Topologia

Marco Ambrogio Bergamo

Anno 2023-2024

# Teoria

## Definizioni di base

**Topologia** Una topologia $\mathcal{T}$ su un insieme $X$ è una famiglia di sottoinsiemi di $X$ (:= **aperti**) tali che:

(A1) $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$

(A2) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T}$ (anche infiniti)

(A3) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ (finita) $\implies$ **intersezione infinita** di aperti non è detto sia un aperto

**Aperto** Due definizioni equivalenti. $A \subset (X, \mathcal{T})$: (DIM)

1. è aperto se $A \in \mathcal{T}$.
2. è aperto se è intorno di ogni suo punto (ogni punto è interno).

**Chiuso** Due definizioni equivalenti. $C \subset (X, \mathcal{T})$: (DIM)

1. è chiuso se $X - C \in \mathcal{T}$ (aperto).
2. è chiuso se $C$ contiene tutti i suoi punti limite.

**Passaggio al complementare** Esso scambia:

- unione $\longleftrightarrow$ intersezione: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (e viceversa, **leggi di De Morgan**)
- parte interna $\longleftrightarrow$ chiusura: $(A^\circ)^C = \overline{(A^C)}$ (e viceversa)

**Topologia dei chiusi** Come conseguenza delle leggi di De Morgan, in una topologia di aperti sia valgono le seguenti proprietà, sia può essere descritta proprio dai chiusi:

(C1) $\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}_C$

(C2) $A, B \in \mathcal{T}_C \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_C$ (anche infiniti)

(C3) $A, B \in \mathcal{T}_C \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T}_C$ (finita) $\implies$ **unione infinita** di chiusi non è detto sia un chiuso

Per esempio, un'unione infinita di chiusi (punti) che non è chiusa in $\mathbb{R}$ è: $\bigcup_{x \geq 0} \{\frac{1}{x}\}$ con $x \in \mathbb{R}$. Infatti 0 è un punto limite per l'insieme (appartiene alla chiusura) ma non appartiene all'insieme (notare che ciò varrebbe anche se $x \in \mathbb{N}$, ovvero se fosse unione numerabile)

**Famiglia di sottoinsiemi localmente finita** $\mathcal{F} = \{A \mid A \subset X\}$ è localmente finita se ogni intorno di ogni $x \in X \setminus \mathcal{F}$ interseca al più un numero finito di elementi di $\mathcal{F}$

PROP. Locale finitezza assicura che l'unione infinita di chiusi è chiusa o intersezione infinita di aperti è aperta

**Punto limite / di accumulazione** $x \in X$:

1. è un punto limite di (punto di accumulazione per) $S \subset X$ se ogni intorno aperto di $x$ interseca $S$ in almeno un punto diverso da $x$.
2. è un punto limite di $S$ se $x \in \overline{S}$ e non è punto isolato.

**Intorno** $U \subset X$ intorno di $x \in X$ se: $\exists V$ aperto $\mid x \in V \subset U \subset X$ ("$U$ contiene un aperto di $X$ che contiene $x$", ovvero $x$ è punto interno di $B$)

**Base** $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ è base di $\mathcal{T}$ se ogni elemento di $\mathcal{T}$ (aperto) può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

**Topologia più fine** $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$ due topologie su $X$. $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{R}$ se $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ ha più aperti di $\mathcal{R}$)

**Chiusura** Dato $B \subset X$ (sp. topologico), $\overline{B} \coloneqq \cap\{C \mid B \subset C \subset X,\ C \text{ chiuso}\}$ (intersezione di tutti i chiusi che contengono B). Ovvero $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso di $X$ contenente $B$. I suoi punti si dicono **aderenti** a $B$

**Parte interna** Dato $B \subset X$ (sp. topologico), $B^\circ \coloneqq \cup\{A \mid A \subset B \subset X,\ A \text{ aperto}\}$ (unione di tutti gli aperti contenuti in B). Ovvero $B^\circ$ è il più grande aperto **di *X*** contenuto in $B$

**Semi-aperto** $S \subset X$ è un sottoinsieme semi-aperto se esiste un aperto $A \subset X$ tale che $A \subset S \subset \overline{A}$

