Cheatsheet MQ

- **Operatori notevoli:**

$$\begin{array}{llll} \text{Posizione:} & X\psi := x\psi & \boldsymbol{X}\psi = \boldsymbol{x}\psi \\ & X^2\psi = x^2\psi & \boldsymbol{X}^2\psi = \|\boldsymbol{x}\|^2\psi \\ \\ \text{Momento:} & P\psi := -i\hbar\partial_x\psi & \boldsymbol{P}\psi = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\psi \\ & P^2 = -\hbar^2\partial_x^2\psi & \boldsymbol{P}^2 = -\hbar^2\Delta\psi \end{array}$$

Parte I
Sistemi fisici notevoli

1 Oscillatore armonico

- **Monodimensionale:**

$$\boxed{H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2}$$

che ha

$$H \begin{cases} \text{autovalori:} & E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) & n \in \mathbb{N}_0 \\ \text{autovettori:} & |n\rangle = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\kappa x) e^{-\frac{1}{2}\kappa^2x^2} & \kappa := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \end{cases}$$

Definiamo

$$\begin{cases} a := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P & \text{distruzione} \\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P & \text{creazione} \\ \left[a, a^\dagger\right] = \mathbb{I} \end{cases} \implies \begin{cases} a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \boxed{a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle} \end{cases} \qquad \boxed{H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}$$

- **Bidimensionale:**

$$\boxed{H = H_x + H_y} = \sum_{i=1}^{2}\hbar\omega_i\left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2}\right)$$

con i relativi $P_x, X, \omega_x, a_x^\dagger a_x$ e analoghi su y, dove gli a_i soddisfano

$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij} \qquad [a_i, a_j] = 0$$

Autovalori sono della forma $|n_x\rangle \otimes |n_y\rangle = |n_x, n_y\rangle$, NB rimane una b.o.c. Quindi ha autovalori

$$E_n = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) \qquad n_x + n_y \in \mathbb{N}_0$$

2 Particella libera

$$H = \underbrace{\frac{P^2}{2m}}_{\text{operatore cinetico}} = -\hbar^2\Delta$$

3 Potenziale centrale

$$\boxed{H = \frac{P^2}{2m} + V(R)} \qquad R \coloneqq \|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

Si dimostra che tale hamiltoniana soddisfa la condizione iff per la simmetria per rotazioni del sistema, ovvero

$$\text{sistema simmetrico per rotazioni} \iff [L_i, H] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

4 Buca di potenziale infinita

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

Problema agli autovalori

$$\begin{cases} H\psi = E\psi \\ \psi|_\partial = 0 \qquad \text{condizione al bordo} \end{cases}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{array}{rlll} (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) & \text{Autovalori:} & E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2 & n \in \mathbb{N}_1 \\ & \text{Autovettori:} & |\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\overset{\sin}{\cos}(\frac{n\pi x}{a}) & n \overset{\text{pari}}{\text{dispari}} \in \mathbb{N}_1 \\ (0, a) & \text{Autovalori:} & \text{uguali} & \\ & \text{Autovettori:} & |\psi_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a}) & n \in \mathbb{N}_1 \end{array}$$

Parte II
Tecniche

- Per scrivere un operatore come matrice in una base $\{\psi_n\}_n$, gli elementi di matrice sono

$$H_{ij} = \langle\psi_i| H |\psi_j\rangle$$

- Se ho Hamiltoniana di due particelle per esempio $H = \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J_1} + J_2$ ho che $U(t) = e^{-i/\hbar\cdot(J_2+J_2)t}$ e vale in generale

$$[A, B] = 0 \implies e^{A+B} = e^A e^B$$

5 Calcolo delle probabilità

- **Regola di Born:** dato un operatore A, $a \in \sigma(A)$ e Π_{S_a} il proiettore su $S_a = a$-autospazio di A, abbiamo

$$\boxed{P(A = a \mid \psi) = \langle\psi| \Pi_{S_a} |\psi\rangle} = \sum_i^{dim(S_a)} |\langle\psi|\psi_{a,i}\rangle|^2 = \sum_i^{dim(S_a)} |\langle\psi_{a,i}|\psi\rangle|^2$$

