Meccanica Razionale

Alessandro Sosso, Marco Ambrogio Bergamo

Anno 2023-2024

Indice

Preliminari

Definizione 0.1 (Spazio affine reale)**:** di dimensione n: A^n insieme i cui elementi si dicono punti con la seguente struttura:

- **spazio vettoriale delle traslazioni / dei vettori liberi:** V spazio vettoriale di dim. n
- **operazione differenza:** $\phi : A^n \times A^n \to V \mid (p, q) \mapsto (P - Q)$ con le proprietà:
  - per ogni coppia $(P, \boldsymbol{v})$, $P \in A^n, \boldsymbol{v} \in V$ esiste un unico punto $Q \in A \mid P - Q = \boldsymbol{v}$
  - (regola parallelogramma) $(P - Q) + (Q - R) = P - R \quad \forall p, q, R$

Definizione 0.2 (Vettore applicato)**:** la coppia $(P, \boldsymbol{v})$ dove $P \in A^n, \boldsymbol{v} \in V$

Definizione 0.3 (Spazio euclideo)**:** $(A^n, \cdot)$ dove A^n spazio affine e $\cdot$ prodotto scalare e distanza $d(p, q) = \sqrt{\|\boldsymbol{PQ}\|}$.

0.1 Operazioni tra vettori

Prodotto vettoriale $\times : V \times V \to V$ tale che $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$, direzione $\perp$ al piano dei vettori, verso (mano destra).
Gode delle proprietà:

- lineare nell'argomento di sinistra
- antisimmetrico
- non associativo

Fissato un sit. di rif. $\Sigma = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ allora

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto lo scalare $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$
Prorpietà:

- invariante per permutazione circolare dei fattori
- coincide (a meno di segno) con volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori

Doppio prodotto vettoriale $(a \times b) \times c = (a \cdot c)\, b - (b \cdot c)\, a$

Equazione vettoriale $x \times a = b$. Se $a, b \neq 0$ ha soluzione $\iff$ $b \cdot a = 0$. La soluzione generale è dunque

$$x = \frac{1}{a^2}\,(a \times b) + \lambda a \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Doppio prod. vettoriale:

$$(a \times b) \times a = (a \cdot a)b - (b \cdot a)a = a^2 b - 0 \implies b = \frac{1}{a^2}[(a \times b) \times a]$$

Sostituisco:

$$\begin{aligned} x \times a &= \frac{1}{a^2}[(a \times b) \times a] \\ x \times a - \frac{1}{a^2}[(a \times b) \times a] &= 0 \\ (x - \frac{1}{a^2}(a \times b)) \times a &= 0 \implies \text{tesi} \end{aligned}$$

1 Cinematica

Punto in moto nello spazio euclideo

1.1 Riferimenti

Definizione 1.1 (Riferimento cartesiano)**:** nello spazio affine A^n è costituito da un'**origine** $O \in A^n$ e una **base** $\{\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_n\}$ dello sp. V. Si indica con $\Sigma = \{O, \boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_n\}$

- **Punto nel riferimento cartesiano** assegnato un Σ, ogni punto $P \in A^n$ si identifica con la n-upla delle componenti del vettore $P - O$ rispetto alla base

$$\boldsymbol{r} = P - O = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- **Riferimento cartesiano ortogonale**(nel caso $n = 3$) $\Sigma = \mathscr{E} := \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, con $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$

Definizione 1.2 (Riferimento non cartesiano - coordinate curvilinee)**:** Considerare l'applicazione di cambiamento di coordinate:

$$\begin{gathered} Q \subset \mathbb{R}^n \to D \subseteq \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} x_1(q_1 \dots q_n) \\ \vdots \\ x_n(q_1 \dots q_n) \end{pmatrix} \end{gathered}$$

con le proprietà: di classe $C^1(Q)$ e la Jacobiana $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}$ di rango massimo
Chiamiamo le coordinate $x_1 \dots x_n = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$ coordinate curvilinee.

Definizione 1.3 (Base locale)**:** sono i vettori

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_n}$$

essendo J di rango massimo, i suoi vettori colonnaformano una base dello spazio V

Osservazione I vettori della base locale sono tangenti alle linee coordinate corrispondenti (tengo fisse $n-1$ coordinate e ne vario una): $\boldsymbol{u}_i$ tangente a $\boldsymbol{x}(q_i)$

*Esempio (**Coordinate polari**)* Linee coordinate sono circonferenze e assi polari

- Riferimento: $\Sigma = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Tutti i vettori colonna saranno intesi in questa base
- Coordinate: $\boldsymbol{q} = (\rho, \theta)$ $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$
- Jacobiana: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$
- Base locale:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\rho} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

  In particolare si ha

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{u}_2 = \rho\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

  NB: ho dovuto dividere $\boldsymbol{e}_\theta$ per ρ per tenerlo di modulo 1. Infatti $\boldsymbol{e}_\theta$ è il rate of change di $\boldsymbol{x}$ al variare in maniera costante di θ, $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}$ che è tanto maggiore quanto è maggiore il raggio.
  Ricordiamo che $\boldsymbol{u}_1$ è tangente a $\boldsymbol{x}(\rho)$, ovvero agli assi polari, mentre $\boldsymbol{u}_2$ è tangente a $\boldsymbol{x}(\theta)$, ovvero alle circonferenze. Quindi $\boldsymbol{e}_\rho$ è la componente radiale, mentre $\boldsymbol{e}_\theta$ è la componente tangente alle circonferenze.

*Esempio (**Coordinate sferiche**)* Coordinate sferiche Linee coordinate sono i paralleli, i meridiani e gli assi polari.

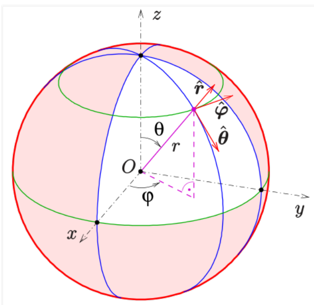


Figura 1: Coordinate sferiche

- Riferimento: $\Sigma = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Tutti i vettori colonna saranno intesi in questa base
- Coordinate: $\boldsymbol{q} = (\rho, \phi, \theta)$ $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \rho\sin\theta\cos\phi \\ \rho\sin\theta\sin\phi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix}$
  dove ϕ è la longitudine (angolo con asse x) e θ la latitudine (angolo con asse z). Ricorda $\rho\sin\theta$ proietta il punto sul piano xy.
- Jacobiana: $\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_3}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$

- Base locale: colonne della Jacobiana e normalizzo. Quindi si ha:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_\rho = \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{u}_\phi = \rho \sin\theta \boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{u}_\theta = \rho \boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

1.2 Cinematica del punto

$t \in I \subset \mathbb{R}, \quad I \to \mathscr{E}: \ t \mapsto P(t)$

Coordinate cartesiane $\Sigma = \{0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$

Posizione $\boldsymbol{r}(t) = P(t) - O = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ (sostegno $\gamma\colon [t_0, t] \to \mathbb{R}^3$)

Velocità $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$

Accelerazione $\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \ddot{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \ddot{x}_2\boldsymbol{e}_2 + \ddot{x}_3\boldsymbol{e}_3$

Per derivare un vettore si può anche scrivere come combinazione lineare della base e derivare normalmente (con linearità e derivata del prodotto)

Coordinate curvulinee

Posizione $\boldsymbol{x}((\boldsymbol{q}(t))$

Velocità (in base locale) $\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}(t))) = J(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{q}}\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = \dot{q}_1\boldsymbol{u}_1 + \dot{q}_2\boldsymbol{u}_2 + \dot{q}_3\boldsymbol{u}_3 \to$ vettore velocità nella base locale

Coordinate polari $\Sigma = \{0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta \end{cases}$, $P = P(t) \implies \rho(t), \theta(t)$

Posizione $\boldsymbol{r}(t) = \rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho$ con $\boldsymbol{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

Velocità $\boldsymbol{v} = \dot{q}_1\boldsymbol{u}_1 + \dot{q}_2\boldsymbol{u}_2 = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\boldsymbol{e}_\theta$ (come da coordinate curvilinee) oppure $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\rho\boldsymbol{e}_\rho = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$

Radiale $\dot{\rho}$

Trasversa $\rho\dot{\theta}$

Accelerazione $\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right) = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)}_{\text{Radiale}}\boldsymbol{e}_\rho + \underbrace{\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)}_{\text{Trasversa}}\boldsymbol{e}_\theta$

Osservazione $\begin{cases} \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\rho = \frac{d}{dt}(\cos\theta(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta(t)\boldsymbol{e}_2) = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_\theta = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2) = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\rho \end{cases}$ $\quad \frac{d}{d\theta}\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$

Coordinate sferiche

Posizione $\boldsymbol{r}(t) = \rho\boldsymbol{e}_\rho$

Velocità $\boldsymbol{v} = \dot{q}_1\boldsymbol{u}_1 + \dot{q}_2\boldsymbol{u}_2 + \dot{q}_3\boldsymbol{u}_3 = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \underbrace{\dot{\phi}\rho\sin\theta}_{\text{Longitudinale}}\boldsymbol{e}_\phi + \underbrace{\rho\dot{\theta}}_{\text{Latitudinale}}\boldsymbol{e}_\theta$

Coordinate cilindriche $\Sigma = \{0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

Posizione $\boldsymbol{r}(t) = \rho \cdot \boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{u}_z$ con $\boldsymbol{u}_\rho = \boldsymbol{e}_1\cos\theta + \boldsymbol{e}_2\sin\theta$

Velocità $\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{u}_z$

Accelerazione $\boldsymbol{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{u}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{u}_z$

1.3 Curve parametrizzate

Definizione 1.4 (lunghezza di una curva)**:** $l = \int_a^b \sqrt{\boldsymbol{\alpha}'(t) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)} dt = \int_a^b |\boldsymbol{\alpha}'(t)| \, dt$, con $\boldsymbol{\alpha}$ curva parametrizzata regolare.

Definizione 1.5 (parametro naturale)**:** $s(t) = \pm \int_0^t |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)| \, d\tau$, e dunque $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s)\right| = 1 \; \forall s$.

Osservazione $|\boldsymbol{s}'(t)| = |\boldsymbol{x}'(t)|$

Definizione 1.6 (triedro di Frenet)**:** $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ con

$$\boldsymbol{t}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} \qquad \boldsymbol{n}(t) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2} \qquad \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

Dove $\boldsymbol{t}(t)$ è il versore tangente, $\boldsymbol{n}(t)$ è il versore normale e $\boldsymbol{b}(t)$ è il versore binormale alla curva.

Definizione 1.7 (curvatura e raggio di curvatura)**:** Curvatura $k(s) = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}\right|$ e raggio di curvatura $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ (cerchio e piano osculatore).

Osservazione Maggiore è la curvatura $k(s)$ maggiormente curva $\boldsymbol{\alpha}$, il raggio di curvatura chiaramente diventa più piccolo.

Definizione 1.8 (torsione)**:** $\tau(s)$ tale che $\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s) = \tau(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$.

Teo. 1 (teorema di Frenet). Vale che:

(i) $\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s)$ parallelo a $\boldsymbol{n}(s)$, siccome

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \text{ ovvero } \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \perp \boldsymbol{b} \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \cdot \boldsymbol{t} = 0, \text{ ovvero } \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \perp \boldsymbol{t}$$

(ii) $\frac{d}{ds}\boldsymbol{n}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{b} - k(s)\boldsymbol{t}$

Dimostrazione (ii).

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{n}(s) = \frac{d}{ds}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{t}) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \tau(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) \times \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b} \times k(s) \cdot \boldsymbol{n}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{b} - k(s)\boldsymbol{t}$$

□

Teo. 2 (formula di Frenet - Serret). Data $\boldsymbol{r}(s)$ curva in $\mathbb{R}^3$ nel parametro naturale, valgono

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k(s)\boldsymbol{n} \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -k(s)\boldsymbol{t} - \tau(s)\boldsymbol{b} \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \tau(s)\boldsymbol{n}$$

Osservazione Velocità e accelerazione nel triedro di Frenet $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$

$$\text{Velocità} \quad \boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(s(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{t}$$

$$\text{Accelerazione} \quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{t}) = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{t}}{dt} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \overbrace{\ddot{s}\boldsymbol{t}}^{\text{acc tang}} + \overbrace{\dot{s}^2 k(s) \cdot \boldsymbol{n}}^{\text{acc norm}}$$

Osservazione Curvatura in un parametro generico λ

$$k = |\boldsymbol{t} \times k(\lambda)\boldsymbol{n}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\lambda} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\lambda^2}\right| = [\ldots] = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}$$

Esempio Curvatura di un grafico $y = f(x)$

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right)^3}$$

Esempio Triedro di Frenet per l'elica cilindrica

Esempio Triedro di Frenet per la parabola

1.4 Moti centrali

Definizione 1.9 (moto centrale)**:** Se l'accelerazione è parallela alla congiungente il punto P col un punto fisso O, ovvero $(P(t)-O)\times \boldsymbol{a}(P)=\mathbf{0}\ \forall t$ (ovvero ho un'accelerazione centripeta)

Prop. 1 . Il moto centrale è piano, in quanto

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O)\times \boldsymbol{v}\right]=\underbrace{\frac{d}{dt}(P(t)-O)\times \boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}=0}+\underbrace{(P(t)-O)\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=0}=\mathbf{0}\quad\Longrightarrow\quad (P-O)\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}$$

Definizione 1.10 (velocità areolare)**:** Presa l'area spazzata dal vettore $A=\frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta$, la velocità areolare è

$$\dot{A}=\frac{1}{2}\overset{:=c}{\boxed{\rho^2\dot{\theta}}}$$

Osservazione In coordinare polari si ha

$$\boldsymbol{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{u}_\rho+\boxed{\left(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\right)}\boldsymbol{u}_\theta \qquad\qquad a_\theta=2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)=\frac{2}{\rho}\frac{d}{dt}\dot{A}C$$

In un moto centrale dunque, siccome $a_\theta=0$, la velocità areolare è costante. Inoltre

$$|\boldsymbol{c}|=|(P-O)\times\boldsymbol{v}|=\left|\rho\boldsymbol{u}_\rho\times\left(\dot{\rho}\boldsymbol{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right)\right|=\left|\rho^2\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\rho\times\boldsymbol{u}_\theta\right|=\left|\rho^2\dot{\theta}\right|$$

Teo. 3 (formula di Binet). Per l'accelerazione radiale (diretta verso il centro) vale:

$$a_\rho=-\frac{c^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]$$

Dimostrazione. Vale che

- $a_\theta=0$
- $a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2$
- $\rho^2\dot{\theta}=c$ costante $\Longrightarrow \begin{cases}\dot{\theta}=\frac{c}{\rho^2}\\ \dot{\rho}=\frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\frac{c}{\rho^2}=-c\frac{d}{d\theta}(\frac{1}{\rho})\end{cases}$

e perciò

$$\begin{aligned}a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2&=\frac{d}{dt}\left(\overset{\dot{\rho}}{\boxed{\frac{d\rho}{d\theta}\frac{c}{\rho^2}}}\right)-\rho\left(\overset{\dot{\theta}}{\boxed{\frac{c}{\rho^2}}}\right)^2=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right)\overset{\dot{\theta}}{\boxed{\frac{c}{\rho^2}}}+\left(-\frac{c^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\right)=\\ &=\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}\right)+\left(-\frac{c^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{c^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]\end{aligned}$$

□

2 Dinamica

2.1 Postulati della Dinamica

Definizione 2.1 (punto isolato)**:** P per cui ogni altro punto che possa interagire con P è all'infinito.

Definizione 2.2 (riferimento inerziale)**:** Riferimento in cui ogni punto isolato ha accelerazione nulla in ogni istante.

Postulato I Esiste un riferimento inerziale.

Postulato II In un riferimento inerziale, per un sistema isolato di due punti P_1 e P_2, i moduli delle accelerazioni $\boldsymbol{a}(P_1)$ e $\boldsymbol{a}(P_2)$ stanno in un rapporto $\lambda_{P_1P_2}$ indipendente sia dallo stato cinematico sia dall'istante. Preso un ulteriore punto (detto campione) P_0 nelle medesime condizioni e i rapporti $\lambda_{P_1P_0}$ e $\lambda_{P_2P_0}$, vale che

$$\lambda_{P_1P_2} = \frac{\lambda_{P_1P_0}}{\lambda_{P_2P_0}}$$

Definizione 2.3 (massa inerziale)**:** Si dice massa inerziale di P la costante λ_{PP_0} rispetto a un punto campione P_0 a cui si associa massa unitaria.

Postulato III In un riferimento inerziale, le accelerazioni $\boldsymbol{a}(P_1)$ e $\boldsymbol{a}(P_2)$ hanno la direzione di $P_1 - P_2$ e versi opposti.

Postulato IV L'accelerazione prodotta su un punto materiale (P, m) da un insieme di punti $\{P_1, \ldots, P_N\}$ è la somma delle accelerazioni se avesse interagito individualmente con ognuno di essi. Quindi per un sistema materiale isolato formato da N punti materiali, rispetto ad un osservatore inerziale si ha che $\boldsymbol{a}(P_i) = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{a}_j$

Definizione 2.4 (forza)**:** $\boldsymbol{F}$ tale che $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

Principio di relatività galileiano Le leggi della meccanica newtoniana hanno la stessa forma in tutti i rifermenti inerziali.

2.2 Dinamica del punto materiale

Punto P di massa m, su cui agisce $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_P, t)$ in un sistema $\Sigma = \{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, con $\boldsymbol{r} = P - O$, $\boldsymbol{r}_Q = P - Q$, $\boldsymbol{v}_P = \dot{\boldsymbol{r}}$
e $\boldsymbol{a}_P = \ddot{\boldsymbol{r}}$

Definizione 2.5 (quantità di moto)**:** $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_P = m\dot{\boldsymbol{r}}$

Definizione 2.6 (energia cinetica)**:** $T = \frac{1}{2}m\left|\boldsymbol{v}_P\right|^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{v}_P$

Definizione 2.7 (momento angolare)**:** $\boldsymbol{L}_Q = \boldsymbol{r}_Q \times \boldsymbol{p}$ (rispetto al polo Q)

Definizione 2.8 (momento di una forza)**:** $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{r}_Q \times \boldsymbol{F}$ (rispetto al polo Q)

Definizione 2.9 (potenza di una forza)**:** $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}_P$

Definizione 2.10 (lavoro di una forza)**:** Se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ allora il lavoro è integrale (rispetto al tempo) della potenza:

$$\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} W(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t) \cdot \boldsymbol{v}(t) dt = \int_{t_0}^{t} \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{t_0}^{t} \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)), \boldsymbol{e}_{\text{tang.}} \rangle |\gamma'(t)| dt$$

Se la forza è posizionale (indip. dal tempo ovvero $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$), allora non mi interessa di quando arrivo in un certo punto dello spazio, perché la forza è ivi sempre uguale, quindi me ne frego della velocità con cui mi sposto sulla curva, prendere il parametro lunghezza d'arco (che è il più comodo) e avere velocità 1. Quindi il lavoro è esprimibile come integrale di linea (rispetto allo spazio), quindi il lavoro lungo la curva γ è il valore

$$\mathcal{L}_\gamma = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \boldsymbol{e}_{\text{tang.}} dt = \int_\gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_\gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_\gamma \omega$$

*Esempio (**Variazione del momento di una forza al variare del polo**)*

$$\boldsymbol{M}_{O'} = (P - O') \times \boldsymbol{F} = [(P - O) + (O - O')] \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{F} \times (O' - O)$$

*Esempio (**Calcolo di T in un sistema di coordinate curvilinee**)* Il vettore velocità nella base locale è $\boldsymbol{v} = \dot{q}_1 \boldsymbol{u}_1 + \dot{q}_2 \boldsymbol{u}_2 + \dot{q}_3 \boldsymbol{u}_3$ quindi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} m (\sum_{k=1}^{3} \dot{q}_k \boldsymbol{u}_k)(\sum_{n=1}^{3} \dot{q}_n \boldsymbol{u}_n) \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{n,k=1}^{3} (\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_n) \dot{q}_k \dot{q}_n \\ &= \frac{1}{2} m \, {}^t\dot{\boldsymbol{q}} A \dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

dove $A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_n)$ e $\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$

*Esempio (**Binomio di Lagrange**)* Mostrare che vale:

$$m \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} (\frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) \\ &= m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial q_k} \quad \text{(usare regola di derivaz. prod.)} \\ &= m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{r} \right) \\ &= m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \boldsymbol{r} \right) \quad \text{(Schwarz)} \\ &= m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{d}{dt} \boldsymbol{u}_k \quad (\text{def. di } \boldsymbol{u}_k = \frac{d\boldsymbol{r}}{dq_k}) \\ &= \frac{d}{dt} (m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k) - m \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k \end{aligned}$$

Allora

$$m \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k = \frac{d}{dt} (m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Inoltre

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \right) = m \dot{\boldsymbol{r}} \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{\star}{=} m \dot{\boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_k} = m \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{u}_k$$

mettendo assieme viene la tesi. In $\star$ per la proprietà della meccanica analitica (vedi dim. di equazioni di Lagrange nella prima forma) $\square$

2.2.1 Equazioni di bilancio e di conservazione

Prop. 2 (Variazione quantità di moto e momento angolare). Presa $\boldsymbol{r}(t)$ soluzione di $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_P$, valgono $(\forall Q \in \mathbb{E})$

(i) $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$

(ii) $\dot{\boldsymbol{L}}_Q = \boldsymbol{M}_Q - m\boldsymbol{v}_Q \times \boldsymbol{v}_P$ (il polo si muove di velocità $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}(Q)$)

Dimostrazione. ii) Da $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_P$ e $\frac{d}{dt}\left[(P-Q)\times\boldsymbol{p}\right] = \left[\frac{d}{dt}(P-Q)\right]\times\boldsymbol{p} + (P-Q)\times\dot{\boldsymbol{p}}$

$$\underbrace{(P-Q)\times\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{M}_Q} = (P-Q)\times\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{(P-Q)\times\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{L}_Q}\Big] - \underbrace{\left[\frac{d}{dt}(P-Q)\right]\times\boldsymbol{p}}_{(\cancel{\boldsymbol{v}_P}-\boldsymbol{v}_Q)\times m\boldsymbol{v}_P}$$

□

Osservazione In particolare, per $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$, $\dot{\boldsymbol{L}}_Q = \boldsymbol{M}_Q$

Teo. 4 (delle forze vive). Vale

$$\dot{T} = W$$

dove W è la potenza di **tutte** le forze agenti

Dimostrazione. Da $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_P = m\frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt}$

$$\dot{T} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_P\cdot\boldsymbol{v}_P}_{T}\Big) = m\frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt}\cdot\boldsymbol{v}_P = \underbrace{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_P}_{W}$$

□

Cor. 1 (Variazione energia cinetica). Da ciò ricaviamo

$$T(t) = T_0 + \int_{t_0}^{t} W(t)dt = T_0 + \mathcal{L}(t)$$

e quindi

$$\Delta T = \mathcal{L}$$

dove $\mathcal{L}$ è il lavoro svolto dalle forze dal punto iniziale al punto finale.

2.3 Forze conservative

Definizione 2.11 (Campo scalare)**:**

Definizione 2.12 (Gradiente)**:**

Gradiente in coordinate curvilinee Siano le coordinate curvilinee $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$, i versori della base locale $\boldsymbol{k}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\|\boldsymbol{u}_i\|}$, una funzione scalare $f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})) = \hat{f}(\boldsymbol{q})$. Allora

$$\frac{\partial\hat{f}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{q_i} = \boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{\nabla} f\cdot|\boldsymbol{u}_i|\boldsymbol{k}_i$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{k}_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_i\|}\frac{\partial\hat{f}}{\partial q_i}$$

che sono le componenti del gradiente nella base dei versori locali

*Esempio (**Gradiente in coordinate polari nel piano**)* $\hat{\rho} = u_\rho$, $\hat{\theta} = \frac{u_\theta}{\rho}$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial\hat{f}}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{\partial\hat{f}}{\partial\theta}\frac{1}{\rho}\hat{\theta}$$

Esempio (***Gradiente in coordinate sferiche***)

Definizione 2.13 (Campo vettoriale)**:**

Definizione 2.14 (Campo di tipo gradiente, potenziale, energia potenziale)**:** Se $\boldsymbol{F}$ è un campo gradiente allora

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} U = -\boldsymbol{\nabla} V$$

Dove

- U è detto **potenziale**
- $V = -U$ è detta **energia potenziale**

Le abbiamo definite così in modo che un lavoro positivo diminuisce l'energia potenziale di un corpo, infatti

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_\gamma \boldsymbol{\nabla} U \cdot d\boldsymbol{x} = U(b) - U(a)$$

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_\gamma -\boldsymbol{\nabla} V \cdot d\boldsymbol{x} = V(a) - V(b) \quad \text{Così } W \geq 0 \iff V(a) \geq V(b)$$

NB: Se la forza è indipendente dalla massa/carica allora potenziale ed energia potenziale coincidono a meno del segno. Se invece la forza dipende dalla massa/carica (come forza peso e forza di Coulomb), allora per potenziale si intende l'energia potenziale per unità di massa/carica, ovvero [potenziale $= \frac{\text{energia potenziale}}{\text{massa}}$]

Definizione 2.15 (Forza posizionale/campo di forza)**:**

Definizione 2.16 (campo conservativo)**:** Un campo di forze (ovvero $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$) è detto conservativo se $\exists V = V(\boldsymbol{r})$ detta energia potenziale per cui $\boldsymbol{F} = -\nabla V$. Vale dunque che $\boldsymbol{F}(P)\, dP = -dV$, ovvero la **forma del lavoro è esatta**.

