Analisi 3

Marco Ambrogio Bergamo

Anno 2023-2024

Indice

Parte I
Successioni di funzioni, convergenze

1 Successioni di funzioni

1.1 Spazi funzionali

Spazio metrico La coppia (X, d) dove X è un insieme e d è una distanza, ovvero un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

1. (Non negatività) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$
2. (Definita positiva) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. (Simmetrica) $d(x,y) = d(y,x) \forall x, y \in X$
4. (Disugualianza triangolare) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$

$$\text{Definito: } d(x,y) \qquad \overset{\text{Induce}}{\longrightarrow} \qquad \text{Topologia: } \mathcal{T} \coloneqq (A \subseteq V \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 \text{ t.c. } \overbrace{\{y \in V \mid d(x,y) < r\}}^{B(x,r)} \subset A)$$

*Esempio (**Spazi funzionali**)* Insiemi di funzioni con definite distanze tra funzioni:

- **Metriche lagrangiane** In $C^0([a,b])$ (insieme delle funzioni continue su un compatto di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$)

$$d(f,g) \coloneqq \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \qquad \text{di ordine 1}$$

  In $C^k[a,b]$

$$d(f,g) \coloneqq \sum_{j=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |f^{(j)}(t) - g^{(j)}(t)| \qquad \text{di ordine k}$$

- **Metrica integrale** In $\tilde{C}(a,b)$ (insieme delle funzioni continue assolutamente integrabili in senso generalizzato su (a,b):

$$d(f,g) \coloneqq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \qquad \text{di ordine 1}$$

$$d(f,g) \coloneqq \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^2 \qquad \text{di ordine 2}$$

Spazio normato La coppia $(V, ||\cdot||)$ dove V è spazio vettoriale su un campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $||\cdot||$ è una norma, ovvero un'applicazione $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ tale che

1. (Non negatività) $||x|| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. (Definita positiva) $||x|| = 0 \iff x = 0$
3. (Assoluta omogeneità) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \quad \forall \lambda \in K, x \in V$
4. (Disugualianza triangolare) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$$\text{Definito: } ||x|| \qquad \overset{\text{Induce}}{\longrightarrow} \qquad d(x,y) \coloneqq ||x - y|| \qquad \overset{\text{Induce}}{\longrightarrow} \qquad \text{Topologia}$$

Spazio di Banach È uno spazio normato (vettoriale con norma) **completo** rispetto alla metrica (indotta dalla norma).

*Esempio (**Spazio delle funzioni limitate (bounded)**)* $\mathcal{B}(E)$ l'insieme delle funzioni limitate $f : E \to \mathbb{R}$, con E insieme. Definiamo come norma di $f \in \mathcal{B}(E)$ la **norma uniforme (o sup norm)**:

$$||f||_\infty = \sup_E |f|$$

Tale spazio è completo (DIM) rispetto a questa norma
(Notare che la distanza indotta da tale norma è simile alla lagrangiana di ordine 1, qui abbiamo sup e non max).

Spazio prehilbertiano/hermitiano La coppia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dove H è spazio vettoriale su un campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è prodotto interno, ovvero un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ tale che

1. (Definita positiva) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \in V$
2. (Simmetria coniugata) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. (Linearità nella prima componente) $\langle x + a, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle a, y \rangle, \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

4. (Antilinearità nella prima componente) $\langle x, y+b\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,b\rangle, \quad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x,y\rangle$

$$\text{Definito: } \langle x,y\rangle \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad ||x|| \coloneqq \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad d(x,y) \coloneqq ||x-y|| \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad \text{Topol.}$$

Spazio hilbertiano È uno spazio prehilbertiano (vettoriale con prodotto interno) **completo** rispetto alla metrica (indotta dalla norma indotta dal prodotto interno).
Delle volte è facile trovare norme /distanze per le quali lo spazio è completo, ma difficile trovare l'espressione di un prodotto interno che induca tale norma.

Prop. 1 . Distanza, norma e prodotto scalare solo applicazioni continue.

1.2 Serie e convergenza

E insieme non vuoto e $(f_n)_n$ successione di funzioni $f_n : E \to \mathbb{R}$

Convergenza assoluta Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||$ la serie delle norme.

Convergenza condizionata Una serie che converge ma non converge assolutamente.
Es: serie armonica alternante

Convergenza puntuale $(f_n)_n$ converge puntualmente in E se $\forall x \in E$ esiste finito:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

Si dice $f_n \to f$ puntualmente in E

Convergenza uniforme $f_n \to f$ uniformemente in E se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ciò implica che $f - \varepsilon \leq f_n \leq f + \varepsilon$, ovvero che $\forall\varepsilon$ il grafico di f_n sta nell'**intorno tubolare di raggio** ε
Si può anche scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_E |f_n - f| = 0$$

Se ci mettiamo nello spazio delle funzioni limitate $(\mathcal{B}(E), ||\cdot||_{\mathcal{B}(\mathcal{E})})$ abbiamo che $\sup_E |f_n - f| = d(f_n, f)$ (distanza indotta), quindi in tale spazio (stiamo escludendo tutti i casi di funzioni non limitate) convergenza uniforme equivale a convergenza in tale spazio: $f_n \to f$ in $\mathcal{B}(E)$

Teo. 1 (Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme). $(f_n)_n$ converge unif. in $E \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \mid \forall n, m \geq n_\varepsilon\ \forall x \in E :\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.
Ovvero:

$$f_n \to f \text{ unif. in } E \iff \lim_{n,m\to+\infty} \sup_E |f_n - f_m| = 0$$

Dimostrazione.
$\implies$) Def. con $\varepsilon/2$: $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$\implies \forall m, n\ \forall x \in E :$

$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{(disug. triang)} \quad \square$$

$\impliedby$) Fisso $x \in E$ e vario n, vedo che la successione $(f_n(x))_n$ è di Cauchy. Dato che è in $\mathbb{R}$ converge, sia $f(x)$ il valore limite.
Prendo l'ipotesi e passo al limite per $m \to +\infty$ e vedo che viene $\ldots \forall x \in E :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ che è la def. di convergenza uniforme.