Se a è non degenere allora $\Pi_a = |\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ e la regola assume la forma più semplice

$$P(A = a \mid \psi) = \langle\psi|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\psi\rangle = |\langle\psi_a|\psi\rangle|^2$$

Se invece vogliamo calcolare la probabilità che la misura cada in $\mathcal{X} \subseteq \sigma(A)$, basta definire

$$\Pi_{\mathcal{X}} \coloneqq \sum_{a\in\mathcal{X}} \Pi_a$$

e metterlo nella regola di Born, ovvero è la somma delle probabilità singole.

- **Probabilità di transire da uno stato a un altro:** al tempo t con stato target $\overline{\psi}$

$$P_t(\psi(t) = \overline{\psi}) = \left|\left\langle\overline{\psi}\middle|\psi(t)\right\rangle\right|^2 \qquad \psi(t) = U(t)\psi(0)$$

Più rigorosamente, questa è una semplice applicazione della regola di Borni definendo l'**operatore target** T:

$$T \coloneqq \Pi_{\overline{\psi}} = \left|\overline{\psi}\right\rangle\left\langle\overline{\psi}\right|$$

che è già diagonalizzato e ha autovalori $0, 1$. Quindi noi vogliamo calcolare

$$P(T = 1 \mid \psi(t)) \overset{\text{Born}}{=} \langle\psi(t)| T |\psi(t)\rangle = \left\langle\psi(t)\middle|\overline{\psi}\right\rangle\left\langle\overline{\psi}\middle|\psi(t)\right\rangle = \left|\left\langle\overline{\psi}\middle|\psi(t)\right\rangle\right|^2$$

- **Valori medi:** il valore atteso/medio di A nello stato ψ è

$$\boxed{\langle A\rangle_\psi = \langle\psi| A |\psi\rangle}$$

6 Evoluzione temporale (tempo-indipendente)

- Mettersi sempre nella base degli autostati di H
- **Equazione di Schrodinger:**

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle}$$

che ha come soluzione

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H \cdot (t - t_0)\right\} |\psi(t_0)\rangle \coloneqq U(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

e quindi se abbiamo lo spettro di H puramente discreto:

$$U(t - t_0) = \sum_{n=1}^{\sigma_p(H)} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n\cdot(t-t_0)} \Pi_n$$

7 Momento angolare

a.m. = angular momentum
q.n. = quantum number

Cosa riguarda	**Numero quantico**	**Nome** (in generale)	**In generale** (J)	**Orbitale** (L)	**Spinoriale** (S)
J^2	j	*Total a.m. q.n.*	Autov.: $\hbar j(j+1)$	$l \in \mathbb{N}$ (variabile): *azimuthal q.n.*	$s \in \mathbb{N}/2$ (fissato): *spin q.n.*
J_3	m	*Total a.m. projection q.n.*	Autov.: $\hbar m$	$m \in \{-l, \dots, +l\}$: *magnetic q.n.*	$m \in \{-s, \dots, +s\}$: *spin projection q.n.*

- **In generale:**

$$\boxed{\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)} \text{ momento angolare} \iff [J_a, J_b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{a,b,c} J_c \quad \forall a, b, c \in \{1, 2, 3\}$$

Da ciò segue che

$$\boldsymbol{J}^2 := \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} = \sum_{a=1}^{3} J_a^2 \implies \left[J^2, J_a\right] = 0 \quad \forall a \in \{1, 2, 3\}$$