Prop. 3 (Caratterizzazione campi conservativi). Campo gradiente (conservativo) $\implies$ irrotazionale (usare Schwarz). Se siamo in un semplicemente connesso vale $\iff$
Generalmente vale $\boldsymbol{F} \in C^1$. Inoltre se il dominio di $\boldsymbol{F}$ è semplicemente connesso, allora $\boldsymbol{F}$ conservativo $\iff \nabla \times \boldsymbol{F} = 0$

Dimostrazione. Di ($\implies$):
Per il Teorema di Schwartz

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \implies \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \boxed{\text{rot } \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$

□

Prop. 4 (Caratterizzazione campi irrotazionali). rot $\boldsymbol{F} = 0 \iff$ la jacobiana $J\boldsymbol{F}$ è simmetrica

Dimostrazione. Dimostriamo solo in tre dimensioni perché abbiamo definito il rotore solo qua, ma vale in generale.

$$\text{rot } \boldsymbol{F} = 0 \iff \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j = 1,2,3 \iff J\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \text{ simmetrica}$$

□

Prop. 5 (leggi di conservazione). Valgono:

(i) Se la componente lungo una direzione $\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{F}$ è nulla, allora si conserva la componente di $\boldsymbol{p}$ lungo $\boldsymbol{u}$

(ii) Se la componente lungo una direzione $\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{M}_O$ con O polo fisso è nulla, allora si conserva la componente di $\boldsymbol{L}_O$ lungo $\boldsymbol{u}$

Dimostrazione.

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=0 \implies \dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{u}=0 \implies \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u})=0 \implies \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}=\text{cost}$$

Analogo per (ii) □

Teo. 5 (teorema di conservazione dell'energia o integrale primo dell'energia)**.** Se $\boldsymbol{F}$ conservativo di potenziale V, allora l'energia totale definita come $E=T+V$ è un integrale primo del moto. Ovvero lungo ogni soluzione $\boldsymbol{x}(t)$ dell'equazione differenziale di Newton

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

si conserva la **funzione energia**

$$E(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \coloneqq T(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})+V(\boldsymbol{x})$$

NB: siamo in un sistema autonomo, ovvero V e quindi $\boldsymbol{F}$ dipendono solo dalla posizione e non dal tempo.

Dimostrazione.

$$\dot{T}=W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=-\nabla V\cdot\dot{\boldsymbol{x}}=-\frac{dV}{d\boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=-\dot{V} \qquad \dot{T}+\dot{V}=0 \qquad T+V=E$$

□

*Esempio (**Campi conservativi**)* Tre esempi:

(i) Forza peso: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ =costante

(ii) Forza elastica: $\boldsymbol{F}(x)=-kx$

(iii) Campi di forze centrali: $\boldsymbol{F}(x)=f(\rho(t))\boldsymbol{e}_\rho$
Tenendo conto che $\boldsymbol{\nabla}V=-f(\rho)e_\rho$ si ha:

$$V(\rho)=-\int_{\rho_0}^{\rho}f(s)ds$$

Prop. 6 (Caratterizzazione delle forze centrali conservative)**.** $\boldsymbol{F}$ centrale (ovvero $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{r}$) è conservativa $\iff$ ha simmetria sferica, ovvero non dipende dagli angoli

2.3.1 Equazioni di Lagrange in campo conservativo

Equazioni del moto di un punto materiale liberto soggetto all'azione di un campo conservativo usando le coordinate curvilinee. Ricordando $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$, $V=V(\boldsymbol{x})$, $\hat{V}=V(\boldsymbol{q})$

$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u}_i=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i} & \text{(Binomio lagrangiano)}\\ m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_i=-\boldsymbol{\nabla}V\cdot\boldsymbol{u}_i=-\frac{\partial\hat{V}}{\partial q_i} & \text{(proietto l'equazione di Newton sulla base locale)}\end{cases}$$

Uguagliando i due termini e portando tutto a sinistra si ha

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial\hat{V}}{\partial q_i}=0\\ \implies &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(T-\hat{V})\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}(T-\hat{V})=0\end{aligned}$$

dove ho portato $\hat{V}$ dentro la seconda derivata parziale (NB i segni) e poi ho sottratto $\hat{V}$ dentro la prima derivata parziale perché la sua derivata rispetto al tempo è nulla, essendone indipendente (quindi non altero l'eq.). Introducendo la **funzione lagrangiana** $\mathcal{L}=T-\hat{V}$ si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,2,3$$

*Esempio (**Equazioni di Lagrange in campo centrale**)* Impostazione:

- Equazione differenziale: $m\ddot{\boldsymbol{x}} = f(\rho)\boldsymbol{e}_\rho$
- Coordinate: scelgo quelle sferiche perché mettono in risalto le simmetrie della forza centrale.
$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix}$
- Posizione e velocità:
$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\phi}(\rho \sin\theta \boldsymbol{e}_\phi) + \dot{\theta}(\rho \boldsymbol{e}_\theta) \end{cases}$$
- $T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{q}}A\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \dot{\phi}^2\rho^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\rho^2)$
- $\mathcal{L} = T - \hat{V} = \frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \dot{\phi}^2\rho^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\rho^2) - \left(-\int_{\rho_0}^{\rho} f(s)ds\right)$

Equazioni di Lagrange:

1) $q_1 = \rho$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\boldsymbol{r}} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \dot{\phi}^2 m\rho\sin^2\theta + m\rho\dot{\theta}^2 + f(\rho)$$
quindi dall'equazione di Lagrange:
$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\phi}^2 m\rho\sin^2\theta + m\rho\dot{\theta}^2 + f(\rho)$$

2) $q_2 = \phi$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\sin\theta\dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$
quindi dall'equazione di Lagrange:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} := p_\phi$$
con $p_\phi = m\rho^2\sin\theta\dot{\phi}$ =costante chiamato **momento cinetico** costante

3) $q_3 = \theta$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\rho^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2$$
quindi dall'equazione di Lagrange:
$$(m\rho^2\ddot{\theta} + m2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}) - m\rho^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$

Definizione 2.17 (Momento cinetico generalizzato)**:** coniugato alla coordinata q_i è $p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{q}_i}$

Prop. 7 . Se la lagrangiana $\mathcal{L} = T - \hat{V}$ non dipende esplicitamente da una delle coordinate q_i, cioè $\frac{\partial \mathcal{L}}{\dot{q}_i} = 0$, allora durante il moto si conserva il momento cinetico generalizzato coniugato a q_i. Allora q_i si dice coordinata ciclica o ignorabile.

2.4 Moti unidimensionali

$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, e in particolare il caso in cui $f = f(x)$ (forza posizionale). Mi riduco a sistema del primo ordine:
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}f(x, y, t) \end{cases}$$
che ha come soluzioni il vettore $\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ nello spazio delle fasi e condizioni iniziali $\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

Esempio ***(oscillatore armonico)*** $f(x) = m\ddot{x} = -Kx$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \qquad \ddot{x} + \overset{\omega^2}{\boxed{\frac{K}{m}}}x = 0 \qquad x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t + \varphi)$$

Esempio ***(oscillatore smorzato)*** $m\ddot{x} = f(x) = -Kx - b\dot{x}$ (con $b > 0$)

$$E = E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = Kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}\underbrace{(Kx + m\ddot{x})}_{=-b\dot{x}} = -b\dot{x}^2 \leq 0 \text{ dissipata}$$

$$\ddot{x} + \overset{2h}{\boxed{\frac{b}{m}}}\dot{x} + \overset{\omega^2}{\boxed{\frac{K}{m}}}x = 0 \qquad \lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

- $\Delta = h^2 - \omega^2 > 0$ oscillatore armonico fortemente smorzato
$$x(t) = Ae^{\left(-h+\sqrt{\Delta}\right)t} + Be^{\left(-h-\sqrt{\Delta}\right)t}$$
- $\Delta = h^2 - \omega^2 = 0$ simile a oscillatore armonico fortemente smorzato
- $\Delta = h^2 - \omega^2 < 0$ oscillatore armonico debolmente smorzato
$$x(t) = e^{-ht}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Esempio ***(oscillatore forzato)*** $f(x) = m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + ma(t)$ (con $b > 0$)

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = a(t) \qquad \text{soluzione generale } x(t) = x_{\text{smorz}}(t) + x^*(t) \quad \text{con } \lim_{t\to+\infty} x_{\text{smorz}}(t) = 0$$

Per $a(t) = A_0\sin(\omega_0 t)$ cerco una soluzione del tipo $x^*(t) = C\sin(\omega_0 t - \gamma)$

$$\begin{aligned}
A_0\sin(\omega_0 t) &= -C\omega_0^2\sin(\omega_0 t - \gamma) + 2hC\omega_0\cos(\omega_0 t - \gamma) + C\omega^2\sin(\omega_0 t - \gamma) = \\
&= \left[-C\omega_0^2 + C\omega^2\right]\sin(\omega_0 t - \gamma) + 2hC\omega_0\cos(\omega_0 t - \gamma) \\
A_0\sin(\omega_0 t) &= A_0\sin((\omega_0 t - \gamma) + \gamma) = A_0\left[\sin(\omega_0 t - \gamma)\cos(\gamma) + \cos(\omega_0 t - \gamma)\sin(\gamma)\right]
\end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} A_0\cos(\gamma) = C\omega^2 - C\omega_0^2 \\ A_0\sin(\gamma) = 2hC\omega_0 \end{cases} \qquad C = \overset{\text{(ottengo calcolando } A_0^2\text{)}}{\frac{|A_0|}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4h^2\omega_0^2}}} \qquad \tan\gamma = \frac{2hC\omega_0}{C\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

Osservazione ***(risonanza)*** Il massimo di $C(\omega_0)$ si ha minimizzando la funzione f definita come

$$f\left(\omega_0^2\right) = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4h^2\omega_0^2 \qquad f'(z) = -2\left(\omega^2 - z\right) + 4h^2 = 0 \qquad \widetilde{\omega_0} = \sqrt{\omega^2 - 2h^2}$$

Per $h \to 0$ si ha dunque $\widetilde{\omega_0} \simeq \omega$, caso limite che prende il nome di risonanza, per cui $\lim_{h\to 0} C = +\infty$

2.5 Simmetria e leggi di conservazione

Prop. 8 . A due simmetrie corrispondono due conservazioni:

(i) Se l'energia potenziale è invariante (simmetrica) per **traslazioni** lungo un asse $\implies$ si conserva la componente della **quantità di moto** lungo quell'asse

(ii) Se l'energia potenziale è invariante per **rotazioni** rispetto all'asse u $\implies$ si conserva la componente del **momento angolare** lungo la direzione $\boldsymbol{u}$

Dimostrazione. Abbiamo:

(i) $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}V$, $\frac{\partial}{\partial x}V(x, y, z) = 0$ allora

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \implies \underbrace{m\ddot{x}}_{=\dot{p}_x} = -\boldsymbol{\nabla}V \cdot \boldsymbol{e}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \implies \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_x = m\dot{x} \text{ costante}$$

(ii) Pongo $\boldsymbol{u}$ in direzione Oz e $\hat{\boldsymbol{z}}$ versore di Oz e uso coordinate cilindriche: $V(x,y,z) = \widehat{V}(\rho,\varphi,z)$. Per ipotesi: $\frac{\partial \widehat{V}}{\partial \varphi} = 0$. Ho che

- $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_O \cdot \hat{\boldsymbol{z}}) = \dot{\boldsymbol{L}}_O \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_O \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$
- $\frac{\partial \widehat{V}}{\partial \varphi} = 0$ allora

$$0 = \boldsymbol{M}_O \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = ((P-O) \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0$$

faccio prod. vettoriale e vedo che è 0.

□

2.6 Dinamica dei sistemi di punti materiali

2.6.1 Sistemi discreti classici

Sia $S = \{(P_i, m_i),\ i = 1,\dots,n\}$ insieme di punti P_i di masse m_i per $i = 1,\dots,n$, su cui agiscono $\boldsymbol{F}_i = \overset{\text{f. esterna}}{\boldsymbol{F}_i^{(\text{e})}} + \overset{\text{f. interne}}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji}}$ in un sistema $\Sigma = \{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$.

- Forze esterne: dovute all'interazione di S con punti non appartenenti al sistema
- Forze interne: dovute all'interazione fra i punti del sistema

Definizione 2.18 (Grandezze del sistema)**:** Ridefiniamo tutte le grandezze per S:

- **Centro di massa**: $G \in \mathbb{E}$ tale che, presa $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ massa del sistema

$$\boldsymbol{R}_G := G - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

- **Quantità di moto del sistema**: $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$
- **Momento angolare del sistema**:
- **Momento risultante delle forze esterne**:

Vale che per il principio di azione reazione (2.1)

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\text{e})} + \cancel{\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{F}_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\text{e})} = \boldsymbol{F}^{(\text{e})} \tag{1}$$

mentre per quanto riguarda il momento angolare, dalla 1 si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\text{e})} + \overset{\spadesuit}{\boxed{\cancel{\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}}}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\text{e})} = \boldsymbol{M}_O^{(\text{e})}$$

$$\spadesuit \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji} = ((P_i - O) - (P_j - O)) \times \boldsymbol{F}_{ji} = (P_i - P_j) \times \boldsymbol{F}_{ji} = \boldsymbol{0}$$

in cui, sviluppando il LHS

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \frac{d}{dt}\left[\overbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i}^{\boldsymbol{L}_O}\right] - \sum_{i=1}^{n} \boxed{\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i} = \dot{\boldsymbol{L}}_O + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_O \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{M}_O^{(\text{e})}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i} = \frac{d}{dt}(P_i - O) \times \boldsymbol{p}_i = (\cancel{\boldsymbol{v}_i} - \boldsymbol{v}_O) \times \boldsymbol{p}_i = -\boldsymbol{v}_O \times \boldsymbol{p}_i \qquad (= \boldsymbol{0} \text{ per } O \text{ fisso})$$

Osservazione La 1 diventa dunque $M\ddot{\boldsymbol{R}}_G = \boldsymbol{F}^{(\text{e})}$. Se $\boldsymbol{F}^{(\text{e})} = \boldsymbol{0}$, allora si conserva costante $\boldsymbol{P} := \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = M\boldsymbol{v}_G$

Definizione 2.19 (Energia cinetica, potenza)**:** Le grandezze dinamiche di un sistema di punti sono:

- energia cinetica: $T := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i$
- potenza di una forza: $W := \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^n \left(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} + \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}\right) \cdot \boldsymbol{v}_i = W^{(\mathrm{e})} + W^{(\mathrm{i})}$
- Inoltre vale:

$$\dot{T} = W \tag{2}$$

Prop. 9 (Equazioni cardinali). Esse diventano:

$$\begin{cases} M\ddot{\boldsymbol{R}}_G = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} \\ \dot{\boldsymbol{L}}_O + \boldsymbol{v}_O \times \boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})} \end{cases}$$

Definizione 2.20 (sistema conservativo)**:** Il sistema di forze $\{(P_i, \boldsymbol{F}_i)\}_{i=1,\dots,n}$ è conservativo se $\exists V$ detta energia potenziale tale che

$$\boldsymbol{F} = -\nabla_{\boldsymbol{X}} V(\boldsymbol{X}) \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{F} = \bigoplus_{i=1,\dots,n} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{X} = \bigoplus_{i=1,\dots,n} \boldsymbol{r}_i = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \end{array}$$

Quindi per ogni punto c'è un campo conservativo esterno $V_i^{(\mathrm{e})}$ per cui $V^{(\mathrm{e})} = \sum_{i=1}^n V_i^{(\mathrm{e})}$, mentre per l'energia potenziale interna $V^{(\mathrm{i})} = \sum_{1\le i<j\le n} V_{ij}^{(\mathrm{i})}$ con $V_{ij}^{(\mathrm{i})} = V_{ij}^{(\mathrm{i})}(\boldsymbol{r}_{ij})$, ad esempio

Energia Potenziale Elastica $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$ Energia Potenziale Gravitazionale $V(r) = -\frac{k}{r}$

Prop. 10 . Nei sistemi rigidi, $W^{(i)} = 0$

Dimostrazione.

$$\boldsymbol{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{F}_{ji} \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \boldsymbol{F}_{ji} \cdot c_{ij}\frac{d}{dt}\operatorname{vers}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = \boldsymbol{0}$$

siccome $\boldsymbol{F}_{ji}$ e $\frac{d}{dt}\operatorname{vers}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ rispettivamente parallelo e perpendicolare a $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ □

Definizione 2.21 (riferimento di König)**:** Con origine nel centro di massa e in moto traslatorio rispetto al riferimento Σ.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \\ \text{di König } \Sigma' &= \{G, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}_i = P_i - O = (P_i - G) + (G - O) = \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R} \qquad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{V}$$

Teo. 6 (Di Konig). Energia cinetica e momento angolare si decompongono nel sistema di riferimento di Konig nel seguente modo:

$$\begin{cases} T = T_G + T' = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{v}_i')^2 \\ \boldsymbol{L} = L_G + L' = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' \end{cases}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

- **Energia cinetica**:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{V})^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{v}_i')^2 + \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \overset{\star}{\boxed{\cancel{\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{v}_i'} \cdot \boldsymbol{V}}} \\ &= T'\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 \end{aligned}$$

$$\star = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i' \cdot \boldsymbol{V} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \cdot \boldsymbol{V} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d}{dt}\left(\cancel{\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i'}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}\right) \cdot \boldsymbol{V} = 0$$

Il valore barrato è nullo in quanto è il vettore posizione di G in Σ', ovvero $G - G = \mathbf{0}$.
Quindi

$$T = \frac{1}{2} M \boldsymbol{v}_G^2 + T'$$

dove $T' = T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\boldsymbol{v}_i'\right)^2$ è l'energia cinetica di S rispetto al riferimento di Konig (ovvero del centro di massa)

- **Momento angolare**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{R}\right) \times m_i \left(\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{V}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{R} \times M \boldsymbol{V} + \cancel{\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{V}} + \cancel{\sum_i \boldsymbol{R} \times m_i \boldsymbol{v}_i'} \\
&= \boldsymbol{L}_G' + \boldsymbol{R} \times M \boldsymbol{V}
\end{aligned}$$

Dove i due termini sono nulli poiché $\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{R} \times m_i \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{V} \times \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'}_{=0} + \boldsymbol{R} \times \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i'}_{=0}$, per quanto visto per l'energia cinetica.

□

$$M \ddot{\boldsymbol{R}}_G = \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \qquad \underbrace{\dot{\boldsymbol{L}}_O + \boldsymbol{v}_O \times M \boldsymbol{v}_G}_{(\dot{\boldsymbol{L}}_O \text{ per } O \text{ fisso oppure } O \equiv G)} = \boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})} \qquad \dot{T} = W = W^{(\mathrm{i})} + W^{(\mathrm{e})}$$

Osservazione Se si considera ora $\boldsymbol{F}_{ji} = f_{ji}\left(r_{ji}\right) \operatorname{vers}\left(P_j - P_i\right)$, queste forze interne sono conservative di energia potenziale $V_{ji}\left(r_{ji}\right) = -\int f_{ji}\left(r_{ji}\right) dr_{ji}$, e dunque $W^{(\mathrm{i})} = -\frac{d}{dt} V^{(\mathrm{i})}$ da cui $\frac{d}{dt}\left(T + V^{(\mathrm{i})}\right) = W^{(\mathrm{e})}$

Prop. 11 (leggi di conservazione per i sistemi)**.** Valgono:

(i) Se $\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})} = \mathbf{0}$, allora $\boldsymbol{P}$ si conserva

(ii) Se $\boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})} = \mathbf{0}$ e O fisso oppure $O \equiv G$, allora $\boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})}$ si conserva

(iii) Se la forza esterna è conservativa, allora l'energia totale del sistema $E = T + V$ si conserva

2.7 Vettori applicati

Definizione 2.22 (vettore applicato)**:** $(P, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{E} \times V$, P detto punto di applicazione

Definizione 2.23 (retta di applicazione)**:** $\mathscr{R}_{\boldsymbol{v}} = \{P' \in \mathbb{E} \mid P' - P = \lambda \boldsymbol{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Definizione 2.24 (sistema di vettori applicati)**:** $\Sigma = \{(P_i, \boldsymbol{f}_i) \mid P_i \in \mathbb{E}, \boldsymbol{f}_i \in V, i = 1, \ldots, n\}$, vengono inoltre definiti

Risultante $\boldsymbol{R} = \Sigma_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i$ Momento risultante rispetto a O $\boldsymbol{M}_O = \Sigma_{i=1}^{n} \left(P_i - O\right) \times \boldsymbol{f}_i$

Definizione 2.25 (equivalenza di un sistema di vettori applicati)**:** Se hanno stessa risultante e stesso momento rispetto a un polo O arbitrario

Definizione 2.26 (Invariante scalare)**:** Definiamo $I = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}$. Questa quantità è invariante dalla scelta del polo O in quanto

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times (O' - O) \qquad \boldsymbol{M}_{O'} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} + \cancel{\boldsymbol{R} \times (O' - O) \cdot \boldsymbol{R}} \qquad \boldsymbol{M}_{O'} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}$$

Prop. 12 (asse centrale). Se $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$, esiste una retta luogo dei punti O' per cui $\boldsymbol{M}_{O'} \parallel \boldsymbol{R}$ detta asse centrale del sistema

Dimostrazione.

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \times (O' - O) = \boldsymbol{M}_O^{(\perp \boldsymbol{R})} + \boldsymbol{M}_O^{(\parallel \boldsymbol{R})} + \boldsymbol{R} \times (O' - O)$$

imponendo ora la perpendicolarità e risolvendo l'equazione vettoriale (per costruzione $\boldsymbol{M}_O^{(\perp \boldsymbol{R})} \cdot \boldsymbol{R} = 0$)

$$\boldsymbol{M}_O^{(\perp \boldsymbol{R})} + \boldsymbol{R} \times (O' - O) = \boldsymbol{0} \qquad (O' - O) \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O^{(\perp \boldsymbol{R})} \qquad (O' - O) = \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}_O^{(\perp \boldsymbol{R})}}{\boldsymbol{R}^2} + \lambda \boldsymbol{R}$$

□

Teo. 7 (riduzione di un sistema di vettori applicati). Dato un sistema di vettori applicati Σ, esso è equivalente a un altro sistema:

(i) Per $I = 0$,

  (a) se $\boldsymbol{R} \neq 0$, formato da un unico vettore applicato;

  (b) se $\boldsymbol{R} = 0$, formato da una coppia;

(ii) Per $I \neq 0$, formato da un vettore applicato e da una coppia.

Dimostrazione. Considerando (i) $I = 0$, nel caso (a) $\boldsymbol{R} \neq 0$, preso l'asse centrale del sistema u e $O \in u$, allora $\Sigma \sim \Sigma' = \{(O, \boldsymbol{R})\}$. Se invece nel caso (b) $\boldsymbol{R} = 0$, $\Sigma \sim \Sigma' = \{\text{coppia di momento } \boldsymbol{M}_O\}$.
La dimostrazione del (ii) direttamente da quest'ultima □

2.7.1 Centro - Sistema di vettori paralleli

Sia $\Sigma = \{(P_i, \boldsymbol{f}_i) \mid \boldsymbol{f}_i = \alpha_i \boldsymbol{u}\}_{i=1,\dots,n}$, varrà

$$\boldsymbol{R} = (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i)\, \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{M}_O = \Sigma_{i=1}^n (P_i - O) \times \alpha_i \boldsymbol{u} \qquad I = \overbrace{\boldsymbol{M}_O}^{\perp \boldsymbol{u}} \cdot \overbrace{\boldsymbol{R}}^{\parallel \boldsymbol{u}} = 0$$

cerco dunque l'asse centrale

$$(O' - O) = \frac{\cancel{(\Sigma_{i=1}^n \alpha_i)} \overbrace{\boldsymbol{u} \times \Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O) \times \boldsymbol{u}}^{\clubsuit}}{(\Sigma_{i=1}^n \alpha_i)^{\cancel{2}}} + \lambda (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i)\, \boldsymbol{u} = \boxed{\frac{\Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O)}{\Sigma_{i=1}^n \alpha_i}} + \tilde{\lambda} \boldsymbol{u}$$

$$\clubsuit \Rightarrow \quad (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O) \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} = (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O) \cdot \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u} - \Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O) \quad \text{(prod vett doppio)}$$

Definizione 2.27 (centro)**:** Punto C tale che $C - O = \frac{\Sigma_{i=1}^n \alpha_i (P_i - O)}{\Sigma_{i=1}^n \alpha_i}$, appartenente all'asse centrale indipendentemente da $\boldsymbol{u}$.