**Semi-chiuso** $S \subset X$ è un sottoinsieme semi-aperto se esiste un chiuso $C \subset X$ tale che $C^\circ \subset S \subset C$

**Sottospazio denso** $A \subset X$ (sp. topologico), $A$ denso se $\overline{A} = X$, ovvero se $A$ interseca ogni aperto non vuoto di $X$. In generale, se $A \subset B \subset X$ (sp. topologico): $A$ è denso in $B$ se $B \subset \overline{A}$

**Densità** di $X$ (sp. top.) è la cardinalità più piccola possibile di un sottospazio denso in $X$

**Frontiera** $\partial B \coloneqq \overline{B} - B^\circ = \overline{B} \cap \overline{X - B}$

**Base locale / sistema fondamentale di intorni** È una famiglia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ tale che: per ogni intorno di $x$ esiste un elemento della famiglia che è contenuto in tale intorno.

**Topologia di sottospazio/indotta** $X$ sp. topologico. Gli aperti in $Y \subset X$ sono gli aperti di $X$ intersecati con Y. (Ovvero $U \subset Y \subset X$ aperto in $Y$ se esiste un $V$ aperto di $X$ tale che $U = Y \cap V$).
La stessa cosa vale coi chiusi. Attenione: per capire bene la def. pensare a sottoinsiemi sconnessi e pensare a cosa vuol dire intersecare un aperto di $X$ (che ricopre una sola componente connessa) con **tutto** $Y \Rightarrow$ mi dà la sola componente connessa, che quindi è sia aperta che chiusa in $Y \subset X$ (poiché posso intersecarla sia con un aperto che con un chiuso di $X$).

PROP. (PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLA TOP. DI SOTTOSPAZIO) Siano $X, Y$ s.t., $Z \subset Y$ con topologia di sottospazio, $f : X \to Z$ app. e $i \circ f : X \to Y$ composizione con l'inclusione di $Z$ in $Y$.
Allora: $if$ continua $\iff$ $f$ continua

**Topologia prodotto** Su $P \times Q$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue entrambe le proiezioni.

TEOREMA La base della topologia prodotto su $P \times Q$ è formata dagli insiemi $A \times B \mid A \in \mathcal{T}_P, B \in \mathcal{T}_Q$, detta **base canonica**.

TEOREMA Le proiezioni sui fattori $p : P \times Q \to P$ e $q : P \times Q \to Q$ sono <u>applicazioni aperte</u>.
Per ogni $(x, y) \in P \times Q$ le restrizioni $p : P \times \{y\} \to P$, $q : \{x\} \times Q \to Q$ sono omeomorfismi.

TEO. (PROP. UNIVERSALE DELLA TOP. PRODOTTO) $f : X \to P \times Q$ è continua $\iff$ le sue componenti $\begin{cases} f_1 = p \circ f \\ f_2 = q \circ f \end{cases}$ sono continue.

**Topologia quoziente** $X$ sp. topologico, $Y$ insieme, $f : X \to Y$ applicazione suriettiva. La topologia quoziente rispetto ad $f$ su $Y$ è $\mathcal{T} = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X\}$ (è una topologia perchè $f^{-1}$ commuta con unione e intersezione).
È l'unica topologia su $Y$ che rende $f$ una identificazione ed è la topologia più fine tra quelle che rendono continua $f$.

# Applicazioni (funzioni)

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \quad A \subset X, B \subset Y$$

**Sottoinsieme $f$-saturo** $A \subset X$ se contiene le fibre dell'immagine di ogni suo punto.

**Sottoinsieme $f$-coperto** (mia invenzione) $B \subset Y$ se $B \subset f(X)$

**Funzione e "inversa"** $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$:

1. $B \supseteq f(f^{-1}(B))$ uguale se $f$ suriettiva o se $B$ è $f$-coperto (ovvero non è uguale solo se $B$ contiene elementi che non hanno preimmagine)
2. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ uguale se $f$ iniettiva o se $A$ è $f$-saturo (ovvero non è uguale solo se $A$ non contiene tutti gli elementi delle fibre)

**Continuità "totale"** $A$ aperto in $Y \implies f^{-1}(A)$ aperto in X.
(Dato che $f^{-1}$ commuta col passaggio al complementare e con l'unione, la def. può essere valutata sui chiusi o solo sugli aperti della base di $Y$.)