Teo. 2 (Inversione del limiti). Sia:

- $\forall n : \lim_{x\to\overline{x}} f_n(x) = l_n$
- $(f_n)_n \to f$ unif. in $E \setminus \{\overline{x}\}$

Allora i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} l_n, \quad \lim_{x\to\overline{x}} f(x)$$

esistono finiti e **coincidono**.

Dimostrazione.

- Per ip. f converge unif. quindi è di Cauchy: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon \mid \forall n,m\geq n_\varepsilon\ \forall x\in E:\ |f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$. Facendo tendere in tale def. $x\to\overline{x}$ vediamo che è di Cauchy anche la succ. $(l_n)_n$. Essendo in $\mathbb{R}$ è convergente, con limite l.
- Dobbiamo mostrare che $|f(x)-l|\to 0$ (è equiv. alla tesi, essendo $f(x)$ ed l i due limiti sopra): fissato $\varepsilon>0$ sia n_ε tale che i termini delle due succ. sono abbastanza vicine ai propri limiti, ovvero: $|f_{n_\varepsilon}-f|\leq\varepsilon$ su $E\setminus\{\overline{x}\}$ e $|l_{n_\varepsilon}-l|\leq\varepsilon$.
Applico disugualianza triangolare:

$$|f(x)-l|\leq|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|+|f_{n_\varepsilon}(x)-l_{n_\varepsilon}|+|l_{n_\varepsilon}-l|\leq 2\varepsilon+\underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x)-l_{n_\varepsilon}|}_{\star}$$

- Sia $U_\varepsilon(\overline{x})$ intorno di $\overline{x}$ tale che $\forall x\in U\setminus\{\overline{x}\}:\star\leq\varepsilon$.
Allora $\forall x\in U\setminus\{\overline{x}\}:|f(x)-l|\leq 3\varepsilon$ □

Cor. 1 . $(f_n)_n\to f$ unif. e ogni f_n è continua $\implies f$ continua

Dimostrazione. Sia $\overline{x}$ di accumulazione (altrimenti nulla da dim.), si apllichi il teorema con $l_n=f_n(\overline{x})$

Teo. 3 (Inversione dei limiti in generale).

Definizione 1.1 (Convergenza di una serie in uno spazio di Banach)**:** Sia $(X,\|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Sia $(x_n)_n$ una successione in X.

$$\sum_{\mathbb{N}} x_k \text{ converge in } X \iff \left(\sum_{k=0}^{m} x_k\right)_m \text{ converge in } X$$

ovvero la serie converge solo se converge la successione delle sue somme parziali.

Teo. 4 (Convergenza assoluta implica convergenza in spazio di Banach). $\sum\|x_k\|$ converge in $\mathbb{R} \implies \sum x_k$ converge in X

Dimostrazione. $\sum\|x_k\|$ converge in $\mathbb{R}\implies$ converge la successione delle somme parziali $\implies$ la succ. delle somme paziali è di Cauchy, quindi:

Parte II

Analisi complessa

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$

$f(z) =$	Def.	Def. come serie	Come campo vettoriale	Dove continua	Dove olomorfa	Iniettiva
$\frac{1}{z}$	$(\frac{1}{\rho})e^{i(-\theta)}$			$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	Si
z^n	$(\rho^n)e^{i(n\theta)}$					No
e^z	$(e^x)e^{iy}$		$(e^x \cos y, e^x \sin y)$			No
$\sin(z)$						No
$\cos(z)$						No
$\tan(z)$						No

Inverse (multifunzioni/funzioni polidrome) a parte $1/z$ che è iniettiva ed è l'inversa di se stessa.

$f(z) =$	Def.	Def. come serie	Come campo vettoriale	Dove continua	Dove olomorfa	Iniettiva
$\frac{1}{z}$	$(\frac{1}{\rho})e^{i(-\theta)}$			$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	Si
$\sqrt[n]{z}$	$\rho^{1/n}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$					Si
$\log(z)$	$\log \rho + i(\theta + 2k\pi)$			$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$	$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$	Si
$\arcsin(z)$						Si
$\arccos(z)$						Si
$\arctan(z)$						Si

1 Serie di potenze

2 $\mathbb{C}$-differenziabilità

Prop. 2 . f è $\mathbb{C}$-diff. in $a \implies$ valgono condizioni di C-R

Prop. 3 .

$$\begin{cases} f : \Omega \to \mathbb{C} \ \mathbb{R}\text{-diff in } a \\ \text{valgono condizioni C-R in } a \end{cases} \implies f \text{ è } \mathbb{C}\text{-diff. in } \Omega$$

Teo. 5 (Looman-Menchoff).

$$\begin{cases} f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua} \\ \text{valgono condizioni C-R in } a \end{cases} \implies f \text{ è } \mathbb{C}\text{-diff. in } \Omega$$

Teo. 6 (Serie derivata). f analitica $\implies f$ $\mathbb{C}$-diff.

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \quad \text{Serie derivata)}$$

con $R > 0$ il raggio di convergenza di f. Si vede facilmente che $g(z)$ ha lo stesso raggio di conv. di f con il criterio della radice ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|} \to \sqrt[n]{|c_n|} \to 1/R$)

- WLOG $a = 0$. Siano $w \in D_R(0)$, $r \in \mathbb{R} \mid |w| < r < R$, $h \in \mathbb{C} \mid |w + h| < r$.
- Dobbiamo dimostrare che il rapporto incrementale converge unif. alla serie derivata, così f è $\mathbb{C}$-diff., ovvero:

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} \overset{unif.}{\longrightarrow} g(z) \quad h \to 0$$

ovvero

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(z) \right| \to 0$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ dividiamo la serie (in **parte finita + coda**):

$$f(z) = S_N(z) + R_N(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n(z)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(z)^n$$

- Valutiamo il rapporto incrementale in funzione delle due serie divise:

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \underbrace{\frac{S_N(w+h) - S_N(w)}{h}}_{I)} + \underbrace{\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h}}_{II)}$$

