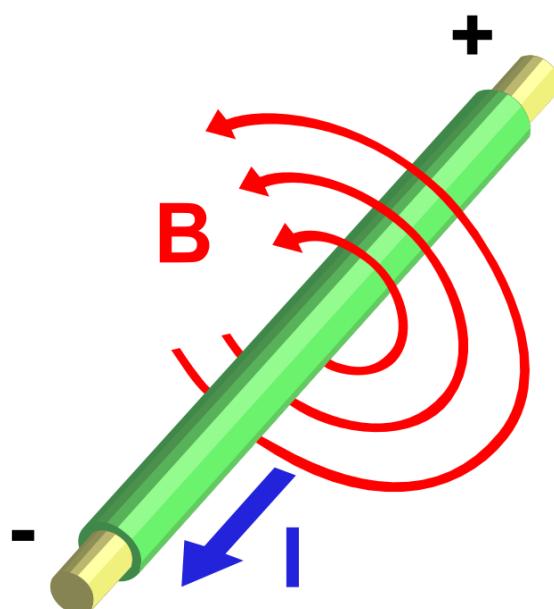




## Année universitaire 2024-2025

### Cours & Travaux Dirigés de Physique

UE :	ECUE 1 : <b>ELECTROSTATIQUE</b>	ECUE 2 : <b>ELECTRICITE</b>
------	------------------------------------	--------------------------------



L1 SFA

Prof. KÉÏTA Mélalie

## SYLLABUS DU COURS

L'UE Electrostatique et Electricité présente les différents concepts de la théorie des phénomènes électrostatique et électricité qu'il convient de maîtriser à l'issue de la première année universitaire. Partant des expériences de Coulomb pour aboutir à une description des milieux magnétiques, il propose de découvrir progressivement ces phénomènes en s'appuyant tout à la fois sur une approche intuitive et un formalisme rigoureux.

**Mots-clés :**

**Electrostatique :**

Charge électrique, distributions de charges, loi de Coulomb, vecteur champ électrique, flux électrique , théorème de GAUSS, forme locale du théorème de GAUSS, Principe de Curie, potentiel électrostatique, dipôle électrostatique, énergie potentielle électrostatique, équations de Poisson et Laplace.

**Electricité :**

- ✓ **Régime continu** : Courant électrique, charges en mouvement, densité de courant, Intensité de courant électrique, résistance , condensateur, tension aux bornes d'un dipôle, dipôles cinétique, point de fonctionnement d'un circuit, puissance électrique, Loi d'Ohm, loi des nœuds ,loi des mailles, ponts diviseurs de tension, ponts diviseurs de courants.
- ✓ **Régime variable**
  - 1- Régime transitoire dans un circuit RLC ;
  - 2- Courant entretenu dans un circuit RLC en régime sinusoïdale.
- ✓ **Magnétostatique** : Vecteur champ magnétique, loi de Biot-Savard, champ créé par un spire circulaire, champ créé par un solénoïde, théorème d'ampère, forme locale du théorème d'ampère, force magnétique, flux magnétique.

# ELECTROSTATIQUE - ELECTRICITE

Le but de ce cours est de présenter les notions de base de l'électrostatique et de l'électricité.

- L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie l'ensemble des phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur.
- L'électricité est la branche de la physique qui étudie l'ensemble des phénomènes dû aux charges électriques en mouvement.

Il s'agit de tenter d'expliquer l'ensemble des phénomènes naturels, en établissant les lois qui les régissent.

## Objectifs du cours :

- Comprendre l'origine des phénomènes électrostatiques de la vie courante ;
- Décrire les interactions qui s'exercent entre charges électriques statiques ou qu'une charge exerce sur son environnement ;
- Définir les grandeurs physiques associées aux charges qui permettent de décrire les interactions électrostatiques avec les charges environnantes ;
- Etudier l'ensemble des phénomènes créés par des charges électriques statiques (quantifier les forces, le champ, le potentiel électrostatique...) ;
- Comprendre les grands principes de l'électricité ;
- Acquérir les connaissances de base en électricité permettant de comprendre le fonctionnement et l'utilisation des équipements électriques nécessaires pour la suite de la formation.

**UE : ÉLECTROSTATIQUE – ÉLECTRICITÉ****SOMMAIRE**

SYLLABUS .....	i
OBJECTIF GENERAL.....	ii

**ECUE 1 : ELECTROSTATIQUE**

CHAPITRE I : CHARGE ÉLECTRIQUE .....	1
CHAPITRE II : FORCES ÉLECTROSTATIQUES .....	8
CHAPITRE III : CHAMP ÉLECTROSTATIQUE .....	11
CHAPITRE IV : THEOREME DE GAUSS .....	20
CHAPITRE V : POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE .....	34
CHAPITRE VI : ENERGIE ÉLECTROSTATIQUE .....	43
CHAPITRE VII : DIPÔLE ELECTROSTATIQUE .....	47
CHAPITRE VIII : CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE.....	56

**ECUE 2 : ELECTRICITE**

CHAPITRE VIII : GENERALITES SUR LE COURANT ELECTRIQUE .....	72
CHAPITRE IX : MAGNÉTOSTATIQUE .....	82

BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE .....	93
------------------------------------	----

## CHAPITRE I : CHARGE ÉLECTRIQUE

**Objectif :**

- Être capable de donner une description mathématique de la charge d'un système et d'en faire une étude quantitative ;

**Prérequis :**

- En mathématiques, être capable de résoudre une intégrale simple d'une fonction à une variable. Les intégrales doubles et triples de fonctions de plusieurs variables pourront toujours être réduites à des intégrales simples à une variable en s'appuyant sur des considérations de symétrie du système étudié.

### I.1 Notion de charge électrique

Les Grecs savaient qu'ils pouvaient soulever de petits morceaux de papyrus en approchant de ceux-ci un morceau d'ambre qui avait été préalablement frotté. Quantité d'autres matériaux possèdent cette propriété. On dit que les corps sont électrisés par frottement et possèdent alors des charges électriques et les forces qui s'exercent entre eux sont appelées forces électriques.

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière intervenant dans les phénomènes électromagnétiques. Expérimentalement, on constate l'existence de deux espèces d'électricité positive et négative, qu'on appelait autrefois électricité vitreuse et électricité résineuse. En effet, les forces électriques sont attractives ou répulsives : deux corps se repoussent s'ils portent une charge de même signe, ils s'attirent s'ils portent des charges de signe opposé.

À l'échelle atomique, deux particules élémentaires sont naturellement pourvues d'une charge électrique à savoir le **proton** chargé **positivement** et l'**électron** chargé **négativement**. Dans le système M.K.S.A., leur charge sont données respectivement par :

- $+1,6 \cdot 10^{-19}$  C pour le proton ;
- $-1,6 \cdot 10^{-19}$  C pour l'électron, noté  $e^-$ .

Il s'agit là de charges élémentaires permanentes dans le temps et dans l'espace dont les valeurs sont considérées comme des constantes universelles. Notons que l'unité internationale associée aux charges électriques, le **coulomb** (C) correspond à une charge extrêmement grande. Pour fixer les idées, la charge électrique transférée dans un éclair d'orage est de l'ordre de 20 à 30 C.

Un coulomb correspond à la quantité de charge transportée par un courant d'un ampère en une seconde.

D'autres particules, que l'on dit neutres, ne sont pas douées de propriété électrique ; exemple : le neutron, le neutrino.

### I.2 Quantification de la charge

L'électricité est une propriété inhérente aux particules élémentaires.

L'état d'électrisation d'un corps se caractérise en définissant la charge électrique portée par ce corps. De nombreuses expériences, telle celle de Millikan, ont montré que :

- Une particule élémentaire chargée, porte la quantité d'électricité,  $+e$  ou  $-e$  charge de l'électron ( $-1,6 \cdot 10^{-19}$ ) que l'on appelle charge élémentaire

La quantité d'électricité portée par un corps est la somme algébrique des quantités d'électricité des particules élémentaires qui le composent. En valeur absolue, aucune charge ne peut être inférieure à  $+1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Toute charge d'un corps est obligatoirement un multiple entier de  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

Les appareils nommés électroscopes permettent de constater la présence de charges électriques.

### I.3 Définition de l'électrostatique

De même qu'on a admis l'existence d'une propriété de la matière, la masse, pour faire le calcul des forces gravitationnelles, on attribue à la matière une autre propriété, la charge qui est la cause des forces électriques.

L'interaction électrostatique est l'une des quatre interactions (ou forces) fondamentales qui régissent le comportement de la matière. L'électrostatique est l'étude des interactions entre deux corps immobiles, dans le repère d'étude, électriquement chargés. L'expérience montre qu'il y a deux types d'interaction électrique. L'une est **attractive** et l'autre est **répulsive** selon le mode d'électrisation des objets en présence.

### I.3.1 Modes d'électrisation

Tout processus d'électrification doit être compris comme le transfert d'un certain nombre de charges élémentaires d'un corps à un autre, elle permet de faire apparaître des charges électriques sur un matériau. Ainsi après électrisation deux matériaux exercent les uns sur les autres des forces d'attraction ou de répulsion.

#### I.3.1.1 Électrisation par frottement (triboélectricité)

Lorsque l'on frotte l'un contre l'autre deux matériaux de nature différente, ils échangent des charges électriques.

Si l'on frotte une baguette de verre avec la laine, alors cette baguette acquiert une charge positive qui résulte du transfert d'électrons de la baguette vers laine (Figure 1).

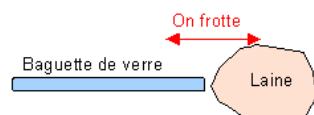


Figure 1- Frottement d'une baguette de verre avec la laine

La baguette de verre chargée positivement **attire** le pendule chargé négativement (Figure 2).

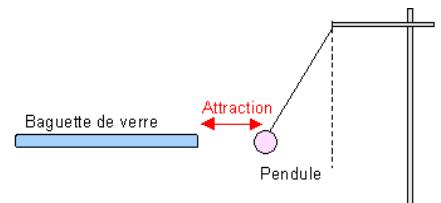


Figure 2- Attraction

La baguette de verre chargée positivement **repousse** une autre baguette de verre chargée positivement (Figure 3).

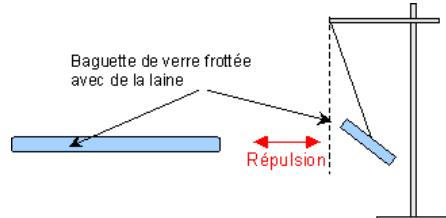


Figure 3- Répulsion

Il existe deux types de charges électriques (car les corps électrisés peuvent s'attirer ou se repousser).

- Deux corps qui portent des charges de même signe se repoussent (Figure 4).

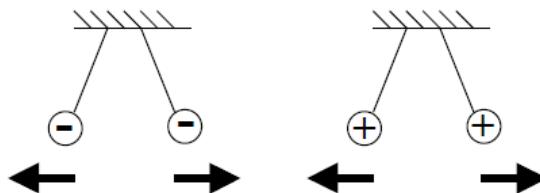
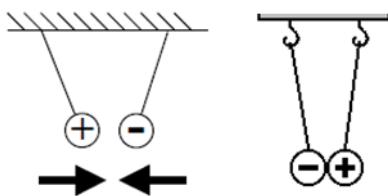


Figure 4- Répulsion de charges électriques de même signe

- Deux corps qui portent des charges de signe différent s'attirent (Figure 5).

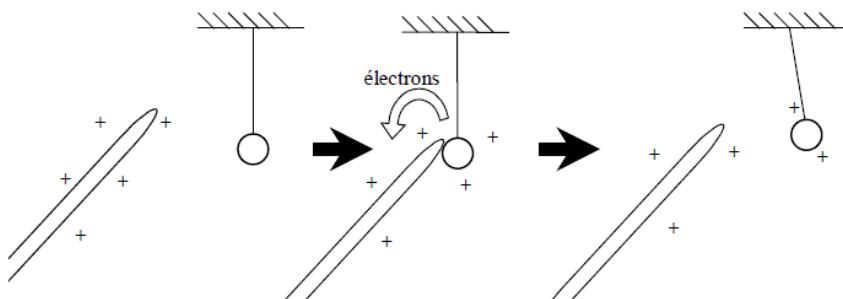


*Figure 5- Attraction de charges électriques de signe contraire*

CHARLES DUFFAY en 1733, qui fut le premier à réaliser et interpréter cette expérience, donnera le nom « d'électricité résineuse (+) » et « d'électricité vitreuse (-) » à ces deux types d'électricité. C'est ensuite BENJAMIN FRANKLIN qui introduira le concept de charges positives et de charges négatives en lieu et place d'électricités vitreuse et résineuse.

### I.3.1.2 Électrisation par contact avec un autre corps chargé

Mettons en contact deux objets métalliques : l'un portant une charge électrique positive et l'autre neutre. Lors du contact, les électrons libres du second objet (neutre) sont attirés par la charge positive du premier et certains d'entre d'eux passent de l'un à l'autre (Figure 6). Cette perte d'électrons confère à l'objet initialement neutre une charge nette positive. Ce phénomène porte le nom d'électrisation par conduction.



*Figure 6- Électrisation par contact avec un autre corps chargé*

### I.3.1.3 Électrisation par influence

En rapprochant un objet possédant une charge positive à une tige métallique neutre sans les mettre en contact, les électrons de la tige vont se déplacer en direction de l'objet électrisé, sans toutefois s'en échapper. Ce déplacement d'électrons produit une charge positive à l'extrémité opposée de la tige (Figure 7-9). On dit alors qu'une charge a été induite aux deux extrémités de la tige métallique. Aucune charge n'a été créée : elle s'est formée par séparation. La tige possède toujours une charge nette nulle, mais si on la divisait en deux, on obtiendrait deux objets dotés de charges électriques différentes, l'une positive et l'autre négative. On parle alors d'**électrisation par influence (ou par induction)** :

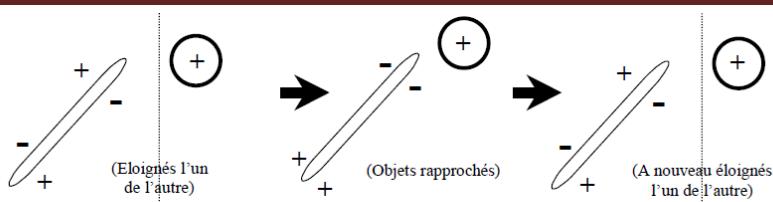


Figure 7

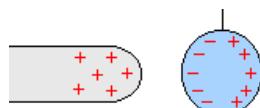


Figure 8- Les électrons de la boule d'aluminium se déplacent sous l'influence de la charge de la baguette

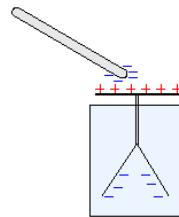


Figure 9- Électroscop : les feuilles chargées par influence se repoussent

### I.3.1.4 Électrisation par effet photoélectrique ou thermoélectrique

Une plaque de zinc chauffée ou soumise à un rayonnement U.V. émet des  $e^{-}$  et acquiert une charge positive.

### I.3.1.5 Électrisation par effet piézo-électrique

En exerçant une compression ou une traction (contrainte mécanique) sur les deux faces parallèles de certains cristaux convenablement taillés, comme du quartz, il apparaît sur ces faces des charges positives d'un côté, négatives de l'autre. Une application parmi les plus familières est l'allume-gaz. Dans un allume-gaz, la pression exercée produit une tension électrique qui se décharge brutalement sous forme d'étincelles

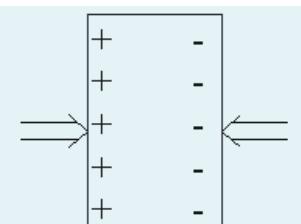


Figure 10- Electrisation par effet piézo-électrique

#### Remarque :

En chargeant un corps il peut se produire deux phénomènes :

<ul style="list-style-type: none"> <li>les charges électriques restes localisées à l'endroit qui correspond à l'électrisation ; dans ce cas nous avons un isolant : verre, matières plastiques ;</li> <li>les charges électriques se répartissent sur la surface du matériau, nous avons dans ce cas un conducteur.</li> </ul>		Conducteur
--	---	------------

Exemple : le métal contient des électrons libres (environ 1 par atome). L'isolant n'en contient que très peu (environ 1 pour  $10^{15}$  atomes).

### I.3.1.6 Conservation de la charge

La matière peut disparaître en se transformant en énergie. La charge par contre ne peut que s'annihiler avec une autre charge de même intensité, mais de signe opposé. De la même manière, une charge positive ne peut apparaître que si une charge négative apparaît en même temps. Durant une expérience, les charges positives et les charges négatives sont toujours conservées. Elles ne peuvent jamais être créées ni détruites. Elles ne font que se déplacer d'un corps à un autre ou former de nouvelles particules qui préservent la charge initiale. Cette propriété fondamentale se nomme la loi de la conservation de la charge :

**Dans un système isolé la charge totale, c'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives, est constante.**

### I.3.2 Distributions des charges

L'étude des propriétés physiques des corps chargés électriquement nécessite une description mathématique de la répartition des charges. On distinguera les distributions discrètes et les distributions continues.

#### I.3.2.1 Distribution discrète de charges

##### A/ Charge ponctuelle

On dit qu'une charge est ponctuelle si elle est perçue comme un point par un observateur. On considère alors que la distance **charge – observateur** est très grande devant la taille caractéristique de la charge.

Une charge est ponctuelle si l'objet qui la porte est assimilable à un point matériel.

##### B/ Distribution discrète

Une distribution discrète de charges est un ensemble de charges électriques ponctuelles proches les unes des autres, discernable par un observateur. Celles-ci sont dénombrables.

Pour un ensemble de  $N$  charges ponctuelles, la charge totale  $Q = \sum_{i=1}^N q_i$ .

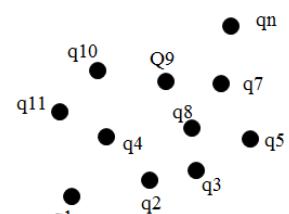


Figure 11- Distribution discrète de charges

#### I.3.2.2 Distribution continue de charges

La distribution de charges est dite "continue" lorsque les charges sont indiscernables à l'échelle macroscopique. Elles peuvent être réparties dans un volume  $v$ , sur une surface  $S$  ou sur un contour  $\mathcal{C}$ .

##### A/ Densité volumique de charges

Lorsque le corps électrisé est un volume  $v$  contenant des charges indiscernables à l'échelle macroscopique (Figure 12), il est commode de définir une densité volumique de charges, notée  $\rho$ , définie de la façon suivante : on découpe le volume  $v$  en éléments  $\Delta v$  très petits. Si on considère l'un de ces éléments  $\Delta v$  situé autour d'un point  $P$ , il contient la charge  $dq$  : élément de charges contenue dans l'élément de volume  $dv$  autour du point  $P$ .

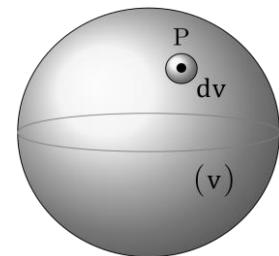


Figure 12- Distribution volumique de charges

On définit alors la quantité  $\rho = \frac{dq}{dv}$  comme étant la **densité volumique** de charges

$$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho \cdot dv \Rightarrow q = \iiint_v \rho \cdot dv$$

$q$  est la charge contenue dans le volume  $v$  et  $\rho$  a pour unité :  $C/m^3$  ou  $C \cdot m^{-3}$ .

##### B/ Densité surfacique de charges

Dans de nombreux cas, les charges sont réparties sur une épaisseur très faible par rapport aux autres dimensions et peuvent donc être considérées comme réparties en surface  $s$  (Figure 13). Ceci nous permet de définir une densité superficielle de charges notée  $\sigma$  telle que :  $\sigma = \frac{dq}{ds}$  représente la **densité surfacique** de charges.

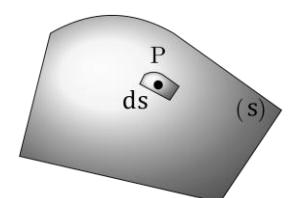


Figure 13- Distribution surfacique de charges

$dq$  : élément de charges contenu sur  $ds$ : élément de surface autour d'un point  $P$  et  $\sigma$  s'exprime en :  $C \cdot m^{-2}$ ;

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow q = \iint_s \sigma \cdot ds$$

**C/ Densité linéique de charges**

Il peut arriver qu'une dimension du corps chargé soit très supérieure aux deux autres, c'est à dire que la charge semble répartie sur un fil (à savoir un conducteur de section très faible par rapport à la longueur  $\ell$ ).

Il est alors commode de définir une **densité linéique** de charges notée  $\lambda$  telle que :  $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$

$dq$ : élément de charges contenue sur  $d\ell$ : élément de longueur autour d'un point  $P$  (Figure 14).  $\lambda$  s'exprime en C. m<sup>-1</sup>.

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \Rightarrow dq = \lambda \cdot d\ell \Rightarrow q = \int_{\ell} \lambda \cdot d\ell$$

Nous verrons ultérieurement l'importance des symétries que peuvent présenter les distributions de charges dans la détermination des champs électriques créés par celles-ci.

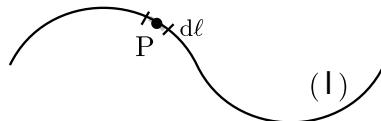


Figure 14- Distribution linéique de charges

**TD DE L'ECUE 1****SERIE 1 : LA CHARGE ELECTRIQUE****Exercice 1 : Charge volumique électronique dans l'atome d'hydrogène**

La charge volumique électronique dans l'atome d'hydrogène peut être représentée par l'expression :  $\rho(r) = Ce^{-\frac{2r}{a_0}}$

Où  $a_0 = 52,9 \text{ pm}$  est rayon de Bohr et  $r$  la distance du point considéré au centre de l'atome. Calculer la constante  $C$  afin que la charge volumique  $\rho$  caractérise bien la distribution de charge  $-e$  d'un électron.

**Exercice 2 : Distribution surfacique moyenne radiale de profil parabolique**

Un disque, de centre O et de rayon  $R$ , est chargé électriquement avec une charge surfacique d'expression :  $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

$\sigma_0$  étant une constante et  $r$  la distance qui sépare le point considéré de O.

1. Quelle, est en fonction de  $\sigma_0$  et  $R$ , la charge électrique portée par le disque ? En déduire la charge surfacique moyenne  $\sigma_m$ .
2. Mêmes questions dans le cas d'une boule, de rayon R, chargée en volume avec une charge volumique d'expression :

$$\rho = \rho_0 \frac{r^2}{R^2}; \rho_0 \text{ étant une constante et } \rho_m \text{ la charge volumique moyenne.}$$

**Exercice 3 : Calotte sphérique de distribution surfacique en  $\cos\theta$** 

Une calotte sphérique de rayon  $R$  est chargée électriquement avec une charge surfacique  $\sigma_0 \cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle que fait un rayon de la calotte avec son axe.

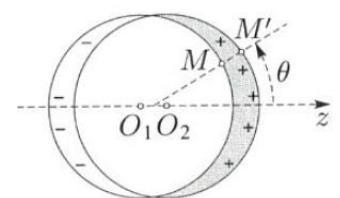
1. Calculer la charge de la calotte.
2. En déduire la charge surfacique moyenne d'une calotte demi-sphérique.

**Exercice 4 : Barycentre d'une distribution de charge**

Une distribution linéaire uniforme de charge est repartie selon un arc de cercle d'angle  $2\alpha$ . Trouver la position du barycentre des charges. Cas d'un demi-cercle.

**Exercice 5 : Distribution surfacique en  $\cos\theta$** 

On considère la superposition de deux distributions de charge caractérisées par des charges volumiques uniformes de valeurs respectives  $\rho_0$  et  $-\rho_0$ . Ces charges sont reparties dans deux sphères de rayon  $R$  dont les centres sont distants de  $a \ll R$ . Montrer que cette distribution est équivalente à une distribution surfacique dont on calculera la densité en fonction de  $\rho_0$ ,  $a$  et  $\theta = (\vec{e}_z, \vec{e}_r)$  (voir figure ci-dessous).

**Exercice 6 : Densité surfacique de charge d'une couche sphérique**

La densité volumique de charge  $\rho$  d'une couche sphérique chargée d'épaisseur  $a$  a pour expression :

$$\rho(r) = \rho_0 \text{ si } R - \frac{a}{2} < r < R + \frac{a}{2} \text{ et } \rho(r) = 0 \text{ sinon. } R \text{ étant le rayon de la sphère et } a \text{ l'épaisseur de la couche.}$$

1. Exprimer la charge totale  $Q$  de la sphère en fonction de  $Q = 4\pi R^2 a \rho_0$  et du rapport  $a/R$ .
2. Dans quelles conditions peut-on considérer cette distribution de charge comme une distribution surfacique ? Trouver alors la densité surfacique  $\sigma$  ?

**Exercice 7 : Distribution linéaire de charge**

Un segment porte une charge non uniforme dont la charge linéaire varie spatialement selon :  $\lambda = \lambda_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$  pour  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ . Ailleurs, le fil n'est pas chargé. Calculer la charge portée par le fil et sa charge linéaire moyenne  $\lambda_m$ .

## CHAPITRE II : FORCES ELECTROSTATIQUES

### II.1. INTRODUCTION

#### II.1.1. Objectifs :

Être capable de prévoir et de calculer la force électrostatique s'exerçant entre deux charges électriques.

#### II.1.2. Prérequis :

Être capable de maîtriser les opérations élémentaires sur les vecteurs.

### II.2. LOI DE COULOMB

Deux charges électriques au repos  $Q$  et  $q'$  s'attirent ou se repoussent mutuellement avec une force d'interaction électrostatique  $\vec{F}$  :

- proportionnelle à chacune des charges  $Q$  et  $q'$  ;
- dirigée suivant la droite joignant les deux charges ;
- inversement proportionnelles au carré de la distance  $r$  qui les sépare.

	<p>Lorsque les charges sont de même signe, le produit <math>Qq'</math> est positif (<math>Qq' &gt; 0</math>) et les forces d'interaction sont répulsives.</p>
	<p>Lorsque les charges sont de signe opposé, le produit <math>Qq'</math> est négatif (<math>Qq' &lt; 0</math>) et les forces d'interaction sont attractives.</p>

Dans les deux cas, en définissant un vecteur unitaire  $\vec{u}$  dirigé de  $Q$  vers  $q'$ , on peut exprimer la force exercée par  $Q$  sur  $q'$ , sous la forme vectorielle suivante :

#### Définition

On appelle forces électrostatiques (forces coulombiennes), les forces d'interactions entre les corps électrisés  $Q$  et  $q'$ .

#### II.2.1 Expression de la loi de Coulomb

Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle  $Q$  sur une autre charge ponctuelle  $q'$ :

La force électrostatique existant entre deux charges considérées comme ponctuelles présente trois caractéristiques fondamentales :

1/ elle est radiale, c'est-à-dire s'exerce suivant la direction joignant les deux charges en interaction ;

2/ elle est répulsive ou attractive selon que les charges en interaction sont de même signe ou de signe opposé (cette propriété a été à l'origine de la classification des charges électriques en deux types distincts de charges) et elle est proportionnelle au produit des charges ;

3/ Enfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges, et elle est de portée infinie ; deux charges électriques, aussi éloignées soient-elles, exercent l'une sur l'autre une force électrique.

La loi de Coulomb indique que la force exercée par  $Q$  sur  $q'$  s'exprime sous forme vectorielle.

Cette force de Coulomb obéit au principe d'action-réaction qui impose que :

$$\vec{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^2} \vec{u}; \text{ avec } \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} F \cdot m^{-1} \Rightarrow \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} SI \text{ ou (F/m)};$$

Cette loi constitue la loi fondamentale de l'électrostatique.

### Remarque

a/  $\vec{r} = r\vec{u}$  ;  $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{u}$  on a alors  $\vec{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^3} \vec{r}$  ;

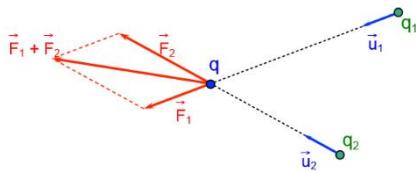
b/ Si le milieu n'est pas le vide, on introduit la permittivité absolue du milieu  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  qui est toujours supérieure à  $\epsilon_0$ .  $\epsilon_r$  = permittivité relative du milieu. Citons quelques valeurs de  $\epsilon_r$  :

Substance	Air	Eau	Ammoniaque	Paraffine
$\epsilon_r$	1,0006	80	22	2,1

L'électrostatique dans le vide s'identifie à l'électrostatique dans l'air.

### II.2.2 Principe de superposition

La force électrique étant, comme toutes les forces, une grandeur vectorielle, les forces électriques exercées par différentes charges  $q_1, q_2$  sur la charge  $q$  se calculent indépendamment l'une de l'autre et s'ajoutent vectoriellement : additivité des forces électriques.



On montre que la force totale s'écrit :  $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

### II.2.3 Exercices d'application

**A/** Une particule  $\alpha$  (noyau de l'atome d'hélium) a une masse  $m$  de  $6,64 \cdot 10^{-27}$  kg et une charge électrique  $q = +2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$  C. Comparer la force de répulsion entre deux particules  $\alpha$  à la force d'attraction gravitationnelle entre ces mêmes particules. On donne :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup> qui est la constante de gravitation ;  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  N.m<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>.

**Solution :**

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}; F_G = G \frac{m^2}{r^2} \Rightarrow \frac{F_e}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \frac{r^2}{Gm^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{Gm^2} \approx 31 \cdot 10^{34} \Rightarrow F_e \approx 31 \cdot 10^{34} F_G$$

**B/** Comparons les modules des forces électrostatique et gravitationnelle entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène éloignés d'une distance est  $r$  :

**Solution :**

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}, F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} \Rightarrow \frac{F_e}{F_G} \approx 10^{42} \Rightarrow F_e \approx 10^{42} F_G$$

Comme nous pouvons le constater, les forces électriques présentent les mêmes caractéristiques que les forces gravitationnelles, toutefois leur intensité est beaucoup plus importante.

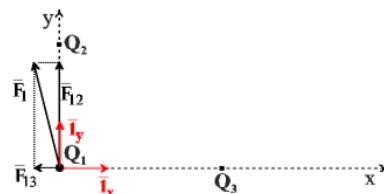
**C/** Calculer la force qui s'exerce sur la charge  $Q_1$ , due à la présence des charges  $Q_2$  et  $Q_3$ . Les trois charges sont situées aux sommets d'un triangle rectangle. Les charges  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  valent respectivement :  $30 \mu\text{C}$ ,  $-60 \mu\text{C}$  et  $40 \mu\text{C}$ . La distance entre  $Q_1$ ,  $Q_2$  est 1 m, celle entre  $Q_1$ ,  $Q_3$  est 2 m.

**Solution :**

On calcule les modules des forces exercées par chacune de charges électriques en utilisant la loi de Coulomb :

$$1) F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{12}^2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{30 \cdot 10^{-6} \times 60 \cdot 10^{-6}}{1^2} = 16,2 \text{ N}$$

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1 Q_3|}{r_{13}^2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{30 \cdot 10^{-6} \times 40 \cdot 10^{-6}}{2^2} = 2,7 \text{ N}$$



2) On choisit un système de coordonnées d'axes  $x$  et  $y$  dans lequel on écrit chaque force en fonction de ses composantes et des vecteurs unitaires  $\vec{i}_x$  et  $\vec{i}_y$ .

$\vec{F}_{12} = 16,2 \vec{i}_y$  N car les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  sont de signes opposés et s'attirent ;

$\vec{F}_{13} = -2,7 \vec{i}_x$  N car les charges  $Q_1$  et  $Q_3$  sont de même signe et se repoussent.

c) On effectue la somme vectorielle des différentes forces en ajoutant entre elles les composantes  $x$  et les composantes  $y$ :  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = (-2,7 \vec{i}_x + 16,2 \vec{i}_y)$  N

**Quelques vidéos d'illustration:** ([video1](#) , [video2](#), [video3](#) ,[video4](#) )

## CHAPITRE III : CHAMP ELECTROSTATIQUE $\vec{E}$

### III.1. INTRODUCTION

#### III.1.1. Objectifs :

- Comprendre l'origine des notions de champ électrostatique ;
- Être capable de décrire par le concept de champ électrostatique, l'action à distance exercée par une charge ou une source chargée ;
- Être capable de prévoir l'action d'une charge ponctuelle ou d'une source chargée sur une autre charge ;
- Savoir calculer le champ électrostatique généré par une distribution simple de charges dans l'espace ;
- Appliquer la loi de Coulomb ;
- Définir les lignes de champs créés par une distribution de charges ;
- Comprendre et établir l'analogie avec le champ gravitationnel pour appliquer le théorème de Gauss.

#### III.1.2. Prérequis :

Être capable de maîtriser les opérations élémentaires sur les vecteurs.

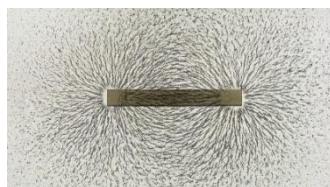
#### *Terme dû à FARADAY M. (1833)*

« *La distribution de la limaille de fer au voisinage d'un aimant indique qu'une particule pouvait donner à l'espace environnant l'aspect d'un champ labouré* ».