LEMMA $f$ continua $\iff f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$

TEOREMA composizione di app. continue è continua.

**Continuità locale** $f$ è continua in $x \in X$ se per ogni intorno $U$ di $f(x)$ esiste un intorno $V$ di $x$ tale che: $f(V) \subset U$.
NB se dicevo ...per ogni intorno di $l$ dove $l = \lim_{y \to x} f(y)$ allora era la def. di limite, dicendo invece intorno della $f(x)$ stessa implica che $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ che è la canonica def. di continuità.

TEOREMA $f$ continua $\iff$ continua in ogni punto di $X$

**Omeomorfismo** Se:

1. Biunivoca
2. $A$ aperto in $Y \implies f^{-1}(A)$ aperto in X (continua)
3. $A$ aperto in $X \implies f(A)$ aperto in Y (inversa continua)

(Ovvero c'è una corrispondenza biunivoca sia tra gli elementi di $X$ e $Y$ che tra i loro aperti. Gli aperti sono tutti e soli quelli che vanno e provengono da un aperto).

**Applicazione aperta** se $A \subset X$ aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto in $Y$

**Applicazione chiusa** se $C \subset X$ chiuso $\Rightarrow f(C)$ chiuso in $Y$

LEMMA per una funzione $f : X \to Y$ sono equivalenti:

1. $f$ è un omeomorfismo
2. $f$ è continua, chiusa, biettiva
3. $f$ è continua, aperta, biettiva

**Applicazione limitata** Se l'immagine è un insieme limitato.

**Immersione** $f$ continua e iniettiva in cui $A$ aperto in $X \iff A = f^{-1}(B)$, con $B$ aperto di $Y$.
Oppure: $f : X \to f(X) \subset Y$ è un omeomorfismo.

**aperta** Un'immersione che è anche un'applicazione aperta.

**chiusa** Un'immersione che è anche un'applicazione chiusa.

LEMMA $f$ continua, iniettiva, chiusa $\implies$ immersione chiusa

LEMMA $f$ continua, iniettiva, aperta $\implies$ immersione aperta

**Identificazione** $f$ continua e suriettiva in cui $A$ aperto (chiuso) in $Y \iff f^{-1}(A)$ aperto (chiuso) in $X$.
Oppure: $B$ aperto in $Y \iff B = f(A)$, con $A$ aperto **saturo** di $X$.

**aperta** Un'identificazione che è anche un'applicazione aperta.

**chiusa** Un'identificazione che è anche un'applicazione chiusa.

LEMMA $f$ continua, suriettiva, chiusa $\implies$ identificazione chiusa

LEMMA $f$ continua, suriettiva, aperta $\implies$ identificazione aperta

LEMMA (PROP. UNIVERSALE DELLE IDENT.) $f : X \to Y$ identificazione, $g : X \to Z$ continua. Allora:
esiste $h : Y \to Z$ continua $\mid g = hf \iff g$ costante sulle fibre di $f$

# Spazi metrici

**Distanza** Una distanza su un insieme $X$ è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

NB: la distanza è un'applicazione che va in $\mathbb{R}$, ciò è importantissimo perché mette in relazione un qualunque spazio (anche con le distanze più assurdi) con $\mathbb{R}$, che ha tutte le proprietà del mondo.

**Spazio metrico** È una coppia $(X, d)$ con $X$ un insieme e $d$ una distanza su di esso.

**Palla aperta** Sia $(X, d)$ uno sp. metrico, è il sottoinsieme $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r \in \mathbb{R}\}$

**Topologia indotta da una distanza** $(X, d)$ uno sp. metrico, nella topologia su $X$ indotta da $d$ un sottoinsieme $A \subset X$ è **aperto** $\iff$ $\forall x \in A$ esiste $r > 0$ tale che: $B(x, r) \subset A$ (ovvero ogni punto è interno)