I) $\lim_{h\to 0} \frac{S_N(w+h)-S_N(w)}{h} = S'_N(w)$, per la $\mathbb{C}$-diff. dei polinomi. Inoltre $\lim_{N\to\infty} S'_N(w) = g(w)$

II)

$$\frac{R_N(w+h) - R_N(w)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{N+1}^{\infty} c_n[(w+h)^n - w^n]$$

Dato che $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ abbiamo

$$(w+h)^n - w^n = h[\underbrace{(w+h)^{n-1} + (w+h)^{n-2}w + \cdots + (w+h)^0 w^{n-1}}_{n \text{ termini}}]$$

dove nella quadra ci sono n termini ognuno di modulo minore di r^{n-1} (dato che $|w+h| < r$). Quindi

$$|(w+h)^n - w^n| \le |h| n r^{n-1} \implies |(\mathrm{II})| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n| r^{n-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

poiché siamo in $r < R$ quindi f converge e quindi la "coda" della serie deve per forza tendere a zero.

- Mettendo assieme:

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{f(w+h) - f(w)}{h} - g(z) \right| \le \underbrace{|S'_N(w) - g(w)|}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} n|c_n| r^{n-1}}_{\to 0} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(il primo addendo tende a 0 poiché $S'_N \to g(w)$). Da cui tesi. □

3 Integrazione lungo le curve

3.1 Curve in $\mathbb{C}$

3.2 Integrale lungo una curva

3.3 Primitive

3.4 Integrale e forme differenziali

4 Analicità delle funzioni $\mathbb{C}$-differenziabili

Teo. 7 (Cauchy-Goursat). $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-diff. $\implies \int_{\partial R} f dz = 0$ per ogni rettangolo chiuso $R \subseteq \Omega$

Dimostrazione. Sia $A := \left|\int_{\partial R} f dz\right|$

- Suddivido il rettangolo in 4 rettangoli:

$$\int_{\partial R} f dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_j^1} f dz$$

Vedo che

$$A = \left| \int_{\partial R} f dz \right| = \left| \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_j^1} f dz \right| \le \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial R_j^1} f dz \right|$$

Allora esiste almeno uno dei 4 rettangoli (chiamiamo j_1) tale che:

$$\left|\int_{\partial R^1_{j_1}} f dz\right| \geq \frac{1}{4} A$$

- Ripeto tale procedimento partendo dal rettangolo $R^1_{j_1}$ (quello con int. in val assoluto "maggiore"/sopra la media). Vado avanti così ripetendo all'infinito. Il termine k-esimo della successione dei rettangoli è tale che

$$\left|\int_{\partial R^k_{j_k}} f dz\right| \geq \frac{1}{4^k} A$$

- Essendo ogni rettangolo un compatto, l'intersezione di tutti è un solo punto quindi

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} R^k_{j_k} = \{a\}$$

Usando la **$\mathbb{C}$-differenziabilità** di f approssimiamola al primo ordine in a:

$$f(z) = \underbrace{f(a) + f'(a)(z-a)}_{=P(z-a)} + \sigma(z) \qquad \sigma(z) = o(|z-a|)$$

Vediamo che per l'int. di f sul rettangolo k-esimo ha solo contributo il termine $\sigma(z)$, infatti

$$\int_{\partial R^k_{j_k}} f dz = \underbrace{\int_{\partial R^k_{j_k}} P(z-a) dz}_{=0} + \int_{\partial R^k_{j_k}} \sigma(z) = \int_{\partial R^k_{j_k}} \sigma(z)$$

essendo $P(z-a)$ un polinomio che quindi ammette primitiva.

- Essendo $\sigma(z)$ un o-piccolo di $|z-a|$ allora esiste un intorno di tale valore per cui la funzione $|\sigma(z)|$ sta sotto una qualsiasi funzione lineare in tale valore, ovvero fissato $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\sigma(z)| \leq \epsilon |z-a| \qquad \text{per } |z-a| < \delta$$

Notare (pensare al rettangolo inscritto nel cerchio) che $|z-a| \leq \text{diam} R^k_{j_k}$ quindi

$$|\sigma(z)| \leq \epsilon \text{diam} R^k_{j_k}$$

Allora

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial R^k_{j_k}} \sigma(z)\right| &\leq \epsilon \text{diam} R^k_{j_k} \text{lungh}(\partial R^k_{j_k}) \\ &= \epsilon (2^{-k} \text{diam} R)(2^{-k} \text{lungh}(\partial R)) \\ &= \epsilon 4^{-k} \text{diam} R \cdot \text{lungh}(\partial R)\end{aligned}$$

- Mettendo tutto assieme:

$$4^{-k} A \leq \epsilon 4^{-k} \text{diam} R \cdot \text{lungh}(\partial R)$$

Per l'arbitrarietà di ϵ: $A = 0$

Teo. 8 . $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-diff in $\Omega \setminus \{a\}$ + f **continua** in $\Omega \implies \int_{\partial R} f dz = 0$ per ogni rettangolo chiuso $R \subseteq \Omega$

Dimostrazione. Se la singolarità è fuori apposto, se è sul bordo faccio successione di rettangoli interni a R che tendono ad esso, essendo f continua allora l'integrale della di un termine della successione (che è zero per C-G) tende all'integrale del limite della succ, quindi tesi. Se è interna allora dividere in due rettangoli che hanno la singolarità sul bordo e siamo al caso di prima.

Lemma 1 . R rettangolo chiuso, $a \in \mathbb{C}$ **interno** ad $R \implies \int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i$

Dimostrazione. Fare riparam. $z = a + \rho(\theta) e^{i\theta}$, ricordando come diventa il dz. Svolgere i calcoli.