On utilise de façon naturelle la notion de champ en physique : un champ électrostatique, un champ gravitationnel, un champ de pression atmosphérique, un champ de vitesses dans un fluide par exemple. Par définition un champ est un ensemble de grandeurs mathématiques définies et existant en tout point d'une surface ou d'un volume. Ces grandeurs peuvent être des :

- scalaires (la température dans l'atmosphère, qui varie en fonction de la position géographique (x, y, z)).
- vecteurs (la vitesse du vent en fonction de la position géographique (x, y, z)).

La notion de champ a été introduite par les physiciens pour expliquer comment deux objets peuvent interagir à distance, sans que rien ne les relie. A la fois la loi de la gravitation de NEWTON et la loi de Coulomb, impliquent une telle interaction à distance. Il n'y a pas de fil qui relie la terre au soleil ; celui-ci exerce son attraction à distance. De même, deux charges électriques s'attirent ou se repoussent dans le vide sans que rien ne les relie, sans aucun support matériel. Pour tenter d'expliquer cela, MICHAEL FARADAY a introduit la notion de champ électrique. Si une charge  $q_A$  a un effet à distance sur une charge  $q_B$  qui se trouve éloignée, c'est parce que la charge  $q_A$  met tout l'espace qui l'entoure dans un état particulier : la charge  $q_A$ , par sa présence, produit en tout point de l'espace qui l'entoure, un champ électrique et c'est l'interaction de ce champ électrique avec la charge  $q_B$  qui produit la force que cette dernière ressent.



### III.2. DEFINITION

Que l'on approche une charge  $q$  ou une charge  $q'$  à une distance  $r$  d'une charge source  $Q$ , la loi de Coulomb indique que :

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{F}_{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq'}{r^2} \vec{u}$$

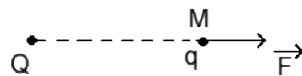
$$\frac{\vec{F}_q}{q} = \frac{\vec{F}_{q'}}{q'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Le rapport  $\frac{\vec{F}}{q}$  est indépendant de  $q$  ou  $q'$ ; il ne dépend que de la **charge source  $Q$**  et de la **distance** par rapport à cette source. On l'appelle **champ électrostatique  $\vec{E}$** .

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

Unité de  $E$  : volt par mètre ( $V \cdot m^{-1}$ )

$\vec{E}$  est le champ électrostatique créé par la charge source  $Q$  en **un point M de l'espace** situé à une distance  $r$ .  $\vec{E}$  traduit localement en tout point M, la modification des propriétés de l'espace due à la présence de la charge source  $Q$ .

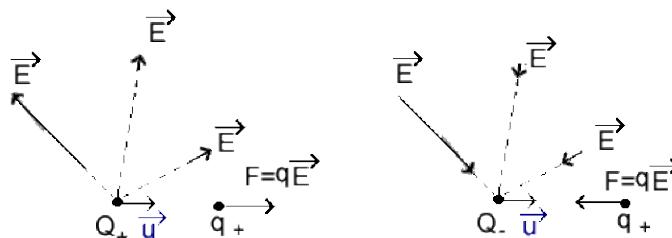


La force électrostatique s'exerçant sur une charge cible  $q$  placée en M s'exprime alors par :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

### III.3. CHAMP DE VECTEURS $\vec{E}$

Contrairement à la force électrostatique  $\vec{F} = q\vec{E}$  dont le point d'application est la position de la charge  $q$ , le champ  $\vec{E}$  peut être défini en tout point M quelconque de l'espace (sauf sur la source).

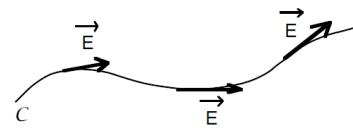


$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} :$$

- Son module dépend des coordonnées du point M auquel on le définit puisqu'il est inversement proportionnel au carré de la distance par rapport à la charge source  $Q$  ;
- Sa direction est radiale : elle passe toujours par la charge source  $Q$  ;
- Son sens est tel que :
  - $\vec{E}$  s'éloigne des sources  $Q$  positives ( $\vec{E}$  colinéaire à  $\vec{u}$  et de même sens) ;
  - $\vec{E}$  est dirigé vers les sources négatives  $Q$  ( $\vec{E}$  colinéaire à  $\vec{u}$  et de sens contraire).

### III.4. LIGNES DE CHAMP, TUBES DE CHAMP

Une ligne de champ est une courbe telle qu'en chacun de ses points, le champ électrostatique  $\vec{E}$  soit porté par la tangente à la courbe.



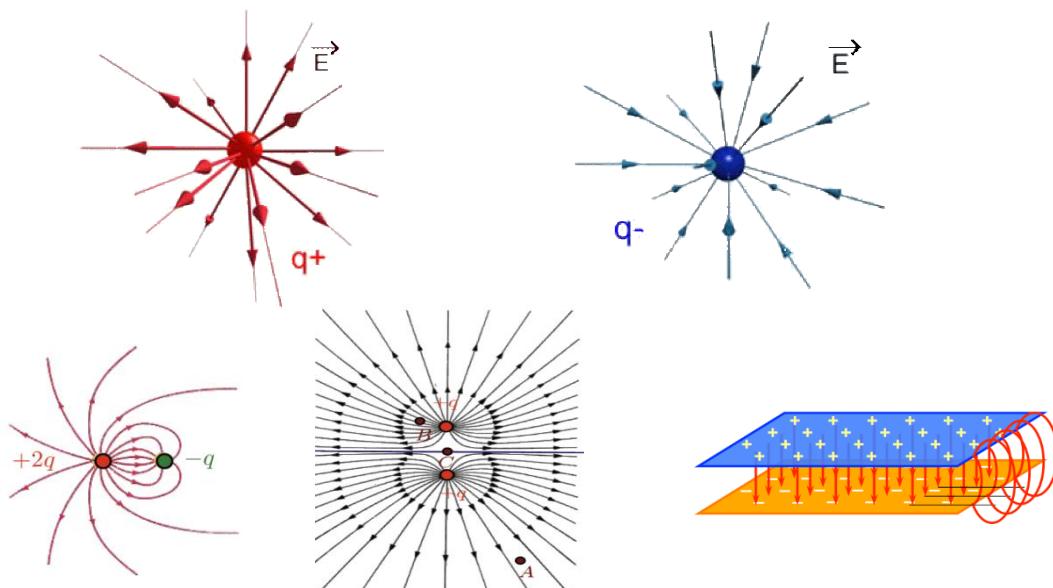
Dans l'espace il existe une infinité de lignes de champ et il passe une seule ligne de champ par chaque point de l'espace. On oriente chaque ligne de champ dans le sens du vecteur  $\vec{E}$ . Les lignes de champ s'éloignent des sources chargées positivement et se dirigent vers les sources chargées négativement.

Considérons un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  le long d'une ligne de champ électrostatique C. Le fait que le champ  $\vec{E}$  soit en tout point de C parallèle à  $d\vec{l}$  entraîne :  $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ .

L'ensemble des lignes de champ définit une cartographie du champ.

Les lignes de champ sont des courbes qui permettent de visualiser l'allure du champ électrostatique. Par construction

- elles sont tangentes au vecteur  $\vec{E}(r)$  ;
- elles sont orientées dans le sens de  $\vec{E}(r)$ ;
- Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part à l'infini ou part d'une charge q et se termine sur une charge de signe opposé.
- elles ne se croisent jamais en un point M sauf s'il existe une charge en M (auquel cas  $\vec{E}$  n'est pas défini en M).



2 charges opposées et différentes en valeur absolue

Ensemble de deux charges positives :

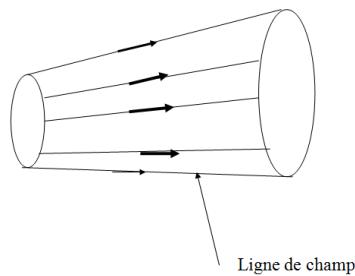
$$\bullet EA < EB$$

Deux plans chargés : Le champ est uniforme entre les deux plaques.

### Tube de champ

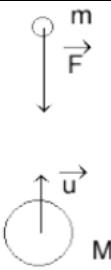
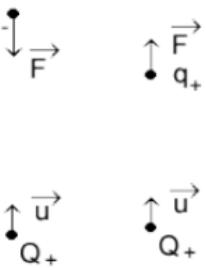
Un tube de champ est la surface imaginaire formée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée (par exemple un cylindre dans le cas de lignes de champ parallèles s'appuyant sur un cercle).

Grâce à l'effet de **polarisation diélectrique**, on peut matérialiser les lignes de champ avec des grains de semoule ou des semences de gazon qui s'orientent dans le sens du champ.



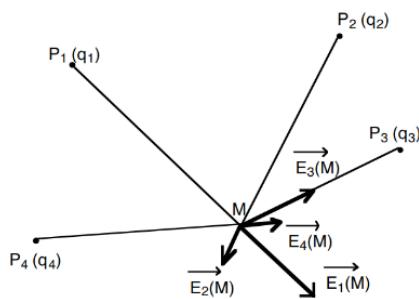
([Vidéo d'illustration](#))

### III.5. COMPARAISON DU CHAMP ELECTROSTATIQUE AVEC LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Interaction entre 2 masses M et m distantes de r	Interaction entre 2 charges Q et q distantes de r
 $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}$ $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$	 $\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Force toujours attractive</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Force attractive ou répulsive</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Champ de pesanteur</li> </ul> $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Champ électrostatique</li> </ul> $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Champ radial qui ne dépend que de la masse de la terre et de la distance r par rapport au centre de la terre</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Champ radial qui ne dépend que de la charge source et de la distance r par rapport à la source.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\vec{g}</math> existe en tout point de l'espace</li> <li>• <math>\vec{g}</math> caractérise l'influence de la terre</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\vec{E}</math> existe en tout point de l'espace</li> <li>• <math>\vec{E}</math> caractérise l'influence de la source Q</li> </ul>
Toute masse m située dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ créée par la terre subit une force $\vec{F} = m\vec{g}$ appelée poids	Toute charge q située dans le champ électrostatique créé par la source Q subit une force $\vec{F} = q\vec{E}$ appelée force électrostatique

### III.6. THEOREME DE SUPERPOSITION - CAS D'UNE DISTRIBUTION DISCRETE

Le théorème de superposition permet d'énoncer dans le cas d'une distribution discrète de charges  $q_1, q_2, \dots, q_n$  que le champ électrostatique créé en un point M de l'espace est la somme vectorielle des champs électrostatiques créés par chacune des charges  $q_i$  soit :



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{U}_i$$

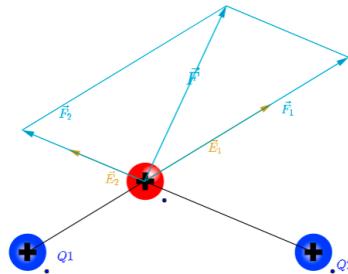
Mettons une charge positive  $q$  en présence de deux charges positives  $Q_1$  et  $Q_2$ .

- $q$  est soumise à une force  $\vec{F}_1$  de la part de  $Q_1$
- $q$  est soumise à une force  $\vec{F}_2$  de la part de  $Q_2$

La force  $\vec{F}$  résultante est la somme vectorielle des deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = q\vec{E} \text{ avec } \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Le champ  $\vec{E}$  résultant est la somme vectorielle des deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ .



### III.7. THEOREME DE SUPERPOSITION - CAS D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE

Lorsque les charges sont indiscernables séparément pour l'observateur, il faut découper la source en éléments infiniment petits de charge  $dQ$ . Chacun de ceux-ci crée un champ élémentaire  $d\vec{E}$  en un point M de l'espace. Le champ total est l'intégrale :

$$\vec{E} = \int_{source} d\vec{E} = \int_{source} \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

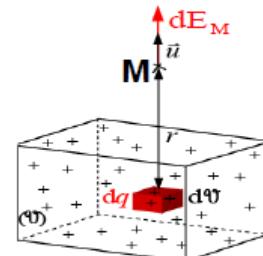
#### 1 Distribution volumique de charges

Soit un volume  $V$  chargé. Chaque élément de volume  $dV$  contient une charge élémentaire  $dq = \rho \cdot dV$ , crée un champ électrostatique élémentaire en M :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \vec{u}$$

Le champ électrostatique total créé au point M par la charge totale contenue dans le volume  $V$  est obtenu par intégration et vaut :

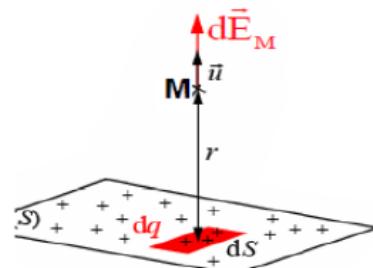
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \vec{u}$$



#### 2 Distribution surfacique de charges

Soit une surface  $S$  chargée. Chaque élément de surface  $dS$  contient une charge élémentaire  $dq = \sigma \cdot dS$ , crée un champ électrostatique élémentaire en M :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \vec{u}$$



Le champ électrostatique total créé au point M par la charge totale sur la surface  $S$  est obtenu par intégration et vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \vec{u}$$

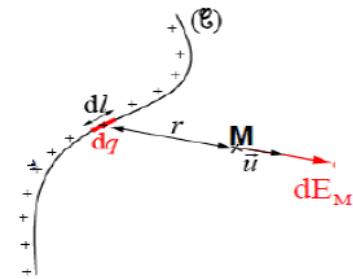
### 3 Distribution linéique de charges

Soit un fil de contour C chargé. Chaque élément de longueur  $dl$  contient une charge élémentaire  $dq = \lambda \cdot dl$ , crée un champ électrostatique élémentaire

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u}$$

en

M :



Le champ électrostatique total créé au point M par la charge totale sur le contour C est obtenu par intégration et vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \vec{u}$$

**TD DE L'ECUE 1**  
**SERIE 2 : LE CHAMP ELECTROSTATIQUE**

**Exercice 1 : Balance de torsion de Coulomb**

Une balance de Coulomb est constituée d'une tige horizontale isolante dont une extrémité B, située à la distance R de son centre O, porte la charge électrique  $q_B$ , de masse  $m$ , l'autre une masse identique électriquement neutre. Cette tige, de moment d'inertie  $I$  par rapport à un axe perpendiculaire passant par O, est soumise à un couple de rappel  $-C\theta$ .

1. Trouver l'expression de la période d'oscillation  $T_0$  de ce pendule.
2. On soumet le pendule, initialement à l'équilibre, à l'action d'une charge électrique A, de valeur  $q_A$ , placée à une distance D de O. Trouver la nouvelle période des petites oscillations du pendule,  $T_0'$ , sachant que R est très petit devant D.

**Exercice 2 : Champ électrostatique produit par un dipôle sur son axe**

Deux charges ponctuelles fixes A(+q) et B(-q) sont distantes d'une longueur d.

1. Trouver  $\vec{E}$  le long de AB. Poser  $d = 2a$ . Cas particuliers : au milieu en O puis très près de A ( $x_0 = 0,25 \text{ nm}$ ) ;  $d = 0,5 \text{ nm}$ .
2. Donner une représentation graphique de la variation du champ en fonction de x.

**Exercice 3 : Champ électrostatique créé par un disque chargé**

On considère une distribution uniforme de charge  $\sigma$  sur la surface d'un disque.

1. Calculer le champ  $\vec{E}$  créé par une telle distribution en un point M de l'axe du disque.
2. Représenter la variation de ce champ en fonction de z.
3. Traiter le cas d'un plan infini

**Exercice 4 : Champ électrostatique créé par une ligne infinie**

1. Calculer directement le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé, en un point M, à la distance R, par une distribution linéique de charge, de densité  $\lambda$ , repartie uniformément sur une ligne infinie.
2. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss.

**Exercice 5 : Champ électrostatique créé par un cercle chargé**

1. On considère une distribution linéique de charge, de densité  $\lambda$ , uniforme sur le cercle d'équations cartésiennes  $x^2+y^2=R^2$ ,  $z=0$ . Calculer le champ électrostatique créé en un point M de l'axe Oz, de coordonnée z.
2. Calculer  $\vec{E}$  en tout point de l'axe Oz.

**Exercice 6 : Champ électrostatique créé par une demi-sphère chargée**

On considère une distribution surfacique de charge uniforme  $\sigma$  sur une demi-sphère. Calculer le champ électrostatique à l'origine O.

**Exercice 7 : Champ électrostatique créé par une distribution sphérique uniforme de charge**

Quel est le champ électrostatique radial produit, en tout point de l'espace, par une distribution sphérique uniforme de charge, de densité  $\rho_0$ , à l'intérieur d'une sphère de rayon R ?

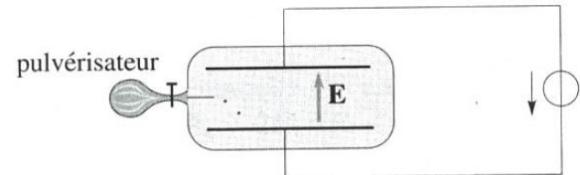
**Exercice 8 : Champ électrostatique créé par une distribution sphérique de charge surfacique  $\sigma_0 \cos\theta$** 

Calculer le champ électrostatique créé, en son centre O, par une distribution surfacique de charge, de densité  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ .

**Exercice 9 : Expérience de Millikan**

Pour mesurer les charges électriques, Millikan pulvérisait des gouttelettes d'huile ou de glycérine entre deux plateaux horizontaux parallèles, placés dans une cloche en verre contenant un gaz (voir figure ci-dessous). Il créait alors un champ uniforme vertical  $\vec{E}$  en chargeant ces plateaux et observait le mouvement des gouttelettes à l'aide d'un microscope. Lors de la pulvérisation, certaines gouttelettes s'électrisaient et prenaient une charge q. on désigne par r le rayon d'une gouttelette,  $\rho^*$  sa masse

volumique et  $\rho_a$  celle du gaz, et on admet que le gaz exerce une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse et au rayon des gouttelettes.



1. Calculer la vitesse limite de chute d'une gouttelette pour  $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{E} \neq \vec{0}$
2. Montrer que l'on peut en déduire la valeur de q.

**Exercice 10 : Champ électrostatique créé par une distribution volumique écrantée**

Quel est le champ électrostatique radial produit, par une distribution volumique de charge, à symétrie sphérique,

de la forme :  $\rho(r) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ , en un point M, situé à la distance R de l'origine ? Etudier le cas où R est

très grand devant  $a$ .

**Exercice 11 : Application du principe de superposition**

Une boule de centre O et de rayon R porte la densité volumique uniforme  $\rho$ . Elle est creusée d'une cavité de centre O' ( $OO' = d : d < R$ ) vide de charge. Calculer le champ  $\vec{E}$  dans la cavité.

**Rappel du principe de superposition :**

*L'effet de plusieurs causes agissant simultanément est la somme des effets que produiraient chacune de ces causes, si elle agissait seule. On exprime mathématiquement cette propriété en posant que l'effet dépend linéairement de la cause. Cet exercice montre comment l'application de ce principe permet de venir à bout très simplement de problèmes qui autrement présenteraient des difficultés techniques redoutables.*

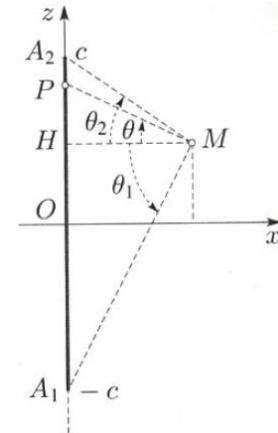
**Exercice 12 : Champ électrostatique créé par un segment chargé**

On considère un segment  $A_1A_2$  avec une charge linéique  $\lambda$ , d'équation en coordonnées cartésiennes :  $x=0$ ,  $y=0$  ;  $|z| \leq c$  (voir figure ci-dessous). On se propose d'exprimer le champ électrostatique produit par cette distribution au point M du plan  $Ozx$  de coordonnées  $x, z$ .

1. Donner l'expression du champ électrostatique élémentaire  $d\vec{E}$  produit au point M par l'élément de charge situé en P. on introduira l'angle  $\theta$  que fait le vecteur  $\overrightarrow{MP}$  avec le vecteur  $\overrightarrow{MH}$ , H étant la projection de M sur la direction du segment. En déduire que le champ  $\vec{E}$  est le même que celui crée par un arc de cercle, de rayon  $x$  et de centre M, dont les extrémités sont les points d'intersection du cercle avec les directions  $MA_1$  et  $MA_2$ .
2. Trouver les composantes  $E_x$  et  $E_z$  du champ  $\vec{E}$  au point M, en fonction des angles  $\theta_1 = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MA_1})$  et  $\theta_2 = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MA_2})$ .
3. Que deviennent les expressions précédentes en des points situés sur les axes  $Ox$  et  $Oz$  ?
4. Quel est le champ produit par une droite chargée infinie ?

**Exercice 13 : champ créé par deux fils infinis**

Deux fils rectilignes, infinis et parallèles, distants de  $a$ , portent des charges de densités linéiques  $+\lambda$  et  $-\lambda$ , respectivement. Tout point M de l'espace est défini par ses distances  $x$  et  $x'$  aux deux fils. Quel est le champ créé en M par ces deux fils ?

**Exercice 14 : Champ électrostatique créé par une distribution volumique radiale, en  $1/r$  et écrantée**

On considère une distribution volumique de charge, à symétrie sphérique, de la forme :

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi a^2 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

1. Quelle est la charge contenue dans une sphère, centrée à l'origine et de rayon  $r$ ? Que devient cette charge lorsque  $r$  tend vers 0 et lorsque  $r$  tend vers l'infini ?
2. Trouver le champ électrostatique radial produit par cette distribution.

## CHAPITRE IV : THEOREME DE GAUSS

### IV.1. INTRODUCTION

#### IV.1.1. Objectifs :

Être capable de calculer très rapidement l'expression du champ électrostatique créé par une source possédant un degré de symétrie élevé.

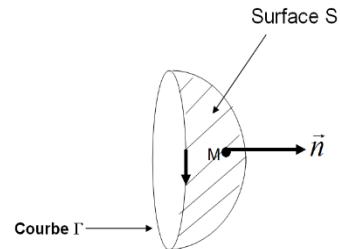
#### IV.1.2. Prérequis :

Le théorème de Gauss s'appuie sur la notion de flux d'un vecteur. Cette nouvelle notion est introduite dans ce qui suit. Cependant, une bonne maîtrise des opérations élémentaires sur les vecteurs, en particulier du produit scalaire, est nécessaire.

Nous allons établir l'un des théorèmes les plus importants de l'électrostatique : le théorème de Gauss, dans ses versions non locale (intégrale) et locale. Ce théorème s'applique à tout champ radial dont l'intensité varie en  $r^{-2}$  (champ électrostatique et également champ gravitationnel).

### IV.2 NOTION DE SURFACE ORIENTEE

Soit une surface  $S$ . Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est perpendiculaire en  $M$  à  $S$ . Pour orienter la surface  $S$ , on choisit un sens de parcours du contour fermé  $\Gamma$  et le sens de la normale positive est donné par la règle du tire-bouchon ou la règle de la main droite.

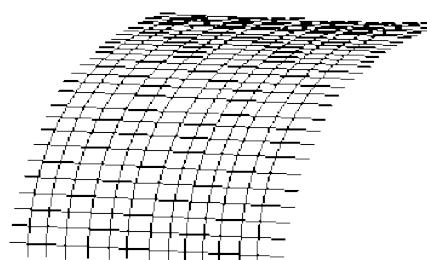


Pour une surface fermée, par convention, on l'oriente vers l'extérieur.

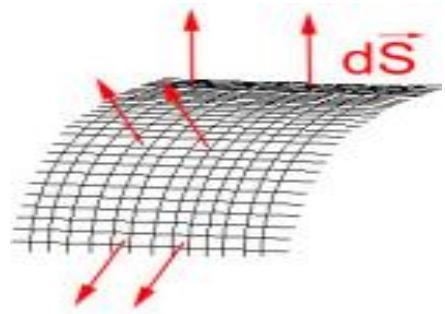
$$\vec{S} = S\vec{n}$$

### IV.3. ELEMENT DE SURFACE

En traçant deux réseaux de lignes sur une surface quelconque  $S$ , on la décompose en surfaces plus petites, délimitées par ces lignes (voir la figure ci-contre).



Si les lignes sont très nombreuses et si elles sont distribuées régulièrement, chacune de ces surfaces, a une aire très petite. Soit un point  $M$  de la surface  $S$ . Si le nombre des lignes augmente indéfiniment, la petite surface où se trouve le point  $M$  diminue et tend à se rapprocher de la portion de plan tangent en  $M$  à la surface  $S$ . A la limite, son aire  $dS$  est infiniment petite et elle se confond avec une portion de plan. On l'appelle élément de surface entourant le point  $M$ . On peut ainsi considérer qu'une surface quelconque  $S$ , est la juxtaposition d'un nombre infini d'éléments de surface  $dS$ .



#### IV.4. VECTEUR "NORMALE"

Considérons un élément de surface d'aire  $dS$ .

On associe à cet élément un vecteur appelé vecteur "normale"  $d\vec{S}$  défini de la manière suivante :

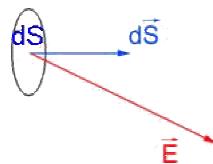
- son origine est un point M de l'élément de surface;
- sa direction est normale à la surface ;

$$d\vec{S} = dS\vec{n}$$

Le vecteur  $d\vec{S}$  est donc infiniment petit. Son orientation est choisie arbitrairement (vers l'extérieur pour les surfaces fermées). Pour orienter  $d\vec{S}$ , on peut aussi utiliser la règle du « tire-bouchon ».

#### IV.5. NOTION DE FLUX ELEMENTAIRE

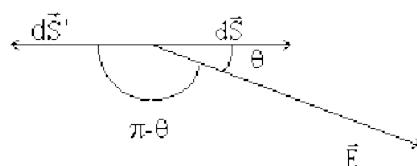
Désignons par  $\vec{E}$  le vecteur champ électrostatique au point M. Soit  $dS$  l'élément de surface entourant ce point et le vecteur  $d\vec{S}$  correspondant.



Par définition, **le flux**  $d\phi$  du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers l'élément de surface considéré  $dS$  est égal au produit scalaire :  $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

On l'appelle flux élémentaire pour indiquer qu'il est relatif à un élément de surface  $dS$ .

Le signe du flux dépend du sens du vecteur  $d\vec{S}$ . Considérons en effet les deux vecteurs opposés  $d\vec{S}$  et  $d\vec{S}'$ , associés à un élément de surface.



Si le vecteur  $d\vec{S}$  fait avec le champ électrostatique  $\vec{E}$  l'angle  $\theta$ , le vecteur  $d\vec{S}'$  fait l'angle  $\pi - \theta$ , et comme  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ , les produits scalaires  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  et  $\vec{E} \cdot d\vec{S}'$  ont des valeurs opposées.

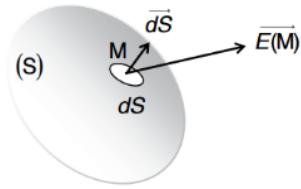
Pour calculer le flux algébrique du champ électrique  $\vec{E}$  à travers un élément de surface  $dS$ , il faut donc choisir, en accord avec la notion de flux positif, le sens du vecteur  $d\vec{S}$  associé à cet élément.

## IV.6. FLUX D'UN VECTEUR CHAMP A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE

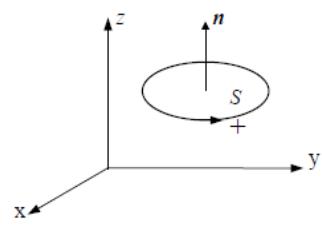
### IV.6.1. Flux élémentaire à travers une surface fermée

On considère les éléments de surface composant la surface  $S$ . On calcule pour chacun d'eux le flux élémentaire,  $d\Phi$  du vecteur  $\vec{E}(M)$  à travers  $d\vec{S}$  est par définition  $d\Phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$ .

Pour faire ce calcul, les vecteurs  $d\vec{S}$  associés aux éléments de surface sont tous orientés du même côté de la surface  $S$ .



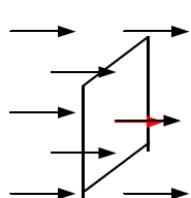
$d\vec{S}$ : vecteur élémentaire de surface (infiniment petit), est orienté suivant la normale extérieure à la surface fermée  $S$  au point  $M$ . Pour une surface quelconque, on peut utiliser la règle du « tire-bouchon ». On oriente le contour  $C$  délimitant la surface en choisissant arbitrairement un sens de parcours positif (+). Le vecteur  $d\vec{S}$  est orienté suivant la progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens (+).



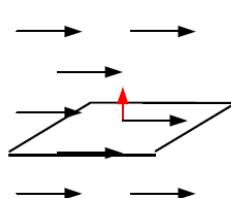
### IV.6.2. Flux total à travers une surface fermée

On obtient le flux  $\phi$  du vecteur champ électrostatique à travers la surface  $S$  en faisant la somme des flux élémentaires :  $\Phi = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$

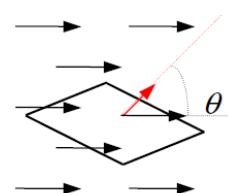
#### Exemple de calcul de flux d'un vecteur quelconque $\vec{V}$ à travers une surface.



$$\phi = V.S$$



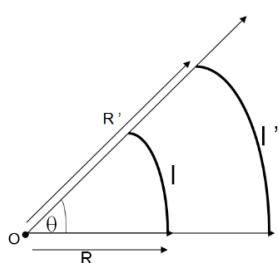
$$\phi = 0$$



$$\phi = V.S.\cos\theta$$

## IV.7 NOTION D'ANGLE SOLIDE

### IV.7.1 Angle plan



$l$  et  $l'$  sont des longueurs d'arc.

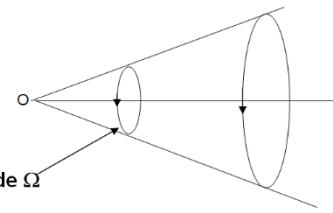
$$\theta = \frac{l}{R} = \frac{l'}{R'} : \text{angle plan.}$$

L'unité d'angle plan est le radian.

#### IV.7.2 Angle solide

C'est l'extension tridimensionnelle de la notion d'angle définie dans le plan. Un angle solide est une portion d'espace comprise à l'intérieur d'un cône.

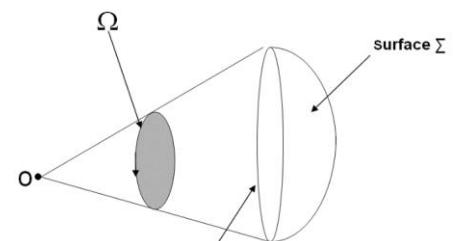
Soit un cône de sommet O et de demi-angle au sommet  $\theta$ , la portion d'espace, délimitée par les génératrices du cône, correspond à un angle "solide"  $\Omega$ .



#### IV.7.3 Expression de l'angle solide

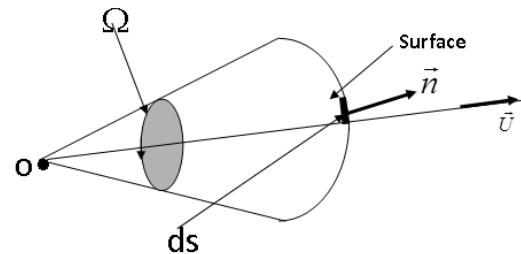
On définit l'angle solide par :  $\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$ .

$\Sigma$  est une portion de sphère de centre O délimitée par l'angle solide  $\Omega$  situé à une distance R de O.



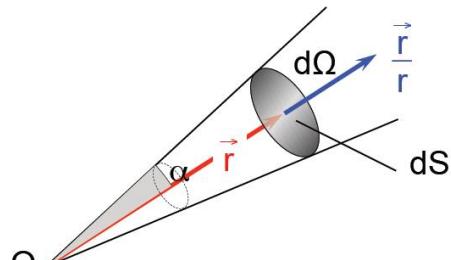
#### IV.7.4 Angle solide élémentaire

$dS$  est un élément de surface ; nous définissons l'angle  $\theta = (\vec{n}, \vec{u})$ . Le contour de  $dS$  est vu du point O sous l'angle solide  $d\Omega$  et par définition :



$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{U}}{r^2} \cdot d\vec{S}.$$

$d\Omega$  apparaît comme le flux du vecteur  $\frac{\vec{U}}{r^2}$  à travers l'élément de surface  $dS$ .



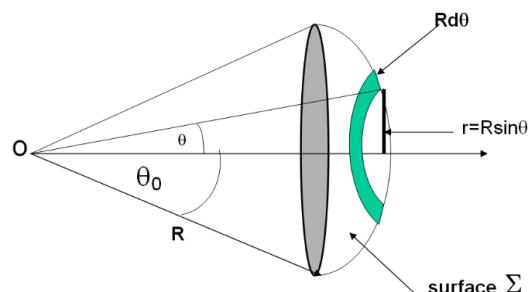
#### Calcul de l'angle solide sous lequel on voit une calotte sphérique

$$\Rightarrow d\Sigma = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta : \text{surface de la couronne}$$

$$\Rightarrow d\Sigma = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \Sigma = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_0)$$

$$\text{Donc } \Omega = \frac{\Sigma}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \theta_0).$$



#### Angles solides usuels :

- Si  $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Omega = 2\pi$  (demi-espace).

