k avec impaire sont nuls.
On raisonne de même pour les fonctions impaires. □

6.3.2 Développements limités en $\pm\infty$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 6.3.8. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Définition 6.3.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]-\infty, x_0[$. On dit que f admet un développement limité en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 6.3.10 : la fonction $f\colon x \to \dfrac{x}{1+x}$ est définie au voisinage de $\pm\infty$ et por tout $x \neq -1$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k + \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{x}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k + \left(\frac{1}{x}\right)^n . \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \\
\frac{x}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^k + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).
\end{aligned}$$

Remarque 6.3.11. 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un élément ou une borne de I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre n si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

2. Soit f une fonction définie définie au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). La fonction f admet un développement limité en $+\infty$ (ou en $-\infty$) à l'ordre n si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(\frac{1}{x})$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n.

Pour ces raisons, dans les énoncés qui suivent, nous formulons les résultats pour les développements limités en 0 ; il est très facile de les appliquer aux développements limités en un point a quelconque ou en $\pm\infty$.

6.3.3 Développements limités usuels en 0

En appliquons la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles, dont il est facile de calculer les dérivées successives on obtient leurs développements limités.

Exponentielle

$\exp\colon x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée n$^{\text{ème}}$ est elle-même. D'après Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre n en 0 :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{6.4}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \tag{6.5}$$

De même, les fonctions ch: $x \longmapsto \text{ch}(x)$ et sh: $x \longmapsto \text{sh}(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; et pour tout entier n, on a $\text{ch}^{(2n)} = \text{sh}$, $\text{ch}^{(2n+1)} = \text{ch}$ et $\text{sh}^{(2n)} = \text{ch}$, $\text{sh}^{(2n+1)} = \text{sh}$. Ce qui permet d'obtenir :

$$\text{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \text{o}(x^{2n+1}) \tag{6.6}$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \text{o}(x^{2n+1}) \tag{6.7}$$

$$\text{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \text{o}(x^{2n+2}) \tag{6.8}$$
$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \text{o}(x^{2n+2}) \tag{6.9}$$

Fonction logarithme

La fonction $f: x \longmapsto \ln(x+1)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty$, et admettent donc un développement limité à tout ordre en 0. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq -1$, la dérivée n$^{\text{ème}}$ est $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. D'où $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Par conséquent :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \text{o}(x^n) \tag{6.10}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \text{o}(x^n) \tag{6.11}$$

Fonctions trigonométriques

cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et admettent donc un développement limité à tout ordre en 0.

Par ailleurs pour tout entier n et pour tout réel x, on a $\cos^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ et $\sin^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$. Donc

$$\cos^{(2n)}(0) = 0,\ \cos^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,\ \sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \text{ et } \sin^{(2n+1)}(0) = 0$$

D'où :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \text{o}(x^{2n+1}) \tag{6.12}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \text{o}(x^{2n+1}) \tag{6.13}$$

De même,

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \text{o}(x^{2n+2}) \tag{6.14}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \text{o}(x^{2n+2}) \tag{6.15}$$

Fonctions Puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]-1,+\infty[$. La dérivée $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ en tout $x \in]-1,+\infty[$ est $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n)\end{aligned} \tag{6.16}$$

On obtient pour tout n**, respectivement pour** $\alpha = 1/2$**,** $\alpha = -1/2$**,** $\alpha = -1$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{6.17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{6.18}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \tag{6.19}$$

Liste de développements limités en 0 usuels à connaître

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{6.20}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{6.21}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{6.22}$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8) \tag{6.23}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{6.24}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{6.25}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8) \tag{6.26}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{6.27}$$

(6.28)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{6.29}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n) \tag{6.30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n) \tag{6.31}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{6.32}$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{6.33}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{6.34}$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{6.35}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{6.36}$$

6.4 Opérations sur les développements limités

6.4.1 Développement limité d'une somme ou produit de fonctions

Proposition 6.4.1. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x) + \mathrm{o}(x^n) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

— *$f+g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + \cdots + (c_n+d_n)x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

— *$f \times g$ admet un développement limité en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f \cdot g)(x) = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le polynôme $P(x) \cdot Q(x)$ tronqué à l'ordre n.

Exemple 6.4.2 : Calculer le développement limité de $\cos x \cdot \sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2. On donne les développements limités en 0 à l'ordre 2 de $\cos x$ et $\sqrt{1+x}$: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$ et

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \sqrt{1+x} &= \left(1-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)\\
\cos x \cdot \sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)
\end{aligned}$$

6.4.2 Développement limité d'une composition de fonctions

Proposition 6.4.3. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en* 0 *à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x)+\mathrm{o}(x^n) = c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x)+\mathrm{o}(x^n) = d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+\mathrm{o}(x^n)$$

Si $g(0)=0$ (c'est-à-dire $d_0=0$) alors la fonction $f\circ g$ admet un développement limité en 0 *à l'ordre n qui est :*

$$(f\circ g)(x) = T_n(x)+\mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $P(Q(x))$.

Exemple 6.4.4 : Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\sqrt{\cos x}$.

On donne le développements limité en 0 à l'ordre 4 de $\cos x$:

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4).$$

Donc $\sqrt{\cos x} = \sqrt{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)} = \sqrt{1+u}$ où $u = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$. On voit que lorsque x tend vers 0, u tend vers 0, donc $\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\mathrm{o}(u^2)$. Or $u = -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$, donc $u^2 = \frac{1}{4}x^4+o(x^4)$ et $\mathrm{o}(u^2) = \mathrm{o}(x^4)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos x} = \sqrt{1+u} &= 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\mathrm{o}(u^2)\\
&= 1+\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4\big)-\frac{1}{8}\big(\frac{1}{4}x^4\big)+\mathrm{o}(x^4)\\
&= 1-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{32}x^4+\mathrm{o}(x^4)\\
\sqrt{\cos x} &= 1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+\mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

6.4.3 Développement limité d'un quotient de fonctions

Proposition 6.4.5. *On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des développements limités en* 0 *à l'ordre n :*

$$f(x) = P(x)+\mathrm{o}(x^n) = c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\mathrm{o}(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^n) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Si $g(0) \neq 0$ (c'est-à-dire $d_0 \neq 0$) alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n qui est :

$$\frac{f}{g}(x) = T_n(x) + \mathrm{o}(x^n)$$

où $T_n(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $P(x)$ par $Q(x)$ à l'ordre n.