Teo. 9 (Formula di Cauchy per un rettangolo). $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-diff., $R \subseteq \Omega$ rettangolo $\implies \forall w$ interno ad R:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \int_{\partial R} \frac{f(z)+f(w)-f(w)}{z-w} dz \\
&= \int_{\partial R} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} dz + \int_{\partial R} \frac{f(w)}{z-w} dz \\
&= \int_{\partial R} g(z) dz + f(w) \int_{\partial R} \frac{1}{z-w} dz \\
&= 0 + f(w) 2\pi i \qquad \text{ho usato lemma e teo. precedenti} \\
&= f(w) 2\pi i
\end{aligned}$$

dove

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \in \Omega \setminus \{w\} \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

che è **continua** in Ω e **$\mathbb{C}$-differenziabile** in $\Omega \setminus \{w\}$

Teo. 10 (Analiticità delle funzioni $\mathbb{C}$-diff.). $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-diff. $\implies f$ analitica in Ω

Dimostrazione. Dobbiamo dim. che $\forall a \in \Omega$ la funzione f può essere scritta come serie di potenze di centro a in un intorno di a. Siano:

$$\begin{cases} R \subseteq \Omega \text{ rettangolo che contiene } a \\ \overline{D}_r(a) \subset R \text{ disco chiuso di centro } a \\ \zeta \in \partial R \\ z \in D_r(a) \end{cases}$$

- Per **formula Cauchy**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

- **Sviluppiamo in serie** di potenze in $(z-a)$ la funzione integranda

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z}$$

Sviluppiamo il secondo fattore, andando a cercare la somma della **serie geometrica** (ricorda che $z < \zeta$):

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

Quindi

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n$$

- Studiamo la **convergenza** di tale serie: essendo il cerchio chiuso $\overline{D}_r(a)$ contenuto all'interno di R esiste $0 < \alpha < 1$ tale che

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < \alpha \qquad \forall z, \zeta \text{ come in def.}$$

ma allora la serie **converge totalmente** $\underline{\forall \zeta}$ (e quindi **uniformemente**) poiché:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \right| \leq \frac{\max_{\partial R} |f|}{r} \alpha^n$$

- Allora, ricordando che

$$f_n \text{ continue}, \sum f_n \overset{unif.}{\longrightarrow} f \implies \int f = \sum \int f_n$$

possiamo **integrare per serie**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a^n) \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta}_{:=c_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Teo. 11 (Morera). $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-diff. $\impliedby$ $\int_{\partial R} f dz = 0$ per ogni rettangolo chiuso $R \subseteq \Omega$, e f **continua**

Dimostrazione. Strana. Costruiamo funzione

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \qquad \zeta \in \Omega$$

dove γ_z è una quualunque curva da un fissato z_0 a z. Ci serve l'ip. che l'integrale è zero sulle curve chiuse per avere che tale funzione non dipende dal cammino, ovvero è ben def. Si dimostra che F è $\mathbb{C}$-diff e $F' = f \implies f$ olomorfa (??).

5 Integrali di linea di funzioni olomorfe

6 Formule integrali per le derivate

7 Sviluppo di Laurent. Funzuini meromorfe

Teo. 12 (Sviluppo di Laurent). Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, dove $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$ è una corona circolare **aperta** con i due raggi t.c. $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$, allora **esiste ed è unica** la successione $(c_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ t.c.:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z-a)^m \qquad \forall z \in \Omega$$

e vale ancora la formula per i coefficienti di Taylor già trovata, ovvero

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz$$

Dimostrazione. (ESISTENZA) WLOG $a = 0$.

- Ricaviamo formula per f **in funzione di integrali su circonf. concentriche**. Siano ρ_1, ρ_2 t.c. $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$, dimostriamo che, **fissato** $z : \rho_1 < |z| < \rho_2$, vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Lo si fa definendo

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

che è **olomorfa in** Ω, quindi per **omotopia**

$$\int_{|\zeta|=\rho_2} g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta|=\rho_1} g(\zeta) d\zeta$$

sviluppando i calcoli (sostituire g con la def. in ambo i membri) e ricordando l'int. di $1/(z-a)$ (=0 oppure $2\pi i$ in dipendenza se a è fuori o dentro) si trova la formula sopra.

- **Sviluppiamo in serie** i due integrali della formula con il solito procedimento di tirar fuori da $1/(\zeta - z)$ il termine della **serie geometrica**. NB: nei due casi si fa raccogliendo due cose diverse, perché la variabile deve essere < 1, quindi nel primo raccolgo $1/\zeta$ e nel secondo $-1/z$. Nel secondo bisogna fare due cambi di indice per far tornare la sommatoria bene.

ù

Definizione 7.1 (Funzione meromorfa)**:** Ω aperto di $\mathbb{C}$, $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto (**insieme delle singolarità**). f olomorfa su $\Omega \setminus E$ è meromorfa in Ω se $\forall a \in E$ esiste $r > 0$ t.c.

$$h \cdot f = g \iff f = \frac{g}{h} \qquad \text{in } D_r(a) \setminus \{a\}$$

dove

$$\begin{cases} g, h \text{ olomorfe in tutto } D_r(a) \\ h \not\equiv 0 \text{ al primo membro, oppure } h = 0 \text{ al più in } a \text{ al secondo membro} \end{cases}$$

Prop. 4 (Caratt. funzioni meromorfe). f olomorfa in $D_r(a) \setminus \{a\}$.
Allora f è **meromorfa** su $D_r(a) \iff$ il suo sviluppo di Laurent è **troncato a sinistra**.

Dimostrazione.

$\Longleftarrow$) Facile, se è troncata a sx allora esiste N t.c.

$$(z-a)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N}(z-a)^n := g(z)$$

Quindi g olomorfa in un intorno di a e f soddisfa la def. di meromorfa (è il rapporto di g e un polinomio).