Allora, dicendo α la degenerazione abbiamo la seguente **diagonalizzazione simultanea di** J_3 **e** J^2:

$$\begin{cases} J_3 := \text{comp. lungo z di } \boldsymbol{J} \\ J^2 := \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J} \\ J_\pm := J_1 \pm i J_2 \end{cases} \implies \begin{cases} J_3 \left|j, m, \alpha\right\rangle = & \hbar m & \cdot \left|j, m, \alpha\right\rangle \\ J^2 \left|j, m, \alpha\right\rangle = & \hbar^2 j(j+1) & \cdot \left|j, m, \alpha\right\rangle \\ J_\pm \left|j, m, \alpha\right\rangle = & \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} & \cdot \left|j, m \pm 1, \alpha\right\rangle \end{cases}$$

dove

$$\begin{array}{llll} j & \in \mathbb{N}/2 & \text{tale che} & \hbar^2 j(j+1) \in \sigma_p(J^2) \\ m & \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} & \text{tale che} & \hbar m \in \sigma_p(J_3) \end{array}$$

ovvero, se stiamo lavorando con spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora a j fissato lavoreremo nel sottospazio

$$\mathcal{H}_j = \mathbb{C}^{2j+1}$$

(nel caso di spin $\sigma_p(S^2) = \{1\}$ a meno di costanti, quindi lo spazio risultante totale è solo $\mathbb{C}^{2j+1}$)

- **Operatori scaletta:** sono utili quando mi chiedono cose da calcolare su J_x o J_z, infatti posso esprimerli in funzione di $J_\pm$ (che so come agiscono sugli autovettori) tramite

$$J_1 = \mathrm{Re}(J_+) = \frac{J_+ + J_-}{2} \qquad J_2 = \mathrm{Im}(J_+) = \frac{J_+ - J_-}{2i}$$

Inoltre quando applico un operatore scaletta che mi farebbe andare fuori scala (oltre $\pm l$) allora pongo a 0 il risultato

- **Orbitale:** in $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\boxed{\boldsymbol{L} := \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{P}} \quad \text{ovvero} \quad (L_1, L_2, L_3) = L_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} X_j P_k$$

Esplicitamente

$$\text{coord. cartesiane} \begin{cases} L_1 = X_2 P_3 - X_3 P_2 \\ L_2 = X_3 P_1 - X_1 P_3 \\ L_3 = X_1 P_2 - X_2 P_1 \end{cases} \qquad \text{coord. sferiche} \begin{cases} L_1 = i\hbar\big(\sin(\phi)\partial_\theta + \cos(\phi)\cot(\theta)\partial_\phi\big) \\ L_2 = i\hbar\big(-\cos(\phi)\partial_\theta + \sin(\phi)\cot(\theta)\partial_\phi\big) \\ \boxed{L_3 = -i\hbar\partial_\phi} \end{cases}$$

$$L^2 = X^2 P^2 - (\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{P})^2 + i\hbar(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{P})$$

Valgono le seguenti **relazioni di commutazione:** $\forall \boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}\}$

$$\begin{aligned}
[L_i, A_j] &= i\hbar \textstyle\sum_{i,j}^3 \varepsilon_{ijk} A_k && \forall i,j,k \in \{1,2,3\} && \implies \boxed{[L_i, A_i] = 0} \quad \forall i \\
[L_i, \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2] &= 0 && \forall \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \in \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}\} && \implies \boxed{[L_i, \boldsymbol{A}^2] = 0} \quad \forall \boldsymbol{A} \\
[L_i, H] &= 0 && \text{se a simmetria sfeirca}
\end{aligned}$$

Considerando $l := j$ per convenzione, abbiamo:

- Non ci sono ulteriori degenerazioni α, quindi consideriamo gli autovettori $|l, m\rangle$
- $l \in \mathbb{N}$ (e non $\in \mathbb{N}/2$)
- Considerando

  $$L^2(\mathbb{R}^3, d^3\boldsymbol{x}) \cong L^2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes \underbrace{L^2(S^2, d\Omega)}_{L^2([0,\pi], \sin\theta d\theta) \otimes L^2([0,2\pi], d\phi)}$$