Exemple 6.4.6 : Déterminer le développement limité de

$$f(x) = \ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right).$$

à l'ordre 3 au voisinage de 0.

On a les développements limités

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \\ 1+\sin(x) &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

La division suivant les puissances croissantes de $1 - \dfrac{x^2}{2}$ par $1 + x - \dfrac{x^3}{6}$ nous donne

$$\begin{array}{r|l} 1 - \dfrac{x^2}{2} & 1 + x - \dfrac{x^3}{6} \\ \cline{2-2} -1 - x + \dfrac{x^3}{6} & 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} \\ \cline{1-1} -x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} & \\ x + x^2 - \dfrac{x^4}{6} & \\ \cline{1-1} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{6} & \\ -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{12} & \\ \cline{1-1} -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^5}{12} & \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x^6}{18} & \\ \cline{1-1} \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^5}{12} - \dfrac{x^6}{18} & \end{array}$$

Par conséquent, le développement limité de $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).$$

Posons maintenant $t = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$. Lorsque x tend vers 0, t tend vers 0, donc

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}(t^3)$$

Or $t = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$, $t^2 = x^2 - x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ et $t^3 = -x^3 + \mathrm{o}(x^3)$, donc

$$\ln\left(\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\right) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}(x^2 - x^3) - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3) = -x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

6.5 Applications des développements limités

6.5.1 Calcul de limites

Quand une limite se présente sous forme indéterminée, un développement limité permet le plus souvent de lever l'indétermination. Cette section sera traitée sous forme d'exercices.

***Exercice* 6.5.1 :** *Calculer* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$.

Faisons un développement limité à l'ordre 2 *de* $\ln(1+x)$ *:* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. *Donc*

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)}.$$

Posons $X = -\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$. *Lorsque x tend vers* 0*, X tend vers* 0*, donc*

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + \mathrm{o}(X) = 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x).$$

Par conséquent $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$. *D'où* $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$. *Ainsi, on obtient*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.$$

***Exercice* 6.5.2 :** *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right)$.

Posons $t = \frac{1}{x}$ *; on a* $\frac{1}{1+x} = \frac{t}{1+t}$ *et quand x tend vers $+\infty$, t tend vers* 0^+. *Donc*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right).$$

Faisons un développement limité à l'ordre 2 *de* $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}$. *On a :*

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$$
$$\frac{t}{1+t} = t\frac{1}{1+t} = t(1 - t + \mathrm{o}(t)) = t - t^2 + \mathrm{o}(t^2)$$

Posons $X = t - t^2 + \mathrm{o}(t^2)$. Lorsque t tend vers 0, X tend vers 0, donc

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}} = \mathrm{e}^{t-t^2+\mathrm{o}(t^2)} = \mathrm{e}^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \mathrm{o}(X^2).$$

On a $X = t - t^2 + \mathrm{o}(t^2)$, $X^2 = t^2 + \mathrm{o}(t^2)$ et $\mathrm{o}(X^2) = \mathrm{o}(t^2)$. D'où

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}} = 1 + t - t^2 + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2) = 1 + t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2).$$

Finalement $\frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right) = \frac{1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} - 1 - t + \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)\right) = 1 + \mathrm{o}(1)$. *Par suite,* $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\frac{t}{1+t}}\right) = 1$ *et donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}\right) = 1$.

Exercice 6.5.3 : *Calculer Calculer* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

On a le développement limité d'ordre 3 en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$. *D'où*

$$\frac{sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2).$$

En posant $X = 1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)$, *on a X tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et*

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \mathrm{o}(X^2).$$

Comme $X = -\frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)$ *et* $X^2 = \mathrm{o}(x^2)$ *nous obtenons*

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} - \mathrm{o}(x^2) = -\frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2).$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}\,.$$

6.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 6.5.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité en a : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^k)$, où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de $c_k(x-a)^k$.*

Il y a 3 cas possibles.
— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.
— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.
— Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un point d'inflexion.

Exemple 6.5.2 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

1. Déterminons la tangente en $\frac{1}{2}$ du graphe de f et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.
   Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a pour tout réel x, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, donc $f''(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et $k = 2$.
   De la formule de Taylor-Young, on détermine le développement limité de f en $\frac{1}{2}$ à l'ordre 2 :
   $$f(x) = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + \mathrm{o}((x - \frac{1}{2})^2).$$
   Donc la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$ et le graphe de f est en dessous de la tangente car $-\frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2$ est négatif au voisanage de $x = \frac{1}{2}$.
2. Déterminons les points d'inflexion.
   Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de $f''(x) = 0$. Les points candidats sont donc $x = 0$ et $x = 1$.
   — Le développement limité en 0 est $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 1$ (une tangente horizontale). Comme $-2x^3$ change de signe en 0 alors 0 est un point d'inflexion de f (ici $k = 3$).
   — Le développement limité en 1 est : $f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4 + \mathrm{o}((x-1)^4)$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc $y = -2(x-1)$. Comme $2(x-1)^3$ change de signe en 1, 1 est aussi un point d'inflexion de f.

6.5.3 Position d'une courbe par rapport à une asymptote oblique

Proposition 6.5.3. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un développement limité en $+\infty$ (ou en $-\infty$) :*
$$\frac{f(x)}{x} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^k}\right),$$
où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient de $\frac{1}{x^k}$ soit non nul.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (c_0x + c_1)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (c_0x + c_1)] = 0$) et la droite d'équation $y = c_0x + c_1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $\frac{c_k}{x^{k-1}}$.

Exemple 6.5.4 : Considérons la fonction définie pour tout $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $f(x) = \exp\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$. Déterminons les éventuelles asymptotes ainsi la position relatives de ces asymptotes par rapport à la courbe.