**Distanze equivalenti** Se inducono la stessa metrica (non vale il viceversa).

Oppure: $d, d'$ equivalenti se $\forall x, y \in X \quad \exists A, B \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} d(x,y) \leq Ad'(x,y) \\ d'(x,y) \leq Bd'(x,y) \end{cases}$

**Spazio topologico metrizzabile** Se la topologia è indotta da una distanza opportuna.

**Sottoinsieme limitato** $(X, d)$ uno sp. metrico. $A \subset X$ limitato se esiste numero reale $M$ tale che: $d(a, b) \leq M$ per ogni $a, b \in A$

**Spazio metrico completo** Se in esso ogni successione di Cauchy è convergente (ovvero se contiene i punti di accumulazione di ogni successione di Cauchy - vedere note sulle succ.d.C.)

OSS. Vedi dopo. Spazio metrico $\begin{cases} \implies \text{Normale (da T4 in giù)} \\ \implies \text{1-numerabile} \\ \text{separabile} \iff \text{2-numerabile} \\ + \text{compatto} \implies \text{2-numerabile} \\ \text{compatto} \iff \text{c.p.s.} \iff \text{completo + tot. limitato} \end{cases}$

## Connessione

**Spazio connesso** $X$ è connesso se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e $X$.

LEMMA $X$ è sconnesso $\iff$ è unione disgiunta di aperti/chiusi propri (sottoinsiemi strettamente contenuti in $X$)

TEOREMA $f : X \to Y$ continua, allora se $X$ connesso $\implies$ $f(X)$ connesso

**Connessione per archi** X è connesso per archi se per ogni $x, y \in X$ esiste un'applicazione continua $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

LEMMA Spazio connesso per archi $\implies$ connesso

LEMMA Sia $f : X \to (Y, \text{connesso})$ continua e suriettiva allora se: $\begin{cases} \text{Ogni fibra è connessa} \\ f \text{ aperta o chiusa} \end{cases} \implies X$ connesso

TEOREMA Prodotto di spazi connessi è connesso

**Componente connessa** È un elemento massimale della famiglia dei sottospazi connessi, ordinata per inclusione. Ovvero $C \subset X$ è una c.c. se $C$ connesso e se $C \subset A$ con $A$ connesso $\implies$ $C = A$.

LEMMA Se aggiungo punti limite a un sottospazio connesso esso rimane connesso. Ovvero: $Y \subset X$ connesso, se $Y \subset W \subset \overline{Y} \implies W$ connesso.
In particolare la chiusura di un connesso (cioè aggiungendo tutti i p.ti limite) è connessa.

## Compattezza

**Ricoprimento** Un ricoprimento di un insieme $X$ è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di $X$ tali che $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

**aperto** se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto

**chiuso** se ogni $A \in \mathcal{A}$ è chiuso

**localmente finito** Se ogni punto di $X$ ha almeno un intorno aperto con intersezione non vuota solo con un numero finito di elementi del ricoprimento.

**fondamentale** quando un sottoinsieme $U \subset X$ è aperto $\iff$ $U \cap A$ è aperto in $A$ per ogni $A \in \mathcal{A}$

**Sottoricoprimento** Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimenti e $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

**Spazio compatto** $X$ è compatto se ogni suo ricoprimento aperto possiete un sottoricoprimento finito.

Oss. insieme finito $\implies$ compatto

Oss. insieme finito $\iff$ discreto + compatto

Teorema $f : X \to Y$ continua, allora se $X$ compatto $\implies$ $f(X)$ compatto

**Spazio localmente compatto** se ogni suo punto possiede un intorno compatto.

**Sottospazio compatto** se è compatto per la topologia di sottospazio (indotta).

Teorema [0,1] è compatto in $\mathbb{R}$

Prop. Sottospazio chiuso di un compatto $\implies$ compatto

Prop. Unione finita di sottospazi compatti è compatta

Coroll. (Heine-Borel) Sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto $\iff$ chiuso + limitato

Coroll. $X$ compatto $\implies$ $f : X \to Y$ ammette massimo e minimo.

Teorema $f : X \to (Y, \text{compatto})$ applicazione. Se ogni fibra è compatta $\implies$ $X$ compatto.