$\Longrightarrow$)
- Come prima cosa bisogna dimostrare la ($\Longrightarrow$) nella def.: se $h \not\equiv 0$ allora almeno un coeff. dello sviluppo di Taylor è non zero, indichiamo con N il minimo indice di un $c_n \neq 0$. Allora

$$h(z) = (z-a)^N \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}(z-a)^k}_{\varphi(z)} := (z-a)^N \varphi(z)$$

Essendo $\varphi(a) = a_N \neq 0$ e olomorfa in un intorno di a allora esiste intorno V di a nel quale $\varphi \neq 0$, quindi **possiamo dividere per** h:

$$f(z) = \frac{g}{h} = \frac{g(z)}{(z-a)^N \varphi(z)} \quad \text{in } D_r(a) \setminus \{a\}$$

- Ora possiamo dim. la nostra implicazione. Come appena scritto

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{g(z)}{\varphi(z)}$$

con g e φ olomorfe, quindi

$$\frac{g(z)}{\varphi(z)} := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

è lo sviluppo di Taylor del loro rapporto e quindi

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-N} = \sum_{m=-N}^{\infty} b_{N+m}(z-a)^m$$

cioè la tesi.

8 Singolarità e residui

Teo. 13 (di estensione di Riemann). f olomorfa in $D_r(a) \setminus \{a\}$.
Se $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0 \implies \exists \tilde{f}$ olomorfa in tutto $D_r(a)$ che **estende** f.

Teo. 14 (Caratterizzszione funzioni meromorfe). f olomorfa in $\Omega \setminus E$, E insieme chiuso e discreto (delle singolarità).
f meromorfa in $\Omega \iff$ ogni singolarità è **eliminabile** (ha intorno in cui f è limitata) oppure è un **polo** (limite del modulo di f è $+\infty$)

Dimostrazione. Si usa th. di estensione di Riemann.

Prop. 5 (Caratterizzszione polo semplice). f olomorfa in $D_r(a) \setminus \{a\}$.
a è polo semplice $\iff \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = l \neq 0$

Dimostrazione.

$\implies$) Se a è polo semplice allora

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + h(z)$$

con $c_{-1} \neq 0, h$ olomorfa in tutto $D_r(a)$. Quindi la tesi è ovvia ($h \to 0$ essendo polinomio).

$\impliedby$) Se vale l'ipotesi allora

$$\lim_{z\to a}(z-a)^2 f(z) = (z-a)l \to 0$$

Quindi per **teo. estensione di Riemann**: esiste una funzione h olomorfa su tutto il disco che estende $(z-a)f(z)$, ovvero

$$\begin{cases} h(z) = (z-a)f(z) & z \in D_r(a) \setminus \{a\} \\ h(a) = \lim_{z\to a} h(z) = l \end{cases}$$

dove $l \neq 0$ per ip. Essendo h **olomorfa** sia $\sum_n c_n(z-a)^n$ il suo sviluppo di Taylor, allora lo sviluppo di $f = \frac{h}{z-a}$ è

$$f(z) = \frac{c_0}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + \dots \qquad c_0 = h(a) = l \neq 0$$

Allora a è polo semplice di f.

9 Logaritmo in campo complesso

Teo. 15 (sul logaritmo). f olomorfa in Ω aperto **semplicemente connesso**, e f **mai nulla**. Allora:

1. $\exists g$ olomorfa su Ω t.c. $e^g = f$. Inoltre vale $g' = f'/f$
2. g è unica a meno di costante additiva della forma $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Dimostrazione.

1. f'/f è olomorfa (in quanto rapporto di olomorfe e $f \neq 0$ sempre, quindi non ha singolarità) in un semplicemente connesso $\implies$ ammette primitiva ϕ. Abbiamo

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\phi}) = f'e^{-\phi} - f\phi' e^{-\phi} = e^{-\phi}(f' - f\frac{f'}{f}) = 0$$

Allora $fe^{-\phi}$ è costante (non nulla), che chiamiamo e^c. Risulta

$$e^{\phi+c} = e^\phi e^c = e^\phi \cdot fe^{-c} = f \implies g := \phi + c \text{ soddisfa la richiesta.}$$

2. Siano g_1, g_2 due inverse dell'exp. su Ω (quindi $e^{g_1} = 1\dots$), allora anche $e^{g_1-g_2} = 1 \implies g_1 - g_2$ assume valori in $2\pi i\mathbb{Z}$: essendo una funzione continua deve essere costante.

10 Teorema dei residui e applicazione al calcolo di integrali

Teo. 16 (dei residui). Ipotesi:

- Ω aperto, $E \subseteq \Omega$ chiuso e discreto (**insieme delle singolarità**).
- γ **curva chiusa** in $\Omega \setminus E$ (non passa sulle sing), omotopa a una costante come curva in Ω (può passare attorno ai punti di E, che appartengono ad Ω, ma non può passare attorno agli eventuali buchi di Ω).
- f olomorfa in $\Omega \setminus E$

Allora:

$$\int_\gamma f dz = 2\pi i \sum_{a\in E} \operatorname{Res}(f,a) n(\gamma,a)$$

Prop. 6 (Integrali della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} g(x)dx$)**.** g olomorfa con l'eccezione di un numero finito di singolarità in un aperto che contiene $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, e non stanno sull'asse reale. Se

- $\lim_{|z|\to+\infty} g(z) = 0$, con $z \in H$
- $w > 0$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwx} g(x)dx = 2\pi i \sum_{a\in H} \operatorname{Res}(e^{iwz} g(z), a)$$

Dimostrazione. L'integrale sul rettangolo che ha un lato sull'asse reale è la somma dei residui, vedo che per un rettangolo abbastanza grande i tre lati non sull'asse reale danno contributo zero.

Prop. 7 (Poli semplici sull'asse reale)**.** f olomorfa con l'eccezione di un numero finito di singolarità in un aperto che contiene $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, supponiamo che le singolarità sull'asse reale siano $a_1, \ldots, a_q$ e siano tutte **poli semplici**. Supponiamo valga **una** delle seguenti:

- f soddisfa condizione di p decrescita, ovvero $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)z^p| < +\infty$ per $z \in H$ e $p > 1$
- f è della forma $e^{iwx} g(x)$ e soddisfa le ip. della prop. sopra

Allora:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}(f,a) + \pi i \sum_{\operatorname{Im} a=0} \operatorname{Res}(f,a)$$

Dimostrazione. usare il seguente lemma

Lemma 2 . a **polo semplice** di una funzione. Sia

$$\gamma_\varepsilon : [0,\alpha] \to \mathbb{C} \quad \theta \mapsto a + \varepsilon e^{i\theta}$$

un arco di circonferenza di centro a, raggio ε, ampiezza α. Allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \alpha i \operatorname{Res}(f,a)$$

Dimostrazione.

