Geometria 2

Marco Ambrogio Bergamo

Anno 2023-2024

Indice

Legenda

- $I = [0, 1]$ con topologia euclidea (è il "tempo")
- le funzione con cui lavoreremo sono tutte continue, quindi lo omettiamo

Parte I

Topologia algebrica

1 Omotopia e gruppo fondamentale

1.1 Omotopia ed equivalenza omotopica

Definizione 1.1 (Omotopia): tra due funzioni $f_0, f_1 : X \to Y$ è un'applicazione

$$H : X \times I \to Y \textbf{ continua} \quad \text{tale che} \quad \begin{array}{ll} H(x,0) = f_0(x) & \forall x \in X \\ H(x,1) = f_1(x) & \forall x \in X \end{array}$$

Definizione 1.2 (Funzioni omotope): X, Y sp. top., $f_0, f_1 : X \to Y$ **continue** sono omotope ($f_0 \sim f_1$) se esiste un'omotopia da f_0 a f_1.
Quindi ponendo $f_t(x) = H(x,t)$, abbiamo che $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ è una famiglia di applicazioni continue che si deformano con continuità da f_0 a f_1 con immagine sempre contenuta in Y

Osservazione Ogni applicazione continua $f : X \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso è omotopa a qualunque applicazione costante $g(x) = a \in Y$ a qualunque punto di Y, prendendo $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$

Osservazione Ogni cammino in X, ovvero $\alpha : I \to X$ continua, è omotopa all'applicazione costante $\varepsilon_{x_0}(t) = x_0$ che manda tutto nel punto iniziale del cammino ($\alpha(0) = x_0$), prendendo $H : I \times I \to X$ tale che

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(s) & s \in [0, 1-t] \\ \alpha(1-t) & s \in [1-t, 1] \end{cases}$$

Visualizzare quadrato $I \times I = [0,1] \times [0,1]$ con s che varia sulle ascisse e t sulle ordinate, plottando $t = 1 - s$. Fissato un t (ovvero una retta orizzontale sul quadrato) faccio variare s su tale retta: fin tanto che s sta prima della retta $t = 1 - s$ mi muovo lungo il cammino, da $s = 1 - t$ in poi mi fermo sul punto a cui ero arrivato $\alpha(1-t)$ (che è fisso se ho fissato t). Più aumento t più mi fermo prima, fino a $t = 1$ in cui ho la funzione costante. H è continua poiché sui due triangoli del quadrato $I \times I$ è continua e sulla diagonale abbiamo che H ristretta ai due triangoli è uguale, quindi H è continua per lemma di incollamento.

Proposizione 1 Se X connesso e Y sconnesso, $f_0, f_1 : X \to Y$ tali che $f_0(x)$ e $f_1(x)$ stanno in due componenti connesse diverse $\implies f_0 \not\sim f_1$

Dimostrazione. Basta vedere se per assurdo esistesse un H come da def., avremmo che che $H_x(t)$ (fisso $x \in X$ e vario solo t) è continua da un connesso ad uno sconnesso, il che è assurdo. □

Proposizione 2 ($f \sim g$ rel. d'equival.) $\sim$ è una relazione d'equivalenza in $C(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ continue}\}$ con X, Y sp. top.

Dimostrazione. .

- $f \sim f$ (riflessiva): basta prendere $H(x,t) := f(x)$ (ovvero H costante nel tempo)
- Simmetrica: supponiamo $f \sim g \implies \exists H : X \times I \to Y \mid H_0 = f, H_1 = g$
  Allora riparametrizzo l'intervallo, ovvero inverto il tempo: $H(x, 1-t)$ soddifa la definizione per $g \sim f$
- Transitiva: $f \sim g, g \sim h \implies \exists H, K$ come da def. Allora dividiamo l'intervallo $I = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$ e riparametrizziamo il tempo, definendo

  $$N(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ H(x, 2t-1) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

  ovvero abbiamo riparametrizzato I tramite

  $$\bar{t} \mapsto \begin{cases} 2t & t \in [0, 1/2] \\ 2t - 1 & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

  (visualizzare questa mappa in piano con ascissa t e ordinata $\bar{t}$)
  Uso **gluing lemma** e ho finito.

$\square$

Proposizione 3 (Omotopia di funzioni di funzioni)

$$\begin{cases} f \overset{H}{\sim} g & f, g : X \to Y \\ h \overset{K}{\sim} l & h, l : Y \to Z \end{cases} \implies h(f(x)) \overset{N}{\sim} l(g(x))$$

($f \overset{H}{\sim} g$ significa che f, g sono omotop. eq. con omotopia tra le due H)

Dimostrazione. Definisco $N_t = K_t \circ H_t \quad \forall t \in I$ $\square$

Definizione 1.3 (Spazi omotopicamente equivalenti)**:** X, Y sp. topologici. Si dice $X \overset{omotop.}{\approx} Y$ se:

$$\exists f : X \to Y, \quad g : Y \to X \text{ continue tali che } \begin{cases} f \circ g \sim Id_Y \\ g \circ f \sim Id_X \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Osservazione Se X, Y fossero omeomorfi, al posto del $\sim$ ci sarebbe un $=$. Infatti: $X \overset{omeo.}{\approx} Y \implies X \overset{omotop.}{\approx} Y$ ma il viceversa non vale.

Osservazione Se ho due funzioni omotope f_1 e f_2, non vuol dire che gli spazi immagine $\mathrm{Im}(f_1), \mathrm{Im}(f_2)$ sono omotopicamente equivalenti, ovvero

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ \mathrm{Im}(f_1) & \not\approx & \mathrm{Im}(f_2) \end{tikzcd}$$

Infatti se sono omotope vuol dire che ho una funzione f_t

Esempio 1 ($X \overset{omotop.}{\approx} Y \not\Longrightarrow X \overset{omeo.}{\approx} Y$) Prendere $X = \mathbb{R}^n, Y = \{p\} \in \mathbb{R}^n$. f è unica, mentre di $g : \{p\} \to \mathbb{R}^n$ ne scelgo una ($g(p) = q \in \mathbb{R}^n$): vedo che $f \circ g : \{p\} \to \{p\}$ è proprio l'identità su Y, mentre $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \{q\} \subset \mathbb{R}^n$ è omotopa all'identità (posso trasportare con continuità q a p, ma non uguale all'identità. Infatti non è biettiva e gli spazi non sono omeomorfi.

Proposizione 4 ($X \approx Y$ rel. d'equival.) $\approx$ è una relazione d'equivalenza nell'insieme degli spazi topologici.

Dimostrazione. .

1. (Riflessiva): $X \approx X$ ovvio
2. (Simmetrica) $X \approx Y \implies Y \approx X$, basta scrivere la def. e riscriverla scambiando X, Y
3. (Transitiva) $\underbrace{X \approx Y}_{\exists f,g}, \underbrace{Y \approx Z}_{\exists h,l} \implies X \approx Y$, dove f, g e h, l seguono la def. $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend left=40, "h \circ f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[r, bend left, "h"] & Z \arrow[l, bend left, "l"] \arrow[ll, bend left=40, "g \circ l"] \end{tikzcd}$
   È vero che $(h \circ f) \circ (g \circ l) \sim Id_Z$ e che $(g \circ l) \circ (h \circ f) \sim Id_X$?
   $\implies (h \circ f) \circ (g \circ l) = h \circ (f \circ g) \circ l \sim h \circ Id_Y \circ l = h \circ l \sim Id_Z$.
   Stessa cosa per Id_X

$\square$

Definizione 1.4 (Omotopia relativa)**:** X, Y sp. top., $f_0, f_1 : X \to Y$. $A \subseteq X$. f_0 e f_1 sono omotope relativamente ad A se esiste un'omotopia $H : X \times I \to Y$ tra f_0 e f_1 tale che $H_t(a)$ costante al variare di t $\forall a \in A$.
Si indica con $f_0 \sim_A f_1$

Proposizione 5 Siano: $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_0"] \arrow[r, bend right, "f_1"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] & Z \end{tikzcd}$ e $A \subseteq X, B \subseteq Y$ tali che $f_0 \sim_A f_1$ e $g_0 \sim_B g_1$.
Se $f(A) \subseteq B \implies g_0 \circ f_0 \sim_A g_1 \circ f_1$

1.1.1 Spazio contraibile

Definizione 1.5 (spazio contraibile)**:** X spazio topologico omotopicamente equivalente al punto. Equivalentemente X contraibile $\iff \mathrm{Id}_X$ omotopa ad una applicazione costante.

Proposizione 6 X contraibile $\implies X$ connesso per archi

Dimostrazione. Dalla seconda definizione, siccome applicazioni omotope mandano componenti connesse nelle stesse componenti connesse □

Osservazione I convessi sono contraibili

1.2 Cammini e funtore π_0

Definizione 1.6 (Insieme dei cammini, lacci)**:** X sp. top., $a, b \in X$ (anche uguali).

$$\Omega(X, a, b) := \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}$$

Se $a = b$: $\Omega(X, a) := \Omega(X, a, a) \longrightarrow$ **insieme dei lacci (loop)**

Notazione 1 Cammino inverso (percorso al contrario): $i(\gamma) := \gamma \circ (t \mapsto (1 - t))$

Definizione 1.7 (Giunzione di cammini)**:** $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\quad \beta \in \Omega(X, b, c)$.

$\alpha * \beta : I \to X$ tale che: $t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$

Per gluing lemma $\alpha * \beta$ è continua e $\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$

NB: si legge da sx a dx

Osservazione $((\Omega, x, a), *)$ non è un gruppo. Vediamo che non c'è l'elemento neutro: se c'è, è il laccio costante $1_a : t \mapsto a$, che mappa tutto in $a \implies \alpha * 1_a \neq \alpha$, in quanto il supporto (la curva a meno di parametrizz.) è uguale, ma cambia la parametrizzazione, quindi la funzione α viene cambiata.

Osservazione X CPA $\iff \Omega(X, a, b) \neq \emptyset$ per ogni a, b

Definizione 1.8 (Relazione tra punti CPA)**:** $a, b \in X$, diciamo a in relazione con b (aRb) $\iff \Omega(X, a, b) \neq \emptyset$

Proposizione 7 (aRa relaz. d'eq.) R è una relazione d'equivalenza su X

Dimostrazione.
- aRa: sì perché $1_a \in \Omega(X, a) \implies \Omega(X, a) \neq \emptyset \implies aRa$ (con cammino costante)
- $aRb \implies \exists \gamma \in \Omega(X, a, b) \implies i(\gamma) \in \Omega(X, b, a) \neq 0 \implies bRa$ (con cammino inverso)
- Transitività: $\begin{cases} aRb \implies \exists\alpha \\ bRc \implies \exists\beta \end{cases} \implies \alpha * \beta \in \Omega(X, a, c) \neq 0 \implies aRc$ (con giunzione di cammini)

□

Definizione 1.9 (0-esimo gruppo di omotopia)**:** di X sp. top. è

$$\pi_0(X) := X/R \quad \text{(insieme delle componenti connesse per archi)}$$

$[x_a]$ = componente CPA di X che contiene x, quindi $\pi_0(X) = \{$componenti CPA di $X\}$

Esempio 2
- Se X CPA $\implies \pi_0(X) = \{\text{pt}\}$
- X = pulce $\cup$ pettine $\implies \pi_0(X) = \{$pulce, pettine$\}$

Definizione 1.10 (π_0 di una funzione)**:** $f : X \to Y$ sp. top.. Allora:

$$\pi_0(f) : \overset{=X/R_x}{\pi_0(X)} \to \overset{=Y/R_y}{\pi_0(Y)}$$
$$[x_0] \mapsto [f(x_0)]$$

È a sua volta una funzione.

Osservazione $\pi_0(f)$ è ben definita (ovvero l'immagine di una classe è indipendente dalla scelta dell'elemento della classe) .

Dim: basta far vedere che se due elementi sono nella stessa classe, ovvero sono in relazione (esiste cammino α che li unisce, in quanto f continua che manda connesso I in un connesso), allora anche le due immagini sono in relazione (vero, esiste il cammino $f \circ \alpha$ che le unisce), e quindi nella stessa classe.

1.3 Categorie e Funtori

Definizione 1.11 (categoria): $\mathscr{C}$ categoria è il dato di

1. $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ insieme degli **oggetti** di $\mathscr{C}$
2. $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ insieme dei **morfismi** di $\mathscr{C}$, ovvero

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{C}) = \bigcup_{A,B\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})} \mathrm{Mor}(A,B)$$

dove $\mathrm{Mor}(A,B)$ sono le frecce $A \xrightarrow{f} B$

3. **Legge di composizione** (composizione di frecce):

$$\mathrm{Mor}(A,B)\times\mathrm{Mor}(B,C) \overset{\text{induce}}{\longrightarrow} \mathrm{Mor}(A,C)$$

4. **Identità**: $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Mor}(A,A) \mid f\circ \mathrm{Id}_A = \mathrm{Id}_A \circ f = f \quad \forall f\in\mathrm{Mor}(A,B)$

Esempio 3 Alcuni esempi

- $\underline{\text{Set}}= \begin{cases}\mathrm{Obj} = \{\text{insiemi}\}\\ \mathrm{Mor} = \{\text{funzioni}\}\end{cases}$
- $\underline{\text{Vec}}= \begin{cases}\mathrm{Obj} = \{k-\text{sp. vettoriali}\}\\ \mathrm{Mor} = \{\text{applicazioni lineari}\}\end{cases}$
- $\underline{\text{Top}}= \begin{cases}\mathrm{Obj} = \{\text{sp. topologici}\}\\ \mathrm{Mor} = \{\text{applicazioni continue}\}\end{cases}$
- $\underline{\text{Grp}}= \begin{cases}\mathrm{Obj} = \{\text{gruppi}\}\\ \mathrm{Mor} = \{\text{omomorfismi di gruppi}\}\end{cases}$

Definizione 1.12 (funtore (covariante)): Siano $\mathscr{C},\mathscr{D}$ categorie. Un funtore (covariante) $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ è il dato di:

- $F:\mathrm{Obj}(\mathscr{C})\to\mathrm{Obj}(\mathscr{D}) \mid \overset{\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})}{A} \mapsto \overset{\in\mathrm{Obj}(\mathscr{D})}{F(A)}$
- $F:\mathrm{Mor}(\mathscr{C})\to\mathrm{Mor}(\mathscr{D}) \mid \overset{\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)}{f} \mapsto \overset{\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))}{F(f)}$ tale che $F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$

Ovvero:

$$\text{In } \mathscr{C}: \quad A\xrightarrow{f} B \qquad\qquad \text{In } \mathscr{D}: \quad F\left[A\xrightarrow{f} B\right] \Rightarrow F(A)\xrightarrow{F(f)} F(B)$$

Scritto come applicazione tra categorie:

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathscr{C} & \to & \mathscr{D} \\ & A\overset{f}{\to} B & \mapsto & F(A)\overset{F(f)}{\to} F(B)\end{array}$$

Definizione 1.13 (proprietà funtoriali):

$$F\left(1_A\right) = 1_{F(A)} \qquad\qquad F\left(fg\right) = F\left(f\right)F\left(g\right)$$

Scritti in notazione funzionale:

$$F\left(\mathrm{Id}_A\right) = \mathrm{Id}_{F(A)} \qquad\qquad F\left(f\circ g\right) = F\left(f\right)\circ F\left(g\right)$$

Proposizione 8 Il π_0 è un funtore

$$\begin{array}{cccc}\pi_0: & \underline{\text{Top}} & \to & \underline{\text{Set}} \\ & X \xrightarrow{f} Y & \mapsto & \pi_0(X) \xrightarrow{\pi_0(f)} \pi_0(Y)\end{array}$$

e se
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$
allora valgono le proprietà funtoriali:

1. $\pi_0(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_0(X)}$
2. $$\begin{tikzcd} \pi_0(X) \arrow[r, "\pi_0(f)"] \arrow[rr, bend left, "\pi_0(g\circ f)"] \arrow[rr, bend right, "\pi_0(g)\circ\pi_0(f)"'] & \pi_0(Y) \arrow[r, "\pi_0(g)"] & \pi_0(Z) \end{tikzcd}$$ allora $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$

Dimostrazione.
1. $\pi_0(Id_X) : [x_0] \mapsto [Id_X(x_0)] = [x_0] \implies$ tesi
2. $(\pi_0(g) \circ \pi_0(f))([x_0]) = \pi_0(g)(\pi_0(f)([x_0])) = \pi_0(g)([f(x_0)]) = [g(f(x_0))] = [(g \circ f)(x_0)]$ (applico le def.)

□

1.4 Omotopia di cammini

Definizione 1.14 (omotopia di cammini): $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, $\alpha \sim \beta$ omotopicamente equivalenti se $\exists F$ continua detta omotopia di cammini tale che

$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X \qquad F(t,0) = \alpha(t), \quad F(t,1) = \beta(t) \qquad F(0,s) = a, \quad F(1,s) = b$$

Osservazione ***(omotopia di cammini come relazione di equivalenza)***

Proposizione 9 (omotopia della giunzione e dell'inversione) Presi $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$ tali che $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$, valgono

$$\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \qquad\qquad i(\alpha) \sim i(\alpha')$$

Proposizione 10 (giunzione e inversione di immagini continue di cammini) Presa $f\colon X \to Y$ continua

1. Per $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ vale $\alpha \sim \beta \implies f\alpha \sim f\beta$
2. Per $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$ valgono $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$ e $f(i(\alpha)) = i(f(\alpha))$

Osservazione ***(omotopia di cammini in un convesso)*** $F(t,s) = (1-s) \cdot \alpha(t) + s \cdot \beta(t)$

Lemma 1 (omotopia di cammini della riparametrizzazione) Preso $\phi\colon [0,1] \to [0,1]$ con $\begin{array}{l}\phi(0) = 0 \\ \phi(1) = 1\end{array}$, vale $\alpha(t) \sim \alpha(\phi(t))$

Dimostrazione. Considero l'omotopia di cammini $F(t,s) = \alpha(s \cdot \phi(t) + (1-s)t)$ □

Proposizione 11 (associatività della giunzione) Il prodotto $*$ è associativo a meno di omotopia di cammini, ovvero $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$

Dimostrazione. Dal Lemma 1 con il cambio di parametro $\varphi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ □

Definizione 1.15 (cammino costante): 1_a, per il quale $\forall \alpha \in \Omega(X, a, b)$ valgono

$$1_a * \alpha \sim \alpha * 1_b \sim \alpha \qquad\qquad \alpha * i(a) \sim 1_a$$

1.4.1 Altri risultati utili

Lemma 2 (omotopia di lati di un convesso) Presi $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$, $T = \overset{\triangle}{p_1 p_2 p_3}$, $f\colon T \to X$ continua, allora per le parametrizzazioni standard f_{ij} delle restrizioni di f ai lati di T vale $f_{13} \sim f_{12} * f_{23}$.
Ovvero il cammino dato dalla restrizione di f su un lato è omotopo alla giunzione dei cammini dati rispettivamente dalla restrizione di f sugli altri due lati.

