# Éléments de calcul stochastique et de mathématiques financières

## TX : Survey on Machine Learning in Finance

Ambroise THIBAULT

Vendredi 22 mars 2024

# Sommaire


1. Enseignements suivi à Politecnico Di Milano
2. Élements de calcul stochastique
   - Processus stochastiques
   - Espérance conditionnelle
   - Processus importants
   - Intégrale stochastique
   - Calcul stochastique
   - Équations différentielles stochastiques (EDS)
3. Élements de mathématiques financières
   - Approche mathématique des marchés financiers
   - Modele de BSM
   - Évaluation risque-neutre
   - Changement de numéraire

# Sommaire


1. Enseignements suivi à Politecnico Di Milano
2. Élements de calcul stochastique
   - Processus stochastiques
   - Espérance conditionnelle
   - Processus importants
   - Intégrale stochastique
   - Calcul stochastique
   - Équations différentielles stochastiques (EDS)
3. Élements de mathématiques financières
   - Approche mathématique des marchés financiers
   - Modele de BSM
   - Évaluation risque-neutre
   - Changement de numéraire

# Enseignements suivi à Politecnico Di Milano

Semestre d'échange au sein du master *Mathematical Engineering*, parcours *Quantitative Finance*:

- STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS (8 ECTS)
- MATHEMATICAL FINANCE II (8 ECTS)
- ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS AND DEEP LEARNING (5 ECTS)
- FINANCIAL MARKETS AND INSTITUTIONS (5 ECTS)

# Sommaire


1. Enseignements suivi à Politecnico Di Milano
2. Élements de calcul stochastique
   - Processus stochastiques
   - Espérance conditionnelle
   - Processus importants
   - Intégrale stochastique
   - Calcul stochastique
   - Équations différentielles stochastiques (EDS)
3. Élements de mathématiques financières
   - Approche mathématique des marchés financiers
   - Modele de BSM
   - Évaluation risque-neutre
   - Changement de numéraire

# Définition d'un processus stochastique

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, (X_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$$

Avec :

- Un ensemble de temps $T$, souvent $T = \mathbb{R}_+$
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
- $(\mathcal{F}_t)_t$ une filtration : une famille croissante de $\sigma$-algèbres contenue dans $\mathcal{F}$ tel que, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ pour tout s $\leq$ t
- $(X_t)_t$ une famille de variables aléatoires

# Définition d'un processus stochastique

Un processus stochastique est une fonction à deux variables :

$$X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to (E, \mathcal{E})$$

On note généralement $X$, $X_t$ ou $X_t(\omega)$

On dit que le processus est *adapté* à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ si $X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t$.

En générale, X représente un actif financier, un contrat...

# L'espérance conditionnelle

Soit $X$ une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-$\sigma$-algèbre de $\mathcal{F}$ : $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$
On note $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ l'espérance conditionnelle de $X$ par rapport à $\mathcal{G}$

$$\int_G X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

# Mouvement Brownien

$B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (B_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un mouvement Brownien si :

- $B_0 = 0$ p.s.
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \quad \forall s \leq t$
- $B_t - B_s \perp F_s \quad \forall s \leq t$

Remarques :

- Le mouvement est un processus stochastique continu, i.e. les trajectoires ($\omega$ fixé) sont continues.
- $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- $\forall t_1 < t_2 < ... < t_n$, les incréments $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants

# Martingales

Le processus stochastique $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (M_t)_t, \mathbb{P})$ est une martingale si

- $M$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$
- $M$ est $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-intégrable : $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \quad \forall t$
- $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \forall s \leq t$

Le mouvement brownien est une martingale

# Motivation de l'intégrale stochastique

Étude des marchés en temps continu s'étudie en modélisant les marchés et leurs éléments à partir d'équations différentielles stochastiques (EDS) :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

$$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t \mu(s, X_s)ds}_{Rienmann} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s}_{Riemann-Stieltjes?}$$

R-S : $\int_0^T X_s dB_s = lim \sum X_{s_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$ avec $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ une partition de $[0, T]$

Mais le mouvement brownien du mouvement Brownien n'a pas de variation finie.