- Si  $\theta_0 = \pi \Rightarrow \Omega = 4\pi \rightarrow \Omega$  dans tout l'espace vaut  $4\pi$  sr ;

**La face d'un cube** est vue sous  $\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

#### IV.8. RELATION ENTRE FLUX ET ANGLE SOLIDE

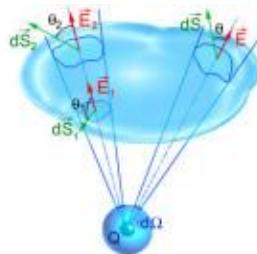
Soit un point M appartenant à l'élément de surface  $dS$ . Le champ  $\vec{E}$  créé en M par la charge  $Q$  est porté par l'axe (OM) et dirigé de O vers M si  $Q > 0$ ; son module est

$$\|\vec{E}\| = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ avec } r = OM$$

Le flux élémentaire de ce champ électrostatique à travers l'élément de surface  $dS$  entourant le point M est :  $d\phi = \|\vec{E}\| \cdot dS \cdot \cos \theta$ ;  $d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2} \cdot dS \cdot \cos \theta$

Or  $\frac{dS \cdot \cos \theta}{r^2}$  est l'angle solide élémentaire  $d\Omega$  sous lequel le contour de  $dS$  est vu de O (géométriquement, c'est un cône de sommet O qui est tangent à l'élément de surface  $dS$ ).

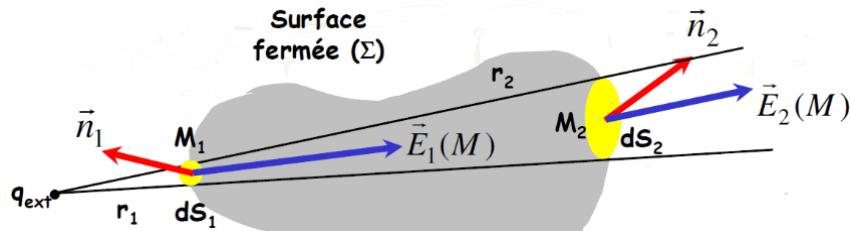
$$d\phi = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS \cdot \cos \theta = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$



#### IV.9 FLUX DU CHAMP ELECTROSTATIQUE - THEOREME DE GAUSS

##### IV.9.1 Flux à travers une surface fermée

###### IV.9.1.1. Cas de charges extérieures à une surface $S_G$ fermée



Le cône de sommet  $q_{ext}$  délimitant un angle solide  $d\Omega$  découpe sur  $\Sigma$  deux surfaces élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$  de normales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  orientées vers l'extérieur.  $d\phi_1$  est le flux de  $\vec{E}_1$  à travers  $dS_1$  et a pour expression :  $d\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_1 \cos \alpha_1}{r_1^2} = -\frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} |d\Omega|$

En effet,  $\cos \alpha_1 < 0$  car  $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$ .  $d\phi_2$  est le flux de  $\vec{E}_2$  à travers  $dS_2$  et a pour expression :  $d\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 =$

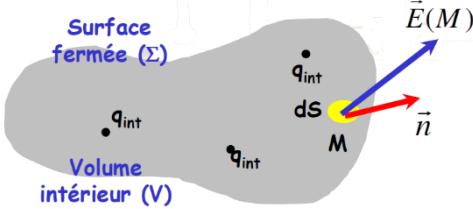
$$\frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_2 \cos \alpha_2}{r_2^2} = +\frac{q_{ext}}{4\pi\epsilon_0} |d\Omega|$$

Nous observons alors que  $d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$ .

Le flux du champ sortant de la surface fermée ( $\Sigma$ ) est nul si les charges sont à l'extérieur de cette surface fermée.

Le flux sortant du champ créé par la charge  $q_{ext}$  à travers la surface fermée est nul (les flux à travers  $dS_1$  et  $dS_2$  se compensent deux à deux : les champs diminuent comme  $\frac{1}{r^2}$  mais les surfaces  $dS_1$  augmentent comme  $r^2$ ).

#### IV.9.1.2. Cas de charges intérieures à une surface $S_G$ fermée.



On considère des charges ponctuelles  $q_{int}$  placées à l'intérieur d'un volume délimité par une surface fermée ( $S$ ) quelconque. Le flux élémentaire  $d\phi$  du champ  $\vec{E}(M)$  à travers la surface élémentaire  $dS$  est :  $d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$ .

Donc  $\phi = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0} \Omega$  ; Nous sommes à l'intérieur de la surface fermée donc  $\Omega = 4\pi$  et  $\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$ .

Le flux de  $\vec{E}$  envoyé à travers une surface fermée est égal au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme des charges intérieures, quelles que soient les charges extérieures.

#### IV.9.2 Enoncé du théorème de Gauss

##### IV.9.2.1 Forme intégrale du théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée  $\Sigma$  est égal dans le vide, à la somme des charges électrique situées à l'intérieur du volume  $V$  défini par la surface de GAUSS divisé par  $\epsilon_0$ .

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Où  $Q_{int}$  représente la charge totale contenue dans  $V$  :

$$Q_{int} = \sum_{i=1}^N q_i \text{ ou } Q_{int} = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

##### IV.9.2.2 Forme locale du théorème de GAUSS

Considérons le cas d'une distribution continue de charges en volume. Nous avons :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dV ;$$

Or  $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV$  (relation de Green-Ostrogradsky),

la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unité de volume.

Finalement nous avons :  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot dV$ ,

Soit  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  qui est **la forme locale du théorème de GAUSS**.

#### IV.9.3 Méthodologie

Le théorème de Gauss est un outil précieux pour déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$  en tout point M lorsque les charges sources possèdent des symétries élevées. Les étapes du calcul de  $\vec{E}$  sont les suivantes :

- 1- Trouver l'orientation du champ par des considérations de symétrie ;
- 2- Choisir une "surface de Gauss"  $S_G$  (imaginaire, n'ayant aucune réalité matérielle) ;
  - passant par le point d'étude M ;
  - la plus adaptée pour que l'expression du flux de  $\vec{E}$  à travers elle soit simple ;
  - possédant les propriétés de symétrie de la source ;
  - ne coïncidant pas avec une surface matérielle chargée
- 3- Exprimer le flux  $\phi$  à travers la surface fermée  $S_G$
- 4- Déterminer la charge  $Q_{int}$  intérieure au volume délimité par  $S_G$
- 5- Appliquer le théorème de Gauss  $\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

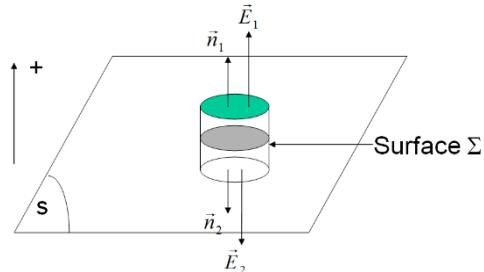
Si la surface de Gauss est bien choisie, le membre de gauche de l'équation est une fonction simple de  $\vec{E}$  et de la distance  $r = OM$ . On peut donc obtenir l'expression du champ  $\vec{E}$  en fonction de la distance  $r$  et des charges sources.

#### IV.9.4 Application du théorème de GAUSS

##### Relation de passage

Montrons que de la composante normale du champ  $\vec{E}$  à la traversée d'une couche chargée subit une Discontinuité.

La surface S est une surface équipotentielle donc les champs lui sont perpendiculaires.



Le flux des champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  est :

$$d\phi = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n}_1 dS$$

en effet  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n}$

$$\Rightarrow d\phi = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

avec  $\sigma$  comme charge surfacique.

$$\text{Nous déduisons donc : } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}.$$

Nous observons une discontinuité de la composante normale du champ  $\vec{E}$  à la traversée d'une surface chargée.

#### IV.10 Propriétés de symétrie et d'invariance du champ électrostatique

La symétrie (ou l'invariance) d'une distribution de charges est le fait que si l'on regarde cette distribution selon des angles de vue différents, la distribution paraît identique. Autre manière de le dire : si l'on effectue une opération de symétrie particulière sur la distribution de charges celle-ci ne change pas.

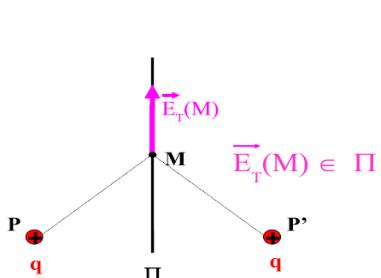
L'utilisation des symétries des distributions de charges permet de simplifier le calcul du champ électrostatique. L'utilisation des propriétés de symétrie du champ  $\vec{E}$  permet dans bien des cas de déterminer les composantes du champ. L'exploitation des invariances de la distribution nous renseigne sur les variables dont dépendent les composantes de  $\vec{E}$ .

##### IV.10.1 Principe de Curie

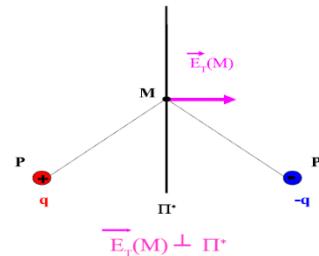
« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ».

Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie (ou d'invariances) d'une distribution de charges, ces propriétés de symétries (ou d'invariances) seront applicables au champ électrostatique qui résulte de ces charges.

Les éléments de symétrie agissent sur les directions des grandeurs vectorielles, tandis que les invariances agissent sur les variables dont dépendent ces grandeurs.



Champ  $\vec{E}$  sur un plan de symétrie  $\Pi$



Le champ  $\vec{E}$  est perpendiculaire au plan d'antisymétrie  $\pi^*$

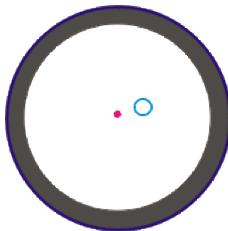
##### IV.10.2 Règles d'invariances et de symétries

- 1) Invariance d'une distribution par translation le long d'un axe : le champ créé ne dépendra pas de la variable associée à cet axe.
- 2) Invariance d'une distribution par rotation autour d'un axe : en coordonnées cylindriques ou sphériques, le champ créé ne dépendra pas de l'angle  $\theta$  ou  $\phi$  servant à mesurer la rotation.
- 3) Plan de symétrie : (S) est un plan de symétrie d'une distribution si, pour tout point P de cette distribution, son symétrique  $P'$  appartient à la distribution et porte la même charge que P.

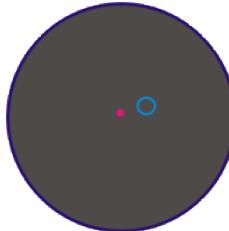
#### IV.10.3 Cas d'une symétrie sphérique

Une distribution de charges sources a une symétrie sphérique si la densité de charges en un point M est uniquement fonction de la distance  $r$  à un centre O et non pas de la direction  $\overrightarrow{OM}$ .

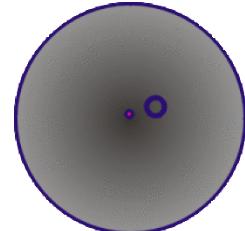
Exemples :



Sphère métallique chargé en surface

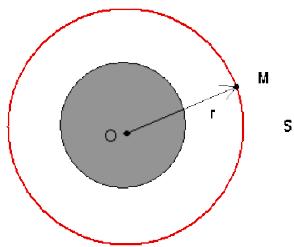


Nuage de charges sphérique de densité volumique  $\rho$  constante

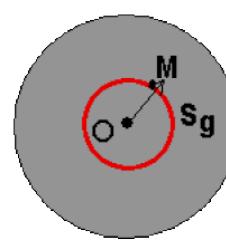


Nuage de charges sphérique de densité volumique  $\rho = f(r)$

1. Par raison de symétrie, le champ électrostatique est radial ;
2. La surface de Gauss la plus adaptée est une sphère centrée sur  $O$  et passant par le point d'étude M (celui-ci peut être intérieur ou extérieur à la source)



Point d'étude M extérieur à la source



Point d'étude M intérieur à la source

3. Le flux s'exprime simplement  $\phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

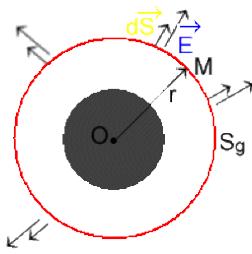
En effet :  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires et de même sens. Donc le flux  $\phi$  se réduit à :

$$\phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_G} E \cdot dS$$

Le **module** du champ  $E$  est le même en tout point de  $S_G$  par symétrie et peut donc être sorti de l'intégrale :  $\phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_G} E \cdot dS = E \oint_{S_G} dS = ES_G$

Or l'aire totale de la surface de Gauss  $S_G = 4\pi r^2$  donc  $\phi = ES_G = E \cdot 4\pi r^2$

Il ne reste plus qu'à évaluer la charge intérieure  $Q_{int}$  au volume délimité par  $S_G = 4\pi r^2$  suivant la distribution considérée. Le théorème de Gauss permet alors de déterminer le module du champ  $\vec{E}$  en écrivant :  $\phi = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

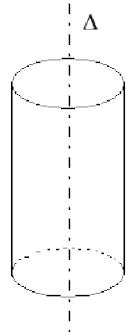


#### IV.10.4 Cas d'une symétrie axiale

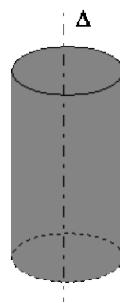
Une distribution de charges sources a une symétrie axiale si la densité de charges en un point  $M$  est uniquement fonction de la distance  $r$  à un axe  $\Delta$ .

Exemples :

Cylindre métallique  
chargé en surface



Nuage de charges cylindrique de  
densité volumique  $\rho = cte$

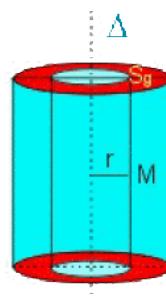
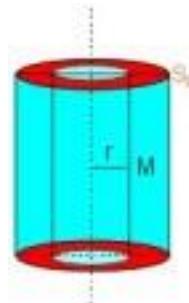


Nuage de charges cylindrique de  
densité volumique  $\rho = f(r)$



1. Par symétrie, le champ est radial (loin des bords de la source) ;
2. La surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre axé sur  $\Delta$  et passant par le point d'étude  $M$  (celui-ci peut être intérieur ou extérieur à la source)

Point d'étude extérieur à la source      Point d'étude intérieur à la source



3.

Sur les sections droites  $S$  du cylindre de Gauss  $S_g$ , les vecteurs  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont orthogonaux, le flux de  $\vec{E}$  à travers  $S$  est donc nul. Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface de Gauss fermée est réduit au flux à travers la surface latérale.

$$\phi = \iint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Sur la surface latérale  $\vec{E}$  et  $d\vec{S}$  sont colinéaires et de même sens donc le flux se réduit à :

$$\phi = \iint_{S_{latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{latérale}} E \cdot dS$$

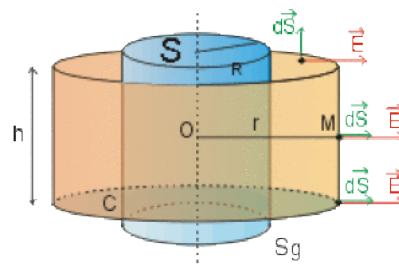
$E$  est le même en tout point de  $S_G$  et peut donc être sorti de l'intégrale :

$$\phi = E \iint_{S_{latérale}} dS = E \cdot S_{latérale}$$

Or la surface latérale de la surface de Gauss est égale à  $2\pi rh$  donc  $\phi = ES_G = E \cdot 2\pi rh$

Il ne reste plus qu'à évaluer la charge  $Q_{int}$  intérieure au volume délimité par  $S_G$  suivant la distribution considérée.

Le théorème de Gauss permet alors de calculer le module du champ  $\vec{E}$  en écrivant :  $\phi = E \cdot 2\pi rh = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$



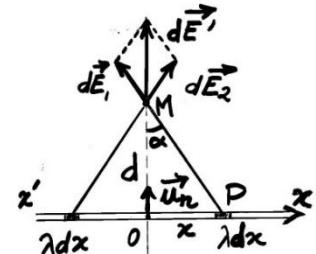
#### IV.11 Exercices d'application

- **Exercice 1 : Calcul du champ créé par un fil infiniment chargé sur en tout de l'espace.**

Champ  $\vec{E}$  créé par un fil rectiligne indéfini de densité uniforme  $\lambda (\lambda > 0)$ .

#### Solution

Par raison de symétrie, le champ demandé est perpendiculaire au fil.



- **Première méthode : calcul direct**

$$dE = dE_1 \cos(\alpha) = k \frac{\lambda \cdot dx}{PM^2} \cos(\alpha); PM = \frac{d}{\cos(\alpha)}; x = d \cdot \tan(\alpha); dx = \frac{d}{\cos^2(\alpha)} \cdot d\alpha$$

$$dE = k\lambda \frac{\cos^2(\alpha)}{d^2} \cos(\alpha) \frac{d}{\cos^2(\alpha)} \cdot d\alpha = \frac{k\lambda}{d} \cos(\alpha) \cdot d\alpha$$

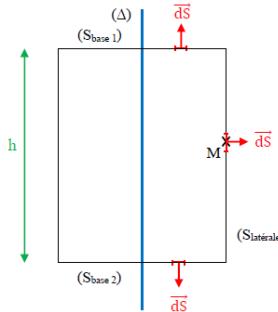
$$E = \frac{k\lambda}{d} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha) \cdot d\alpha; \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}_r \text{ (Radial)}$$

- **Deuxième méthode : théorème de Gauss**

En considérant comme surface de Gauss, le cylindre de rayon  $d$  dont l'axe est le fil chargé, on calcule le flux total de  $\vec{E}$  :  $\phi = \phi_1 + \phi_L + \phi_2$  avec  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  car  $\vec{E} \perp \vec{n}_1$  et  $\vec{E} \perp \vec{n}_2$ .  $\phi_L = \vec{E} \cdot \vec{n}_L \cdot S_L$  car  $\vec{E}$  a la même valeur en tout

point de la surface latérale  $S_L$  puisque toute rotation autour de l'axe du cylindre ne change pas la distribution.  $\phi_L = 2\pi d \cdot h \cdot E$

**Théorème de GAUSS :**  $2\pi d \cdot h \cdot E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}_r$  (radial).



### ➤ Exercice 2 : Calcul du champ électrostatique créé par un disque chargé sur son axe.

Calculer le champ  $\vec{E}$  créé par un disque plan uniformément chargé en un point M de son axe.

#### Solution

Par raison de symétrie, le champ en M est axial.

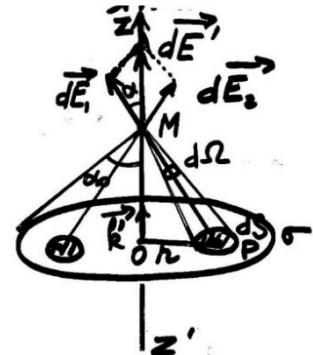
$$dE = k \cdot \frac{\sigma \cdot dS \cdot \cos(\alpha)}{PM^2} \text{ avec } \frac{dS \cdot \cos(\alpha)}{PM^2} = d\Omega$$

$d\Omega$  : angle solide sous lequel de M, on voit P.

$$dE = k \cdot \sigma \cdot d\Omega \Rightarrow E = k\sigma\Omega \text{ avec } \Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha_0)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos\alpha_0) \vec{k}' ; \cos\alpha_0 = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\vec{E} = E(z) \vec{k}' \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right]. \text{ Résultat valable pour } z > 0.$$



#### Calcul plus précis

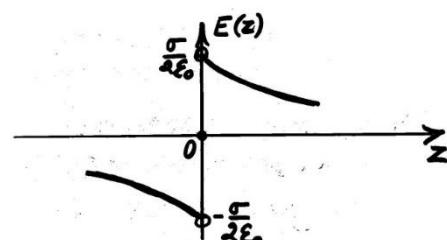
$$dE(z) = \frac{k\sigma \times 2\pi \times r \cdot dr}{(r^2+z^2)^2} \cos\alpha, dS = 2\pi r \cdot dr : \text{couronne circulaire}$$

$$dE(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z \cdot r \cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{z \cdot r \cdot dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R d \left( \frac{-1}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right)$$

$$, E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$$

$$E(-z) = -E(z)$$

- $z > 0, |z| = z \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$
- $z < 0, |z| = -z \Rightarrow E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$

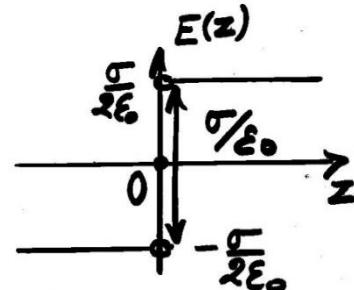


A la traversée du disque :  $\Delta E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

La discontinuité à la traversée d'un disque chargé uniformément est  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Pour un plan infini,  $R \rightarrow \infty$ ,  $\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}$

- $z > 0, E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- $z < 0, E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



### ➤ Exercice 3 : Champ d'un dipôle sur son axe

Deux charges fixes A(+q) et B(-q) sont distantes d'une longueur **d**.

Trouver  $\vec{E}$  le long de AB.

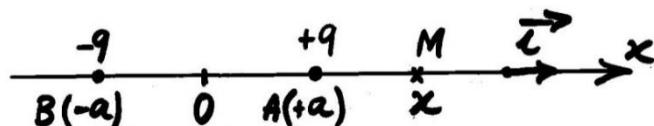
Cas particuliers : au milieu ; très près de A. poser **d=2a**.

A.N. **d=0,5 nm**; **x<sub>0</sub>=0,24 nm**

#### Solution

Dipôle : 2 pôles : +q et -q

ex : H-Cl est un dipôle permanent; liaison iono-covalente.



- $x > a$ ,  $\overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{i}$  ont le même sens.

$$\vec{E} = kq \left( \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \vec{i} = E(x) \vec{i} ; E(x) = kq \left( \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right), x \neq a$$

$$\Rightarrow E(x) = kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$E(x) > 0 : \vec{E} \rightarrow \vec{i}$$

- $0 \leq x < a$ ;  $\overrightarrow{BM} \rightarrow \vec{i}$  et  $\overrightarrow{AM} \rightarrow -\vec{i}$

$$\vec{E} = kq \left( \frac{-\vec{i}}{(x-a)^2} - \frac{\vec{i}}{(x+a)^2} \right) = E(x)\vec{i} ; E(x) = -kq \left( \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} \right)$$

$$E(x) = -kq \frac{(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2} \Rightarrow E(x) < 0; \vec{E} \text{ colinéaire à } -\vec{i}$$

**Symétrie**

$$x < -a; \vec{E} = kq \left( \frac{-\vec{i}}{(x-a)^2} - \frac{-\vec{i}}{(x+a)^2} \right); \vec{E} = -kq \left( \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E} = -kq \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2} \vec{i} = E(-x)\vec{i}$$

En changeant  $x$  en  $-x$ ,  $\overrightarrow{BM}$  et  $\overrightarrow{AM}$  deviennent colinéaires et de même sens que  $-\vec{i}$

$$\text{Ce qui fait deux changements de signes : } E(-x) = E(x)$$

**Exemple :**

- $x = 2a$

$$E(2a) = kq \frac{8a^2}{9a^4} = \frac{8kq}{9a^2} ; E(-2a) = -kq \frac{(-8a^2)}{9a^4} = \frac{8kq}{9a^2}$$

- $-a < x \leq 0, \overrightarrow{BM} \rightarrow \vec{i}$  et  $\overrightarrow{AM} \rightarrow -\vec{i}$

$$\vec{E} = kq \left( \frac{-\vec{i}}{(x-a)^2} - \frac{\vec{i}}{(x+a)^2} \right) \vec{E} = -kq \left( \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} \right) \vec{i} = E(x)\vec{i} ;$$

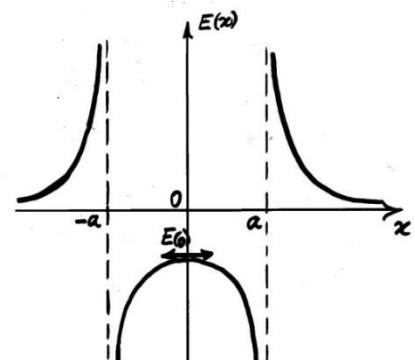
$$E(x) = -kq \frac{2(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$E(-x) = E(x)$$

**Cas particuliers**

$$\text{En O, } E(0) = \frac{2kq}{a^2} = -4,6 \cdot 10^{10} V/m$$

$$\text{En M}_0, E(x_0) = -1,44 \cdot 10^{13} V/m, E(x_0) \square 300E(0)$$



## CHAPITRE V : POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

### Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Calculer la circulation du champ électrique ;
- Calculer le potentiel électrostatique dans le cas d'une charge ponctuelle, une distribution discrète et continue de charges ;
- Définir les surfaces équipotentielles ;

Le champ électrostatique est un champ vectoriel, c'est-à-dire qu'il est caractérisé en chaque point  $M$  de l'espace par un vecteur  $\vec{E}(M)$  dont il faut connaître la direction, le sens et l'intensité.

Ce champ vectoriel peut être caractérisé simplement à l'aide d'une fonction scalaire que nous appellerons potentiel électrostatique, qui est souvent plus simple à déterminer. Cette appellation sera justifiée par l'interprétation de cette fonction en termes d'énergie potentielle d'une charge soumise aux effets d'un champ électrostatique.

### V.1 Circulation du champ électrique $\vec{E}$

#### Définition :

Si on a un champ de vecteurs  $\vec{E}(M)$  et une courbe quelconque (AB), on définit la circulation élémentaire de  $\vec{E}$  selon un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  par  $\delta C = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

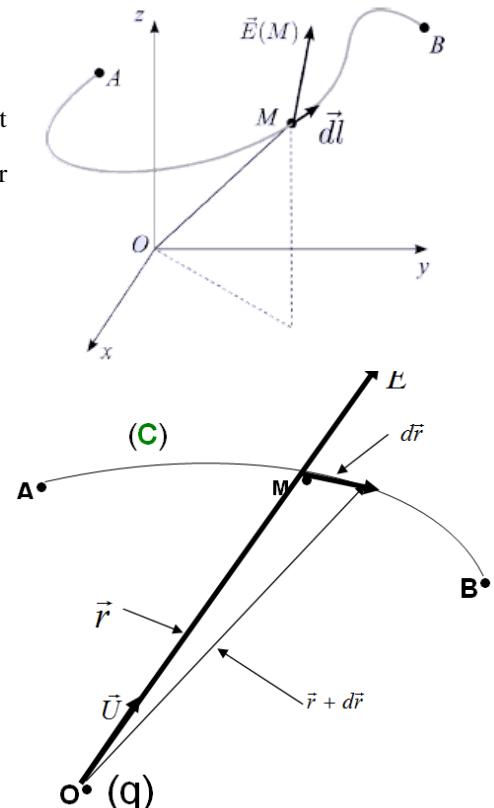
(la notation  $\delta$  indique une quantité élémentaire ou infinitésimale)

Soit  $\vec{E}$  est le champ électrostatique produit par la charge  $q$  positionnée au point O en M. Plaçons en M une charge unité  $q_0$ . Cette charge est soumise à une force Coulombienne  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ .

Sous l'action de  $\vec{F}$  le point M de charge  $q_0$  se déplace sur la courbe (C). Nous disons que le point M sous l'action de la force  $\vec{F}$  **CIRCULE**.

On appelle élément de circulation l'expression  $dC = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , puisque  $q_0$  est une charge unité.

Nous avons finalement :  $C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$  qui est la circulation du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  du point A au point B le long de la courbe (C).



### V.2 Calcul de $C_{AB}$

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{U}}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

Nous avons le rayon vecteur  $\vec{r} = r\vec{U} \Rightarrow d\vec{r} = dr\vec{U} + r d\vec{U}$

donc  $\vec{U} \cdot d\vec{r} = dr\vec{U} \cdot \vec{U} + r\vec{U} \cdot d\vec{U}$  ;  $\vec{U} \cdot d\vec{U} = 0$  car  $\vec{U} \cdot \vec{U} = 1$ , donc  $\vec{U} \cdot d\vec{r} = dr \Rightarrow$

$$C_{AB} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \Rightarrow C_{AB} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \Rightarrow$$

$$C_{AB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = V_A - V_B ;$$

avec  $V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$  ;  $V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B}$

La circulation de  $\vec{E}$  ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des coordonnées des points de départ (**A**) et d'arrivée (**B**). Cette circulation est mesurée par la variation d'une fonction d'état que nous appelons **potentiel électrostatique**.

Remarque : La circulation du champ  $\vec{E}$  est conservative :  $C_A^B = V_B - V_A = 0$ .

### V.3 Potentiel électrostatique

Définition :

On définit naturellement le potentiel électrostatique comme la quantité  $V$  (M) dont la variation est l'opposé de la circulation du champ :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) = -\Delta V$$

Avec  $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$ . Ce potentiel  $V$  est défini à une constante près.

En pratique, on utilise toujours des différences de potentiel, donc la constante est choisie arbitrairement. On choisit souvent de la prendre nulle à l'infini ( $V(\infty) = 0$ ). Alors, pour une charge ponctuelle, la constante devient nulle.

L'unité du potentiel est le **volt (V)**. Le potentiel est un scalaire.

### V.4 Relation entre potentiel électrostatique $V$ et champ $\vec{E}$

#### V.4.1 Notion de gradient

Soit un champ scalaire  $G(x, y, z)$ . On appelle *gradient* de ce champ scalaire, le champ de vecteurs  $\vec{B}$  tel que :  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}G$ .

$\overrightarrow{\text{grad}}$  est un opérateur vectoriel de composantes cartésiennes  $\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

On définit l'opérateur **nabla**  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$ .

On a par la suite :  $\overrightarrow{\text{grad}}G = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k} \right) = \vec{\nabla}G$ .

Le gradient est un vecteur qui définit la valeur, la direction et le sens de variation d'une fonction à plusieurs variables. Le vecteur gradient donne la direction de plus grande variation de la fonction ou, si l'on veut, la direction de plus grande pente.

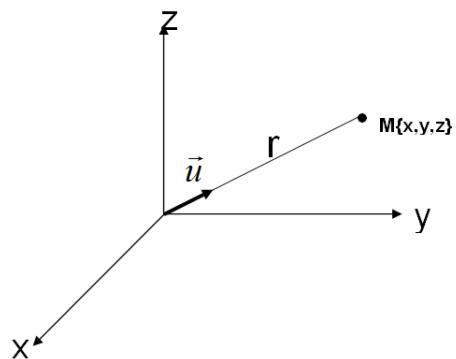
#### V.4.2 Gradient et différentielle

Nous avons :  $dG = \overrightarrow{\text{grad}}G \cdot d\vec{r}$  avec  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) \Rightarrow$

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{x,z} dy + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \right)_{x,y} dz.$$

**Remarque :**

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \quad ; \quad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{u}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$



#### V.4.3 Relation entre le potentiel V et le champ E

$$\vec{E}_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{U}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$



$$(1) \Rightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow -\overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Le champ est dirigé vers les potentiels décroissants.

D'autre part,  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV = dC$  qui est l'élément de circulation de  $\vec{E}$ .

**Remarque :**

Coordonnées	
Cartésiennes	Polaires ou cylindriques
$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$	$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$ $E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta}$ $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

#### V.5 Surfaces équipotentielles ; lignes de champ

Si la topologie d'un champ vectoriel est donnée par les lignes de champ, la topologie d'un champ scalaire est donnée par des courbes de niveau. Dans le cas d'un potentiel électrostatique, les courbes de niveau s'appellent les équipotentielles sont les courbes joignant les points de même potentiel.

##### V.5.1 Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel :  $V(M) = cste$

Cas particuliers :

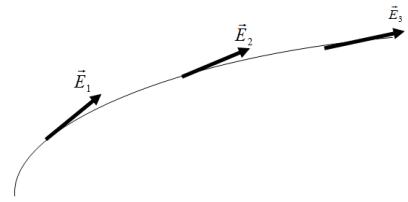
– à deux dimensions, on a des lignes équipotentielles

– pour une charge ponctuelle,  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = cste \Rightarrow r = cste$

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

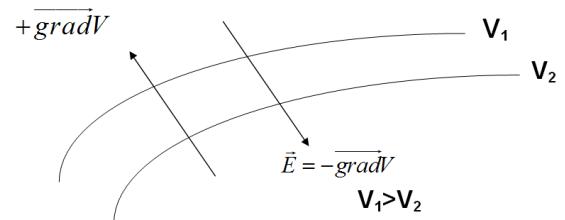
### V.5.2 Lignes de champ

Ce sont des courbes tangentes en chacun de leur point au vecteur  $\vec{E}$  en ce point. Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ.



### V.5.3 Lignes de champ et surface équipotentielle

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et sont orientées vers les potentiels décroissants.

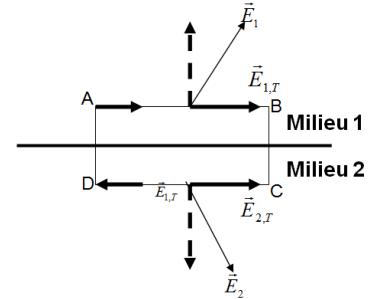


### V.6 Relation de passage

La propriété qu'a le champ de dépendre d'une fonction potentielle permet d'établir une relation de passage entre les composantes tangentielles du champ à la traversée d'une surface séparant deux milieux. On sait que :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B) = -\Delta V, \text{ pour un contour fermé on a :}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow E_{1,T} AB - E_{2,T} CD = 0 \Rightarrow E_{1,T} = E_{2,T}.$$



Il y a continuité des composantes tangentielles du champ électrique à la traversée de deux milieux différents.