Dimostrazione. Presa l'omotopia $F(t,s) \coloneqq f(q(t,s))$ vale $F(t,0) = f_{13}(t)$, $F(t,1) = \begin{cases} f_{12}(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ f_{23}(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{matrix} F(0,s) = f(p_1) \\ F(1,s) = f(p_3) \end{matrix}$, con

$$q(t,s) \coloneqq \begin{cases} (1-t-ts)\,p_1 + 2tp_2 + (t-ts)\,p_3 & \text{per } t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t-s+ts)\,p_1 + 2(1-t)\,sp_2 + (t-s+ts)\,p_3 & \text{per } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Corollario 1 (omotopia della giunzione della partizione) Presi due cammini α_0 e α_1 parametrizzazioni standard delle restrizioni di α a $[0,p]$ e $[p,1]$ vale $\alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha$

Dimostrazione. Banalmente $\alpha_0 * \alpha_1(t) = \alpha(\phi(t))$ con $\phi(t) = \begin{cases} 2tp & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p + (2t-1)(1-p) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$, la tesi da 1 □

1.5 Gruppo fondamentale

Definizione 1.16 (spazio puntato)**:** (X,x) con X spazio topologico e $x \in X$

Definizione 1.17 (gruppo fondamentale)**:** Preso (X,a) spazio puntato

$$\pi_1(X,a) = {}^{\Omega(X,a,a)}/_{\sim} \quad \text{(gruppo di elemento neutro } [1_a]\text{, prodotto } [\alpha][\beta]{=}[\alpha * \beta] \text{ e inverso } [\alpha]^{-1}{=}[i(\alpha)]\text{)}$$

Considerando π_1 come un funtore (covariante) dalla categoria degli spazi topologici puntati a quella dei gruppi, si ha

$$\begin{array}{cccc} \pi_1 : & \underline{\text{Top}} & \to & \underline{\text{Grp}} \\ & X \xrightarrow{f} Y & \mapsto & \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \end{array}$$

dove

$$\begin{array}{cccc} f_* \coloneqq \pi_1(f) : & \pi_1(X,a) & \to & \pi_1(Y, f(a)) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f(\alpha)] \end{array}$$

e per esso valgono dunque le proprietà funtoriali

$$(\mathrm{Id}_X)_* = \pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,a)} \qquad g_* f_* = \pi_1(gf) = \pi_1(g)\,\pi_1(f) = (gf)_* \quad \text{per } f\colon X \to Y,\ f\colon Y \to Z$$

Definizione 1.18 (mappa di cambio di punto base $\gamma_\sharp$)**:** $\gamma_\sharp \colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ tale che $\gamma_\sharp[\alpha] = \overbrace{[i(\gamma) * \alpha * \gamma]}^{\text{leggere da sx a dx}}$ con $\gamma \in \Omega(X,a,b)$, ovvero il cammino dal vecchio al nuovo punto base.
È la mappa di cambio base dei lacci perché $i(\gamma) * \alpha * \gamma : b \overset{\gamma^{-1}}{\mapsto} a \overset{\alpha}{\mapsto} a \overset{\gamma}{\mapsto} b$ laccio con punto base in b
È una specie di coniugio, in stile automorfismo interno $\gamma_g(a) = g^{-1}ag$ che abbiamo visto ad alg. 1.

Osservazione Ben definito in quanto $*$ commuta con l'equivalenza omotopica

Lemma 3 Preso $\gamma \in \Omega(X,a,b)$, allora $\gamma_\sharp$ è un isomorfismo

Dimostrazione.

$$\gamma_\sharp[\alpha]\,\gamma_\sharp[\beta] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]\,[i(\gamma) * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \overbrace{\gamma * i(\gamma)}^{1_a} * \beta * \gamma] = \gamma_\sharp[\alpha * \beta] \quad \Rightarrow \quad \text{omomorfismo}$$

$$(i(\gamma))_\sharp(\gamma_\sharp[\alpha]) = [\overbrace{\gamma * i(\gamma)}^{1_a} * \alpha * \overbrace{\gamma * i(\gamma)}^{1_a}] = [\alpha] \quad \Rightarrow \quad \text{inversa, quindi isomorfismo}$$

□

Corollario 2 Il gruppo fondamentale $\pi_1(X, a)$ non dipende dal punto base ma solo dalla sua componente connessa.

Definizione 1.19 (semplice connessione): Spazio topologico con gruppo fondamentale banale

Proposizione 12 (gruppo fondamentale dello spazio prodotto) $\pi_1(X \times Y, (a, b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$

Dimostrazione. Sappiamo che una mappa $f : Z \to X \times Y$, $\quad f(z) = \begin{pmatrix} g(z) \\ h(z) \end{pmatrix}$ è continua $\iff$ le sue componenti lo sono. Quindi

- Ogni laccio $f : Z \to X \times Y$ con punto base in (a, b) è equivalente a due lacci g, h in X, Y con punti base a, b
- Ogni omotopia f_t di lacci in $X \times Y$ è equivalente a due omotopie g_t, h_t dei corrispondeti lacci in X e Y.

Quindi abbiamo una biezione tra i gruppi fondamentali $[f] \to ([g], [h])$ che è anche omo, quindi isomorfismo. $\square$
Anche:
Ogni cammino $\alpha\colon [0, 1] \to X \times Y$ e ogni omotopia $F\colon [0, 1]^2 \to X \times Y$ sono univocamente determinati dalle loro componenti $\begin{matrix} \alpha_1 = \pi_X \circ \alpha\colon [0,1] \to X \\ \alpha_2 = \pi_Y \circ \alpha\colon [0,1] \to Y \end{matrix}$ e $\begin{matrix} F_1\colon [0,1]^2 \to X \\ F_2\colon [0,1]^2 \to Y \end{matrix}$. Esiste dunque una bigezione tra $\Omega(X \times Y, (a, b), (a, b))$ e $\Omega(X, a, a) \times \Omega(Y, b, b)$ e, per passaggio ai quozienti, un isomorfismo tra $\pi_1(X \times Y, (a, b))$ e $\pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$, dato da

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \times Y, (a, b)) & \to & \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b) \\ [\gamma] & \mapsto & ([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]) \end{array}$$

$\square$

1.5.1 Invarianza del gruppo fondamentale per equivalenza omotopica

Proposizione 13 $f, g : X \to Y$ continue e omotope tramite $F\colon X \times I \to Y$ t.c. $\begin{cases} f(x) = F_0(x) \\ g(x) = F_1(x) \end{cases}$, $a \in X$ e $\gamma \in \Omega(Y, f(a), g(a))$ tale che $\gamma(s) = F_s(a)$, allora $g_* = \gamma_\sharp \circ f_*$, ovvero è commutativo

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y, f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\sharp \text{ (cambio base)}"] & & \pi_1(Y, g(a)) \end{tikzcd}$$

Ovvero se due mappe sono omotope, allora le classi dei lacci vengono mappate nelle stesse classi di lacci a meno di cambio del punto base.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che

$$\forall[\alpha] \in \pi_1(X, a) : \quad \gamma_\sharp(f_*([\alpha])) = g_*[\alpha] \quad \text{ovvero} \quad [i(\gamma) * (f \circ \alpha) * \gamma] = [g \circ \alpha]$$

Considerando l'applicazione $(s, t) \mapsto F(\alpha(s), t)$ e le sue restrizioni sui bordi dei quadrato unitario vale da omotopia di lati di un convesso che $\gamma * g(\alpha) \sim \delta$ e $f(\alpha) * \gamma \sim \delta$ con $\delta(s) = F(\alpha(s), s)$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g(\alpha)"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f(\alpha)"'] \arrow[ur, "\delta"] & \bullet \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Favale percorre il quadrato in maniera diversa e si fa più pippe (p. 42-43 appunti). $\square$

Corollario 3 Presa $f\colon X \to X$ tale che $f \simeq \mathrm{Id}_X$, allora $f_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, f(a))$ è un isomorfismo $\forall a \in X$

Dimostrazione. Preso $\gamma(t) := F(a, t)$, dalla prop. precedente vale che $f_* = \gamma_\sharp \circ \mathrm{Id} = \gamma_\sharp$, e da 3 vale f_* isomorfismo $\square$

Lemma 4 (tre mappe) $g \circ f$ bigettiva, $h \circ g$ iniettiva $\implies f$ bigettiva

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Dimostrazione. g iniettiva e suriettiva, quindi bigettiva. Quindi $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ composizione di bigettive. $\square$

Teorema 1 (isomorfismo del gruppo fondamentale per spazi omotopicamente equivalenti) $f\colon X \to Y$ equivalenza omotopica $\Longrightarrow f_*$ isomorfismo tra gruppi fondamentali

Dimostrazione. Presa g inversa omotopica di f (quindi $fg \simeq \mathrm{Id}_Y$ e $gf \simeq \mathrm{Id}_X$) per 3 $f_* g_*$ e $g_* f_*$ isomorfismi, e per il lemma delle tre mappe f_* bigettivo.

$$\pi_1(X, a) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, f(a)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g \circ f(a)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, f \circ g \circ f(a))$$

$\square$

Osservazione X contraibile $\Longrightarrow X$ semplicemente connesso

1.6 Retrazioni e Deformazioni e Bouquet

Definizione 1.20 (retrazione)**:** $Y \subset X$ retratto di X se $\exists r\colon X \to Y$ retrazione continua tale che $r(y) = y \ \forall y \in Y$

Definizione 1.21 (deformazione)**:** $Y \subset X$ retratto per deformazione di X se $\exists R\colon X \times [0,1] \to Y$ deformazione continua tale che

$$R(x,0) \in Y, \quad R(x,1) = x \quad \forall x \in X \qquad\qquad R(y,t) \in Y \quad \forall y \in Y, t \in [0,1]$$

Quindi una deformazione è una omotopia tra una retrazione e la mappa identità su X.
Un'altra definizione è: una mappa continua $r : X \to Y \subseteq X$ è una deformazione

$$\begin{cases} \text{è retrazione} \\ i \circ r \overset{\text{omotopa}}{\sim} \mathrm{Id}_X \end{cases}$$

Proposizione 14 (equivalenza omotopica di un retratto per deformazione) La retrazione per deformazione di un $Y \subseteq X$ è un'equivalenza omotopica con inversa l'inclusione $i\colon Y \hookrightarrow X$.

Dimostrazione. Presa la deformazione $R\colon [0,1] \times X \to X$, definisco la retrazione $r\colon X \to Y$ tale che $i(r(x)) = R(x,0)$. Allora R è un'omotopia tra $i \circ r$ e Id_X, e inoltre $r \circ i \equiv \mathrm{Id}_Y$ $\square$

Definizione 1.22 (bouquet)**:** Presi X, Y spazi topologici, $a \in X, b \in Y$, definisco bouquet di X e Y

$$X \vee Y := \frac{X \sqcup Y}{\mathcal{R}} \qquad \begin{array}{ll} X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (\{1\} \times Y) & \text{unione disgiunta} \\ x \mathcal{R} y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x = y) \vee ((x = a \wedge y = b) \vee (x = b \wedge y = a)) & \end{array}$$

ovvero incollo due spazi per un punto

2 Gruppo fondamentale di S^1, sollevamenti e applicazioni

2.1 Lemma del numero di Lebesgue

Lemma 5 (numero di Lebesgue) Presa $f\colon Y \to X$ continua con (Y, d) spazio metrico compatto, e $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X. Allora $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall y \in Y \ \exists A_i \in \mathcal{A}$ tale che $f(B(y, \delta)) \subset A_i$

Dimostrazione. Sia $Y_n := \left\{y \in Y \mid \exists U \in \mathcal{A} \text{ tale che } B(y, 2^{-n}) \subset f^{-1}(U)\right\}$, valgono in particolare $Y_n \subseteq Y_{n+1}^\circ$ e $\bigcup_n Y_n^\circ = Y$, siccome per $y \in Y_n$ vale che $\forall z$ t.c. $d(y,z) < 2^{-n-1}$ per la disuguaglianza triangolare $B\left(y, 2^{-n-1}\right) \subset B(y, 2^{-n}) \subset f^{-1}(U)$ e perciò $z \in Y_{n+1}$. Ma siccome Y compatto $\exists n$ per cui $Y_n = Y$. $\square$

Corollario 4 (Lemma di Lebesgue per cammini) $\forall \alpha\colon [0,1] \to X$ cammino e $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di X, $\exists n$ tale che $\forall i = 1, \dots, n$ vale $\alpha\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \subset U$ per qualche $U \in \mathcal{A}$

Dimostrazione. $[0,1]$ spazio metrico compatto $\square$

2.2 Rivestimenti e Sollevamenti

Definizione 2.1 (rivestimento)**:** X spazio connesso, $p\colon E \to X$ **continua suriettiva** tale che $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto $V \subset X$ tale che $p^{-1}(V) = \overset{\text{disg}}{\bigcup_i} U_i$ tale che $p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo $\forall i$. Sono detti X base, E spazio totale, $p^{-1}(x)$ fibre, V aperto banalizzante
Il rivestimento è detto banale se la base X è un aperto banalizzante, e connesso se lo spazio totale E è connesso

PROPOSIZIONE 12.12 et al.

Definizione 2.2 (sollevamento)**:** $p\colon E \to X$ rivestimento, $f\colon Y \to X$ applicazione continua, allora $g\colon Y \to E$ continua tale che $f = p \circ g$ è detta sollevamento di f, ovvero è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Non è detto che esista.

2.2.1 Unicità del sollevamento

Teorema 2 (unicità del sollevamento) $p\colon E \to X$ rivestimento, $f\colon Y \to X$ applicazione continua con Y spazio connesso. Per ogni coppia $g, h\colon Y \to E$ di sollevamenti f vale $g \equiv h$ oppure $g(y) \neq h(y)$ $\forall y$.

Dimostrazione. Premesso un lemma

Lemma 6 Per ogni $p\colon E \to X$ rivestimento la diagonale $\Delta \subset E \times E$ è aperta e chiusa nel prodotto fibrato

$$E \times_X E \coloneqq \{(u, v) \in E \times E \mid p(u) = p(v)\}$$

Dimostrazione. Dimostro Δ aperto e Δ^C aperto osservando che sono intorni aperti ogni loro punto

Δ aperto $\forall (e, e) \in \Delta$ prendo $U \subset E$ intorno aperto di e tale che $p|_U$ iniettiva, allora

$$(U \times U) \cap (E \times_X E) = U \times_X U \subset \Delta$$

Δ^C aperto $\forall (e_1, e_2) \in (E \times_X E - \Delta)$ prendo V aperto banalizzante contenente $p(e_1) = p(e_2)$ e $U_1, U_2 \subset p^{-1}(V)$ intorni aperti disgiunti di e_1 e e_2, allora

$$(U_1 \times U_2) \cap (E \times_X E) \subset (E \times_X E - \Delta)$$

□

Considero la funzione continua $\Phi(y) = (g(y), h(y))$, per il lemma l'insieme $\Phi^{-1}(\Delta) = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$ è aperto e chiuso in Y connesso e dunque $\Phi^{-1}(\Delta) = Y$ oppure $\Phi^{-1}(\Delta) = \emptyset$. □

Corollario 5 $p\colon E \to X$ rivestimento, $f\colon Y \to X$ applicazione continua con Y spazio connesso. $\forall y \in Y, e \in E$ tali che $p(e) = f(y)$, esiste al più un sollevamento g di f tale che $g(y) = e$

Notazione 2 $\alpha_e\colon [0, 1] \to E$ sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$, con $e \in E$

Teorema 3 (esistenza e unicità del sollevamento di cammini) $p\colon E \to X$ rivestimento, $\alpha\colon [0,1] \to X$ cammino continuo, ed $e \in E$ tale che $p(e) = \alpha(0) = x_0$, allora $\exists! \alpha_e\colon [0,1] \to E$ sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\alpha_e"] \arrow[r, "\alpha"] & X \end{tikzcd}$$

con

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[d, mapsto] \\ 0 \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] & x_0 \end{tikzcd}$$

NB: ciò che dà l'unicità è che fisso $e \in E$.