# Construction de l'intégrale stochastique : processus élémentaires

Comment définir $\int_0^T X_s dB_s$, avec $X \in L^2[0, T]$
On commence par le cas d'un processus élémentaire $X$ tel que

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}]}(t), \quad \{t_k\}_{k=0,\dots,n}$$

$$\int_0^T X_t dB_t = \sum_{k=0}^{n-1} X_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

# Construction de l'intégrale stochastique

Dans le cas d'un processus X on construit l'intégrale stochastique comme suit :

- On approche $X$ par une suite de processus élémentaires $X_n$ telle que :

$$X_n \underset{L_2(\Omega)}{\longrightarrow} X \Leftrightarrow \mathbb{E}[\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 dt] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Finalement on a :

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T X_n(t) dB_t$$

# Propriétés de l'intégrale stochastique

- $\int_0^t X_t dB_t$ est une martingale
- $\mathbb{E}[\int_a^b X_t dB_t | \mathcal{F}_a] = 0$
- $\mathbb{E}[(\int_0^T X_t dB_t)^2] = \int_0^T X_t^2 dt$

# Processus d'Itô

On dit qu'un processus $X$ est un processus d'Itô si il existe deux proccessus $\mu$ et $\sigma$ tels que :

- $\int_0^T |\mu_t| dt < +\infty$
- $\int_0^T |\sigma_t|^2 dt < +\infty$
- p.s. on a :

$$X_t - X_0 = \int_0^t F_s d_s + \int_0^t G_s dB_s \quad \forall t \in [0, T]$$

On note la différentielle de ce processus :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

# Formule d'Itô

Ce résultat central du calcul stochastique donne la différentielle d'une fonction de processus d'Itô.
Soit :

- $X$ un processus d'Itô tel que $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$
- $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ en $t$ et $\mathcal{C}^2$ en $x$

Alors $Y_t = f(t, X_t)$ est un processus d'Itô et sa différentielle est donnée par :

$$dY_t = \left( \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} \sigma_t dB_t$$

# Théorème de Girsanov

Soit $B = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, (B)_t, \mathbb{P})$ un mouvement brownien et $\phi \in L^2$. On définit un processus

$$Z_t = e^{\int_0^t \phi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi_s^2 ds}$$

On définit une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ tel que :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T$$

Si $Z_t$ est une martingale (si il est dans $L^2[0, T]$)
Alors le process

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \phi_s ds$$

est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$

# Équation différentielle stochastique

Cas unidimensionnel :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = \eta \sim \mathcal{L}(\eta) \end{cases}$$

Avec :

- $\mathcal{L}(\eta)$ la loi de $\eta$
- $\mu : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\mu$ et $\sigma$ sont déterministes et mesurables

Une EDS très importante : le mouvement brownien géométrique :

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Qui a pour solution :

$$X_t = xe^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

# Sommaire


1. Enseignements suivi à Politecnico Di Milano
2. Élements de calcul stochastique
   - Processus stochastiques
   - Espérance conditionnelle
   - Processus importants
   - Intégrale stochastique
   - Calcul stochastique
   - Équations différentielles stochastiques (EDS)
3. Élements de mathématiques financières
   - Approche mathématique des marchés financiers
   - Modele de BSM
   - Évaluation risque-neutre
   - Changement de numéraire

On considère le modèle avec 2 types actifs :

- Actif risqué : une action noté S (stock):
- Actif sans risque : une obligation, un bond du trésor... noté B (bond), avec un taux sans risque $r$.

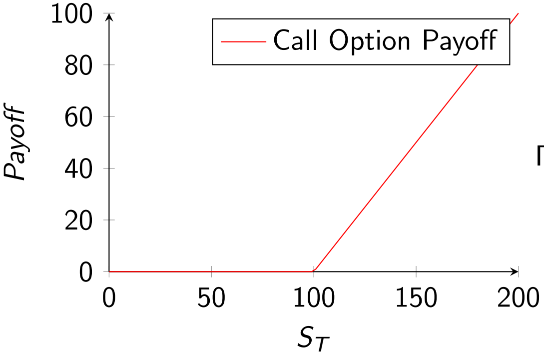
Portefeuille : $h(x, y)$ avec $x$ le nombre d'actif sans risque et $y$ le nombre d'actif risqués.
Valeur du portefeuille :

$$V_t^h = xB_t + yS_t$$

Arbitrage : possibilité de gagner de l'argent sans risque et cela se manifeste par : $V_0^h = 0$ et $V_t^h \geq 0$
Pour ne pas confondre l'actif sans risque avec le mouvement brownien (noté B dans la section précédente), on notera ce dernier $W$