  Allora vale

  $$L_i = \mathbb{I}_r \otimes \widetilde{L_i} \qquad L^2 = \mathbb{I}_r \otimes \widetilde{L}^2$$

  e quindi possiamo considerare gli autovettori di L_3 solo in funzione di ϕ, θ (ovvero autovettori di $\widetilde{L_3}$), che sono le **armoniche sferiche** (tutte <u>ortonormali</u> tra loro):

  $$|l, m\rangle := Y_\ell^m(\theta, \phi) = \underbrace{(-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}}_{\text{per normalizzare}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}$$

  con $P_l^m(x)$ i polinomi associati di Legendre (p. 140). Nel caso di una particella vincolata a muoversi su $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ si riducono a

  $$\psi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\theta} \quad n \in \mathbb{N}$$

- **Spin** 1/2**:** in $\mathbb{C}^2$

  $$\boxed{\boldsymbol{S} := \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{ovvero} \quad (S_x, S_y, S_z) = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

  con

  $$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  e definiamo

  $$\begin{array}{lll}
  \text{direzione } \pm z & |\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 1\text{-autovettore di } \sigma_z \text{ (di } \boxed{S_z \text{ e } S^2}) \\
  & |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & -1\text{-autovettore di } \sigma_z \text{ (di } \boxed{S_z \text{ e } S^2}) \\
  \text{direzione } \pm x & |\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle) & \pm 1\text{-autovettore di } \sigma_x \text{ (di } S_x) \\
  \text{direzione } \pm y & |\pm i\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i\,|\downarrow\rangle) & \pm 1\text{-autovettore di } \sigma_y \text{ (di } S_y)
  \end{array}$$

- **Spin** 1**:** in $\mathbb{C}^3$

8 Composizione di momenti angolari

Abbiamo sistema composto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

con operatori

$$\text{m.a. singoli} \begin{cases} J_{1i} = \widetilde{J_{1i}} \otimes \mathbb{I}_2 & \forall i \in \{1,2,3\} \\ J_{2i} = \mathbb{I}_2 \otimes \widetilde{J_{2i}} & \forall i \in \{1,2,3\} \end{cases} \qquad \text{m.a. totale} \begin{cases} \boxed{\boldsymbol{J} := \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2} = \widetilde{\boldsymbol{J}}_1 \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 + \widetilde{\boldsymbol{J}}_2 \\ J_i = J_{1i} + J_{2i} \\ \boldsymbol{J}^2 = \cdots = \boldsymbol{J}_1^2 + \boldsymbol{J}_2^2 + 2\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2 \\ \boxed{\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{J}_1^2 - \boldsymbol{J}_2^2) \\ \boldsymbol{J}_\pm := J_x \pm iJ_y = \cdots = J_{1\pm} + J_{2\pm} \end{cases} \quad \forall i \in \{1,2,3\}$$

Molto spesso abbiamo che $[J_{1i}, H] \neq 0$, $[J_{2j}, H] \neq 0$ ma $[J_i, H] = 0$ e quindi è più comodo lavorare con $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$. Allora faccio un cambio di base:

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = \underbrace{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle}_{\text{comuni a } (J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z})} \quad \mapsto \quad \underbrace{|j_1, j_2; j, m, \alpha\rangle}_{\text{comuni a } (J^2, J_z, J_1^2, J_2^2)} \quad \text{con } \begin{cases} j := |j_1 \pm j_2| \in \{|j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2\} \\ m := m_1 + m_2 \in \{-j, \dots, j\} \end{cases}$$

NOTA: le due quaterne di operatori **non commutano tra loro** (ovvero hanno autospazi diversi):

$$(J_1^2, \boxed{J_{1z}}, J_2^2, J_{2z}) \qquad \longleftrightarrow \qquad (\boxed{J^2}, J_z, J_1^2, J_2^2)$$