Dimostrazione. L'unicità dal 5. Siccome gli aperti banalizzanti sono un ricoprimento aperto, per il 4 esistono $V_1, \dots, V_n$ aperti banalizzanti scomponenti il cammino α, definisco allora ricorsivamente

$$\gamma_i\colon \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \to E \qquad \text{tali che } p(\gamma_i(t)) = \alpha(t),\ \gamma_1(0) = e \text{ e } \gamma_i\left(\frac{i}{n}\right) = \gamma_{i+1}\left(\frac{i}{n}\right)$$

l'incollamento dei quali definisce α_e cercato, da cui l'esistenza. $\square$

Teorema 4 (esistenza e unicità del sollevamento di omotopie) $p\colon E \to X$ rivestimento, $F\colon [0,1]^2 \to X$ e $\alpha\colon [0,1] \to E$ continue tali che $F(t,0) = p(\alpha(t))\ \forall t$, allora $\exists! G\colon [0,1]^2 \to E$ sollevamento di F tale che $G(t,0) = \alpha(t)\ \forall t$

$$\begin{tikzcd} {[0,1] \times \{0\}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Premesso un lemma

Lemma 7 Presi $L := \left\{(t,s) \in [0,1]^2 \mid ts = 0\right\}$ e $i\colon L \overset{\text{incl}}{\hookrightarrow} [0,1]^2$, e presi $p\colon E \to X$ rivestimento, $F\colon [0,1]^2 \to X$ e $f\colon L \to E$ continue tali che $p \circ f \equiv F \circ i$, allora $\exists G\colon [0,1]^2 \to E$ sollevamento di F tale che $Gi \equiv f$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, dashed, "G"] \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Nel caso banale in cui $\operatorname{Im}(F) \subseteq V$ aperto banalizzante vale che $f(L)$ contenuto in $U \subseteq p^{-1}(V)$ con $p|_U : U \to V$ omeomorfismo ($s := p|_U^{-1}$). Pongo allora $G = s \circ F$, e valgono quindi $p \circ G = \cancel{p \circ s} \circ F = F$ e $f = s \circ p \circ f = s \circ F \circ i = G \circ i$.
Nel caso generale esistono per il 4 n^2aperti banalizzanti V_{ij} scomponenti F. Definisco allora ricorsivamente

$$Q_{hk} : \left(L \cup \bigcup_{(i,j) \preccurlyeq (h,k)} Q(i,j)\right) \to E \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} Q(i,j) := \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \\ (i,j) \preccurlyeq (h,k) \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l} i+j < h+k \text{ oppure} \\ i+j = h+k \text{ e } j \le k \end{array} \end{array}$$

$\square$

L'unicità dal 5. Considero $\beta\colon [0,1] \to E$ sollevamento del cammino $s \mapsto F(0,s)$ tale che $\beta(0) = \alpha(0)$, l'incollamento di α e β definisce $f\colon L \to E$ tale che $f(t,0) = \alpha(t)$ e $f(0,s) = \beta(s)$, da cui l'esistenza di G dal lemma. $\square$

Corollario 6 $p\colon E \to X$ rivestimento, presi $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, $e \in E$ tale che $p(e) = a$ e α_e, β_e sollevamenti di α, β tali che $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$, allora $\alpha \sim \beta \iff \alpha_e \sim \beta_e$ e $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$

Dimostrazione. Doppia implicazione

$\Longrightarrow$ F omotopia tra α e β tale che $F(s,0)=a$ e $F(s,1)=b$, allora per esistenza e unicità del sollevamento di omotopie esiste il sollevamento G di F, e per unicità vale $G(0,t)=\alpha_e(t)$ e $G(1,t)=\beta_e(t)$, e $G(s,1)$ costante in quanto sollevamento continuo di 1_b costante

$\Longleftarrow$ Se $\alpha_e \sim \beta_e$ vale $p\circ\alpha_e \sim p\circ\beta_e$

$\square$

Corollario 7 (gruppo fondamentale di S^1) Sia

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p(t)=e^{2\pi i t}"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\alpha_0"] \arrow[r, "\alpha"] & S^1 \end{tikzcd}$$

con

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d, "p"] \\ 0 \arrow[ur, leftarrow, "\alpha_0"] \arrow[r, mapsto, "\alpha"] & 1 \end{tikzcd}$$

dove $\begin{cases} p\colon \mathbb{R}\to S^1 \text{ rivestimento } p(t)=e^{2\pi i t} \\ \alpha:[0,1]\to S^1 \textbf{ loop (chiuso)} \text{ in } S^1 \text{ t.c. } \alpha(0)=1\in S^1 \\ \alpha_0:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ unico sollevamento di } \alpha \text{ t.c. } \alpha_n(0)=n \quad (n\in\mathbb{Z}) \quad (\text{unicità data da 3}) \end{cases}$.

Considero

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \pi_1(S^1,1) & \to & (\mathbb{Z},+) \\ & [\alpha] & \mapsto & \alpha_0(1) \end{array}$$

Essa è isomorfismo, in quanto:

1. Ben Definita dal teo prec. ($\Longrightarrow$)
2. $\mathrm{Im}(\Phi)\subseteq\mathbb{Z}$
3. Suriettiva $\Phi\left(\left[e^{2\pi i m t}\right]\right)=m \implies \mathrm{Im}\,\Phi=\mathbb{Z}$
4. Omomorfismo $\Phi([\alpha][\beta])=(\alpha*\beta)_0(1)=\beta_{\alpha_0(1)}(1)=\alpha_0(1)+\beta_0(1)=\Phi([\alpha])+\Phi([\beta])$
5. Iniettiva $\alpha_0(1)=0 \Rightarrow \alpha_0\sim 1_0$ ($\mathbb{R}$ convesso)

Dimostrazione. Punto per punto

1. Siano $[\alpha]=[\alpha']\in\pi_1(S_1,1)$ (ovvero $\alpha\sim\alpha'$).
   - Per esistenza e unicità del sollevamento di cammini $\exists!\alpha_0,\alpha_0' : I\to\mathbb{R} \mid \alpha_0(0)=\alpha_0'(0)=0$ e $\begin{cases}(p\circ\alpha_0)=\alpha \\ (p\circ\alpha_0')=\alpha'\end{cases}$
   - Sia $H: I\times I\to S^1$ omotopia tra α,α', ovvero $\begin{cases} H_0(s)=H(s,0)=\alpha(s) \\ H_1(s)=H(s,1)=\alpha'(s)\end{cases}$. Per esistenza e unicità del sollevamento di omotopie $\exists!\widetilde{H}$ sollevamento di $H \mid \widetilde{H}(0,0)=0$ e $p\circ\widetilde{H}=H$ ($H(0,0)=1$ per ip.)
   - Vogliamo avere informazioni su $\widetilde{H}_0$ e $\widetilde{H}_1$.

     $$\begin{cases}(p\circ\widetilde{H})(s,0)=H(s,0)=H_0(s)=\alpha(s) \\ \widetilde{H}_0(0)=0\end{cases} \implies \widetilde{H}_0=\alpha_0$$

     Analogamente $\widetilde{H}_1=\alpha_0'$
   - Vogliamo avere informazioni su $\widetilde{H}_t(0)$ e $\widetilde{H}_t(1)$. Abbiamo $\begin{cases}\widetilde{H}_t(0)=\alpha_0(0)=0 \text{ costante} \\ \widetilde{H}_t(1)=\alpha_0(1)=\alpha_0'(1) \text{ costante}\end{cases}$

   Ma allora abbiamo che $\widetilde{H}$ è omotopia tra α_0 e α_0', quindi essi sono omotopi e siamo apposto.

2. $p(\alpha_0(1)) = \alpha(1) = 1 \implies \alpha_0(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \implies \operatorname{Im}\Phi \subseteq \mathbb{Z}$

3. $\Phi\left(\left[e^{2\pi i m t}\right]\right) = m \implies \operatorname{Im}\Phi = \mathbb{Z}$ (Favale si fa più pippe ma non ho voglia di scriverle)

4. Devo mostrare che $\Phi([\alpha]\cdot[\beta]) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]) = \alpha_0(1) + \beta_0(1)$.

   - Vediamo che $\Phi([\alpha]\cdot[\beta]) = \Phi([\alpha]*[\beta]) = (\alpha*\beta)_0(1)$ (notare che è $\neq \alpha_0 * \beta_0$)
   - So che $\alpha_0(1) \in \mathbb{Z}$, $\beta_k(0) = k \in \mathbb{Z}$
   - Fisso $m = \alpha_0(1) \in \mathbb{Z} \implies \exists!\ \widetilde{\beta}$ sollevamento di $\beta \mid \widetilde{\beta}(0) = m$, che è β_m
   - Otteniamo
   $$\begin{cases} \alpha_0(0) = 0 \\ \alpha_0(1) = m \\ \beta_m(0) = m \\ \beta_m(1) = ? \end{cases}$$
   Possiamo giuntare i due rossi: $\gamma = \alpha_0 * \beta_m$
   - Allora $p(\gamma)(0) = p(\alpha_0 * \beta_m)(0) = (p\circ\alpha_0)*(p\circ\beta_m)(0) = \alpha_0(0) = 0$.
   Ma allora per l'unicità del sollevamento $(\alpha*\beta)_0 = \alpha_0 * \beta_m$
   - Infine
   $$\begin{aligned} \Phi([\alpha]*[\beta]) &= (\alpha*\beta)_0(1) \\ &= (\alpha_0*\beta_m)(1) \\ &= \beta_m(2s-1)|_{s=1} = \beta_m(1) \\ &= \beta_0(1) + m \qquad \text{dal Lemma} \\ &= \alpha_0(1) + \beta_0(1) \\ &= \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]) \end{aligned}$$

   Dove **Lemma:** $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$, allora $\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 + n \\ \alpha_n = \alpha_m + n - m \end{cases}$ (si dimostra esplicitando $e^{2\pi i(\alpha_n(t)+m)}$)

5. Φ iniettiva $\iff \ker(\Phi) = \{1_{\pi_1(S^1,1)}\}$.

   - Prendiamo $[\alpha] \in \ker(\Phi)$, ovvero $\Phi([\alpha]) = \alpha_0(1) = 0$, ovvero
   $$\begin{aligned} \alpha_0 : \ & I & \to & \ \mathbb{R} \\ & 0 & \mapsto & \ 0 \\ & 1 & \mapsto & \ 0 \end{aligned}$$
   - Essendo $\mathbb{R}$ convvesso e α_0 loop in $\mathbb{R} \implies \alpha_0 \sim_{\{0,1\}} 1_0$ (che è il cammino costante che vale sempre 0) $\implies \exists \widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ omotopia rel. a $\{0,1\} \mid \widetilde{H}_0 = \alpha_0, \widetilde{H}_1 = 1_0$
   - Allora $p \circ \widetilde{H} = H : I \times I \to S^1$ omotopia
   $$\begin{cases} H_0(s) = p(\widetilde{H}_0(s)) = p(\alpha_0(s)) = \alpha(s) \\ H_1(s) = p(\widetilde{H}_1(s)) = p(1_0) = 1_0(s) \\ H_t(0) = p(\underbrace{\widetilde{H}_t(0)}_{=0}) \overset{\widetilde{H} \text{ omotop. rel}}{=} p(0) = 0 \end{cases}$$
   Allora H è omotop. rel a $\{0,1\} \implies \alpha \sim_{\{0,1\}} 1_1 \implies [\alpha] = 1_{\pi_1(S^1,1)}$

□

2.3 Applicazioni: teoremi di Brouwer, Borsuk e teorema fondamentale dell'algebra

Proposizione 15 $\nexists r : D^2 \to S^1$ retrazione

Dimostrazione. Se $r : D^2 \to S^1$ retraz. (suriettiva) $\implies r_* : \overbrace{\pi_1(D^2)}^{=\{1\}} \overset{\text{suriett.}}{\longrightarrow} \overbrace{\pi_1(S^1)}^{=\mathbb{Z}}$ assurdo.
Alternativamente:
Per assurdo prendo r retrazione, sia $S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} D^2$ e vale $r \circ i = \mathrm{Id}_{S^1}$, ma quindi

$$r_* \circ \overbrace{i_*}^{\text{iniett.}} = (r \circ i)_* = (\mathrm{Id}_{S^1})_* = \overbrace{\mathrm{Id}_{\pi_1(S^1,1)}}^{\text{iniettiva}} \qquad \text{ma } i_* \colon \overset{\#\neq 1}{\boxed{\pi_1\left(S^1, 1\right)}} \to \overset{\#=1}{\boxed{\pi_1\left(D^2, 1\right)}} \Rightarrow i_* \text{ non iniettiva, } ϟ$$

□

Teorema 5 (punto fisso di Brouwer) $\forall f \colon D^2 \to D^2$ continua $\exists x \in D^2$ punto fisso per f

In realtà al posto di D^2 basta un compatto connesso di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Per assurdo $\forall \boldsymbol{x}\ f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$, posso definire

$$r \colon D^2 \to S^1, \quad r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})) \text{ con } t \geq 0 \text{ t.c. } \|r(\boldsymbol{x})\| = 1$$

(Favale si fa pippe su come trovare t) ovvero la mappa che associa a ogni punto $\boldsymbol{x} \in D^2$ la sua proiezione su S^1 "illuminata" da $f(\boldsymbol{x})$ (ovvero prendo il vettore da $f(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{x}$, che esiste essendo $\boldsymbol{x} \neq f(\boldsymbol{x})$, e lo prolungo fino a S^1).
Quindi r è

- **Continua**, infatti piccole variazioni di $\boldsymbol{x}$ producono piccole variazioni di $f(\boldsymbol{x})$ (f continua) e piccole variazioni di $f(\boldsymbol{x})$ producono piccole variazioni del vettore sopra citato.
- **Identità su** S^1 (per come abbiamo definito la proiezione di $\boldsymbol{x}$ e il vettore sopra citato)

Dunque r è una retrazione, ma per la prop. sopra essa non può esistere. ϟ. □

Teorema 6 (Borsuk-Ulam) Sia $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua $\implies \exists \boldsymbol{x} \in S^2 : f(\boldsymbol{x}) = f(-\boldsymbol{x})$

NB: la proiezione stereografica non è contemplata poiché definita solo su $S^2 \setminus \{\text{p.to}\}$. Un esempio invece è la proiezione sul piano xy. Esempi applicati sono la temperatura/pressione ad una certa altitudine su tutta la terra (con $\boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \text{temp}(\boldsymbol{x}) \\ \text{temp}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ oppure $\boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \text{temp}(\boldsymbol{x}) \\ \text{pres}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$).

Dimostrazione. No sbatti □

Teorema 7 (fondamentale dell'algebra) $a_n z^n + \ldots + a_0 =: P \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P = n > 0 \implies \exists$ zero di P

Dimostrazione. WLOG $a_n = 1$. Sia $c \neq 0$ costante arbitraria, la tesi equivale a dimostrare che $\exists$ zero di $\widetilde{P}(z)$ così costruita

$$\widetilde{P}(z) := z^n + \frac{a_n}{c} z^n + \ldots + \frac{a_1}{c^{n-1}} z + \frac{a_0}{c^n} \quad \to \quad P(c \cdot z) \equiv c^n \cdot \widetilde{P}(z) \quad \to \quad \overline{z} \text{ zero di } \widetilde{P} \Rightarrow c \cdot \overline{z} \text{ zero di } P$$

Quindi a meno di prendere $|c| \gg 0$ assumo WLOG $|a_0| + \ldots + |a_{n-1}| < 1$ e cerco una radice di P in D^2. Per assurdo sia $P(z) \in \mathbb{C}^*\ \forall z \in D^2$, allora presa la restrizione $P|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{C}^*$ si P a S_1, questa sarà omoeomorfa all'applicazione c costante di valore $P(0)$ in quanto

$$F \colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}^* \quad F \colon (z,t) \longmapsto P(\overbrace{t \cdot z}^{\in D^2}) \quad \text{è omotopia tra } P|_{S^1} \text{ e } c$$

Ma $P|_{S^1}$ sarà omeomorfa anche alla funzione $z^n \colon S^1 \to \mathbb{C}^*$, siccome verifico che

$$F' \colon S^1 \times [0,1] \to \mathbb{C}^* \quad F' \colon (x,t) \longmapsto z^n - t \cdot \left(a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0\right) \quad \text{è omotopia tra } P|_{S^1} \text{ e } z^n$$

$$|F'(x,t)| \geq |z^n| - t \cdot \left|a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0\right| \geq |z^n| - t \cdot \left(|a_{n-1}|\, z^{n-1} + \ldots + |a_0|\right) \geq \text{ (ricordando } z \in D^2,\ |z| \leq 1)$$

$$\geq 1 - t \cdot \left(\overbrace{|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|}^{<1}\right) \geq 0 \quad \text{quindi } F' \text{ ben definita dato che } \operatorname{Im}(F') \subseteq \mathbb{C}^*$$

Quindi $z^n \simeq P|_{S^1} \simeq c$. Ma $(z^n)_* : \pi_1\left(S^1, 1\right) \to \pi_1\left(\mathbb{C}^*, 1\right)$ è un omomorfismo non banale (composizione dell'omomorfismo non banale ¡¡moltiplicazione per n¿¿ da S^1 in sé e dell'isomorfismo dell'inclusione tra S^1 e $\mathbb{C}^*$) mentre $c_* : \pi_1\left(S^1, 1\right) \to \pi_1\left(\mathbb{C}^*, 1\right)$ è l'omomorfismo banale, ϟ. □

3 Gruppi liberi e presentazioni

Definizione 3.1 (Gruppo libero su un sottoinsieme)**:** F gruppo e $X \subseteq F$ sottoinsieme ("base"). Allora F è libero su X se vale la prop. universale

$$\boxed{\forall G \text{ gruppo }, \forall \theta : X \to G \text{ funzione} \quad \exists!\ \theta' : F \to G \text{ omom. di gruppi t.c. } \theta(x) = \theta'(x) \quad \forall x \in X}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \forall G \text{ (gruppo)} \\
X \arrow[urr, "\forall\theta \text{ (funz.)}"] \arrow[urr, bend right] \arrow[rr, "X \subseteq F"'] & & F \arrow[u, dashed, "\exists!\theta' \text{ (omom.)}"']
\end{tikzcd}$$

X è detta base di F.

Osservazione Per capire tale defin. pensare a V k-sp. vettoriale, $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base di V. Voglio $f : V \to W$ lineare, allora mi basta scegliere le immagini della base $w_i = f(e_i)$ e f è **univocamente determinata**: $f(\sum a_i e_i) \overset{lin}{=} \sum a_i \underbrace{f(e_i)}_{=w_i}$. Allora

$$\begin{cases} X = \mathscr{B} \\ \theta : \mathscr{B} \to W,\ e_i \mapsto w_i \quad \text{funzione che associa tutti i vettori della base a elem. di } W \end{cases} \implies \exists! \theta' = f : V \to W$$

Osservazione Abbiamo

$$\begin{aligned} ! \quad &\text{di } \theta' \iff X \text{ genera } F \\ \exists \quad &\text{di } \theta' \iff \text{gli elementi di } X \text{ sono "algebricamente indipendenti"} \end{aligned}$$

Esempio 4 $\begin{cases} F = \mathbb{Z} \\ X = \{1\} \end{cases}$

Proposizione 16 F_1, F_2 liberi su X_1, X_2 risp, allora $F_1 \cong F_2 \iff X_1$ e X_2 sono in biezione.

Corollario 8 F libero su X_1 e $X_2 \implies X_1$ in biezione con X_2

Definizione 3.2 (rango/rank)**:** di un gruppo libero F con base X è $\text{RK}(F) = \#X$

Definizione 3.3 : F gruppo libero di $\text{RK}(F) = n$ è denotato con $\mathbb{Z}^{*n}$

3.1 Costruzione di gruppi liberi

Partiamo da un insieme qualsiasi X

- **Base**: X insieme è detta base
- **Insieme degli inversi**: $\hat{X} := \{\hat{x} : x \in X\}$, che è in biezione con X tramite $x \leftrightarrow \hat{x}$ e $X \cap \hat{X} = \emptyset$
- **Insieme delle lettere/alfabeto**: $X^{\pm} := X \cup \hat{X}$
- **Insieme delle parole di lunghezza** n: $W_n := (X^{\pm})^n$.
  $p \in W_n \implies p = (e_1, e_2, \dots,\ e_n),\ e_i \in X^{\pm}$
- **Insieme delle parole/vocabolario**: $W := \bigcup_{n \geq 0} W_n$
- **Funzione lunghezza**: $l(p) =$ unico n t.c. $p \in W_n$
- **Elemento neutro**: parola vuota $\{(\cdot)\} \in W_0$
- **Operazione di riduzione**: $p \mapsto p_{\text{red}}$ dove ho tolto tutti gli elementi del tipo $\dots e_i, \hat{e_i} \dots$ oppure $\dots \hat{e_i}, e_i \dots$.
  Diciamo che $p, p' \in W$ sono in relazione $p \sim p' \iff p_{\text{red}} = p'_{\text{red}}$
- **Operazione prodotto (accostamento)**: $\cdot : W \times W \to W/\sim,\ (p, p') \mapsto [p_{\text{accodato}} p']$ ovvero accodamento+riduzione

Allora il gruppo libero su X è
$$(F(X), \cdot) \coloneqq (W/\sim, \cdot)$$

Teorema 8 $(F(X), \cdot)$ come definito sopra è un gruppo ed è gruppo libero con base X.