### V.7 Équation de POISSON

Nous avons :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ; nous savons que  $\vec{E} = -\nabla V$  et on peut déduire la relation

$$\operatorname{div}(-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ soit } \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

En définitive nous avons :  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$  qui est l'**équation de POISSON**.

**Remarque :** si  $\rho = 0$  alors  $\Delta V = 0$  qui est l'**équation de LAPLACE**.

**Exercices d'application**

**Exercice 1 :** Déterminer le potentiel V associé à un champ uniforme colinéaire à l'axe Ox.



**Solution:**

$$\vec{E} = E_0 \vec{i} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Rightarrow$$

$$E_0 = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow E_0 dx = -dV \Rightarrow V = -E_0 x + V_0$$

**Exercice 2 Action d'une charge ponctuelle et d'un champ uniforme**

Soit une charge ponctuelle en O et un champ  $E_0$  colinéaire à Ox.

- Déterminer les composantes en coordonnées polaires du champ électrostatique résultant  $\vec{E}$  au point M( $r, \theta$ ).

- En déduire le potentiel  $V(r, \theta)$  en M.

**Solution :**

Le champ en M est la somme des champs  $\vec{E}_r$  et  $\vec{E}_0$ .

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta ; \vec{E}_0 = E_0 (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$        $\vec{E}_r$  est le champ provoqué par  $q > 0$  en O

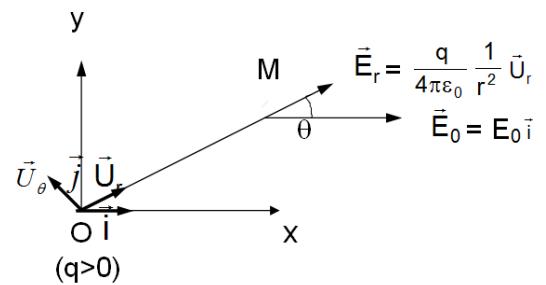
$$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta) = \vec{U}_r \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + E_0 \cos \theta \right) - E_0 \sin \theta \vec{U}_\theta$$

- Le potentiel total est la somme algébrique des potentiels déduit de  $\vec{E}_r$  et  $\vec{E}_0$ .

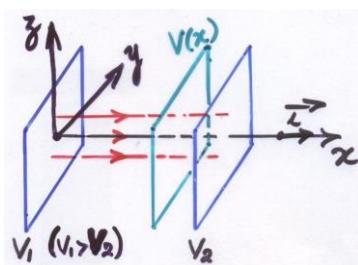
$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}}V_0 \Rightarrow E_0 = -\frac{\partial V_0}{\partial x} \Rightarrow dV_0 = -E_0 dx \Rightarrow$$

$$V_0 = -E_0 x + cte \Rightarrow V_0 = -E_0 r \cos \theta + cte$$

$$V_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - E_0 r \cos \theta + cte$$



**Exercice 3 : Calcul du champ et du potentiel entre 2 plaques parallèles distantes de e**



**Solution:**

L'équation de Laplace devient :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = C_1 \text{ et } V = C_1 x + C_2$$

$$x=0, V=V_1 \Rightarrow C_2=V_1$$

$$x=e, V=V_2 \Rightarrow C_1 = \frac{V_2 - V_1}{e}$$

$$V = \frac{V_2 - V_1}{e} x + V_1; \text{ Surface équipotentielle : } V = cte \Rightarrow x = cte$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{(V_1 - V_2)}{e} \vec{i} = \overrightarrow{cte}$$

Champ constant (uniforme et E=cte)

Les lignes de champ sont parallèles à Ox.

#### Exercice 4 : Champ et potentiel créés par un gaz chargé.

La région de l'espace telle que  $|x| \leq a$  porte une densité volumique uniforme  $\rho$  de charge.

Calculer  $\vec{E}$  et  $V$  en tout point de l'espace. On désigne par  $V_0$  le potentiel en O.

#### Solution:

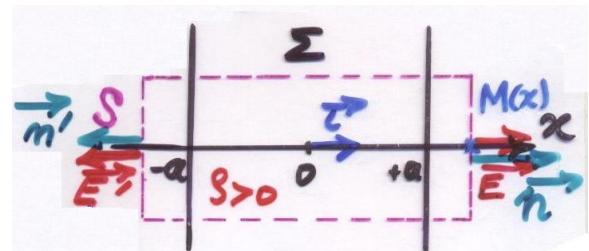
##### Calcul du champ $\vec{E}$

➤ Rappel :

Par raison de symétrie, le champ demandé est parallèle à  $\vec{i}$

$$\vec{E} = E(x) \vec{i} \text{ et : } E(-x) = -E(x)$$

- $|x| > a$



Théorème de Gauss appliqué à la surface  $\Sigma$

$$2SE(x) = \rho 2aS \times \frac{1}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} = \text{cte}$$

$$x > a, \vec{E} \text{ et } \vec{i} \text{ de même sens : } E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}$$

$$x < -a, \vec{E} \text{ et } \vec{i} \text{ de sens opposés : } E(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}$$

- $|x| \leq a$

$$2SE(x) = \frac{\rho 2xS}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}, (x > 0)$$

$$\left( \text{div} \vec{E}(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}; \text{cte} = 0, E(0) = 0 \right)$$

$E(x)$  est valable pour  $-a \leq x \leq a$ , pour  $x > 0$  comme pour  $x < 0$ . C'est le signe de  $x$  qui va orienter  $\vec{E}$ :

- Pour  $x > 0$ ,  $\vec{E}$  même sens que  $\vec{i}$  ;

- Pour  $x < 0$ ,  $\vec{E}$  sens contraire à  $\vec{i}$ .

### Calcul de V

$$\frac{dV(x)}{dx} = -E(x) \Rightarrow V(x) = -\int E(x) dx$$

- $|x| > a$

$$(x > a), V(x) = -\frac{\rho ax}{\epsilon_0} + V_1$$

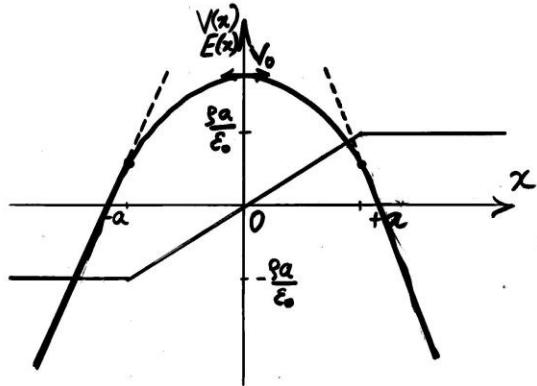
$$(x < -a), V(x) = \frac{\rho ax}{\epsilon_0} + V_1$$

- $|x| \leq a$

$$(0 < x \leq a), V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$$

$$(-a < x \leq 0), V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$$

Continuité !



$$\triangleright V(a) = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0} + V_1 \text{ et } V(a) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + V_0 \Rightarrow V_1 = V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

$$\triangleright V(-a) = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0} + V_1' \text{ et } V(-a) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} + V_0 \Rightarrow V_1' = V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}$$

Récapitulons:

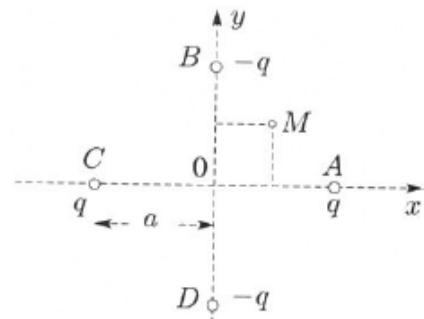
$$E(-x) = -E(x); V(-x) = V(x)$$

- $|x| \leq a, E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + V_0$
- $x > a, E(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( -x + \frac{a}{2} \right) + V_0$
- $x < -a, E(x) = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}$  et  $V(x) = \frac{\rho a}{\epsilon_0} \left( x + \frac{a}{2} \right) + V_0$

**TD DE L'ECUE 1**  
**SERIE 3 : LE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE**

**Exercice 1 : Potentiel et champ créés par une répartition symétrique de quatre charges**

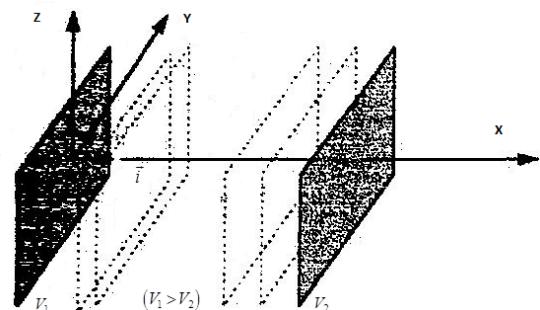
1. Calculer le potentiel créé par quatre charges A, B, C et D, disposée au sommet d'un carré de côté  $a$ , en un point M du plan  $Oxy$  voisin du centre de symétrie :  $|x| \leq a, |y| \leq b$  (voir schéma ci-dessous).
2. En déduire le champ électrostatique et l'équation des lignes de champ.



**Exercice 2 : Champ et potentiel entre deux plans parallèles et distants de e**

Soient deux plaques parallèles distantes de  $e$  portées respectivement au potentiel  $V_1$  et  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ) comme l'indique la figure.

1. Exprimer le potentiel en un point quelconque entre les deux plaques.
2. En déduire le champ entre les plaques. Que vous inspire ce résultat ?



**Exercice 3 : Champ et potentiel dans un gaz chargé**

La région de l'espace telle que  $|x| \leq a$  porte une densité volumique uniforme  $\rho$  de charge ; elle est limitée par deux plans  $x=a$  et  $x=-a$ .

1. Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
2. Si on désigne par  $V_0$  le potentiel en O, que vaut le potentiel V en un point de l'espace ?
3. Représenter la variation du champ et du potentiel en fonction de  $x$ .

**Exercice 4 : Champ et potentiel créés par une couche sphérique**

Une distribution de charge surfacique couvre uniformément une sphère de centre O et de rayon R.

1. Exprimer le champ en tout point de l'espace intérieur et extérieur à la sphère.
2. Même question pour le potentiel.
3. Donner une représentation graphique du champ et du potentiel en fonction de  $r$  la distance du point où est créé le champ et le potentiel au point O.

**Exercice 5 : Champ et potentiel à symétrie cylindrique**

En optique corpusculaire, on utilise des lentilles électrostatiques dont le potentiel  $V$  ne dépend que des variables cylindriques  $\rho$  et  $z$ .

1. Ecrire l'équation de Laplace et la relation entre le champ et le potentiel en fonction de ses coordonnées.
2. En déduire la relation entre la composante radiale du champ  $E_\rho$  et la dérivée seconde de  $V$ , par rapport à  $z$ , supposée constante.

**Exercice 6 : Potentiel de Yukawa**

Une distribution de charge à symétrie sphérique, créée à une distance  $r$ , un potentiel de la forme :

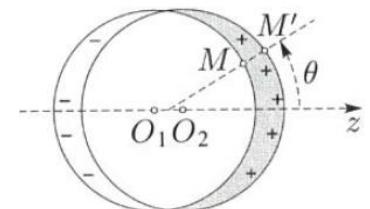
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

q et a étant des quantités positives dont on précisera la dimension physique.

1. Trouver le champ électrostatique correspondant.
2. En déduire la charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon  $r$  que vaut cette charge dans les deux cas extrêmes :  $r$  tend vers 0 et  $r$  tend vers l'infini ? En déduire qualitativement la nature de la distribution de charge.

**Exercice 7 : Potentiel et champ créés par une distribution surfacique de charge  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$** 

Une distribution de charge surfacique est obtenue en maintenant à très faible distance  $a$  devant leur rayon les centres  $O_1$  et  $O_2$  de deux sphères identiques uniformément chargées en volume avec des charges volumiques opposées  $-\rho$  et  $\rho$  (voir figure ci-dessous) ; la distribution qui en résulte a une charge surfacique  $\sigma_0 \cos\theta$  sur une sphère :  $\sigma_0 = \rho a$  et  $\theta$  est l'angle que fait un rayon de la sphère avec le diamètre perpendiculaire à  $O_1O_2 = a\vec{e}_z$ .



1. Rappeler les expressions du champ et du potentiel électrostatique produits par une distribution sphérique uniforme en volume, en tout point de l'espace.
2. En déduire le champ et le potentiel en tout point intérieur.

**Exercice 8 : Potentiel et champ créés par une distribution linéique de charge**

Un arc de cercle  $AB$ , de rayon  $R$ , d'angle  $2\alpha$ , porte une charge  $Q$  repartie uniformément. Cet arc est contenu dans un plan  $Oxy$  dont l'origine est le centre du cercle génératrice ;  $Ox$  est axe de symétrie.

1. Trouver l'expression du potentiel  $V$  en un point  $M$ , de coordonnées  $z$ , situé sur l'axe  $Oz$  normal au plan.
2. En déduire la composante électrostatique selon  $Oz$  du champ  $\vec{E}$ .
3. Montrer que le champ a une seconde composante dans le plan de symétrie de l'arc. Calculer directement son expression.
4. Etudier le cas d'une distribution linéique uniforme sur un cercle complet.

**Exercice 9 : Charge d'un fil illimité**

Le potentiel électrique à la distance  $r$  d'un long fil rectiligne de rayon  $a$  uniformément chargé est

$$V(r) = V_0 \ln \frac{a}{r}.$$

Déterminer la charge linéique de ce fil.

## CHAPITRE VI : ENERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE

Objectifs :

- Être capable de calculer l'énergie potentielle électrostatique d'une charge ou d'une distribution de charges discrète ou continue dans un potentiel scalaire.
- Savoir calculer l'énergie potentielle électrostatique d'une distribution continue de charges placées dans un champ.

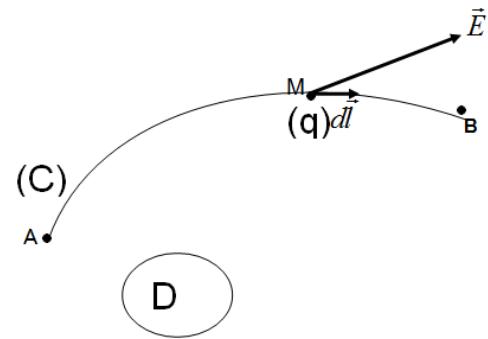
L'Energie potentielle est une énergie qui ne dépend que de la position d'un corps.

Les problèmes liés à l'énergie sont d'une grande importance : l'énergie est en effet à l'origine de tous les mouvements du monde de la technologie. Elle existe sous plusieurs formes : potentielle, mécanique, électrique, thermique, chimique....

La batterie est le réservoir d'énergie qui alimente tous les équipements électriques du véhicule. La quantité d'énergie nécessaire pour alimenter tous les circuits électriques au démarrage du véhicule est directement proportionnelle à la capacité de la batterie, exprimée en ampères-heures (Ah).

### VI.1 Charge ponctuelle dans un champ $\vec{E}$ extérieur

Soit un champ  $\vec{E}$  créé par la distribution de charges dans le domaine D en M telle que le potentiel soit nul à l'infini. La charge q au point M est soumise à une force  $\vec{F}_e = q\vec{E}(M)$ . Soit  $d\vec{l}$  le déplacement de la charge q de masse m sous l'action de  $\vec{F}_e = q\vec{E}(M)$  sur la courbe (C). Pour maintenir la charge q au point M, un opérateur extérieur doit exercer une force  $\vec{F}_{op} = -q\vec{E}(M)$ .  $\vec{F}_{op}$  s'opposant à  $\vec{F}_e$ .



Le travail nécessaire que doit fournir l'opérateur pour amener lentement q de M à M' très voisin sera :  $dC = \delta W = \vec{F}_{op} \cdot d\vec{l}$

$$\delta W = -q\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = q \cdot dV.$$

Le travail nécessaire pour amener q de l'infini ( $V = 0$ ) à M ( $V = V(M)$ ) est  $W_{op} = qV(M)$ .

**Par définition**, l'énergie électrostatique de la charge q est égale au travail minimum qu'un opérateur extérieur doit fournir pour amener lentement depuis l'infini ( $V = 0$ ) cette charge au point M où elle se trouve.

Elle est notée  $E_p = qV$ : **énergie potentielle électrostatique**

Elle est exprimée en joule (J) ou en eV (1 eV =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J). Elle est indépendante du chemin suivi.

La force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p$ .

$$\text{En effet : } \vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = -\vec{\text{grad}} \left( \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\vec{\text{grad}} (qV) = -\vec{\text{grad}} (E_p) \Rightarrow$$

$$W_A^B = -q[V(B) - V(A)] = q(V_A - V_B) = E_p(A) - E_p(B) = \Delta E_p|_A^B$$

## VI.2 Énergie potentielle d'interaction d'un système de deux charges

Pour constituer une distribution de deux charges ( $q_A$ ,  $q_B$ ) à une distance  $\mathbf{d}$  l'une de l'autre, l'opérateur doit successivement les amener de l'infini au point **A** et au point **B**.

Pour amener la charge  $q_A$  de l'infini au point A, il ne fournit aucun effort car initialement l'espace est supposé être vide de charge.

Pour ce qui concerne la charge  $q_B$ , il doit fournir des efforts, c'est-à-dire un travail  $q_B V_A(B)$  au cours du déplacement de  $q_B$  vers le point B pour lutter contre l'action de  $q_A$  par l'intermédiaire de la force de Coulomb.

$V_A(B)$  est le potentiel créé en B par  $q_A$  au point A ;

$V_B(A)$  est le potentiel créé en A par  $q_B$  au point B.

**Remarque :** S'il fixe d'abord  $q_B$  au point B, l'opérateur fournira un travail  $q_A V_B(A)$ . L'énergie potentielle est alors  $E_p = q_B V_A(B) = q_A V_B(A)$ .

Et nous pouvons écrire :  $E_p = \frac{1}{2} [q_A V_B(A) + q_B V_A(B)]$  que nous généralisons pour la distribution de  $q_i$  charges par la relation suivante ;  $V_i$  est le potentiel créé par les  $n - 1$  charges au point où se trouve  $q_i$ .

## VI.3 Energie électrostatique d'une distribution continue de charges

Pour une distribution discrète de charges nous avons :  $E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

Et pour une distribution volumique continue nous écrivons :  $E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho \cdot V \cdot d\tau$

$d\tau$ : élément de volume, pour une répartition en volume.

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges nous avons :  $E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \cdot V \cdot dS$  ;  $dS$  : élément de surface.

## VI.4 Expression de l'énergie électrostatique en fonction du champ $\vec{E}$

$E_p = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \rho \cdot V \cdot d\tau$  ; l'expression locale du théorème de Gauss donne :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Soit  $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$  donc  $E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} V \cdot \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$  avec  $V \cdot \operatorname{div} \vec{E} = V \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$

$$V \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} - E_x \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} - E_x (-E_x) \Rightarrow V \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial (VE_x)}{\partial x} + E_x^2$$

$$V \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{d(E_x V)}{dx} + \frac{d(E_y V)}{dy} + \frac{d(E_z V)}{dz} + E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$$

Soit  $V \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(V \vec{E}) + E^2$  et finalement nous avons :  $E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} (\operatorname{div}(V \vec{E}) + E^2) \cdot d\tau$

**Remarque :**

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}(V \vec{E}) \cdot d\tau = \iint_S V \vec{E} \cdot dS \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty$$

$$\text{En effet } V \approx \frac{1}{r} \text{ et } E \approx \frac{1}{r^2} \text{ donc } EV \approx \frac{1}{r^3} \Rightarrow EV \rightarrow 0 \text{ si } r \rightarrow \infty$$

Finalement nous avons :  $E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\tau} E^2 \cdot d\tau$ . Et ici le domaine d'intégration est tout l'espace.

Tout se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution continue de charges était répartie dans l'espace où règne  $\vec{E}$  avec une densité volumique d'énergie :

$$\frac{dE_p}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

**TD DE L'ECUE 1**  
**SERIE 4 : ENERGIE ELECTROSTATIQUE**

**Exercice 1 : Position stable d'une particule chargée**

Une particule chargée M (charge  $q$ ) évolue sur un axe  $Ox$  entre deux particules fixes, l'une de charge  $q_1$  en  $P_1$  et l'autre de charge  $q_2$  en  $P_2$  à la distance  $d$  de  $P_1$ .

1. Trouver l'expression de l'énergie potentielle électrostatique de M, en fonction de sa position définie par  $\overline{P_1M} = x$ . Comparer cette énergie à celle du système des trois charges. Quelle est la force qui s'exerce sur M ?
2. A quelle condition sur les charges, l'équilibre de M est-il possible ? on se place dans le cas où  $q_1 = 3q_2$ . Trouver la position d'équilibre de M.

**Exercice 2 : Energie d'une distribution tétraédrique régulière centrée**

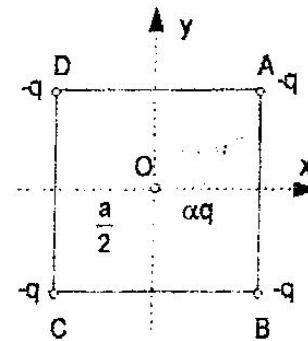
On considère quatre charges  $A^-$ , de valeur commune ( $-e$ ), disposée aux sommets d'un tétraèdre régulier dont le centre est occupé par la charge  $M^{4+}$ , de valeur  $4e$ .

1. Montrer que la distance  $a$  qui sépare les charges  $A^-$  est reliée à la distance  $r = MA$  par l'équation  $r = a\sqrt{6}/4$ .
2. Exprimer, en fonction de  $r$ , l'énergie potentielle de l'édifice. Dans le cas où cette distribution représente la molécule SiF<sub>4</sub> (tétrafluorure de silicium) pour laquelle  $r = 154 pm$ , calculer l'énergie de cette molécule en eV.

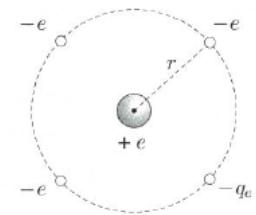
**Exercice 3 : Energie de constitution d'une distribution plan carrée**

L'étude qui suit est limitée au plan  $Oxy$ .

1. Calculer l'énergie de constitution  $W$  de l'ensemble de charges :
  - une charge  $\alpha q$  en O ;
  - une charge  $-q$  à chaque sommet du carré de côté  $a$  et de centre O (voir la figure ci-dessous).
2. Dessiner l'allure de la fonction  $W(a)$ , discuter en fonction du paramètre  $\alpha$ . L'ensemble des charges dans sa structure « carrée centrée » est supposé isolé de toute action extérieure. Comment va-t-il évoluer spontanément ?

**Exercice 4 : Energie électrostatique d'un système symétrique de charges élémentaires**

1. Calculer l'énergie électrostatique d'un système de quatre électrons régulièrement espacés sur un cercle de rayon  $r$  au centre duquel se trouve un proton.
2. Si on abandonne un tel système, comment varie  $r$  ?



## CHAPITRE VII : DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

### Objectifs :

- Décrire les conditions de l'approximation dipolaire.
- Savoir établir l'expression du potentiel et du champ électrostatique créés à grande distance par un dipôle électrique de moment dipolaire  $\vec{P}$ .
- Appliquer la relation champ-potentiel à la détermination un peu délicate du champ électrique créé par deux charges rapprochées de signes opposés.
- Savoir tracer l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles pour le champ du dipôle.
- Savoir établir et connaître les actions subies par un dipôle placé dans un champ extérieur : résultante et moment.
- Savoir établir et connaître l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ d'origine extérieure.
- Polarisabilité
- Comprendre l'importance des interactions entre dipôles permanents ou induits :  
Interactions ion – ion, ion-molécule et molécule – molécule (Forces dites de Van der Waals).

### VII.1 Définitions

#### VII.1.1 Dipôle électrostatique

Il existe dans la nature des systèmes globalement électriquement neutres mais dont le centre de gravité des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives. Un tel système peut souvent être décrit (on dit modélisé) en première approximation par deux charges électriques ponctuelles opposées,  $+q$  et  $-q$  situées à une distance  $d$  l'une de l'autre. On appelle un tel système de charges un dipôle électrostatique.

Cette distance est infiniment petite par rapport à la distance à laquelle on étudie les effets de ce dipôle. Ces effets sont le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$ .

#### VII.1.2 Moment dipolaire

On appelle **moment dipolaire** le vecteur  $\vec{p} = q\vec{AB}$ . Ce vecteur est toujours selon le sens géométrique choisi, dirigé de la charge négative vers la charge positive. L'unité est le Debye, notée D.

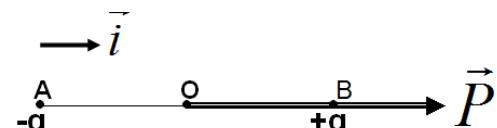
- Unité de moment dipolaire :

L'unité de moment dipolaire dans le système S.I. s'obtient par l'analyse des dimensions des grandeurs qui le définissent.  $\vec{P}$  a pour unité le coulomb.mètre. Symbole C.m ;

- Unité pratique de moment dipolaire.

A l'échelle moléculaire les charges électriques sont de l'ordre de grandeur de la charge de l'électron ou du proton tandis que les distances sont de l'ordre de l'Angström. Le debye, symbole D, défini par :  $P = qAB$ , on est alors voisin de  $1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10} = 10^{-29} \text{ C.m}$  ;

A l'échelle moléculaire on adoptera le debye :  $1D = \frac{10^{-29}}{3} \text{ C.m} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$   
Cette unité est bien adaptée au domaine de la Chimie et à l'étude des molécules.



## VII.2 Calcul du potentiel $V(r)$ au point M

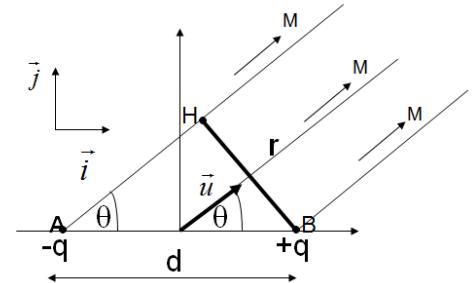
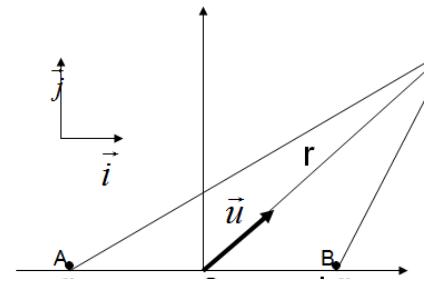
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{AM - BM}{AM \cdot BM} \right].$$

$r$  très grand entraîne que par rapport à AB, AM et BM sont presque parallèles.

$$AM - BM = AH = d \cos \theta \Rightarrow AM \cdot BM \approx r^2 \Rightarrow$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \Rightarrow$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



## VII.3 Calcul de $\vec{E}(M)$

Les conditions expérimentales  $d \ll r$  rendent mal aisée la détermination du champ électrique résultant à partir de la somme géométrique des champs engendrés par chaque charge  $+q$  et  $-q$ . Comme nous l'avons vu dans le chapitre V, il sera désormais plus pertinent de déterminer le champ électrique en dérivant la fonction potentielle créée par l'ensemble des charges.

Dans le cas du dipôle, la symétrie de révolution autour de l'axe formé par les 2 charges, nous amène à utiliser les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  telles que présenté sur la figure ci-dessous.

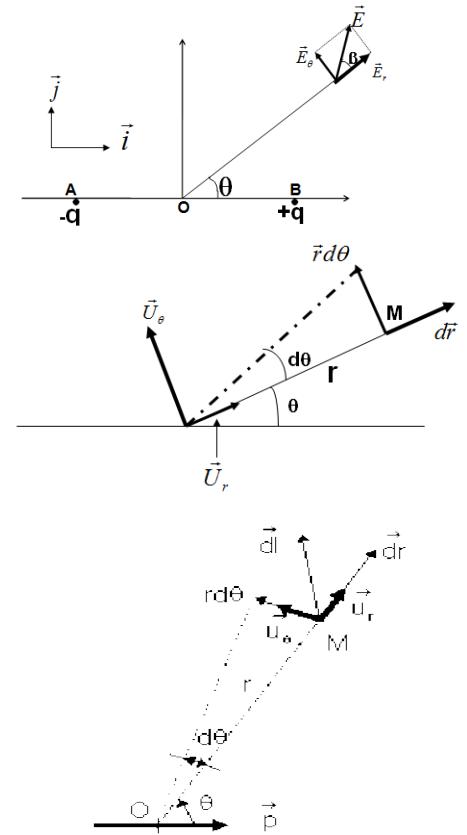
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}.$$

En coordonnées polaires de vecteurs de base  $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$ , nous avons :

$$\operatorname{tg}(d\theta) = \frac{dy}{r} \Rightarrow d\theta = \frac{dy}{r} \Rightarrow dy \approx rd\theta \Rightarrow dy = r d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{U}_r - \frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{U}_\theta = E_r \vec{U}_r + E_\theta \vec{U}_\theta ;$$

en coordonnées polaires



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} ; \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}. \end{array} \right.$$

Le module du champ électrique a pour valeur :  $|\vec{E}| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$

L'argument  $\theta$  du vecteur OM fixe le rapport entre les deux composantes du champ électrique puisque l'on a :

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan\theta.$$

### Remarque

Nous avons :

$$\vec{p} = p \cos\theta \vec{U}_r - p \sin\theta \vec{U}_\theta = p(\cos\theta \vec{U}_r - \sin\theta \vec{U}_\theta)$$

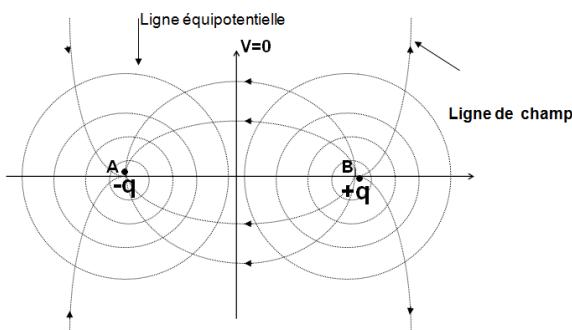
et nous déduisons :  $p \sin\theta \vec{U}_\theta = p \cos\theta \vec{U}_r - \vec{p}$

d'autre part,  $\vec{E} = E_r \vec{U}_r + E_\theta \vec{U}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos\theta \vec{U}_r + p \sin\theta \vec{U}_\theta)$

soit :  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos\theta \vec{U}_r - \vec{p}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3\vec{U}_r \cdot \vec{p} \cdot \vec{U}_r - \vec{p})$

Nous déduisons ainsi l'expression du vecteur champ électrique en fonction du vecteur moment dipolaire.

### VII.4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles



#### VII.4.1 Équation différentielle des lignes de champ

Sur la ligne de champ passant par M :  $\vec{dr} \wedge \vec{E} = \vec{0}$  ;  $\vec{dr} = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta$

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \Rightarrow dr E_\theta - rd\theta E_r = 0 \Rightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}, \text{ après intégration,}$$

$$r = K_1 \sin^2 \theta. \text{ En effet : } \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\theta)$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \frac{dr}{rd\theta} = 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} = \frac{2d(\sin\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow$$

$$\ln r = K_1 \ln(\sin^2 \theta) \Rightarrow \boxed{r = K_2 \sin^2 \theta} : \text{équation des lignes de champ.}$$

### VII.4.2 Équation pour une surface équipotentielle

L'équation de la surface équipotentielle  $S$  au potentiel  $v = cste$  est :

$$V = cte = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^2} \cos \theta \Rightarrow r^2 = K \cos \theta , \text{ qui est l'équation polaire.}$$

#### Positions de Gauss d'un dipôle

Détermination et représentation sur un cercle de rayon  $r$  des champs  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \vec{E}_4$  aux points :

$$\begin{array}{l} G_1 \left| \begin{array}{l} r_1 = R \\ \theta_1 = 0 \end{array} \right. ; G_2 \left| \begin{array}{l} r_2 = R \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. ; G_3 \left| \begin{array}{l} r_3 = R \\ \theta_3 = \pi \end{array} \right. ; G_4 \left| \begin{array}{l} r_4 = R \\ \theta_4 = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

qui sont les *positions de Gauss*.

Les composantes  $E_r$  et  $E_\theta$  du champ électrique s'obtiennent facilement en donnant la valeur de l'angle  $\theta$ .

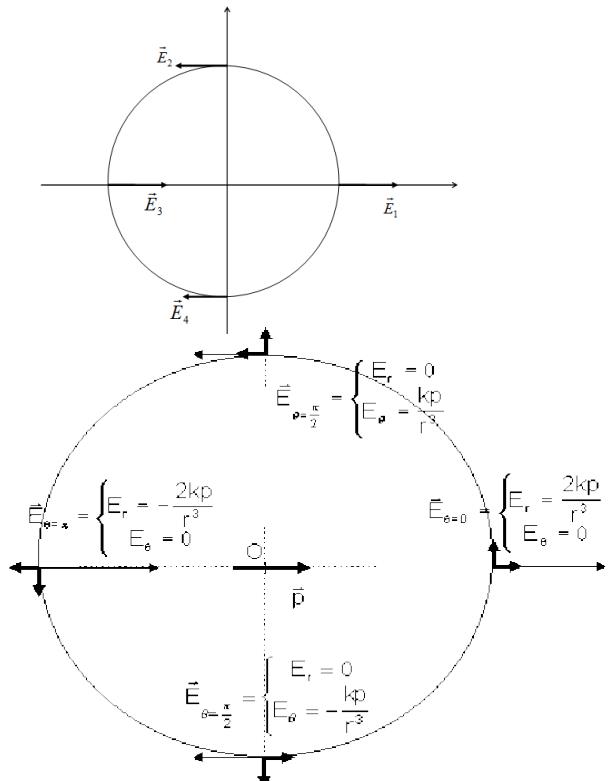
$$\begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} ; \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \end{cases}$$

Posons  $E_0 = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 R^3}$ , avec  $r=R$ .