Osservazione Per $\Sigma = \{(P_i, m_i \boldsymbol{g}_i)\}_{i=1,\dots,n}$, questo è il baricentro $G = O + \frac{\Sigma_{i=1}^n m_i g (P_i - O)}{\Sigma_{i=1}^n m_i g} = O + \frac{\Sigma_{i=1}^n m_i (P_i - O)}{\Sigma_{i=1}^n m_i}$

2.8 Dinamica del vincolo

Definizione 2.28 (vincolo)**:** Condizione che limita (a priori) posizioni e/o velocità dei punti di un sistema, condizione espressa tramite equazioni o disequazioni tra le coordinate dei punti.

$$f(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_n, t) \leq 0 \qquad \text{ovvero} \qquad f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, t) \leq 0$$

ESTERNI Forze esterne al sistema	INTERNI Forze interne al sistema	FISSI O SCLERONOMI Non dipendenti da t	MOBILI Contenenti esplicitamente t
BILATERALI Espressi tramite uguaglianza $=$	UNILATERALI Espressi tramite disuguaglianza $\leq, \geq$	OLONOMI Esprimibili in funzione di $\boldsymbol{X}$ e t	ANOLONOMI Contenenti anche relazioni differenziali

Definizione 2.29 (sistema olonomo)**:** Sistema soggetto a soli vincoli olonomi e bilaterali, ovvero della forma $f_h(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) = 0$ con $h = 1, \ldots, m$

Definizione 2.30 (reazioni vincolari)**:** Forze tramite cui agisce il vincolo. Quindi dividiamo le forze esterne ed interne in **attive** e **vincolari**.

Definizione 2.31 (vincolo liscio o non dissipativo)**:** Vincolo olonomo la cui reazione vincolare è in ogni istante e in ogni stato cinematico del sistema **perpendicolare** alla configurazione istantanea del vincolo (perché non ho attriti).
Reazioni vincolari $\phi(t)$:

VINCOLO SINGOLO $\boldsymbol{\phi}(t) = \lambda(t)\, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{X}, t)$ VINCOLO DOPPIO $(m = 2)$ $\boldsymbol{\phi}(t) = \lambda_1(t)\, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_1(\boldsymbol{X}, t) + \lambda_2(t)\, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_2(\boldsymbol{X}, t)$

Dove i λ sono scalari e ricordare moltiplicatori di Lagrange ecc. di anal. 2, il gradiente di una $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è perpendicolare alla varietà $f = 0$

2.9 Dinamica del punto materiale vincolato

Punto materiale (P, m) soggetto a vincoli olonomi, bilaterali e lisci, e a una forza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ in un sistema $\Sigma = \{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. L'equazione fondamentale diventa

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boxed{\overset{\text{reazione vincolare}}{\boldsymbol{\phi}}}$$

Prop. 13 . La reazione vincolare di un vincolo fisso e non dissipativo, non compie lavoro

Dimostrazione. $W^{(\text{vinc.})} = W_\phi = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ (la velocità è sempre perpendicolare al vincolo, ovvero alla varietà) □

Cor. 2 . Per punto materiale soggetto a forze conservative e a vincoli fissi non dissipativi si conserva

$$E = T + V$$

Dimostrazione. $\dot{T} = W = \cancel{W^{(\text{vinc.})}} + W^{(\text{attiva})} = 0 - \dot{V} = 0$ □

Esercizio. Punto materiale vincolato a una curva fissa e liscia ($\boldsymbol{\phi}(t) \cdot \boldsymbol{t}$ nullo perché vincolo liscio)

$$m\left(\overbrace{\ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}k(\boldsymbol{s})\,\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{a}}\right) = \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t) + \boldsymbol{\phi}(t)$$

$$\overset{\text{equazioni intrinseche}}{\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t) \cdot \boldsymbol{t} + \cancel{\boldsymbol{\phi}(t) \cdot \boldsymbol{t}} = m\ddot{s} \\ \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t) \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \boldsymbol{n} = m\dot{s}k(s) \\ \boldsymbol{F}(s, \dot{s}, t) \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \boldsymbol{b} = 0 \end{cases}}}$$

Le incognite sono $s(t)$, $\phi_{\boldsymbol{n}}$ e $\phi_{\boldsymbol{b}}$. Dalla prima equazione con le condizioni $s(0) = s_0$ e $\dot{s}(0) = \dot{s_0}$ ottengo s (equazione differenziale del moto, indipendente da $\boldsymbol{\phi}$)

Esercizio. Punto materiale vincolato a una superficie

3 Lagrange

Sistema S di N punti materiali, di vettore rappresentativo $\boldsymbol{X} = \bigoplus_{i=1,\dots,N} \boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) = (X_1, \dots, X_{3N})$ (è un vettore), con i vincoli $f_j(\boldsymbol{X}, t) = 0$ con $j = 1, \dots, m$ e $f_j \in C^1$ e rango della Jacobiana massimo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{3N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_{3N}} \end{pmatrix}$$

Un singolo vincolo agisce in modo differente su ogni particella, infatti dipende da $\boldsymbol{X}$, quindi impone un percorso diverso per ogni particella. Più vincoli abbassano i gradi di libertà per ogni particella, in particolare **ogni vincolo toglie un grado di libertà**.

Definizione 3.1 (Spazio delle configurazioni)**:** $\mathcal{C}(t) = \left\{\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid f_j(\boldsymbol{X}, t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m\right\}$, ha dimensione $n = 3N - m$

Proporietà dei vincoli Richiediamo che il sistema di vincoli

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{X}, t) = 0 \\ \vdots & \qquad m < 3N \\ f_m(\boldsymbol{X}, t) = 0 \end{cases}$$

abbia le seguenti proprietà:

(i) Il sistema ammette soluzione in $t \in [t_0, t_1]$ per "condizione di compatibilità" (esiste almeno una configurazione ammissibile)

(ii) Regolarità: le f_j sono di classe C^1 (o C^2??? boh)

(iii) Indipendenza: la Jacobiana ha rango massimo, ovvero i vettori $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_1, \dots, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_m$ sono indipententi.

$\implies$ queste tre proprietà garantiscono l'applicabilità del **teorema della funzione implicita** (di Dini): fissati $t_0 \in I$, $\boldsymbol{X}_0 \in \mathcal{C}(t_0)$ esiste un intorno $B(\boldsymbol{X}_0)$ e in intorno di t_0 dove le coordinate dei punti del sistema $(\boldsymbol{x}_i)$ sono esprimibili mediante un insieme di coordinate indipendenti $q_1, \dots, q_n$ con $n = 3N - m$, ovvero:

Definizione 3.2 (coordinate lagrangiane)**:** Lo stato del sistema può essere espresso attraverso $n = 3N - m$ parametri $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(q_1, \dots, q_n, t)$, detti coordinate lagrangiane. n si dice **grado di libertà**.
Le coordinate lagr. ci dicono dove ci troviamo sulla varietà, poi questa può cambiare nel tempo (se i vincoli dipendono dal tempo) ma la posizione sulla varietà rimane fissa se le coord. lagr. stanno ferme. Quindi le coord. lagr. sono la posizione relativa alla varietà delle configurazioni.

Osservazione Per il Dini esiste applicazione

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1(q_1 \dots q_n, t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N(q_1 \dots q_n, t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}(q_1 \dots q_n, t)$$

Osservazione $\mathcal{C}(t)$ è una varietà differenziabile. La **base locale** è data da

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial q_j} \qquad j = 1, \dots, n$$

Definizione 3.3 (Spazio normale)**:** Lo spazio normale a $\mathcal{C}(t)$ in $\boldsymbol{X}$ al tempo t è indicato con $\mathcal{N}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{C}(t)$ ed è lo spazio m-dimensionale generato dai vettori $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_1, \dots, \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}} f_m$

Definizione 3.4 (Spazio tangente)**:** Lo spazio tangente a $\mathcal{C}(t)$ in $\boldsymbol{X}$ al tempo t è indicato con $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{C}(t)$ ed è lo spazio n-dimensionale generato dai vettori $\boldsymbol{u}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial q_1}, \dots, \boldsymbol{u}_n = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial q_n}$

Rappresentazione lagrangiana del moto

$$(t_0, t_1) \longrightarrow \mathcal{C}(t) \qquad\qquad t \longmapsto (q_1(t), \dots, q_n(t))$$

$q \coloneqq (q_1, \dots, q_n)$ è detto punto rappresentativo di S nella varietà $\mathcal{C}$.

3.0.1 Velocità generalizzate e spazio delle fasi

Definizione 3.5 (atto di moto)**:** $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{X}} = \bigoplus_{i=1,\dots,N} \boldsymbol{v}_i$. È detto **possibile** se in un dato istante e in una data configurazione è compatibile con i vincoli imposti.

Definizione 3.6 (Velocità virtuale e di trascinamento)**:** Derivando rispetto a t ed esplicitando le coordinate lagrangiane, si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{X}\left(\overbrace{q_1,\dots,q_n}^{\boldsymbol{q}}, t\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{X}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \overset{\boldsymbol{V}'}{\boxed{\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial q_j}}_{=\boldsymbol{u}_j}\dot{q}_j}} + \overset{\boldsymbol{V}^*}{\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}}} = \overset{\text{velocità virtuale}}{\boldsymbol{V}'} + \overset{\text{velocità di trascinamento}}{\boldsymbol{V}^*}$$

La velocità virtuale è la velocità relativa alla varietà. Quindi la velocità virtuale è

$$\boldsymbol{V}' = \dot{q}_1\boldsymbol{u}_1 + \dots \dot{q}_n\boldsymbol{u}_n$$

ovvero il vettore $\dot{\boldsymbol{q}}$, considerato nella base locale (quindi le sue componenti scalano la base locale).

Osservazione Se $\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$ (vincolo fisso, faccio variare solo il tempo ma non le coordinate $\boldsymbol{q}$) vale $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{V}'$ che appartiene allo spazio tangente alla varietà $\mathcal{C}$ (essendo combinazione lineare della base locale).

Osservazione Facendo derivata "totale" rispetto al tempo dei vincoli:

$$\frac{d}{dt}f_j = \nabla_{\boldsymbol{X}} f_j\left(\boldsymbol{X}, t\right)\cdot\dot{\boldsymbol{X}} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla_{\boldsymbol{X}} f_j\left(\boldsymbol{X}, t\right)\cdot\dot{\boldsymbol{X}} = -\frac{\partial f_j}{\partial t}$$

Notiamo che:

- $-\frac{\partial f_j}{\partial t}$ è la proiezione di $\dot{\boldsymbol{X}}$ sullo spazio normale $\mathcal{T}_{\boldsymbol{X}}\mathcal{C}(t)$
- Se i vincoli sono fissi ($-\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0$) allora $\nabla_{\boldsymbol{X}} f_j\left(\boldsymbol{X}, t\right)\cdot\dot{\boldsymbol{X}} = 0$, ovvero di nuovo la velocità $\dot{\boldsymbol{X}}$ è perpendicolare ai gradienti, ovvero appartiene allo spazio tangente.

Definizione 3.7 (spazio delle fasi)**:** Spazio dove varia $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$

3.1 Equazioni di Lagrange - dinamica dei sistemi olonomi non dissipativi

Per un sistema olonomo (vincoli non dipendono dalle velocità e hanno l'=) formato da N punti, di grado di liberà n con coordinate lagrangiane $q_1, \dots, q_n$

$$S = \{(P_i, m_i) \quad i = 1, \dots, N\} \qquad f_j(\boldsymbol{X}, t) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Energia cinetica di un sistema olonomo Considerando $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1, \dots, q_n, t\right)$ e quindi $\boldsymbol{v}_i = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i \qquad \text{l'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche di ogni punto}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\sum_{j=1}^{n}\overset{=\boldsymbol{u}_j}{\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\overset{=\boldsymbol{u}_k}{\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}}}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right) = \qquad \text{vedo le } \boldsymbol{v}_i \text{ come } \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}(t)) \text{ (ovvero nella base locale)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)}_{:=a_{ij}}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)}_{:=b_j}\dot{q}_j + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2}_{:=c} =$$

$$= \overset{T_2}{\boxed{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k}} + \overset{T_1}{\boxed{\sum_{j=1}^{n} b_j\dot{q}_j}} + \overset{T_0}{\boxed{\frac{1}{2}c}}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}A\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} + c$$

$$= T_2 + T_1 + T_0$$

dove A coincide con la **matrice hessiana** $\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}$ e

- $a_{jk}(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$
- $b_j(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$
- $c(q_1, \ldots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2$

In particolare, per vincoli fissi $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$ e dunque $T = T_2$ (poiché $T_1 = T_0 = 0$)

Osservazione NB: se siamo in vincoli fissi (ovvero $T = T_2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} A \dot{\boldsymbol{q}}$) abbiamo che possiamo calcolare $|\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$ come $|\dot{\boldsymbol{q}}| = \dot{q}_1^2 + \cdots + \dot{q}_n^2 \iff A$ è uguale all'identità $\iff$ stiamo esprimendo le velocità non come combinazione della base locale, ma come combinazione della base locale ortonormale (ovvero fatta di vettori perpendicolari e unitari). Ad esempio, in coordinate polari, se esprimiamo $\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{u}_\rho + \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$ allora non possiamo fare $|\boldsymbol{v}|^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2$ infatti

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &= (\dot{\rho}\boldsymbol{u}_\rho + \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) \cdot (\dot{\rho}\boldsymbol{u}_\rho + \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) \\ &= \dot{\rho}^2 \overbrace{(\boldsymbol{u}_\rho \cdot \boldsymbol{u}_\rho)}^{=|\boldsymbol{u}_\rho|^2=1} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \overbrace{(\boldsymbol{u}_\rho \cdot \boldsymbol{u}_\theta)}^{=0\ (\perp)} + \dot{\theta}^2 \overbrace{(\boldsymbol{u}_\theta \cdot \boldsymbol{u}_\theta)}^{=|\boldsymbol{u}_\theta|^2=\rho^2} \\ &= \dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2 \rho^2 \end{aligned}$$

se invece la esprimiamo nella base ortonormale $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta)$ allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} &= (\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\boldsymbol{e}_\theta) \cdot (\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\theta}\rho\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \dot{\rho}^2 \overbrace{(\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho)}^{=|\boldsymbol{e}_\rho|^2=1} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\rho \overbrace{(\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\theta)}^{=0\ (\perp)} + \dot{\theta}^2\rho^2 \overbrace{(\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta)}^{=|\boldsymbol{e}_\theta|^2=1} \\ &= \dot{\rho}^2 + (\dot{\theta}\rho)^2 \end{aligned}$$

cioè come somma del quadrato delle componenti.

Definizione 3.8 (sistema olonomo non dissipativo)**:** Un sistema olonomo è detto a vincoli non dissipativi/ideali se la potenza virtuale delle reazioni vincolari è nulla in ogni istante e in ogni stato del sistema

$$W' = W'_{\text{attiva}} + W'_{\text{vinc}}$$

se non dissipativo:

$$W'_{\text{vinc}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}'_i = 0 \qquad \text{ovvero} \quad W'_{\text{vinc}} = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{V}' = 0 \quad \text{con } \boldsymbol{\phi} = \bigoplus_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i$$

Osservazione Un sistema è detto a vincoli non dissipativi $\iff$ il vincolo risultante è non dissipativo. Inoltre esso è normale alla varietà in ogni istante e in ogni stato del sistema.

Calcolo della potenza virtuale:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \qquad \text{eq. diff. di Newton}$$

$$\overset{W'}{\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{v}_i'}} = \overset{W'_{\text{att.}}}{\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i'}} + \overset{W'_{\text{vinc.}}=0}{\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \cdot \boldsymbol{v}_i'}} \qquad \text{proietto su spazio tang. e vincolo ideale}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{:=Q_j} \dot{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j$$

Definizione 3.9 (componente lagrangiana)**:** è la j-esima componente lagrangiana della sollecitazione attiva (forza attiva) $\boldsymbol{F} = \bigoplus \boldsymbol{F}_i$ del sistema:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial q_j}$$

Se $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ allora $\boldsymbol{Q}$ è la forza attiva relativa alla varietà (nella base locale) e

$$W'_{\text{attiva}} = \boldsymbol{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

ovvero la potenza relativa alla varietà

Teo. 8 (equazioni di Lagrange nella prima forma)**.** È una riformulazione dell'eq. differenziale di Newton:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}} T\right) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}} T = \boldsymbol{Q}$$

È eq diff. di Newton relativa alla varietà (nella base locale)

Dimostrazione. Considerando per ogni punto P_i l'equazione $m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\phi}_i$ e moltiplicando ambo i membri per la velocità virtuale $\dot{\boldsymbol{r}}_i' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i' = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i' + \cancel{\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i'} \qquad \text{ho proiett. su spazio tang.}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \overset{\spadesuit}{\boxed{m_i \boldsymbol{a}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}} \dot{q}_j = \overset{\sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j}{\boxed{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \left[\frac{d}{dt} \underbrace{\boxed{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}}_{=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}} - \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}}}_{=\frac{\partial T}{\partial q_j}} - Q_j \right] = 0$$

dove

$$\spadesuit \to \quad m_i \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{\heartsuit}{\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{\diamondsuit}{\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}} \right] \qquad \text{derivata del prodotto al contrario}$$

$$= m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \qquad \text{dove } T_i \text{ è l'energia cinetica del punto } i\text{-esimo}$$

Prop. mecc. anal.:

$$\heartsuit \to \boxed{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}} \qquad \diamondsuit \to \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \overset{\text{Schwartz}}{=} \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j}\dot{\boldsymbol{r}}_i}$$

Dall'ultima uguaglianza a zero, eliminando $\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j$ in virtù dell'indipendenza dei $\dot{q}_j$ e usando la definizione 2 per T, la tesi, infatti

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] \qquad \text{derivata prodotto}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \right] \qquad \text{derivata prodotto}$$

□

Definizione 3.10 (lagrangiana)**:** $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = T - V = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, t)$

Teo. 9 (equazioni di Lagrange nella seconda forma). Per $\boldsymbol{F}_i = -\nabla V_i$ conservative, $V := \sum_{i=1}^{N} V_i$, si ha

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad j = 1, \ldots, n \qquad \longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}} V$$

e le equazioni di Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, n \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}} \mathcal{L}) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}} \mathcal{L} = \boldsymbol{0}$$

È eq diff. di Newton relativa alla varietà quando la forza è conservativa.

Dimostrazione. Dato che

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_i} V_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{N} V_i = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

dove negli utimi due passaggi penso intenda che $\frac{\partial V}{\partial q_j} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_i} V_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ con solita regola di prodotto della composta (ma non si dovrebbe usare derivata totale $\frac{d}{dq_j}$???).

Dalle equazioni di Lagrange nella prima forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \boxed{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0$$

da cui la tesi ($\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ siccome prendiamo un potenziale che non dipende dal tempo $V = V(\boldsymbol{r}_i) = V(q_1, \ldots, q_n)$). □

3.2 Leggi di conservazione per sistemi lagrangiani (2ª forma)

Se vale l'eq. di Lagrange nella seconda forma allora:

- Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \implies q_j$ si dice coordinata ciclica
- Se $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \implies$ si conserva il momento cinetico $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$
- Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies$ durante il moto si conserva la funzione Hamiltoniana. Infatti vale $\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ (vedi dopo)

Definizione 3.11 (legge di conservazione o integrale primo di moto)**:** $f\left(X_i, \dot{X}_i, t\right) = \text{cost}$

Definizione 3.12 (coordinata ciclica)**:** q_j che non compare esplicitamente in $\mathcal{L}$ (ovvero $\mathcal{L}$ indipendente da q_j, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$)

Definizione 3.13 (momento cinetico)**:** $p_j \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$. momento cinetico coniugato alla coordinata q_j. Il momento cinetico è $\boldsymbol{p} \coloneqq (p_1, \ldots, p_n) = \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}}\mathcal{L}$

Prop. 14 (conservazione del momento cinetico). Per q_j coordinata ciclica, $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \text{cost}$, ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \implies p_j \text{ costante}$$

Dimostrazione. Dalla equazioni di Lagrange nella seconda forma □

Definizione 3.14 (funzione Hamiltoniana)**:** La funzione

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} \qquad j = 1, \ldots, n$$

ovvero

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}}\mathcal{L} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{L} = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{L}$$

Prop. 15 . Per sistemi lagrangiani della seconda forma vale sempre

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Dimostrazione. Calcoliamo $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}} - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

Allora

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overbrace{\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}}^{=0 \text{ (eq. di lagrange)}}\right)\dot{q}_i = 0$$

□

Cor. 3 (integrale di Jacobi/Integrale generalizzato dell'energia). Per $\mathcal{L}$ non dipendente esplicitamente dal tempo t, si conseva la funzione hamiltoniana, ovvero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{H} \text{ costante}$$

Prop. 16 . Se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ e i vincoli sono scleronomi (non dipendenti da t), l'integrale di Jacobi/Integrale generalizzato dell'energia e il teorema di conservazione dell'energia o integrale primo dell'energia coincidono, ovvero

$$\text{In generale: } \mathcal{H} = T_2 - T_0 + V$$
$$\text{allora per vincoli fissi: } \mathcal{H} = T + V$$

Dimostrazione. Ricordando

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \\ \mathcal{L} = T - V = (T_2 + T_1 + T_0) - V(\boldsymbol{q}, t) \end{cases}$$

allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial (T_2 + T_1 + T_0)}{\partial \dot{q}_j} - \overbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}}^{=0} \right) \dot{q}_j - (T_2 + T_1 + T_0 - V) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - (T_2 + T_1 + T_0 - V) \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(\boldsymbol{q}, t) \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \dot{q}_k) \dot{q}_j = 2T_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(\boldsymbol{q}, t) \dot{q}_j \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} (b_j(\boldsymbol{q}, t)) \dot{q}_j = T_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 0$$

Allora

$$\mathcal{H} = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V) = T_2 - T_0 + V$$

□

Osservazione ***(Applicazione teorema di Eulero)*** Ricordiamo

- **Funzione omogenea di grado** k: $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con C cono, è omogenea di grado $k \in \mathbb{R}$ se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$.
  Ad esempio un polinomio con termini di solo grado n è omogeneo con $k = n$

- **Teorema di Eulero**:

$$f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ omogenea di grado } k \iff \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i}_{\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x}} = k f(x), \quad \forall x \in A$$

Dimostrazione. Applicando la sostituzione $\boldsymbol{x}' = \alpha \boldsymbol{x}$ si ha

$$
\begin{aligned}
f(x_1',\dots,x_n') &= \alpha^k f(x_1,\dots,x_n) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
\frac{d}{d\alpha} f(x_1',\dots,x_n') &= k\alpha^{k-1} f(x_1,\dots,x_n) \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}')}{\partial x_i'} \overset{=x_i}{\boxed{\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}}} &= k\alpha^{k-1} f(x_1,\dots,x_n) \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} x_i &= k f(x_1,\dots,x_n) \qquad \text{prendendo in particolare } \alpha = 1 \text{, e quindi } x_i' = x
\end{aligned}
$$

□

Ma allora abbiamo che se la lagrangiana è omogenea nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$ di grado k (ad esempio se $\mathcal{L} = T_2$ allora lo è di grado 2) abbiamo

$$
\mathcal{H}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \boxed{k\mathcal{L} - \mathcal{L}}
$$

3.3 Esistenza e Unicità soluzione

Prop. 17 . T_2 è una forma quadratica definita positiva

Dimostrazione. Suddividendo la velocità $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_i^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$ si ottiene $T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{v}_i')^2 > 0$ se $\dot{\boldsymbol{q}} \neq \boldsymbol{0}$ □

Teo. 10 (esistenza e unicità della soluzione delle equazioni di Lagrange). Date le condizioni iniziali $\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}_0$ e $\dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{w}_0$, le equazioni di Lagrange nella prima forma ammettono una e una sola soluzione

Dimostrazione. Da $T = T_2 + T_1 + T_0$ si ricava $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_k + b_j(\boldsymbol{q}, t)$, da cui

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ddot{q}_k + \mathcal{G}_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)
$$

dove ho chiamato $\mathcal{G}_j$ il termine con le derivate prime. Ma allora ricordando che vale

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad \text{(eq. Lagr. prima forma)}
$$

ho che

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ddot{q}_k = \mathcal{X}_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)
$$

con $\mathcal{X}_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} - \mathcal{G}_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, ovvero

$$
A(\boldsymbol{q}, t)\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)
$$

che è risolubile nelle $\ddot{q}_k$ con soluzione unica (date le condizioni iniziali) in quanto $A = (a_{jk})$ definita positiva (a che serve??) e invertibile, quindi posso esplicitare per $\ddot{\boldsymbol{q}}$ e ottengo

$$
\ddot{\boldsymbol{q}} = \tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)
$$

con $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = A^{-1}(\boldsymbol{q}, t)\boldsymbol{\mathcal{X}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. È in forma normale quindi ho esistenza e unicità (evidentemente è lipschitz. ma anche no boh) □

3.4 Leggi di conservazione per coordinate di traslazione e di rotazione

Definizione 3.15 (coordinata di traslazione)**:** q_j tale che $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \boldsymbol{n}$ $\forall i = 1, \dots, N$, con $\boldsymbol{n}$ versore.
Ad esempio ρ nelle coordinate polari.

Prop. 18 . Se q_j coordinata di traslazione, il momento cinetico ad essa coniugato p_j è la componente lungo $\boldsymbol{n}$ della quantità di moto del sistema. Se inoltre q_j coordinata ciclica, la 14 coincide con la conservazione della quantità di moto lungo $\boldsymbol{n}$ (5.i)

Dimostrazione.

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \right) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$$

□

Definizione 3.16 (coordinata di rotazione)**:** q_j tale che $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i$ $\forall i = 1, \ldots, N$, con $\boldsymbol{n}$ versore detto asse di rotazione.
Ad esempio θ nelle coordinate polari.