Au voisinage de $\pm\infty$, on a
$$\frac{f(x)}{x} = \exp\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$
Posons $t = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $\pm\infty$, t tend vers 0, et on a

1. Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \exp\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}^t\sqrt{1-t^2} \\ &= \left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\mathrm{o}(t^3)\right)\left(1-\frac{1}{2}t^2+\mathrm{o}(t^3)\right) \\ &= 1+t-\frac{1}{3}t^3+\mathrm{o}(t^3) \\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

   On obtient au voisinage de $+\infty$, $f(x) = x+1-\frac{1}{3}x^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Donc l'asymptote de f en $+\infty$ est la droite d'équation $y = x+1$. Comme $f(x)-x-1 = -\frac{1}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x\to+\infty$, le graphe de f reste en dessous de l'asymptote.
2. Au voisinage de $-\infty$. $\frac{f(x)}{x} = \exp\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\exp\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$. On déduit du cas précédent,

$$f(x) = -x-1+\frac{1}{3}x^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   Donc $y = -x-1$ est une asymptote de f en $-\infty$.
   On a $f(x)+x+1 = \frac{1}{3x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $x\to-\infty$; le graphe de f reste au-dessus de l'asymptote.

Chapitre 7

Nombres complexes

7.1 Construction de $\mathbb{C}$

7.1.1 Définition des lois de composition internes de $\mathbb{R}^2$

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples (a,b) tels que $a,b \in \mathbb{R}$. On définit deux lois de composition interne sur $\mathbb{R}^2$.

— Une addition $+$ par $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \tag{7.1}$$

— Une multiplication $\times$ par $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b)\times(c,d) = (ac-bd, ad+bc) \tag{7.2}$$

Propriétés

La proposition 7.1.1 ci-dessous traduit le fait que le couple $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$ est un groupe commutatif.

Proposition 7.1.1. — *L'addition $+$ est associative : $\forall (a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,*

$$(a,b)+\left(\left(a',b'\right)+\left(a'',b''\right)\right) = \left((a,b)+\left(a',b'\right)\right)+\left(a'',b''\right).$$

— *L'addition $+$ possède un élément neutre qui est $(0,0)$: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,*

$$(0,0)+(a,b) = (a,b)+(0,0) = (a,b).$$

— *Tout élément de $\mathbb{R}^2$ possède un inverse par l'addition $+$ appelé son opposé. L'opposé du couple (a,b) est $(-a,-b)$.*

— *L'addition $+$ est commutative : $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$,*

$$(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$$

La proposition 7.1.1 combinée à la proposition 7.1.2 ci-dessous traduitt que le triplet $\left(\mathbb{R}^2,+,\times\right)$ est un corps commutatif.

Proposition 7.1.2. — *La multiplication $\times$ est associative : $\forall (a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,*

$$(a,b)\times\left(\left(a',b'\right)\times\left(a'',b''\right)\right) = \left((a,b)\times\left(a',b'\right)\right)\times\left(a'',b''\right).$$

— *La multiplication* $\times$ *possède un élément neutre qui est* $(1,0)$ *:* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(1,0) \times (a,b) = (a,b) \times (0,1) = (a,b).$$

— *La multiplication* $\times$ *est commutative :* $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \times (c,d) = (c,d) \times (a,b)$$

— *Tout élément* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *possède pour la multiplication*$\times$. *L'inverse de* (a,b) *est*

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

— *La multiplication* $\times$ *est distributive par rapport à l'addition* $+$ *:* $\forall (a,b), (a',b'), (a'',b'') \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) \times \left[\left((a',b') + (a'',b'')\right)\right] = \left((a,b) \times (a',b')\right) + \left((a,b) \times (a'',b'')\right).$$

Définition 7.1.3. On appelle ensemble des nombres complexes et on le note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on munit des deux lois de composition interne l'addition et la multiplication définies ci-dessus. Un élément $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ est appelé nombre complexe.
On conviendra des notations suivantes :
— $\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$.
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, le produit $z_1 \times z_2$ s'écrit aussi $z_1 z_2$.
— Pour $z \in \mathbb{C}$, $-z$ désigne l'opposé de z. De plus pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on note $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.
— Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{1}{z}$ désigne l'inverse de z. De plus pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on note $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.

Propriété 7.1.4. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes.*

$$z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0.$$

Démonstration. Si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ alors naturellement $z_1 z_2 = 0$. Réciproquement, suppososns que $z_1 z_2 = 0$. Si l'un des complexes z_1 ou z_2 est non nul disons par exemple $z_1 \neq 0$ alors $z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot z_1 z_2 = \frac{1}{z_1} \cdot 0 = 0$. □

Notation algébrique

L'ensemble des nombres complexes de la forme $(x,0)$ est un « sous-corps » de $\mathbb{C}$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}$. C'est pourquoi désormais on identifie $\mathbb{R}$ au sous-corps $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ par l'isomorphisme $x \longmapsto (x,0)$, ce qui revient à considérer $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{C}$. Par conséquent, tout nombre réel x sera noté $(x,0)$: $x = (x,0)$. Remarquons en plus que l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ se prolonge respectivement à l'addition et à la multiplication de $\mathbb{C}$, dans le sens où : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,0) + (y,0) = (x+y,0)$$
$$(x,0) \times (y,0) = (xy,0).$$

Pour finir si on note $i = (0,1)$ alors $i^2 = i \times i = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1$ et pour tout réel y, $iy = (0,1) \times (y,0) = (0,y)$. De sorte que tout nombre complexe $z = (x,y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned} z &= (x,y) \\ &= (x,0) + (0,y) \\ z &= x + iy. \end{aligned}$$

Définition 7.1.5. L'écriture du nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ du nombre complexe z est dite algébrique, et
— le réel x est la partie réelle de z et se note $\mathrm{Re}\,(z)$;
— le réel y est la partie imaginaire de z et se note $\mathrm{Im}\,(z)$.

Remarque 7.1.6. On peut écrire de qui précède que $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Définition 7.1.7. Un complexe z est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des complexes de la forme iy où $y \in \mathbb{R}$.

Il est facile de prouver la propriété

Remarque 7.1.8. (a) Deux nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.
(b) Un complexe z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
(c) Un complexe z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Propriété 7.1.9. *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.*
(i) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$ *et* $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$.
(ii) $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)$ *et* $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\mathrm{Re}(z_1)$.