Au point :

$$\begin{array}{ll} G_1 \text{ on a: } \vec{E}_1 \left\{ \begin{array}{l} E_{r_1} = E_0 \\ E_{\theta_1} = 0 \end{array} \right. ; & G_2 \text{ on a: } \vec{E}_2 \left\{ \begin{array}{l} E_{r_2} = 0 \\ E_{\theta_2} = \frac{E_0}{2} \end{array} \right. ; \\ G_3 \text{ on a: } \vec{E}_3 \left\{ \begin{array}{l} E_{r_3} = -E_0 \\ E_{\theta_3} = 0 \end{array} \right. ; & G_4 \text{ on a: } \vec{E}_4 \left\{ \begin{array}{l} E_{r_4} = 0 \\ E_{\theta_4} = -\frac{E_0}{2} \end{array} \right. . \end{array}$$

On observe en chaque point singulier du repère  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ , l'orientation et le sens de  $E_r$  et  $E_\theta$ . On notera également l'importance de la symétrie dans ce problème.



## VII.5 Action d'un champ électrique sur un dipôle

### VII.5.1 Cas d'un champ uniforme

On considère un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme à l'échelle du dipôle.

Quel est l'effet de ce champ sur le dipôle ?

Système étudié : le dipôle (rigide)

La présence du champ électrique entraîne l'apparition

de forces électrostatiques  $\vec{F}_B = q\vec{E}$  et  $\vec{F}_A = -q\vec{E}$  opposées de résultante nulle,  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ .

Le dipôle est soumis à un « couple de forces », dont le moment  $\Gamma$  est non nul.

En choisissant O le centre du dipôle comme centre de rotation on a :

$$\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{OB} \wedge q\vec{E} + \overrightarrow{OA} \wedge (-q\vec{E}) ; \quad \vec{\Gamma}_0 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge q\vec{E} = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}$$

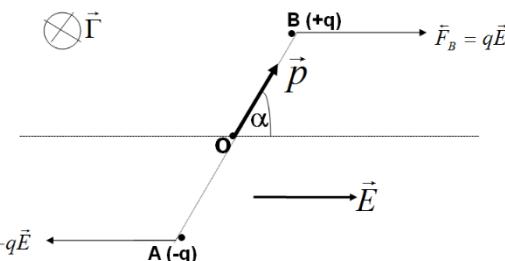
$$\boxed{\vec{\Gamma}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}}.$$

Ce couple a pour rôle d'aligner  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$ . Sous l'effet d'un champ électrique, le dipôle se met à tourner afin de s'aligner selon le sens du champ, le couple s'annule, il n'y a plus d'action en rotation.

#### VII.5.1.1 Positions d'équilibre

##### VII.5.1.1.1 Équilibre stable

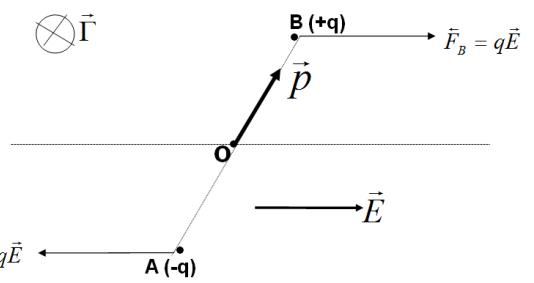
$\alpha = 0$  à l'équilibre  $\Rightarrow$  équilibre est stable



##### VII.5.1.1.2 Équilibre instable

$\alpha = \pi$  à l'équilibre  $\Rightarrow$  équilibre est instable

En effet si on éloigne le dipôle de cette position, il revient à la position où  $\alpha = 0$



### VII.5.1.2 Énergie potentielle d'un dipôle dans un champ $\vec{E}$ extérieur

$$E_p = q(V_B - V_A) : V_B > V_A.$$

\*  $V$  est le potentiel créé par un champ  $\vec{E}$  uniforme qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe du dipôle.

\* Suivant l'axe du dipôle, nous avons :

$$dV = -E_x dx = -E \cos \alpha dx \Rightarrow$$

$$V = - \int E \cos \alpha dx = -E \cos \alpha (x) + V_0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} V_B = -E \cos \alpha \left( \frac{d}{2} \right) + V_0 \\ V_A = -E \cos \alpha \left( -\frac{d}{2} \right) + V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow V_B - V_A = -Ed \cos \alpha \Rightarrow \text{Énergie potentielle} : \quad$$

$$E_p = -qEd \cos \alpha = -pE \cos \alpha \Rightarrow$$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad : \text{Énergie potentielle du dipôle}$$

#### Remarque :

- Le dipôle est en équilibre stable si  $\vec{p}$  est parallèle à  $\vec{E}$ , c'est-à-dire pour  $E_p$  minimale.

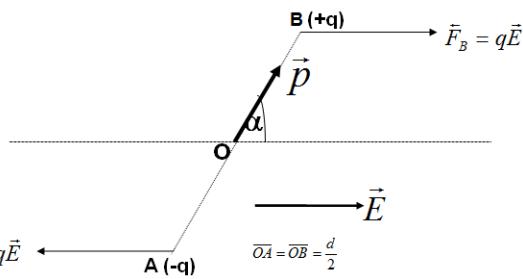
Dans le cas où  $(\vec{p}, \vec{E}) = \pi$  alors  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  est maximale et l'équilibre est instable.

### VII.5.2 Cas d'un champ non uniforme

Le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi :

$$\delta W = -dE_p = \vec{F} \cdot \vec{dx} \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

$$\text{Et on a : } \left\{ \begin{array}{l} F_x = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \\ F_y = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \\ F_z = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \end{array} \right.$$



## VII.6 Notion de dipôle en Chimie

### VII.6.1 Dipôle permanent

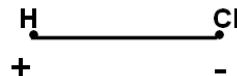
#### VII.6.1.1 Molécules polaires

Ici les barycentres des charges positives et des charges négatives sont distincts.

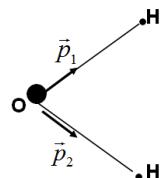
*Exemples :*

##### VII.6.1.1.1 Molécules diatomiques

$$\|\vec{p}\| = 1,03D.$$



##### VII.6.1.1.2 Molécules polyatomiques

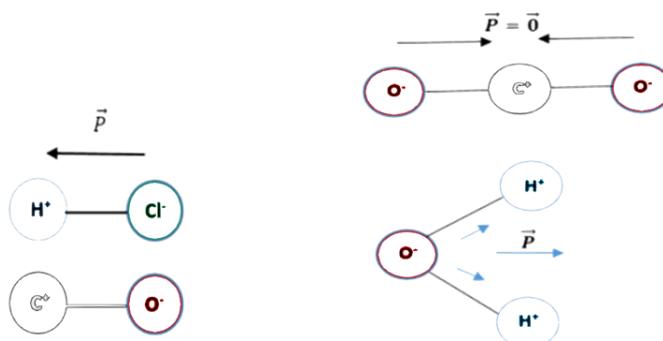


$$\|\vec{p}\| = 1,84D.$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \text{ avec } \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| ;$$

##### VII.6.1.1.3 Molécules non polaires

Ces molécules ne possèdent pas de moment dipolaire permanent. Ce sont les molécules purement covalentes ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{Cl}_2$ , ...) ou des molécules qui ont des moments dipolaires partiels qui se compensent, c'est-à-dire que la résultante  $\vec{p}$  de ces molécules est nulle ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{CCl}_4$ ,  $\text{C}_6\text{H}_6$ , ...).



### VII.6.2 Dipôles induits

Ces molécules ont la propriété de se déformer en présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ . Ainsi les barycentres des charges positives et négatives se séparent. Ces molécules sont polarisables.

Cette polarisation se traduit par un moment électrique induit colinéaire au champ inducteur  $\vec{E}$  et de même sens que lui.

On écrit :  $\vec{p}_{induit} = \alpha \vec{E}$ , avec  $\alpha$  = polarisabilité de la molécule ( $\text{C.m}^2\text{V}^{-1}$ ).

**TD DE L'ECUE 1**  
**SERIE 5 : DIPOLE ELECTROSTATIQUE**

**Exercice 1 : Dipôle dans un champ uniforme**

Dans un champ électrostatique uniforme d'intensité  $E_0$ , on place en un point O, où le potentiel du champ est  $V_0$ , un dipôle électrostatique de moment  $\vec{p}$ . L'axe de ce dipôle est parallèle au champ  $\vec{E}_0$  et de même sens.

1. Trouver le potentiel en un point quelconque A. Montrer que le potentiel reste constant sur une certaine sphère de rayon R ayant son centre en O. trouver la relation entre R,  $E_0$  et p.
2. Trouver les expressions des composantes du champ résultats  $\vec{E}$  en A suivant le rayon OA et suivant la perpendiculaire à ce rayon.

**Exercice 2 : Dipôle dans un champ radial non uniforme**

Calculer l'action exercée sur un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p}$  par une charge ponctuelle q. Discuter.

**Exercice 3 : Quadripôle**

Aux sommet d'un carré ABCD de côté a, on place alternativement des charges de même valeur absolue et de signes opposées : A(+q), B(-q), C(+q) et D(-q).

Calculer le champ et le potentiel en tout point P de l'espace à une distance  $OP = r$  du centre O du carré, r étant grand devant a.

**Exercice 4 : Approximations dipolaires**

Soit un ensemble de charges ponctuelles  $q_i$  voisines contenues dans un très petit volume. Calculer le potentiel V créé par l'ensemble en un point M( $r, \theta$ ) très éloigné du point O autour duquel sont regroupées les charges.

**Exercice 5 : Moment dipolaire d'une distribution surfacique**

On considère une distribution surfacique de charge, de densité  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , sur une sphère de centre O et de rayon R :  $\sigma_0$  est une constante et  $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OP})$  désigne l'angle que fait le vecteur position  $\overrightarrow{OP}$  d'un point

P de la surface avec une direction déterminée  $\overrightarrow{Oz}$ . Calculer la charge totale et le moment dipolaire de cette distribution.

**Exercice 6 : Molécule de gaz carbonique**

Dans un modèle de la molécule CO<sub>2</sub>, on considère que l'atome de carbone, placé à l'origine, porte la charge 2q ( $q > 0$ ), et que les deux atomes d'oxygène, situés en (0, 0, a) et (0, 0, -a), a désignant la longueur des liaisons, C=O, portent la charge -q.

1. Calculer la charge totale, le moment dipolaire et les composantes non nulles du moment quadripolaire de cette molécule.
2. Donner l'expression du potentiel et des composantes du champ en des points éloignés de l'origine.

**Exercice 7 : Interactions dipolaires**

- Un dipôle de moment  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_z$  est placé à l'origine des coordonnées O. au point de coordonnées cartésiennes  $(0, 0, a)$ , on place un dipôle de moment  $\vec{p}_2$ . Calculer la force qui s'exerce sur  $\vec{p}_2$  dans les deux cas suivants :  $\vec{p}_2 = p_2 \vec{e}_z$  et  $\vec{p}_2 = p_2 \vec{e}_x$ .
- Même question avec  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_x$ .

**Exercice 8 : Moment dipolaire de la molécule d'eau**

La molécule d'eau  $\text{H}_2\text{O}$  a un moment dipolaire de 1,85 D. sachant que la distance O-H est  $a = 97 \text{ pm}$  et que l'angle que font entre elles les deux liaisons O-H vaut  $\theta = 104,30^\circ$ , quelle est la fraction  $\alpha$  de charge élémentaire du doublet O-H ?

**Exercice 9 : Energie électrostatique propre d'un doublet**

- Calculer l'énergie électrostatique propre d'un doublet de charges  $(-e, e)$  et de moment  $p=ea$ . A.N :  $a=0,1 \text{ nm}$ .
- Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce même dipôle avec un champ appliquée de  $10^5 \text{ V/m}$  ?

**Exercice 10 : Hydratation carrée de l'ion  $\text{Cu}^{2+}$** 

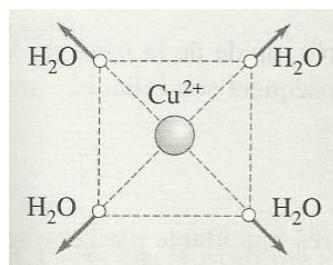
L'ion  $\text{Cu}^{2+}$  est hydraté par quatre molécules d'eau, de moment dipolaire  $\vec{p}$ , placées aux sommets d'un carré, de côté  $a$ , centré sur lui.

- Montrer que l'énergie potentielle électrostatique de l'ion hydraté a pour expression :

$$\mathcal{E}_{p,e} = 4\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3$$

où  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$  sont des énergies dont on donnera la signification physique.

- Trouver  $\mathcal{E}_1$  en fonction de  $a$  et  $p$ . En déduire la relation numérique entre  $\mathcal{E}_1$  en eV,  $a$  en nm et  $p$  en D.
- En utilisant la formule donnant l'énergie d'interaction entre deux dipôles, déterminer  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$  en fonction de  $a$  et  $p$ . Comparer  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$  sachant que  $p \approx 1\text{D}$  et  $a \approx 0,1\text{nm}$ .



## CHAP VIII : CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

### VIII.1 Equilibre électrostatique et propriétés d'un conducteur

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets. Que se passe-t-il pour un corps conducteur dans lequel les charges sont libres de se déplacer ?

**Un conducteur** est un milieu dans lequel existent des charges plus ou moins libres, pouvant se mettre en mouvement sous l'action d'un champ si infime soit-il. Les charges mobiles sont des électrons dans le cas d'un métal et des ions dans le cas d'une solution d'électrolyte.

**Un isolant** est un milieu dans lequel les charges sont liées à chaque atome et **ne sont pas libres de se déplacer** même sous l'action d'un champ extérieur.

#### VIII.1.1 Equilibre d'un conducteur

Si l'on dépose une charge en un point d'un conducteur, elle créera un champ électrique en tous les points de celui-ci ; d'où déplacement des charges mobiles et à l'équilibre la charge sera répartie en différents points du conducteur. Par contre pour un isolant, il n'y a pas déplacement de charges et la charge initiale restera à l'endroit où elle a été déposée.

Un conducteur est dit en **équilibre électrostatique** lorsque les charges libres qu'il contient sont au repos (immobiles) ; aucune force n'agit sur ces charges libres.

Domaine d'application : Cage de Faraday, protection contre la foudre, voir courants de terre.

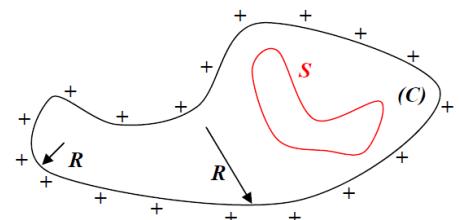
#### VIII.1.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre.

Soit un conducteur (C) isolé, immobile et initialement neutre.

Isolé : pas d'influence entre le conducteur et les charges qui peuvent se trouver à son voisinage.

Immobile : si le conducteur n'est pas immobile ses charges ne le seront pas non plus.

Initialement neutre : sa charge totale est nulle  $\sum Q = 0 \Rightarrow \rho = 0, E = 0$  et  $V = 0$ .



On dépose une charge  $Q$  en un point de ce conducteur.

A l'équilibre toutes les charges sont immobiles :  $\sum \vec{F} = \vec{0} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow -\nabla V = 0 \Rightarrow V = cte$

Application du Théorème de Gauss sur la surface  $S$  :  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$  ( $S$  est une surface fermée quelconque dans le conducteur)  $\Rightarrow \sum q_i = 0 \Rightarrow \rho = 0$ . Donc la charge ne peut être que sur la surface du conducteur. La distribution est surfacique ( $\sigma$ ). Toute surface dans le conducteur est équipotentielle. On en déduit que toute la surface du conducteur est équipotentielle. Le potentiel étant une fonction continue, on en déduit que tout le conducteur est équipotentiel. A l'extérieur du conducteur, les lignes de champ seront donc perpendiculaires à sa surface.

$\sigma$  varie d'un point de la surface à l'autre. En effet, si le rayon de courbure est faible  $\sigma$  augmente et si le rayon de courbure est grand  $\sigma$  diminue.

#### Récapitulatif

Un conducteur (C) chargé en équilibre électrostatique est caractérisé par :

- $\vec{E} = \vec{0}$  dans tout le volume de (C);
- $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$  (la distribution de charge est superficielle).
- $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow V_A = V_B$  (volume équipotentiel). Un conducteur en équilibre électrostatique constitue un volume équipotentiel (le volume de (C) est équipotentiel).
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de (C).

**Cas particulier :** conducteur creux.

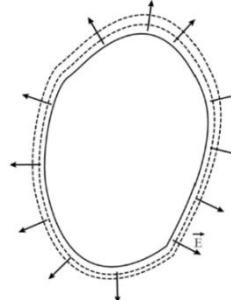
Le potentiel étant une fonction continue  $\Rightarrow$  dans le creux le potentiel est aussi constant et égal au potentiel du conducteur  $\Rightarrow \sum Q_i = 0 \Rightarrow$  absence de charges dans et sur la surface du creux. Les charges se répartissent uniquement sur la surface externe du conducteur creux. **Un conducteur garde ses propriétés même s'il est creux.**

### VIII.2 Champ au voisinage de la surface d'un conducteur

Le volume équipotential implique que la surface aussi est équipotentielle. Les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur.

Si le conducteur est chargé, toutes les charges non compensées se trouvent localisées à la surface du conducteur.

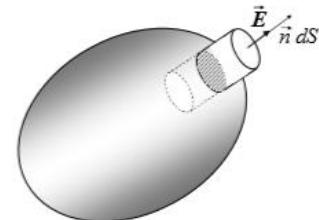
En effet, une composante du champ parallèle à la surface agirait sur les charges libres et entraînerait leur déplacement. Or, de tels déplacements n'existent pas dans les conditions d'équilibre électrostatique. Le champ est normal à la surface d'un conducteur en équilibre.



#### VIII.2.1 Application du théorème de Gauss à la surface fermée

Soit un conducteur de forme quelconque. On se propose de calculer le champ électrique au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur. Soit une surface de Gauss cylindrique  $\Sigma$  tel que :  $\Sigma = dS +$  surface latérale + surface quelconque dans le volume ci-contre, dont une base se trouve à l'extérieur de la surface et l'autre base à une profondeur telle que la charge superficielle soit totalement à l'intérieur du cylindre. En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée  $\Sigma$ , nous obtenons :

$$\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \Phi(\vec{E}/dS) + 0 + 0 = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E \times dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$



Au voisinage immédiat de la surface du conducteur, le champ est normal à la surface. Le champ étant nul partout à l'intérieur du conducteur, on ne tient compte que du flux à travers la surface située à l'extérieur du conducteur. Le flux sortant de la surface latérale du cylindre étant nul, il ne reste plus que celui qui sort de la base.

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E \times dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \sigma \times dS = \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times dS$$

On obtient alors  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

#### VIII.2.2 Théorème de Coulomb

Au voisinage de la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique près d'un point où la densité de charge est  $\sigma$ , le champ est normal à la surface du conducteur est égal  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

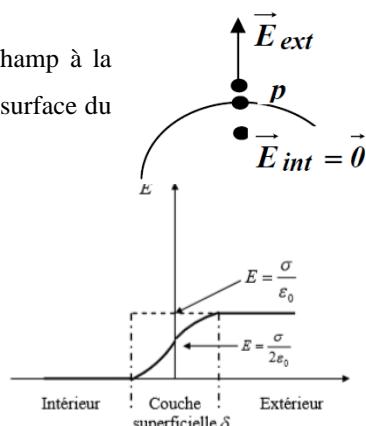
**Remarque :**

Le champ passe de  $\vec{E}_{int} = \vec{0}$  à  $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ . Il y a donc discontinuité du champ à la traversée d'une couche mince chargée de densité  $\sigma$ . On suppose que sur la surface du conducteur (au point  $P$ ) le champ est la moyenne entre  $\vec{E}_{ext}$  et  $\vec{E}_{int}$  :

$$E(P) = \frac{1}{2} (\vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Sur la surface du conducteur le champ est égal à :  $\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

Cette dernière expression du champ sera utilisée pour le calcul de la pression électrostatique.



### VIII.2.3 Pression électrostatique

Calculons maintenant les forces auxquelles sont soumises les charges électriques situées à la surface d'un conducteur en équilibre. Ces charges de surface sont soumises à des forces répulsives de la part des autres charges du conducteur. Considérons un élément de surface  $dS$  portant une charge  $dq = \sigma dS$ .

Le champ  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$  exerce sur la charge  $dq$  une force électrostatique :

$$d\vec{F} = dq \vec{E} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \text{ soit } d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}.$$

Cette force est donc normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quel que soit le signe de la charge. Elle est proportionnelle à l'élément de surface  $dS$  et présente, par conséquent, le caractère d'une force de pression. La force par unité de surface, c'est-à-dire la pression électrostatique, est alors donnée par :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

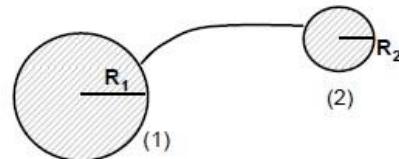
Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci.

### VIII.2.4 Pouvoir des pointes

Cette expression décrit le fait expérimental que, à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est, au voisinage d'une pointe, très élevée.

Soient deux sphères chargées de rayons différents ( $R_2 \ll R_1$ ), reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. Chaque sphère est isolée mais elles ont le même potentiel V. Cela implique alors :

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$



Donc, plus une sphère a un rayon petit et plus sa densité de charges sera élevée. Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure (accumulation de charges aux pointes). Le champ électrique au voisinage de la petite boule sera plus intense qu'au voisinage de la grosse boule. Ce résultat se généralise à un conducteur de forme quelconque et explique que le champ électrique très important va contribuer à l'ionisation de l'air au voisinage d'une pointe.

#### Applications :

Ce phénomène est très présent dans la vie quotidienne, il permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe le plus souvent sur des objets pointus (clocher, arbre, sommet d'un parapluie, paratonnerre).

Le pouvoir de pointe est utile pour faciliter la décharge de l'électricité ; c'est le rôle des paratonnerres, qu'on place sur les édifices pour les protéger contre la foudre.

### VIII.3 Capacité et énergie d'un conducteur seul dans l'espace

#### VIII.3.1 Capacité d'un conducteur seul

Il est possible de faire une analogie entre la température d'un corps et le potentiel électrostatique. Or, pour une quantité de chaleur donnée, la température d'un corps dépend en fait de sa capacité calorifique. Il en va de même pour le potentiel électrostatique : il dépend de la capacité du corps à « absorber » les charges électriques qu'il reçoit. On peut donc suivre cette analogie et définir une nouvelle notion, la capacité électrostatique :

Capacité électrostatique  $\Leftrightarrow$  Capacité calorifique

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique  $\sigma$  et porté au potentiel  $V$ . Celui-ci s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P) dS}{PM}$$

En tout point M du conducteur, le point P étant un point quelconque de sa surface. Par ailleurs, la charge électrique totale portée par ce conducteur s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P).dS}{PM}$$

$$Q = \iint_S \sigma.dS$$

Si on multiplie la densité surfacique par un coefficient constant  $a$ , on obtient une nouvelle charge totale  $Q' = aQ$  et un nouveau potentiel  $V' = aV$ . On a ainsi un nouvel état d'équilibre électrostatique, parfaitement défini. On voit donc que, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par  $Q$  et  $V$ ) est tel que le rapport  $Q/V$  reste constant (cela résulte de la linéarité de  $Q$  et  $V$  en fonction de  $\sigma$ ).

**Définition :** La capacité électrostatique d'un conducteur à l'équilibre est définie par  $C = \frac{Q}{V}$ :  
*Q est la charge électrique totale du conducteur porté au potentiel V.*

**Remarque :**

La capacité  $C$  d'un conducteur est une grandeur toujours positive. Elle est indépendante de son potentiel ou de sa charge. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait le conducteur. L'unité de la capacité est le Farad (symbole F).

Le Farad est une unité très grande, souvent on utilise les sous-multiples : picofarad ( $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ), nanofarad ( $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ), microfarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ).

### VIII.3.2 Energie électrostatique d'un conducteur seul

$$E_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

C'est l'énergie à fournir pour charger le conducteur de façon réversible.

### VIII.4 Systèmes de conducteurs en équilibre

Soit un système de  $n$  conducteurs dans le vide agissant par influence les uns sur les autres de façon à atteindre un état d'équilibre où le champ à l'intérieur de chacun des conducteurs soit nul.

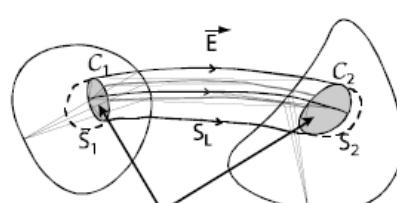
Il s'agit de trouver les,  $Q_i$ ,  $\sigma_i$  et  $V_i$  de chaque conducteur.

**Rappel :**

- $\vec{E} = \vec{0}$  à l'intérieur de chaque conducteur.
- La surface de chaque conducteur est une surface équipotentielle  $\Rightarrow V_i = \text{cte}$ .
- Au voisinage de chaque conducteur  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ .
- Un conducteur peut être en communication permanente avec une source électrostatique.
- Il peut être mis à la terre  $\Rightarrow V_i = 0$ .
- Il peut être isolé  $\Rightarrow Q_i = \text{cte}$ .

### VIII.4.1 Théorème des éléments correspondants.

Soit deux conducteurs ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient ( $A_1$ ) à ( $A_2$ ). Soit un petit contour fermé  $C_1$  situé sur la surface de ( $A_1$ ) tel que l'ensemble des lignes de champ issues de ( $A_1$ ) et s'appuyant sur  $C_1$  rejoignent ( $A_2$ ) (et y dessinent un contour fermé  $C_2$ ).



Elements correspondants

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un **tube de champ** : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale  $S_L$  dessinée par ce tube est nul ( $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ).

Soit une surface fermée  $S = S_L + S_1 + S_2$  où  $S_1$  est une surface qui s'appuie sur  $C_1$  et plonge à l'intérieur de  $(A_1)$  et  $S_2$  une surface similaire pour  $(A_2)$ . En appliquant le théorème de Gauss, on a :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

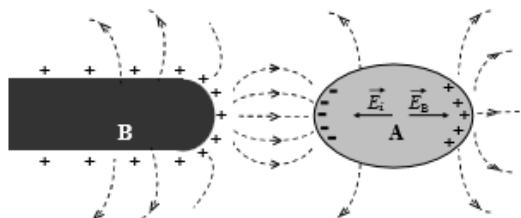
$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} = 0$$

Où  $Q_1$  est la charge totale contenue sur la surface de  $(A_1)$  embrassée par  $C_1$  tandis que  $Q_2$  est la charge contenue sur la surface correspondante de  $(A_2)$   $\Rightarrow Q_1 = -Q_2$  nécessairement. Deux éléments, découpés sur deux conducteurs différents, par un même tube de champ, sont appelés éléments correspondants.

**Théorème des éléments correspondants :** les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont égales et opposées.

#### VIII.4.2 Notion d'influence partielle

Considérons un conducteur A électriquement neutre. Approchons de ce dernier, un conducteur B chargé positivement. Le conducteur B crée dans l'espace et en particulier dans le conducteur A un champ électrique  $\vec{E}_B$ .

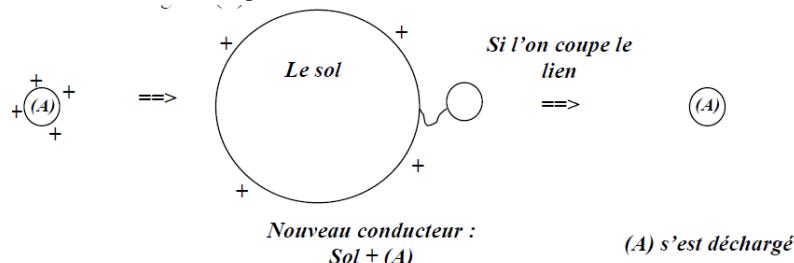


Les électrons libres du conducteur A vont, sous l'action de ce champ, se déplacer dans le sens inverse de  $\vec{E}_B$ . Ces électrons s'accumulent progressivement sur la face en regard de B et forment à l'équilibre des charges négatives dont la résultante est  $-Q$ . A l'inverse, des charges positives, dont la résultante est  $+Q$ , vont apparaître sur l'autre face par défaut d'électrons comme le montre la figure ci-dessus. Ces charges, qui résultent d'une électrisation par influence, apportent leur contribution au champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur. Elles créent un champ induit  $\vec{E}_i$  qui vient s'opposer au champ inducteur  $\vec{E}_B$  et réduire ainsi le champ électrique total. A l'intérieur du conducteur A, les électrons libres ne cessent leur mouvement que lorsque le champ électrique total s'annule. Le système formé par les deux conducteurs atteint alors un état d'équilibre.

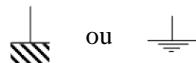
**Lignes de champ :** La topographie de l'espace électrique, représentée sur la figure ci-dessus montre que seules certaines lignes de champ, qui émanent du corps inducteur B, aboutissent au conducteur A. Il en résulte, en vertu du théorème des éléments correspondants, que la charge Q créée par influence, est inférieure à la charge inductrice du conducteur B.

#### Influence sur un conducteur relié au sol

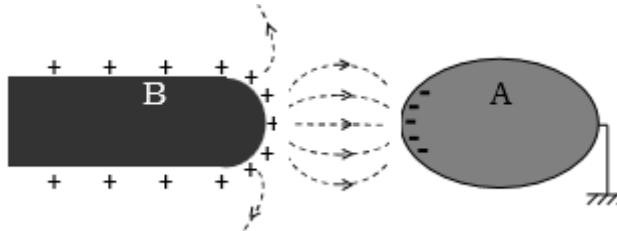
La terre est un grand conducteur (grand réservoir de charges). Ce conducteur est neutre car il y a autant de charges (+) que de charges (-). Si l'on relie un conducteur (A) chargé au sol, l'ensemble [sol + (A)] constituera un nouveau conducteur. La charge, initialement répartie sur la surface de (A), va se répartir sur toute la surface du nouveau conducteur. Etant donné que la surface de (A) est négligeable devant celle de la terre tout semble comme si la terre a absorbé l'ensemble de la charge de (A).



On schématise le sol par le symbole :



On relie, à présent le conducteur A à la terre, au moyen d'un fil conducteur (figure ci-dessous). La terre et le conducteur forment ainsi un seul conducteur ; les charges positives sont alors repoussées vers la terre. Le potentiel de ce conducteur est nul et plus aucune ligne de champ ne le quitte.



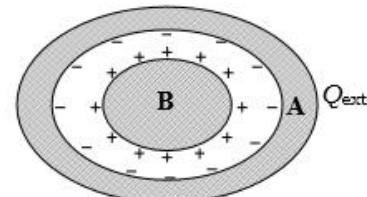
Dans ces exemples, l'influence est dite partielle, car toutes les lignes de champs issus du conducteur B n'aboutissent pas sur A. Nous pouvons créer des conditions d'influence totale en plaçant tout simplement le conducteur B à l'intérieur d'un conducteur creux A.

#### VIII.4.3 Influence totale

On dit qu'il y a influence totale chaque fois que le corps influencé entoure complètement le corps qui l'influence.

Toutes les lignes de champ partant de B (conducteur qui influence) aboutissent sur A (conducteur influencé). L'application du théorème des éléments correspondants, montre que la charge qui apparaît sur la surface interne de A est égale et opposée à la charge du conducteur B.

$$Q_B = -Q_{Aint} \text{ et } Q_{Aext} = Q_B$$



**Toutes les lignes de champ issues de B se referment sur  $A_{int}$   $\Rightarrow$  Ce résultatat ne dépend pas de la position de B à l'intérieur de A. Le champ électrique  $\vec{E} = \vec{0}$  dans B et dans A.**

- $\vec{E} \neq \vec{0}$  entre A et B.
- $\vec{E} \neq \vec{0}$  à l'extérieur de A.

**Si on apporte des charges sur A : en le mettant au potentiel V**

- Elles se répartissent sur la surface extérieure de A ;
- Rien n'a changé à l'intérieur  $\Rightarrow$  Ecran électrostatique.

**Si on met A au sol :**

On a toujours  $Q_B$  sur B donc par influence totale :  $Q_B = -Q_{Aint}$  mais  $Q_{Aext} = 0$   
 $\rightarrow$  Les charges extérieures s'écoulent au sol.

**Le champ électrique  $\vec{E} = \vec{0}$  dans B, dans A et à l'extérieur de A, mais  $\vec{E} \neq \vec{0}$  entre B et A.**

#### Théorème des écrans électriques

Tout conducteur creux, maintenu à potentiel constant divise l'espace en deux régions électriquement indépendantes l'une de l'autre, l'une extérieure à A, l'autre intérieure constituée par la cavité creusée dans A.