Prop. 19 . Se q_j coordinata di traslazione, il momento cinetico ad essa coniugato p_j è la componente lungo $\boldsymbol{n}$ del momento angolare del sistema. Se inoltre q_j coordinata ciclica, la 14 coincide con la conservazione del momento angolare lungo $\boldsymbol{n}$ (5.ii)

Dimostrazione.

$$p_j \overset{\text{come prima}}{=} [\ldots] = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} (m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot (m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) \overset{\heartsuit}{=} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}_O$$

dove in $\heartsuit$ abbiamo usato proprietà prodotto misto □

3.5 Invarianza delle equazioni di Lagrange

- Dato un sistema lagrangiano, sia $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ una parametrizzazione di $\mathcal{C}(t)$ e $l(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ la sua lagrangiana.
- Sia $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ una nuova parametrizzazione ottenuta una trasformazione del tipo

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{Q}, t) \qquad \det\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\right) \neq 0$$

  Dal cambiamento risulta:

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_k}{\partial t} = \dot{q}_k \left(Q, \dot{Q}, t\right)$$

- Sia

$$\mathcal{L}\left(Q, \dot{Q}, t\right) = l\left(q\,(Q,t)\,, \dot{q}\left(Q, \dot{Q}, t\right), t\right)$$

Teo. 11 (invarianza in forma delle equazioni di Lagrange)**.** La lagrangiana $\mathcal{L}\left(Q, \dot{Q}, t\right)$ soddisfa le eq. di Lagrange $\iff$ $l(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ le soddisfa, ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial l}{\partial q_j} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Dimostrazione. Uguale per entrambi i versi. Per calcolo diretto, assumendo $\mathcal{L}\left(Q, \dot{Q}, t\right) = l\left(q\,(Q,t)\,, \dot{q}\left(Q, \dot{Q}, t\right), t\right)$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \overset{\spadesuit}{\boxed{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_j}}} \qquad \spadesuit \rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_j}} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}$$

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial l}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \overset{\clubsuit}{\boxed{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j}}} \right) \qquad \clubsuit \rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_j}} = \frac{\partial}{\partial Q_j}\left(\frac{dq_k}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\right)$$

Quindi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial l}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \boxed{\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \right)} \right)$$

- $$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \right)}$$

Mettendo tutto assieme abbiamo la lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial l}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \right) = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial l}{\partial q_k} \right]}^{\text{vecchie equazioni di Lagrange} = 0} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}$$

□

Teo. 12 . Presa $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t) = c\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q,t)}{dt}$ con $c \neq 0$ e $F = F(q, t)$, la equazioni di Lagrange hanno la stessa forma per $\mathcal{L}$ e $\widetilde{\mathcal{L}}$, ovvero conducono alle medesime equazioni del moto (vale anche il viceversa).

Dimostrazione. Preso $\mathcal{L}^* = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\frac{\partial F}{\partial q_k}} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}$, la tesi segue da $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathcal{L}^*$$

□

3.6 Teorema della variazione dell'energia totale

$Q_i = Q_i^{(\text{pot})} + \widetilde{Q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \widetilde{Q_i}$ suddivisione in parte derivante da forze conservative e non, ovvero

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{(\text{pot})} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}} V + \widetilde{\boldsymbol{Q}}$$

Teo. 13 (bilancio energetico)**.**

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_i}}_{(1)} + \underbrace{\boxed{\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}}}_{(2)} + \underbrace{\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}}}_{(3)}$$

Dimostrazione. Scomponendo $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{d}{dt}V(\boldsymbol{q}, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \overset{\diamondsuit}{\boxed{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k}} + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right]}^{\text{eq di Lagrange} = -Q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \left[T_2 + T_1 + T_0\right]}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial q_i} - \widetilde{Q_i} \right] \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= \frac{d}{dt} \overset{\heartsuit}{\boxed{[2T_2 + T_1]}} + \overset{\clubsuit}{\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_k}} - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}\left[T_1 + 2T_0\right] + \boxed{\frac{dV}{dt}} - \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_k + \frac{\partial T}{\partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left[T_1 + 2T_0\right] - \boxed{\frac{dV}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_k - \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{ho portato il } 2\frac{dT}{dt} \text{ a sx e cambiato i segni}
\end{aligned}$$

$$\diamondsuit = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k \qquad \heartsuit = 2T_2 + 2T_1 + 2T_0 - T_1 - 2T_0 = 2T - T_1 - 2T_0 \qquad \clubsuit = \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t}$$

Allora

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[T_1 + 2T_0] - \boxed{\cancel{\frac{dV}{dt}}} + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q}_k - \frac{\partial T}{\partial t} + \cancel{\frac{dV}{dt}} = \text{tesi}$$

□

Sistema conservativo	Sistema scleronomo	$V = V(q)$ indipendente da t
$\widetilde{Q}_i = 0 \quad (1) = 0$	$T = T_2, \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2) = 0$	$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (3) = 0$

Definizione 3.17 (forze giroscopiche e dissipative)**:** Forze non potenziali per cui $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q} = 0$ (giroscopiche) o $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i \dot{q} \leq 0$ (dissipative)

Definizione 3.18 (potenziali generalizzati)**:** $V = V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ dipendono anche dalle velocità.

3.7 Teorema di Emmy Noether

Definizione 3.19 (trasformazione ammissibile)**:** Trasformazione invertibile $\widetilde{q} = \widetilde{q}(q)$ che lascia invariata in forma la lagrangiana, ovvero $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}) = \mathcal{L}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}})$

Teo. 14 (teorema di Emmy Noether)**.** Data $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ lagrangiana e $\widetilde{q} = \widetilde{q}(q, \alpha)$ trasformazione per $\alpha \in \Omega$ aperto di $\mathbb{R}$, tali per cui

(i) $J_q \widetilde{q}(q, \alpha)$ non singolare $\forall \alpha \implies$ posso invertire e ho $q = q(\widetilde{q}, \alpha)$ e $\dot{q} = \dot{q}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}, \alpha)$

(ii) $\widetilde{q}(q, \alpha_0) = q$ per qualche $\alpha_0 \in \mathbb{R}$

(iii) $\widetilde{\mathcal{L}}\left(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}, \alpha\right) = \mathcal{L}\left(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}\right) = \mathcal{L}\left(q(\widetilde{q}, \alpha), \dot{q}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}, \alpha)\right)$, ovvero la trasformazione è ammissibile $\forall \alpha$

allora è un integrale primo di moto

$$I(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \left[\boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{q}}}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \frac{\partial \widetilde{q}_k}{\partial \alpha}(\boldsymbol{q}, \alpha)\right]_{\alpha=\alpha_0}$$

Dimostrazione. Per la (iii) vale $\frac{d}{d\alpha}\mathcal{L} = 0$ ($\mathcal{L}$ è indipendente esplicitamente da α) da cui

$$0 = \frac{d}{d\alpha}\mathcal{L}\left(q(\widetilde{q}, \alpha), \dot{q}(\widetilde{q}, \dot{\widetilde{q}}, \alpha)\right) = \overset{\spadesuit}{\boxed{\nabla_q \mathcal{L}}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \nabla_{\dot{q}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \qquad \spadesuit = \frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{q}} \mathcal{L}) \text{ (eq Lagrange)}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{q}} \mathcal{L}\right) \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \nabla_{\dot{q}} \mathcal{L} \cdot \overset{\clubsuit}{\boxed{\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d}{dt}q\right)}} \qquad \clubsuit \overset{\text{Schwartz}}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}q\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{q}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) \quad \text{def. di derivata del prodotto al contrario}$$

Allora

$$\nabla_{\dot{q}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \text{cost}$$

Ma dato che

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(\widetilde{q}(q, \alpha), \alpha)$$

$$\implies \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{q}(t) = \frac{d}{d\alpha}\boldsymbol{q}(\widetilde{q}(q, \alpha), \alpha)$$

$$0 = \frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \alpha} \implies \left.\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \overset{\text{è identità}}{\boxed{-\left.\cancel{\frac{\partial q}{\partial \widetilde{q}}}\right|_{\alpha=\alpha_0}}} \left.\frac{\partial \widetilde{q}}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}$$

Quindi vale:

$$\nabla_{\dot{q}}\mathcal{L}\cdot\boxed{\left.\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}}=-\nabla_{\dot{q}}\mathcal{L}\cdot\left.\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0}=\text{cost}$$

□

Osservazione ***(rotazioni)*** Se le rotazioni lungo un asse sono una famiglia di trasformazioni ammissibile, allora l'integrale di Emmy Noether equivale alla conservazione del momento angolare lungo l'asse di rotazione

Osservazione ***(coordinata ciclica)*** Nel caso di coordinate cicliche, le traslazioni di quella coordinata sono trasformazioni ammissibile, e l'integrale di Emmy Noether equivale alla conservazione del momento cinetico. Sia q_i ciclica $\iff \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0$. Scelgo come trasformazione

$$\tilde{q}_k=q_k\ \forall k\neq i,\quad \tilde{q}_i=q_i+\alpha$$

Quindi si ha $\frac{\partial\tilde{q}_k}{\partial\alpha}=0$ per $k\neq i$ e $=1$ per $k=i$ e per teorema di Noether:

$$I(q,\dot{q})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\cdot\left.\frac{\partial\widetilde{q_k}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}=p_i=\text{ costante}$$

come già avevamo verificato

3.8 Forma lagrangiana del Principio di Hamilton

Sia S un sistema meccanico a vincoli olonomi, bilateri e non dissipativi, soggetto asollecitazione attiva conservativa. Sia $\mathcal{L}(q_1\dots q_n,\dot{q}_1\dots\dot{q}_n,t):\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}\in C^2$ lagrangiana del sistema di grado di libertà n, consideriamo i moti nell'intervallo $[t_0,t_1]$ per cui $q(t_0)=q_0$ e $q(t_1)=q_1$,

Definizione 3.20 (Classe dei moti variati sincroni)**:** È l'insieme

$$\Omega:=\left\{\boldsymbol{q}(t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{q}\in C^2([t_0,t_1]),\ \begin{matrix}\boldsymbol{q}(t_0)=\boldsymbol{q}_0\\ \boldsymbol{q}(t_1)=\boldsymbol{q}_1\end{matrix}\right\}$$

Definizione 3.21 (Insieme delle perturbazioni)**:** È l'insieme

$$\mathcal{Z}:=\left\{\boldsymbol{\eta}(t)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\mid\boldsymbol{\eta}\in C^2([t_0,t_1]),\ \begin{matrix}\boldsymbol{\eta}(t_0)=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\eta}(t_1)=\mathbf{0}\end{matrix}\right\}$$

Consideriamo, fissati $\boldsymbol{\eta}(t)\in\mathcal{Z}$, $\boldsymbol{q}^*(t)\in\Omega$, l'insieme:

$$\Omega_{\boldsymbol{\eta}}:=\{\boldsymbol{q}(t)\in\Omega\mid q_k(t)=q_k^*(t)+\alpha_k\eta_k(t),\alpha\in\mathbb{R}^n\}$$

Definizione 3.22 (Moto naturale)**:** Si chiama moto naturale del sistema ogni soluzione delle eq. di Lagrange

Definizione 3.23 (Azione hamiltoniana)**:** Il funzionale

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}(t))=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}(\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t),t)\,dt$$

Sia

$$\mathcal{A}_\alpha(\boldsymbol{q}(t))=\mathcal{A}|_{\Omega_\eta}$$

che è funzione di $\boldsymbol{\alpha}$ per ogni fissato $\boldsymbol{\eta}(t)$

Definizione 3.24 (azione stazionaria)**:** $\mathcal{A}(q)$ è stazionaria su Ω per $q=q^*$ se la sua restrizione $\mathcal{A}_\alpha=\mathcal{A}|_{\Omega_\eta}$ ad $\Omega_{\boldsymbol{\eta}}$ è stazionaria in $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ $\forall\boldsymbol{\eta}(t)\in\mathcal{Z}$, ovvero

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{A}_\alpha|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}=0\quad\forall\boldsymbol{\eta}(t)\in\mathcal{Z}$$

Principio di Hamilton Il moto naturale di un sistema olonomo non dissipativo è l'unico che rende stazionaria l'Azione hamiltoniana nella classe dei moti variati sincroni con le stesse condizioni in t_0 e t_1. Il principio deriva immediatamente dal

Teo. 15 (condizione necessaria e sufficiente per la stazionarietà dell'azione). Le componenti q_k^* di $\boldsymbol{q}^*$ sono soluzioni del sistema

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{q}) \text{ stazionaria in } \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^* \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

Dimostrazione. In generale vale: siccome $\mathcal{A}(q)|_{q\in\Omega_\eta} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\overbrace{q_k^* + \alpha_k \eta_k}^{q_k}, \overbrace{\dot{q}_k^* + \alpha_k \dot{\eta}_k}^{\dot{q}_k}, t)dt$ e ricordando che $\eta_k(t_0) = \eta_k(t_1) = 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha_k}\right]_{q^*} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\eta_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\dot{\eta}_k\right]_{q^*} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\eta_k\right]_{q^*} dt + \cancel{\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\eta_k\right|_{t_0}^{t_1}} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\eta_k\right]_{q^*} dt \qquad \text{ho int. per parti} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]_{q^*} \eta_k dt
\end{aligned}$$

dove ho barrato quel termine poiché $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_0) = \mathbf{0}$. Quindi vale

$$\boxed{\left.\frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \alpha_k}\right|_{\boldsymbol{\alpha}=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^*} \eta_k dt}$$

$\Longleftarrow$ Se valgono le eq. di lagrange la tesi è ovvia per quanto appena visto.

$\Longrightarrow$ Supponendo $\left.\frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1} \phi_k \cdot \eta_k dt = 0$ con $\phi_k := \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]_{q^*}$ **continua** e η_k arbitraria. Se per assurdo $\exists \bar{t} \in (t_0, t_1)$ per cui $\phi_k(\bar{t}) \neq 0$, esisterebbe un intorno di $\bar{t}$ per cui $\phi_k(\bar{t}) \neq 0$, ma allora posso prendere η_k a supporto costante nell'intorno e di segno costante per cui $\int_{t_0}^{t_1} \phi_k \cdot \eta_k dt \neq 0$, $\lightning$

$\square$

3.9 Sistemi conservativi di grado $n = 1$

S sistema olonomo, a vincoli non dissipativi e scleronomi (fissi), soggetto a sollecitazione attiva conservativa, con grado di libertà $n = 1$

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q) \qquad V = V(q) \qquad T = T_2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \quad \text{con } a(q) = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dq}\right)^2 \qquad E = T + V$$

quindi

$$\dot{q}^2 = \frac{2(E - V(q))}{a(q)} := \phi(q) \qquad \dot{q} = \sqrt{\phi(q)} \qquad \int_{t_0=0}^{t} dt = \int_{q_0}^{q} \frac{1}{\sqrt{\phi(q)}}dq \qquad t = F(q) \qquad q = F^{-1}(t)$$

3.9.1 Studio qualitativo

Vale

- $T \geq 0$ ($T = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$), essendo T forma quadratica definita positiva
- $V \leq E$ ($V = E \Leftrightarrow \dot{q} = 0$)

Definizione 3.25 (punti barriera)**:** $q \in \mathbb{R}$ tale che $V(q) = E \iff \dot{q} = 0$

Prop. 20 . Preso q_0 punto di partenza tra due punti barriera q_1 e q_2 arriva in q_2 in un tempo finito $\Longleftrightarrow V'(q_2) \neq 0$

Dimostrazione. Arriva nel tempo $t = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{a(q)}{2(E-V(q))}} dq$, sviluppo con Taylor, converge $\Leftrightarrow$ la prima derivata che non si annulla è V'. □

Osservazione In q_2 si ha $\ddot{q} = -\frac{V'(q_2)}{a(q)}$

Definizione 3.26 (punto di inversione)**:** zero semplice $\overline{q}$ di $\phi(q)$

Teo. 16 . Il moto del sistema tra due punti di inversione q_1 e q_2 è periodico di periodo $\tau = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\phi(q)}}$

Definizione 3.27 (limite asintotico)**:** zero multiplo $\overline{q}$ di $\phi(q)$

4 Meccanica Celeste

4.1 Problema dei due corpi

4.1.1 Impostazione Newtoniana

Due corpi che interagiscono tra loro con forza di mutua attrazione (o repulsione) agente lungo la congiungente $\overline{P_1P_2}$ e dipendente solo dal modulo $P_1 - P_2$.

- $S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$
- $\Sigma = \{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$
- $\boldsymbol{r}_1 = P_1 - O,\ \boldsymbol{r}_2 = P_2 - O,\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = P_2 - P_1$
- $\boldsymbol{F} := \boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} = k\,(P_1 - P_2)$
- Posizione del centro di massa G: $G - O = \boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$

Applichiamo Newton in Σ:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\boldsymbol{F} \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F} \end{cases}$$

(i) (conservazione quantità di moto del sistema) Sommando membro a membro

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= 0 \\ (m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{(m_1+m_2)} &= 0 \\ \ddot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{0} \\ \implies \overbrace{\dot{\boldsymbol{R}}}^{\text{quantità di moto}} &= \text{cost} \end{aligned}$$

(ii) Invece moltiplicando la prima eq. per m_2 e la seconda per m_1 abbiamo:

$$\begin{cases} m_2m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -m_2\boldsymbol{F} \\ m_1m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = m_1\boldsymbol{F} \end{cases}$$

e sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned} m_1m_2(\overbrace{\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1}^{\ddot{\boldsymbol{r}}}) &= \boldsymbol{F}(m_1+m_2) \\ \overbrace{\boxed{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}}^{:=\mu}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{F} \\ \mu\ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{F} \end{aligned}$$

Dove $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ è chiamata **massa ridotta**

Inoltre $\boldsymbol{F} = f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ è centrale e conservativa $V = -\int f(r)\,dr$.

4.1.2 Impostazione Lagrangiana

$n = 6$, sistema olonomo senza vincolo, F conservativa (uso seconda forma), scelta migliore delle coordinate per evidenziare le conservazioni è $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{r}$, ovvero

- $(q_1, q_2, q_3) = (x_G, y_G, z_G) = \boldsymbol{R}$
- $(q_4, q_5, q_6) = \boldsymbol{r} = P_2 - P_1$

Calcoliamo la **lagrangiana**: $\mathcal{L} = T - V$

Potenziale essendo $\boldsymbol{F} = f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}} \implies \boldsymbol{F}$ centrale $\implies \boldsymbol{F}$ conservativa con potenziale $V(|\boldsymbol{r}|)$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \overset{T\text{ nel riferimento di König}}{\boxed{\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}'}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}'}_2^2}} = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

dove

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}'_1 = P_1 - G = (P_1 - O) - (G - O) = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\boldsymbol{r}_1 - m_1\boldsymbol{r}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{m_1+m_2} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \end{cases}$$

Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = T - V &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r) \end{aligned}$$

Integrali primi Vediamo che $\mathcal{L}$ non dipende dalla posizione del centro di massa $\boldsymbol{R}$, ma solo dalla sua velocità, quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_G} = 0$, dunque le coordinate $\boldsymbol{R} = (x_G, y_G, z_G)$ sono cicliche (infatti sono di traslazione). Sono dunque integrali primi

- $\begin{cases} p_{x_G} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x_G}} = M\dot{x_G} = c_1 \\ p_{y_G} = c_2 \\ p_{z_G} = c_3 \end{cases} \implies$ si conserva $\boldsymbol{p}_G = M\dot{\boldsymbol{x}}_G = \boldsymbol{c}$ cost. (momento angolare del centro di massa)
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies \mathcal{H} = T + V = E =$ cost. (conservazione energia meccanica)

Riduzione dei gradi di libertà Vediamo che

$$\dot{\boldsymbol{x}}_G = \frac{\boldsymbol{c}}{M} \quad \text{(cost.)}$$

quindi integrando è noto il moto del centro di massa. Allora studiamo direttamente il moto dei punti rispetto al centro di massa (ovvero $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$). Suddividiamo

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2}_{:=\widetilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)}_{:=\widetilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{r})}$$

Considerando solo $\widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(r)$, con dunque $n = 3$, vediamo che è la lagrangiana di un punto di massa μ e posizione $\boldsymbol{r}$ soggetto a un campo di forza centrale.
Essendo la forza centrale: $\boldsymbol{L}_G =$ cost, il moto è piano $\Pi := \{P \mid \boldsymbol{L}_G \cdot (P - G) = 0\}$ e posso ancora scendere $n = 2$. Scrivo allora in coordinate polari

$$\widetilde{\mathcal{L}}(r, \theta) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

Integrali primi Sono allora integrali primi (di cui il primo è la seconda legge di Keplero)

- (Conservazione momento angolare) - Prima legge di Keplero

$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} = 0 \implies p_\theta = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = \mu\overset{2\dot{A}(t)}{\boxed{r^2(t)\dot{\theta}(t)}} = \frac{\boldsymbol{L}_G}{\text{vers}\,(\boldsymbol{L}_G)} = l \text{ cost} \qquad \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = -V'(\boldsymbol{r})$$

  Allora la velocità areolare $\dot{A}(t) = 2\frac{l}{\mu} =$ cost., ovvero "il raggio vettore spazza aree uguali in uguali intervalli di tempo"
  Notiamo che l è il momento angolare in quanto $\boldsymbol{r} \times \mu\dot{\boldsymbol{r}} = \mu(r\boldsymbol{e}_r \times \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}$

- (Conservazione energia meccanica)

$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E \text{ cost.}$$

Imposto il problema nelle due incognite con le due leggi di conservazione trovate:

$$\begin{cases} \mu r^2(t)\dot{\theta}(t) = l \\ \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \end{cases}$$

dalla prima eq. esplicito la $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ e la inserisco nella seconda trovando,

$$\underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{T_r} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + V(r)}_{V_e(r)} = E$$

$$T_r(r) + V_e(r) = E$$

riducendomi ad una sola incognita, dove

- $T_r(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ è l'**energia cinetica radiale**
- $V_e(r) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}}_{\text{termine correttivo}} + V(r)$ è il **potenziale efficace**

Definizione 4.1 (Potenziale efficace)**:** Il potenziale efficace relativo a un potenziale centrale e un corpo di massa m che ne risente è la quantità

$$V_e(r) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2}}_{\text{termine correttivo}} + V(r)$$

dove

- $l = |\boldsymbol{L}_P|$ il momento angolare del corpo rispetto al centro del potenziale
- Nel caso di **due corpi che si attraggono** con forza sempre diretta come $P_1 - P_2$ al posto di m bisogna usare la massa ridotta μ, e l rappresenta $|\boldsymbol{L_G}|$ il momento angolare del centro di massa rispetto al centro

Quando si studiano problemi con forza centrale conservativa e un corpo è più comodo studiare, al posto del potenziale, il potenziale efficace, poiché mette in risalto più questioni (vedi "caso kepleriano").
Ovvero il termine correttivo è parte dell'energia cinetica (quella rotazionale) che però dipende solo da r e non da $\dot{r}$, quindi la mettiamo nel potenziale (separandola dall' energia cinetica che dipende da $\dot{r}$), che dipende anch'esso solo da r.

Definizione 4.2 (potenziali kepleriani)**:** $V_e(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

*Esempio (**Caso degenere**)* Se $l = 0$ si ha $V_e = V$ e il moto è effettivamente unidimensionale infatti

$$l = 0 \implies \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} = 0 \implies \theta(t) = \text{costante}$$

Per ogni potenziale centrale bisogna studiare separatamente questo caso

*Esempio (**Caso kepleriano**)*

$$V(r) = -\frac{k}{r} \implies F = -V' = -\frac{k}{r^2}$$
$$V_e(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Studio di V_e:

- Limiti: $\begin{cases} \lim_{r\to 0^+} V_e = +\infty \\ \lim_{r\to +\infty} V_e = 0 \end{cases}$
- Derivata: $V_e' = \frac{\mu rk - l^2}{\mu r^3}$

- Punto di minimo: $\begin{cases} V_e' = 0 \iff r = \overline{r} = \frac{l^2}{\mu k} \\ V_e(\overline{r}) = \frac{-\mu k^2}{2l^2} < 0 \end{cases}$
  Il termine correttivo (se $l \neq 0$) garantisce che c'è sempre r_{min}, ovvero i pianeti non cadono uno sull'altro

Quindi si ha:

- $E \geq 0 \implies$ orbite non confinate
- $V(\overline{r}) < E < 0 \implies r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$ ovvero orbita limitata/confinata
- $E = V(\overline{r}) \implies r(t) = \overline{r}\ \forall t$ con $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu \overline{r}^2}$ =costante $\implies$ orbita è una circonferenza e il moto è uniforme

Esempio (***Potenziale armonico***)

4.2 Equazione differenziale dell'orbita

Formule di lagrange Prendiamo la lagrangiana del sistema già trovata:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(r, \theta) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

da cui ricaviamo le due equazioni di Lagrange

- Rispetto a θ

$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2(t)\dot{\theta}(t)$$

  Da cui ricaviamo:

$$\frac{d}{dt}\left[\mu r^2(t)\dot{\theta}(t)\right] = 0 \implies \boxed{\mu r^2(t)\dot{\theta}(t) = l \quad \text{cost.}}$$

- Rispetto a r:

$$\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial r} = \mu r\dot{\theta}^2 - V'(r) \qquad \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}$$

  Da cui ricaviamo

$$\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = \underbrace{-V'(\boldsymbol{r})}_{:=f(r)} \implies \boxed{\mu\underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}_{=a_r} = f(r)}$$

Usando binet per accelerazione radiale Inoltre abbiamo:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{\mu r^2} = -\frac{l}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{l}{\mu}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{l}{\mu r^2} = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Ricordiamo la formula di Binet:

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

Dove $c = r^2\dot{\theta} = \frac{l}{\mu}$ in questo caso

$$f(r) = \mu\left[-\frac{l^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \cancel{r}\frac{l^2}{\mu^2 r^{\cancel{4}3}}\right] \overset{\text{formula di Binet}}{=} -\frac{l^2}{\mu r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] \implies \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}f(r)$$

Caso kepleriano Per V kepleriano, $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, preso $w = \frac{1}{r}$ vale

$$w'' + w = \frac{\mu k}{l^2}$$

ovvero $w = A\cos(\theta + \theta_0) + \frac{\mu k}{l^2}$, ponendo gli assi tali che $\theta_0 = 0$ si ottiene

$$w = \frac{1}{r} = A\cos(\theta) + \frac{\mu k}{l^2} = \frac{l^2 A\cos(\theta) + \mu k}{l^2} = \frac{\overbrace{\boxed{\frac{l^2 A}{\mu k}}}^{:=\varepsilon}\cos(\theta) + 1}{1}\,\frac{\mu k}{l^2}$$

Allora:

$$r = \overset{:=p}{\boxed{\frac{l^2}{\mu k}}} \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} = \boxed{\frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}} \qquad \text{con} \begin{cases} p = \frac{l^2}{\mu k} \\ \varepsilon = \frac{Al^2}{\mu k} \end{cases}$$

Perielio: $r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$
Afelio: $r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$

che è l'equazione di una conica in coordinate polari rispetto a un fuoco.