Démonstration. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes d'écritures algébriques $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Par définition de l'addition 7.1 et de la multiplication 7.2 dans $\mathbb{C}$, on a

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

et

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

□

7.1.2 Règles de calcul

Les calculs algébriques élémentaires sur les nombres complexes s'effectuent exactement comme les calculs sur les nombres reels en remplaçant i^2 par -1.

Ainsi, comme pour les nombres réels, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on notera respectivement $z+z$, $z+z+z$ par $2z$, $3z$ et d'une manière générale si $n \in \mathbb{N}^*$, $z + \cdots + z = nz$ où z apparait n fois dans la somme $z + \cdots + z$.
On définit la nième puissance z^n de z comme étant le produit $z \cdots z$ de z avec lui-même pris n fois. De plus, si $z \neq 0$, alors on pose $z^0 = 1$ et $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$. Il est facile de voir que pour tous nombres complexes non nuls z, z_1 et z_2 et pour tous entiers rélatifs m et n,

(i) $z^m z^n = z^{m+n}$ et $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$.

(ii) $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ et $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n}$.

Aussi, étant donné n nombres nombres complexes $z_1, \cdots, z_n$, on note la somme des z_i pour i allant de p à n par

$$z_1 + \cdots + z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i,$$

et le produit des z_i pour i allant de p à n par

$$z_1 \cdots z_n = \prod_{i=1}^{n} z_i.$$

Formule du binôme de Newton

Proposition 7.1.10. *Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z_1^k z_2^{n-k}.$$

Démonstration. La preuve reprend trait pour trait la preuve de la formule du binôme de Newton dans le cas des nombres réels (voir le théorème2.2.25) □

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison z

Proposition 7.1.11. *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} & si\ z \neq 1 \\ n+1 & si\ z = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$. On a

$$\begin{aligned} zS_n(z) &= z \times \sum_{k=0}^{n} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} z^k \\ zS_n(z) &= S_n(z) - 1 + z^{n+1} \end{aligned}$$

D'où

$$(z-1)S_n(z) = z^{n+1} - 1$$

Donc si $z \neq 1$, $S_n(z) = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Pour $z = 1$, de façon triviale $S_n(1) = n+1$. □

Factorisations

Proposition 7.1.12. *Pour tous nombres complexes a et b, et pour tout entier naturel non nul n, on a*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$. Si $a = b$ alors l'égalité est trivialement vérifiée. L'égalité est vraie $b = 0$, en effet, $a^n - 0^n = a^n$ et $(a-o)\sum_{k=0}^{n-1} a^k 0^{n-1-k} = a \cdot a^{n-1} = a^n$ car $0^{n-1-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n-1 \\ 0 & \text{si } k \neq n-1 \end{cases}$.

Supposons que $a \neq b$ et $b \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= b^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right) \\ &= b^n \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= b^{n-1}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{-k} \\ a^n - b^n &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \end{aligned}$$

□

Par exemple, en prenant $n = 2$ et $n = 3$, on obtient respectivement

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ et } a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

7.2 Conjugué, module, argument, interprétation géométrique

7.2.1 Conjugué

Définition 7.2.1. On appelle conjugué d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Propriété 7.2.2. *Soit $z \in C$.*

(1) $z = \overline{z}$ *si et seulement si* $z \in \mathbb{R}$,

(2) $z = \overline{\overline{z}}$,

(3) $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$,

(4) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

(5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *et* $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

(6) de plus si $z_2 \neq 0$, alors $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ *et en particulier* $\overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$.
Prouvons (1) :

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \\ z = \overline{z} &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) : $\overline{\overline{z}} = \overline{\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z$.
(3) : $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)^2 - (i\mathrm{Im}(z))^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.
(4) : On a $z + \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{Im}(z)$. Ce qui prouve (4).
(5) : Pour tous complexes z_1 et z_2,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{\mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2)} \\ &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + i(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))} \\ &= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) - i(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)) \\ &= \mathrm{Re}(z_1) - i\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) - i\mathrm{Im}(z_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1))(\mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2))} \\ &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)) + i(\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\mathrm{Re}(z_1))} \\ &= (\mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)) - i(\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)\mathrm{Re}(z_1)) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) - (-\mathrm{Im}(z_1))(-\mathrm{Im}(z_2))) + i((-\mathrm{Im}(z_1))\mathrm{Re}(z_2) + (-\mathrm{Im}(z_2))\mathrm{Re}(z_1)) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) - i\mathrm{Im}(z_1))(\mathrm{Re}(z_2) - i\mathrm{Im}(z_2)) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

(6) : Supposons que $z_2 \neq 0$. Comme $z_2 \cdot \dfrac{1}{z_2} = 1$, de (5), $\overline{z_2} \cdot \overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = 1$, donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_2}}$. D'autre part $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1 \dfrac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \dfrac{1}{\overline{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ □

Remarque 7.2.3. Une simple récurrence appliquée aux relations (5) et (6) permet d'obtenir les propriétés suivantes :

(7) Pour tout entier naturel n et tout complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

(8) Pour tout entier naturel non nul, si $z_1, \cdots, z_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \text{ et } \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$$

7.2.2 Module

Définition 7.2.4. Le module d'un nombre complexe z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Propriété 7.2.5. *Pour tout nombre complexe z,*

(1) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *et* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$,
(2) $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.
(3) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$,
(4) $z\overline{z} = |z|^2$.
Pour tous nombres complexes z_1 *et* z_2,
(5) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$,
(6) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ *(Inégalité triangulaire), et* $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2|$,
(7) *si en plus* $z_2 \neq 0$, *alors* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. *En particuler* $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$.