# Proprietà di numerabilità

**Spazio topologico separabile** Se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

Lemma $X$ a base numerabile $\implies$ separabile

Lemma $X$ metrico, allora è separabile $\iff$ a base numerabile

**Secondo assioma di numerabilità (secondo-numerabile)** Lo soddisfa uno spazio topologico a **base numerabile**, ovvero se esiste una base della topologica con cardinalità numerabile.

Oss. Ogni sottospazio di un 2-numerabile è 2-numerabile.
Prodotto di due 2-numeranili è 2-numerabile.

Lemma Spazio 2-numerabile $\implies$ separabile

Lemma Spazio $\begin{cases} \text{metrico} \\ \text{separabile} \end{cases} \implies$ 2-numerabile ( $\implies$ 1-numerabile)

Prop. In un 2-numerabile ogni ricoprimento ammette sottoricoprimento numerabile
(ovvero 2-numerabile $\implies$ Lindelöf)

**Primo assioma di numerabilità (primo-numerabile)** Uno sp. topologico lo soddisfa se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Oss. 2-numerabile $\implies$ 1-numerabile

Lemma. Spazio metrico $\implies$ 1-numerabile

# Proprietà di separazione

**Proprietà di separazione** Determinano fino a che punto due punti distinti o due chiusi sono separati da aperti. Uno spazio topologico si dice:

- **T0** (di Kolmogoroff) se per ogni coppia di punti distinti **almeno** uno dei due ha in un intorno che non contiene l'altro. ( $\iff$ due punti non sono mai l'uno punto limite dell'altro)
- **T1** (di Fréchet) se per ogni coppia di punti distinti **ognuno** dei due ha in un intorno che non contiene l'altro ( $\iff$ i punti sono sottoinsiemi chiusi). (DIM)

**T2** (di Hausdorff / separato) se ogni coppia di punti distinti ammette intorni disgiunti ( $\iff$ punti sono intersezione di loro intorni chiusi)

**T3** se ogni coppia (insieme chiuso - punto) ammette una coppia (soprainsieme aperto - intorno) disgiunta ( $\iff$ ogni aperto contiene intorni chiusi di ogni suo punto $\iff$ ogni chiuso è intersezione di suoi intorni chiusi )

**T4** se ogni coppia di chiusi disgiunti ammette una coppia di soprainsiemi aperti disgiunti.

**T5** se ogni coppia di sottoinsiemi separati (ognuno è disgiunto dalla chiusura dell'altro) ammette coppia di soprainsiemi aperti disgiunti.

Oss. Le uniche implicazioni tra le prop di separazione sono:
T2 $\implies$ T1 $\implies$ T0
T5 $\implies$ T4
T3 + T0 $\implies$ T2
T4 + T1 $\implies$ T3

Prop. Spazio metrico $\implies$ Hausdorff
*Dim.* $d$ distanza e $x \neq y \implies d(x, y) > 0$. Se $0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$ allora le palle $B(x, r), B(y, r)$ sono disgiunte: infatti se ci fosse $z$ nell'intersezione delle palle $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r < d(x, y)$

Lemma Hausdorff $\implies$ sottoinsiemi finiti sono chiusi.

Lemma Sottospazi e **prodotti** di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Teorema Hausdorff $\iff$ la diagonale è chiusa nel prodotto

**Spazio normale** Se ha tutte le proprietà fino a T4 ( $\iff$ T2 e T4 $\iff$ T1 e T4)

Prop. Spazio metrizzabile $\implies$ normale ( $\implies$ regolare $\implies$ Hausdorff $\implies$ T1 $\implies$ T0)

**Spazio regolare** Se ha tutte le proprietà fino a T3 ( $\iff$ T1 e T3)

Prop. Spazio normale $\implies$ regolare

# Successioni

**Successione** (in uno spazio topologico) è un'applicazione $a : \mathbb{N} \to X$ (sp. topologico). Vediamo il dominio come un insieme di indici: $a(i) := a_i$.