Application :

- Blindage électrostatique.
- Cage de Faraday

#### VIII.4.4 Energie électrostatique d'un système de conducteur en équilibre

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

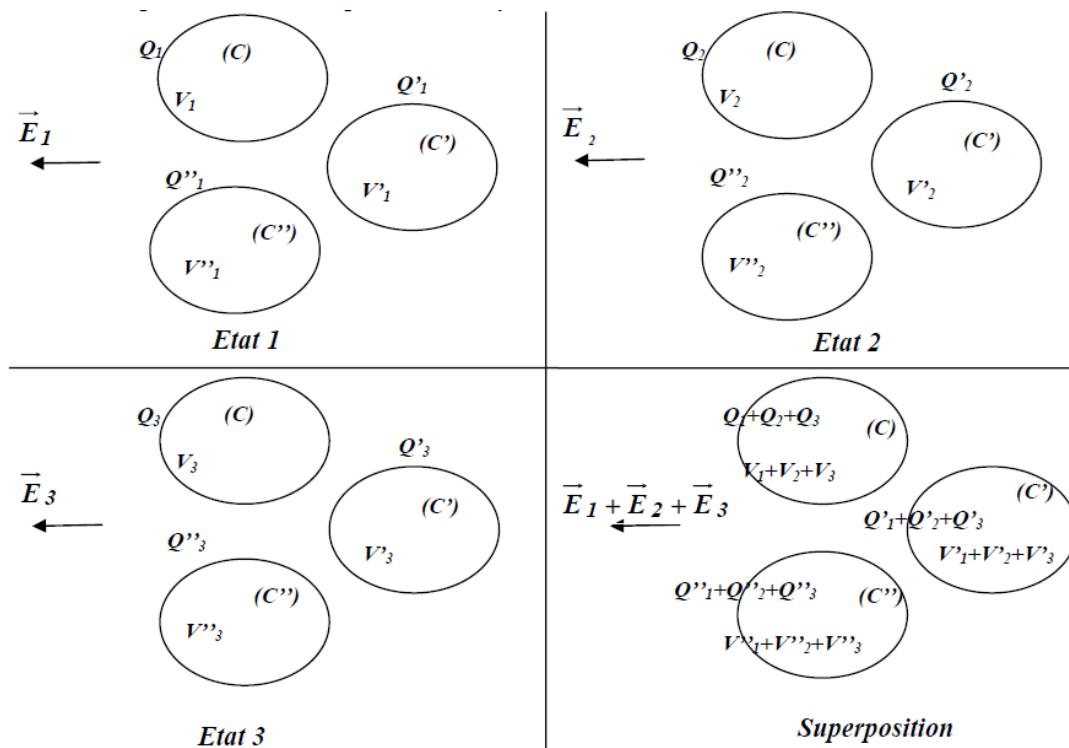
$$\frac{dW}{dv} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} : \text{densité d'énergie électrostatique}$$

### VIII.4.5 Système de conducteur en équilibre électrostatique.

#### \* Théorème de superposition

Soit plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur :

*A partir de plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur, on obtient un nouvel état d'équilibre en les superposant. Les densités, les charges totales sur chaque conducteur et le potentiel en tout point de l'espace sont les sommes algébriques des valeurs dans chaque état d'équilibre. Le champ résultant en un point est la somme vectorielle des champs créés par chaque état d'équilibre. Toute superposition d'états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre.*



#### \* Capacité et coefficients d'influence

Soit  $n$  conducteurs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ayant les charges  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  et les potentiels  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Supposons les états d'équilibre suivant :

**1<sup>er</sup> état**, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf  $A_1$ . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul  $V_1$ .

	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$
Potentiel	$V_1$	0	...	0
Charge	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	...	$C_{n1}V_1$

**2<sup>ème</sup> état**, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf  $A_2$ . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul  $V_2$ .

	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$
Potentiel	0	$V_2$	...	0
Charge	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	...	$C_{n2}V_2$

**n<sup>ème</sup> état**, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf  $A_n$ . Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul  $V_n$ .

	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$
Potentiel	0	0	...	$V_n$
Charge	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$	...	$C_{nn}V_n$

**Superposition de ces n états d'équilibre :**

	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$
Potentiel	$V_1$	$V_2$	...	$V_n$
Charge	$C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$	$C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n$	...	$C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n$

$C_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est la capacité du conducteur  $A_i$  en présence des autres conducteurs.  $C_{ii}$  est différente de la capacité  $C$  d'un conducteur seul. **Les  $C_{ii}$  sont toujours  $\geq 0$ .**

$C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) est dite coefficient d'influence entre le conducteur  $A_i$  et le conducteur  $A_j$ .

Dans les tableaux ci-dessus, on peut permute  $A_i$  avec  $A_j$  pour montrer facilement que  $C_{ij} = C_{ji}$ . **Les  $C_{ij}$  sont toujours  $\leq 0$ .**

#### **VIII.4.6 Relation entre charges et potentiels**

Soit un ensemble de  $n$  conducteurs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de potentiel  $V_1, V_2, \dots, V_n$  dans le vide.

L'état d'équilibre obtenu est unique et parfaitement déterminé.

#### **Exemple : n=2**

$A_1$  et  $A_2$  à  $V_1$  et  $V_2$  portant  $Q_1$  et  $Q_2$

##### **1<sup>er</sup> équilibre :**

$V_2 = 0$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  dépendent de  $V_1$ .

En doublant  $V_1$ , le champ en tout point est doublé et les charges  $Q_1$  et  $Q_2$  seront doublées.

$Q_1$  et  $Q_2$  sont proportionnelles à  $V_1$ .

$Q_1 = C_{11}V_1$  ;  $Q_2 = C_{21}V_1$

##### **2<sup>eme</sup> équilibre :**

$V_1 = 0$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  dépendent de  $V_2$ .

$Q_1 = C_{12}V_2$  ;  $Q_2 = C_{22}V_2$

#### **Superposition :**

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$C_{ij}$ : Capacité du conducteur  $i$  en présence des  $(n - 1)$  autres

$C_{ij} = C_{ji}$  : Coefficient d'influence du conducteur  $i$  sur le conducteur  $j$

$C_{ii} > 0$ ;  $C_{ij} < 0$

Ce résultat se généralise :  $Q_i = \sum_j C_{ij}V_j$  ou  $[Q] = [C][V]$

#### **VIII.6 Condensateurs**

##### **VIII.6.1 Définition**

C'est un ensemble de deux conducteurs dont l'un entoure complètement l'autre. Ils sont en influence totale.

Celui qui entoure (conducteur creux) est relié au sol : armature externe.

Celui qui est entouré : armature interne.

La charge du condensateur = La charge de l'armature interne.

La capacité du condensateur = La capacité de l'armature interne en présence de l'armature externe reliée au sol.

L'espace compris entre les deux armatures, est vide ou rempli d'un milieu isolant (diélectrique).

La capacité dépend des surfaces en regard ; elle est proportionnelle à  $\epsilon_r$  entre les armatures. La capacité  $C_{ij}$  du conducteur  $i$  en présence des autres conducteurs est supérieure à la capacité  $C_i$  lorsqu'il est seul. Elle est exprimée en Farad (F).

### VIII.6.2 Relation entre $C$ et $U$

Considérons deux conducteurs, le conducteur 2 entoure le conducteur 1.

$$V_2 = 0 \Rightarrow Q_{2\text{ext}} = 0 \Rightarrow Q_{2\text{int}} = -Q_1 \Rightarrow Q_2 = -Q_1$$

$$\text{Or } \begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 \\ Q_2 = C_{21}V_1 \end{cases} \Rightarrow C_{21}V_1 = -C_{11}V_1 \Rightarrow C_{21} = -C_{11}$$

Avec  $C_{21} = C_{12}$

$$Q_1 = C_{11}V_1 - C_{12}V_2 = C_{11}(V_1 - V_2) ;$$

Posons  $Q_1 = Q$  ;  $V_1 - V_2 = U$  ;  $C_{11} = C$

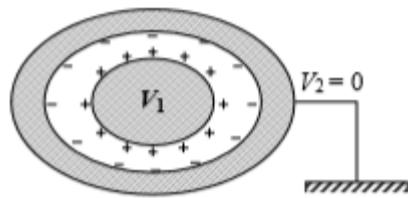
$$C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C$$

$$Q = CU (Q_2 = -Q_1 = -Q)$$

Pour calculer  $C$ ; on calcule  $U$  connaissant  $Q$ .

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U}$$

$C$ : est dite **capacité du condensateur**. C'est le rapport entre la charge de l'armature interne et la différence de potentiel entre les deux armatures en commençant par l'armature interne. Si l'on relie les deux armatures par un fil conducteur, les deux faces en regard vont se neutraliser. **On dit que le condensateur s'est déchargé.**



### VIII.6.3 Energie d'un condensateur

C'est l'énergie mise en jeu pendant la décharge quand on relie les deux armatures l'une à l'autre.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}QV_1 - \frac{1}{2}QV_2 = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ W &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S}{e}(Ee)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2Se = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\nu \\ \frac{dW}{dv} &= \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

### VIII.6.4 Association de condensateurs

#### VIII.6.4.1 Association en parallèle

$$U = \frac{Q}{C_{eq}} \Rightarrow Q = C_{eq}U$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

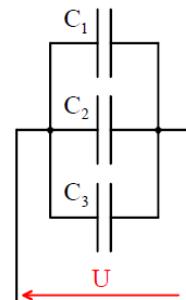
$$\text{Or } Q_1 = C_1U_1, Q_2 = C_2U_2, \dots, Q_n = C_nU_n$$

$$\Rightarrow Q = C_1U_1 + C_2U_2 + \dots + C_nU_n$$

$$\Rightarrow Q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U \text{ car } U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$$

$$\Rightarrow (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U = C_{eq}U$$

$$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



$$\Rightarrow C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

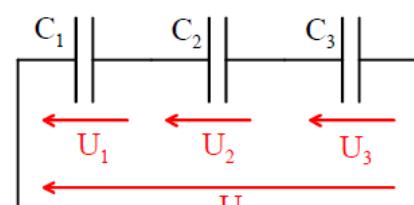
#### VIII.6.4.2 Association en série

$$U = \frac{Q}{C_{eq}} = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\text{Or } U_1 = \frac{Q}{C_1}, U_2 = \frac{Q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{Q}{C_n}$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

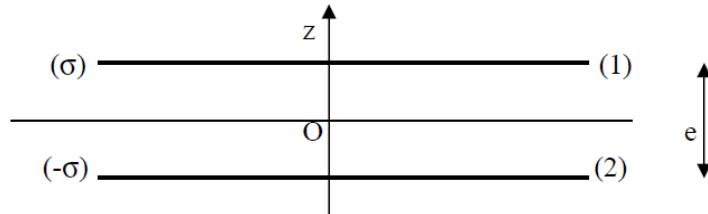


$$\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

### VIII.7 Applications : Calcul de capacité

#### VIII.7.1 Condensateur plan

Il est constitué de deux plans infinis portés aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et distant de  $e$ . Le champ électrostatique est la somme des champs créés par les deux plans. Entre les armatures, le champ  $\vec{E}_{int}$  est uniforme :  $\vec{E}_{int} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ . A l'extérieur, le champ  $\vec{E}_{ext} = 0$ .



Par circulation du champ, on peut déterminer la différence de potentiel entre les armatures. La circulation de  $\vec{E}_{int}$  est :  $\int_1^2 \vec{E}_{int} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 dV = V_1 - V_2 = -eE_{int}$ . En remplaçant  $E_{int}$  par sa valeur, on a :  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}e = V_1 - V_2 = U$ .

Si chaque plan a une surface  $S$  alors :  $Q_1 = \sigma S \Rightarrow U = \frac{Q_1 e}{S \epsilon_0}$

Il y a proportionnalité entre la charge et la tension, le coefficient de proportionnalité est la capacité du condensateur.

$$Q = C \cdot U \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Pour augmenter  $C$  il faut remplacer le vide par de la matière, c'est-à-dire  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_0 \epsilon_r$ .

#### VIII.7.2 Condensateur sphérique

Par raison de symétrie,  $\vec{E}$  est radial.

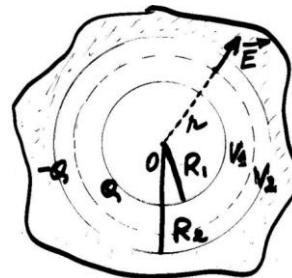
Application du théorème de Gauss :  $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{dr}{r^2} \right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = (4\pi\epsilon_0) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



Dans le cas d'un condensateur sphérique où les armatures sont très proches, on a :  $R_1 \approx R_2$  et  $R_2 - R_1 = e$

$$\Rightarrow C = (4\pi\epsilon_0) \frac{R^2}{e} = \epsilon_0 \frac{4\pi R^2}{e} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

#### VIII.7.3 Condensateur cylindrique

Par raison de symétrie,  $\vec{E}$  est radial :

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi rh\epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{dr}{r} \right)$$

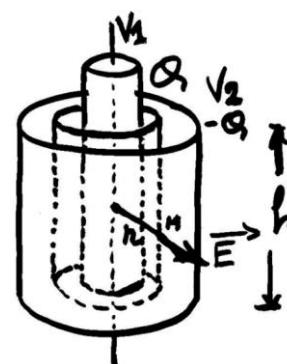
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Cas où  $R_1 \approx R_2$ , posons  $R_2 = R_1 + e$

$$C = 2\pi\epsilon_0 h \frac{1}{\ln \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right)} \text{ avec } \ln \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right) \approx \frac{e}{R_1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{e} R_1 = \epsilon_0 \frac{2\pi R_1 h}{e} = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$



### VIII.8 Force s'exerçant sur l'armature d'un condensateur.

On considère le cas d'un déplacement unidimensionnel.

- a) Le condensateur est isolé : la charge reste constante. Dans le cas d'un déplacement le long d'un axe  $\overrightarrow{ox}$  la force qui s'exerce sur une armature est :

$$F = - \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q, \text{ avec } E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ on a } F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

- b) Une des armatures est portée à  $V_1 = V$  l'autre est portée à  $V_2 = 0$

$$F = \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_V, \text{ avec } E_p = \frac{1}{2} CV^2 \text{ on a } F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

Cas d'une rotation autour d'un axe :

$$M_\Delta = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha}$$

#### Exercices d'application

Electromètre absolu : l'électromètre absolu, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une balance dont l'un des plateaux est solidaire de l'armature mobile d'un condensateur plan. La seconde armature est fixe. Une d.d.p.  $V$  est appliquée au condensateur, il en résulte une force électrostatique  $\vec{F}$ . Celle-ci est équilibrée par une force  $\vec{mg}$  obtenue en plaçant des masses marquées sur l'autre plateau de la balance. Exprimer la d.d.p.  $V$  à mesurer en fonction des caractéristiques du condensateur de  $m$  et  $g$ .

A.N. : Rayon des armatures  $R = 6$  cm, écartement  $x = 1$  cm,  $m = 5$  g et  $g = 10m/s^2$ .

#### Solution :

##### *1ère méthode :*

La force électrique peut être calculée directement à partir de la pression électrostatique :  $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

La force électrique qui s'exerce sur l'armature mobile est verticale et de module :

$$F = PS = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}, \text{ avec } q = CV \text{ soit } q = \frac{\varepsilon_0 S}{x} V \text{ on a } F = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{x^2} V^2$$

##### *2ème méthode :*

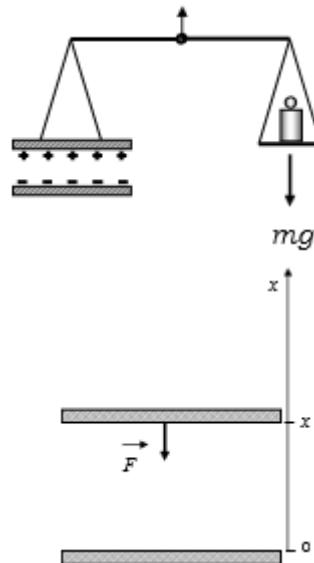
La force électrique peut être calculée à partir de l'énergie. Supposons que l'armature mobile effectue un déplacement élémentaire  $dx$ . Au cours de ce déplacement seul l'écartement  $x$  varie, les potentiels  $V_1 = V$  et  $V_2 = 0$  restent constants. La force qui s'exerce sur l'armature mobile est dirigée le long de l'axe  $\overrightarrow{ox}$  et a pour module

$$F = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x}, \text{ soit } F = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{x^2} V^2$$

Cette force est équilibrée par la force  $\vec{P} = \vec{mg}$ .

A l'équilibre :

$$V^2 = 2 \frac{x^2}{\varepsilon_0 S} mg \Rightarrow V = \sqrt{2 \frac{x^2}{\varepsilon_0 S} mg} = 10.000 \text{ volts}$$



**TD DE L'ECUE 1****SERIE 6 : Système de conducteurs en équilibre électrostatique****Exercice 1 : Forces et pressions électrostatiques**

Une sphère métallique creuse, seule dans l'espace, est portée au potentiel  $V$ . Calculer la résultante des forces qui s'exercent sur une calotte dont le rayon est vu du centre de la sphère sous un l'angle  $\alpha$ . A.N. :  $V = 10 \text{ kV}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .

**Exercice 2 : Charges et potentielles de deux sphères conductrices**

1. Quels sont le potentiel et la charge électrique d'une sphère conductrice ( $S_1$ ) pleine de rayon  $R_1$  et reliée à la terre ?
2. Soit une sphère ( $S_2$ ) creuse d'épaisseur négligeable de rayon  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) et portant une charge ( $Q_2 > 0$ ). En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$ , à l'intérieur et à l'extérieur de ( $S_2$ ) seule dans le vide.
3. Toujours dans le vide, ( $S_1$ ) encore reliée à la terre, est introduite au centre de ( $S_2$ ). Trouver les nouvelles charges  $Q_1$  sur ( $S_1$ ),  $Q_2$  sur la face interne de ( $S_2$ ) et  $Q_2''$  sur la face externe et le nouveau potentiel  $V'$  de ( $S_2$ ).

**Exercice 3 : « Lévitation électrostatique »**

Au sommet d'une sphère conductrice de rayon  $R$ , on pose un petit disque conducteur de rayon  $r$  ( $r \ll R$ ) et de masse  $m$ .

1. La sphère éloignée de tout corps chargé, est au potentiel  $V$ . pour quelle valeur de  $V_0$  de  $V$  le disque se soulève-t-il ? A.N :  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $m = 0,5 \text{ g}$ ,  $r = 5 \text{ mm}$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .
2. En admettant que, pour  $V > V_0$ , le disque reste horizontal et que son centre soit à la verticale du sommet de la sphère, à quelle distance  $x$  de la sphère reste-t-il en équilibre ? Exprimer  $x$  en fonction de  $R$ ,  $V$  et  $V_0$ .
3. Le disque lévant à l'altitude  $x$ , on diminue lentement  $V$ , pour quelle valeur  $V_1$  de  $V$  le disque repose-t-il à nouveau sur la sphère ? Interprétez les résultats obtenus.

**Exercice 4 : Deux sphères conductrices reliées**

Deux sphères conductrices  $S_1$  et  $S_2$  de rayons  $R_1$  et  $R_2$  réunies par un fil conducteur forment un conducteur unique. La distance des centres des sphères est très grande devant leurs rayons. On négligera les charges portées par le fil. Comparer les densités de charge portées par  $S_1$  et  $S_2$ . Quelle propriété générale vérifie-t-on ici ? Calculer la capacité propre du conducteur formé par  $S_1$  et  $S_2$ .

**Exercice 5 : Trois sphères conductrices en équilibre**

Trois sphères conductrices de rayon  $R$  ont leurs centres  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  aux sommets d'un triangle équilatéral de côté  $D$  ( $D \gg R$ ). En admettant que l'action d'une sphère à la distance  $D$  est pratiquement la même que si toute la charge était en son centre, calculer les capacités et les coefficients d'influence des trois sphères. Application numérique :  $R = 2 \text{ cm}$ ,  $D = 2\text{m}$ .

**Exercice 6 : Capacités et coefficient d'influence**

Deux sphères métalliques  $S_1$  et  $S_2$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , ont leurs centres  $O_1$  et  $O_2$  distants de  $D$ .

1. Dans l'hypothèse où  $D$  est très supérieur à  $R_1$  et  $R_2$ , calculer les capacités  $C_{11}$  et  $C_{22}$  de ces sphères ainsi que leur coefficient d'influence.
2. Quelles remarques suggèrent les résultats précédents ?  
Application numérique :  $R_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 2 \text{ cm}$ ,  $D = 10 \text{ cm}$ .

**Exercice 7 : Charge ponctuelle influençant une sphère conductrice**

Soit une sphère conductrice, de rayon  $R$ , isolée, en présence d'une charge ponctuelle  $q$  à la distance  $d$  de son centre ( $d > R$ ).

La sphère est neutre, calculer son potentiel en fonction de  $d$ .

Même question, si la sphère porte la charge totale  $Q$ .

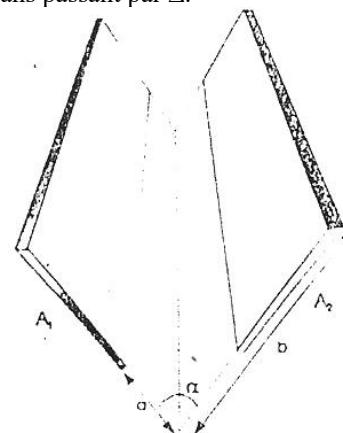
**Exercice 8 : Phénomène d'influence**

- Une sphère conductrice pleine ( $A_1$ ) de centre O, de rayon  $R_1$  et de surface  $S_1$  est portée au potentiel  $V_1 > 0$ . Calculer la charge  $Q_1$  portée par ( $A_1$ ).
- On isole ( $A_1$ ) puis on l'entoure d'une sphère conductrice creuse ( $A_2$ ) initialement neutre de rayon intérieur  $R_2$  et extérieur  $R_3$ . Quelle est la répartition de charges portée par les deux sphères (faire un schéma) ? Quels sont les potentiels  $V'_1$  de ( $A_1$ ) et  $V'_2$  de ( $A_2$ ) ?
- On relie ( $A_2$ ) au sol. Quelle est la nouvelle répartition de charges ? Quel est  $V''_1$  de ( $A_1$ ) ?
- On isole ( $A_2$ ) puis on relie ( $A_1$ ) au sol. Quel est  $V''_2$  de ( $A_2$ ) ?
- On porte ( $A_1$ ) à  $V_1$  et ( $A_2$ ) à  $V_2$  tel que  $V_1 > V_2$ . Calculer la capacité du condensateur constitué par les deux sphères.

**CONDENSATEURS****Exercice 1 : Condensateur dièdrique**

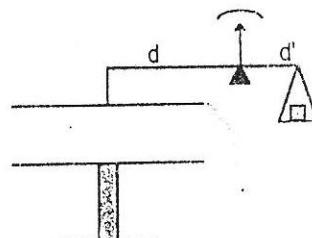
Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux armatures rectangulaires dont les plans forment un dièdre d'arête  $\Delta$ .  $A_1$  et  $A_2$  se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\alpha$ . Les armatures ont une longueur  $h$  parallèlement à  $\Delta$  et sont comprises entre les cylindres de révolution d'axe  $\Delta$  dont les rayons sont respectivement  $a$  et  $b$ . On admet que  $A_1$  et  $A_2$  étant portées aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , les surfaces équipotentielles sont des plans passant par  $\Delta$ .

- Montrer que la norme de  $E$  du champ électrostatique est constante le long d'une ligne de champ.
- Calculer la capacité du condensateur formé par  $A_1$  et  $A_2$ .
- Calculer le moment par rapport à  $\Delta$  des forces qui s'exercent sur une armature.

**Exercice 2 : Capacité d'un condensateur plan - Electromètre**

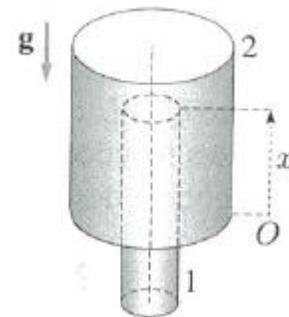
Un condensateur plan A, de surface S et d'épaisseur  $e$ , porte une charge  $Q$  uniformément répartie ( $\sigma$ ). La ddp étant  $U_0$ .

- Calculer le champ en un point M entre les deux armatures et en déduire que le champ ne varie pas avec la position de M.
- Calculer la capacité C du condensateur et son énergie.
- A est isolé de la source de tension. On écarte les armatures d'une distance  $a$ . Calculer la nouvelle tension  $U_0'$ .
- Calculer la force  $\vec{F}$  exercée sur l'armature mobile (2).
- Le condensateur précédent est un électromètre à plateaux. En supposant l'équilibre établi, exprimer la différence de potentiel  $U$  que permet de déterminer cet électromètre.
- L'équilibre précédent est-il stable ?

**Exercice 3 : Condensateur cylindrique**

On considère un condensateur cylindrique formé de deux conducteurs coaxiaux 1 et 2 de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  (voir figure ci-dessous). L'armature 2 externe est fixe alors que l'armature 1 interne peut avoir un mouvement de translation suivant l'axe vertical ascendant  $Ox$ .

1. En négligeant les effets de bord, donner l'expression de la capacité  $C(x)$  en fonction du paramètre  $x$  de pénétration de 1 dans 2.
2. On maintient entre les armatures une différence de potentiel  $U$ . Quelle doit être la valeur  $U_0$  de  $U$  pour que l'armature interne, de masse  $m$ , soit en équilibre ? Cet équilibre est-il stable ?
3. En imposant  $x = x_0$ , le condensateur est chargé sous une d.d.p  $U_0$ , puis isolé. Quelle doit être la force supplémentaire  $\vec{F}_{op}$  que l'on doit exercer sur l'armature 1 pour la maintenir en équilibre ?



#### Exercice 4 : Energie stockée par deux condensateurs en série

Deux condensateurs en série, de capacités respectives  $C_1 = 40 \mu\text{F}$  et  $C_2 = 80 \mu\text{F}$ , sont connectés aux bornes d'un générateur qui impose une d.d.p  $U = 120 \text{ V}$ . Calculer les différences de potentiel aux bornes de chacun d'eux et les énergies stockées.

#### Exercice 5 : Capacité équivalente

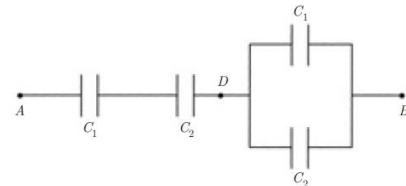
Soit le groupement de condensateurs suivant :

1. La capacité  $C_1$  étant donnée, quelle doit être la capacité  $C_2$  pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente  $C_e$  telle que  $C_e = C_2/2$  ?

A.N. :  $C_1 = 8 \mu\text{F}$

2. Une tension  $U_{AB} = 500 \text{ V}$  est appliquée entre les points A et B.

Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.



**QCM****Exercice 1**

Une distribution de charges crée un champ électrostatique  $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 - y^2)\vec{j}$ . Calculer la densité volumique de charges  $\rho$  de cette distribution.

- a)  $\rho = 4\epsilon_0 ay$     b)  $\rho = 4\epsilon_0 ax$     c)  $\rho = 2\epsilon_0 ax$     d)  $\rho = 2\epsilon_0 ay$     e)  $\rho = 0$

**Exercice 2**

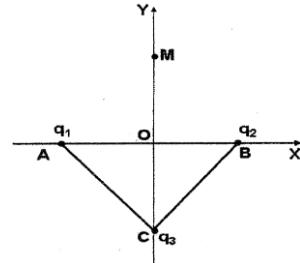
On rappelle l'expression du potentiel créé par un dipôle électrostatique :  $V = K \frac{p \cos \theta}{r^2}$ . Et on donne l'expression de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  en coordonnées sphériques :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi$ . Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par ce dipôle.

- a)  $\vec{E} = 2K \frac{p \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + K \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$     b)  $\vec{E} = 2K \frac{p \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r - K \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$   
c)  $\vec{E} = 2K \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{u}_r + K \frac{p \cos \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$     d)  $\vec{E} = 2K \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{u}_r$

**Exercice 3**

Trois charges ponctuelles positives  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont placées sur les sommets d'un triangle équilatéral  $ABC$  de côté  $a$ . Soit un point  $M$  de l'axe ( $Oy$ ) tel que  $OM = y > 0$ . Le point  $O$  est milieu de  $[AB]$ . Calculer le potentiel électrostatique  $V(M)$ .

- a)  $V(M) = K \left( \frac{q_1+q_2}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{1/2}} + \frac{q_3}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+y\right)} \right)$     b)  $V(M) = K \left( \frac{q_1+q_2}{\left(\frac{a}{2}+y\right)^{1/2}} + \frac{q_3}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+y\right)} \right)$   
c)  $V(M) = K \left( \frac{q_1+q_2}{\left(a^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{q_3}{\left(\frac{a}{2}+y\right)} \right)$     d)  $V(M) = K \left( \frac{q_1+q_2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+y\right)} + \frac{q_3}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{1/2}} \right)$

**Exercice 4**

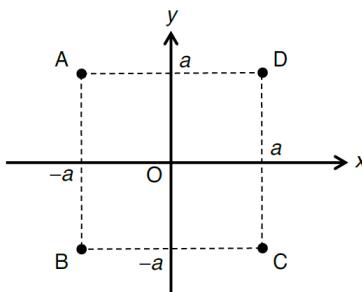
On considère une distribution volumique de charges à symétrie sphérique, de rayon  $R$  et de densité volumique variable  $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - k \frac{r^2}{R^2}\right)$  avec  $\rho_0$  et  $k$  deux constantes. Calculer la charge totale  $Q$  de cette distribution.

- a)  $Q = 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{5}\right) R^2$     b)  $Q = 4\pi\rho_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right) R^3$     c)  $Q = \frac{4}{3}\pi k\rho_0 R^3$     d)  $Q = 4\pi k\rho_0 R^2$

**Exercice 5**

Dans un plan  $Oxy$  muni d'un repère orthonormé, on place quatre charges  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_C$  et  $Q_D$  respectivement aux points  $A(-a, a)$ ,  $B(-a, -a)$ ,  $C(a, -a)$  et  $D(a, a)$  avec  $a > 0$ . On donne  $Q_A = -Q_B = Q_C = 10^{-7}\text{C}$ . Quelle est la valeur de  $Q_D$  pour que le champ électrostatique soit nul au point  $O(0,0)$  ?

- a)  $0,5 \times 10^{-7}\text{C}$     b)  $10^{-7}\text{C}$     c)  $-10^{-7}\text{C}$     d)  $2 \times 10^{-7}\text{C}$     e)  $-2 \times 10^{-7}\text{C}$

**Exercice 6**

Soit un cylindre infini de rayon  $R$ , chargé uniformément avec une densité volumique de charge  $\rho > 0$ . Considérons un point  $M$  placé à la distance  $r$  de l'axe du cylindre tel que  $r < R$ . La norme du champ électrostatique créé par le cylindre au point  $M$  est égale à :

- a) 0    b)  $\frac{\rho r}{2\epsilon_0}$     c)  $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$     d)  $\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$     e)  $\frac{\rho r^2}{2\epsilon_0 R}$     f)  $\frac{\rho r R}{2\epsilon_0}$

**Exercice 7**

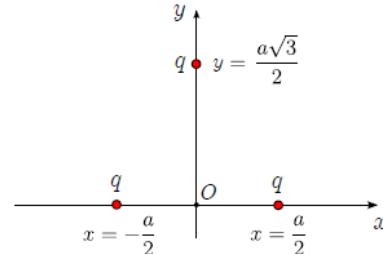
Soit un cylindre infini de rayon  $R$ , chargé uniformément avec une densité volumique de charge  $\rho > 0$ . Considérons un point  $M$  placé à la distance  $r$  de l'axe du cylindre tel que  $r > R$ . La norme du champ électrostatique créé par le cylindre au point M est égale à :

- a) 0      b)  $\frac{\rho r}{2\epsilon_0}$       c)  $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$       d)  $\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$       e)  $\frac{\rho r^2}{2\epsilon_0 R}$       f)  $\frac{\rho r R}{2\epsilon_0}$

**Exercice 8**

Soit la distribution de charges ci-dessous. Quelle est l'énergie potentielle électrostatique  $E_p$  de cette distribution de charges ?

- a)  $\frac{9q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$       b)  $\frac{7q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$       c)  $\frac{5q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$       d)  $\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$   
 e)  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

**Exercice 9**

Une boule, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , est chargée en volume avec une charge volumique d'expression :  $\rho = \frac{5}{3} \rho_0 \frac{r^2}{R^2}$ .  $\rho_0$  étant une constante et  $r$  la distance qui sépare le point considéré de  $O$ . La charge volumique moyenne  $\rho_m$  vaut :

- a)  $\frac{3}{5}\rho_0$       b)  $\frac{5}{3}\rho_0$       c)  $\frac{1}{2}\rho_0$       d)  $5\rho_0$       e)  $3\rho_0$       f)  $\rho_0$

**Exercice 10**

Une distribution de charges crée un champ électrostatique  $\vec{E} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$ . Calculer la densité volumique de charges  $\rho$  de cette distribution.

- a)  $\rho = 2\epsilon_0 a$       b)  $\rho = 2\epsilon_0 ax$       c)  $\rho = 4\epsilon_0 a$       d)  $\rho = 2\epsilon_0 ay$       e)  $\rho = 0$

## CHAP VIX : GENERALITES SUR LE COURANT ELECTRIQUE

### VIX.1 Phénomènes electrocinétiques

Le passage de charges électriques à travers un fil métallique produit les effets ci-dessous.