# Produits dérivés, payoff et prix

Un produit dérivé, ou contigent claim, $\mathcal{X}$ est un actif financier dont la valeur dépend de la valeur d'un autre actif financier (sous-jacent).
On notera $\mathcal{X} : \Phi(S(T))$
De plus on note le prix du produit dérivé à l'instant $t$ comme : $\Pi(t;\mathcal{X})$




$$\Pi_T = \begin{cases} S_T - K & \text{si} \quad S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

# Modèle des marchés en temps continu

On considère une famille d'actif $\left\{S_t^i\right\}_{t\geq 0} \quad i = 0, 1, ..., N$

- $S^0 = B$ l'actif non risqué
- $S^i, i = 1, ..., N$ l'actif risqué

Le prix d'un processus de prix d'un actif non risqué suit la dynamique :

$$dB_t = B_t r_t dt$$

Pour les actifs risqués on a :

$$dS_t^i = S_t^i \mu_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t^{\mathbb{P},i}$$

# Modèle de Black-Scholes-Merton

Le modèle de Black-Scholes-Merton (BSM) est composé de 2 actifs ayant les dynamiques suivantes :

$$dB_t = rB_t dt$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Avec :

- $\mu \in \mathbb{R}$ l'espérance de rentabilité de l'action
- $\sigma \in \mathbb{R}$ la volatilité de l'action
- $W^{\mathbb{P}}$ un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{P}$

On considérera donc deux probabilité :

- $\mathbb{P}$ la probabilité réelle
- $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre

# EDP ou Équation de B-S-M

On se place dans le modèle de B-S-M
Notre objectif est de trouver le prix d'un produit dérivé $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ à l'instant $t$ via la fonction $F(t, S_t) = \Pi_t$
En utilisant la formule d'Itô, on a l'équation de B-S-M :

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial s^2} + rs\frac{\partial F(t,s)}{\partial s} - rF(t,s) = 0$$

Objectif : trouver une formule explicite pour le prix, trouver $F(t, S_0)$
Équation de B-S-M est indépendante de $\mu$.
On peut donc supposer que les investisseurs sont neutres face au risque.
On introduit un nouvel actif X :

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

En appliquant la formule d'Itô à $e^{-rt}F(t, S_t)$, on obtient la formule d'évaluation risque neutre :

$$F(t, S_0) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S(T))]$$

# Formule de B-S pour un option call

On considère une option call de strike K et de maturité T.
On a le payoff suivant :

$$\Pi_T = \begin{cases} S_T - K & \text{si} \quad S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliqant la formule d'évaluation risque neutre à ce payoff, on obtient :

$$F_c(t, S_0) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Les grecques représentent la sensibilité du prix d'une option par rapport à différentes variables (le sous-jacent ($S$), la volatilité ($\sigma$), taux sans risque ($r$), durée de vie de l'option).

- Delta $\Delta$ : sensibilité du prix de l'option par rapport à $S$

$$\Delta_c = \frac{\partial C}{\partial s} = \mathcal{N}(d_1)$$

- Gamma $\Gamma$ : sensibilité de $\Delta$ par rapport à $S$

$$\Gamma_c = \frac{\partial^2 C}{\partial^2 s} = \frac{\mathcal{N}'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}$$

- Véga $\nu$ : sensibilité par rapport à la volatilité $\sigma$

$$\nu_c = s\mathcal{N}'(d_1)\sqrt{T-t}$$

# Changement de numéraire

$\left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{Q}$-Martingale et on dit que $\mathbb{Q}$ est une mesure de martingale avec $B$ comme numéraire.
On peut utiliser le changement de probabillité avec le théorème (formule de pricing générale d'un produit dérivé X)

$$\Pi(t,X) = S_0(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{X}{S_0(T)}|\mathcal{F}_t]$$

Avec $\mathbb{Q}$ une mesure de martingale avec $S_0$ comme numéraire.
Example d'application : fonction de princing de l'option exotique *Asset of Nothing* : $\Pi_T = S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}$

# Références


John Hull.
*Options, Futures, et Autres Actifs Dérivés*, 11ème édition.
Pearson, 2018.

P. Baldi.
*Stochastic Calculus*.
Springer, 2017.

T. Bjork.
*Arbitrage Theory in Continuous Time*.
Oxford University Press, 2009.