**Converge** $\{a_n\}$ converge a $p \in X$ se $\forall U \subset X$ intorno di $p$ esiste $N \in \mathbb{N} \mid a_n \in U$ per ogni $n \geq N$ (ovvero se la successione si avvicina sempre di più a un punto definitivamente)

**Punto di accomulazione** $p \in X$ è di accomulazione della successione se $\forall U \subset X$ intorno di $p$ e $\forall N \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq N \mid a_n \in U$ (ovvero se riesco a trovare punti immagine della successione arbitrariamente vicini al punto)

Oss. Se una succ. converge a $p \implies p$ punto di accumulazione
(viceversa non vale sempre, vedi successioni che ammettono sottosucc. convergente, che quindi converge a $q \implies q$ p.to di acc. ma la succ. non converge a $q$)

Prop. In un Hausdorff ogni successione converge al più ad un punto

**Successione convergente** $\{a_n\}$ convergente se converge a qualche putno $p \in X$. Se $X$ è di Hausdorff diremo che $p$ è il **limite** di $\{a_n\}$.

**Sottosuccessione** di una successione $a : \mathbb{N} \to X$ è la composizione di $a$ con un'applicazione $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente.

Lemma se una successione possiede una sottosuccessione convergente a $p \implies p$ è p.to di accumulazione.
(Viceversa SOLO in 1-numerabili, vedi prossima prop.)

Oss. Negli spazi che soddisfano gli assiomi di numerabilità, molte proprietà (come chiusura e compattezza) possono essere descritte in termini di successioni e sottosuccessioni

Prop. $X$ 1-numerabile, $A \subset X$. Per $x \in X$ sono equivalenti:

1. Esiste succ. a valori in A che conv. a $x$

2. $x$ è di acc. per qualche succ. a valori in A
3. $x \in \overline{A}$

**Lemma** $X$ compatto $\implies$ ogni successione possiede p.ti di accumulazione (non implica compatto per successioni)

**Compatto per successioni** $X$ (s. t.) lo è se ogni successione in $X$ possiede una sottosuccessione convergente.

**Lemma.** 1-numerabile: compatto per successioni $\iff$ ogni succ. ha p.ti di accumulazione.

In particolare: $\begin{cases} \text{Compatto} \\ \text{1-numerabile} \end{cases} \implies$ compatto per successioni

**Prop.** In un 2-numerabile: compatto $\iff$ (ogni succ. ha p.ti di acc.) $\iff$ compatto per successioni

**Successione di Cauchy** $\{a_n\}$ successione in uno spazio **metrico** $(X, d)$ in cui $\forall \varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N} \mid d(a_n, a_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$. (ovvero la distanza tra due immagini diminuisce definitivamente). Differenze con una successione convergente:

1. È un concetto legato alla distanza, quindi richiede uno spazio metrico (mentre la convergenza no)
2. Non necessita del punto di accumulazione, ovvero del punto a cui converge. Infatti la def. è svincolata da esso, in quanto coinvolge solo la distanza relativa di due immagini. Quindi una successione di Cauchy certo che "converge", nel senso che si avvicina sempre di più a qualcosa, peccato che quel qualcosa può "non esistere", ovvero non appartenere all'insieme di definizione della succ., quindi per def. di convergenza (= succ. che converge a un punto <u>di $X$</u>) non è convergente.

**Lemma** Successione convergente $\implies$ di Cauchy

**Lemma** $\begin{cases} \text{Successione di Cauchy} \\ \text{Possiede punti di accumulazione} \end{cases} \iff$ è convergente

In particolare: $\begin{cases} \text{Successione di Cauchy} \\ \text{In uno sp. metrico compatto per successioni} \end{cases} \implies$ è convergente

**Lemma** Spazio metrico compatto $\implies$ compatto per successioni $\implies$ completo

**Prop.** Sottospazio di uno sp. metrico completo è chiuso $\iff$ completo rispetto alla metrica indotta

# Spazi metrici + compatti

**Spazio totalmente limitato** $(X, d)$ sp. metrico lo è se $\forall r \in \mathbb{R}^+$ è possibile ricoprire tale spazio con un numero finito di palle aperte di raggio $r$.