Definizione 4.3 (eccentricità)**:** $\varepsilon = \frac{Al^2}{\mu k}$ con: $\varepsilon = 0$ circonferenza, $0 < \varepsilon < 1$ ellisse, $\varepsilon = 1$ parabola, $\varepsilon > 1$ iperbole

In coordinate cartesiane $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} &\implies r + r\varepsilon\cos\theta = p \\ &\implies r = p - (r\varepsilon\cos\theta) \\ &\implies r^2 = p^2 + \varepsilon^2 (r\cos\theta)^2 - 2p\varepsilon (r\cos\theta) \\ &\implies x^2 + y^2 = p^2 + \varepsilon^2 x^2 - 2p\varepsilon x \\ &\implies (1-\varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2 \\ &\implies x^2 + \frac{2p\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)}x + \frac{y^2}{(1-\varepsilon^2)} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)} \\ &\implies [\dots] \text{ completo il quadrato e faccio conti} \end{aligned}$$

$$a = \frac{p}{1+\varepsilon^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad \underset{\text{centro}}{D} = \left(-\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}, 0\right) \qquad c = \sqrt{a^2-b^2} = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

è dunque verificata la prima legge di Keplero

Prop. 21 (Energia totale per V_e kepleriano)**.** Vale:

$$E = \frac{\mu k^2}{2l^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

Dimostrazione. □

r_{min} c'è sempre (mentre r_{max} no), e $V_e(r_{min}) = E$ (altrimenti nel grafico del potenziale efficace il corpo potrebbe andare ancora più a sinistra e non sarebbe r_{min})

$$\begin{aligned} E = V_e(r)|_{r=r_{\min}} &= -\frac{k}{r_{\min}} + \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} \\ &= \frac{1}{2r_{min}}\left(\frac{l^2}{\mu r_{min}} - 2k\right) \\ &= [\dots] \qquad \text{ricordare } r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} \text{ e } p = \frac{l^2}{\mu k} \\ &= \frac{\mu k^2}{2l^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Definizione 4.4 (vettore di Laplace Runge Lenz)**:** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - mk\frac{\boldsymbol{r}}{r}$

Osservazione Il vettore di Laplace Runge Lenz si conserva per il problema di Keplero $(\dot{\boldsymbol{A}} = 0)$, siccome

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) &= \dot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{L} + \cancel{\boldsymbol{p}\times\dot{\boldsymbol{L}}} = f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times[\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}] = -f(r)\left[(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] = -mf(r)\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\dot{\boldsymbol{r}} - \left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\boldsymbol{r}\right] \\ &= -mf(r)\left[r\dot{\boldsymbol{r}} - (\dot{r}\cdot r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] = -mf(r)r^2\left[\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} - \dot{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right] = -mf(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \end{aligned}$$

e per $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ vale $\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - mk\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right] = 0$

Teo. 17 (terza legge di Keplero). $\frac{a^3}{T^2} = \widetilde{k}$

Dimostrazione. $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{l}{\mu}$, l'area totale spazzata in un periodo è dunque $\frac{1}{2}\frac{l}{\mu}T = \pi ab$, da cui

$$T^2 = \frac{4\mu^2}{l^2}\pi^2 a^2 b^2 \qquad b^2 = \frac{l^2}{\mu k}a \qquad T^2 = 4\pi^2\frac{\mu}{k}a^3$$

□

Osservazione Per $k = Gm_P m_S$ vale che $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_P} + \frac{1}{m_S}$, e se $m_S \gg m_P$ vale $\frac{a^3}{T^2} = \frac{m_S G}{4\pi^2}$ indipendente dalla massa del pianeta

4.3 Orbite in un campo centrale

Integrali primi sono $mr^2\dot{\theta} = l$ e $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = E$

Se $l = 0$ orbite radiali in quanto $\dot{\theta} = 0$, e dunque $V_e(r) = V(r)$ (se $V(r) = -\frac{k}{r}$ velocità di fuga $v_f = \sqrt{\frac{2k}{mr_0}}$). Se invece $l \neq 0$ consideriamo orbite limitate $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$

Osservazione In generale l'orbita non è chiusa, siccome

$$\Delta\theta = \int_0^T \dot{\theta}(t)\,dt = \int_0^T \frac{l}{mr^2}dt = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l}{mr^2}\frac{2\cdot dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_e(r)\right)}}$$

Si chiude $\iff$ $\Delta\theta$ è frazione razionale di 2π

Teo. 18 (teorema di Bertrand). Tutte le orbite limitate sono chiuse solo in campi di forze centrali kepleriani $V(r) = -\frac{k}{r}$ e armonici $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$

Dimostrazione caso armonico. Sostituendo $V_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$ con $\frac{l}{m} = 2\dot{A}$ e $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \int_{r_{\mathrm{m}}}^{r_{\mathrm{M}}} \frac{\frac{2\dot{A}}{r^2}\cdot dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{\left(2\dot{A}\right)^2}{2r^2}m\right)}} = \int_{r_{\mathrm{m}}}^{r_{\mathrm{M}}} \frac{\frac{2\dot{A}}{r^2}\cdot dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 r^2 - \frac{\left(2\dot{A}\right)^2}{r^2}}} = \int_{z_{\mathrm{M}}=\frac{2\dot{A}}{r_{\mathrm{M}}}}^{z_{\mathrm{m}}=\frac{2\dot{A}}{r_{\mathrm{m}}}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2\frac{\left(2\dot{A}\right)^2}{z^2} - z^2}}$$

$$= \int_{z_{\mathrm{M}}}^{z_{\mathrm{m}}} \frac{z\cdot dz}{\sqrt{\frac{2E}{m}z^2 - \omega^2\left(2\dot{A}\right)^2 - z^4}} = \int_{u_{\mathrm{M}}=2\left(\frac{\dot{A}}{r_{\mathrm{M}}}\right)^2}^{u_{\mathrm{m}}=2\left(\frac{\dot{A}}{r_{\mathrm{m}}}\right)^2} \frac{du}{\sqrt{\frac{4E}{m}u - \omega^2\left(2\dot{A}\right)^2 - 4u^2}} = \pi$$

avendo sostituito $z = \frac{2\dot{A}}{r}$ $\left(dz = -\frac{2\dot{A}}{r^2}\cdot dr\right)$ e $u = \frac{z^2}{2}$ $(du = z\cdot dz)$ e ricordando che

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}du = \pi \qquad \left(\text{dimostrabile sostituendo } \sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)} = t\,(u-\alpha)\right)$$

□

Osservazione Per orbite circolari $r(t) = \overline{r}$ valgono $\left.\frac{\partial V_e(r)}{\partial r}\right|_{r=\overline{r}} = 0$ e $\left.V_e(r)\right|_{r=\overline{r}} = E$, la prima dall'equazione di Lagrange nelle r, la seconda dall'integrale dell'energia

$$0 = m\ddot{r}|_{r=\overline{r}} = mr\dot{\theta}^2 - V'(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}V_e(r)$$

5 Meccanica dei Sistemi Rigidi

Definizione 5.1 (sistema rigido)**:** $S = \{(P_i, m_i),\ i = 1, \dots, N\}$, $N \geq 2$ insieme di punti soggetti a vincolo di rigidità: $\forall i, j = 1 \dots N, i \neq j : \quad |P_i - P_j| = d_{ij} > 0$ costante

Osservazione Ogni sistema rigido con almeno tre punti non allineati ha 6 gradi di libertà: 3 di traslazione e 3 di rotazione. Si può vedere in due modi

- Posizionando il primo punto ha 3 gradi di libertà, per posizionare il secondo punto ha 2 gradi di libertà (si può muovere solo sulla superficie della sfera di centro il primo punto e raggio la distanza tra i due), il terzo punto ha un solo grado di libertà (si può muovere solo sulla circonferenza di intersezione delle due sfere di centro i due punti precedenti e raggio la distanza del terzo punto dai primi due), quindi $3 + 2 + 1 = 6$
- $n = 3N - [3 + 3(N - 3)] = 6$. Ovvero 3N sono le incognite totali a cui tolgo tutte le relazioni, ovvero i primi tre punti (3N) e le relazioni che hanno tutti gli altri punti con questi tre (3(N-3)), tre relazioni ciascuno (che ha con ciascuno dei primi tre punti) per tutti i punti tranne i primi tre.

Definizione 5.2 (terna solidale)**:** $\Sigma' = \{O, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ solidale al corpo rigido

Osservazione Nota la posizione di 3 punti non allineati, possiamo introdurre un sistema di riferimento Σ': $O' = P_1, O'x' = P_1P_2, O'y' = P_1P_3, O'z'$ perpendicolare ai primi due.

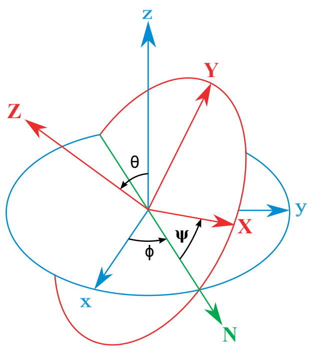
Osservazione Il problema si riduce a descrivere il moto di Σ' rispetto a Σ: (q_1, q_2, q_3) individuano O' e (q_4, q_5, q_6) individuano l'orientamento istantaneo.

Prop. 22 . Lo spazio delle configurazioni per un sistema rigido con un punto fisso (quindi sono ammesse solo rotazione e $n = 3$) si identifica con il gruppo $SO(3)$

Definizione 5.3 (Linea dei nodi)**:** Retta di intersezione tra i piani Ox_1x_2 e $Ox'_1x'_2$. $\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$

Definizione 5.4 (angoli di Eulero)**:** $\Sigma = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, $\Sigma' = \{O, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$, $A\colon \Sigma \to \Sigma'$ rotazione che manda Σ in Σ' è scrivibile come $A = A_{\boldsymbol{e}'_3}(\varphi)\, A_{\boldsymbol{n}}(\theta)\, A_{\boldsymbol{e}_3}(\varphi)$, con
Angolo di:

Precessione	angolo φ che la linea dei nodi forma con asse Ox_1
Nutazione	angolo θ tra Ox'_3 e Ox_3 $\boldsymbol{e}_3$ con $\boldsymbol{e}'_3$
Rotazione Propria	angolo ψ tra asse solidale Ox'_1 e linea dei nodi



Definizione 5.5 (Atto di moto)**:** L'atto di moto di un sistema rigido a un istante t è il campo delle velocità istantanee, ovvero è $P(t) \mapsto \boldsymbol{v}(P(t))$

Teo. 19 (teorema di Poisson). Per ogni atto di moto rigido $\exists! \omega = \omega(t)$ tale che $\forall \boldsymbol{e}$ versore solidale a Σ' con $O' \equiv O$, vale

$$\frac{d[\boldsymbol{e}]_\Sigma}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{e}]_{\Sigma'}$$

Quindi in generale vale che $\forall \boldsymbol{W}$ vettore qualunque di modulo costante solidale con Σ', vale

$$\frac{d[\boldsymbol{W}]_\Sigma}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{W}]_{\Sigma'}$$

Dimostrazione. Presa $\Sigma' = \{O, \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ terna ortonormale solidale con S, dimostrando esistenza e unicità

! Se esistesse anche $\boldsymbol{\omega}'$, allora $0 = \frac{d\boldsymbol{e}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{e}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \times \boldsymbol{e} \iff \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$ in quanto il prod. vettoriale non può annullarsi per parallelismo, dato che deve valere $\forall \boldsymbol{e}$

$\exists$ Vale che $\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}'_i\right) \cdot \boldsymbol{e}'_i = 0$, quindi possiamo supporre che esistono tre vettori $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ tali che

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{e}'_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Ricordiamo l'equazione vettoriale: $x \times a = b \implies x = \frac{(a \times b)}{a^2} + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, quindi $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \lambda |\boldsymbol{a}|^2$ è arbitraria (infatti conta l'area del parallelogramma compreso, che può essere storto quanto voglio a parità di area). Quindi le componenti $\boldsymbol{\omega}_i \cdot \boldsymbol{e}'_i$ sono arbitrarie. Impongo allora

$$\begin{cases} \overset{\text{posso sceglierla}}{\boxed{\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1}} := \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_1 & \text{stesse comp. su } \boldsymbol{e}'_1 \\ \overset{\text{posso sceglierla}}{\boxed{\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{e}'_2}} := \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 & \text{stesse comp. su } \boldsymbol{e}'_2 \end{cases}$$

e da $\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = 0$ ottengo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2) = \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}'_1\right) \cdot \boldsymbol{e}'_2 + \boldsymbol{e}'_1 \cdot \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}'_2\right) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{e}'_1) \cdot \boldsymbol{e}'_2 + \boldsymbol{e}'_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{e}'_2) \\ &\overset{\star}{=} \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \underbrace{(\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2)}_{=\boldsymbol{e}'_3} - \underbrace{(\boldsymbol{e}'_1 \times \boldsymbol{e}'_2)}_{=\boldsymbol{e}'_3} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \qquad \text{prod. misto} \end{aligned}$$

$$\implies \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}'_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 \implies \boxed{\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}}$$

dove in $\star$ prodotto misto è invariante per permutazione circolare dei fattori e prodotto vettoriale è antisimmetrio.
Per l'arbitrarietà della componente imponendo $\boldsymbol{\omega}_3 \cdot \boldsymbol{e}'_3 := \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}'_3$, analogamente da $\boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{e}'_3 = 0$ si ricava che $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_3$ e $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_3$, da cui $\boxed{\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}}$
Per vedere che vale

$$\frac{d[\boldsymbol{W}]_{\Sigma'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{W}]_{\Sigma'}$$

basta notare che

- $\frac{d[\boldsymbol{W}]_{\Sigma'}}{dt} = |\boldsymbol{W}| \frac{d[\boldsymbol{e}]_{\Sigma'}}{dt}$ (linearità derivata)
- $\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{W}]_{\Sigma'} = |\boldsymbol{W}|(\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{e}]_{\Sigma'})$ (bilinearità prodotto vettoriale)

□

Lemma 1 (Spazio tangente delle matrici ortogonali). Si ha che lo spazio tangente a quello delle matrici ortogonali 3×3, ovvero $SO(3)$, in corrispondenza della matrice identità è lo spazio delle matrici 3×3 antisimmetriche, denominato con $so(3)$.

$$\mathcal{T}_I SO(3) = so(3)$$

Dimostrazione. `https://math.stackexchange.com/questions/2778210/tangent-space-of-orthogonal-matrix`

□

Osservazione Il teorema di Poisson è conseguenza del teorema appena citato, in quanto

- $\frac{de}{dt} = \dot{A}(0)\boldsymbol{e}$ con $A(0) = I$ e $A \in SO(3)$ quindi $\dot{A}(0) \in \mathcal{T}_I SO(3)$
- $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e} = \Omega \boldsymbol{e}$ con $\Omega \in so(3)$ poiché le matrici antisimm. 3×3 rappresentano prodotto vettoriale

Cor. 4 (formula fondamentale della cinematica rigida). Il campo di velocità di un moto rigido è

$$\boldsymbol{v}\,(P) = \boldsymbol{v}\,(O') + \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$$

con O' punto prescelto **solidale** e $\boldsymbol{\omega}$ detta velocità di rotazione

Dimostrazione. Applicare teo. Poisson a $\boldsymbol{W} := (P - O')$ solidale col corpo e di modulo costante:

$$\frac{d}{dt}(P - O') = \boldsymbol{\omega} \times (P - O')$$

e notiamo che $\frac{d}{dt}(P - O') = \frac{d}{dt}[(P - O) - (O' - O)] = \boldsymbol{v}\,(P) - \boldsymbol{v}\,(O')$

□

Definizione 5.6 (atto di moto traslatorio e moto traslatorio)**:** Per $\boldsymbol{\omega}\,(t) = \boldsymbol{0}$ all'istante t, l'atto di moto è detto traslatorio. Se è traslatorio $\forall t$, il moto è traslatorio/traslazione.

Definizione 5.7 (atto di moto rotatorio e moto rotatorio)**:** Se $\exists O$ tale che $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$ all'istante t, l'atto di moto è detto rotatorio. Se è rotatorio di centro O $\forall t$, il moto è una rotatorio/rotazione.

Prop. 23 (asse istantaneo di moto). Se $\boldsymbol{\omega}\,(t) \neq 0$, esiste una retta parallela a $\boldsymbol{\omega}$ detta asse istantaneo del moto i cui punti hanno velocità parallela a $\boldsymbol{\omega}$ o nulla. (pensare a moto di una vite).
Riformulazione: il luogo dei punti che hanno velocità parallela o nulla a $\boldsymbol{\omega}$ è almeno una retta.

Dimostrazione. Analogamente alla costruzione dell'asse centrale $(P - O) = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O}{\boldsymbol{\omega}^2} + \lambda \boldsymbol{\omega}$.
Cerchiamo il luogo dei punti in cui $\boldsymbol{v}_P \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$.
Da formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} \times (P - O) = \boldsymbol{v}\,(P) - \boldsymbol{v}\,(O) \\ \implies &(P - O) \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v}\,(O) - \boldsymbol{v}\,(P) \end{aligned}$$

e ricordando l'equazione vettoriale: $x \times a = b \implies x = \frac{(a \times b)}{a^2} + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$(P - O) = \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_O - \boldsymbol{v}_P)}{\boldsymbol{\omega}^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

quindi se cerchiamo i punti tali che $\boldsymbol{v}_P \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ abbiamo

$$(P - O) = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_O}{\boldsymbol{\omega}^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

quindi se $\boldsymbol{v}_O = 0$ oppure parallela a $\boldsymbol{\omega} \implies (P - O) = \lambda \boldsymbol{\omega}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ retta che soddisfa le richieste. □

Osservazione Non confondere asse istantaneo di moto con asse di rotazione: ad esempio, in una ruota che rotola l'asse di rotazione è il centro della ruota, mentre l'asse istantaneo di moto è nel punto di contatto col terreno, infatti è come se istantaneamente la ruota si stesse muovendo di pura rotazione attorno a questo punto. Vediamo infatti che il punto di contatto ha velocità nulla rispetto a tale asse. Se la ruota si muovesse anche in direzione uscente dal foglio allora l'asse istantaneo di moto rimane il punto di contatto, che però ha una componente della velocità parallela all'asse.

Definizione 5.8 (invariante rigido)**:** $J = \boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega}$, agisce similmente a I definito in 2.26. È invariante , infatti

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O) \implies \boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \forall P$$

dove O è un punto prescelto solidale.

Preso l'invariante rigido J posso avere

$J=0$		$J\neq 0$
Moto traslatorio	Moto rotatorio	Moto elicoidale
$\boldsymbol{\omega}(t)=\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\omega}(t)\neq\mathbf{0}$	

Per $\boldsymbol{\omega}(t)\neq\mathbf{0}$ esiste l'asse istantaneo di moto che per il moto rotatorio ($J=0$) è formato dai punti di velocità nulla.

Teo. 20 (teorema di Mozzi). A un dato istante t, l'atto di moto di un sistema rigido è traslatorio, rotatorio oppure elicoidale.

5.1 Moti rigidi piani

Definizione 5.9 (moto rigido piano)**:** Le velocità di tutti i punti sono parallele a π, piano fisso rispetto al riferimento Σ.

Osservazione praticamente sono tutti i moti (rotatorio e traslatorio) **tranne quello elicoidale**, ovvero non ammetto che ci sia componente di traslazione nella direzione di $\boldsymbol{\omega}$

Prop. 24 . Il moto piano ha le seguenti proprietà:

(i) $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare a π o è nullo, ovvero $\boldsymbol{\omega}(t)=\omega(t)\,\boldsymbol{e}$ con $\boldsymbol{e}$ versore $\perp\pi$

(ii) L'atto di moto è in ogni istante traslatorio o rotatorio. Infatti, se $\boldsymbol{\omega}(t)\neq\mathbf{0}$, preso P^* appartenente all'asse istantaneo di moto vale $\boldsymbol{v}(P^*)=\mathbf{0}$, essendo impossibile $\boldsymbol{v}(P^*)\parallel\boldsymbol{\omega}$.

(iii) Posso studiare il sistema prendendo p piano rappresentativo parallelo a π e solidale a S

Definizione 5.10 (centro di istantanea rotazione)**:** C intersezione tra l'asse istantaneo di moto e il piano p.

Osservazione Il centro istantaneo di rotazione è l'unico punto che, istante per istante, ha velocità nulla

Prop. 25 (Criterio di Chasles per l'individuazione del centro ist. di rotazione).

5.2 Vincoli di contatto

Definizione 5.11 (vincolo di contatto)**:** $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ sistemi rigidi a contatto in un punto P, il vincolo di contatto è espresso da $(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0$ con $\boldsymbol{v}_i$ velocità del punto di $\mathcal{C}_i$ coincidente con P e $\boldsymbol{n}$ normale alla tangente in P.

Definizione 5.12 (rotolamento senza strisciamento)**:** Caso di vincolo di contatto con $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$.

5.3 Velocità angolare in funzione degli angoli di Eulero

Prop. 26 . Vale $\boldsymbol{\omega}(t)=\dot\varphi\boldsymbol{e}_3+\dot\theta\boldsymbol{n}+\dot\psi\boldsymbol{e}_3'$

Lemma 2 . $[\dot{\boldsymbol{u}}]_\Sigma=[\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$

Prop. 27 . $\boldsymbol{\omega}(t)=\omega_1\boldsymbol{e}_1'+\omega_2\boldsymbol{e}_2'+\omega_3\boldsymbol{e}_3'$ con

- $\omega_1=[\dots]$
- $\omega_2=[\dots]$
- $\omega_3=[\dots]$

Esercizio (velocità angolare mediante gli angoli di Eulero)**.** Preso $O\equiv O'$ vale che $\boldsymbol{\omega}=\dot\varphi\boldsymbol{k}+\dot\theta\boldsymbol{n}+\dot\psi\boldsymbol{k}'$, siccome

$$\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_\Sigma=\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_{\Sigma_1}+\omega_{\Sigma,\Sigma_1}\times\boldsymbol{i}\qquad\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_{\Sigma_1}=\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_{\Sigma_2}+\omega_{\Sigma_1,\Sigma_2}\times\boldsymbol{i}\qquad\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_{\Sigma_2}=\cancel{\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_{\Sigma'}}+\omega_{\Sigma_2,\Sigma'}\times\boldsymbol{i}$$

$$\left(\dot{\boldsymbol{i}}'\right)_\Sigma=\left(\omega_{\Sigma,\Sigma_1}+\omega_{\Sigma_1,\Sigma_2}+\omega_{\Sigma_2,\Sigma'}\right)\times\boldsymbol{i}=\left(\dot\varphi\boldsymbol{k}+\dot\theta\boldsymbol{n}+\dot\psi\boldsymbol{k}'\right)\times\boldsymbol{i}\overset{\text{teorema di Poisson}}{=}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}'$$

L'espressione invece nella terna solidale $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ viene essere

$$\boldsymbol{\omega} = +\dot{\psi}\boldsymbol{k}' + \dot{\theta}\left(\boldsymbol{i}'\cos\psi - \boldsymbol{j}'\sin\psi\right) + \dot{\varphi}\left(\boldsymbol{k}'\cos\theta + \left(\boldsymbol{i}'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \boldsymbol{j}'\cos\psi\right)\sin\theta\right)$$

Esercizio (equazioni di Lagrange in un riferimento in moto rotatorio uniforme)**.** [...]

6 Moti Relativi

6.1 Cinematica relativa

$\Sigma = \{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ riferimento inerziale (assoluto) e $\Sigma' = \{O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ riferimento in moto rispetto a Σ, le cui misure sono dette assolute e relative rispettivamente, e di trascinamento quelle dovute al movimento di O' rispetto a O.