Démonstration. Les propositions (1) à (4) étant faciles à établir sont laissées en exercice. Soient z_1 et z_2 des nombres complexes.
(5) : on a $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{z_1z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2$ et comme le module d'un complexe est toujours positif, donc $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.
(6) : on a $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2$.
Donc $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$, or $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2$, d'où

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2 + |z_2|^2 \\ &(|z_1|+|z_2|)^2 \\ |z_1+z_2| &\leq |z_1|+|z_2|. \end{aligned}$$

Prouvons maintenant la deuxième inégalité : $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2|$. D'après l'inégalité triangulaire démontrée ci-dessus, $|z_1| = |z_1+z_2-z_2| \leq |z_1+z_2| + |-z_2|$ donc $|z_1|-|z_2| \leq |z_1+z_2|$. De même, $|z_2|-|z_1| \leqslant |z_2+z_1|$. Ce qui prouve que

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2|.$$

(7) : Supposons que $z_2 \neq 0$.
Comme $z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = 1$, d'après (5), $|z_2| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = 1$, donc $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$. Finalement,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

□

Remarque 7.2.6. La proposition (5) permet de déduire que :
(8) Pour tout entier naturel n et tout complexe z, $|z^n| = |z|^n$.
(9) Pour tout entier naturel non nul, si $z_1,\cdots,z_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|.$$

L'inégalité triangulaire se généralise comme suit : pour tout entier naturel n non nul, si $z_1,\cdots,z_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

7.2.3 Notation exponentielle

Définition 7.2.7. On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Propriété 7.2.8. • *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$ et*

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2k\pi.$$

• *Pour tous nombres réels θ et θ', $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ et $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.*

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $|\mathrm{e}^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i\theta} = 1 &\Leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \\
\mathrm{e}^{i\theta} = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2k\pi,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} &= \cos\theta - i\sin\theta \\
&= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\
&= \mathrm{e}^{-i\theta}.
\end{aligned}$$

Enfin comme $1 = |\mathrm{e}^{i\theta}|^2 = \mathrm{e}^{i\theta}\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta}$, donc $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$.

Pour tous réels θ et θ', on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\
&= \left[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')\right] + i\left[\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\right] \\
&= \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]\left[\cos(\theta') + i\sin(\theta')\right] \\
\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} &= \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'}
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta'} = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}.$$

□

Remarque 7.2.9 (Formules d'Euler). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $cos\theta$ et $\sin\theta$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{i\theta}$, d'où

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 7.2.10 (Formule de Moivre)**.** *On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous allons prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Comme $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{i0\theta} = 1$, on a bien $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^0 = \mathrm{e}^{i0\theta}$.
Supposons que pour un certain entier naturel n, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$ et montrons que $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} &= \mathrm{e}^{i(n\theta+\theta)} \\
&= \mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{i\theta} \\
&= \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n \mathrm{e}^{i\theta} \\
\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} &= \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Prouvons maintenant ce résultat pour $n \in \mathbb{Z}$. Si n est un entier négatif alors $-n \in \mathbb{N}$ et on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{-n} &= \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}\right)^n \\
&= \left(\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{-in\theta} \\
&= \mathrm{e}^{i(-n)\theta}.
\end{aligned}$$

En conclusion pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$. □

Définition 7.2.11. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$.

Théorème 7.2.12. *On a*

$$\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$ donc $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Réciproquement, soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ un nombre complexe de module 1. Comme $x^2 + y^2 = 1$, il existe $\theta \in \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, donc $z = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{e}^{i\theta}$. On conclut que $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\right\}$. □

Remarque 7.2.13 (Exponentielle complexe). Plus généralement, on peut étendre à $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle définie sur l'enemble $\mathbb{R}$: on appelle exponentielle complexe l'application définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui à complexe $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, associe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Il est facile de voir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$.

Argument et écriture trigonométrique des nombres complexes

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Définition 7.2.14. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelé un argument du nombre complexe z, on le note $\arg(z)$ tandis que l'écriture $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z.

Remarque 7.2.15. Soit z un nombre complexe non nul z. Si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en est un autre argument.

La relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$, pour tous réels θ et θ' permet d'obtenir aisement la propriété :

Propriété 7.2.16. *Soient z et z' des nombres complexes non nuls et n un entier relatif. Alors :*

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$$
$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$$

Notation : Pour tous nombres complexe z et z' et pour tout réel p, on note $z \equiv z'[p]$ et on lit z est congru à z' modulo p lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + kp$.

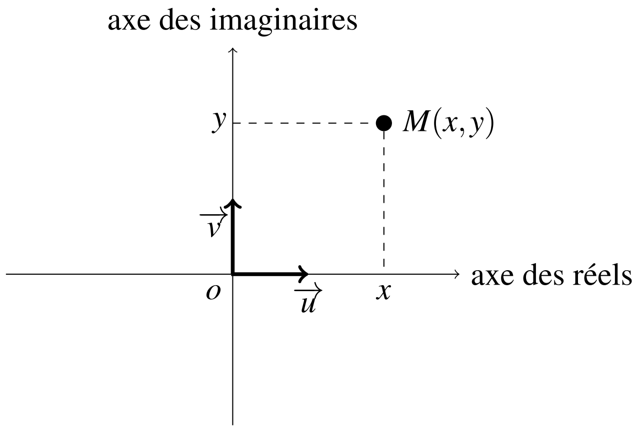
Exercice* 7.2.1 *: *Montrer que deux nombres non nuls z et z' sont égaux si et seulement si*

$$|z| = |z'| \quad \textit{et} \quad \arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi].$$

7.2.4 Interprétation géométrique des nombres complexes

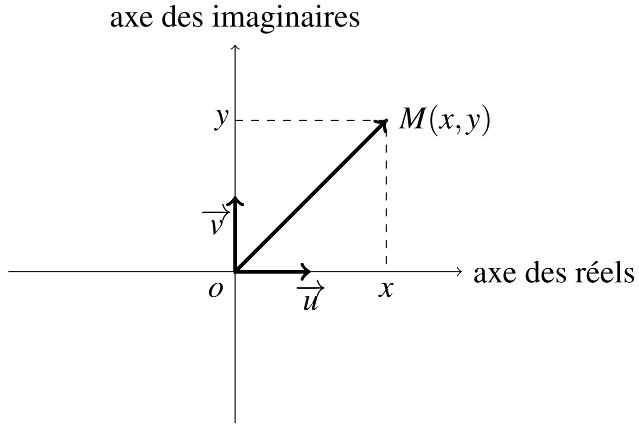
Plan complexe

De même que l'ensemble des nombres réels est représenté par une droite orientée, l'ensemble des nombres complexes admet une représentation graphique naturelle dans le plan muni d'un repère $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et où le nombre $z = x + iy$ (x et y sont des réels) est représenté par le point M de coordonnées (x, y). Ce plan muni d'une telle correspondance est appelé plan complexe, l'axe $(0, \overrightarrow{u})$ est l'axe des réels et l'axe $(0, \overrightarrow{v})$ est l'axe des imaginaires.