Definizione 3.4 (Gruppo libero generato): X insieme, $F(X)$ costruito come sopra è detto gruppo libero generato da X.

3.2 Relazione tra gruppi e gruppi liberi

Proposizione 17 F gruppo, $X \subseteq F$ allora

$$F \cong F(X) \iff \begin{cases} X \text{ insieme di generatori} \\ \nexists \text{ parole in } X \text{ di lunghezza} \neq 0 \text{ che si riducono (ovvero sono "algebric. indip.")} \end{cases}$$

Proposizione 18 G gruppo con $X \subseteq G$ insieme dei generatori $\implies$ G è quoziente di un gruppo libero, in partic.
$$\boxed{G = F(X)/\ker\theta'}$$
dove $F(X), \theta'$ come definiti in precedenza.

3.3 Presentazioni

Definizione 3.5 (Chiusura normale): Sia $S \subseteq G$ sottoinsieme di G gruppo, allora la sua chiusura normale $\overline{S}$ in G è il più piccolo sottogruppo normale di G contenente S, ovvero l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G contenenti S:
$$\overline{S} = \bigcap_{S \subseteq H \triangleleft G} H$$

Definizione 3.6 (Presentazione): Una presentazione di G gruppo è il dato di

- **Insieme (di generatori)** $X \subseteq G$
- **Relazioni (tra i generatori)**: $R \subseteq W$ (W parole su X)

tali che
$$G = F(X)/\overline{R}$$
dove $F(X)$ è il gruppo generato da X e $\overline{R}$ è la chiusura normale in G di R. La notazione è $G = \langle X \mid R \rangle$

Osservazione Nella pratica la presentazione vuol dire:
$$G = \langle X \mid R \rangle \longrightarrow G = \left\langle X \mid \{r = \overset{\text{elem. neutro}}{e} : r \in R\} \right\rangle$$

Esempio 5 Abbiamo:

- $F(X) = \langle X \mid \emptyset \rangle$, quindi $\mathbb{Z} = \langle a \mid \emptyset \rangle$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a \mid a^n \rangle$
- $\langle \{a, b\} \mid ab = ba \rangle = \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$ (è il prodotto cartesiano che però è meglio scrivere così perché indica che è abel. e l'operazione è il $+$)
- $\langle \{a, b\} \mid \emptyset \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (vedi dopo per prod. libero)

Proposizione 19 (Gruppo abelianizzato) Se $G = \langle X \mid R \rangle$ allora
$$\mathrm{Ab}(G) = \langle X \mid R \cup \{[a, b] : a, b \in X\} \rangle$$
Infatti inserire i commutatori $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ nelle relazioni vuol dire che $[a, b] = e \iff aba^{-1}b^{-1} = e \iff ab = ba \quad \forall a, b \in X$

4 Prodotto libero e Teorema di Van Kampen

4.1 Prodotto libero di gruppi

Definizione 4.1 (Prodotto libero (con presentazioni))**:** G, H gruppi con $\begin{cases} G = \langle X \mid R \rangle \\ H = \langle Y \mid S \rangle \end{cases}$ allora

$$G * H \coloneqq \langle X \sqcup Y \mid R \cup S \rangle$$

Definizione 4.2 (prodotto libero (con parole))**:** G_1, G_2 gruppi, prendo l'alfabeto $A \coloneqq (G_1 \setminus \{1_{G_1}\}) \sqcup (G_2 \setminus \{1_{G_2}\}) \sqcup \{1\}$ e definisco prodotto libero $G_1 * G_2$ l'insieme delle parole $g_1 \cdots g_n$ ridotte (tali che $g_i \in G_k \Rightarrow g_{i+1} \notin G_k$) e della parola vuota 1, costruendo su esso la struttura di gruppo con

$$(g_1 \cdots g_n)^{-1} \coloneqq g_n^{-1} \cdots g_1^{-1} \qquad (g_1 \cdots g_n) \cdot (t_1 \cdots t_m) \coloneqq \begin{cases} g_1 \cdots g_n t_1 \cdots t_m & g_n \in G_k, t_1 \notin G_k \\ g_1 \cdots g_{n-1} \left(g_n t_1\right) t_2 \cdots t_m & g_n, t_1 \in G_k, g_n t_1 \neq 1_{G_k} \\ \left(g_1 \cdots g_{n-1}\right) \cdot \left(t_2 \cdots t_m\right) & g_n, t_1 \in G_k, g_n t_1 = 1_{G_k} \end{cases}$$

Osservazione Se $G_i \neq \{1\}$ allora $G_1 * G_2$ non è abeliano

Proposizione 20 (proprietà fondamentale del prodotto libero) Siano G_1, G_2 gruppi. Allora dato H gruppo

$$\forall \begin{cases} \psi_1 \colon G_1 \to H \\ \psi_2 \colon G_2 \to H \end{cases} \text{omom. di gruppi} \implies \exists!\, \psi \colon G_1 * G_2 \to H \text{ t.c. } \begin{cases} \psi_1 = \psi \circ \varphi_1 \\ \psi_2 = \psi \circ \varphi_2 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[d, hook, "\varphi_1"'] \arrow[dr, bend left, "\psi_1"] & \\
G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\psi"] & H \\
G_2 \arrow[u, hook', "\varphi_2"] \arrow[ur, bend right, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Costruisco ψ:

- Parole di lunghezza 1:
$$\psi\left(\varphi_s\left(x\right)\right) \coloneqq \psi_s\left(x\right)$$
- Parole di lunghezza qualsiasi: se $p = abc\ldots$ allora
$$\psi\left(p\right) \coloneqq \psi_s\left(a\right) \psi_k\left(b\right) \psi_s\left(c\right) \ldots$$

banalmente rispetta la condizione ed è un morfismo. □

4.2 Teorema di Van Kampen

Definizione 4.3 (Sottogruppo normale generato)**:** Abbiamo:

G gruppo $S \subset G$	Sottogruppo generato da S $\left\{s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n}\right\}$ con $s_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1$	$\subsetneq$	Sottogruppo *normale* generato da S $\left\{a \cdot s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n} \cdot a^{-1}\right\}$ con $s_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, a \in G$

Impostazione del teorema Siano X spazio topologico, $A, B \subseteq X$ aperti di $X = A \cup B$, $A, B, A \cap B$ connessi per archi e $x \in A \cap B$. Abbiamo

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, hook, "h"] & \\
A \cap B \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & X \\
 & B \arrow[ur, hook, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

è commutativo, ovvero $h \circ i = k \circ j$, con h, i, j, k le inclusioni. Usando

- **funtore** π_1 ti tutto ciò

- proprietà fondamentale del prodotto libero

otteniamo il seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, hook, "\psi_A"] \arrow[dr, "h_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[urr, "i_*"] \arrow[drr, "j_*"'] & & \pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0) \arrow[r, dashed, "\psi"] & \pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\ll i_*(a)j_*(a^{-1})\gg} \\
 & & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, hook, "\psi_B"'] \arrow[ur, "k_*"'] &
\end{tikzcd}$$

dove

- $i_* : [\alpha]_{A\cap B} \mapsto [\alpha]_A$ eccetera
- $\psi_A(\overset{\text{elemento}}{[\gamma]_A})" = " \overset{\text{parola nel prod. libero}}{[\gamma]_A}$
- **Commutatività** (dalle proprietà funtoriali): $h_* \circ i_* = k_* \circ j_*$
- **Esistenza del morfismo** ψ (da proprietà fondamentale del prodotto libero)

Teorema 9 (Seifert-Van Kampen) Il morfismo $\psi\colon \pi_1(A,x) * \pi_1(B,x) \to \pi_1(X,x)$ (che esiste per la proprietà fondamentale del prodotto libero) è:

I) **Suriettivo**: $\operatorname{Im}\psi = \pi_1(X,x)$

II) **Kernel**: $\ker\psi = N := \ll i_*[\gamma]j_*[\gamma]^{-1} : [\gamma] \in \overbrace{\pi_1(A\cap B,x_0)}^{\text{basta solo nei gener.}} \gg$
Riscritto abbreviato: $\ker\psi = \ll i_*(a)\, j_*(a^{-1}) \gg$ al variare di $a := [a] \in \pi_1(A\cap B,x_0)$

E quindi per il primo teo. di isomorfismo abbiamo:

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{\ll i_*(a)\, j_*(a^{-1}) \gg} = \langle X_A \cup X_B \mid R_A \cup R_B \cup R_{SVK}\rangle$$

dove $\begin{cases} \pi_1(A,x_0) = \langle X_A \mid R_A\rangle \\ \pi_1(b,x_0) = \langle X_B \mid R_B\rangle \end{cases}$ e $R_{SVK} = \{[\gamma]_A[\gamma]_B^{-1} : [\gamma] \in \overbrace{\pi_1(A\cap B,x_0)}^{\text{basta solo nei gener.}} \}$

Un modo ancora più abbreviato per scrivere il kernel è

$$\ker\psi = \ll [\gamma]_A[\gamma]_B^{-1} : [\gamma]_{A\cap B} \gg$$

Il modo per leggere R_{SVK} è che $[\gamma]_A[\gamma]_B^{-1} = 1$ ovvero $[\gamma]_A = [\gamma]_B$ dove $[\gamma] \in \pi_1(A\cap B)$. Infatti quando unisco i due spazi devo aggiungere la relazione che i lacci nell'intersezione sono proprio uguali.

Dimostrazione. **(II)** $\ker\psi = N$. Doppia inclusione.

$\supseteq$ Quando scrivo $\psi([\cdot]_A)$ intendo $\psi(\psi_A([\cdot]_A))$, stessa cosa con B
Voglio dimostrare che

$$[\gamma]_{A\cap B} \in \pi_1(A\cap B,x_0) \implies \psi(\overset{\text{parole}}{[\gamma]_A \cdot [\gamma]_B^{-1}}) = 1$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\psi(\overset{\text{parole}}{[\gamma]_A \cdot [\gamma]_B^{-1}}) &= \psi([\gamma]_A)\cdot\psi([\gamma]_B)^{-1} && \text{per def. di } \psi \text{ nella prop. univers.} \\
&= h_*[\gamma]_A \cdot (k_*[\gamma]_B)^{-1} && \text{per def. di } \psi \text{ nella prop. univers.} \\
&= h_*(i_*[\gamma]_{A\cap B}) \cdot (k_*(j_*[\gamma]_{A\cap B}))^{-1} && \text{def. di } i_* \text{ e } j_* \\
&= h_*(i_*[\gamma]_{A\cap B}) \cdot (h_*(i_*[\gamma]_{A\cap B}))^{-1} && \text{essendo } h_*\circ i_* = k_*\circ j_* \text{ per prop. funtoriali} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Allora $N \subseteq \ker\psi$, poiché N è generato dagli elementi che abbiamo visto andare in 1

$\subseteq$ scomponendo con il Lemma di Lebesgue per cammini ogni cammino in $\pi_1(X,x)$ omotopo al cammino costante in pezzi tutti in A o in B (vedi lemma seguente) e scrivendolo come parola di lettere $(\psi_A \circ i_*(a))$ e $(\psi_B \circ j_*(a))^{-1}$

$\square$

Dimostrazione. **(I)** Devo dimostrare che

$$\forall [\gamma]_X \in \pi_1(X,x_0) \quad \exists p \in \pi_1(A) * \pi_1(B) \text{ parola t.c. } \psi(p) = [\gamma]_X$$

Dato $\gamma \in \Omega(X,x_0)$ costruiamo p.

- Per Lemma di Lebesgue per cammini (e lemma sotto) ho $\gamma \sim_{\{0,1\}} \alpha_1 * \beta_1 * \dots * \alpha_s * \beta_s$ con $\begin{cases} \alpha_i \in \Omega(A,x_0) \\ \beta_i \in \Omega(B,x_0) \end{cases}$.

  Ma allora
  $$[\gamma]_X = [\alpha_1]_X * [\beta_1]_X * \dots * [\alpha_s]_X * [\beta_s]_X$$

- abbiamo che $\begin{cases} [\alpha_1]_A, \dots, [\alpha_s]_A \in \pi_1(A,x_0) \\ [\beta]_B, \dots, [\beta]_B \in \pi_1(B,x_0) \end{cases}$

- Definisco $p \in \pi_1(A) * \pi_1(B)$:
  $$p \coloneqq [\alpha_1]_A [\beta_1]_B \dots [\alpha_s]_A [\beta_s]_B$$

  In questo modo
  $$\psi(p) \overset{\text{def. } \psi}{=} \psi([\alpha_1]_A) \dots \psi([\beta_s]_B) \overset{\text{def. } \psi}{=} [\alpha_1]_X \dots [\beta_s]_X = [\gamma]_X$$

$\square$

Proposizione 21 Nella definizione di N (che è $\ker \psi$) basta prendere $[\gamma] \in S$ con S sistema di generatori di $\pi_1(A \cap B, x_0)$. Ovvero
$$N = H_S \coloneqq \ll [\gamma]_A \cdot [\gamma]_B^{-1} : [\gamma] \in S \gg$$

Dimostrazione. No sbatti $\square$

Lemma 8 Un loop nell'unione $A \cup B$ si può scrivere come giunzione di loop contenuti interamente in A o B. Ovvero, siano vere le ip. di SVK, sia $\gamma \in \Omega(X,x_0)$ (con $x_0 \in A \cup B$), allora

$$\gamma \sim_{0,1} \alpha_1 * \dots * \alpha_s \quad \text{con } \alpha_i \in \Omega(X,x_0) : \operatorname{Im}(\alpha_i) \subseteq A \text{ aut } B$$

Dimostrazione. No sbatti $\square$

*Esempio 6 (**semplice connessione di** $S^{n\geq 2}$)* Prendo $A = S^n \setminus \{1,0,\dots,0\}, B = S^n \setminus \{-1,0,\dots,0\}$ entrambi omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ (tramite la proiezione stereografica) e dunque semplicemente connessi. $A \cap B$ omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, c.p.a. e dunque posso applicare Seifert-Van Kampen

Corollario 9 Se $A \cap B$ semplicemente connesso $\implies \pi_1(X,x_0) =\cong \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)$

Dimostrazione. $A \cap B$ semplicemente connesso $\implies \pi_1(A \cap B, x_0) = \{1\}$, quindi per SVK $\ker \psi = N \coloneqq \ll i_*[\gamma] j_*[\gamma]^{-1} \mid [\gamma] \in \underbrace{\pi_1(A \cap B, x_0)}_{=1} \gg = \ll 1 \gg = 1$ $\square$

Corollario 10 $A, B, A \cap B$ come ipotesi di Van Kampen e connessi per archi, A, B semplicemente connessi $\implies X$ semplicemente connesso

Parte II
Geometria differenziale

Preliminari Meschini

Definizione 4.4 (funzione liscia)**:** f liscia su I se $f \in C^{\infty}(I)$ con $C^{\infty}(I) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(I)$.

Osservazione $C^k(I)$ e $C^{\infty}(I)$ sono anelli commutativi rispetto a somma e prodotto di funzioni (per dim. che il prodotto è chiuso fare induzione su k e usare regola di derivazione del prodotto)

*Esempio 7 (**funzioni bump**)* ci sono funzioni $C^{\infty}(I)$ che sono nulle su un intervallo ma non su tutto I, come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

Definizione 4.5 (diffeomorfismo)**:** $I, J \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : I \to J$ diffeomorfismo se

(i) $f \in C^{\infty}(I)$ (ii) f invertibile (biunivoca) (iii) $f^{-1} \in C^{\infty}(J)$

Osservazione (iii) $\implies J_f \neq \mathbf{0}$. Se siamo in $\mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (I)$.
Infatti dal teorema della derivata dell'inversa: $[f^{-1}(s)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(s))} \quad \forall s \in J \implies f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

Osservazione Le 3 proprietà sono indipendenti, ad esempio per $f(x) = x^3$ valgono le prime due ma non la terza.

Proposizione 22 $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $h : I \to \mathbb{R} \in C^{k \geq 1}(I)$, e $h'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \implies h \colon I \to J$ diffeomorfismo di classe C^k e $J = h(I)$ aperto.

Dimostrazione. WLOG $h' > 0$ (per teo. degli zeri, se è $\neq 0$ e continua allora è tutta positiva o negativa), quindi h strettamente crescente e iniettiva, quindi $h \colon I \to J$ biunivoca. Inoltre J intervallo, aperto in quanto per la stretta crescenza di h vale $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intorno aperto di $x_0 \implies (h(x_0 - \varepsilon), h(x_0 + \varepsilon))$ intorno aperto di $h(x_0)$. Infine $h^{-1} \in C^k(I)$ (esiste in quanto biunivoca) induttivamente sulla classe di $Dh^{-1}(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}$: infatti la derivata dell'inversa è composizione di una funzione C^0 (h^{-1}) e C^{∞} $({}^1\!/_t)$, quindi la derivata è a sua volta $C^0 \implies h^{-1} \in C^1$. Con lo stesso ragionamento $h^{-1} \in C^2$ □

5 Curve

Definizione 5.1 (curva parametrizzata)**:** $\alpha \colon \overset{\text{aperto}}{J} \to \mathbb{R}^3$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto e $\alpha \in C^{\infty}$. $\operatorname{Im}(\alpha)$ *traccia* o *supporto* di α.