Derivata assoluta e relativa Sia $\boldsymbol{u}(t)$ vettore che si muove (quindi non solidale) in Σ' con $O \equiv O'$

- Derivata assoluta: in Σ: $\boldsymbol{u}(t) = \sum_i u_i(t)\boldsymbol{e}_i$ e $[\dot{\boldsymbol{u}}(t)]_\Sigma = \sum_i \dot{u}_i(t)\boldsymbol{e}_i$
- Derivata relativa: in Σ': $\boldsymbol{u}(t) = \sum_i u_i'(t)\boldsymbol{e}_i'$ e $[\dot{\boldsymbol{u}}(t)]_{\Sigma'} = \sum_i \dot{u}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'$

Quindi derivando $[\boldsymbol{u}(t)]_{\Sigma'}$ in Σ otteniamo:

$$[\dot{\boldsymbol{u}}]_\Sigma = \sum_i \dot{u}_i'(t)\boldsymbol{e}_i'(t) + \sum_i u_i'(t) \underbrace{\dot{\boldsymbol{e}}_i'}_{\text{Teo.Poisson } = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i'} = [\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\sum_i u_i'\boldsymbol{e}_i'}_{\boldsymbol{u}(t)} = [\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{u}]_{\Sigma'}$$

Quindi abbiamo, per un vettore qualcunque $\boldsymbol{u}$:

$$\boxed{[\dot{\boldsymbol{u}}]_\Sigma = [\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{u}]_{\Sigma'}}$$

È **generalizzazione del teorema di Poisson**, infatti non vale solo per vettori di modulo costante e solidali, ma per tutti.

Teo. 21 (composizione delle velocità e accelerazioni). Si ha:
Per $O' \equiv O$:

(i) $[\boldsymbol{v}]_\Sigma = \overbrace{\boxed{[\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{v}_{\text{relativa}}} + \overbrace{\boxed{\boldsymbol{\omega} \times (P - O')}}^{\boldsymbol{v}_{\text{trascinamento}}}$

(ii) $[\boldsymbol{a}]_\Sigma = \overbrace{\boxed{[\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{a}_{\text{relativa}}} + \overbrace{\boxed{2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{a}_{\text{coriolis}}} + \overbrace{\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O'))}}^{\boldsymbol{a}_{\text{trascinamento}}}$

Per $O' \not\equiv O$

(i) $[\boldsymbol{v}]_\Sigma = \overbrace{\boxed{[\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{v}_{\text{relativa}}} + \overbrace{\boxed{\boldsymbol{\omega} \times (P - O') + \boldsymbol{v}(O')}}^{\boldsymbol{v}_{\text{trascinamento}}}$

(ii) $[\boldsymbol{a}]_\Sigma = \overbrace{\boxed{[\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{a}_{\text{relativa}}} + \overbrace{\boxed{2\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}]_{\Sigma'}}}^{\boldsymbol{a}_{\text{coriolis}}} + \overbrace{\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O')) + \boldsymbol{a}(O')}}^{\boldsymbol{a}_{\text{trascinamento}}}$

Dimostrazione. Assumo $O' \equiv O$ a cui poi basta aggiungere $\boldsymbol{v}(O')$ e $\boldsymbol{a}(O')$. Per la velocità è la semplice applicazione della derivata di un qualunque vettore vista sopra, mentre per l'accelerazione:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_a = [\dot{\boldsymbol{v}}]_\Sigma &= \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (P - O))\right]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (P - O)] \\
&= \left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_r\right]_{\Sigma'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{d}{dt}(P - O')}_{\boldsymbol{v}_r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O')) \\
&= \boldsymbol{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (P - O'))
\end{aligned}$$

□

Osservazione $\boldsymbol{a}_c = 0 \iff \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{0}$ (moto traslatorio) oppure $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ (oggetto fermo rispetto a Σ'). Inoltre la potenza della forza di Coriolis è zero perché è perpendicolare alla velocità relativa.

*Esempio (**moto rotatorio uniforme**)* $\omega = \text{cost}$, $\dot{\omega} = 0$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_t &= \cancel{\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')} + \boldsymbol{\omega} \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \left[(P - P^*) + \overset{\parallel\omega}{(P^* - O')}\right]\right] \qquad P^* \in \text{asse istantaneo di moto} \\
&= -\left[\boldsymbol{\omega} \times (P - P^*)\right] \times \boldsymbol{\omega} \\
&= -\left[\boldsymbol{\omega}^2 (P - P^*) - \cancel{((P - P^*) \cdot \boldsymbol{\omega})} \cdot \boldsymbol{\omega}\right] \\
&= -\boldsymbol{\omega}^2 (P - P^*) \quad \longrightarrow \text{accelerazione centripeta}
\end{aligned}$$

6.2 Dinamica relativa

Per quanto riguarda l'interpretazione dinamica vale $(m\boldsymbol{a}_r)_{\Sigma'} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_c - m\boldsymbol{a}_t$

$$\begin{aligned} &\text{In } \Sigma: \quad m\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{F} \\ &\text{In } \Sigma': \quad m(\boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{F} \implies m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_c - m\boldsymbol{a}_t}_{\text{forze apparenti}} := \widetilde{\boldsymbol{F}} \end{aligned}$$

dove

- $\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v_r}$ (forza di Coriolis)
- $\boldsymbol{F}_t = -m\boldsymbol{a}_t$ (forza di trascinamento)
- $\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_t$

Esercizio (effetto Coriolis)**.** $m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_c - m\boldsymbol{a}_t$ con $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_t \overset{\text{def}}{=} m\boldsymbol{g} \approx \boldsymbol{F}$, da cui $m\boldsymbol{a}_r = m\boldsymbol{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$, da cui (con φ latitudine di O' sulla superficie terrestre, $\boldsymbol{k}'$ Zenith, $\boldsymbol{i}'$ verso est, $\boldsymbol{j}'$ verso sud, $P = (0,0,h)_{\Sigma'}$ di velocità iniziale nulla)

$$\begin{cases} \ddot{x}'_1 = 2\boldsymbol{\omega}\left(\cos\varphi \dot{x}'_3 + \sin\varphi \dot{x}'_2\right) \\ \ddot{x}'_2 = -2\boldsymbol{\omega} \sin\varphi \dot{x}'_1 \\ \ddot{x}'_3 = -2\boldsymbol{\omega}\cos\varphi \dot{x}'_1 - g \end{cases} \quad \text{risolvendo} \implies \begin{cases} x'_1 = \frac{\cos\varphi g}{2\boldsymbol{\omega}}\left(\frac{\sin(2\omega t)}{2\boldsymbol{\omega}} - t\right) \overset{\text{Taylor}}{\simeq} -\frac{1}{3}\cos\varphi g\omega t^3 \\ x'_2 = [...] \\ x'_3 = [...] \end{cases}$$

Osservazione Dato che $[\dot{\boldsymbol{u}}]_\Sigma = [\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} \implies [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_\Sigma = [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_{\Sigma'} + \cancel{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}}$ per questo non specifico se $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ rel o ass. Ogni vettore della forma $\boldsymbol{u}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ gode della proprietà $[\dot{\boldsymbol{u}}]_\Sigma = [\dot{\boldsymbol{u}}]_{\Sigma'}$

6.3 Equazioni di Lagrange in sistema di riferimento rotatorio uniforme

- Forza relativa di **trascinamento** è conservativa di potenziale

  $$V_t = -\frac{1}{2}m\omega^2 d^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 \mathcal{I}_r$$

  con ω la vvelocità angolare del sistema di riferimento e d la distanza dall'asse di rotazione. Per un corpo esteso

  $$V_t = -\frac{1}{2}\omega^2 \int\int\int \rho(\boldsymbol{x}) d(\boldsymbol{x})^2 d\boldsymbol{x}$$

- Forza di **Coriolis** non interviene in eq. di Lagrange perché ha componente lagrangiana nulla

Allora per N punti

$$\mathcal{L}' = \sum_N T' - \sum_N V' - \sum_N V_t$$

con T', V' sono valutate nel sistema di riferimento rotante

7 Dinamica dei sistemi rigidi

7.1 Geometria delle masse

S sistema discreto di punti materiali di centro di massa $G = O + \frac{\sum m_i(P_i - O)}{\sum m_i}$, massa totale $M = \sum m_i$

Definizione 7.1 (Centro di massa)**:** Distinguiamo i casi

- **Sistema discreto**

$$S = \{(P_i, m_i), \quad i = 1 \dots N\} \qquad M = \sum m_i \qquad \boldsymbol{R} = \frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i}$$

- **Sistema continuo**

$$S = \{(P, \rho(P)), \quad P \in \mathbb{E}\} \qquad M = \int_S \rho(P) dS \qquad \boldsymbol{R} = \frac{\int_S \rho(P)\,(P - O)\,dS}{M}$$

Definizione 7.2 (momento d'inerzia)**:** $\mathcal{I}_r = \sum m_i d_i^2 = \sum m_i \left[(P_i - O) \times \boldsymbol{n}\right]^2$ Momento d'inerzia rispetto alla retta r ($\boldsymbol{n}$ versore di r. d_i distanza di P_i dalla retta r)

Teo. 22 (teorema di Huygens (variazione in fascio improprio)). $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_{r'} + Md^2$ con $r' \parallel r$ passante per G

Dimostrazione. Preso G centro di massa e $(P_i - O) = (P_i - G) + (G - O) = \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r &= \sum_i m_i [(\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{n}]^2 = \sum_i m_i ((\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}))^2 \\ &= \underbrace{\sum_i m_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{n})^2}_{\mathcal{I}_{r'}} + \underbrace{\sum_i m_i (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})^2}_{Md^2} + \underbrace{2\sum_i m_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{n})(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})}_{=0} \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine è nullo poiché:

$$2\sum_i m_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{n})(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}) = 2(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}) \sum_i m_i (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{n}) = 2(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})[\underbrace{(\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i)}_{=M(G-G)=0} \times \boldsymbol{n}] = 0$$

□

Definizione 7.3 (prodotto di inerzia)**:** rispetto ad una coppia di piani π, π' non paralleli:

$$\mathcal{I}_{\pi,\pi'} := -\sum m_i \left[(P_i - O) \cdot \boldsymbol{n}\right] \left[(P_i - O) \cdot \boldsymbol{n}'\right] = -\sum m_i d_r d_{r'}$$

con $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ versori perpendicolari a π, π' rispettivamente e $O \in \pi \cap \pi'$

Osservazione Per $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{k}$ vale $\mathcal{I}_{x,z} := \mathcal{I}_{\pi,\pi'} = -\sum m_i x_i z_i$ poiché distanza dal piano Oyz perpendicolare ad asse x è la coordinata x

Teo. 23 (variazione del momento d'inerzia in un fascio proprio). Presa retta r per O, assi cartesiani x, y, z solidali, $\boldsymbol{n} = \alpha \boldsymbol{u}_x + \beta \boldsymbol{u}_y + \gamma \boldsymbol{u}_z$ versore (quindi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ sono i coseni direttori) della retta nella base solidale, allora

$$\mathcal{I}_r = \mathcal{I}_r(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 \mathcal{I}_{x,x} + \beta^2 \mathcal{I}_{y,y} + \gamma^2 \mathcal{I}_{z,z} + 2\alpha\beta \mathcal{I}_{x,y} + 2\beta\gamma \mathcal{I}_{y,z} + 2\alpha\gamma \mathcal{I}_{x,z}$$

ovvero

$$\mathcal{I}_r = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{x,x} & \mathcal{I}_{x,y} & \mathcal{I}_{x,z} \\ \mathcal{I}_{y,x} & \mathcal{I}_{y,y} & \mathcal{I}_{y,z} \\ \mathcal{I}_{z,x} & \mathcal{I}_{z,y} & \mathcal{I}_{z,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \boldsymbol{n}^T I_O \boldsymbol{n}$$

dove

- $\mathcal{I}_r$ è il momento di interzia del sistema rispetto alla retta r
- $\mathcal{I}_{\square,\square}$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $\square$
- $\mathcal{I}_{\square,\triangle}$ è il prodotto d'inerzia del sistema rispetto ai piani perpendicolari agli assi $\square$ e $\triangle$

Dimostrazione. Preso G centro di massa e $(P_i - O) = (P_i - G) + (G - O)$

$$\mathcal{I}_r = \sum m_i d_i^2 \overset{\star}{=} \sum m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - ((P_i - O) \cdot \boldsymbol{n})^2 \right] \overset{\text{Pitagora}}{=} \sum m_i \left[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i)^2 \right]$$

poi conti: prima raccolgo x_i, y_i, z_i poi ricordo che $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ quindi sostituisco e raccolgo α, β, γ. $\square$

Definizione 7.4 (Matrice d'inerzia)**:** Matrice d'inerzia rispetto ad O: $I_O \coloneqq \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{x,x} & \mathcal{I}_{x,y} & \mathcal{I}_{x,z} \\ \mathcal{I}_{y,x} & \mathcal{I}_{y,y} & \mathcal{I}_{y,z} \\ \mathcal{I}_{z,x} & \mathcal{I}_{z,y} & \mathcal{I}_{z,z} \end{pmatrix}$, allora

$$\mathcal{I}_r = (\alpha, \beta, \gamma)\, I_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \boldsymbol{n}^T I_O \boldsymbol{n}$$

Notiamo che essendo simmetrica è sempre diagonalizzabile mediante matrici ortogonali per il **teorema spettrale reale**.

Definizione 7.5 (ellissoide d'inerzia)**:** Per $\mathcal{I}_r > 0$ considero $P \in \Sigma$ tali che $d\,(P, O) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{I}_r}}$ con $P \in r$, quindi i $P = \frac{1}{\sqrt{I_r}} \boldsymbol{n}$ di coordinate $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathcal{I}_r}}, \frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{I}_r}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{I}_r}} \right)$, da cui l'equazione

$$(x, y, z)\, I_O \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1$$

$$x^2 \mathcal{I}_{x,x} + y^2 \mathcal{I}_{y,y} + z^2 \mathcal{I}_{z,z} + 2xy \mathcal{I}_{x,y} + 2yz \mathcal{I}_{y,z} + 2xz \mathcal{I}_{x,z} = 1$$

si può otterene anche dividendo per $\mathcal{I}_r$ l'ugualianza nel teorema sopra, poi estendo a tutti i punti (x, y, z) e quindi la relazione è soddisfatta solo dai punti $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\mathcal{I}_r}}, \frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{I}_r}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\mathcal{I}_r}} \right)$, ovvero dai punti $P = \frac{1}{\sqrt{I_r}} \boldsymbol{n}$ che quindi distano $1/\sqrt{\mathcal{I}_r}$ da O, con r retta per $P - O$ (variabile punto per punto). È una quadratica (ellissoide, paraboloide, iperboloide), in questo caso è un ellissoide (dato che $\mathcal{I}_{\square,\square} \geq 0$ e $\mathcal{I}_{\square,\triangle} \leq 0$) **non traslato** (in quanto è forma quadratica e quindi non ha termini di primo o zero grado), ma **ruotato**.

Conoscere l'ellissoide permette di ricavare ogni $\mathcal{I}_r$, ed è indipendente da Σ. Lo cerchiamo nella forma canonica:

Definizione 7.6 (assi principali, terna principale, terna centrale)**:** Per assi di simmetria si intende non assi di simmetria centrale, ma assi per cui c'è un **piano** perpendicolare di simmetria

- Assi principali: assi di simmetria dell'ellissoide;
- Terna principale: terna degli assi principali;
- Terna centrale: terna principale con $O \equiv G$.

Prop. 28 . Una terna è principale $\iff I_O = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{x,x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{y,y} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{z,z} \end{pmatrix}$ è diagonale, e dunque l'ellissoide è

$$x^2 \mathcal{I}_{x,x} + y^2 \mathcal{I}_{y,y} + z^2 \mathcal{I}_{z,z} = 1 \quad \text{(ellissoide \textbf{non ruotato}, e non tralsato come al solito)}$$

ovvero gli assi sono principali $\iff$ sono gli **autospazi** della matrice d'inerzia
e la terna è principale $\iff$ è la base in cui la matrice è diagonale

7.1.1 Omografia d'inerzia

È l'operatore lineare associato alla matrice d'inerzia.

Definizione 7.7 (omografia d'inerzia)**:** è l'applicazione lineare $\sigma\,(O) : V \to V$ tale che

$$\sigma\,(O)\,(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[r_i^2 \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{r}_i \right] = I_O \boldsymbol{u}$$

con V spazio delle traslazioni, con $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ vettore qualunque, $\boldsymbol{r}_i = P_i - O$ e $r_i^2 = |P_i - O|^2$.

Prop. 29 . L'applicazione $\sigma(O)$ ha le proprietà:

(i) $\boldsymbol{v}\cdot\sigma(O)(\boldsymbol{v}) = \mathcal{I}_{\boldsymbol{v}}\cdot v^2$ (con $\mathcal{I}_{\boldsymbol{v}} \coloneqq \mathcal{I}_r$ per r retta $\parallel \boldsymbol{v}$ passante per O)

(ii) per $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ non paralleli, $\boldsymbol{u}\cdot\sigma(O)(\boldsymbol{v}) = \mathcal{I}_{\pi_{\boldsymbol{u}},\pi_{\boldsymbol{v}}}|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| + \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ (con $\pi_{\boldsymbol{u}},\pi_{\boldsymbol{v}}$ perpendicolari a $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ rispettivamente, $O\in\pi_{\boldsymbol{u}}\cap\pi_{\boldsymbol{v}}$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\sigma(O)(\boldsymbol{v}) &= \sum m_i\left[r_i^2v^2-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{v})^2\right] = \sum m_i\left[r_i^2v^2-r_i^2v^2\cos^2\theta\right] = \sum m_i\left[r_i^2v^2\sin^2\theta\right] = \sum m_i\left[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}\right]^2\\ &= \sum m_i(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{n}_i)^2v^2 = \mathcal{I}_{\boldsymbol{n}}v^2 \quad \text{con } \boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\\ \boldsymbol{u}\cdot\sigma(O)(\boldsymbol{v}) &= \sum m_i\left[r_i^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{u})\right] = \sum m_ir_i^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) - \sum m_i(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{m})|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

□

Osservazione Si può definire una forma bilineare simmetrica definita positiva $\boldsymbol{v}\cdot\sigma(O)\boldsymbol{v} = \mathcal{I}_{\boldsymbol{v}}\cdot v^2 \geq 0$

Definizione 7.8 (matrice/tensore d'inerzia)**:** Presa $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ base, si definisce tensore d'inerzia

$$(\mathbb{I}_O)_{jk} = \boldsymbol{e}_j\sigma(O)\boldsymbol{e}_k \qquad\qquad \mathbb{I}_O = \begin{pmatrix}\mathcal{I}_{1\,1} & \mathcal{I}_{1\,2} & \mathcal{I}_{1\,3}\\ \mathcal{I}_{2\,1} & \mathcal{I}_{2\,2} & \mathcal{I}_{2\,3}\\ \mathcal{I}_{3\,1} & \mathcal{I}_{3\,1} & \mathcal{I}_{3\,3}\end{pmatrix}$$

Osservazione Gli assi principali sono **autovettori** di $\mathbb{I}_O$. Per $O\equiv G$ la matrice $\mathbb{I}_G$ è detta centrale.

Osservazione $\sigma(O)$ è definita positiva se il sistema non è contenuto nella retta rispetto a cui calcolo il momento d'inerzia.

$$\boldsymbol{u}\cdot\sigma(O)\boldsymbol{u} = \mathcal{I}_{\boldsymbol{u}}|\boldsymbol{u}|^2 \geq 0 \text{ e } = 0 \iff \boldsymbol{u}=0 \iff P_i\in r\ \forall i$$

I versori $\boldsymbol{e}_i$ degli assi principali soddisfano $\sigma(O)\boldsymbol{e}_i = \lambda\boldsymbol{e}_i$ con λ_i momento d'inerzia $\implies \mathcal{I}_k$ sono gli **autovalori** di $\mathbb{I}_O$

Prop. 30 . r asse principale di inerzia rispetto a $O \iff$ tutti i prodotti di inerzia relativi al piano $\perp r$ passante per O e a un altro piano qualsiasi sono nulli

Dimostrazione. Prendo $z\equiv r$, devo avere $\mathbb{I}_0\cdot\boldsymbol{k} = \mathcal{I}_{3\,3}\cdot\boldsymbol{k}$, da cui $\mathcal{I}_{1\,3}\cdot\boldsymbol{k}=0, \mathcal{I}_{2\,3}\cdot\boldsymbol{k}=0$. □

7.1.2 Ricerca della terna principale

Definizione 7.9 (simmetria materiale)**:** Se simmetrico e punti simmetrici hanno stessa massa. Simmetria materiale ortogonale se la simmetria è rispetto a un piano.

Prop. 31 . Se π piano di simmetria materiale ortogonale per il sistema S, $\implies \forall O\in\pi$ la retta retta normale a π passante per O è asse principale di inerzia rispetto a O

Dimostrazione. Prendendo $\pi = Oxy$, vale $\mathcal{I}_{x,z} = \mathcal{I}_{y,z} = 0$ siccome $\mathcal{I}_{x,z} = -\sum m_ix_iz_i$, con la sommatoria che si annulla per punti simmetrici □

*Osservazione (**asse principale $\not\Longrightarrow$ perpendicolare a piano di simmetria**)* NB: in una lamina quadrata con densità costante, due assi ortogonali centrati nel centro di massa sono sempre principali, qualunque sia la loro rotazione

Prop. 32 . Presi π_1,π_2 piani di simmetria materiale ortogonale per S non simmetrici,

$\pi_1\perp\pi_2$ la terna principale è $(r=\pi_1\cap\pi_2, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)$

$\pi_1\not\perp\pi_2$ ellissi d'inerzia è rotazione intorno a $r=\pi_1\cap\pi_2$

Definizione 7.10 (Sistemi piani)**:** Sistema S contenuto in un piano π

Prop. 33 . Proprietà dei sistemi piani:

(i) $\boldsymbol{n}$ normale al piano è asse principale di inerzia $\forall O$ (prendo $Oxy = \pi$ e ho $\forall i\ z_i = 0$, $\mathcal{I}_{xy} = 0 = \mathcal{I}_{yx}$).

(ii) per in sistema di riferimento tale che $Oxy \equiv \pi$, vale $\boxed{\mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y = \mathcal{I}_z}$, siccome

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_x &= \sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) = \sum m_i y_i^2 \quad &&\text{(distanza dall'asse } x \text{ è la coordinata } y \text{ se nel piano)}\\
\mathcal{I}_y &= \sum m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) = \sum m_i x_i^2 \\
\mathcal{I}_z &= \sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \quad &&\text{(basta applicare Pitagora)}
\end{aligned}$$

Teo. 24 (teorema di Pappo Guldino). Presa d_G distanza di G da r valgono:

(i) L'area della superficie S di rotazione completa di γ curva intorno a r è $A(S) = 2\pi d_G l(\gamma)$

(ii) L'area del solido $\mathcal{B}$ di rotazione completa di S superficie intorno a r è $V(s) = 2\pi d_G A(\gamma)$

Esempio ***(momenti di inerzia di triangolo rettangolo e equilatero)*** [...]