- Phénomènes électromagnétiques (électroaimants dans les haut-parleurs, les coupe-circuits automatiques, les relais, le moteur électrique, ...)
- Phénomènes calorifiques (application : à repasser, le grille-pain, le chauffe-eau, les radiateurs électriques, le sèche-cheveux, ...)
- Phénomènes chimiques (Un courant électrique peut provoquer des réactions chimiques.) Le courant électrique de conduction est du :
  - Au déplacement de charges positives  $q_+$  dans le sens du courant ;
  - Au déplacement de charges négatives  $q_-$  dans le sens contraire ;
  - Ou à la superposition des deux.

L'étude des propriétés essentielles et générales des charges en mouvement est l'électromagnétisme.

L'intensité du courant s'exprime en **ampère** (A).

### Définition de l'ampère :

L'ampère est l'intensité d'un courant, qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à 1m l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre de longueur.

### VIX.2 Vecteur densité de courant

Chaque fois qu'il y a mouvement d'un grand nombre de charges électriques, on dit qu'il y a courant électrique. La quantité de charge qui traverse une section d'un conducteur par unité de temps est appelée courant électrique.

#### VIX.2.1 Définition

Soit une portion d'un conducteur de section  $dS$  et de longueur  $dl$ .

Pendant  $dt$ , une charge  $q$ , ayant une vitesse  $v$ , traversera la distance  $dl$ .

Nous aurons :  $\vec{dl} = \vec{v} \cdot dt$

Le volume traversé par la charge est alors :  $d\tau = \vec{dl} \cdot \vec{dS} = \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

Si  $N$  est le nombre de charges mobiles par unité de volume,

$\rho = N \cdot q$  sera la quantité de charges par unité de volume. C'est donc la densité volumique de charge.

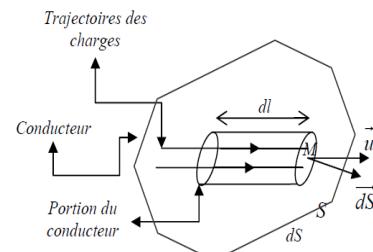
De plus dans  $d\tau$  nous avons la charge :  $\rho \cdot d\tau = N \cdot q \cdot d\tau = N \cdot q \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

Soit  $dQ$  cette charge :  $dQ = N \cdot q \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = N \cdot q \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS}$

On pose :  $\vec{j} = N \cdot q \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{i} = \frac{dQ}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$  est le courant qui traverse la section  $dS$ .

L'intensité du courant traversant toute la section  $S$ , est le flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$



$\vec{j}$  est appelée vecteur densité de courant. C'est une grandeure vectorielle, elle s'exprime en  $A \cdot m^{-2}$ .  $\vec{j}$  est colinéaire à la vitesse des charges mobiles. Les courbes tangentes à  $\vec{j}$  sont appelées lignes de courant. Ce sont les trajectoires des charges.

#### VIX.2.2 Flux de $\vec{j}$ à travers une surface fermée

Soit  $\Sigma$  une surface fermée dans un conducteur. Supposons que les charges quittent  $\Sigma$ . Pendant  $dt$ , le nombre de charges qui restent dans  $\Sigma$  diminue ; c'est-à-dire  $dQ < 0$ .

Or  $\frac{dQ}{dt} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS}$  et  $\vec{j} \cdot \vec{dS} > 0 \Rightarrow$  uniquement ici, nous allons ajouter un signe  $(-)$  dans l'un des membres de cette équation  $\Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{dS} =$  courant qui sort de  $\Sigma$ .

De plus si  $\rho$  est la densité de charges mobiles, on a  $Q = \iiint_V \rho \cdot dV \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} \cdot dV$  ;

$V$  est le volume dans  $\Sigma$ . D'où  $\iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \frac{d\rho}{dt} \cdot dV$

Or le théorème d'Ostrogradski appliqué à  $\vec{J}$  donne :  $\iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \cdot dV$ .

On en déduit que  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \cdot dV = - \iiint_V \frac{d\rho}{dt} \cdot dV \Rightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Cette relation est valable pour tout fluide qui coule.

### VIX.2.3 Régime permanent

On a  $\rho, \vec{J}$  et  $\vec{v}$  indépendant du temps :  $\rho = cte \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0$ . **Le flux de  $\vec{J}$  est conservatif.**

#### Conducteur filiforme :

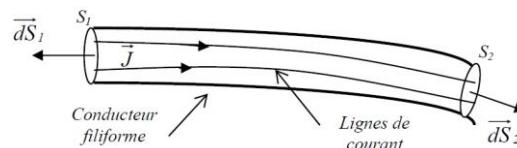
Soit un conducteur filiforme (à la forme d'un fil) et soit  $\Sigma = S_1 + S_2 + \text{surface latérale}$ .

Nous avons :

$$\iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2 + 0 = 0$$

$\iint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2$  : l'intensité du courant est la même pour toutes les sections du circuit ;

Le courant qui entre dans  $S_1$  est le même que celui qui sort de  $S_2$ .



#### Conducteur présentant des dérivations :

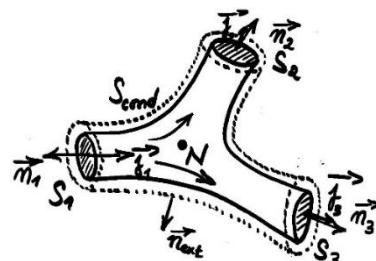
Dans un circuit comportant des dérivations, le courant  $I$  dans le conducteur principal est égal à la somme des intensités des courants dans les dérivations.

$$0 = \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_3} \vec{J}_3 \cdot \vec{n}_3 dS$$

$$0 = -I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

$$\sum \epsilon_k \cdot I_k = 0 : \text{Loi des noeuds}$$

$\epsilon_k = +1$  lorsque  $I$  est dirigé vers N ;  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.



#### Remarque :

- Pour les courants en surface :  $\vec{j} = nq\vec{v} = \sigma_m \vec{v}$
- $\vec{j} = nq\vec{v}$  : Vecteur densité surfacique de courant
- $\sigma_m$  : Densité surfacique de charges mobiles
- Pour un conducteur filiforme :  $\vec{j} \cdot \vec{n} S = I$

### VIX.3. Loi d'Ohm (Georges Simon Ohm en 1827)

#### VIX.3.1 Mouvement des porteurs

Soit un conducteur avec des porteurs charges mobiles. Ces charges  $q$  sont animées d'une vitesse  $\vec{v}$  et donc soumises à une force électrique  $\vec{f}_e = q \cdot \vec{E}$  et une force de frottement  $\vec{f}_r = -\alpha \cdot \vec{v}$  ( $\alpha$  : coefficient de frottement)

$$\Rightarrow \vec{f}_e + \vec{f}_r = m \cdot \vec{a}$$

$$m \ddot{x} \vec{i} = q \vec{E} - \alpha \dot{x} \vec{i}, \vec{E} = E_x \vec{i}$$

$$m \ddot{x} \vec{i} = q E_x \vec{i} - \alpha \dot{x} \vec{i} \Rightarrow m \ddot{x} + \alpha \dot{x} = q E_x \vec{i}$$

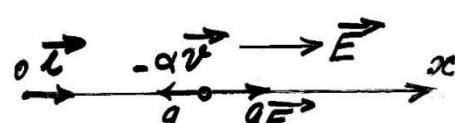
$$\Rightarrow m \ddot{x} + \alpha \dot{x} = q E_x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = \frac{q}{m} E_x$$

#### Résolution de l'équation sans second membre

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{\alpha}{m} \dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\dot{x}} = -\frac{\alpha}{m} dt$$



$$\Rightarrow \dot{x} = C_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

- Solution particulière :

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{q}{\alpha} E_x$$

D'où,

$$\dot{x} = C_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{q}{\alpha} E_x$$

A  $t = 0$ , la vitesse est nulle  $\Rightarrow C_0 = -\frac{q}{\alpha} E_x$

$$\dot{x} = \frac{q}{\alpha} E_x \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right)$$

$\frac{q}{\alpha} = \mu$ : Mobilité des porteurs ( $m^2 V^{-1} s^{-1}$ )

Au bout d'un certain temps, on atteint un régime où  $\dot{x}$  ne variera plus en fonction de  $t$ .

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}_l = \frac{q}{\alpha} E_x \text{ ou } \vec{v}_l = \frac{q}{\alpha} \vec{E} = \mu \vec{E} \text{ alors : } \vec{j} = \rho \vec{v}_l = \rho \frac{q}{\alpha} \vec{E} = \rho \mu \vec{E}$$

$\gamma = \frac{\rho q}{\alpha} = \rho \mu$ : Conductivité électrique

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ ou } \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} = \rho' \vec{j} \text{ avec } \rho' = \frac{1}{\gamma} \text{: résistivité}$$

Pour un conducteur parfait  $\gamma = \infty$  et pour un isolant parfait  $\gamma = 0$ . On préfère utiliser  $\rho' = \frac{1}{\gamma}$  qui est la résistivité de la substance conductrice. Pour un conducteur parfait  $\rho' = 0$  et pour un isolant parfait  $\rho'$  D'où :

$$\vec{E} = \rho' \cdot \vec{j}$$

Ce résultat constitue la loi d'Ohm locale. On dit aussi la loi d'Ohm microscopique.

Conséquences de la loi d'Ohm :

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = \gamma \operatorname{div} \vec{E}$$

En régime stationnaire, nous avons : schéma

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow j_1 S_1 = j_2 S_2 = I$$

$$\text{et } E_1 S_1 = E_2 S_2$$

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho_{\text{porteurs}}$  de charges=0 en moyenne ;  $\rho_0$  porteurs compensée par  $\rho_0$  charges liées. La variation de la charge totale dans le volume reste nulle.

Un excès de charges ne peut apparaître qu'en surface.

### VIX.3.2 Loi d'Ohm intégrale en régime stationnaire

#### VIX.3.2.1 Cas d'un conducteur homogène à section constante

Soit un conducteur homogène et filiforme. Supposons  $\vec{j}$  uniforme sur une section.

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$$

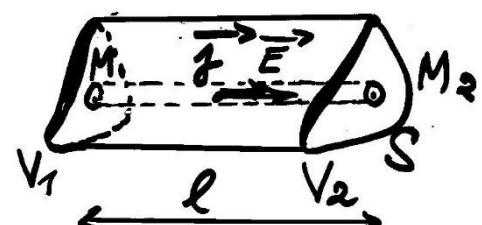
$$V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \int_{M_1}^{M_2} dl = El \quad (\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow E \text{ uniforme})$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ et } \vec{E} = \rho' \vec{j} \Rightarrow E = \rho' j ;$$

$$\int dl = \int j_s dS = I \Rightarrow I = jS \Rightarrow j = \frac{I}{S}$$

$$E = \frac{\rho' I}{S} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\rho' l}{S} I$$

$$V_1 - V_2 = RI : \text{C'est la loi d'Ohm. ; } R = \frac{\rho' l}{S} ; R \text{ s'exprime en Ohm } (\Omega)$$



$$\frac{1}{R} = G \text{ : Conductance en Siemens (S)}$$

### VIX.3.2.2 Résistance R

$$R = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dr}}{\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS} = \frac{U}{I}$$

#### Remarque importante

Le passage d'un courant dans une résistance est le siège d'une perte d'énergie par collision et frottement entre les charges mobiles et les atomes fixes du conducteur. Ce phénomène est appelé **effet Joule**.

### VIX.4 Effet Joule

#### VIX.4.1 Puissance électrique

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l} ; d\vec{l} = \vec{v} dt = \frac{1}{\rho} \vec{j} dt$$

$$dW = \frac{q}{\rho} \vec{E} \cdot \vec{j} dt \text{ avec } q = \rho dv$$

$$dW = \vec{E} \cdot \vec{j} dt d\tau \Rightarrow \frac{dW}{dt} = dP$$

$$dP = \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau \Rightarrow \frac{dP}{d\tau} = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{E} \cdot \vec{j} : \text{Puissance électrique volumique reçue en W/m}^3$$

$$P = \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau ; \vec{E} \cdot \vec{j} = \gamma E^2$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \gamma E^2 = \rho' j^2$$

$$P = \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau = \int_1^2 \vec{E} \cdot \left( \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \right) d\tau = \int_1^2 I_{12} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$P = I_{12} (V_1 - V_2) ; P = UI$$

#### VIX.4.2 Effet Joule

$$\frac{dP}{d\tau} = \rho' j^2 d\tau ; P = \rho' \int_{\tau} j^2 d\tau$$

$$dP = \rho' j^2 d\tau : \text{Puissance de la force électrique}$$

En régime permanent,  $V = cte$

$$dEc = 0 = dW_{\vec{f}_{el}} + dW_{\vec{f}_{frrott}} \Rightarrow dP_{frrott} dt + \rho' j^2 dv dt = 0$$

$\Rightarrow$  Dissipation de puissance

$$P = \rho' \int_{\tau} j^2 d\tau = RI^2 = UI = GU^2$$

$$\rho' \int_{\tau} j^2 d\tau = \rho' \int_1^2 \left( \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \right)^2 \frac{dl}{S} = \rho' \int_1^2 I_{12}^2 \frac{dl}{S} = \frac{\rho' l}{S} I_{12}^2 = R I_{12}^2$$

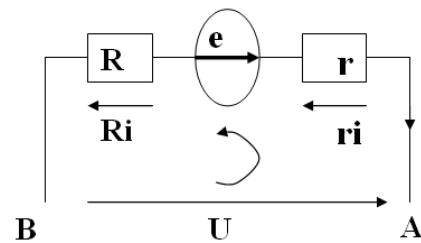
### VIX.1.6.2 Loi d'ohm généralisée

La loi des mailles permet d'écrire :

$$+U + Ri - e + ri = 0 \Rightarrow U = e - (R + r)i$$

et en généralisant nous pouvons écrire :

$$U = \sum_k e_k - \sum_k R_k i_k$$



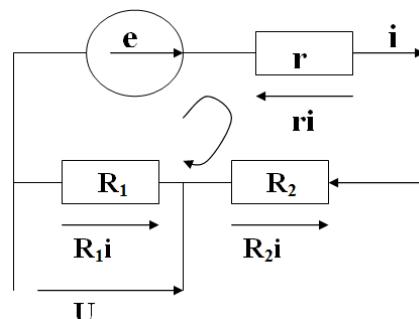
**Exemple :** diviseur de tension ou montage potentiométrique.

$$\text{Nous avons : } e - ri - R_2 i - R_1 i = 0$$

$$\text{Soit } e = (r + R_1 + R_2)i \Rightarrow$$

$$i = \frac{e}{r + R_1 + R_2} \text{ et } U = R_1 i$$

on a ainsi une valeur de U plus faible



### VIX.5 Réseaux linéaires en régime permanent

Lois de Kirchhoff

#### VIX.5.1 Lois des nœuds :

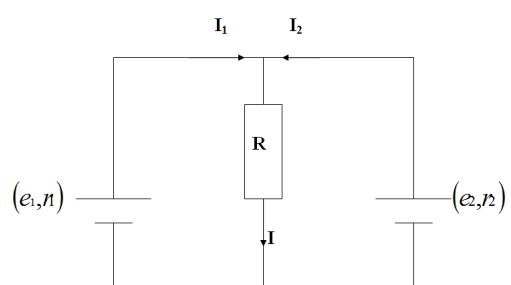
$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k I_k = 0$$

- $\varepsilon_k = +1$  si le courant arrive au nœud
- $\varepsilon_k = -1$  si le courant part du nœud

#### VIX.5.2 Lois des mailles :

$$\sum_i e_i - \sum_i r_i I_i = 0$$

Appliquons les lois de **Kirchhoff** au réseau ci-après pour calculer les intensités  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$



**Résolution :**

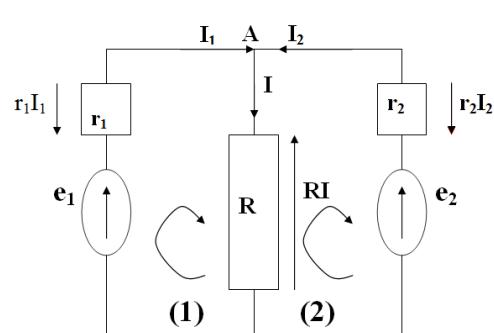
le circuit est  $\Leftrightarrow$

$$\text{Au nœud A, nous avons } I_1 + I_2 - I = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

$$\text{La maille (1) donne: } e_1 - r_1 I_1 - RI = 0 \Rightarrow$$

$$e_1 = r_1 I_1 + R(I_1 + I_2); \quad e_1 = (r_1 + R)I_1 + RI_2$$

$$\text{La maille (2) donne : } -e_2 + RI + r_2 I_2 = 0 \Rightarrow$$



$$e_2 = r_2 I_2 + R(I_1 + I_2) = RI_1 + (R+r_2)I_2$$

En définitive nous avons le système :

$$\begin{cases} e_1 = (r_1 + R)I_1 + RI_2 \\ e_2 = RI_1 + (R+r_2)I_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + R & R \\ R & R + r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \text{ et on en déduit :}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & R \\ e_2 & R + r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + R & R \\ R & R + r_2 \end{vmatrix}} ; I_2 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 + R & e_1 \\ R & e_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + R & R \\ R & R + r_2 \end{vmatrix}}$$

avec les valeurs numériques suivantes :  $e_1 = 6V$ ;

$e_2 = 12V$ ;  $r_1 = 1\Omega$ ;  $r_2 = 2\Omega$ ;  $R = 10\Omega$ , nous obtenons :  $I_1 = -1,5A$ ;  $I_2 = 2,25A$ ;  $I = 0,75A$

**Remarque :**  $I_1$  est, en tenant compte du sens de parcours imposé, négatif. Cela signifie que le sens réel du courant  $I_1$  est le sens contraire du sens qui a été choisi.

## VIX.6 Lois d'ohm en courant alternatif

### VIX.6.1 Définition du courant alternatif

Un courant alternatif est un courant périodique dont l'intensité reprend des valeurs égales à des intervalles de temps  $T$  constants appelés périodes.

### VIX.6.2 Expression de l'intensité et de la différence de potentiel aux bornes d'un dipôle :

$U_{AB} = U_m \cos(\omega t)$  (tension aux bornes du dipôle)

$I = I_m \cos(\omega t + \phi)$  : l'intensité qui traverse le dipôle

$U_m$  = tension maximale mesurée aux bornes du dipôle

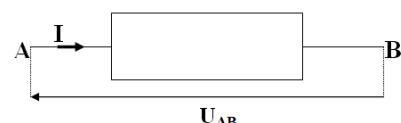
$I_m$  = intensité maximale qui traverse le dipôle

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  = pulsation du courant

$f$  = fréquence du courant

$T$  = période du courant

$\phi$  = déphasage ou différence de phase entre la tension et l'intensité du courant.



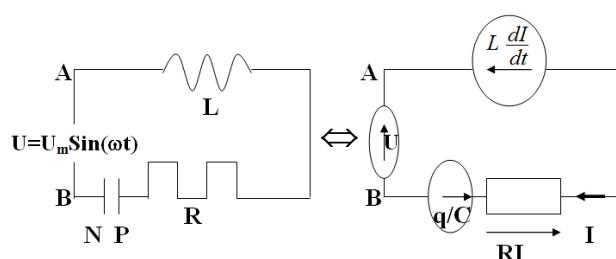
### VIX.6.3 Cas général : Circuit avec résistance, inductance et capacité

La loi des mailles nous donne :

$$U - RI - L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \text{ soit}$$

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad (1)$$

Prenons  $I = I_m \sin(\omega t - \phi)$



avec  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow q = -\frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Et  $\frac{dI}{dt} = I_m \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{l'équation } U_m \sin(\omega t) = LI_m \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + RI_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

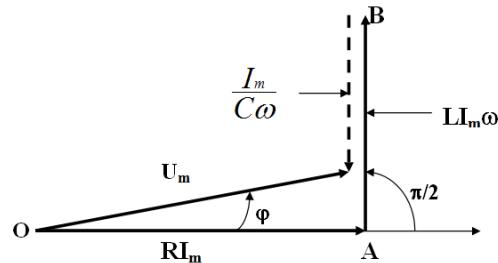
s'écrit : la recherche des relations entre  $I_m$ ,  $U_m$ ,  $R$ ,  $\omega$ ,  $L$ ,  $\varphi$  par le calcul est possible mais trop long.  
On utilise alors la méthode de Fresnel pour résoudre l'équation ci-dessus.

Nous déduisons  $U_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(LI_m \omega - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2$

Soit  $U_m = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  et par la suite nous

tirons :

$$\tan(\varphi) = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ et l'impédance du circuit } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$



#### VIX.6.4 La résonance électrique : formule de Thomson

Considérons le circuit  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ; si nous avons la relation  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$  alors

$U_m = RI_m$  et  $\tan(\varphi) = 0$ . Nous avons dans ce cas  $I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{R}$  qui est maximum, d'autre part,  $\tan(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ .

On déduit alors que l'intensité et la tension sont en phase

$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1$  soit  $\omega_0 = \frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}}$  qui est la **pulsation à la résonance** ce qui permet de calculer

la période à la résonance  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  qui est la **formule de Thomson**.

#### VIX.6.5 Valeur efficace

Soit le circuit suivant parcouru par un courant alternatif d'intensité  $I = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

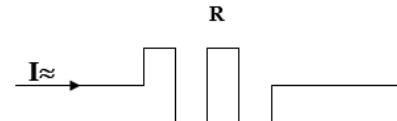
Pendant un temps  $dt$ , il se dégage par effet joule dans cette résistance  $R$  une énergie

$dW = RI^2 dt = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$ . Au cours d'une période  $T$  nous avons

$$W = RI_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = RI_m^2 \int_0^T [1 - \sin^2(\omega t + \varphi)] dt \text{ Soit } W = \frac{RI_m^2 T}{2}.$$

Posons  $\frac{RI_m^2 T}{2} = RI_{\text{efficace}}^2 T$  donc  $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  = intensité efficace.

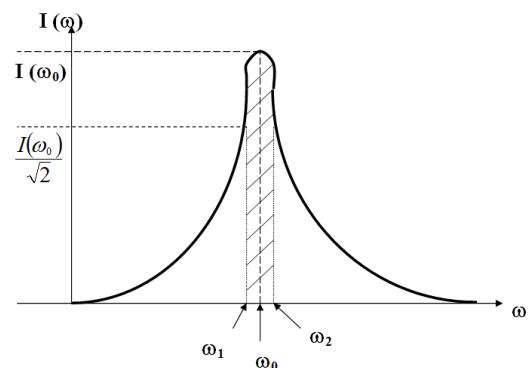
De même nous définissons la tension efficace  $U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ .



### VIX.6.6 Calcul de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ :

La bande passante est figurée par la zone hachurée de la figure ci-dessus. Dans cette bande l'intensité  $I(\omega)$  est supérieure à  $\frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}}$  et nous avons aussi  $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}}$ .

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  est définie comme étant la largeur de la bande passante du circuit R, L, C.



### Calcul de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ :

$$\text{Nous avons } I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\text{par ailleurs } I(\omega_0) = \frac{U}{Z(\omega_0)} = \frac{U}{R} \text{ donc la relation (1) s'écrit } \frac{U}{Z(\omega_1)} = \frac{U}{Z(\omega_2)} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$$

$$\text{soit } Z^2(\omega_1) = Z^2(\omega_2) = 2R^2$$

De manière générale nous pouvons écrire :

$$R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = 2R^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R \Rightarrow LC\omega^2 - 1 = \pm RC\omega \Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0.$$

Cette équation conduit à deux solutions qui sont :

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}; \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ avec } \Delta = R^2C^2 + 4LC$$

$$\text{d'où } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \text{ qui est l'expression de la largeur de la bande passante.}$$

### VIX.6.7 Acuité de la résonance

L'acuité de la résonance est caractérisée par la relation  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}$  qui, par définition, est le **facteur de qualité** du circuit.

Plus Q est élevé plus  $\Delta\omega$  est faible pour un  $\omega_0$  donnée. Cela signifie que le circuit n'oscille de façon notable que dans un domaine étroit de fréquence.

### VIX.6.8 La surtension

A la résonance, aux bornes du condensateur, nous avons :

$$U_C = \frac{I(\omega_0)}{C\omega_0} = \frac{U}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0 U}{R} = QU \text{ qui est le produit de la tension efficace } U \text{ imposée aux bornes du circuit par le facteur de qualité. Cette tension est très supérieure à } U.$$

De même aux bornes de la bobine d'inductance L, on observe à la résonance une tension  $U_L = QU$  qui est supérieure à la tension U.

### VIX.6.9 Expression de la puissance moyenne

$$\text{Nous avons comme puissance la relation } P = UI = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Et comme élément de travail

$$dW = UI dt = \frac{U_m I_m}{2} (\cos(\phi) - \cos(2\omega t - \phi)) dt$$

$$\text{Soit } W = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\phi) T - \frac{U_m I_m}{2} \int_0^T \cos(2\omega t - \phi) dt \text{ et } P = \frac{W}{T} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\phi) = U_{eff} I_{eff} \cos(\phi)$$

avec **Cos(ϕ)** qui est le **facteur de puissance** et  $U_{eff}I_{eff}$  comme **puissance apparente**.

### VIX.7.2 Aspect énergétique

Le condensateur se décharge quand le circuit est fermé. Nous avons alors  $I = -\frac{dQ}{dt}$ .

Soit  $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$  multiplions cette équation par  $dQ = -Idt$ ; nous obtenons alors

$$\left( L \frac{dI}{dt} \right) Idt + (RI) Idt + \frac{QdQ}{C} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} LI^2 \right]_{t_1}^{t_2} + \left[ \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right]_{t_1}^{t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt$$

avec :

$\left[ \frac{1}{2} LI^2 \right]_{t_1}^{t_2}$  = énergie magnétique emmagasinée dans l'inductance ;

$\left[ \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right]_{t_1}^{t_2}$  = énergie électrostatique emmagasinée dans la capacité ;

$-\int_{t_1}^{t_2} RI^2 dt$  = énergie dissipée par effet joule.

### VIX.7.3 Analogie mécanique

Considérons un corps de masse  $m$  suspendu à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$  et plongé dans un fluide de coefficient de frottement  $f$ .

Ce corps sous l'action d'une force  $\vec{F}$  est mis en mouvement.

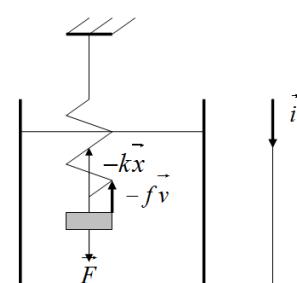
Le bilan des forces et l'application de la relation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$m\ddot{x} = -f\vec{v} - k\vec{x} \Rightarrow m\ddot{x} + f\vec{v} + k\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

Cette dernière est analogue à l'équation (2). Il y a donc un parallélisme entre le circuit R, L, C, décrit par l'équation (2) et le dispositif mécanique d'écrit par l'équation (4)

#### Tableau d'analogie electro mécanique

Le déplacement de $x$	a pour analogue la charge $Q$
La vitesse $v$ de déplacement de $m$	a pour analogue l'intensité $I$
La masse $m$ de l'objet	a pour analogue l'inductance $L$
Le coefficient de frottement fluide $f$	a pour analogue la résistance $R$
La raideur $k$ du ressort	a pour analogue l'inverse de $C$ ; $1/C$
$F = kx$	a pour homologue la d.d.p. $V = Q/C$



**TD DE L'ECUE 2**  
**SERIE 7 : COURANTS ELECTRIQUES**

**Exercice 1 :**

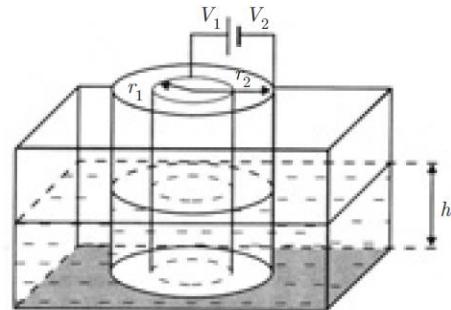
Deux électrodes cylindriques coaxiales, de résistances négligeables et de rayons respectifs  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) plongent sur une hauteur  $h$  dans un liquide faiblement conducteur de résistivité  $\rho$ . Le fond est isolant. L'électrode de rayon  $r$  est portée au potentiel  $V_1$ , celle de rayon  $r_2$  au potentiel  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ).

- 1) Quelle est la relation entre le champ électrique  $E(r)$  entre les deux électrodes et le courant  $I$  circulant radialement dans l'électrolyte ? En déduire la résistance  $R$  de la couche liquide.

A.N. :  $\rho = 20 \Omega \cdot \text{m}$  ;  $r_1 = 1 \text{ cm}$  ;  $r_2 = 5 \text{ cm}$  ;  $h = 15 \text{ cm}$

- 2) Sachant que  $V_1 - V_2 = 6 \text{ V}$ , calculer la densité de courant  $j_1$  au voisinage de l'électrode centrale.

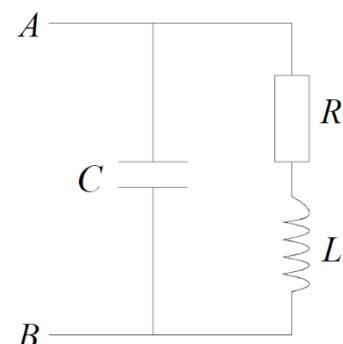
- 3) En conservant à  $r_2$  sa valeur, quelle doit être la valeur de  $r_1$  pour que  $j_1$  soit minimal ? Quelle est alors la nouvelle valeur de  $j_1$  ?



**Exercice 2 : Module et argument d'une impédance**

Le dipôle ci-contre est alimenté sous une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega = 314 \text{ rd.s}^{-1}$  avec :  $C = 1 \mu\text{F}$  ;  $R = 50\Omega$  ;  $L = 0,1 \text{ H}$ .

- 1) Calculer le module et l'argument de l'admittance  $\underline{Y}_{AB}$ .
- 2) En déduire le module et l'argument de l'impédance  $\underline{Z}_{AB}$ .
- 3) Déterminer l'élément à placer en parallèle entre les bornes A et B pour que l'impédance  $\underline{Z}_{AB}$  vue entre A et B soit purement **réelle** ; que peut-on dire alors du courant et de la tension du dipôle ?



## CHAP X : MAGNETOSTATIQUE

### Objectifs

- Connaitre l'origine du champ magnétique
- Connaitre les effets du champ magnétique
- Les applications
- Calculer le champ magnétique créé par une distribution de courants par deux méthodes.

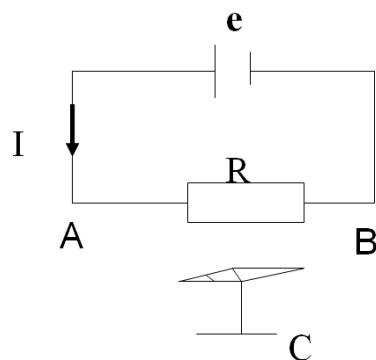
### X.1 Vecteur champ magnétique $\vec{B}$

Expérimentalement nous constatons l'existence de forces « magnétiques » au voisinage d'une charge électrique en mouvement. Pour rendre compte de ce phénomène, nous introduisons, par analogie avec l'électrostatique, un champ de vecteur : le champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### X.1.1 Notion de champ magnétique

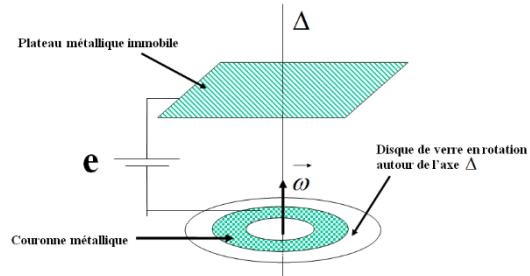
##### ▪ Expérience d'Oersted

Soit le montage suivant, si nous plaçons au voisinage du conducteur AB de résistance R un aimant C, nous remarquons que cet aimant dévie quand le conducteur AB est parcouru par un courant d'intensité I. Si nous inversons le sens du courant, l'aimant dévie en sens inverse.



##### ▪ Expérience de Rowland

On constate expérimentalement qu'une boussole placée au voisinage de la couronne métallique dévie quand la couronne est en rotation autour de l'axe  $\Delta$ ; le sens de déviation change si le sens de rotation de la couronne change.



#### X.1.2 Interprétation des deux expériences

Dans ces expériences il y a déplacement de charges électriques. Ces déplacements engendrent des effets magnétiques. Pour des raisons de simplicité on émet l'hypothèse suivante, que d'autres expériences vérifient, que  $q$  et  $\vec{v}$  interviennent dans ces « effets magnétiques » par le produit  $q\vec{v}$  ( $q$  est la charge en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ ).

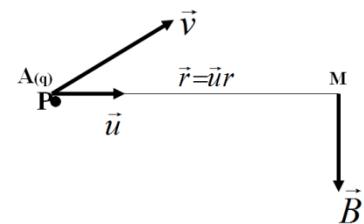
### X.1.3 Vecteur champ magnétique $\vec{B}$

Nous postulons qu'au voisinage de toute charge en mouvement, on peut définir un champ de vecteurs : le champ magnétique  $\vec{B}$  dont l'unité de mesure est le Tesla. Dans le système SI,  $1 \text{ Tesla} = \frac{\text{Newton}}{\text{A.m}}$ .

#### X.1.3.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement :

##### Position du problème

Soit une particule A de charge  $q$  au point P à l'instant  $t$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$ . Quelle est la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$  que cette charge en mouvement crée au point M ? Expérimentalement on montre que  $\vec{B}$  est correctement défini par la relation suivante :



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  SI qui est la perméabilité du vide.