(NB non omettere j_1, j_2 quando sono entrambi non fissati, poiché lo stesso j si può raggiungere con combinazioni diverse di $|j_1 \pm j_2|$) e gli autovalori sono quelli naturali:

$$\begin{array}{ccc} J_i^2 & \text{agisce normalmente su} & j_i \\ J_{i,z} & \text{agisce normalmente su} & m_i \\ J^2 & \text{agisce normalmente su} & j \\ J_z & \text{agisce normalmente su} & m \\ J_\pm & \text{agisce normalmente su} & j, m \end{array}$$

Il cambio di base si calcola trammite i coefficienti di Clebsh-Gordan $C(j, m; m_1, m_2)$:

$$|j_1, j_2; j, m, \alpha\rangle = \sum_{m_1 = -j_1}^{j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{j_2} C(j, m; m_1, m_2) \cdot |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

- **Due particelle con spin** $1/2$**:** $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$

$$|{}^1\!/\!_2, {}^1\!/\!_2;\ s, m\rangle \begin{cases} |1\ 1\rangle & = |\uparrow\uparrow\rangle \qquad\qquad\quad \text{Tripletto (\textbf{simmetrico rispetto allo scambio})} \\ |1\ 0\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |1\ -1\rangle & = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |0\ 0\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{Singoletto (\textbf{antisimmetrico rispetto allo scambio})} \end{cases}$$

$$|{}^1\!/\!_2, m_1; {}^1\!/\!_2, m_2\rangle \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle & = |1\ 1\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\ 0\rangle + |0\ 0\rangle) \\ |\downarrow\uparrow\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\ 0\rangle - |0\ 0\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle & = |1\ -1\rangle \end{cases}$$

  Quando abbiamo stati misti tipo $|+\ \uparrow\rangle$ basta fare

$$|+\ \uparrow\rangle = |+\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$

- **Una particella con momento orbitale e spinoriale (**$1/2$**):** abbiamo

$$\mathcal{H} = \underbrace{L^2(S^2, d\Omega)}_{L^2([0,\pi], \sin\theta d\theta) \otimes L^2([0,2\pi], d\phi)} \otimes \mathbb{C}^2$$

  Tutte le volte che voglio considerare le osservabili

$$\begin{array}{l} \boxed{\boldsymbol{J} := \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}} \\ J^2 \\ \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \end{array}$$

  oppure **l'hamiltoniana accoppia due momenti angolari tra loro (e quindi** S_i, L_i **non sono costanti del moto)**, faccio solito cambio base

$$|l, m_l\rangle \otimes |{}^1\!/\!_2, m_s\rangle = \underbrace{|l, m_l; {}^1\!/\!_2, m_s\rangle}_{\text{comuni a } (L^2, L_z, S^2, S_z)} \quad \mapsto \quad \underbrace{|l, {}^1\!/\!_2; j, m_j\rangle}_{\text{comuni a } (J^2, J_z, L^2, S^2)} \quad \text{con } \begin{cases} l \in \mathbb{N} \\ m_l \in \{-l, \dots, l\} \\ m_s \in \{-{}^1\!/\!_2, {}^1\!/\!_2\} \\ j = |l - {}^1\!/\!_2|, \dots, l + {}^1\!/\!_2 \\ m_j := m_l + m_s \in \{-j, \dots, j\} \end{cases}$$

9 Teoria delle perturbazioni

$$\boxed{H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1} \quad \lambda \in [0,1]$$

dove

$$\begin{cases} H_0 & \text{hamiltoniana di cui conosco lo spettro (operatore autoaggiunto)} \\ H_1 & \text{perturbazione (operatore autoaggiunto)} \end{cases}$$

e ponendo per ipotesi che autovalori e autovettori di $H(\lambda)$ siano funzioni analitiche in $\lambda = 0$, ovvero

$$H(\lambda) \begin{cases} E_n(\lambda) = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots & \in C^\omega([0,1]) \\ |\psi_n(\lambda)\rangle = \underbrace{\left|\psi_n^{(0)}\right\rangle}_{\in S_n} + \lambda \underbrace{\left|\psi_n^{(1)}\right\rangle}_{\in S_n^\perp} + \lambda^2 \underbrace{\left|\psi_n^{(2)}\right\rangle}_{\in S_n^\perp} + \dots & \in C^\omega([0,1]) \end{cases}$$