7.2 Grandezze dinamiche di rilievo

Prop. 34 . Tre grandezze dinamiche

(i) Il momento angolare di un sistema rigido può essere riscritto come

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V}_G + \mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$$

quindi per O fisso vale direttamente

$$\boxed{[\boldsymbol{L}_O]_{\Sigma'} = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}}$$

(ii) L'energia cinetica di un sistema rigido può essere riscritta come

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$$

per O fisso vale direttamente

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}}$$

(iii) La potenza di un sistema rigido può essere riscritto come:

$$W = \boldsymbol{R}^{(\text{Est.})} \cdot \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{M}_O^{(\text{Est.})} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

con $\boldsymbol{R}$ risultante forze esterne. Per O fisso vale direttamente

$$\boxed{W = \boldsymbol{M}_O^{(\text{Est.})} \cdot \boldsymbol{\omega}}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

(i) Con punto fusso O:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i\left(\cancel{\boldsymbol{v}_Q} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{r}_i \\
&= -\sum_{i} m_i[(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r_i})\boldsymbol{r}_i - (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{\omega}] \qquad \text{doppio prodotto vettoriale} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\left[(r_i)^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{r}_i\right] \\
&= \sigma(O)\,\boldsymbol{\omega} = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

In sistema rigido libero (applicare Konig): $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{L}_G = \mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V}$

(ii) Con punto fisso O:

$$\begin{aligned}
T_O &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{v}_i \qquad \text{formula fondamentale solo su una velocità} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) \qquad \text{prodotto misto} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}_O = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

In sistema rigido libero (applicare Konig): $T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + T'_G = \frac{1}{2}M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$

(iii) Direttamente in sistema libero:

$$\begin{aligned}
W = W^{(\text{est})} &= \sum \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})} \cdot (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P_i - O)) \\
&= (\sum_i \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})}) \cdot \boldsymbol{v}_O + \sum_i \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (P_i - O)) \\
&= \boldsymbol{R}^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_O + \sum_i (\boldsymbol{\omega} \times (P_i - O)) \cdot \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})} \\
&= \boldsymbol{R}^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum (P_i - O) \times \boldsymbol{f}_i^{(\text{est})} \qquad \text{prodotto misto} \\
&= \boldsymbol{R}^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}_O^{(\text{est})}
\end{aligned}$$

□

Osservazione Essendo la matrice d'inerzia scritta in una base solidale, il vettore momento angolare trovato è solidale al corpo, quindi ruota anch'esso attorno a $\boldsymbol{\omega}$

Osservazione Se $\boldsymbol{\omega} = \omega(t)\boldsymbol{n}(t) \implies T = \frac{1}{2}(\omega\boldsymbol{n})\mathbb{I}_O(\omega\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\omega^2\mathcal{I}_{\boldsymbol{n}}$
È utile quando $\boldsymbol{n}$ è fisso (rotazione attorno ad un asse)

Teo. 25 (equazioni di Eulero)**.** Considerato un sistema S a un punto fisso O $(n = 3)$, una terna solidale **principale** $\Sigma' = \{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, valgono

$$\begin{cases}
\mathcal{I}_1\dot{\omega}_1 + (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2)\,\omega_2\omega_3 = M_O^{(1)} \\
\mathcal{I}_2\dot{\omega}_2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3)\,\omega_1\omega_3 = M_O^{(2)} \\
\mathcal{I}_3\dot{\omega}_3 + (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1)\,\omega_1\omega_2 = M_O^{(3)}
\end{cases}$$

ovvero

$$\mathbb{I}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O$$

Dimostrazione. Ricordando che $\boldsymbol{L}_O = \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega} = \mathcal{I}_1\omega_1\boldsymbol{e}_1 + \mathcal{I}_2\omega_2\boldsymbol{e}_2 + \mathcal{I}_3\omega_3\boldsymbol{e}_3$ (essendo terna principale)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O^{(\text{est})} &= \left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_O\right]_\Sigma \\
&= \left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_O\right]_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}_O \\
&= \mathcal{I}_1\dot{\omega}_1 + \mathcal{I}_2\dot{\omega}_2 + \mathcal{I}_3\dot{\omega}_3 + \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \mathcal{I}_1\omega_1 & \mathcal{I}_2\omega_2 & \mathcal{I}_3\omega_3 \end{vmatrix} \\
&= \mathbb{I}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{I}_O\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

ho applicato la regola vista sopra di derivata in un vettore nel riferimento mobile. □

7.3 Moti per inerzia o alla Poinsot

Definizione 7.11 (moto per inerzia o di Poinsot)**:** Se vale per S sistema rigido

(i) $\boldsymbol{M}_O^{(\text{est})} = \mathbf{0}$ per O fisso oppure

(ii) $\boldsymbol{M}_G^{(\text{est})} = \mathbf{0}$

Prop. 35 (Conservazione momento agolare ed energia cinetica). In un moto per inerzia o di Poinsot si conservano

(i) $\boldsymbol{L}_O$ costante (caso 1) o $\boldsymbol{L}_G$ costante (caso 2)

(ii) l'energia cinetica se il moto è intorno a O oppure $\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}$ per il moto intorno a G

Dimostrazione. Conservazione energia cinetica: usando formula della potenza abbiamo

$$\dot{T} = W = W^{(\text{est})} = \boxed{\boldsymbol{R}^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_O} + \cancel{\boldsymbol{M}_O^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{\omega}} = 0$$

con $\boldsymbol{v}_O = \mathbf{0}$ oppure $\boldsymbol{R}^{(\text{est})} \cdot \boldsymbol{v}_G = \frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_G) \cdot \boldsymbol{v}_G = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(T - \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2\right) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_G\boldsymbol{\omega}) = 0$ □

7.3.1 Giroscopi

Definizione 7.12 (sistema a struttura giroscopica, giroscopio, asse giroscopico)**:** Abbiamo

- Sistema a struttura giroscopica rispetto a O quando $\mathbb{I}_O$ ha due autovalori coincidenti.
- Giroscopio se rispetto a G.
- Asse giroscopico: direzione dell'autovettore di autovalore con molteplicità 1

Praticamente un giroscopio è un oggetto con ellissoide che è solido di rotazione (simmetria assiale) e quindi ammette solo precessione e non nutazione.

Osservazione Le equazioni di Eulero diventano $\begin{cases} \mathcal{I}_1\dot{\omega}_1 + (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ \mathcal{I}_2\dot{\omega}_2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3)\,\omega_1\omega_3 = 0 \\ \mathcal{I}_3\dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$, da cui $\quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{e}_3 = \text{cost}$

Definizione 7.13 (precessione)**:** Per S rigido esistono $\boldsymbol{e}$ (asse di precessione) e $\boldsymbol{u}$ (asse di figura) direzioni fisse rispetto a Σ e Σ' (solidale) rispettivamente, che formano un angolo costante

Teo. 26 (caratterizzazione di una precessione). Un moto è una precessione $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\omega} = \alpha(t) \cdot \boldsymbol{e} + \beta(t) \cdot \boldsymbol{u}$ per α e β opportune. Per α e β costanti, la precessione è detta regolare

Dimostrazione. $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{u} = \text{cost}$, ovvero $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{u}) = 0$, quindi derivando $\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}) = 0$, da cui $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}$ complanari □

Teo. 27 . Moti per inerzia rispetto a O fisso di sistemi rigidi a struttura giroscopica sono precessioni regolari

Dimostrazione.

$$\frac{\boldsymbol{L}_O}{\mathcal{I}_1} = \frac{\mathcal{I}_1\omega_1\boldsymbol{e}_1 + \mathcal{I}_1\omega_2\boldsymbol{e}_2 + \mathcal{I}_3\omega_3\boldsymbol{e}_3}{\mathcal{I}_1} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_1}\omega_3\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\overset{\text{cost in }\Sigma}{\boxed{\boldsymbol{L}_O}}}{\mathcal{I}_1} + \left(\frac{\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_3}{\mathcal{I}_1}\right)\omega_3\boldsymbol{e}_3$$

□

Definizione 7.14 (Rotazione permanente)**:** Rotazione in cui $\boldsymbol{\omega}$ è costante

Teo. 28 . In un moto per inerzia le rotazioni permanenti sono tutte e solo quelle lungo gli assi principali

Dimostrazione. Doppia implicazione

$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L}_O\right) = \mathbf{0} \overset{\text{eq. Eulero}}{\Longrightarrow} \mathbb{I}_O \overset{=\mathbf{0}}{\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}}}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \to \quad \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$, quindi $\boldsymbol{\omega}$ autovettore

$\Longleftarrow$ Preso $\mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, l'unica soluzione è $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(0)$ (teo. esistenza e unicità)

□

7.3.2 Trottola di Lagrange

Definizione 7.15 (trottola di Lagrange)**:** Giroscopio con punto fisso O appartenente all'asse giroscopico

$$T = \frac{1}{2}\left(\mathcal{I}_1\omega_1^2 + \mathcal{I}_1\omega_2^2 + \mathcal{I}_3\omega_3^2\right) \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{I}_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}\mathcal{I}_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - Mgd\cos\theta$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 = \dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \mathcal{I}_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + \mathcal{I}_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\cos\theta = \text{cost} = b\cdot \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathcal{I}_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) = \text{cost} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \text{cost} \text{ (vincoli fissi)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = E = T + V \end{cases}$$

integrali primi i primi due dei quali che sono nell'ordine la conservazione della componenti lungo gli assi z e x_3 del momento angolare.
Dall'integrale primo dell'energia $E = T + V$ invece posso ricavare, assumendo $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = b\cdot\mathcal{I}_1$ e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = a\cdot\mathcal{I}_1$

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad \dot{\psi} = \frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_3}a - \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{I}_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + Mgd\cos\theta = E - \frac{1}{2}\mathcal{I}_3\omega_3^2 = E' \qquad \frac{\left(b - a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta} + \dot{\theta}^2 = \overset{\alpha}{\boxed{\frac{2E'}{\mathcal{I}_1}}} + \overset{\beta}{\boxed{\frac{2Mgd}{\mathcal{I}_1}}}\cos\theta$$

da cui sostituendo $\cos\theta = u \in [-1, 1]$ ($\dot{u} = -\dot{\theta}\sin\theta$) si ottiene $\dot{u}^2 = \alpha\left(1 - u^2\right) + \beta u\left(1 - u^2\right) - (b - au)^2 = f(u)$.
Per $\beta > 0$ osservo $f(\pm 1) = -\left(b \mp a\right)^2 < 0$, prendo u_1, u_2 zeri di f in $[-1, 1]$ e $\theta_i = \arccos u_i$, quindi $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$u_1 \neq u_2$ Se $\overline{u} = \cos\overline{\theta} = \frac{b}{a}$, allora $\dot{\varphi} = 0$ e

- $\overline{u} \notin [u_1, u_2]$ La $\dot{\varphi}$ non si annulla mai, la traccia sulla sfera di centro O non si intreccia mai
- $\overline{u} \in [u_1, u_2]$ La $\dot{\varphi}$ si annulla periodicamente, la traccia sulla sfera di centro O forma cappi
- $\overline{u} = u_2$ La $\dot{\varphi}$ si annulla periodicamente, la traccia sulla sfera di centro O forma cuspidi sull'estremo superiore

$u_1 = u_2$ La θ rimane costante, e dunque il moto è una precessione

8 Equilibrio, stabilità, piccole oscillazioni

Definizione 8.1 (equilibrio di un sistema olonomo)**:** Configurazione $(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n})$ per cui il sistema posto in essa in quiete (atto di moto nullo), rimane in essa negli istanti successivi, ovvero $\overline{\boldsymbol{q}}$ è di equilibrio se

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}(t_0) = \overline{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_0) = 0 \end{cases} \implies \boldsymbol{q}(t) = \overline{\boldsymbol{q}} \quad \forall t \geq t_0$$

Osservazione Per un sistema olonomo non dissipativo, le configurazioni di equilibrio sono soluzioni costanti e risulta $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$, (essendo $T = 0$ e costante) ovvero $Q_i = 0$, che nel caso conservativo equivale a $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$. Vale anche il viceversa, ovvero:

$$\overline{\boldsymbol{q}} \text{ di equilibrio } \iff \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

e in sistemi conservativi

$$\overline{\boldsymbol{q}} \text{ di equilibrio } \iff -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}} V(\overline{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{0}$$

Definizione 8.2 (configurazione di equilibrio stabile)**:** $\Gamma = \overline{\boldsymbol{q}} = (\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_n)$ di equilibrio si dice stabile (secondo Lyapunov) se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(t)$ tale che

$$\underbrace{|q_i(t_0) - \overline{q}_i| < \delta, \quad |\dot{q}_i(t_0)| < \delta}_{\text{condizioni iniziali}} \implies |q_i(t) - \overline{q}_i| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i(t)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$$

ovvero se perturbo l'equilibrio "non succede niente" (il moto resta confinato in un intorno della posizione di equilibrio e modulo della velocità pure confinato in un intorno del modulo della velocità iniziale)

Teo. 29 (teorema di Lagrange - Dirichlet)**.** S sistema olonomo a vincoli non dissipativi e scleronomi, a sollecitazione attiva conservativa di potenziale V, allora:

$$\begin{cases} \Gamma = (\overline{\boldsymbol{q}}) \text{ configurazione di equilibrio} \\ V \text{ ha un minimo isolato in } \Gamma \end{cases} \implies \Gamma \text{ è di equilibrio stabile.}$$

Dimostrazione. .

- Prendo WLOG $\Gamma = (0, \ldots, 0)$ (traslando $\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}}$) e $V(\Gamma) = 0$ (potenziale definito a meno di costante)
- Per ipotesi Γ minimo isolato, allora esiste I_Δ intorno bucato di 0 di raggio Δ in cui V è $> V(0) = 0$.
- In I_Δ vale allora che

$$E(q, \dot{q}) = \overset{\geq 0 \; (=0 \Leftrightarrow \dot{q}=0)}{\boxed{T(q, \dot{q})}} + V(q) = \begin{cases} > 0 & \text{per } q \in I_\Delta, \dot{q} = 0 \\ = 0 & \text{per } q = \Gamma, \dot{q} = 0 \end{cases}$$

- Preso $\mathcal{U}_\varepsilon := \{(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |q| < \varepsilon, |\dot{q}| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon < \Delta)$, essendo $E(q, \dot{q})$ **continua**, allora ammette minimo sulla frontiera $\partial\mathcal{U}_\varepsilon$. Sia allora $E^* := \min E(q, \dot{q}) > 0$ su $\partial\mathcal{U}_\varepsilon$ compatto. Risulta allora in $\partial\mathcal{U}_\varepsilon$

$$E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \geq E^* > 0$$

- Fissato $\delta > 0$, con $\delta < \varepsilon < \Delta$, dato che per le ipotesi

$$\text{L'}\textbf{energia} \begin{cases} \textbf{si conserva} \implies E(q(0), \dot{q}(0)) = E(q(t), \dot{q}(t)) \\ \textbf{è continua} \text{ e vale 0 in } (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \implies E < E^* \quad \forall t \text{ in } \mathcal{U}_\delta(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \text{ per } \delta \text{ suff. piccolo} \end{cases}$$

  Ma allora se $(\boldsymbol{q}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0)) \in \mathcal{U}_\delta \implies (\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)) \in \mathcal{U}_\delta \quad \forall t$

□

Prop. 36 (criterio di instabilità di Lyapunov)**.** Studio l'esistenza di un minimo a partire dalla matrice Hessiana $H(q_1, \ldots, q_n) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right)$ di V:

$$\begin{cases} \Gamma = (\overline{\boldsymbol{q}}) \text{ configurazione di equilibrio} \\ V \text{ non ha un minimo isolato in } \Gamma = \overline{\boldsymbol{q}} \text{ e } \det H \neq 0 \end{cases} \implies \Gamma \text{ non è di equilibrio stabile.}$$

Ricordiamo che V non ha minimo isolato $\iff$ l'hessiana in Γ non è def./semidef. positiva.
Per dire se è def/semidef. pos. usare **criterio Sylvester**.

8.1 Modi normali (moto in un intorno della configurazione di equilibrio)

Considerando $\Gamma = (0, \dots, 0)$ configurazione di equilibrio per un sistema S olonomo a vincoli non dissipativi e scleronomi, a sollecitazione attiva conservativa e $V(\Gamma) = 0$ WLOG e sviluppando in serie di Taylor il potenziale V e l'energia cinetica $T = T_2$

Per $n = 1$ grado di libertà

- Lagrangiana: $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q)$
- Potenziale approssimato: $V(q) = \underbrace{V(0)}_{\text{WLOG}=0} + \underbrace{V'(q)_{|\overline{q}}}_{=0 \text{ ip.}}(q - \overline{q}) + \frac{1}{2}V''(q)_{|\overline{q}}(q - \overline{q})^2 + \dots$.
  Supponiamo $V''(q)_{|\overline{q}} \neq 0$, in particolare > 0.
- Energia cinetica approssimata: $a(q) = a(\overline{q}) + a'(q)_{|\overline{q}}(q - \overline{q}) + \dots$. Mi fermo al primo termine, perché poi devo fermarmi al secondo ordine.
- Lagrangiana approssimata: $\mathcal{L}^*(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(\overline{q})\dot{q}^2 - \frac{1}{2}V''(q)_{|\overline{q}}(q - \overline{q})^2$ allora

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(a(\overline{q})\dot{q}) + V''(\overline{q})(q - \overline{q}) = 0$$
$$a(\overline{q})\ddot{q} + V''(\overline{q})(q - \overline{q}) = 0$$

che ci dà l'equazione differenziale del moto

$$\boxed{\ddot{q} + \omega^2(q - \overline{q}) = 0} \qquad \omega^2 := \frac{V''(\overline{q})}{a(\overline{q})}$$

è eq. a coeff. costanti: equazione dell'**oscillatore armonico**

Per n gradi di libertà

$$V(q) = \underbrace{\cancel{V(\Gamma)}}_{\text{WLOG}=0} + \cancel{\sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k}\bigg|_\Gamma q_k} + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\bigg|_\Gamma q_j q_k + \dots \qquad V^*(q) := \frac{1}{2}\sum_{j,k}\overset{c^*_{jk}}{\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\bigg|_\Gamma}} q_j q_k$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad a_{jk}(q) = a_{jk}(\Gamma) + \sum_l \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l}\bigg|_\Gamma q_l + \dots \qquad T^*(q, \dot{q}) := \frac{1}{2}\sum_{j,k}\overset{a^*_{jk}}{\boxed{a_{jk}(\Gamma)}}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\mathcal{L}^* = T^* - V^* = \frac{1}{2}a^*_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k}c^*_{jk}q_j q_k$$

da cui imponendo le equazioni di Lagrange per $\mathcal{L}^*$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

si ha

$$\sum_k \left(a^*_{jk}\ddot{q}_k + c^*_{jk}q_k\right) = 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{3}$$

e ponendo $A = \left(a^*_{jk}\right)_{j,k}$ e $C = \left(c^*_{jk}\right)_{j,k}$

$$\boxed{A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}}$$

che è un sistema di n equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti. tutto è un cazzo di oscillatore armonico per piccole oscillazioni attorno all'equilibrio statico

Inoltre vale che

- A è **definita positiva** ($T > 0$)

- C è **definita positiva** se Γ è punto di equilibrio *stabile*

Definizione 8.3 (modi normali)**:** Soluzioni delle equazioni di Lagrange linearizzate (3).

Le soluzioni hanno forma $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}e^{i\omega t}$, da cui

$$\begin{cases} q_k = e^{iwt}u_k \\ \dot{q}_k = iwe^{iwt}u_k \\ \ddot{q}_k = -\omega^2 e^{iwt}u_k \end{cases}$$

$$\sum_k \left[a^*_{jk}\left(-\omega^2 u_k e^{i\omega t}\right) + c^*_{jk}\left(u_k e^{i\omega t}\right)\right] = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \sum_k \left[c^*_{jk} - \omega^2 a^*_{jk}\right] u_k = 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

ovvero

$$\left(C - \omega^2 A\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

che ha soluzioni non banali se $\det\left(C - \omega^2 A\right) = 0$, equazione polinomiale di grado n in ω^2 le cui radici $\lambda_i = \omega_i^2$ sono autovalori di C rispetto ad A.

Definizione 8.4 (Frequenze di oscillazione)**:** Sono le soluzioni $\omega_1^2 \dots \omega_n^2$ dell'equazione polinomiale

$$\det(C - \omega A) = 0$$

$\lambda_i = \omega_i^2$

8.1.1 Disaccoppiamento delle equazioni di Lagrange linearizzate

Il problema Abbiamo $A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$, l'idea della risoluzione è disaccoppiarla in

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \lambda_1 \eta_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n + \lambda_n \eta_n = 0 \end{cases}$$

(che avviene solo se le matrici A e C sono diagonali) tramite un opportuno cambiamento di coordinate $(q_1 \dots q_n) \to (\eta_1 \dots \eta_n)$ chiamate **coordinate normali**. È il modo più elegante per risolvere il problema delle oscillazioni (che sono modi normali)

Prop. 37 . Prese $A, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ **simmetriche**, A definita positiva, $\exists U$ non singolare tale che

$$U^T A U = I \qquad\qquad U^T C U = \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n) = D$$

Ovvero esiste una base ortogonale in cui A è congruente all'identità e C è congruente a una matrice diagonale (ovvero lo sono attraverso la stessa matrice ortogonale (rotazione) di cambio di base).
È chiamata **diagonalizzazione simultanea** di A e C

Dimostrazione. Sia

- U_1 matrice ortogonale che diagonalizza A (per teo. spettrale), che è def. pos. (matrice dell'energia cinetica), allora
$$A_1 := U_1^T A U_1 \qquad \text{diagonale}$$
da cui
$$C_1 := A_1^{-1/2}(U_1^T C U_1)A_1^{-1/2} \qquad \text{simmetrica}$$
- U_2 ortogonale che diagonalizza C_1, allora
$$U := U_1 A_1^{-1/2} U_2$$

$$U^T A U = U_2^T \overbrace{\boxed{A_1^{(-1/2)} \overbrace{\boxed{U_1^T A U_1}}^{A_1} A_1^{(-1/2)}}}^{I} U_2 = I \qquad\qquad U^T C U = U_2^T \overbrace{\boxed{A_1^{-1/2} U_1^T C U_1 A_1^{-1/2}}}^{C_1} U_2 = D$$

□

Cor. 5 . Gli elementi $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ della diagonale di $D = U^T C U$ sono gli autovalori di C rispetto ad A, ovvero le radici di $\det(C - \lambda A) = 0$, quindi $\lambda_i = \rho_i$

Dimostrazione. $0 = \det(D - \lambda I) = \det\left(U^T C U - \lambda U^T A U\right) = \det\left(U^T (C - \lambda A) U\right) = \left[\det\left(U^T\right)\right]^2 \det(C - \lambda A) = 0$ □

Osservazione L'autovettore $u^{(i)}$ corrispondente a λ_i è l'i-esima colonna di U

Definizione 8.5 (coordinate normali)**:** $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T$ tali che $\boldsymbol{q} = U\boldsymbol{\eta}$, dove U è la matrice che diagonalizza simultaneamente A e C.

Osservazione Le equazioni di Lagrange linearizzate diventano allora

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \qquad \left(U^T\right) A U \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \left(U^T\right) C U \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$$

Quindi

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + D\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \ddot{\eta}_1 + \lambda_1 \eta_1 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n + \lambda_n \eta_n = 0 \end{cases}$$

ovvero mi sono ricondotto a <u>n oscillatori armonici</u> con $\lambda_k = \omega_k^2$

$\lambda_k > 0$	$\lambda_k = 0$	$\lambda_k < 0$
$\eta_k(t) = c_k \cos(\omega_k t) + d_k \sin(\omega_k t)$	$\eta_k(t) = c_k t + d_k$ $({\scriptstyle \ddot{\eta}_k = 0})$	$\eta_k(t) = c_k e^{i\omega_k t} + d_k e^{-i\omega_k t}$ $({\scriptstyle i\omega_k = -\sqrt{\lvert\lambda_k\rvert}})$
Modo oscillatorio	Modo uniforme	Modo iperbolico

Prop. 38 . Per A e C definite positive (ovvero Γ stabile) $\Longrightarrow$ λ_i sono reali e **positivi**

Dimostrazione. $\mathcal{A}(u, v) = \sum_{j,k} a^*_{jk} u_j v_k$ forma bilinare associata ad A (analogo per $\mathcal{C}$ e C), per cui vale dunque che

$$\mathcal{A}(u, \overline{u}) = \mathcal{A}(v + iw, v - iw) = \mathcal{A}(v, v) + \mathcal{A}(w, w) > 0$$

Lemma 3 . Per λ, λ' soluzioni distinte dell'equazione di autovalori u, u', vale $\mathcal{A}(u, u') = 0$

Dimostrazione del lemma. Sia λ soluzione di $\det(C - \lambda A) = 0$ e u il suo autovalore, allora

$$Cu = \lambda A u \quad \rightarrow \quad \sum_h c^*_{ih} u_h = \lambda \sum_h a^*_{ih} u_h \quad \rightarrow \quad \sum_h c^*_{ih} v_i u_h = \lambda \sum_h a^*_{ih} v_i u_h \quad \rightarrow \quad \mathcal{C}(u, v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$$

La tesi dalla considerazione che $\begin{cases} \mathcal{C}(u, u') = \lambda \mathcal{A}(u, u') \\ \mathcal{C}(u, u') = \lambda' \mathcal{A}(u, u') \end{cases}$, da cui $(\lambda - \lambda')\mathcal{A}(u, u') = 0$ □

Per assurdo $\lambda \in \mathbb{C}$ soluzione con autovettore u, dunque anche $\overline{\lambda} \neq \lambda$ soluzione con autovettore $\overline{u}$, quindi $\mathcal{A}(u, \overline{u}) > 0$ ma per il lemma $\mathcal{A}(u, \overline{u}) = 0$, $\lightning$. □

Osservazione $\lambda = \frac{\mathcal{C}(u,u)}{\mathcal{A}(u,u)}$

*Esempio (**pendoli accoppiati**)*

9 Equazioni di Hamilton

S sistema olonomo a vincoli non dissipativi di grado di libertà n a sollecitazione attiva conservativa

Definizione 9.1 (trasformata di Legendre)**:** Data $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2((a,b))$ tale che $f'' > 0$ (convessa, in modo tale che la funzione f' sia strettamente crescente quindi biunivoca quindi invertibile), considero

$$\begin{cases} p = p(w) = f'(w) \\ w = w(p) := (f')^{-1}(p) \end{cases}$$

che mi dà il punto $w \in I$ che ha pendenza p. Allora la trasformata di Legendre di f è

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in I}(x^* x - f(x)), \qquad I^* = \{x^* \in \mathbb{R} : f^*(x^*) \leq \infty\}$$

ovvero

$$g(p) = p \cdot w(p) - f(w(p))$$

Teo. 30 (involutività della trasformata di Legendre)**.** g trasformata di f ammette trasformata. Tale trasformata è f stessa

Dimostrazione.

$$g'(p) = w(p) + \cancel{p \cdot w'(p)} - \cancel{\underbrace{f'(w(p))}_{=p} w'(p)} = w(p) \tag{4}$$

$$g''(p) = w'(p) = \frac{1}{f''(w)}|_{w=w(p)} > 0 \qquad \text{(derivata dell'inversa)} \tag{5}$$

quindi g ammette trasformata. Procediamo a calcolarla:

$$h(w) = w \cdot p(w) - g(p(w)) = \cancel{w \cdot p(w)} - \big(\cancel{p(w)} \cdot w - f(w)\big) = f(w)$$

□

Definizione 9.2 (trasformata di Legendre multidimensionale)**:** Data $f = f(\boldsymbol{w})$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tale che l'hessiana $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial w_i \partial w_j}\right)_{i,j}$ sia definita positiva (convessa), considero $\frac{\partial f}{\partial w_i}(\boldsymbol{w}) = p_i$ ovvero $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\nabla} f$ e posso scrivere $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{p})$, che mi dà il punto $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ che ha derivata parziale $\boldsymbol{p}$. Allora la trasformata di Legendre di f è

$$g = g(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}))$$

Osservazione La trasformata di Legendre multidimensionale è ancora dimostrabile involutiva, invertendo $\frac{\partial g}{\partial p_i} = w_i$