Definizione 5.2 (vettore tangente ad una curva)**:** $\boldsymbol{t} = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ vettore tangente ad α

Definizione 5.3 (riparametrizzazione)**:** $\tilde{\alpha} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3$ è riparametrizzazione di $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se esiste diffeomorfismo $h : \widetilde{I} \to I \mid \widetilde{\alpha} = \alpha(h(s)) \quad \forall s \in \widetilde{I}$. Si dicono equivalenti $\alpha \in C^k(I)$ e $\tilde{\alpha} \in C^k(\widetilde{I})$ ottenute l'una dall'altra per riparametrizzazione.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \\
\widetilde{I} \arrow[u, "h \text{ diffeo.}"] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservazione h diffeo. $\implies h^{-1}$ diffeo $\implies \alpha(t) = \widetilde{\alpha}(h^{-1})$ è riparametrizz. di $\widetilde{\alpha}$

Definizione 5.4 (curva regolare)**:** $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$

Osservazione Per una curva regolare α è ben definita la retta tangente ad α in t

Definizione 5.5 (curva semplice)**:** α curva parametrizzata è semplice se iniettiva (al variare di t non ripasso mai sullo stesso punto)

5.1 Lunghezza d'arco e Curvatura

Definizione 5.6 (lunghezza d'arco)**:** $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt$ per α curva regolare

Osservazione La lunghezza d'arco è invariante per riparametrizzazione

Definizione 5.7 (parametrizzazione per lunghezza d'arco)**:** β curva regolare tale che $\|\beta'(t)\| \equiv 1$

Proposizione 23 Una curva regolare $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ ammette sempre una parametrizzazione per lunghezza d'arco β

Dimostrazione. Preso il parametro naturale $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau = L\left(\alpha|_{[t_0,t]}\right)$, allora $\beta := \alpha \circ s^{-1}$ □

Notazione 3 $\frac{d}{dt} := ()'$ $\frac{d}{ds} := \dot{()}$ $\frac{d^2}{dt^2} := ()''$ $\frac{d^2}{ds^2} := \ddot{()}$

Definizione 5.8 (curvatura)**:** $\kappa(s) := \|\ddot{\alpha}\| = \left\| \frac{d^2\alpha(s)}{ds^2} \right\|$ per α parametrizzata per lunghezza d'arco (vettore curvatura $\boldsymbol{\kappa} = \frac{d^2\alpha(s)}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$)

*Esempio 8 (**curvatura del cerchio**)* Cerchio di raggio R, $\kappa \equiv \frac{1}{R}$

Osservazione $\kappa \equiv 0 \iff \alpha$ parte di retta

Osservazione Curvatura in un parametro generico $\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$

Definizione 5.9 (curva biregolare)**:** α curva regolare per cui $\alpha' \wedge \alpha'' \neq 0 \ \forall t$ ovvero l'accelerazione non è mai parallela alla velocità

Osservazione Se α parametrizzata per lunghezza d'arco, allora biregolare $\iff \ddot{\alpha} \neq 0$, siccome $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$

5.1.1 Prodotto vettoriale e isometrie

Definizione 5.10 (isometria di $\mathbb{R}^3$)**:** $f(v) = Av + w$ con $A \in \mathrm{O}(3)$ e $w \in \mathbb{R}^3$

POSITIVA $\det A = 1$ ($A \in \mathrm{SO}(3)$) NEGATIVA $\det A = -1$

Proposizione 24 (invarianza della curvatura per isometrie) La curvatura è invariante per isometrie. In particolare se $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ curva param. per lunghezza d'arco, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria e $\beta = f \circ \alpha$, allora
$$\begin{cases} \beta \text{ param. per lung. d'arco} \\ \kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) \end{cases}$$

Dimostrazione. Due tesi:

1. $\beta'(s) = (f \circ \alpha)'(s) = Df(\alpha(s))\alpha'(s) = A\alpha'(s) \implies \|\beta(s)\| = \|A\alpha'(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1 \quad \forall s \in J$ (abbiamo usato il fatto che $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$ con $A \in O(3)$)
2. $\kappa_\beta(s) = \|\beta''(s)\| = \left\|\frac{d}{ds}\beta'(s)\right\| = \left\|\frac{d}{ds}(A\alpha'(s))\right\| = \|A\alpha''(s)\| = \|\alpha''(s)\| =: \kappa_\alpha(s)$

□

Definizione 5.11 (prodotto vettoriale)**:** $u \wedge v := \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

Proposizione 25 Per $A \in \mathrm{O}(3)$ vale $A(u \wedge v) = \det A \cdot [(Au) \wedge (Av)]$

Definizione 5.12 (orientazione di uno spazio vettoriale)**:** Quoziente di relazione di equivalenza sulla positività della matrice di trasformazione di basi

5.1.2 Prodotto scalare e vettoriale di funzioni lisce

Definizione 5.13 (prodotto scalare/vettoriale di funzioni vettoriali lisce): Se $u, v \in C^{\infty}((a,b), \mathbb{R}^n)$ allora

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle : t \mapsto \langle u(t), v(t)\rangle \qquad & \in C^{\infty}((a,b), \mathbb{R}) \\ u \wedge v : t \mapsto u(t) \wedge v(t) \qquad & \in C^{\infty}((a,b), \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Lemma 9 (Derivata del prodotto in generale) Per una funzione **bilineare** $* : A \times B \to C$ vale

$$\frac{d}{dt}(a(t) * b(t)) = \frac{da(t)}{dt} * b(t) + a(t) * \frac{db(t)}{dt}$$

con $a(t) \in A$ e $b(t) \in B$ funzioni

Corollario 11 Essendo prodotto scalare e vettoriale funzioni bilineari:

$$\frac{d}{dt}\langle u, v\rangle = \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \left\langle u, \frac{dv}{dt} \right\rangle \quad \text{(regola di Leibiz)}$$
$$\frac{d}{dt} u \wedge v = \frac{du}{dt} \wedge v + u \wedge \frac{dv}{dt}$$

Dimostrazione. P.8

□

Definizione 5.14 (norma di funzioni vettoriali lisce): $|u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

Proposizione 26 La norma di una funzione vettoriale liscia è liscia dove la funzione vettoriale non si annulla.

Dimostrazione. Siccome vale che $\sqrt{\cdot} \in C^{\infty}((0, +\infty), \mathbb{R})$ □

5.2 Triedro di Frenet

Definizione 5.15 (triedro di Frenet): Presa α curva biregolare parametrizzata con lunghezza d'arco, $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ con

$$\boldsymbol{t}(t) := \dot{\alpha} = \frac{d}{ds}\alpha(s) \qquad \boldsymbol{n}(t) := \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|} = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d^2}{ds^2}\alpha(s) \qquad \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s)$$

abbiamo che $\boldsymbol{t}(t), \boldsymbol{n}(t), \boldsymbol{b}(t)$ sono funzioni vettoriali lisce e formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che varia con il tempo.

Definizione 5.16 (torsione): Presa α curva biregolare,

$$\tau(s) = \left\langle \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}, \boldsymbol{n} \right\rangle$$

e quindi $\frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s) = \tau(s) \cdot \boldsymbol{n}(s)$

Evoluzione del triedro con s nella base locale abbiamo

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{d}{ds}\boldsymbol{t}(s) = \ddot{\alpha}(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s)} \\ \frac{d}{ds}\boldsymbol{n}(s) = D(s)\boldsymbol{t}(s) + E(s)\boldsymbol{n}(s) + F(s)\boldsymbol{b}(s) \quad D, E, F \text{ funzioni scalari} \to \text{ nella base locale} \\ \frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s) = A(s)\boldsymbol{t}(s) + B(s)\boldsymbol{n}(s) + C(s)\boldsymbol{b}(s) \quad A, B, C \text{ funzioni scalari} \to \text{ nella base locale} \end{cases}$$

dobbiamo determinare le 6 funzioni. Ricordiamo che essendo in una **base ortonormale** abbiamo

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \begin{cases} A(s) = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{t}(s) \right\rangle \to \text{componente della deriv. su } \boldsymbol{t} \\ B(s) = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{n}(s) \right\rangle \\ C(s) = \left\langle \frac{d}{ds}\boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{b}(s) \right\rangle \end{cases}$$

e ricordando che per due funzioni vettoriali lisce $u, v : J \to \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v\rangle =$cost. si ha (ricordare formula der. del prod.)

$$\left\langle \frac{d}{dt}u, v \right\rangle = -\left\langle u, \frac{d}{dt}v \right\rangle$$

allora

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\begin{cases} A(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{b}}{ds},\boldsymbol{t}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{b},\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{b},\kappa\boldsymbol{n}\right\rangle =-\kappa\left\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{n}\right\rangle =0 \quad \text{NB}\\ B(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{b}}{ds},\boldsymbol{n}\right\rangle :=\tau(s) \quad \text{torsione}\\ C(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{b}}{ds},\boldsymbol{b}\right\rangle =0\end{cases} \implies \boxed{\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\tau(s)\boldsymbol{n}}$$

NB $\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$ ha componente nulla su $\boldsymbol{t}$.
Poi abbiamo

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\begin{cases} D(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{n}}{ds},\boldsymbol{t}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{n},\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{n},\kappa\boldsymbol{n}\right\rangle =-\kappa\left\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\right\rangle =-\kappa(s)\\ E(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{n}}{ds},\boldsymbol{n}\right\rangle =0\\ F(s)=\left\langle \frac{d\boldsymbol{n}}{ds},\boldsymbol{b}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{n},\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\right\rangle =-\left\langle \boldsymbol{n},\tau(s)\boldsymbol{n}\right\rangle =-\tau\left\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\right\rangle =-\tau(s)\end{cases} \implies \boxed{\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\kappa(s)\boldsymbol{t}-\tau(s)\boldsymbol{b}}$$

Riassumendo:

Teorema 10 (equazioni di Frenet) Per $\alpha(s)$ parametrizzata nella lunghezza d'arco

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\kappa(s)\,\boldsymbol{n}(s) \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\kappa(s)\,\boldsymbol{t}-\tau(s)\,\boldsymbol{b} \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\tau(s)\,\boldsymbol{n}$$

Proposizione 27 Una curva biregolare è piana se e solo se $\tau\equiv 0$

Dimostrazione. $\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{n}(s)$ costante, e quindi $\boldsymbol{t}(s)$ e $\boldsymbol{n}(s)$ giacciono sempre sullo stesso piano. □

Proposizione 28 (Invarianza di τ per isometrie positive) Presa $\alpha=\alpha(s)$ curva biregolare, f isometria di $\mathbb{R}^3$ positiva ($f=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}$ con $A\in SO(3)$) e $\beta:=f\circ\alpha=A\alpha(s)+\boldsymbol{v}$, allora $\kappa_\alpha\equiv\kappa_\beta$ e $\tau_\alpha\equiv\tau_\beta$.

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_\beta=A\boldsymbol{t}_\alpha\\ \boldsymbol{n}_\beta=A\boldsymbol{n}_\alpha\\ \boldsymbol{b}_\beta=A\boldsymbol{b}_\alpha\end{cases}$$

- $\boldsymbol{t}_\beta=\dot\beta=\frac{d}{ds}(A\alpha(s)+\boldsymbol{v})=\frac{d}{ds}(A\alpha(s))+\underbrace{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}_{=0}=\underbrace{\frac{dA}{ds}}_{0}\alpha(s)+A\frac{d\alpha}{ds}=A\frac{d\alpha}{ds}=A\boldsymbol{t}_\alpha$
- da prima abbiamo $\ddot\beta=\frac{d}{ds}(A\dot\alpha(s))=\frac{dA}{ds}\dot\alpha+A\ddot\alpha=A\ddot\alpha \implies \boldsymbol{n}_\beta=\frac{\ddot\beta}{\|\ddot\beta\|}=\frac{A\ddot\alpha}{\|A\ddot\alpha\|}=\frac{A\ddot\alpha}{\|\ddot\alpha\|}=A\boldsymbol{n}_\alpha$
- $\boldsymbol{b}_\beta=\boldsymbol{t}_\beta\wedge\boldsymbol{n}_\beta=(A\boldsymbol{t}_\alpha)\wedge(A\boldsymbol{n}_\alpha)=A(\boldsymbol{t}_\alpha\wedge\boldsymbol{n}_\alpha)=A\boldsymbol{b}_\alpha$

Allora

$$\tau_\beta=\left\langle\frac{d\boldsymbol{b}_\beta}{ds},\boldsymbol{n}_\beta\right\rangle=\left\langle\frac{d}{ds}(A\boldsymbol{b}_\alpha),A\boldsymbol{n}_\alpha\right\rangle=\left\langle A\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}_\alpha),A\boldsymbol{n}_\alpha\right\rangle\stackrel{\star}{=}\left\langle\frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}_\alpha),\boldsymbol{n}_\alpha\right\rangle=\tau_\alpha$$

in $\star$ poiché $A\in SO(3)$ □

Definizione 5.17 (piano osculatore)**:** Piano generato da $\boldsymbol{t}(s)$ e $\boldsymbol{n}(s)$

Definizione 5.18 (piano rettificante)**:** Piano generato da $\boldsymbol{t}(s)$ e $\boldsymbol{b}(s)$

Definizione 5.19 (cerchio osculatore)**:** Cerchio di centro $C(s_0)=\alpha(s_0)+\frac{\boldsymbol{n}(s_0)}{\kappa(s_0)}$ e raggio $\boldsymbol{n}(s_0)$

Proposizione 29 (Curvatura e torsione in un parametro generico) Per un parametro generico t, con $s=h(t)$ e $t=h^{-1}(s)$

$$\kappa(t)=\frac{\|\dot\alpha(t)\wedge\ddot\alpha(t)\|}{\|\dot\alpha(t)\|^3} \qquad \tau(t)=-\frac{\langle\dot\alpha\wedge\ddot\alpha,\dddot\alpha\rangle}{\|\dot\alpha\wedge\ddot\alpha\|^2}$$

Dimostrazione. P. 14-15 □

5.2.1 Teorema fondamentale della teoria locale delle curve

Teorema 11 (teorema fondamentale della teoria locale delle curve) Abbiamo:

1. Date $\alpha(s), \beta(s)$ parametrizz. con lunghezza d'arco:
$$\exists \text{ isometria positiva } f \mid \beta = f \circ \alpha \iff \begin{cases} \kappa_\alpha \equiv \kappa_\beta \\ \tau_\alpha \equiv \tau_\beta \end{cases}$$
ovvero κ e τ sono **invarianti completi**, ovvero non perdono informazioni e determinano univocamente la curva

2. Date $\kappa, \tau : J \to \mathbb{R}$ lisce t.c. $\kappa(s) > 0 \forall s \implies \exists!\ \alpha(s) \mid \kappa_\alpha \equiv \kappa$ e $\tau_\alpha \equiv \tau$
ovvero κ e τ sono **indipendenti** e possono essere **arbitrari**

Dimostrazione. Esistenza e unicità

Unicità (1) Il $\implies$) vedi invarianza della curvatura per isometrie e Invarianza di τ per isometrie positive, vogliamo dimostrare il $\impliedby$), ovvero date κ, τ le curve con tali valori sono uniche a meno di isometrie. Siano α, β curve tali che $\kappa_\alpha \equiv \kappa_\beta \coloneqq \kappa$ e $\tau_\alpha \equiv \tau_\beta \coloneqq \tau$.
Fisso $s_0 \in J$, allora l'isometria candidata è

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$$

con

- $A \in O(3)$ matrice di cambio base da un triedro all'altro in s_0:
$$\left(\boldsymbol{t}_\beta(s_0) \mid \boldsymbol{n}_\beta(s_0) \mid \boldsymbol{b}_\beta(s_0)\right) = A\left(\boldsymbol{t}_\alpha(s_0) \mid \boldsymbol{n}_\alpha(s_0) \mid \boldsymbol{b}_\alpha(s_0)\right) \quad \text{con } A \in O(3)$$
ovvero
$$\begin{cases} \boldsymbol{t}_\beta(s_0) = A\boldsymbol{t}_\alpha(s_0) \\ \boldsymbol{n}_\beta(s_0) = A\boldsymbol{n}_\alpha(s_0) \\ \boldsymbol{b}_\beta(s_0) = A\boldsymbol{b}_\alpha(s_0) \end{cases}$$
essendo i due triedri due basi positive ortonormali. A priori A potrebbe variare con t.
- $\boldsymbol{v} = \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$

Sia $\gamma(s) = f(\alpha(s))$, vogliamo dimostrare che $\beta \equiv \gamma$

- Per come abbiamo definito A e $\boldsymbol{v}$ abbiamo che vale $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$
- Verifichiamo che vale $\forall s \in J$, ovvero che nell'evoluzione nel tempo A è costante.