Parte III

Equazioni differenziali

1 Problemi ai valori iniziali per sistemi del primo ordine

Definizione 1.1 (Funzione lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima)**:** Sia $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Lo è $f : D \to \mathbb{R}^N$ in $E \subseteq D$ se esiste costante $L_E > 0$ tale che:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_E |x_1 - x_2|$$

per ogni $(t, x_1), (t, x_2) \in E$ (ovvero per ogni t).
È **lip. locale** se non è richiesta su tutto D ma su ogni compatto di D.

Teo. 17 (Picard-Lindeloft/esistenza e unicità)**.**

Dimostrazione. Non la scrivo, vedi appunti su dispense. In generale è tutto il discorso del **teorema delle contrazioni** (vedi dispense Schimperna): basta dimostrare che se f è **lipschitziana** nella seconda variabile allora l'operatore

$$T : (X, \|\cdot\|_\infty) \to (BC^0(I), \|\cdot\|_\infty) \qquad Tu(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, u(t))dt$$

(dove $X \subset BC^0(I)$ sottoinsieme **chiuso** nello funzioni bounded-continuous) è una **contrazione** dello spazio di Banach $(BC^0(I), \|\cdot\|_\infty)$. Quindi **esiste ed è unico il punto fisso**, ovvero una funzione che è la soluzione.
[Prendo funzione qualunque, continuo a riapplicare l'operatore che essendo una contrazione accartoccia sempre di più lo spazio, fino a che non lo accartoccia tutto sull'unico punto che rimane fisso, quindi la successione converge a tale punto che soddisfa la **definizione integrale** di soluzione]

Teo. 18 (Prolungamento massimale)**.** $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ **aperto**, $f : D \to \mathbb{R}^N$ **continua**. Allora:

a) $x(t)$ soluz. su int. massimale $\implies$ tale int. è **aperto**.

b) (ω_-, ω_+) int. max $\implies \forall K \subset D$ **compatto**, $\exists U(\omega_+)$ intorno di ω_+ t.c. $(t, x(t)) \notin K$ per $t \in (\omega_-, \omega_+) \cap U$
Ovvero **abbandono definitivo di ogni compatto di** D: $(t, x(t)) \to \partial D$ per $t \to \omega_\pm$

c) Ogni soluzione **ammette prolungamento massimale**.

Dimostrazione.

a) Facile verificare: J max $\implies$ aperto. Infatti se fosse chiuso $\implies \omega_+ = \sup J \in J$, allora ω_+ è interno a D (aperto) e posso trovare un rettangolo interno a D centrato in $(\omega_+, x(\omega_+))$ a cui applicare Picard-Lindeloft con $t_0 = \omega_+$ che mi assicura l'esistenza in $t_0 + \alpha$

b) Dobbiamo dimostrare l'implicazione in b). Se $\omega_+ = +\infty$ siamo apposto. Sia quindi $\omega_+ < +\infty \in D$ (ovvero interno, se fosse sul bordo non ci sarebbe niente da dim).
Dimostriamo per **per assurdo**, ovvero **non** $\impliedby$ **non**.

- Negare la tesi significa che esiste un compatto $K \subset D$ t.c.

$$\begin{aligned} \forall \text{ intorno } U(\omega_+) : \ (t, x(t)) \in K \text{ per } t \in U \cap (\omega_-, \omega_+) &\iff \exists \text{ successione } t_k \to \omega_+ \mid (t_k, x(t_k)) \in K \\ &\iff (t_k, x(t_k)) \to (\omega_+, \overline{x}) \in K \end{aligned}$$

  L'ultimo iff è poiché K è compatto di $\mathbb{R}^{N+1}$ quindi completo. Nota: per forza di cose abbiamo dim. che $\omega_+ \in K$, ovvero è interno/sulla frontiera (ma non fuori) e che $\overline{x}$ è finito (in quanto appartiene ad un compatto).

- Dimostriamo che

$$\underbrace{(t_k, x(t_k)) \to (\omega_+, \overline{x})}_{i)} \implies \lim_{t \to \omega_+} x(t) = \overline{x}$$

  in tal modo potrei estendere $x(t)$ in ω_+ in modo C^1 mettendo $x(\omega_+) = \overline{x}$. Essa sarebbe ancora una soluzione, quindi (ω_-, ω_+) non è massimale, che è la negazione dell'ipotesi del

teo., quindi apposto.
Per dimostrarlo ricordiamo che

$$\lim_{t\to\omega_+} x(t) = \overline{x} \iff \underbrace{\forall\varepsilon\,\exists\overline{k} \mid \forall k > \overline{k} : (t_k, x(t_k)) \in B_\varepsilon((\omega_+, \overline{x}))}_{ii)}$$

ovvero per k sufficientemente grande il grafico di x ristretto a $[t_k, \omega_+)$ è contenuto nella palla $B_\varepsilon((\omega_+, \overline{x}))$ (che supponiamo tutta contenuta in D dal momento che $\omega_+ \in K$ e K è compatto, quindi ω_+ è interno a D).
Ancora una volta dimostriamo per **per assurdo**, ovvero **non i)** $\Longleftarrow$ **non ii)**
Non ii) significa che esiste $\overline{t}$ in cui il grafico attraversa la frontiera di B, ovvero esiste:

$$\overline{t} := \sup\{t \in [t_k, \omega_+) : (\tau, x(\tau)) \in B\ \forall\tau \in [t_k, t)\}$$

