Distribuzioni discrete

1 Uniforme

2 Bernoulli

È la funzione di ripartizione di una var. aleatoria discreta che assume il valore 1 con probabilità p e il valore 0 con probabilità $q = 1 - p$. È il modello per un esperimento singolo che che fa una domanda con risposta sì/no. Quindi può essere valutato in maniera booleana (1=vero con prob. p, 0=falso con prob $1 - p$).
Funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \to x \text{ non assume mai valori } < 0 \text{ in quanto assume solo 0,1} \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \to \text{siamo nel complementare } (x < 1) \text{ di quando la prob. è } p \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Funzione indicatrice

È un esempio di variabile di Bernoulli. Sia $A \in \mathcal{F}$ un evento. La funzione indicatrice di A è:

$$I_A : \Omega \to \mathbb{R} \quad | \quad I_A(\omega \in \Omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \in A^C \end{cases}$$

La media è: $\mathbb{E} I_A = \mathbb{P}(A)$

3 Binomiale (Bernoulli finito)

parametri	PMF	$\mathbb{E}[X]$	Var(X)
$n \in \mathbb{N}$ (numero di esperimenti) $0 < p < 1$ (prob. del singolo successo)	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$

Quando si fanno n esperimenti di Bernoulli identici (**con reimmissione** nel caso di un urna) e indipendenti e si vuole sapere qual è la probabilità di avere k successi.

Trinomiale (multinomiale)

Come la binomiale, solo che non ho un solo tipo di successo e fallimento, ma due tipi di successo (per esempio voglio estrarre estrarre tot biance e tot rosse in un urna con tre o più colori) e un fallimento (ovvero le palline restanti).

$$\mathbb{P}(X = k, Y = h) = \binom{n}{k \quad h} p^k q^h (1 - p - q)^{n-k-h}$$

Proprietà

- Somma di n binomiali **indipendenti** è una binomiale di paramentri:

$$X_i \sim Bin(n_i, p) \implies \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Bin(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$$

4 Poisson

Serve per misurare la probabilità che un evento che accade mediamente nell'unità di tempo λ volte, accada invece n volte.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

dove:

- k numero di eventi nell'unità di tempo con cui è espressa λ
- λ numero medio di eventi che accadono nell'unità di tempo.

Costruzione

Prendo distribuzione binomiale $P(E_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, tengo $k \in \{0, 1, 2 \dots\}$ fisso ma faccio dipendere $p = p_n$ da n col vincolo $n \cdot p_n \to \lambda > 0$ fissato.

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n^k} (np_n)^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k} = \frac{1}{k!} \overbrace{(np_n)^k}^{\longrightarrow \lambda^k} \overbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}^{(a)} \overbrace{\underbrace{\frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}}_{\longrightarrow 1}}^{(b)} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$(a) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \cdot \frac{1}{n^k} = \prod_{i=0}^{k-1} [(n-i) \cdot \frac{1}{n}] = \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \to 1$

$(b) = (1-p_n)^n = \exp\left(n \ln(1-p_n)\right) \overset{p_n \to 0,\ \text{sviluppo di Taylor valido } ln(1-x) = -x + o(x^2)}{=} \exp\left(n\left(-p_n + O\left(p_n^2\right)\right)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$

Misura di probabilità indotta su $\mathbb{N}_0$ dalla distrib. di Poisson

Spazio e probabilità indotta Poniamo:

- $\Omega = \mathbb{N}_0$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$
- $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k$
- $\mathbb{P}(E) = \sum_{k \in E} \mathbb{P}(\{k\}$

Proposizione Questa probabilità definisce una misura di probabilità.

> **Dimostrazione.** Bisogna verificare i due assiomi. Per $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ fare sommatoria sui naturali della distribuz. e ricordare serie notevole che dà e^{λ}. Secondo abbastanza intuitivo.

Proprietà

- Somma di n Poissoniane **indipendenti** è una poissoniana di paramentri:

$$X_i \sim Pois(\lambda_i) \implies \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Pois(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)$$

5 Geometrica

È la probabilità del numero di esperimenti di Bernoulli che devo fare prima di avere il primo successo.

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

dove:

- k = k-esimo tentativo a cui ho il primo successo
- p = probabilità di successo del singolo esperimento di Bernoulli

Costruzione

Dobbiamo trovare la prob. di E_k= "il **primo** successo si verifica alla prova k-esima". Abbiamo che:

$$E_k = A_1^C \cap A_2^C \cap \dots \cap A_{k-1}^C \cap A_k$$

e che tutti questi eventi sono indipendenti, allora la prob. è il prodotto delle prob. e segue la tesi.