Le point M est appelé image de z, et réciproquement z est appelé affixe de M. On note souvent l'affixe de M, z_M pour éviter les confusion.

D'un autre côté, on peut identifier le nombre complexe d'écriture algébrique $z = x + iy$ par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ où $M(x, y)$ est l'image de z.



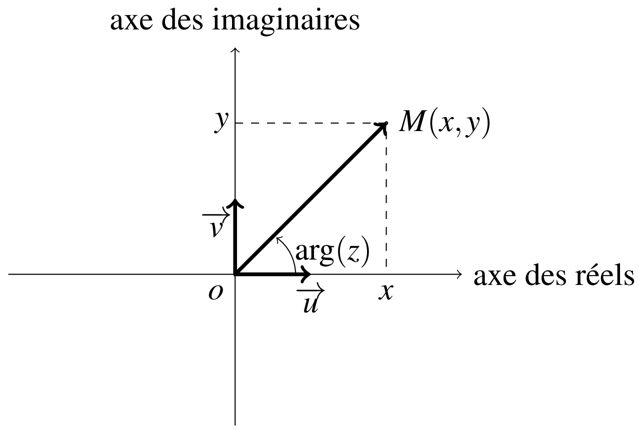
Si M et M' sont deux points d'affixes z et z', on appelle aussi affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ le nombre complexe $z' - z$.

Interprétation du module

Soit z le nombre conplexe d'écriture algébrique $z = x + iy$ et $M(x,y)$ son image dans le plan complexe. Alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Interprétation de l'argument

Soit z le nombre conplexe non nul d'écriture algébrique $z = x + iy$ et $M(x,y)$ son image dans le plan complexe. Alors l'argument de z est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$ c'est-à-dire $\arg(z) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.



7.3 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

7.3.1 Racines n-èmes d'un nombre complexe

Définition 7.3.1. Soient $z, \omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que ω est une racine n-ième de z lorsque

$$\omega^n = z.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on désigne par $\mathscr{R}_n(z)$ l'ensemble des racines n-ièmes de z.
Les racines n-èmes de 1 sont encore appelées racines n-èmes de l'unité.

Il est aisé de voir que $\mathscr{R}_n(0) = \{0\}$.

Théorème 7.3.2. *Soit z un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre complexe admet exactement n racines.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $z \in \mathbb{C}^*$, on l'écrit sous la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$). D'autre part, si ω est une racine n-ième de z, alors $\omega \neq 0$. Par conséquent, on peut écrire ω sous la forme $\omega = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et φ un argument de ω, d'où

$$\begin{aligned}
\omega^n = z &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\varphi \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}/n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \exists k \in \mathbb{Z}/\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\
\omega^n = z &\Leftrightarrow \omega = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{R}_n(z) = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Montrons que $\mathscr{R}_n(z)$ est un ensemble fini composé de n éléments.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par la division euclidienne de k par n, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r \leq n-1$ tels que $k = nq + r$. On a

$$\begin{aligned}
k = nq + r \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{k}{n} = q + \frac{r}{n} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi k}{n} = 2\pi q + \frac{2\pi r}{n}.
\end{aligned}$$

Donc $e^{i\frac{2\pi k}{n}} = e^{i\frac{2\pi r}{n}}$, car pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $e^{i2\pi q} = 1$. Par conséquent,

$$\mathscr{R}_n(z) \subset \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2p\pi}{n}\right)} | p \in \{0 \cdots, n-1\} \right\}$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a

$$\mathscr{R}_n(z) = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2p\pi}{n}\right)} | p \in \{0, \cdots, n-1\} \right\}.$$

Soient $k, l \in \{0, \cdots n-1\}$ avec $0 \leqslant k < l \leqslant n-1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi l}{n}\right)} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{Z}/\frac{2\pi l}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi m \\
&\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{Z}/\frac{l-k}{n} = m.
\end{aligned}$$

Comme $1 \leqslant l - k \leqslant n-1$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{l-k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. Ce qui prouve que $\frac{l-k}{n} \notin \mathbb{Z}$, par conséquent, les complexes

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}, \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}, \ldots, \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$$

sont tous distincts donc l'ensemble $\mathscr{R}_n(z)$ défini par

$$\mathscr{R}_n(z) = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2p\pi}{n}\right)} | p \in \{0, \cdots, n-1\} \right\}$$

est fini et de cardinal n.

$\square$

Corollaire 7.3.3. *Soit n un entier naturel non nul. Les n racines n-èmes de l'unité sont*

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \; ; \; k \in \{0, \cdots, n-1\}.$$

La preuve est évidente car $1 = e^{i0}$. On note $\mathbb{U}_n = \mathscr{R}_n(1)$.

Exemple 7.3.4 : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$.

Remarque 7.3.5. Dans le plan complexe, les images des n racines n-èmes d'un nombre complexe non nul z sont les sommets d'un polygone régulier inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|z|}$. Prouvons le :
Pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, posons M_k l'image de la racine n-ème $z_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$. Comme $OM_k = |z_k| = \sqrt[n]{|z|}$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, donc M_k est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|z|}$. D'un autre côté, pour tout $k \in \{0, \cdots, n-2\}$, la mesure de l'arc $\widehat{M_k M_{k+1}}$ est égal à

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{\theta}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

et mesure de l'arc $\widehat{M_{n-1} M_0}$ est égal à

$$2\pi - (n-1)\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Comme tous les arcs $\widehat{M_0 M_1}$, $\widehat{M_1 M_2}$, $\cdots$, $\widehat{M_{n-1} M_0}$ sont égaux, donc le polygone $M_0 M_1 \cdots M_{n-1}$ est régulier.