Sia
$$F(s) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{t}_\gamma - \boldsymbol{t}_\beta\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{n}_\gamma - \boldsymbol{n}_\beta\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{b}_\gamma - \boldsymbol{b}_\beta\|^2$$

È una sorta di distanza tra i due triedri. Abbiamo che $F(s_0) = 0$, quindi vogliamo dimostrare che $F'(s) \equiv 0$ in modo che tale distanza è costante e uguale a zero $\forall s$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\boldsymbol{t}_\gamma - \boldsymbol{t}_\beta\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\boldsymbol{n}_\gamma - \boldsymbol{n}_\beta\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\boldsymbol{b}_\gamma - \boldsymbol{b}_\beta\|^2 \\
&= \left\langle \frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}_\gamma - \boldsymbol{t}_\beta), (\boldsymbol{t}_\gamma - \boldsymbol{t}_\beta) \right\rangle + \left\langle \frac{d}{ds}(\boldsymbol{n}_\gamma - \boldsymbol{n}_\beta), (\boldsymbol{n}_\gamma - \boldsymbol{n}_\beta) \right\rangle + \left\langle \frac{d}{ds}(\boldsymbol{b}_\gamma - \boldsymbol{b}_\beta), (\boldsymbol{b}_\gamma - \boldsymbol{b}_\beta) \right\rangle \\
&\overset{\text{sviluppare con formule di Frenet}}{=} [\dots] = 0
\end{aligned}$$

quindi i triedri coincidono $\forall s$, in particolare $\boldsymbol{t}_\gamma \equiv \boldsymbol{t}_\beta \iff \dot\gamma(s) = \dot\beta(s)$, quindi

$$\begin{cases} \gamma(s_0) = \beta(s_0) \\ \dot\gamma(s) = \dot\beta(s) \quad \forall s \end{cases} \implies \gamma \equiv \beta$$

Esistenza (2) Considero $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}) = (x_1, \dots, x_9)$ e dal teorema di Frenet

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dn}{ds} \\ \frac{db}{ds} \end{pmatrix} = \overbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \kappa \cdot \mathrm{Id}_3 & \mathbf{0} \\ -\kappa \cdot \mathrm{Id}_3 & \mathbf{0} & -\tau \cdot \mathrm{Id}_3 \\ \mathbf{0} & \tau \cdot \mathrm{Id}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}}}^{=A \in M(\mathbb{R}, 9\times 9)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = A \cdot \boldsymbol{X}$$

L'esistenza di $\boldsymbol{X}$ soluzione dal teorema di esistenza in piccolo (di Cauchy) (da cui può derivare anche l'unicità), e la tesi prendendo $\alpha_i := \int_0^s t_i(\sigma)\, d\sigma$ per $i = 1, 2, 3$

□

Proposizione 30 (forma canonica locale) Presa $\gamma(s)$ curva biregolare, sviluppando in serie di Taylor γ per valori piccoli con $s_0 = 0$

$$\text{Forma canonica locale: } \gamma(s) \approx \begin{cases} \gamma_1(s) = s - \frac{\kappa_0^2}{6} s^3 \\ \gamma_2(s) = \frac{\kappa_0}{2} s^2 + \frac{\kappa_0'}{6} s^3 \\ \gamma_3(s) = -\frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 \end{cases}$$

Ovvero

$$\gamma(s) = \mathbf{0} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s^3}{6} \begin{pmatrix} -\kappa_0^2 \\ \kappa_0' \\ -\kappa_0 \tau_0 \end{pmatrix} + o(s^3)$$

NB: dipende solo da curvatura e torsione

Dimostrazione. Sviluppo di Taylor al 3º ordine in $\gamma(0)$:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\dot{\gamma}(0) + \frac{1}{2} s^2 \ddot{\gamma}(0) + \frac{1}{6} s^3 \dddot{\gamma}(0) + o\left(s^3\right)$$

Possiamo scegliere sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$ che ha origine in $\gamma(0)$ e gli assi come i versori del triedro di Frenet, ovvero

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{t}(0), \boldsymbol{n}(0), \boldsymbol{b}(0))$$

con

$$\dot{\gamma}(s) = \boldsymbol{t}(s) \qquad \ddot{\gamma}(s) = \kappa(s)\, \boldsymbol{n}(s)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dddot{\gamma}(s) &= \frac{d}{ds} \ddot{\gamma}(s) \\ &= \frac{d}{ds}(\kappa \boldsymbol{n}) \\ &= \kappa' \boldsymbol{n} + \kappa \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \\ &= -\kappa^2(s)\, \boldsymbol{t}(s) + \kappa'(s)\, \boldsymbol{n}(s) - \kappa(s)\, \tau(s)\, \boldsymbol{b}(s) \quad \text{da } a \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{t} - \tau \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

allora in $(\boldsymbol{t}(0), \boldsymbol{n}(0), \boldsymbol{b}(0))$:

$$\begin{cases} \gamma(0) = \mathbf{0} \\ \dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{t}(0) = \boldsymbol{e}_1 \\ \ddot{\gamma}(0) = \kappa(0) \boldsymbol{n}(0) = \kappa_0 \boldsymbol{e}_2 \\ \dddot{\gamma}(0) = -\kappa_0^2 \boldsymbol{e}_1 + \kappa_0' \boldsymbol{e}_2 - \kappa_0 \tau_0 \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \implies \gamma(s) = \mathbf{0} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s^3}{6} \begin{pmatrix} -\kappa_0^2 \\ \kappa_0' \\ -\kappa_0 \tau_0 \end{pmatrix} + o(s^3)$$

□

5.3 Curve geometriche

A meno della param.

Lemma 10 Se $\alpha \sim \beta$ e $t_0 = h(s_0)$ allora $\dot{\alpha}(s_0)$ e $\dot{\beta}(t_0)$ sono proporzionali

Proposizione 31 $\alpha(t)$ curva biregolare, allora $\tau(t) \equiv 0 \iff \exists \Sigma$ piano in $\mathbb{R}^3$ t.c. $\alpha(J) \subseteq \Sigma$

6 Calcolo differenziale in più variabili

Definizione 6.1 (differenziabilità)**:** $f\colon A \overset{\text{aperto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto) differenziabile in $x \in A$ se $\exists L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ operatore lineare detta differenziale $df(x) := L$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{|h|} = 0$$

Definizione 6.2 (classe C^k)**:** $f\colon A \overset{\text{aperto}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di classe $C^{k \geq 1}$ su A ($f \in C^k(A, \mathbb{R}^m)$) se la funzione differenziale $df\colon A \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è di classe C^{k-1}. Equivalentemente $f \in C^k(A, \mathbb{R}^m) \iff \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^{k-1}(A)$

6.1 Teoremi vari

Teorema 12 (valor medio) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso, $f \in C^1(A, \mathbb{R})$, $x_0, x_1 \in A$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $f(x_1) - f(x_0) = df((1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1)(x_1 - x_0)$

Dimostrazione. Teorema del valor medio in una variabile applicato alla funzione $u(t) = f((1-t) \cdot x_0 + t \cdot x_1)$ □

Lemma 11 $A \mapsto A^{-1}$ è una funzione liscia su $\operatorname{Gl}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

Dimostrazione. Vale $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof}(A)^T$ ($\operatorname{cof}(A)_{ij} = \det A_{ij}$), con cof, det e $\frac{1}{\det}$ C^∞ in quanto funzioni polinomiali □

6.1.1 Teorema della funzione implicita

Teorema 13 (teorema della funzione implicita) Siano

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aperto
- $p = (x_0, y_0) \in \Omega$ con $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$
- $F : \Omega \to \mathbb{R}^m \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tale che $\begin{cases} F(p) = \mathbf{0} \\ \det \frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0 \end{cases}$

Allora

1. esistono

$$\begin{cases} \overset{\dim n}{V_1} \times \overset{\dim m}{V_2} \subseteq \Omega & \text{intorni aperti di } x_0 \text{ e } y_0 \text{ rispettivamente} \\ f : V_1 \to V_2 \in C^k(V_1, V_2) \end{cases}$$

tali che

$$F^{-1}(\mathbf{0}) \cap (V_1 \times V_2) = \Gamma_f \quad \text{grafico di } f$$

2. Inoltre per $x \in V_1$ vale

$$J_f(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))$$

Dimostrazione. Assumo $k = 1$ e procedo per induzione. Se $m = 1$ vale $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ ed esiste ε per cui $\frac{\partial F}{\partial y} \gtrless 0$ (WLOG > 0) in tutto $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, e in particolare $y \mapsto F(x, y)$ strettamente crescente. Inoltre

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 < F(x_0, y_0 + \varepsilon) \overset{\text{per continuità}}{\Longrightarrow} \exists \delta \in (0, \varepsilon] \;:\; F(x, y_0 - \varepsilon) < 0 < F(x, y_0 + \varepsilon) \;\; \forall x \in B(x_0, \delta)$$

e prendo $f(x)$ punto (unico) in cui $F(x, \cdot)$ si annulla in $\overbrace{(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)}^{V_2}$ con $x \in \overbrace{B(x_0, \delta)}^{V_1}$. Si dimostra poi che f continua e che vale la formula della derivata.

L'induzione su k ragionando ricorsivamente sulla formula per $J_f(x)$. □

Esempio 9 (***Applicazione lineare e affine***)

Teorema 14 (teorema della funzione inversa) Siano

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
- $\varphi : A \to \mathbb{R}^n \in C^\infty (A, \mathbb{R}^n)$ tale che $\underline{d\varphi (x_0) \text{ sia biettivo}}$

 Allora esiste U intorno aperto di x_0 tale che

1. $\varphi (U)$ sia aperto
2. $\varphi|_U$ sia un diffeomorfismo, ovvero biettiva con inversa C^∞ (φ è diffeomorfismo locale)

Dimostrazione. Sia $F \in C^\infty (A \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $F (x, y) = y - \varphi (x)$, siccome $\frac{\partial F}{\partial x} = -J_\varphi$ per il teorema della funzione implicita ottengo $\psi\colon V \to U'$ tale che

$$\Gamma_\varphi \cap (U' \times V) = F^{-1} (0) \cap (U' \times V) = \overbrace{\Gamma'_\varphi}^{\Gamma' \text{ grafico con le coordinate invertite}} := \{(x, y) \in U' \times V \mid x = \psi (y)\}$$

Basta ora solo restringere U' a $U := \varphi^{-1} (V) \cap U'$, e vale dunque $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_V$ e $\psi \circ \varphi|_U = \mathrm{Id}_U$. ☐

Osservazione È un risultato locale, infatti se dico che il differenziale è biettivo per ogni punto in generale non è vero che la funzione è biettiva (lo è solo in $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

6.1.2 Forme canoniche locali

Teorema 15 (forma canonica locale - caso iniettivo (inclusione)) Sia

- $\varphi : \overset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \geq n} \in C^\infty$
- $x_0 \in U$: $\underline{d\varphi (x_0) \text{ sia iniettivo}}$

 Allora esiste $V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0 t.c. esiste

Diffeo. in arrivo $\begin{cases} A, B \subseteq \mathbb{R}^m & \text{aperti t.c } \varphi (V) \subseteq A \\ h\colon A \to B & \text{diffeomorfismo} \end{cases}$ t.c. $\boxed{h (\varphi (x)) = (x, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}}$ $\forall x \in U \cap \varphi^{-1} (A)$

 nelle stesse ipotesi possiamo scegliere A, B, V t.c. in più valga $h (\varphi (V)) = \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{V} \times \underset{\subseteq \mathbb{R}^{m-n}}{\{\mathbf{0}\}} \subseteq B \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Dimostrazione. Preso W sottospazio complementare di $d\varphi (x_0) (\mathbb{R}^n)$ e una sua base $\{e_1, \dots, e_{k=m-n}\}$. Sia allora $F \in C^\infty \left(U \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m\right)$ $F (x, y) = \varphi (x) + \sum_{i=1}^k y_i e_i$, vale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (x_0) \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} (x_0, 0) = e_i \quad \implies \quad \partial F (x_0, 0) \text{ invertibile}$$

Per il teorema della funzione inversa trovo B intorno aperto di $(x_0, 0)$ tale che $F|_B : B \to A = F (B)$ diffeomorfismo, e sia $h = (F|_B)^{-1}$, che è h cercato. ☐

Teorema 16 (forma canonica locale - caso suriettivo (proiezione ai primi fattori)) Sia

- $f : \overset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \leq n} \in C^\infty$
- $x_0 \in U$: $\underline{d\varphi (x_0) \text{ sia suriettivo}}$

 Allora esiste $B \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0 t.c esiste

Diffeo. in partenza $\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}^n & \text{aperto} \\ h\colon A \to B & \text{diffeomorfismo} \end{cases}$ t.c. $\boxed{f (h (x)) = (x_1, \dots, x_m)}$ $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A$

 che è la proiezione sui primi m fattori modulo un diffeomorfismo in partenza (cambio coordinate)

Dimostrazione. Suppongo det $\frac{\partial f}{\partial (x_1, \dots, x_m)} \neq 0$, prendo $\Phi \in C^\infty (\Omega, \mathbb{R}^n)$ $\Phi (x) = (f (x), x_{m+1}, \dots, x_n)$, vale che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial (x_1, \dots, x_m)} & \frac{\partial f}{\partial (x_{m+1}, \dots, x_n)} \\ & I_{n-m} \end{pmatrix} \implies \partial \frac{\partial \Phi}{\partial x} (x_0) \text{ invertibile}$$

Per il teorema della funzione inversa trovo B intorno aperto di (x_0) tale che $\Phi|_B : B \to A = \Phi (B)$ diffeomorfismo, e sia $h = (\Phi|_B)^{-1}$, che è h cercato. ☐

7 Varietà

Definizione 7.1 (omeomorfismo sull'immagine)**:** $f\colon X \to Y$ tale che $g\colon X \to f(X)$, $g \equiv f$ sia omeomorfismo

Definizione 7.2 (parametrizzazione)**:** Sia $M \subseteq \mathbb{R}^m$, allora una sua parametrizzazione n-dimensionale è un'applicazione

$$\varphi : \overset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in C^\infty$$

tale che:
Pripriet "**di base**":

(i) U aperto

(ii) $\varphi \in C^\infty$

(iii) $\varphi(U) \subseteq M$ e aperto di M (topologia indotta da $\mathbb{R}^m$)

Proprietà "**caratterizzanti**":

(iv) $\varphi : U \to \varphi(U)$ omeomorfismo (omeomorfismo sull'immagine)

(v) $d\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ iniettivo $\forall x \in U$

Definizione 7.3 (Parametrizzazione globale)**:** se $\varphi(U) = M$

Osservazione Non è detto che esista parametrizzazione globale: ad esempio S^1 non ce l'ha (non sarebbe omeomorfismo)

Osservazione Se φ è parametrizzazione n-dimensionale $\implies n \leq m$

*Osservazione (**Curve**)* Per $n = 1, m = 3$ abbiamo che $\begin{cases} \text{(iv)} \implies J \mapsto \alpha(J) \quad \text{biettiva} \implies \alpha \text{ semplice} \\ \text{(v)} \implies d\alpha(x) = \dot\alpha(x) \quad \text{iniettivo } \forall x \in J \iff \alpha \text{ regolare} \end{cases}$
dove J componente connessa di $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha = \varphi|_J$

Definizione 7.4 (varietà (differenziabile))**:** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ varietà n-dimensionale se $\forall p \in M$ esiste $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrizzazione n-dimensionale di M per cui $p \in \varphi(U)$. Una superficie è una 2-varietà

Definizione 7.5 (Varietà topologica)**:** X sp. top. t.c. è $\begin{cases} \text{2-numerabile } (\exists \text{ base numerabile}) \\ T2 \end{cases}$ con

$$\forall p \in X : \quad \exists W \subseteq X \text{ intorno aperto di } p \text{ omeomorfo a } \mathbb{R}^n$$

Osservazione M varietà differenziabile $\implies$ M varietà topologica (infatti $M \subseteq \mathbb{R}^m$ è 2-num. e T2)
non vale il viceversa (vedi quadrato che è varietà top. ma non diff., poiché ha angoli e quindi non C^∞)

Proposizione 32 (0-varietà) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ 0-varietà $\iff$ M discreto di $\mathbb{R}^m$

Dimostrazione. .

$\impliedby$) fisso $p \in M$, ho param. 0-dim. di M in p: $\varphi : \mathbb{R}^0 \to M \mid 0 \to p$ è C^∞ ed è omeo sull'immagine.

$\implies$) fisso $p \in M$ e $\varphi : \mathbb{R}^0 \to M$ param. $p \in \varphi(0) \implies p = \varphi(0)$ e $\varphi(0)$ deve essere aperto di M $\implies$ topologia è quella discreta

□

Proposizione 33 (n-varietà in $\mathbb{R}^n$) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ n-varietà $\iff$ M aperto di $\mathbb{R}^n$

Dimostrazione. .

$\implies$) Fisso $p \in M$ e voglio vedere che $\exists W \subseteq M$ aperto t.c. $p \in W \subseteq M$.

- $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^m$ param. di M in p. $d\varphi(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ iniettivo $\implies$ biettivo.
- Posso usare teorema della funzione inversa: $\varphi^{-1}(p) = x_0 \in U \implies \exists A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ t.c. $x_0 \in A \subseteq U$ (aperti) e $\varphi|_A : A \to B$ è diffeo.
- Allora $p \in B = \varphi(A) \subseteq \varphi(U) \subseteq M \implies M$ aperto di $\mathbb{R}^m$

$\Longleftarrow$) Usiamo $\varphi = i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ inclusione che è C^∞ e omeom. su immagine. $d\varphi(x) = id_{\mathbb{R}^m}\ \forall x \in M \implies$ iniettivo. $\varphi(M) = M \implies$ aperto e φ è aparam. globale.

□

Osservazione ***(prodotto di varietà)*** $M_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ n_i-varietà $\implies M_1 \times M_2$ $n_1 + n_2$-varietà (ESERCIZIO 4.9)

Proposizione 34 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ n-varietà $\iff \forall A \subseteq M$ aperto in M, A è una n-varietà

Dimostrazione. .

$\implies$) Sia $A \subseteq M$ aperto, fisso $p \in A$, cerco parametrizzazione di A in p.

- $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^m$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\varphi(U) \subseteq M$ aperto parametrizzazione
- Considero $\varphi^{-1}(A) \subseteq U$ aperto in $U \implies$

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(A) = W \text{ aperto in } \mathbb{R}^n \\ \varphi|_W : W \to \mathbb{R}^m \in C^\infty \\ \varphi|_W : W \to \varphi(W) \text{ omeomorfismo} \\ d\varphi|_W(x) = d\varphi(x) = \quad \forall x \in W \end{cases}$$

allora $\varphi(W) = A \cap \varphi(U)$ aperto in M (perché non è detto che sia coperto dalla param.) $\implies$ aperto in $A \implies \varphi|_W$ è param. di A in p

$\Longleftarrow$) $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $\forall p \in M\ \exists A_p \subseteq M$ aaperto t.c. $p \in A_p$ e A_p n-varietà, cioé $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $p \in \varphi(U) \subseteq A \subseteq M \implies \varphi$ è anche param. per M in p.

□

Proposizione 35 (varietà come proprietà locale) Se $\forall p \in M \subseteq \mathbb{R}^m$ esiste M_p aperto di M che sia n-varietà, allora M è una n-varietà

Dimostrazione. La parametrizzazione di M_p contenente p è parametrizzazione anche di M □

Osservazione ***(sottospazi affini come varietà)*** $W \subset \mathbb{R}^m$ sottospazio affine di dimensione n è una n- varietà. Infatti sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una sua base e

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid (t_1, \dots, t_n) \mapsto x_0 + t_1 w_1 + \dots + t_n w_n$$

una sua parametrizzazione globale e $d\varphi(t) = J\varphi(t) = (w_1 | \dots | w_n)$ iniettivo $\iff$ ha det$\neq 0 \iff w_1 \dots w_n$ indipendenti. Ok

Osservazione ***(grafici come varietà)*** Presa $f \in C^\infty(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\varphi(x) := (x, f(x))$ è parametrizzazione globale di

$$M = \Gamma_f = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

$m + n$-varietà (ESERCIZIO 4.5 pag. 17)

Proposizione 36 Se $M \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varità n-dim e $h : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti è diffeomorfismo t.c. $M \subseteq A \implies h(M) \subseteq \mathbb{R}^m$ è una varità n-dimensionale

7.1 Teoremi sulle Varietà

7.1.1 Teorema del Valore regolare

Definizione 7.6 (punto critico, valore critico, valore regolare)**:** Sia $F \in C^\infty(\overset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

PUNTO CRITICO di F	$p \in \Omega$ tale che $dF(p)$ non è suriettivo. Crit (F) insieme dei punti critici
VALORE CRITICO	$c \in \mathbb{R}^m$ tale che $F^{-1}(c) \cap \text{Crit}(F) \neq \emptyset$
VALORE REGOLARE	valore non critico, ovvero se $\forall p \in F^{-1}(c)$ $dF(p)$ è suriettivo.