Allora ponendo:

$$H_0 \begin{cases} \text{autovalori:} & E_n & n \in \mathbb{N} \\ \text{autovettori:} & |\psi_{n,k}\rangle & k \in \{1, \dots, N := \dim(S_n)\} \\ \text{autospazi:} & S_n & = \text{span}_k\{|\psi_{n,k}\rangle\} \\ \text{proiettori:} & \Pi_n & = \sum_{k=1}^N |\psi_{n,k}\rangle \langle \psi_{n,k}| \\ \text{proiettori}^\perp\text{:} & Q_n & = \mathbb{I} - \Pi_n \end{cases}$$

Allora in generale vale sempre:

$$\boxed{\begin{aligned} E_n^{(0)} &= E_n \\ E_n^{(j)} &= \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_n^{(j-1)} \right\rangle \end{aligned}}$$

- **Livello E_n non degenere ($\dim S_n = 1$):**

$$\begin{cases} E_n^{(0)} = E_0 \\ E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \\ E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left|\left\langle \psi_n^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_m^{(0)} \right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle = |\psi_n\rangle \\ \left|\psi_n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\left\langle \psi_m^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left|\psi_m^{(0)}\right\rangle \\ \left|\psi_n^{(2)}\right\rangle = ? \end{cases}$$

- **Livello E_n degenere ($\dim S_n = N > 1$):**

$$\begin{cases} E_n^{(0)} = E_n \\ E_{n,h}^{(1)} = \left\langle \psi_{n,h}^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_{n,h}^{(0)} \right\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\psi_{n,h}^{(0)}\right\rangle = \sum_{k=1}^N \underbrace{\left\langle \psi_{n,k} \middle| \psi_{n,h}^{(0)} \right\rangle}_{:= c_{n,k,h}} |\psi_{n,k}\rangle \quad h = 1, \dots, N \\ \left|\psi_{n,h}^{(1)}\right\rangle = \sum_{m \neq n,\ \left|\psi_m^{(0)}\right\rangle \notin S_n^{\text{deg.}}} \frac{\left\langle \psi_m^{(0)} \middle| H_1 \middle| \psi_{n,h}^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left|\psi_m^{(0)}\right\rangle \end{cases}$$

Per trovare $E_{n,h}^{(1)}$ e $\left|\psi_n^{(0)}\right\rangle$ devo

1. Restringere H_1 a S_n e mettere l'applicazione bilineare H_1 nella base $\{|\psi_{n,k}\rangle : k = 1, \dots, N\}$, ovvero

$$\begin{aligned} \Pi_{S_n} H_1 \Pi_{S_n} &= \left(\sum_k |\psi_{n,k}\rangle \langle \psi_{n,k}|\right) H_1 \left(\sum_k |\psi_{n,k}\rangle \langle \psi_{n,k}|\right) \\ &= \boxed{\Big(\langle \psi_{n,i}| H_1 |\psi_{n,j}\rangle \Big)_{ij}} \\ &:= W \qquad \text{(matrice)} \end{aligned}$$

2. Trovo gli N autovalori di $W \longrightarrow$ sono gli $E_{n,h}^{(1)}$ (supponendo di aver già tolto la degenerazione)

3. Trovo gli N autovettori di $W \longrightarrow$ le cui componenti sono i $c_{n,k,h}$. Essendo nella base $\{|\psi_{n,k}\rangle : k = 1, \dots, N\}$, allora scrivo tali autovettori nella base standard, ovvero combino linearmente la base per le N componenti $c_{n,k,h}$ di tali vettori. Poi NORMALIZZO:

$$1 = \left\langle \psi_{n,h}^{(0)} \middle| \psi_{n,h}^{(0)} \right\rangle = \dots$$

Ciò che ottengo è il $\left|\psi_{n,h}^{(0)}\right\rangle$ finale.