***Exercice* 7.3.1 :** *Déterminer les racines cubique (troisième) de $z = 1 + i$ puis les représenter dans le plan complexe.*

Comme $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)$, les 3 racines cubiques de $1+i$ sont :

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right) \; ; \; z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ et } z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Si M_0, M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectifs z_0, z_1 et z_2 alors le triangle $M_0 M_1 M_3$ est équilateral comme le montre la figure ci-dessous.

Remarque 7.3.6. 1. Si on note $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors l'ensemble des racines n-èmes de l'unité est

$$\mathbb{U}_n = \mathscr{R}_n(1) = \{1, \omega_1, \omega_1^2, \omega_1^{n-1}\}.$$

2. Inversement, si z_0 est une racine n-ème d'un nombre complexe non nul z, alors on les obtient toutes par $z_k = \omega_k z_0$, $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. En d'autres termes on obtient donc les racines n-èmes de z en multipliant l'une d'elles par les racines n-èmes de 1.

7.3.2 Équations du second degré

Théorème 7.3.7. *Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et considérons l'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0.$$

— *Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est non nul alors l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ qui sont*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée du discriminant Δ. Dans ce cas pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2).$$

— *Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul alors l'équation admet une solution unique dans $\mathbb{C}$ qui est*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Dans ce cas pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a(z-z_0)^2.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est non nul et δ est une racine carrée de Δ alors

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b-\delta}{2a}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'équation admet deux racines distinctes et il est facile de voir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)$.

Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul alors

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

L'équation admet donc une solution unique et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$. $\square$

Pour déterminer la racine carrée d'un nombre complexe non nul, on peut utiliser la méthode exposée dans la section 7.3.1. Cependant pour obtenir une forme algébrique rapidement d'une racine carrée, on procède comme suit :

cherchons les racines carrées de $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ sous la forme $\delta = c + id \in \mathbb{C}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$. on a

$$\begin{aligned} \delta^2 = z \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta^2 = z \\ |\delta^2| = |z| \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c^2 - d^2 + 2icd = a + ib \\ c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c^2 - d^2 = a & (1) \\ c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (2) \\ 2cd = b & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Ensuite,

— En sommant les relations $(1) + (2)$, on obtient $c^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$;

— En sotrayant la relation (1) dans la relation (2), on obtient donne $d^2 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$;

— Comme la relation (3) donne le signe de cd, donc on peut déterminer les deux couples (c, d) solutions.

Exemple 7.3.8 : Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (4i - 3)^2 - 4i(i - 5) = -3 - 4i.$$

On en cherche une racine carrée sous la forme $\delta = c + id$. On a $\delta^2 = c^2 - d^2 + 2cdi - 3 - 4i$ et $|\delta^2| = |-3 - 4i| = 5$, donc

$$\begin{cases} c^2 - d^2 & = & -3 \\ 2cd & = & -4 \\ c^2 + d^2 & = & 5 \end{cases}$$

D'où $c^2 = 1$ et $d^2 = 4$. Comme $cd \leq 0$, c et d sont de signes contraires, par conséquent $c = 1$ et $d = -2$ ou $c = -1$ et $d = 2$. Les racines carrée de $-3 - 4i$ sont $\delta = 1 - 2i$ et sont opposé. D'où les solutions de l'équation sont :

$$\frac{-4i + 3 + 1 - 2i}{2i} = -3 - 2i \text{ et } \frac{-4i + 3 - 1 + 2i}{2i} = -1 - i.$$

7.3.3 Équation polymoniale d'ordre n

Définition 7.3.9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle équation polymoniale d'ordre n dans $\mathbb{C}$ une équation de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

où a_0, a_1, $\cdots$, a_n sont des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ appelés coefficients de l'équation.

Théorème 7.3.10 (Admis). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation polymoniale d'ordre n*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

admet dans $\mathbb{C}$ n solutions éventuellement confondues z_0, z_1, $\cdots$, z_n et on pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Exercice 7.3.2 : *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0$ sachant que 2 en est une solution.*

On vérifie aisement que $2^3 - (3+i) \times 2^2 - 2(2+5i) + 8 + 14i = 0$. Donc il existe trois complexes a, b et c tels que tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = (z-2)(az^2 + bz + c).$$

D'où

$$z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c,$$

par identification

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - 2a &= -(3+i) \\ c - 2b &= -(2+5i) \\ -2c &= 8 + 14i. \end{cases}$$

On trouve $a = 1$, $b = -1 - i$ et $c = -4 - 7i$, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = (z-2)(z^2 - (1+i)z - 4 - 7i).$$

Par suite $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 - (1+i)z - 4 - 7i = 0$. Résolvons l'équation du secon degré $z^2 - (1+i)z - 4 - 7i = 0$. Son discriminant est $\Delta = (1+i)^2 + 4(4+7i) = 16 + 30i$.
En posant $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on obtient le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 16 \\ 2xy &= 30 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{cases}$$

D''où $x^2 = 25$, $y^2 = 9$ et comme $xy \geq 0$, x et y sont de même signe. Par conséquent les racines carrés de $16 + 30i$ sont $5 + 3i$ et $-5 - 3i$. D'où les solution de l'équation $z^2 - (1+i)z - 4 - 7i = 0$ sont

$$z_1 = \frac{1 + i + 5 + 3i}{2} = 3 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{1 + i - 5 - 3i}{2} = -2 - i.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 - (3+i)z^2 - (2+5i)z + 8 + 14i = 0$ est $\mathscr{S} = \{2; 3 + 2i; -2 - i\}$.

7.4 Suites de nombres complexes

7.4.1 Généralités

Définition 7.4.1. Une *suite complexe* de nombres complexs est une fonction $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dont le domaine de définition est de la forme $\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geq p\}$; p est généralement égal à 0 ou 1. Comme pour les suites réelles, au lieu d'écrire $u(n)$ nous utiliserons la notation u_n pour désigner l'image de n par u et dirons que u_n est le terme d'indice n de la suite u. Nous utilserons la notation $(u_n)_{n\geq p}$ ou $(u_p, u_{p+1}, \cdots)$ pour la suite u. Si $p = 0$ alors on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_0, u_1, \cdots)$.