**Oss.** Metrico + totalmente limitato $\implies$ limitato

**Lemma** Metrico + compatto per succ. $\implies$ tot. limitato

**Lemma** Metrico + totalmente limitato $\implies$ 2-numerabile

**Teorema** In uno spazio metrico sono equivalenti:

1. compatto
2. ogni succ. ha p.ti di accumulazione
3. compatto per successioni
4. completo + tot. limitato

Inoltre queste condizioni $\implies$ 2-numerabile

**Sottospazio relativamente compatto** $A \subset X$ lo è se è contenuto in un sottospazio compatto di $X$.

## Teorema di Baire

**Sottoinsieme raro (mai-denso)** se la parte interna della sua chiusura è vuota (i suoi punti sono solo di frontiera)
NB a non invertire le cose: parte interna della chiusura $\neq$ chiusura della parte interna.
Pensare a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ che ha parte interna vuota (infatti il più grande aperto **di** $\mathbb{R}$ **contenuto in** $\mathbb{Q}$ è $\emptyset$) $\Rightarrow$ chiusura della parte interna vuota, ma la parte interna della chiusura (chiudere $(a, b) \subset \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ significa aggiungere gli estremi e i numeri razionali) è non vuota.

**Sottoinsieme magro** se è contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi rari.

**Spazio di Baire** se ogni suo sottoinsieme magro ha parte interna vuota.
Esplicitato: se l'unione numerabile di ogni famiglia di insiemi chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.
(vedi unione numerabile di rette per l'origine non coprono $\mathbb{R}^2$, stessa cosa per unione numerabile di punti in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ spazi di Baire. Al contrario per $\mathbb{Q}^2$ e $\mathbb{Q}$ che non lo sono)

LEMMA $A$ mai-denso $\iff$ $A^C$ denso
**Dim:**

$$\begin{aligned}
A \text{ mai-denso} &\iff (\overline{A})^\circ = \emptyset \text{ (per def. di mai-denso)} \\
&\iff ((\overline{A})^\circ)^C = X \\
&\iff \overline{((\overline{A})^C)} = X \text{ (commutato compl. e p. interna)} \\
&\iff \overline{((A^C)^\circ)} = X \text{ (commutato compl. e chiusura)} \\
&\iff (A^C)^\circ \text{ è denso in } X \text{ (per def di denso)} \\
&\iff A^C \text{ contiene un aperto denso}
\end{aligned}$$

TEOREMA DI BAIRE

$$\begin{aligned}
\text{Spazio metrico completo} &\Longrightarrow \bigcup \text{ numerabile di sottoinsiemi rari è un raro} \\
&\iff \bigcap \text{ numerabile di aperti densi è densa} \\
&\iff \text{ spazio di Baire}
\end{aligned}$$

## Teoremi

**Teorema (Esistenza di una topologia data una base).** *$X$ un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$.*

$$\text{Esiste una topologia su } X \text{ di cui } \mathcal{B} \text{ è una base} \iff \begin{cases} X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\} \\ A \cap B = \cup\{C \mid C \in \mathcal{B}\} \quad \forall A, B \in \mathcal{B} \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

$\square$

# Esempi

**Topologia cofinita (del complementare finito)** $\tau_c = \{X, \emptyset, A \mid X \setminus A \text{ finito}\}$. Quindi i chiusi sono i sottoinsiemi finiti.
NB: uno spazio con la topologia cofinita è **sempre compatto**

**Topologia indiscreta** $\tau_{in} = \{X, \emptyset\}$. È la meno fine.

**Topologia discreta** $\tau_d = \{\mathcal{P}(X)\}$ (può essere indotta dalla distanza $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1, x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$). È la più fine.

**Topologia euclidea** $\tau_{eu} = \{X, \emptyset, B(x, r)\}$ con $x \in X, r \in \mathbb{R}^+$

**Topologia semirette aperte** $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

**Topologia intervalli semiaperti (retta di Sorgenfrey)**

**Connesso non connesso per archi** Pettine e la pulce (comb space)

**T0 non T1** Topologia delle semirette aperte, del punto particolare

**T1 non T2** Topologia cofinita

**1-numerabile (e separabile) non 2-numerabile (neanche metrizzabile)** La retta di Sorgenfrey (p.116)

**C.p.s non compatto**