Arriviamo ad una contraddizione poiché

$$\begin{cases} (\overline{t}, x(\overline{t})) \text{ è il punto oltre al quale il grafico sta fuori la palla (sta sul bordo della palla)} \\ (t_k, x(t_k)) \to (\omega_+, \overline{x}) \text{ (centro della palla)} \end{cases}$$

quindi la distanza tra questi due punti tende al raggio della palla ε, ma d'altro canto la distanza tra le x è proporzionale alla distanza ma la distanza tra le x è controllata da $\overline{t} - t_k \to 0$ (?????) dato che la pendenza di x è limitata. CASINO

c) Non ho voglia. Sia $x : J \to \mathbb{R}^N$ e sia $b := \sup J$. Studiamo solo la prolungabilità in b, ovvero a destra.
Se x non è prolungabile in $b \implies J$ massimale, apposto.
Sia x prolungabile in b: dobbiamo dim. che possiamo prolungarla a intervallo massimale.

$$\begin{cases} x \text{ non è prolungabile in } b \implies J \text{ massimale} \\ x \text{ è prolungabile in } b \implies \text{aggiungiamo a } x \text{ il punto } x(b) \text{ e applichiamo Picard-Lindeloft} \end{cases}$$

ovvero x si prolunga a $b + \alpha_K$. Se il nuovo estremo appartiene ancora a un compatto K contenuto in D, allora possiamo riapplicare P-L. **Reiteriamo il procedimento** finché il punto non appartiene al K. Ma allora **reiteriamo la reiterazione** cambiando compatto, e ripetiamo per una successione di compatti che invadono D.
Ci sono sono altri dettagli per concludere che OMETTO

Teo. 19 (Esistenza globale). $f : D \to R^N$ con $D = I \times \Omega$, $x : J \to \Omega$ soluzione massimale. Quindi

$$\begin{cases} I = \text{ intervallo "globale" (dove è definita } f) \\ J = \text{ intervallo massimale (dove è definita la soluzione massimale)} \end{cases}$$

Allora:

$$f \text{ limitata} \implies J = I$$

Dimostrazione. Fissato $t_0 \in J$, $\forall t \in J$ si ha

$$|x(t) - x(t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \qquad \text{(essendo } f \text{ limitata)}$$
$$\implies |x(t)| \leq |x(t_0)| + M|t - t_0|$$

Quindi x è limitata sia dal basso che dall'alto da due rette, quindi non può avere asintoti verticali.

Lemma 3 (di Gronwall). I intervallo, $\beta \in C^0(I)$, $\beta \geq 0$, $a \in I, \alpha \in \mathbb{R}$. Se $u \in C^0(I)$ è una funzione t.c.

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \geq a \in I \implies u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds} \forall t \geq a \in I$$

Ovvero, se $u(t)$ non è soluzione del prob. di Cauchy lineare

$$\begin{cases} u'(t) = \beta(t)u(t) \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

(se lo fosse ci sarebbe l'uguale in entrambi i membri dell'implicazione), ma è minore della formulazione integrale, allora è anche minore della "pseudo soluzione" dell'eq. lineare (secondo membro dell'implicazione).

Dimostrazione. MANCA (me l'ha chiesta)

Cor. 2 (Stima scarto tra due soluzioni con Gronwall). $f : D \to \mathbb{R}^N$ continua e **localm. lipschitziana**, $x_1, x_2 : J \to \mathbb{R}^N$ due soluzioni di $x' = f(t,x)$, sia $t_0 \in J$. Allora abbiamo una stima della differenza tra i valori delle due soluzioni in $t \geq t_0$ data da:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)|e^{L_T(t-t_0)}$$

dove L_T è una costante di lip. di f in un compatto D contenente i grafici delle soluzioni su $[t_0, T]$, con $T \in J \mid T \geq t \geq t_0$

Dimostrazione. Essendo x_i soluzioni si ha

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_i(s))ds$$

Per ogni $t \in [t_0, T]$ si ha

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| &\leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right) ds \\
&\leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + \int_{t_0}^{t} L_T|x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)|e^{L_T(t-t_0)}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo $\leq$ abbiamo applicato **Gronwall** con $\alpha = |x_1(t_0) - x_2(t_0)|, \beta = L_T, u(s) = |x_1(s) - x_2(s)|$.

Cor. 3 (Unicità con Gronwall). Due soluzioni sono uguali se coicidono in tutto l'intervallo, quindi basta applicare la stima di sopra a due funzioni che partono dallo stesso punto: il modulo della differenza è zero quindi coincidono (chiaramente siamo in ip. di lip.)

Teo. 20 (del confronto). Stiamo nel caso scalare, quindi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ **loc. lip.**. Siano $x, u : J \to \mathbb{R} \in C^1$ con grafico in D tali che ($a \in J$):

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \ (u \text{ soluzione}) \\ x'(t) \leq f(t, x(t)) \ (x \text{ ha pendenza puntualmente minore}) \\ x(a) \leq u(a) \ (\text{punto ''iniziale'' minore o uguale}) \end{cases} \implies x(t) \leq u(t) \quad \forall t \geq a \in J$$

Dimostrazione. Facciamo **per assurdo**. Negare la tesi significa che esiste $\bar{t} > a \in J$ t.c.

$$x(\bar{t}) > u(\bar{t})$$

Sia $t_0 = \sup\{t \in [a, \bar{t}] : x(t) \leq u(t)\}$, allora **per continuità** delle due funzioni deve essere:

$$\begin{cases} t_0 < \bar{t} \\ x(t_0) = u(t_0) \\ x(t) > u(t) \quad \text{per } t_0 < t < \bar{t} \end{cases}$$

In $[t_0, \bar{t}]$ si ha

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds \leq x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad (\text{poiché } x' \leq f) \\ u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned}
x(t) - u(t) &\leq x(t_0) - u(t_0) + \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, u(s))]ds \\
&\leq L_K \int_{t_0}^{t} |x(s) - u(s)|ds \qquad L_K \text{ cost. di lip. in un compatto } K \text{ che contiene i grafici in } [t_0, \bar{t}] \\
&= L_K \int_{t_0}^{t} (x(s) - u(s))ds \qquad \text{poiché } x(t) \geq u(t) \\
&= 0 \qquad \text{applicando } \textbf{Gronwall} \text{ a ''}u(t)\text{''} = x(t) - u(t) \text{ con } \alpha = 0
\end{aligned}$$

Ma allora $x(t) \leq u(t)$, assurdo.