Osservazione Se $p \notin F(\Omega)$, esso è valore regolare. Se invece $n < m$, ogni punto è critico e p valore regolare $\iff p \in \mathbb{R}^m \setminus F(\Omega)$.

Teorema 17 (valore regolare) Sia $F \in C^\infty(\overset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^m)$, se $q \in \mathbb{R}^m$ è valore regolare e $M := F^{-1}(q) \neq \emptyset$, allora M è una n-varietà

Dimostrazione.

- WLOG $q = 0$ (infatti posso considerare $g(x) = f(x) - q$ e abbiamo $dg(x) = df(x)$)
- Devo verificare che $\forall p \in M \quad \exists$ inotrno aperto di p in M che è varietà n-dimensionale.
- Preso $p \in M = F^{-1}(0)$, abbiamo $dF(p)$ suriettivo $\implies JF(p) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ ha rango max $= m$, quindi eventualmente riordinando le coordinate (x, y) su $\mathbb{R}^{n+m}$ ho det $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ (ovvero il minore di destra $m \times m$ di $JF(p)$ ha det $\neq 0$)
- Applico il teorema della funzione implicita ottenendo $f \in C^\infty(V_1, V_2)$ tale che $\overset{\dim = n}{V_1} \times \overset{\dim = m}{V_2}$ intorno aperto di p e $\Gamma_f = F^{-1}(0) \cap (V_1 \times V_2) = M \cap (V_1 \times V_2)$, che è varietà n-dimensionale ricordando che i grafici sono varietà.
- Questo vale $\forall p \in M$, quindi per la varietà come proprietà locale, M varietà n-dimensionale.

□

Esempio 10 (S^n) Possiamo vedere la sfera

$$S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1 \iff x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

come curva di livello della funzione

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \mid F(x) = \|x\|^2 \in C^\infty$$

ovvero

$$S^n = F^{-1}(1)$$

Capiamo se 1 è valore regolare: $dF(x) = (2x_1, \ldots, 2x_{n+1}) \implies dF(x)(y) = 2x_1 y_1 + \cdots + 2x_{n+1} y_{n+1}$ suriettivo $\iff JF(x) \neq 0 \iff x \neq 0 \implies \text{Crit}\, F = \{0\}$

7.1.2 Teoremi locali

Teorema 18 (inversa locale di una parametrizzazione) Sia

- $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una n-varietà
- $\varphi \colon U \to M$ una parametrizzazione
- $x_0 \in U, p := \varphi(x_0)$

  Allora esistono

$$\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}^m & \text{aperto} \\ f \in C^\infty(\overset{\text{aperto}}{A} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad \text{tali che} \quad \begin{cases} p \in A \\ \overline{\varphi}^{-1} = f|_{A \cap \varphi(U)} \end{cases}$$

  con $\overline{\varphi} : \varphi^{-1}(A) \to A \cap \varphi(U)$ la restrizione di φ
  Ovvero:
  Per una parametrizzazione $\varphi \colon U \to M$ per $p \in \varphi(U)$ di una n-varietà $M \subseteq \mathbb{R}^m$, esiste $f \in C^\infty(\overset{\text{aperto}}{A} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ estensione liscia locale dell'inversa φ^{-1}, ovvero tale che

$$p \in A \qquad A \cap M \subseteq \varphi(U) \qquad \varphi^{-1}|_{A \cap M} = f|_{A \cap M}$$

È una forma più forte della forma canonica locale - caso iniettivo (inclusione)

Dimostrazione. Sia $p = \varphi(x_0)$. Considero la forma canonica locale - caso iniettivo (inclusione), ho $h \colon A \to B$ diffeomorfismo tale che $h(\varphi(x)) = (x, 0)\ \forall x \in V \subset U$ intorno aperto di x_0, restringo A (e B) in modo che $A \cap M = \varphi(V)$. Presa π proiezione sulle prime n coordinate prendo $f = \pi \circ h$, che è la funzione cercata. □

Teorema 19 (linearizzazione locale) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà, $p \in M$, allora esistono $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ e $h \colon A \to B$ diffeomorfismo tali che $p \in A$ e $h(A \cap M) = B \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ parametrizzazione con $p \in \varphi(U)$. La forma canonica locale - caso suriettivo (proiezione ai primi fattori) ci permette di costruire come nel teorema precedente A, B, h, V e di restringere A (e B) in modo che $A \cap M = \varphi(V)$. h è la funzione cercata. $\square$

Corollario 12 (controimmagine locale di valore regolare) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà, $p \in M$, allora esistono $A \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno aperto di p e $F \in C^\infty(A, \mathbb{R}^{m-n})$ tale che $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ valore regolare di F e $A \cap M = F^{-1}(0)$

Dimostrazione. Usiamo linearizzazione locale: siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti, allora $\exists h : A \to B$ con h diffeo. t.c.:

$$h(A \cap M) = B \cap (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) \longleftrightarrow h(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x), \underbrace{h_{n+1}(x), \ldots, h_m(x)}_{=\mathbf{0}})$$

Prendo

$$F := (h_{n+1}, \ldots, h_m) \in C^\infty\left(A, \mathbb{R}^{m-n}\right)$$

così

- $F \in C^\infty$
- $F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$
- 0 valore regolare: infatti $J_F(x)$ è sottomatrice di J_h (che ha righe indipendenti essendo h diffeomorfismo) in quanto formata dalle ultime $m-n$ righe di $J_h \implies$ tutte le righe sono indip. $\implies$ ha rango massimo $\implies dF(x)$ suriettivo $\implies F(x)$ valore regolare $\forall x \in A$.

Allora abbiamo $\begin{cases} h(F^{-1}(0)) \subseteq B \cap \overbrace{(\mathbb{R}^n \times \{0\})}^{=h(A\cap M)} \\ A \cap M \subseteq F^{-1}(0) \end{cases} \implies A \cap M = F^{-1}(0)$ $\square$

Osservazione

$$\exists F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \exists y \in F(\Omega) \text{ regolare} \quad \underset{\text{locale controimmagine locale di valore regolare}}{\overset{\text{valore regolare}}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} \quad F^{-1}(y) \text{ è } m-n\text{-varietà}$$

Teorema 20 (locale varietà di applicazione) Sia $\varphi \in C^\infty(\overset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $x_0 \in U$ tale che $d\varphi(x_0)$ iniettiva. Allora $\exists V \subseteq U$ intorno aperto di x_0 tale che $\varphi(V)$ è una n-varietà di parametrizzazione $\varphi|_V$

Dimostrazione. Siano A, B, h, V dalla forma canonica locale - caso iniettivo (inclusione), e $M := \varphi(V)$. Mostro che $\varphi|_V$ parametrizzazione di M: $d\varphi(x)$ iniettivo $\forall x \in V$, M aperto, e siccome $\pi \circ h \circ \varphi = \mathrm{Id}_V$, φ iniettiva (e dunque biunivoca su M) di inversa continua $\varphi^{-1} = \pi \circ h|_M$. $\square$

Cambiamento di coordinate

Proposizione 37 (cambiamento di coordinate) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ varietà con due parametrizzazioni $\varphi\colon U \to M$ e $\psi\colon V \to M$ tali che $W := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, allora

$$h := \varphi^{-1}|_W \circ \psi|_{\psi^{-1}(W)} : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$$

è un diffeomorfismo definito *cambiamento di coordinate*.

Dimostrazione. Sia $p = \psi(x_0)$, prendo per il teorema dell'inversa locale di una parametrizzazione $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^n)$, e per $x \in V$ sufficientemente vicino a x_0 vale $\psi(x) \in A \cap M$ e quindi $h = \varphi^{-1}(\psi(x)) = f(\psi(x))$, dunque h liscia (siccome x_0 arbitrario). Analogamente per h^{-1}, e dunque h diffeomorfismo. $\square$

Proposizione 38 (buona definizione della dimensione di una varietà) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ varietà con due parametrizzazioni $\varphi\colon U \to M$ e $\psi\colon V \to M$ di dimensioni rispettivamente n e k, allora $n = k$.

Dimostrazione. Il cambiamento di coordinate $h = \psi^{-1} \circ \varphi$ tra φ e ψ è un diffeomorfismo, perciò dh è isomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ $\square$

Definizione 7.7 (codimensione): $m - n$ codimensione di $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà

Teorema 21 (caratterizzazione delle varietà) Preso $M \subseteq \mathbb{R}^m$ sono equivalenti

1. M n-varietà
2. M localmente diffeomorfo a $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, ovvero localmente equivalente a $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ a meno di diffeomorfismi di $\mathbb{R}^m$
3. M localmente controimmagine di un valore regolare tramite una applicazione liscia $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$
4. M localmente grafico di una funzione liscia di n delle coordinate di $\mathbb{R}^m$

Dimostrazione. Varie implicazioni

(i)⇒(ii) Teorema di linearizzazione locale

(ii)⇒(i) Preso $h \in C^\infty(A, B)$ diffeomorfismo, $M \cap A = h^{-1}(B \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}))$ è varietà. Gli n-sottospazi vettoriali sono n-varietà + le immagini tramite diffeo di n-varietà sono n-varietà.

(i)⇔(iii) ⇒ Varietà come controimmagine locale di valore regolare, ⇐ Teorema del valore regolare

(iii)⇒(iv) Nella dimostrazione del teorema del valore regolare

(iv)⇐(i) ovvio (localmente varità $\implies$ varietà?)

□

Lemma 12 Siano $\begin{cases} \alpha : J \to \mathbb{R}^3 \\ \beta : L \to \mathbb{R}^3 \end{cases}$ curve regolari semplici t.c. $\alpha(J) = \beta(L)$. Sia $h : L \to J$, $h(s) := \overline{\alpha}^{-1} \circ \beta(s)$, con $\overline{\alpha} : J \to \alpha(J) = \beta(L)$.
$\implies$ $\dot{\alpha}(t)$ e $\dot{\beta}(h^{-1}(t))$ sono proporzionali, **indipendentemente dal fatto che h diffeo.**

Dimostrazione. Se h diffeo facile perché: $\alpha(t) = \beta(h^{-1}(t)) \implies \dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(h^{-1}(t))\underbrace{(h^{-1})'(t)}_{\neq 0}$.

Altrimenti bordello p. 37 □

7.2 Carte e Atlanti

Definizione 7.8 (carta)**:** $\varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$, con $\varphi \colon U \to M$ parametrizzazione

Definizione 7.9 (atlante)**:** $\mathscr{U} := \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to M\}_{\alpha \in I}$ famiglia di parametrizzazioni (carte) di M varietà tale che $\bigcup_\alpha \varphi(U_\alpha) = M$.
Quindi $\{\varphi_\alpha(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento **aperto**

7.3 Funzioni su e applicazioni fra varietà

Definizione 7.10 (funzione liscia su varietà)**:** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà, $f \colon M \to \mathbb{R}$ liscia su M se $\forall \varphi \colon U \to M$ parametrizzazione vale $f \circ \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$.
Per le funzioni vettoriali, $f \colon M \to \mathbb{R}^q$ è liscia se sono lisce tutte le componenti f_i

Osservazione ***(Buona definizione)*** Se f è C^∞ per una parametrizzazione, lo è anche per tutte le altre che hanno intersezioni delle immagini non nulla. Infatti se ho due param. $\begin{cases} \varphi : U \to M \\ \psi : V \to M \end{cases}$ con $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ t.c. $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R} \in C^\infty$, basta prendere $f \circ \psi|_{\psi^{-1}(W)} = \underbrace{f \circ \varphi}_{C^\infty(U)} \circ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \psi}_{C^\infty} : \psi^{-1}(W) \to \mathbb{R}$

Osservazione Per gli aperti di $\mathbb{R}^n$ le due definizioni di funzione liscia coincidono: ovvero sappiamo che un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è una n-varità, sia $f : U \to \mathbb{R}$, allora $f \in C^\infty(U) \iff f \in C^\infty$ su U come varità.
Dim: usare l'id. come param. globale: id: $U \to U$ è param. globale e f è C^∞ su U come varietà $\iff f \circ \mathrm{Id}_U = f \in C^\infty(U)$

Teorema 22 (locale liscezza di funzione liscia su varietà) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà, $f \colon M \to \mathbb{R}$ è liscia su $M \iff \forall p \in M$ esistono $A \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno aperto di p e $\widetilde{f} \in C^\infty(A)$ tale che $\widetilde{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in M \cap A$

Dimostrazione. Doppia implicazione

$\Longrightarrow$ Sia $p \in M$ e φ parametrizzazione contenente p, per il teorema dell'inversa locale di una parametrizzazione prendo $A \subseteq \mathbb{R}^m$ intorno aperto di p e $g \in C^\infty(A, \mathbb{R}^n)$ t.c. $\varphi^{-1}\big|_{A\cap M} = g|_{A\cap M}$. Per $x \in A$ sufficientemente vicino a p vale $g(x) \in U$ e pongo

$$\widetilde{f} = f \circ \varphi \circ g \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{f} \text{ liscia è la funzione cercata}$$

$\Longleftarrow$ $\forall \varphi$ parametrizzazione $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$ è liscia

□

Osservazione Per l'inversa locale di una parametrizzazione, una carta è una funzione liscia su varietà per la locale liscezza di funzione liscia su varietà dal teorema dell'inversa locale di una parametrizzazione.

Definizione 7.11 (applicazione tra varietà)**:** $f\colon M \to N$ con $M \subseteq \mathbb{R}^m$ e $N \subseteq \mathbb{R}^q$ varietà, con $f = (f_1, \ldots, f_q)$. Si dice C^∞ se $\forall i \quad f_i : M \to \mathbb{R}$ è C^∞. Essa si dice diffeomorfismo se liscia, biunivoca e l'inversa è liscia, ed M, N sono dette diffeomorfe

Teorema 23 (composizione di applicazioni lisce fra varietà) X, Y, Z varietà, $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ lisce, allora $g \circ f$ liscia

Dimostrazione. Studio per $Z \subset \mathbb{R}$ (altrimenti per le varie componenti g_i) prendo l'estensione $\widetilde{g} \in C^\infty(A)$ contenente $y := f(x) \in A$, e presa $\varphi\colon U \to X$ parametrizzazione t.c. $\varphi(U) \subset f^{-1}(A)$, allora

$$(g \circ f) \circ \varphi = \widetilde{g} \circ (f \circ \varphi) \Longrightarrow \quad \text{liscia in quanto composizione di funzioni lisce}$$

□

*Osservazione (**Morfismi tra varietà**)* Nella categoria delle varietà, chiamata <u>Man</u>$^\infty$, i morfismi tra esse (che quindi mantengono la struttura di varietà) sono le funzioni C^∞

7.4 Spazi tangenti

Idea: presa $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una n-varietà con φ param., allora $d\varphi(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettivo e prendo $\mathrm{Im}(d\varphi(x_0)) \subseteq \mathbb{R}^m$ che quindi è un sottospazio n-dimensionale (essendo il differenziale un'applicazione lineare iniettiva)

Definizione 7.12 (Curva tracciata)**:** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una n-varietà, una curva (tracciata) su M è $\alpha : J \to \mathbb{R}^m$ curva param. regolare t.c. $\alpha(J) \subseteq M$

Definizione 7.13 (vettore tangente)**:** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ varietà contenente p, presa $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ (I intorno aperto di 0) curva parametrizzata tracciata su M ($\alpha(I) \subseteq M$) tale che $\alpha(0) = p$, si chiama vettore tangente a M in p il vettore $v := \alpha'(0) \in \mathbb{R}^m$.

Definizione 7.14 (spazio tangente)**:** è $T_pM = \{\text{vettori tangenti}\} \cup \{\mathbf{0}\}$, insieme dei vettori tangenti ad M in p

Proposizione 39 (T_pM sottospazio) $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà contenente p, allora T_pM sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ di $\dim T_pM = n = \dim M$. Inoltre, se $\varphi\colon U \to M$ parametrizzazione con $\varphi(x_0) = p$, allora $T_pM = d\varphi(x_0)(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Im}(d\varphi(x_0))$

Dimostrazione. (OK) Dimostro $T_pM = d\varphi(x_0)(\mathbb{R}^n)$ per doppia inclusione

$\supseteq$ Dato $w \in \mathbb{R}^n$ sia $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\alpha(t) = \varphi(x_0 + tw)$ con $x_0 + tw \in U$, allora $\alpha'(0) = d\varphi(x_0)w \in T_pM$

$\subseteq$ Presa α curva su M tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ tale che $\alpha = \varphi \circ \beta$, quindi

$$v = \dot{\alpha}(0) = (\varphi \dot{\circ} \beta)(0) = d\varphi(\beta(0)) \cdot \dot{\beta}(0) = d\varphi(x_0) \cdot w \in d\varphi(x_0)(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{con } \begin{cases} w = \dot{\beta}(0) \in \mathbb{R}^n \\ \beta(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = \varphi^{-1}(p) = x_0 \end{cases}$$

Quindi T_pM sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$. Siccome $d\varphi(x_0)$ iniettivo, $\dim T_pM = n$. □

Osservazione $M \subseteq \mathbb{R}^m$ una n-varietà, $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti com $M \subseteq A$, $h : A \to B$ diffeo. allora

$$dh(p)(T_pM) = T_{h(p)}h(M)$$

Teorema 24 Presi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{m-n})$, $q \in \mathbb{R}^{m-n}$ valore regolare per F, $M := F^{-1}(q)$, allora

$$\forall p \in M: \quad T_pM = \ker dF(p)$$

Dimostrazione. (OK) $dF(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ suriettivo (per ip.) $\implies$ $\ker dF(p)$ è sottosp. vett. di $\mathbb{R}^m$ di dim$=n$. Dato che lo è anche T_pM, basta verificare che uno è incluso nell'altro: $T_pM \subseteq \ker dF(p)$. Per una curva α su M tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_pM$ vale $F \circ \alpha: J \to \mathbb{R}^{m-n} \mid F(\alpha(t)) \equiv q \quad \forall t \in J$, da cui differenziando

$$\frac{d}{dt} F(\alpha(t)) = dF(\alpha(t))\, \dot\alpha(t) \equiv 0 \quad \forall t \in J$$

in particolare

$$dF(\alpha(0))\, \dot\alpha(0) = dF(p)\, v = 0 \implies v \in \ker dF(p)$$

$\square$

Osservazione Per capire questo teo., pensare a funzione $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con curva di livello $F = 0$. Prendiamo $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ sulla curva di livello, vediamo che $dF(p)$ è il gradiente $\boldsymbol{\nabla} F(p) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2})$. Come sappiamo da anal. 2 il vettore gradiente è sempre $\perp$ alla cuva di livello, e infatti $\ker dF(p)$ sono tutti i vettori $\boldsymbol{v} \mid dF(p) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \iff \langle \boldsymbol{\nabla} F(p), \boldsymbol{v} \rangle = 0$, ovvero tutti i vettori $\perp$ al gradiente, che sono quindi **tangenti** alla curva di livello.