Hamiltoniana come trasformata di Legendre della lagrangiana Facendo la trasformata di Legendre rispetto $\dot{\boldsymbol{q}}$ (variabile attiva, $\boldsymbol{q}$ e t passive) di $\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \in C^2$, considerando che l'hessiana di $\mathcal{L}$ è

$$\mathcal{L} = (T_2 + T_1 + T_0)(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, t) \implies H_{\mathcal{L}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right)_{i,j} = (a_{ij})_{ij} = A$$

che è la matrice di T_2, che è definita positiva e $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, ovvero $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}} \mathcal{L}$, sono i momenti cinetici, che posso invertire ottenendo $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t)$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}(p, q, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(p, q, t), t) = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}\right)_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(p,q,t)}$$

$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ sono dette variabili canoniche ((p_i, q_i) v. c. coniugate), che variano nello spazio delle fasi.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\nabla}_{\dot{\boldsymbol{q}}} \mathcal{L}"] & \mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, t) \arrow[l, bend left, "\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}} \mathcal{H}"] \end{tikzcd}$$

Definizione 9.3 (sistema canonico o equazioni di Hamilton)**:** Le equazioni di Lagrange si trasformano, dopo aver fatto la trasformata di Legendre alla lagrangiana, nel sistema di $2n$ equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} & \rightarrow \text{ descrivono la dinamica} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} & \rightarrow \text{ implicito per l'uso della trasformata di Legendre} \end{cases}$$

Dimostrazione. Le prime equazioni derivano da

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) - \mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t),t\right) = \boldsymbol{p}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \overbrace{\boxed{\nabla_{\dot{\boldsymbol{q}}}\mathcal{L}}}^{\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overbrace{\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}}}^{p_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad\rightarrow\quad \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Le seconde derivano direttamente dalla trasformazione ($g'(p) = w$ della 5 con $g \rightarrow \mathcal{H}$, $p \rightarrow p$ e $w \rightarrow \dot{q}$) □

Osservazione Valgono

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

*Osservazione (**conservazione del momento cinetico**)* Se $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0$ (e dunque $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$) vale $\dot{p}_i = 0$, $p_i = \text{cost}$

Prop. 39 (conservazione dell'hamiltoniana**).** Vale

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

e perciò se $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$ (e dunque $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$) $\implies \mathcal{H} = \text{cost}$

Dimostrazione. (si può anche fare con parentesi di Poisson, vedi dopo)

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overbrace{\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}}^{=\dot{q}_i}\dot{p}_i + \overbrace{\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}}^{=\dot{p}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(\dot{q}_i\dot{p}_i - \dot{p}_i\dot{q}_i)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

□

*Osservazione (**integrale di Jacobi/Integrale generalizzato dell'energia**)* La conservazione dell'hamiltoniana $\mathcal{H} = \text{cost}$ coincide con l'integrale di Jacobi/Integrale generalizzato dell'energia. Per vincoli scleronomi, $\mathcal{H}$ coincide con la funzione energia e $\mathcal{H} = \text{cost}$ con la teorema di conservazione dell'energia o integrale primo dell'energia (cfr 16)

9.0.1 Equazioni di Hamilton tramite matrice simplettica standard

Definizione 9.4 (matrice simplettica standard)**:** $E = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -I_n \\ I_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$

Ha le seguenti proprietà:

- $E^2 = -I_{2n}$
- $E^T = -E = E^{-1}$ (antisimmetrica e ortogonale)

Definizione 9.5 (matrice simplettica)**:** A quadrata $2n \times 2n$ tale che $A^T E A = E$ ovvero

$$A^T = E(A^{-1})E^{-1}$$

cioè A è **"circa" ortogonale** (tramite la matrice E)

Prop. 40 . Le matrici simplettiche $2n \times 2n$ formano un gruppo per la moltiplicazione ($S_P(n, \mathbb{R})$)

Prop. 41 . A simplettica $\implies A^T$simplettica, e $A^{-1} = EA^TE$

Equazioni di Hamilton in forma compatta Preso $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$, posso riscrivere le equazioni di Hamilton come

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = E\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\mathcal{H}}$$

dove $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$ è detto **gradiente simplettico**

Esercizio (equazioni di Hamilton per un punto materiale in un campo di forze centrali)**.**

9.1 Campi Hamiltoniani

Dato $v = v(x,t)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}$

Definizione 9.6 (campo hamiltoniano)**:** Campo vettoriale $v = v(x,t)$ con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ per cui $\exists f = f(x,t)$ (detta hamiltoniana) di classe C^2 tale che

$$v(x,t) = E\nabla_x f(x,t)$$

$\dot{x} = v$ è detto sistema hamiltoniano e f è detta **hamiltoniana del sistema**

Definizione 9.7 (matrice hamiltoniana)**:** B matrice $2n \times 2n$ tale che $B^T E + EB = 0$ (E matrice simplettica standard), ovvero

$$B^T = E(-B)E^{-1}$$

che vuol dire che B è **"circa" antisimmetrica** (tramite la matrice E)

Teo. 31 (caratterizzazione delle matrici hamiltoniane). Sono equivalenti:

(i) B matrice hamiltoniana

(ii) $B = ES$ con S matrice simmetrica

(iii) EB simmetrica

Inoltre prese B e C hamiltoniane, sono hamiltoniane anche B^T, βB ($\beta \in \mathbb{R}$), $B \pm C$, $[B,C] \coloneqq BC - CB$

Dimostrazione. Suddividendo

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $B = ES \iff S = E^{-1}B = -EB \iff EB$ simmetrica

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) $(EB)^T = B^T E^T = -B^T E = EB$, quindi EB simmetrica

$\square$

Prop. 42 (Proprietà matrici hamiltoniane). Ha le seguenti proprietà:

- B hamiltoniana $\implies B^T$ hamiltoniana
  Dim: $B = ES$, S simmetrica $\implies B^T = (ES)^T = S^T E^T = SE^T = -SE = -I_n SE = EESE = E\widetilde{S}$ con $\widetilde{S}$ simmetrica
- B, C hamilotniane $\implies B \pm C$ hamiltoniane e $[B,C] \coloneqq BC - CB$ hamiltoniana

Osservazione (***costruzione esplicita di*** B ***hamiltoniana*** $2n \times 2n$) Sia $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\underline{a, b, c, d \text{ matrici } n \times n}$, calcolando esplicitamente $B^T E + EB$

$$B^T E + EB = \begin{pmatrix} a^T & c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^T - c & -a^T - d \\ a^T + d & b^T - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dunque} \begin{cases} b \text{ e } c \text{ simmetriche} \\ a^T + d = 0 \end{cases}$$

In particolare per matrici 2×2 ($n = 1$): B hamiltoniana $\iff$ ha traccia $a + d = 0$

Lemma 4 . $w = w(x,t)$ su Ω aperto semplicemente connesso è un campo gradiente, ovvero $w = \nabla_x f$ per qualche $f \colon \Omega \to \mathbb{R} \iff$ la sua jacobiana $J_x v(x,t)$ è simmetrica

Dimostrazione. Vedi Caratterizzazione campi irrotazionali $\square$

Teo. 32 (caratterizzazione dei campi hamiltoniani). $v = v(x,t)$ su Ω aperto semplicemente connesso è un campo hamiltoniano $\iff$ la sua jacobiana $J_x v(x,t)$ è una matrice hamiltoniana

Dimostrazione. Sia

$$\begin{aligned} v \text{ hamiltoniano } &\iff v(x,t) = E\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f(x,t) \\ &\iff Ev(x,t) = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f(x,t) \text{ (ricordando } EE = -I_n) \\ &\iff \widetilde{v} := Ev(x,t) \text{ che allora è un } \textbf{campo gradiente} \text{ su un semplicemente connesso} \\ &\iff \text{irrotazionale} \\ &\iff \text{la jacobiana } J_x\widetilde{v} \text{ è simmetrica (vedi parte su campi conservativi)} \end{aligned}$$

$J_x\widetilde{v}$ è simmetrica se e solo se vale:

$$\begin{aligned} J_x(Ev) &= (J_x(Ev))^T \\ EJ_x(v) &= (EJ_x(v))^T \quad \text{per linearità} \\ &= J_x(v)^T E^T = -J_x(v)^T E \quad \text{essendo } E^T = -E \end{aligned}$$

ovvero

$$J_x(v) = E^{-1}(-J_x(v)^T)E \iff J_x(v) \text{ è hamiltoniana}$$

□

Prop. 43 . Un campo hamiltoniano ha divergenza nulla ($\boldsymbol{\nabla}\cdot v = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$)

Dimostrazione. $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\right)\right) = 0$ □

9.1.1 Flusso hamiltoniano

Definizione 9.8 (flusso)**:** Flusso al tempo t del sistema di equazioni $\dot{x} = v(x,t)$ ($x = x(t, t_0, x_0)$)

$$\mathcal{F}^{(t)} : \Omega \longrightarrow \Omega \qquad x_0 \longmapsto \mathcal{F}^{(t)}(x_0) = x(t,t_0,x_0)$$

Teo. 33 (teorema di Liouville). Preso $\mathcal{F}^{(t)}$ flusso associato a $\dot{x} = v(x,t)$ con $v(x,t) = E\nabla_x f(x,t)$ (flusso hamiltoniano), allora $\forall V_0 \subseteq \Omega$ misurabile, il flusso hamiltoniano conserva la misura, ovvero

$$\operatorname{mis}(V_0) = \operatorname{mis}\left(\overbrace{\mathcal{F}^{(t)}(V_0)}^{V(t)}\right)$$

9.2 Parentesi di Poisson

Definizione 9.9 (Prodotto scalare simplettico)**:** Dati $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ il loro prodotto simplettico è $\boldsymbol{x}^T E\boldsymbol{y}$

Definizione 9.10 (parentesi di Poisson)**:** Prese $f = f(\boldsymbol{x},t)$ e $g = g(\boldsymbol{x},t)$ definite da $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ con $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$[f,g]_x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \overset{\text{prodotto scalare simplettico}}{\boxed{(\nabla_x f)^T E (\nabla_x g)}}$$

ovvero è il prodotto scalare simplettico dei gradienti (simplettici)

Osservazione (***parentesi fondamentali di Poisson***)

$$[q_i,p_j]_x = \sum_k \Big(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{=1 \text{ se } i=j=k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0 \text{ sempre}} \Big) = \delta_{ij} \qquad [q_i,q_j]_x = 0 \qquad [p_i,p_j]_x = 0$$

Osservazione (***proprietà delle parentesi di Poisson***)

Antisimmetrica $[f,g] = -[g,f]$ Bilineare $[\alpha f + \beta g, h] = \alpha[f,h] + \beta[g,h]$

Composizione $[f,gh] = [f,g]h + [f,h]g$ Identità di Jacobi $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$

Osservazione (***derivata totale rispetto a*** t) Sia $\varphi = \varphi(x,t)$ con $x = (p,q)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = [\varphi,\mathcal{H}] + \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Cor. 6 (Caratterizzazione integrali primi di moto). Per quanto appena visto:
φ integrale primo di moto $\iff [\varphi,\mathcal{H}] + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

Cor. 7 (Derivata totale dell'hamiltoniana). $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$

Dimostrazione. Basta prendere nell'osservazione precedente $\varphi = \mathcal{H}$ □

Prop. 44 . $\frac{d}{dt}[f,g] = \left[\frac{df}{dt}, g\right] + \left[f, \frac{dg}{dt}\right]$

Dimostrazione. Dall'osservazione precedente, dall'identità di Jacobi, dalla bilinearità e dall'antisimmetria

$$[[f,g],h] \overset{\text{antisim.}}{=} -[h,[f,g]] \overset{\text{Jacobi}}{=} [f,[g,h]] + [g,[h,f]] \quad (\star)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[f,g] &= [[f,g],\mathcal{H}] + \frac{\partial[f,g]}{\partial t} && \text{derivata totale di } u = [f,g] \\
&\overset{(\star)}{=} \boxed{[f,[g,\mathcal{H}]] + [g,[\mathcal{H},f]]} + \overset{???}{\boxed{\left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]}} \\
&= [f,[g,\mathcal{H}]] + [g,[\mathcal{H},f]] - \left[g, \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] \\
&= \left[f, [g,\mathcal{H}] + \frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[g, [\mathcal{H},f] - \frac{\partial f}{\partial t}\right] && \text{per bilinearità} \\
&= \left[f, \frac{dg}{dt}\right] + \left[\frac{df}{dt}, g\right] && \text{derivate totali dell'osservazione (+ho usato biilin. e antisimm. nel 2º membro)}
\end{aligned}$$

□

Cor. 8 (teorema di Poisson). Se f e g sono integrali primi di moto $\implies$ $[f,g]$ è un integrale primo di moto

Dimostrazione. $\frac{d}{dt}[f,g] = \left[\frac{df}{dt}, g\right] + \left[f, \frac{dg}{dt}\right] = [0,g] + [f,0] = 0$ □

Equazioni di Hamilton nella notazione delle parentesi di Poisson Dato che

$$[q_i,\mathcal{H}] = \sum_k\left(\overbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}^{=\delta_{ik}}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k} - \overbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}^{=0}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$[p_i,\mathcal{H}] = \sum_k\left(\overbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}^{=0}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k} - \overbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}^{=\delta_{ik}}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = [p_i,\mathcal{H}] \\ \dot{q}_i = [q_i,\mathcal{H}] \end{cases}$$

9.3 Trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi

Cambio di coordinate $x = (p,q)$, $\chi = (P,Q)$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t) = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)) \qquad J = \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix} \quad (\det(J) \neq 0)$$

$$\dot{x} = J \cdot v + \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

Definizione 9.11 (ammissibilità di un cambiamento di coordinate)**:** una trasformazione di coordinate $\chi = \chi(x,t)$ regolare e invertibile conserva la struttura canonica (ovvero mantiene la forma delle equazioni di Hamilton) se $\forall \mathcal{H} = \mathcal{H}(x,t)$ hamiltoniana $\exists \mathcal{K} = \mathcal{K}(\chi,t)$ (nuova) hamiltoniana per cui

$$\dot{\chi} = E\nabla_x \mathcal{K} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \end{cases}$$

Definizione 9.12 (trasformazione canonica)**:** χ è canonica se $J = \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ è una matrice simplettica

> **Teo. 34 .** Una trasformazione canonica mantiene la forma delle equazioni di Hamilton (ovvero è ammissibile)
> Ovvero: data una trasformazione $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(x,t) = (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},t))$, sapendo che $\dot{\boldsymbol{x}} = E\nabla_x \mathcal{H}$, allora se
> $$J = \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \text{ simplettica} \implies \exists \mathcal{K} : \dot{\chi} = E\nabla_x \mathcal{K} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} \end{cases}$$

Dimostrazione. Definendo $\widehat{\mathcal{H}}(\chi,t) = \mathcal{H}(x,t)|_{x=\chi(x)} = \mathcal{H}(\chi(x),t)$

$$\dot{\chi}_i(\boldsymbol{x},t) = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \cdot \overset{\dot{x}=E\nabla_x\mathcal{H}}{\boxed{\dot{x}_j}} + \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \overset{J_{i,j}}{\boxed{\frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{2n} E_{jk} \overset{\star}{\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k}}} \right) + \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \qquad \star = \frac{\partial}{\partial x_k}\mathcal{H}(\chi(x),t) = \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial \chi_m} \overset{J_{mk}}{\boxed{\frac{\partial \chi_m}{\partial x_k}}} = \sum_{m=1}^{2n} (J^T_{km}) \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial \chi_m} = (J^T \boldsymbol{\nabla} \widehat{\mathcal{H}})_k$$

$$= \sum_{j,k,m}^{2n} J_{i,j} E_{jk} J^T_{k,m} \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}}{\partial \chi_m} + \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$$

Allora

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \overset{=E}{\boxed{JEJ^T}} \nabla_\chi \widehat{\mathcal{H}} + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \underbrace{E\nabla_\chi \widehat{\mathcal{H}}}_{:=w_1} + \underbrace{\frac{\partial \chi}{\partial t}}_{:=w_2} = w_1 + w_2$$

Quindi basta dimostrare che:
w_2 è un campo hamiltoniano (w_1 lo è) $\iff B = \left(\frac{\partial}{\partial \chi_j}\left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right)\right)_{k,j}$ (jacobiana di w_2) è hamiltoniana $\iff F = EB$ simmetrica $\iff F = F^T$
Dimostro che F è simmetrica:

$$F_{ij} = (E \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{2n} E_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{2n} E_{ik} \frac{\partial \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right)}{\partial \chi_j} = \sum_{k=1}^{2n} E_{ik} \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right)}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \chi_j} = \sum_{k,l}^{2n} E_{ik} \frac{\partial}{\partial t} \left(\overset{J_{k,l}}{\boxed{\frac{\partial \chi_k}{\partial x_l}}} \right) \overset{J^{-1}_{l,j}}{\boxed{\frac{\partial x_l}{\partial \chi_j}}}$$

$$\implies F = E\left(\frac{\partial}{\partial t} J\right) J^{-1}$$

Per ipotesi J è simplettica, quindi

$$J^T E J = E$$
$$E J^T E J = E E = -I$$
$$E J^T E J J^{-1} = -J^{-1}$$
$$-E J^T J = J^{-1} \qquad \longrightarrow \star$$

Sempre essendo J simplettica ho

$$J E J^T = E$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(J E J^T) = \frac{\partial}{\partial t} E \qquad \text{derivo rispetto al tempo (E costante)}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} J\right) E J^T + J E \left(\frac{\partial}{\partial t} J^T\right) = 0$$
$$\implies \left(\frac{\partial}{\partial t} J\right) E J^T = -J E \left(\frac{\partial}{\partial t} J^T\right) \qquad \longrightarrow \spadesuit$$

Allora:

$$F = E\left(\frac{\partial}{\partial t}J\right)J^{-1} = E\left(\frac{\partial}{\partial t}J\right)(-EJ^TE) \qquad \text{per } \star$$

$$F^T = -E^TJE^T\left(\frac{\partial}{\partial t}J\right)^T E^T$$

$$\overset{\spadesuit}{=} E\boxed{JE\left(\frac{\partial}{\partial t}J\right)^T}E$$

$$= -E\left(\frac{\partial}{\partial t}J\right)\boxed{EJ^TE} = F$$

Quindi F è simmetrica $\implies w_2(\chi,t)$ hamiltoniano $\implies \exists \mathcal{H}_0(\chi,t) \mid w_2(\chi,t) = E\boldsymbol{\nabla}_\chi \mathcal{H}_0$ e quindi

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = E\boldsymbol{\nabla}_\chi\widehat{\mathcal{H}} + E\boldsymbol{\nabla}_\chi\mathcal{H}_0 = E\boldsymbol{\nabla}_\chi(\underbrace{\widehat{\mathcal{H}}+\mathcal{H}_0}_{:=\mathcal{K}}) = E\boldsymbol{\nabla}_\chi\mathcal{K}$$

□

Osservazione Riassumiamo le tre caratterizzazioni tramite le Jacobiane:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}f \text{ (campo gradiente)} \overset{\text{sempl.conn.}}{\iff} J_xv\,(x,t) \textbf{ simmetrica}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = E\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}f \text{ (campo hamiltoniano)} \overset{\text{sempl.conn.}}{\iff} J_xv\,(x,t) \textbf{ hamiltoniana} \text{ (simil-"antisimmetrica")}$$

$$\chi \text{ è canonica} \overset{\text{def}}{\iff} J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\chi} = \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \text{ è } \textbf{simplettica} \text{ (simil-"ortogonale")}$$

Teo. 35 (caratterizzazione delle trasformazioni canoniche con le parentesi di Poisson). $\chi\,(x,t)$ trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi. Sono equivalenti:

(i) χ trasformazione canonica

(ii) (Conservazione parentesi di Poisson) $\forall f\,(x,t)\,, g\,(x,t)$, prese $F\,(\chi,t) = f\,(x\,(\chi,t)\,,t)$ e $G\,(\chi,t) = g\,(x\,(\chi,t)\,,t)$ vale

$$[f,g]_{x=(p,q)} = [F,G]_{\chi=(p,q)}$$

(iii) (Conservazione parentesi fondamentali di Poisson):

$$[Q_i,P_j]_x = \delta_{ij}$$
$$[Q_i,Q_j]_x = 0$$
$$[P_i,P_j]_x = 0$$

Dimostrazione. Suddividendo

(i) $\Rightarrow$ (ii) χ canonica $\implies [f,g]_x = (\boldsymbol{\nabla}_xf)^TE\boldsymbol{\nabla}_xg$. Calcolando $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial F}{\partial\chi_k}\cdot\frac{\partial\chi_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{\partial F}{\partial\chi_k}\cdot J^T_{ik}$ (analogo per $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) $\implies \nabla_xf = J^T\nabla_\chi F$, quindi

$$[f,g]_x = (\nabla_xf)^T E\,(\nabla_xf) = \left(J^T\nabla_\chi F\right)^T E\left(J^T\nabla_\chi F\right) = (\nabla_\chi F)^T\underbrace{JEJ^T}_{=E}(\nabla_\chi F) = (\nabla_\chi F)^T E\,(\nabla_\chi F) = [F,G]_x$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Banale (caso particolare)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tesi: $J^TEJ = E$, con $J = \begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q}\\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}\end{pmatrix}$. Posso scrivere $J^TEJ = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ con $A_{ij} = [P_i,P_j]_x$, $B_{ij} = [P_i,Q_j]_x$, $C_{ij} = [Q_i,P_j]_x$, $D_{ij} = [Q_i,Q_j]_x$

□

Osservazione Per $n=1$ basta verificare che $[Q_1,P_1]_{(p_1,q_1)} = [p,q]_{(p,q)} = \delta_{ij}$

9.3.1 Trasformazioni completamente canoniche e Hamiltoniana trasformata

Definizione 9.13 (trasformazione completamente canonica)**:** $\chi = \chi(x)$ indipendente dal tempo

Osservazione Per una trasformazione completamente canonica χ vale $\mathcal{K}(\chi,t) = \widehat{\mathcal{H}}(\chi,t) = \mathcal{H}(x,t)|_{x=\chi(x)}$, mentre in generale $\dot{\chi} = E\nabla_\chi \widehat{\mathcal{H}}(\chi,t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}$

Prop. 45 . Per una trasformazione canonica qualsiasi χ, vale

$$\mathcal{K}(\chi,t) = \widehat{\mathcal{H}}(\chi,t) + \mathcal{K}_0 \qquad \text{con } \mathcal{K}_0 \text{ ottenuto rsolvendo } \frac{\partial \chi}{\partial t} = E\nabla_\chi \mathcal{K}_0$$

Principio di Hamilton in forma hamiltoniana

Definizione 9.14 (azione hamiltoniana nello spazio delle fasi)**:** $\mathcal{A}(p,q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} p\cdot\dot{q} - \mathcal{H}(p,q,t)\,dt$

Principio di Hamilton Il moto naturale è caratterizzato dal rendere stazionaria l'azione hamiltoniana nello spazio delle fasi nella classe delle perturbazioni sincrone con le stesse posizioni iniziale $q(t_0)$ e $q(t_1)$.

9.3.2 Funzioni generatrici

Definizione 9.15 (forma di Poincarè - Cartan)**:** Forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \mathcal{H}(p,q,t)\,dt$

Definizione 9.16 (condizione di Lie)**:** χ trasformazione soddisfa la condizione di Lie se la differenza delle forme di Poincarè - Cartan nelle due coordinate è un differenziale esatto, ovvero esiste $F = F(p,q,t)$ per cui

$$\omega - \Omega = \sum_{i=1}^n (p\cdot dq - \mathcal{H}(p,q,t)\,dt) - \sum_{i=1}^n (P\cdot dQ - \mathcal{K}(P,Q,t)\,dt) = dF$$

Teo. 36 (caratterizzazione delle trasformazioni canoniche). χ è una trasformazione canonica $\iff$ soddisfa la condizione di Lie.

Definizione 9.17 (trasformazione canonica libera)**:** trasformazione canoncica $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t),\ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t)$ si dice libera se $\det\left(\frac{\partial q_i}{\partial P_i}\right) \neq 0$

Osservazione Per il teorema del Dini applicato a $q = q(p,q,t)$ si può scrivere $P = P(q,Q,t)$ e $p = p(q,Q,t)$, da cui la relazione precedente si trasforma in

$$dF(q,Q,t) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n p_i(q,Q,t)\cdot dq_i - \mathcal{H}(q,Q,t)\,dt\right) - \left(\sum_{i=1}^n P_i(q,Q,t)\cdot dQ_i - \mathcal{K}(q,Q,t)\,dt\right) \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\cdot dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\cdot dQ_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\cdot dt \end{cases} \qquad \begin{cases} p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione deriva $\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial Q_i}$, da cui vale $\det\left(\frac{\partial q_i}{\partial P_i}\right) \neq 0 \iff \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_i}\right) \neq 0$

Definizione 9.18 (funzione generatrice di tipo n)**:** F_n con $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_i}\right) \neq 0$ è detta funzione generatrice di tipo n della trasformazione canonica definita in modo implicito da

n	F_n	Condizione	Trasformazione
1	$F_1(q,Q,t)$	$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_i}\right) \neq 0$	$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases}$
2	$F_2(q,P,t)$	$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial P_i}\right) \neq 0$	$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases}$

n	F_n	Condizione	Trasformazione
3	$F_3(p,Q,t)$	$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_i \partial Q_i}\right) \neq 0$	$\begin{cases} q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \\ P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases}$
4	$F_p(p,P,t)$	$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_i \partial P_i}\right) \neq 0$	$\begin{cases} q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \\ Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ \mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{cases}$