Cor. 4 (Crescita sottolineare). $D = I \times \mathbb{R}$, I aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ continua t.c.

$$|f(t,x)| \leq \varphi(t) + \psi(t)|x|$$

con $\varphi, \psi \geq 0$ continue. Allora $x' = f(t,x)$ ha **esistenza globale** (ovvero i suoi intervalli massimali coincidono con I).

Dimostrazione. Sia $x : J \to \mathbb{R}$ soluzione di $x' = f(t,x)$, con J int. massimale. Fissiamo $t_0 \in J$.

- **Stima dall'alto**: per ip.

$$x'(t) = f(t,x) \leq \varphi(t) + \psi(t)|x(t)|$$

Prendiamo una soluzione ausiliaria u con crescita lineare e con stesso punto di partenza (in realtà il val. ass), ovvero soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = \varphi(t) + \psi(t)|u(t)| \\ u(t_0) = |x(t_0)| \end{cases}$$

allora $u(t) \geq 0$ in $t \geq t_0$ poiché punto iniziale e derivata sono positivi, quindi possiamo togliere i valori assoluti e vediamo che ha **crescita lineare**, quindi (vedi sol. di sistema lineare del primo ordine) ha esistenza globale (a destra di t_0).
Possiamo applicare il **teo. del confronto** ed essendo $x(t_0) \leq u(t_0)$ abbiamo

$$x(t) \leq u(t) \qquad \forall t \geq t_0$$

- **Stima dal basso**: tutto identico ma con cambiati i segni, quindi

$$x'(t) = f(t,x) \geq -\varphi(t) - \psi(t)|x(t)|$$

Considerando soluzione ausiliaria di

$$\begin{cases} v'(t) = -\varphi(t) - \psi(t)|u(t)| \\ v(t_0) = -|x(t_0)| \end{cases}$$

allora $v(t) \leq 0$ in $t \geq t_0$, quindi risolve eq. lin. primo ordine e ha esistenza globale, per **teo. confronto**:

$$x(t) \geq v(t) \qquad \forall t \geq t_0$$

Teo. 21 (dipendenza dai dati per successioni). Dividiamo le ipotesi tra elementi della successione, elementi limite e convergenze:

- **Successione**: siano
  - $(f_j)_j$ successione di funzioni **continue** $D \to \mathbb{R}^N$
  - (t_0^j, x_0^j) successione di punti in D
  - ϕ_j soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = f_j(t,x) \\ x(t_0^j) = x_0^j \end{cases}$$

- **Limiti**: supponiamo esistano
  - $f_0 : D \to \mathbb{R}^N$ **localmente lip. in** D
  - $(t_0, x_0) \in D$
  - ϕ_0 soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = f_0(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

  definita in $[a,b]$

- **Convergenze**: tutto ciò tale che
  - $f_j \to f_0$ **uniformemente sui compatti di** D
  - $(t_0^j, x_0^j) \to (t_0, x_0)$

ALLORA:
$$\phi_j \to \phi_0 \qquad \text{uniformemente in } [a,b]$$

Teo. 22 (dipendenza continua dai dati). Riformulando ciò fatto sopra con un unica funzione vettoriale e in maniera continua si ha:

- **Insiemi:** $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m$ **aperto**, quindi $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in G$, dove $\boldsymbol{\lambda}$ è il vettore di m parametri.
- **Funzione**: sia $f : G \to \mathbb{R}^N$ **continua, loc. lip.** (nella seconda variabile unif. risp. alla prima)
- **Problema di Chaucy**: sia
$$\begin{cases} x' = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
e la sua soluzione unica sia $x(\cdot, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ e $(\omega_-(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}),\ \omega_+(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}))$ il suo int. max. di esistenza.

ALLORA:

1. La funzione $\omega_-(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ è **semicontinua superiormente**
2. La funzione $\omega_+(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ è **semicontinua inferormente**
3. l'insieme
$$E = \{(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) :\ (t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) \in G;\ \omega_-(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) < t < \omega_+(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda})\}$$
è **aperto** (ovvero l'intervallo massimale dei tempi è aperto)
4. la funzione
$$x : (t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto x(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$$
è **continua** in E

Definizione 1.2 (Flusso)**:** Sia $x' = f(x)$ un'eq. diff. autonoma. Allora il flusso è una sua soluzione con dato iniziale zero, ovvero è
$$\varphi(t, \boldsymbol{x}_0) := \boldsymbol{x}(t, 0, \boldsymbol{x}_0)$$

Definizione 1.3 (Orbita)**:** L'orbita di un punto $x_0 \in \Omega$ (insieme di def. di f autonoma) è l'immagine di tutta la soluzione $\varphi(\cdot, x_0)$

Prop. 8 (Proprietà sistemi autonomi). Per sistemi autonomi valgono:

a) due orbite non possono avere alcun punto in comune

b) se $x : J \to \Omega$ è soluzione non costante, allora è curva regolare, ovvero $x'(t) \neq 0$ per ogni $t \in J$

Dimostrazione.

a) Se due orbite associate a due soluzioni diverse (x^1, x^2) si toccassero (per due t diversi) allora
$$x^1(t_1) = x^2(t_2) \implies \overline{x}^1(t_2) = x^2(t_2)$$
con $\overline{x}^1(t) := x^1(t - (t_2 - t_1))$ è la **traslata temporale** di x_1 e in quanto tale è ancora soluzione. Dato che è soluzione e in uno stesso t_2 sono uguali allora per l'unicità
$$\overline{x}^1 \equiv x^2 \implies \text{le orbite di } x^1, x^2 \text{ coincidono}$$
in quanto $\overline{x}^1$ è traslata temporale di x^1

b) Se esistesse t_0 t.c. $x'(t_0) = 0$ allora l'orbita della soluz. costante e di questa dovrebbero coincidere. VABBUO