> **Dimostrazione.** (Che è una probabilità) Verificare che la sommatoria su tutto $\mathbb{N}$ delle prob fa 1. Quindi fare sommatoria, tirare fuori p e ricordare la convergenza della serie geometrica (converge perchè $(1-p) < 1$)

6 Binomiale negativa

Come la geometrica solo che non vogliamo vedere i fallimenti prima del primo successo, ma prima dell'n-esimo. La probabilità che si verifichino esattamente k fallimenti prima di ottenere un totale di n successi è data dalla probabilità di ottenere un successo nella prova numero k+n e di ottenere esattamente k fallimenti e n-1 successi nelle prove precedenti.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^k$$

dove: l'n-esimo successo si verifica alla prova k-esima

Costruzione

Dobbiamo trovare la prob. di $E_{n,k}$ = "l'**n-esimo** successo si verifica alla prova k-esima". Se $k < n$ l'evento è chiaramente vuoto, allora facciamo per $k \geq n$. Vediamo che

$$E_{n,k} = \bigcup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1} \in \{0,1\} | \sum \alpha_i = n-1} (A_1^{\alpha_1} \cup \cdots \cup A_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cap A_k)$$

dove gli α_i indicano se 1 un successo (ovvero A_i), se 0 un insuccesso (ovvero A_i^C). Procedere come segue:

1. Come al solito sono tutti eventi disgiunti., quindi per trovare la prob. fare sommatoria delle prob.
2. Come argomento della sommatoria ho la prob. dell'intersezione di eventi indipendenti, quindi è il prodotto delle prob. Porre $s_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = n - 1$ e mettere le prob. in funzione di p e $(1-p)$
3. Arrivo ad avere la sommatoria (rispetto sempre agli α_i dell'unione di partenza) di $p^n(1-p)^{k-n}$, che quindi posso tirare fuori quindi devo calcolare:

$$p^n(1-p)^{k-n} \cdot \underbrace{\#\{(\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}) \in \{0,1\}^{k-1} \mid \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = n-1\}}_{=\binom{k-1}{n-1}}$$

7 Ipergeometrica

Probability of k successes (random draws for which the object drawn has a specified feature) in n draws, **without replacement**, from a finite population of size N that contains exactly K objects with that feature, wherein each draw is either a success or a failure.

$$\mathbb{P}(X = r) = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

dove:

- r = numero esatto di palline rosse (vincenti) che vogliamo estrarre
- R = numero totale di palline rosse cincenti presenti nell'urna
- n = numero di estrazioni senza reimmissione, ovvero quante palline in blocco estraggo
- N = numero totale di palline contenute

Posso pensarla anche come voler estrarre esattamente r palline rosse vincenti ed esattamente $b = n - r$ palline biance perdenti

Multi-ipergeometrica

Uguale alla ipergeometrica, ma voglio un numero esatto non più di 1 successo e un fallimento, ma di più successi e un fallimento. Qui il caso per due successi:

$$\mathbb{P}(X = r, Y = b) = \frac{\binom{R}{r}\binom{B}{b}\binom{N-R-B}{n-r-b}}{\binom{N}{n}}$$

dove:

- r, b = numero esatto di palline rosse e bianche che voglio estrarre dalle R, B
- $n - r - b$ = numero esatto di altre palline (fallimenti / verdi) che devo estrarre tra le $N - R - B$

8 Ipergeometrica negativa

Come la binomiale negativa, ma **senza reimmissione**.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k+r-1}{k}\binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$$

dove:

- N è il numero totale di popolazione
- K numero totale di fallimenti
- r numero di successi
- k numero di fallimenti

Distribuzioni continue

9 Uniforme

10 Beta

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad \forall x \in (0,1)$$

dove

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

dove $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ è la **funzione gamma**. Importantissima, generalizza ai reali il concetto di fattoriale in quanto $\Gamma(n) = (n-1)!$.

11 Esponenziale

12 Gamma

$$f(x) = \frac{\lambda^t}{\Gamma(\tau)} x^{\tau-1}e^{-\lambda x} \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

dove

- $\lambda > 0$ è il parametro di scala
- $\tau > 0$ è il parametro di forma

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\tau = \frac{n}{2}$ la densità prende il nome di densità **chi-quadrato con n gradi di libertà**, fondamentale in statistica.

13 Pareto

Importante in finanza, rappresenta distribuzione dei redditi.

14 Gaussiana

Proprietà

- **Trasformazioni affini** di gaussiane sono gaussiane con media e varianza:

$$A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2) \implies m + \alpha A \sim \mathcal{N}(\mu_A + m, \alpha^2\sigma_A^2)$$

- **Combinazioni lineari** di gaussiane **indipendenti** sono gaussiane con media e varianza:

$$\begin{cases} A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2) \\ B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2) \end{cases} \implies \alpha A + \beta B \sim \mathcal{N}(\alpha\mu_A + \beta\mu_B, \alpha^2\sigma_A^2 + \beta^2\sigma_B^2)$$

15 Gaussiana multivariata

Proprietà

- **Trasformazioni affini** di gaussiane multivariate sono gaussiane multivariate con media e varianza:

$$\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, V) \implies A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{a} \sim \mathcal{N}(A\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{a}, AVA^T)$$

  dove A è la matrice della trasformazione lineare e V è la matrice di covarianza.
  NB: non ho bisogno della condizione di indipendenza sulle componenti di $\boldsymbol{X}$ poiché ho già la condizione che siano componenti di un vettore con distribuzione gaussaiana multivariata (vedere def e teorema di p.133 del libro)

16 Cauchy

Simile di forma alla Gaussiana, ma ha code molto più alte.