### X.1.3.2 Champ magnétique créé par un élément de courant :

#### Loi de Biot et Savart

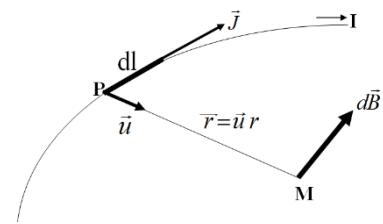
Soit un conducteur de section S parcouru par un courant d'intensité I et considérons un élément  $d\ell$  de ce circuit.

Quelle est l'expression de l'élément de champ magnétique  $d\vec{B}$  au point M distante de r de  $d\ell$  ?

Considérons la densité de courant  $\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S}$  colinéaire au fil conducteur.

- soit  $n_V$  le nombre de porteurs de charges libre par unité de volume et q la valeur de la charge ;
- soit  $\vec{V}$  la vitesse de déplacement des charges ;

nous avons :  $\vec{J} = n_V q \vec{V}$ .



Chacune des particules en mouvement dans  $d\ell$  engendre au point M le même champ magnétique. Le nombre total de porteurs de charge dans le volume  $Sd\ell$  est  $n_V Sd\ell$  et on déduit le champ total engendré au point M :  $d\vec{B} = (n_V Sd\ell) \vec{b}$  où  $\vec{b}$  est le champ magnétique produit au point M par une seule charge q dans le conducteur.

En conséquence  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} n_V Sd\ell$  ou encore

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn_V \vec{V} \wedge \vec{r}}{r^3} Sd\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} Sd\ell = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} Sd\ell \wedge \vec{r}}{r^3}$$

**Remarque :**  $\vec{J} d\ell = J d\vec{l}$  car  $\vec{J}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires.

$$\text{De ce fait } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{JSd\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

La relation  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$  est connue sous le nom de **relation de Biot et Savart**.

### X.1.3.3 Champs magnétiques créés par des circuits simples

#### X.1.3.3.1 Circuit rectiligne infiniment long

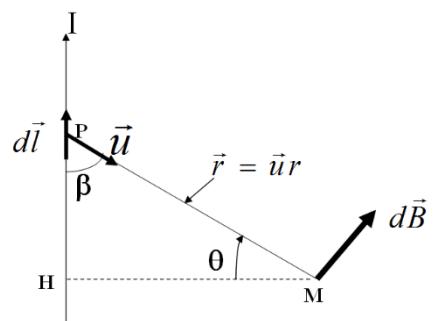
Nous avons l'élément de champ magnétique

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{U}}{r^2} \text{ qui est perpendiculaire au plan } (Id\vec{l}, \vec{U}).$$

$$\|Id\vec{l} \wedge \vec{U}\| = Idl \sin \beta = Idl \cos \theta \text{ d'où } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos \theta}{r^2}$$

Nous devons ici éliminer r. Posons HM = a ;

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \text{ donc } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos^3 \theta}{a^2};$$



exprimons  $dl$  en fonction de  $\theta$  :  $\tan \theta = \frac{l}{a} = \frac{\overline{HP}}{a} \Rightarrow l = a \cdot \tan \theta$ ;  $dl = \frac{ad\theta}{\cos^2 \theta}$

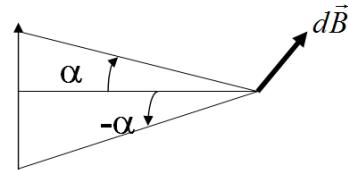
$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I a \frac{\cos^3 \theta}{a^2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi a} d\theta$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d(\sin \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{ d'où } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} .$$

### X.1.3.3.2 Circuit rectiligne de longueur finie

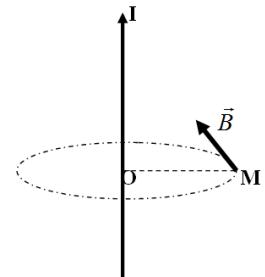
Du cas précédent nous déduisons :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\sin \alpha)$$

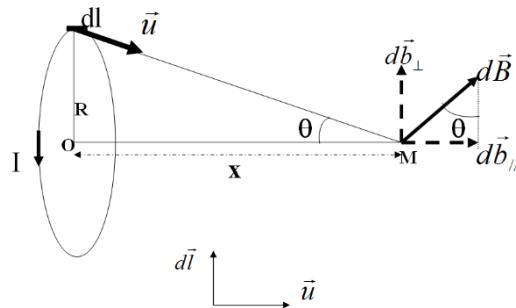


**Remarque : orientation du champ ; règle du tire-bouchon**

Le tire-bouchon dont la pointe progresse dans le sens de l'intensité le long d'un élément de fil a son manche qui tourne dans le sens des lignes de champ qui entourent cet élément.



### X.1.3.3.3 Spire circulaire



Le vecteur  $d\vec{B}$  est perpendiculaire au plan  $(d\vec{l}, \vec{u})$ . Seule la composante  $d\vec{b}_{//}$  de  $d\vec{B}$  selon le segment OM demeure, les composantes  $d\vec{b}_{\perp}$  s'annulent deux à deux.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{U}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2}, \text{ nous déduisons } db_{//} = db = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \theta dl}{r^2} \text{ avec}$$

$$\sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \frac{\sin \theta}{r^2} = \frac{R}{r^3} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} ;$$

$$\text{finalement } db = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl \Rightarrow b = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dl$$

$$b = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ pour une spire.}$$

$$\text{Pour } x=0, b_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

- en faisant intervenir l'angle  $\theta$  nous avons :  $b = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta = b_0 \sin^3 \theta$

**Remarque :**

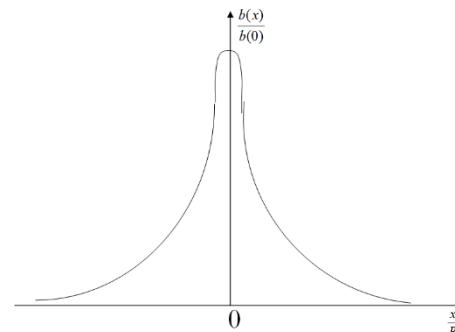
- pour une bobine plate de N spires de rayon R nous avons :

$$b = \frac{\mu_0 N I}{2R} \sin^3 \theta$$

- la loi du tire-bouchon nous donne la direction et le sens du champ  $\vec{B}$  en fonction du sens du courant ;

- Un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens du courant a sa pointe qui progresse dans le sens du champ.

- b en fonction de la distance x au centre de la spire, nous avons ci-contre l'allure du champ magnétique.



### Topographie des lignes de champ d'une spire circulaire

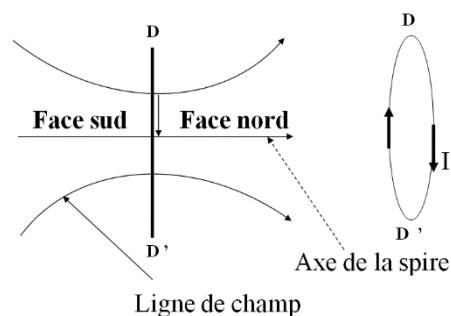
On adopte la convention suivante pour distinguer les faces du circuit circulaire :

- La face nord est celle par laquelle sortent les lignes de champ
- La face sud est celle par laquelle rentrent les lignes de champ

Cette convention est valable pour tous les circuits.

**Remarque :** règle du tire-bouchon

Le tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens du courant a sa pointe qui progresse à l'intérieur du circuit de la face Sud vers la face Nord.

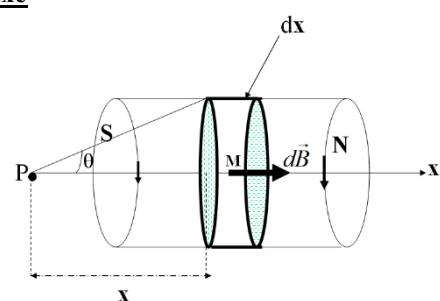


### X.1.3.3.4 Champ magnétique d'un solénoïde en un point de son axe

Un solénoïde est la superposition d'un ensemble de spires circulaires identiques.

Soit n le nombre de spires par unité de longueur et R le rayon des spires.

Considérons la tranche de solénoïde d'abscisse  $x$  et d'épaisseur  $dx$ . Cette tranche est assimilable à une bobine plate de  $ndx$  spires.



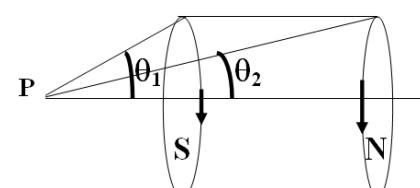
Au point P nous avons :  $dB = \frac{\mu_0 I n}{2R} \sin^3 \theta dx$ ; prenons  $\theta$  comme variable d'intégration.

$$\tan \theta = \frac{R}{x} \Rightarrow x = \frac{R}{\tan \theta} \Rightarrow dx = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

ceci entraîne :

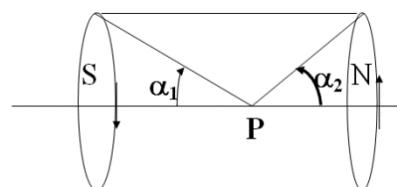
$$dB = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \sin \theta d\theta \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta$$

$$\text{et } B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$



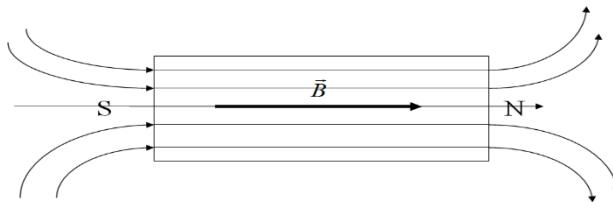
**Remarques :**

- Le point P à l'intérieur du solénoïde



Nous avons  $B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)$  comme expression du module du champ.

- **Topographie du champ d'un solénoïde dans un plan passant par l'axe.**



- **Cas d'un solénoïde infiniment long :**

Ici  $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow 0$  et  $B = \mu_0 n I$ . Nous déduisons que le champ B est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde très long.

### X.1.4 Propriétés fondamentales du champ magnétique $\vec{B}$

L'essentiel des propriétés du champ électrostatique  $\vec{E}$  découlent de deux lois fondamentales.

- l'une relative à son flux à travers une surface fermée :  $\Phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{i\text{intérieur}}}{\epsilon_0}$
- l'autre concerne la circulation le long d'une courbe fermée. Cette circulation est nulle le long d'une courbe fermée. On dit alors que  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ .

On montre aussi que les propriétés fondamentales du champ magnétique  $\vec{B}$  se réduisent à l'établissement de deux lois du même type que précédemment à savoir :

- le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée ;
- la circulation de  $\vec{B}$  le long d'une courbe fermée.

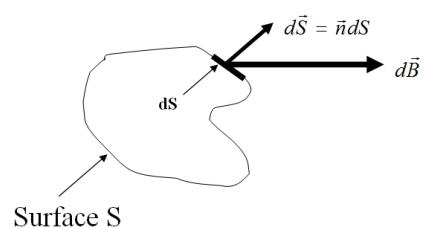
#### X.1.4.1 Flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une surface fermée

##### X.1.4.1.1 Définition

Soit un espace **D** où existe un vecteur champ magnétique en tout point de cet espace et soit une surface fermée S de cet espace, on définit le flux de  $\vec{B}$  à travers S par la relation suivante :  $\Phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

L'élément de vecteur  $d\vec{S}$  est orienté vers l'extérieur de la surface S et le flux  $\Phi(\vec{B})$  est un flux sortant.

Nous avons :  $\Phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  constamment.



Nous disons donc : le flux à travers une surface fermée quelconque du champ  $\vec{B}$  créé par un système quelconque est toujours égal à 0 (il n'y a pas de matérialisation de "charges magnétiques" dans un domaine donné de l'espace).

##### X.1.4.1.2 Conséquences

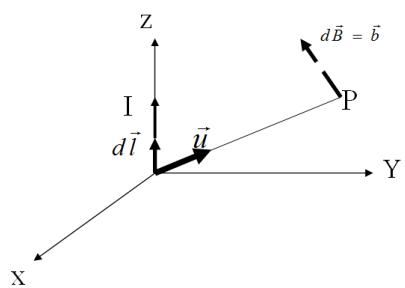
- Le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif ce qui se traduit par la relation  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Cette relation est établie à partir de la loi de Biot et Savart.

**Démonstration :**

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{i}}{r} + \frac{y\vec{j}}{r} + \frac{z\vec{k}}{r} \text{ et } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{U}}{r^2}$$

avec  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$d\vec{l} = \begin{vmatrix} 0 & x/r & -dy/r \\ 0 & y/r & dlx/r \\ dl & z/r & 0 \end{vmatrix}$$



$$b_x = \frac{-\mu_0}{4\pi} I y \frac{dl}{r^3}$$

donc  $d\vec{B} = \vec{b} \begin{vmatrix} b_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I x \frac{dl}{r^3} \\ 0 \end{vmatrix}$ , enfin  $\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$  et on trouve :  $\operatorname{div} \vec{b} = 0$  donc  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

#### X.1.4.2 Circulation du vecteur $\vec{B}$ le long d'une courbe fermée

##### Théorème d'Ampère

Considérons un certain nombre de conducteurs parcourus respectivement par des courants d'intensité  $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$  ;

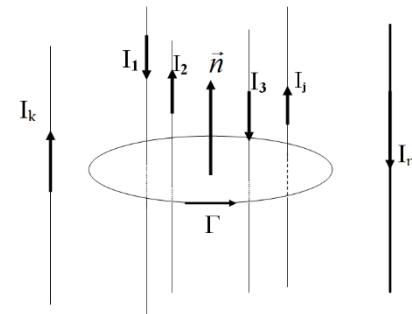
Soit une courbe fermée  $\Gamma$  enlaçant certains de ces conducteurs parcourus par les courants

$I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ . Choisissons un sens de parcours sur  $\Gamma$  comme l'indique la figure et  $\vec{n}$  la normale.

Comptons **positivement** les courants de même sens que  $\vec{n}$  et **négativement** ceux de sens contraire.

**La forme intégrale du théorème d'Ampère** s'exprime sous la forme :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{i=n} I_i$$



qui est la circulation de vecteur  $\vec{B}$  le long de la courbe fermée  $\Gamma$ .

N.B : **On ne considère que les courants qui traversent la courbe  $\Gamma$ .**

##### Illustration du théorème d'Ampère

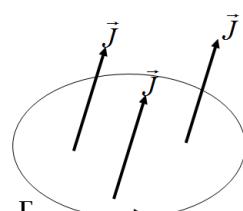
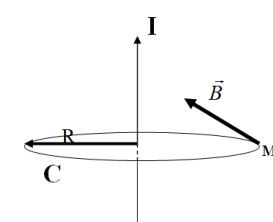
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B \cdot 2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

##### Forme locale du théorème d'Ampère

Soit un conducteur de section  $S$  parcouru par un courant de densité  $\vec{J}$  et soit une courbe fermée  $\Gamma$  entourant ce conducteur, nous avons :

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \text{ soit}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \text{ qui est la forme locale du théorème d'Ampère.}$$



## X.2 Action D'un Champ Magnétique $\vec{B}$ sur Une Charge en mouvement

- Une charge en mouvement crée dans l'espace un champ magnétique ;
- Que se passe-t-il si une charge est placée dans un champ magnétique ?

### X.2.1 Force de LAPLACE

Expérimentalement, on montre qu'une particule de charge  $q$  animée d'une vitesse  $v \ll c$  ( $c$  = vitesse de la lumière) et placée dans un espace où existe un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à une force d'expression :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ qui est la } \mathbf{force \ de \ LORENTZ}.$$

### X.2.2 Force magnétique agissant sur un conducteur

Dans le conducteur les charges mobiles ont une vitesse de dérive  $\vec{v}$  et en présence d'un champ magnétique **chaque élément mobile de charge  $q$**  est soumis à une **force de Lorentz** :  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Pour l'ensemble des charges mobiles du conducteur de longueur  $dl$ , nous avons :  $d\vec{F}_L = \sum(q\vec{v} \wedge \vec{B})$

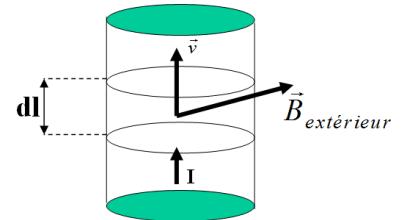
$$\text{Soit } d\vec{F}_L = \sum q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \text{ avec } \sum q = \rho_m S dl$$

$$\text{nous avons } d\vec{F}_L = (\rho_m S dl)(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\text{Or nous avons } \vec{J} = \rho_m \vec{v} \text{ (densité de courant) et } d\vec{F}_L = (S dl) \vec{J} \wedge \vec{B} = (S J) dl \wedge \vec{B}$$

En effet,  $\vec{J} dl = J dl$  car  $\vec{J}$  et  $dl$  sont parallèles.

Nous avons finalement  $d\vec{F}_L = I dl \wedge \vec{B}$  qui rend compte de la **force de Laplace que subit un élément dl d'un circuit parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique**.



### X.2.3 Exemples d'applications

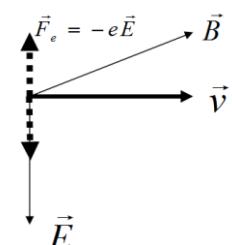
#### X.2.3.1 Expérience de THOMSON : détermination de la grandeur $\frac{e}{m}$

$e$  = valeur absolue de la charge de l'électron et  $m$  = masse de l'électron

Les électrons pénètrent dans la région de l'espace où existent des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  avec la vitesse  $\vec{v}$ . Cette vitesse est communiquée aux électrons par l'accélération sous un potentiel  $V$ .

Dans cette expérience on s'arrange pour avoir  $\vec{F}_L = \vec{F}_e$  soit  $\vec{F}_L = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = e\vec{E}$  ou encore

$vB \sin(\vec{v}, \vec{B}) = E$  ; cette relation permet de déterminer la vitesse  $v$  de l'électron.

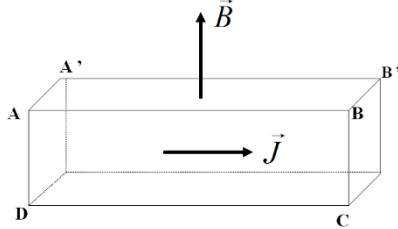


$$\text{Connaissant le potentiel accélérateur } V \text{ on peut écrire : } \frac{1}{2}mv^2 = eV \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V}$$

$$\text{Comme } v = \frac{E}{B \sin(\vec{v}, \vec{B})} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}.$$

#### X.2.3.2 Effet HALL

Soit un barreau conducteur parcouru par un courant de densité  $\vec{J}$  et soumis à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  comme l'indique la figure. Il apparaît entre les faces ABCD et A'B'C'D' une différence de potentiel que nous appelons **tension Hall**.



### Expression de la tension HALL

Supposons que les charges en mouvement soient des charges positives.

Soit  $n_v$  le nombre de particules par unité de volume. Ces particules de vitesse de dérive  $v$  sont soumises à l'action du champ magnétique  $\vec{B}$ . Sous l'action de ce champ apparaît une force de Laplace qui est appliquée à ces particules qui, de ce fait changent de trajectoire et viennent se coller à la paroi AB. Il y a donc excès de charges positives sur cette face et par voie de conséquence un excès de charges négatives sur la face opposée.

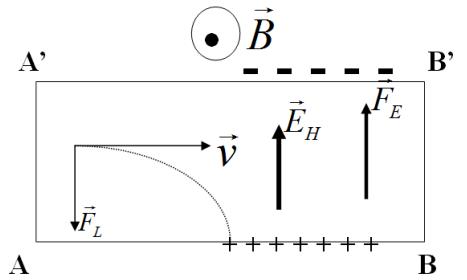
Il apparaît de ce fait un champ électrique  $\vec{E}_H$  (champ Hall). Ce champ fait subir aux porteurs de charge positive une force électrostatique  $\vec{F}_E = q\vec{E}_H$ . Cette force finit par équilibrer la force de Lorentz ( $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ).

Soit :  $q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  ou encore  $q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ .

Nous déduisons l'expression du champ Hall :  $\vec{E}_H = -\frac{1}{n_v q} (\vec{J} \wedge \vec{B})$ .

On pose :  $R_H = \frac{1}{n_v q}$  comme étant la **constante Hall**. Nous accédons à la tension Hall par la relation

$V_H = E_H \cdot a$  ; avec  $a$  comme largeur du conducteur.



### X.3 Action réciproque de deux conducteurs rectilignes infinis parallèles :

#### définition de l'ampère

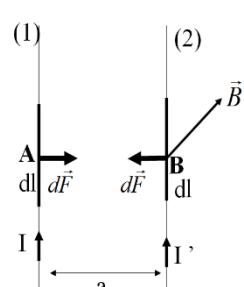
Le champ  $\vec{B}$  créé par le conducteur (1) au point B sur le conducteur (2) a pour expression  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$  et le vecteur  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan des deux conducteurs. Et de sens  $\otimes$ . La force magnétique que subit le conducteur (2) est :

$$d\vec{F} = I' d\vec{l} \wedge \vec{B} = I' d\vec{l} B = \frac{\mu_0}{2\pi a} I' I dl$$

soit  $F = \mu_0 \frac{I' I l}{2\pi a}$  avec  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  SI

L'intérêt de cette relation est de relier l'intensité électrique aux seules grandeurs mécanique de force et de longueur.

On définit l'Ampère comme suit : pour  $a$  (distance entre les deux conducteurs) égale 1 mètre ;  $l = 1$  mètre et  $I' = I = 1$  Ampère, nous avons :  $F = \mu_0 \frac{1}{2\pi a} = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} = 2.10^{-7} N$



d'où la définition légale de l'Ampère : **L'Ampère** est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force égale à  $2.10^{-7}$  N par mètre de longueur.

#### X.4 Force De Lorentz

Soit un champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par toutes les charges immobiles dans l'espace entourant un point M. Plaçons une charge q en ce point. Cette charge subit l'action  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Si toutes les charges sont en mouvement alors la charge au point M subit :

- une force électrique analogue à la force électrostatique de la forme :  $\vec{F} = q\vec{E}$  où  $\vec{E}$  est indépendant de la charge q.
- une force magnétique qui résulte du mouvement de la charge q de forme  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

Dans ces conditions la force totale à laquelle est soumise la charge q en mouvement est  $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  : la force de Lorentz.

#### X.5 Travail des forces magnétiques

La forme différentielle de la force de Laplace est la suivante :  $d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ .

$$\text{En effet } \vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F}_L = dq\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F}_L = Idt\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

##### X.5.1 Notion de flux coupé

Soit un circuit (C) parcouru par un courant constant d'intensité I et placé dans une région où existe un champ magnétique  $\vec{B}$ .

Supposons que (C) se déplace dans le temps.

Pendant un temps dt, l'élément  $d\vec{l}$  du circuit (C) au voisinage du point

P coupe les lignes du champ magnétique  $\vec{B}$ . Suivant la surface

$$d^2S = d\vec{l} \wedge d\vec{x}$$

Entre les instants t et  $t+dt$  nous pouvons écrire

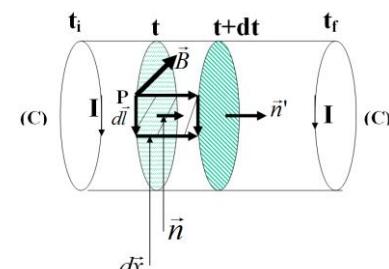
$$d^2W = d\vec{F} \cdot d\vec{x} = I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{x}$$

comme étant un élément de travail. Par permutation circulaire, le produit mixte

$$d^2W = I(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{x} \text{ devient : } d^2W = I \cdot \vec{B} (d\vec{l} \wedge d\vec{x}) \text{ soit}$$

$$d^2W = I \vec{B} \cdot d^2S \text{ et } d^2W = I d^2\Phi_C \text{ soit } W = I \Phi_C$$

Avec  $\Phi_C = \vec{B} \cdot \vec{S}$  qui est le flux coupé.



##### X.5.3 Enoncé du théorème :

Le travail des forces magnétiques appliquées à un circuit indéformable parcouru par un courant constant et se déplaçant dans un champ d'induction invariable est égal au produit de l'intensité du courant par la variation du flux magnétique à travers le circuit. W ne dépend que des positions extrêmes du circuit.

**TD DE L'ECUE 2****SERIE 8 : MAGNETOSTATIQUE****Exercice 1 : Bobine plate circulaire**

1. Rappeler l'expression du champ magnétique, créé par une spire de rayon  $R$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , en son centre.
2. Une bobine plate est constituée de  $N$  spires circulaires de même centre  $O$ , réalisées avec un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$ . les rayons des spires varient entre  $R_1$  et  $R_2$ . Calculer le champ magnétique produit au centre de la bobine.
3. Application numérique :  $N = 10$ ,  $I = 1 \text{ A}$ ,  $R_1 = 19 \text{ cm}$  et  $R_2 = 21 \text{ cm}$ . Exprimer l'erreur relative que l'on commet en assimilant la bobine à une seule spire de 20 cm de rayon.

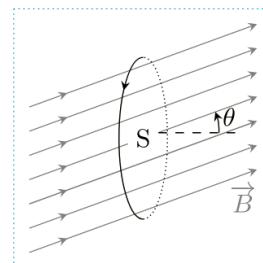
**Exercice 2 : Champ magnétique produit par un solénoïde limité**

1. Trouver l'expression du champ magnétique au centre d'un solénoïde limité, de longueur  $l$ , de diamètre  $2R$ , parcouru par un courant  $I$  et comportant  $n$  spires par unité de longueur.
2. Quel doit être le rapport  $R/l$  pour que le champ magnétique au centre soit celui d'un solénoïde infini avec une précision de 0,001 au moins.

**QCM****Exercice 1**

Donner l'expression du flux magnétique à travers la spire orientée d'aire  $S$ .

- a)  $\emptyset = B.S \cos \theta$       b)  $\emptyset = B.S$       c)  $\emptyset = -B.S \cos \theta$   
 d)  $\emptyset = B.S \sin \theta$

**Exercice 2**

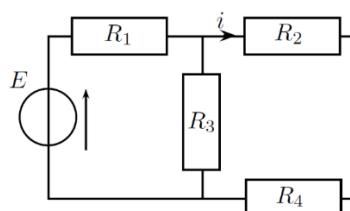
Un solénoïde de 50 cm de long comporte 100 spires de 5 cm de rayon, traversées par un courant de 5 A. Quelle est le module du champ magnétique au centre du solénoïde ? On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ .

- a)  $6,28 \cdot 10^{-3} \text{ T}$       b)  $6,28 \cdot 10^{-4} \text{ T}$       c)  $12,57 \cdot 10^{-4} \text{ T}$       d)  $12,57 \cdot 10^{-6} \text{ T}$

**Exercice 3**

Déterminer, pour le circuit ci-dessous, l'intensité du courant électrique  $i$  qui traverse la résistance  $R_2$ . On donne  $E = 6 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = R_4 = 50 \Omega$ .

- a)  $3 \text{ mA}$     b)  $0,5 \text{ mA}$     c)  $15 \text{ mA}$     d)  $18 \text{ mA}$

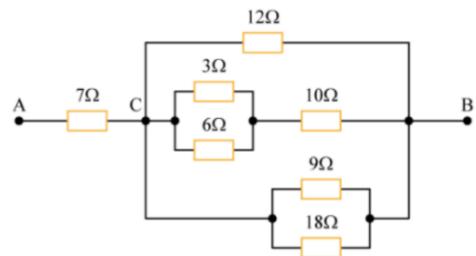
**Exercice 4**

Que vaut l'énergie  $W$  emmagasinée dans un condensateur de capacité  $C = 100 \text{ nF}$  chargé sous la tension constante  $U = 10 \text{ V}$ .

- a)  $3,00 \mu J$     b)  $8; 33 \mu J$     c)  $5,00 \mu J$     d)  $7,42 \mu J$     e)  $2,75 \mu J$

**Exercice 5**

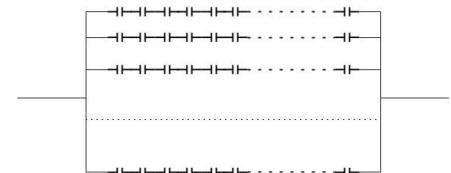
La résistance équivalente  $R_{eq}$  entre A et B est :  
 a) 3 Ω   b) 6 Ω   c) 7 Ω   d) 10 Ω   e) 12 Ω   f) 18 Ω

**Exercice 6**

On constitue des ensembles comportant  $k$  condensateurs identiques en série, chaque condensateur ayant pour capacité  $C$ . On réalise le montage en parallèle de  $n$  ensembles.

Exprimer la capacité du condensateur équivalent  $C_{eq}$  à ce groupement mixte en fonction de  $C$ .

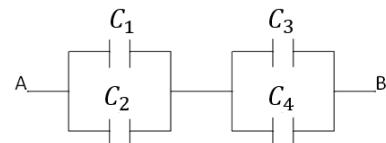
- a)  $C_{eq} = \frac{n}{k}C$ ;   b)  $C_{eq} = \frac{k}{n}C$ ;   c)  $C_{eq} = (n + k)C$ ;   d)  $C_{eq} = nkC$

**Exercice 7**

Quelle est la capacité équivalente  $C_{eq}$  entre A et B ?

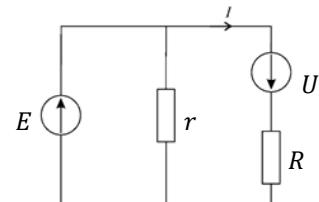
On donne  $C_1 = C_3 = 10 \mu F$ ,  $C_2 = C_4 = 20 \mu F$ .

- a)  $C_{eq} = 60 \mu F$    b)  $C_{eq} = 10 \mu F$    c)  $C_{eq} = 15 \mu F$    d)  $C_{eq} = 1 \mu F$

**Exercice 8**

Dans le circuit ci-contre, déterminer la valeur du courant I. On donne  $E = 12 V$ ,  $U = 8 V$ ,  $r = 1 k\Omega$  et  $R = 0,1 k\Omega$

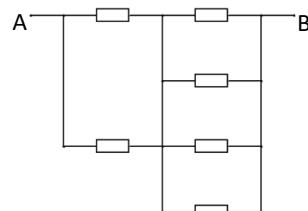
- a) 0,20 A   b) 0,04 A   c) 0,012 A   d) 0,14 A

**Exercice 9**

Le circuit ci-contre contient six résistances identiques  $R = 200 \Omega$ .

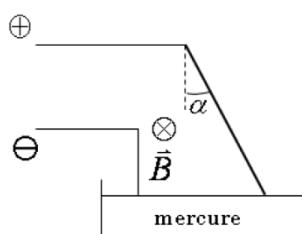
Calculer la résistance équivalente entre A et B.

- a) 0,15 kΩ   b) 0,30 kΩ   c) 1 kΩ   d) 1,20 kΩ

**Exercice 10**

On considère un conducteur filiforme cylindrique rigide de longueur  $l$ , de masse  $m$  mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire au fil en une de ses extrémités (figure ci-dessous). L'autre extrémité affleure dans du mercure contenu dans une cuve. Un courant d'intensité  $I$  traverse le fil comme indiqué par le schéma ci-contre. Calculer l'angle d'inclinaison  $\alpha$  du fil.

- a)  $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{ILB}{mg}\right)$    b)  $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{ILB}{2mg}\right)$    c)  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{ILB}{2mg}\right)$    d)  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{ILB}{mg}\right)$



## BIBLIOGRAPHIE

*José-Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger* : « [Electromagnétisme, fondements et applications](#) », *Chapitres 1-19*, 740 pages, éditions 1990, 1996, 1997, 2002, 2009, Masson-Dunod

*José-Philippe Pérez, Robert Carles, Robert Fleckinger* « [Electromagnétisme, fondements et applications, avec 300 exercices et problèmes résolus](#) », 768 pages, éditions Jan 2020, Masson-Dunod

*Yves Granjon* « [Electromagnétisme et électrostatique - Exercices et méthodes : Exercices et méthodes](#) », 288 pages, éditions 2019, Dunod

*Tahar Neffati* « [Électricité générale - 2e éd. - Analyse et synthèse des circuits : Analyse et synthèse des circuits](#) », 320 pages, éditions 2019, Dunod

*Yves Granjon* « [Electricité - Exercices et méthodes : Exercices et méthodes](#) », 304 pages, éditions 2017, Dunod

## WEBOGRAPHIE

MP/PC/PSI/PT Cours électrostatique :

<https://www.youtube.com/watch?v=zmkRKhLJmVE&list=PLIlsLCejddaPP0PYYrvcMYPVk0283Bq9J>

Cours de J. Ferreira (Grenoble) :

[http://www-ext.impmc.upmc.fr/~menguy/Cours\\_2007\\_2015.html](http://www-ext.impmc.upmc.fr/~menguy/Cours_2007_2015.html)

ELECTROSTATIQUE

<http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/elecstat/index.htm>

<http://www.edu.upmc.fr/uel/physique/index.htm>

Physique et simulations numériques – JJ Rousseau

<http://www.impmc.jussieu.fr/~menguy/Cours.html>

C'est pas sorcier – MAGNÉTISME :

<https://www.youtube.com/watch?v=zDOIKllbW2M>

C'est pas sorcier- ELECTRICITE

<https://www.youtube.com/watch?v=efQW-ZmpyZs>