Quindi l'espansione al primo ordine in λ di $E_n(\lambda), |\psi_n(\lambda)\rangle$ degenere non sarà più unica, ma splittata in N espansioni diverse, al variare di h (supponendo di aver tolto la degenerazione al primo ordine):

$$E_n(\lambda) : \begin{cases} E_{n,1}(\lambda) & = E_n^{(0)} + \lambda E_{n,1}^{(1)} + o(\lambda) \\ & \vdots \\ E_{n,h}(\lambda) & = E_n^{(0)} + \lambda E_{n,h}^{(1)} + o(\lambda) \\ & \vdots \\ E_{n,N}(\lambda) & = E_n^{(0)} + \lambda E_{n,N}^{(1)} + o(\lambda) \end{cases} \qquad |\psi_n(\lambda)\rangle : \begin{cases} |\psi_{n,1}(\lambda)\rangle & = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \lambda \left|\psi_{n,1}^{(1)}\right\rangle + o(\lambda) \\ & \vdots \\ |\psi_{n,h}(\lambda)\rangle & = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \lambda \left|\psi_{n,h}^{(1)}\right\rangle + o(\lambda) \\ & \vdots \\ |\psi_{n,N}(\lambda)\rangle & = \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle + \lambda \left|\psi_{n,N}^{(1)}\right\rangle + o(\lambda) \end{cases}$$

10 Due particelle indistinguibili

Sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ spazi di due particelle, E l'operatore di scambio:

$$E(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$

ed $\sigma(E) = \{\pm 1\}$ con i relativi autospazi $\mathcal{H}_\pm$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \boxed{\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-}$$

Abbiamo che

$$\boxed{\text{particelle indistinguibili} \iff |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_\pm}$$

$$\begin{array}{lll} \in \mathcal{H}_- \quad |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \ \text{totalmente antisimmetrici} & \longrightarrow & \textbf{fermioni (spin semi-intero)} \\ \in \mathcal{H}_+ \quad |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \ \text{totalmente simmetrici} & \longrightarrow & \textbf{bosoni (spin intero)} \end{array}$$

- **Hamiltoniane spaziali:** $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \cong L^2(\mathbb{R}^2)$, allora

$$E\,|\psi(x,y)\rangle = |\psi(y,x)\rangle$$

- **Hamiltoniane spaziali+spinoriali:** raggruppo tutto in parte spaziale $\otimes$ parte spinoriale:

$$\mathcal{H} = \left(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s_1+1}\right) \otimes \left(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s_2+1}\right) = \underbrace{\left(L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)\right)}_{|\phi\rangle} \otimes \underbrace{\left(\mathbb{C}^{2s_1+1} \otimes \mathbb{C}^{2s_2+1}\right)}_{|\chi\rangle}$$

e ho

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \begin{cases} \text{se fermioni} \begin{cases} |\psi\rangle \ \text{simm. e } |\chi\rangle \ \text{asimm.} \\ |\psi\rangle \ \text{asimm. e } |\chi\rangle \ \text{simm.} \end{cases} \\ \text{se bosoni} \begin{cases} |\psi\rangle, |\chi\rangle \ \text{simm.} \\ |\psi\rangle, |\chi\rangle \ \text{asimm.} \end{cases} \end{cases}$$

- **Determinare la simmetria della parte di spin:** si ha $s_{tot} \in \{|s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2\}$ e si ha, per qualunque m

$$\begin{array}{ll} s_{max} & \text{sym. } (\textbf{sempre}) \\ s_{max} - 1 & \text{a-sym.} \\ s_{max} - 2 & \text{sym.} \\ \vdots & \\ s_{min} & \end{array}$$

si continua alternando.