Remarque 7.4.2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i\mathrm{Im}(u_n)$, $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles appelées respectivement partie réelle et partie imaginaire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On étend aux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ toutes les propriétés des suites de nombres réels, sauf celles qui font référence à l'ordre. On ne parle pas de suite complexe croissante, décroissante, majorée ou minorée, car contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas naturellement muni d'une relation d'ordre.

Définition 7.4.3 (Suite complexe bornée)**.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes et bornée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

Exemple 7.4.4 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{in^2}$ est bornée. En effet pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1 + \dfrac{1}{n} \leq 2$.

***Exercice* 7.4.1** *: Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ est bornée.*

Solution : On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| &= \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n \\ &\leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Comme pour tout réel positif x, $1 + x < \mathrm{e}^x$, donc $\left(1 + \frac{|z|}{n}\right) < \mathrm{e}^{|z|/n}$. D'où

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \left(\mathrm{e}^{|z|/n}\right)^n = \mathrm{e}^{|z|}.$$

Proposition 7.4.5. *Une suite de nombres complexes est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.*

Démonstration. La preuve découle des relations $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. □

7.4.2 Convergence d'une suite complexe

Définition 7.4.6. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et ℓ un nombre complexe.
On dit que ℓ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

— On dit qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou est convergente s'il existe un nombre complexe ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Comme pour les suites réelles on a l'unicité de la limite

Proposition 7.4.7 (unicité de la limite)**.** *Une suite de nombres complexes convergente a unique limite.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$, ℓ et ℓ' deux nombres complexes.
Supposons que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ et pour limite ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$.
Par définition il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. De même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$, $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout entier n vérifiant $n \geq N$ (donc on a à la fois $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$) on a

$$\begin{aligned} \left|\ell' - \ell\right| &= \left|u_n - \ell - (u_n - \ell')\right| \\ &\leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $|\ell' - \ell| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|\ell' - \ell| = 0$ c'est-à-dire $\ell = \ell'$. Par conséquent la limite d'une suite de nombres complexes si elle existe est unique. □

Proposition 7.4.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes . La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont convergentes. Plus précisément, soit $\ell \in \mathbb{C}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell) \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des entiers n_1 et n_2 tels que

$$\forall n \geq n_1 \Longrightarrow |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_2 \Longrightarrow |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $n_0 = \max n_1, n_2$, on a pour tout $n \geq n_0$

$$|u_n - \ell| \leq |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| + |\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Réciproquent, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Comme $|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leq |u_n - \ell$ et $|\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leq |u_n - \ell$, donc pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| \leq \varepsilon$ et $|\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$. □

Proposition 7.4.9. *Toute suite de nombres complexes convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergente vers un nombre complexe ℓ. Il existe alors $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ on a $|u_n-\ell|<1$. Posons $M_1:=|\ell|+1$. Pour tout $n\geq N$ on a

$$\begin{aligned}|u_n| &= |u_n-\ell+\ell|\\ &\leq |u_n-\ell|+|\ell|\\ &< 1+|\ell|.\end{aligned}$$

Posons $M_2:=\max\{|u_0|,|u_1|,|u_2|,\dots,|u_{M-1}|\}$ et $M:=\max\{M_1,M_2\}$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_n|\leq M.$$ □

Remarque 7.4.10. La réciproque n'est pas forcement vraie. En effet, la suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|e^{in}\right|=1$) mais elle ne converge pas car sa partie réelle $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

On définit une suite extraite d'une autre suite comme pour les suites réelles, plus précisement, on a

Définition 7.4.11. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est appelée *suite extraite*, ou *sous-suite*, d'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_{\varphi(n)}.$$

Proposition 7.4.12 (Théorème de Bolzano-Weirstrass)**.** *De toute suite bornée de nombres complexes on peut en extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Donc les suites de nombres réels $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées. D'après le théorème de Bolzan-Weierstrass pour les suite réelle, il existe une suite convergente $(\mathrm{Re}(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(\mathrm{Im}(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ étant extraite de $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(\mathrm{Im}(u_{n_{k_r}}))_{r\in\mathbb{N}}$. Enfin la suite $(u_{n_{k_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Proposition 7.4.13. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes qui converge vers un nombre complexe ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $|u_n-\ell|<\varepsilon$. Comme $||u_n|-|\ell||\leq|u_n-\ell|$, donc pour tout $n\geq N$, $||u_n|-|\ell||<\varepsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$. □

La réciproque n'est pas forcément vraie. En effet, la suite $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors que $(\left|e^{in}\right|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (puisque $\left|e^{in}\right|=1$).

Le résultat suivant établit ce qu'on appelle fréquemment les « théorèmes généraux sur les limites des suites ». Fondamentalement, ces résultats montrent comment la convergence interagit avec les opérations algébriques. La preuve étant similaire au cas des suites de nombres réels, elle est laissée en exercice.

Proposition 7.4.14. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes convergentes.*

(i) La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n.$$

(ii) Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, *la suite* $(\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha u_n)=\alpha\lim_{n\to+\infty}u_n.$$

(iii) La suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\left(\lim_{n\to+\infty}u_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}v_n\right).$$

(iv) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\neq 0$, *alors il existe* $n_0\in\mathbb{N}$ *tel que* $v_n\neq 0$ *pour tout* $n\geq n_0$, *de plus la suite* $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}.$$

Définition 7.4.15. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes est une suite de Cauchy lorsque :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall m,n\in\mathbb{N},m,n\geq N\Longrightarrow|u_m-u_n|\leq\varepsilon.$$

Proposition 7.4.16. *Une suite de nombres complexe est de Cauchy si seulement elle converge.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergente vers $\ell\in\mathbb{C}$. Montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon>0$. Il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tous entiers p et q tels que $p\geq N$ et $q\geq N$, on a

$$\left|u_p-u_q\right|\leq\left|u_p-\ell\right|+\left|u_q-\ell\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui est de Cauchy. Montrons qu'elle est convergente. Comme pour tous entiers m et n, $|\mathrm{Re}(u_m)-\mathrm{Re}(u_n)|\leq|u_m-u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_m)-\mathrm{Im}(u_n)|\leq|u_m-u_n|$, donc les suites de nombres réels $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy. Étant donné que toute suite réelle de Cauchy est convergente, donc $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$

Index