7.4.1 Differenziale

Definizione 7.15 (differenziale di applicazioni tra varietà): $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^s$ varietà, $p \in M$ e $f \in C^\infty(M, N)$, il differenziale di f in p è

$$df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N \qquad df_p(v) := \left[\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\right]_{t=0} \qquad \text{con } \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ tale che } \begin{array}{l} \alpha(0) = p \\ \dot\alpha(0) = v \end{array}$$

Ovvero

$$\begin{array}{cccc} df_p: & T_pS = \mathbb{R}^m & \to & T_{f(p)}N = \mathbb{R}^s \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & J_f \cdot \boldsymbol{v} \end{array}$$

dove con la Jacobiana di f J_f è intesa come $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$

Osservazione Verifichiamo che il differenziale ha le seguenti caratteristiche (che vogliamo)

1. $df_p(v) \in T_{f(p)}N$, infatti $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))|_{t=0} = (\dot{\overline{f \circ \alpha}})(0) \in T_pN$ poiché $f(\alpha(0)) = f(p)$ e $f \circ \alpha$ è curva tracciata su N
2. $df_p(v)$ non dipende dalla scelta di α (v. prossimo teo.)
3. $df_p(v)$ sia lineare (v. prossimo teo.)

Teorema 25 (buona definizione del differenziale) df_p lineare e ben definito indipendentemente dalla scelta di α. Se φ parametrizzazione di M con $\varphi(x_0) = p$, allora

$$df_p = d(f \circ \varphi)(x_0) \cdot \overline{d\varphi(x_0)}^{-1}$$

Dimostrazione. (OK) Per una qualsiasi curva α su M tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_pM$ prendo

$$\beta: J \to \mathbb{R}^n \mid \beta = \varphi^{-1} \circ \alpha \quad \text{curva in } U \subseteq \mathbb{R}^n \implies \alpha = \varphi \circ \beta$$

per cui

$$df_p(v) = \left[\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \beta)\right]_{t=0} = d(f \circ \varphi)\left(\overset{=x_0}{\beta(0)}\right) \cdot \dot\beta(0) = \star$$

Abbiamo che

$$\alpha = \varphi \circ \beta \implies \dot\alpha(0) = d\varphi(x_0)\dot\beta(0) \implies \dot\beta(0) = \overline{d\varphi(x_0)}^{-1}\dot\alpha(0)$$

dove $\overline{d\varphi(x_0)}: \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}(d\varphi(x_0)) = T_pM$ che è iniettivo e suriettivo quindi invertibile, quindi

$$\star = df_p(v) = \overbrace{d(f \circ \varphi)(x_0) \cdot \overline{d\varphi(x_0)}^{-1} v}^{\text{indipendente da } \alpha}$$

Riassumendo

$$T_pM \xrightarrow{\overline{d\varphi(x_0)}^{-1}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{d(f\circ\varphi)(x_0)} \mathbb{R}^k$$

$\square$

Proposizione 40 (differenziale della composizione) $M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M''$ varietà, $\forall p \in M$ vale $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

Dimostrazione. α curva su M tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_pM$, allora per $\beta \coloneqq f \circ \alpha$ vale $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = df_p(v)$, da cui

$$dg_{f(p)}(df_p(v)) = \left[\frac{d}{dt} g(\beta(t))\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}(g \circ f)(\alpha(t))\right]_{t=0} = d(g \circ f)_p(v)$$

□

Definizione 7.16 (Diffeomorfismo tra varietà)**:** Z, T varietà, è $\psi : Z \to T \in C^\infty$, invertibile con inversa C^∞

Teorema 26 (funzione inversa per applicazioni tra varietà) $f\colon M \to M'$ applicazione liscia tra varietà, e $p \in M$ tale che df_p isomorfismo ($\dim M = \dim M'$), allora $\exists A$ intorno aperto di p tale che $f(A)$ aperto in M' e $f|_A$ diffeomorfismo tra A e $f(A)$.

Dimostrazione. (OK) Abbiamo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, bend left, "\overline{f}"] & V \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Prese le parametrizzazioni $\psi\colon V \to M'$ con $f(p) \in \psi(V)$, e $\varphi\colon U \to M$ con $p \in \varphi(U) \subseteq f^{-1}(\psi(V))$, siano

$$\begin{cases} \overline{f} \coloneqq \psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U \to V \\ \varphi(x_0) = p \\ \psi(y_0) = f(p) \end{cases}$$

. In particolare

$$\begin{aligned} d\overline{f}_{x_0} &= d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \\ &= d\psi^{-1}(f(\varphi(x_0))) \cdot df(\varphi(x_0)) \cdot d\varphi(x_0) \\ &= (d\psi_{y_0})^{-1} \cdot df_p \cdot d\varphi_{x_0} \quad \implies \quad d\overline{f}_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ isomorfismo} \end{aligned}$$

dato che tutti e tre i differenziali sono invertibili (se restringo tutti i vari insiemi alle immagini). Applico allora il teorema della funzione inversa a $\overline{f}$ ottenendo $U' \subseteq U$ t.c. $\overline{f}(U')$ aperto e $\overline{f}\big|_{U'}$ diffeomorfismo, preso $A \coloneqq \varphi(U')$ vale $f|_A = \psi \circ \overline{f}\big|_{U'} \circ \varphi^{-1}\big|_A$ composizione di diffeomorfismi. □

7.5 Omeomorfismi e Diffeomorfismi locali

Definizione 7.17 (omeomorfismo locale)**:** X, Y spazi topologici, $f\colon X \to Y$ è omeomorfismo locale se

- continua
- $\forall x \in X\ \exists U$ intorno aperto di x tale che $f(U)$ aperto in Y
- $f|_U$ omeomorfismo di U su $f(U)$

Definizione 7.18 (diffeomorfismo locale)**:** $f\colon M \to N$ applicazione tra varietà diffeomorfismo locale se

- Liscia: $\in C^\infty$
- $\forall p \in M\ \exists U$ intorno aperto di x tale che $f(U)$ aperto in N
- $f|_U$ diffeomorfismo di U su $f(U)$

Osservazione Abbiamo

1. f diffeo locale $M \to N \implies \dim M = \dim N$
2. f diffeo locale iniettivo $\implies f$ diffeo. (globale)
3. f diffeo locale $\implies f$ omeo. locale $\implies f$ aperta

Proposizione 41 $f\colon M \to N \in C^\infty$ è diffeomorfismo locale $\iff \forall p \in M,\ df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ è isomorfismo (invertibile)

Dimostrazione. (OK)

$\implies$ $\forall p \in M \quad \exists M' \subseteq M$ aperto, $p \in M'$ t.c. $\overline{f} : M' \to f(M') \subseteq N$ aperto. $\exists g : f(M') \to M' \in C^\infty$ inversa di $\overline{f}$ e

$$g \circ \overline{f} = \mathrm{Id}_{M'} \implies dg(\overline{f}(p)) \circ df(p) = \mathrm{Id}\, T_pM \implies df(p) \text{ iniettivo}$$

$\impliedby$ Teo. della funzione inversa per varietà

□

Proposizione 42 Un diffeomorfismo locale iniettivo è un diffeomorfismo sull'immagine

Proposizione 43 Se M n-varietà e $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ liscia e iniettiva con $d\varphi_x$ iniettivo $\forall x \in U$, allora φ parametrizzazione.

Proposizione 44 Se M n-varietà, $\varphi\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ liscia e $x_0 \in U$ tale che $d\varphi_{x_0}$ iniettivo , allora $\exists U'$ intorno aperto di x_0 tale che $\varphi|_{U'}$ parametrizzazione.

7.6 Orientazione di varietà

Considerati $\varphi\colon U \to M$ parametrizzazione di M n-varietà, $(u_1, \dots, u_n)$ coordinate di $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e definita $\forall x \in U$ $\mathscr{B}_{\varphi,x} := \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}(x) \right\}$ base di $T_{\varphi(x)}M$, sia $\omega_{\varphi,x}$ la classe di equivalenza dell'orientazione di $\mathscr{B}_{\varphi,x}$

Definizione 7.19 (orientazione di una varietà)**:** Funzione $p \in M \mapsto \eta_p$, con η_p una orientazione di T_pM che è localmente della forma ω_φ, ossia esiste un atlante $\mathscr{U}$ tale che $\forall \varphi\colon U \to M \in \mathscr{U}, \forall x \in U$ vale $\omega_{\varphi,x} = \eta_{\varphi(x)}$ $\varphi\colon U \to M, \psi\colon V \to M$ definiscono la stessa orientazione se $\varphi(U) \cap \psi(V) = \emptyset$ o se $\omega_{\varphi,x} = \omega_{\psi,h(x)}$ $\forall x \in \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))$ con

$$h = \psi^{-1} \circ \varphi \qquad \text{cambiamento di coordinate}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & M & V \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Proposizione 45 $\varphi\colon U \to M, \psi\colon V \to M$ tali che $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ definiscono la stessa orientazione $\iff$ $\det J_h(x) > 0 \quad \forall x \in U$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $J_h(x)$ matrice di cambiamento di base tra $\mathscr{B}_{\varphi,x} = \{\partial\varphi/\partial u_i\}$ e $\mathscr{B}_{\psi,h(x)} = \{\partial\varphi/\partial v_i\}$. Essendo $\varphi = \psi \circ h$ vale $J_\varphi(x) = J_\psi(h(x)) \cdot J_h(x)$, e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial v_k}(h(x)) \frac{\partial h_k}{\partial u_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial u_i}(x) \frac{\partial \psi}{\partial v_k}(h(x)) = J_h(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v_k}(h(x))$$

□

Definizione 7.20 (orientazione di un atlante)**:** $\mathscr{U} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to S\}_{\alpha \in I}$ atlante orientato se $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{U}$ definiscono la stessa orientazione. Ovvero $\forall \alpha, \beta \in I \mid \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta)}_{:=>w_{\alpha,\beta}} \neq \emptyset$ con

$$h_{\alpha,\beta} := \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(W_{\alpha,\beta}) \to \varphi_\beta^{-1}(W_{\alpha,\beta})$$

hanno $\det\{Jh_{\alpha,\beta}(x)\} > 0 \quad \forall x \in \varphi_{\alpha^{-1}(W_{\alpha,\beta})}$

Definizione 7.21 (orientabilità)**:** M orientabile se esiste una orientazione per M, ovvero se esiste un atlante di M orientato

Proposizione 46 M orientabile e connessa $\implies$ esistono esattamente due orientazioni su M

Teorema 27 (caratterizzazione delle superfici orientabili) S superficie è orientabile $\iff$ esiste $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale unitario normale

Dimostrazione. Doppia implicazione

$\Longrightarrow$ Preso $\mathscr{U}$ atlante orientato definisco per $\varphi \in \mathscr{U}$ $N(p) := \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}\left(\varphi^{-1}(p)\right)$, ben definito

$\Longleftarrow$ Sia $N : S \to \mathbb{R}^3$, vogliamo costruire un atlante orientato $\overline{\mathscr{U}}$ a partire da un atlante qualsiasi $\mathscr{U}$. Considero $\varphi : U \to S \in \mathscr{U}$, tale che $\varphi(u_0, v_0) = p \in S$, che induce un'orientazione con $N' = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$. Deve essere per forza $N'(u_0, v_0) = \pm N((u_0, v_0)$, che implica $N'(u, v) = \pm N(u, v) \quad \forall (u, v) \in U$

- Se $N'(u, v) = +N(u, v) \implies$ metto φ in $\overline{\mathscr{U}}$
- Se $N'(u, v) = -N(u, v) \implies$ metto $\psi(v, u) := \varphi(u, v)$ in $\overline{\mathscr{U}}$ (infatti $\{\psi_v, \psi_u\}$ ha orientazione opposta a $\{\varphi_u, \varphi_v\}$)

Faccio questo $\forall p \in S$ e ottengo atlante orientato.
Mostro che $\overline{\mathscr{U}}$ orientato: per $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\mathscr{U}}$ e matrice di cambiamento J_h vale

$$\overline{\psi}_{u_1} \wedge \overline{\psi}_{v_1} = (\det Jh) \cdot \overline{\varphi}_{u_2} \wedge \overline{\varphi}_{v_2} \quad \implies \quad \det Jh > 0$$

$\square$

Teorema 28 Presi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, 0 valore regolare per F, allora per $M := F^{-1}(0)$ è orientabile

Dimostrazione. Prendo il campo vettoriale unitario normale $N := \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$ $\square$

Osservazione Per $\Longleftarrow$ un atlante orientato è dato dalle parametrizzazioni φ tali che $\varphi_u \wedge \varphi_v$ sia un multiplo positivo del campo normale.

Osservazione Tutte le superfici sono orientabili localmente: l'orientabilità è quindi una proprietà globale.

Osservazione Esistono superfici che non sono controimmagini di valori regolari, come le superfici non orientabili (v. nastro di Mobius)

Teorema 29 (Del valore regolare per superfici) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, sia $f \in C^\infty(S)$, $f : S \to \mathbb{R}$. Sia $a \in \mathbb{R}$ valore regolare per f, con $df(p) : T_pS \to \mathbb{R}$ sia suriettivo $\forall p \in f^{-1}(a)$
Allora $f^{-1}(a)$ (se è $\neq \emptyset$) è una 1-varietà contenuta in S.

Dimostrazione. (P. 51)

$\square$

Osservazione Il teorema vale in generale per $M \subseteq \mathbb{R}^m$ n-varietà, $f : M \to \mathbb{R}^k \in C^\infty$ e $a \in \mathbb{R}^k$ valore regolare per f. Allora $f^{-1}(a)$ (se $\neq \emptyset$) è varietà di dim. $n - k$ contenuta in M.

8 Superfici

8.1 Prima forma fondamentale

Definizione 8.1 (prima forma fondamentale)**:** Presa $\varphi \colon U \to S \subseteq \mathbb{R}^m$ parametrizzazione di S superficie e $p \in S$ definisco la forma bilineare simmetrica su T_pS

$$\mathbf{I}_p = g_p : \begin{array}{ccc} T_pS \times T_pS & \to & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) & \mapsto & \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \end{array}$$

Con $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_pM$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$.
La prima forma fondamentale mi permette di passare dalla "metrica" (lunghezze e superfici) di U a quella di S: infatti mi dà i "fattori di ingrandimento" rispetto alla param. che sto usando. La forma quadratica della prima f.f. nella direzione $\boldsymbol{v} \in T_pS$ mi permette di calcolarne il modulo, e quindi mi permette di calcolare la lunghezza delle curve tracciate su S (tramite l'integrale del modulo della velocità). Mentre l'applicazione bilineare della prima f.f. (che quindi prende in pancia due direzioni diverse) mi permette di calcolare la superficie compresa e quindi mi dà il fattore d'ingrandimento delle superfici che mi permette di fare gli integrali su U al posto che su S.

Matrice associata alla prima forma fonamentale se $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ sono scritti nella base di T_pS : $\mathscr{B} = \{\frac{\partial\varphi}{u_1}, \frac{\partial\varphi}{u_2}\} = \{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$

$$g_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g_p(v_1\varphi_{u_1} + v_2\varphi_{u_2}, w_1\varphi_{u_1} + w_2\varphi_{u_2}) \overset{\text{bilinearità}}{=} Ev_1w_1 + F(v_1w_2 + v_2w_1) + Gv_2w_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}^{:=\mathbf{M_p}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a g_p nella base $\mathscr{B} = \{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ è

$$\mathbf{M}_p := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{con} \begin{cases} E = g_p(\varphi_{u_1}, \varphi_{u_1}) = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_1} \rangle = \|\varphi_{u_1}\|^2 \\ F = g_p(\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}) = \langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \rangle \\ G = g_p(\varphi_{u_2}, \varphi_{u_2}) = \langle \varphi_{u_2}, \varphi_{u_2} \rangle = \|\varphi_{u_2}\|^2 \end{cases}$$

Osservazione È come la storia in meccaz, chiaramente se la base $\mathscr{B} = \{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ è ortonormale, allora $\mathbf{G}$ è l'identità e possiamo fare il classico prodotto scalare componente per componente, ovvero $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2$

Osservazione ***(lunghezza vettore tangente)*** $\|\boldsymbol{w}\|^2 = \|w_1\varphi_{u_1} + w_2\varphi_{u_2}\|^2 = Ew_1^2 + 2Fw_1w_2 + Gw_2^2$

Osservazione ***(lunghezza di una curva su una superficie)*** Presa $\varphi\colon U \to M \subseteq \mathbb{R}^m$ parametrizzazione di M e $\alpha(t) = \varphi \circ u(t)$ curva su M e $u(t)$ curva in U con $t \in [a, b]$, allora $\alpha'(t) = d\varphi(u(t)) \cdot u'(t) \in T_pM$ e

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

Proposizione 47 (norma vettore tangente a una superficie) (NO) $\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|^2 = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$

Dimostrazione.

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \varphi_{u_1} \cdot \varphi_{u_1} & \varphi_{u_1} \cdot \varphi_{u_2} & 0 \\ \varphi_{u_2} \cdot \varphi_{u_1} & \varphi_{u_2} \cdot \varphi_{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \varphi_{u_1} & \varphi_{u_2} & N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi_{u_1} & \varphi_{u_2} & N \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} \varphi_u & \varphi_v & N \end{bmatrix}\right)^2 =$$

$$= (\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \cdot N)^2 = \left(\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2} \cdot \left(\frac{\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}}{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|}\right)\right)^2 = \left(\frac{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|^2}{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|}\right)^2 = \|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|^2$$

□

Osservazione ***(area di una regione su una superficie)*** Dal risultato precedente, vale che $\sqrt{EG - F^2} = \|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|$ è l'area del parallelogramma di lati φ_{u_1} e φ_{u_2}, siccome $\|\boldsymbol{N}\| = 1$, e dunque

$$\boxed{\text{area}(K) = \int_{\varphi^{-1}(K)} \|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|\, du_1\, du_2 = \int_{\varphi^{-1}(K)} \sqrt{\det \mathbf{I_p}}\, du_1\, du_2}$$

Osservazione ***(integrale di una funzione su una superficie)*** $f \in C^\infty(K \subseteq S)$, allora

$$\int_K f \cdot d\sigma = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\varphi(u_1, u_2))\, \overbrace{\|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|\, du_1\, du_2}^{d\sigma} = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\varphi(u_1, u_2))\, \sqrt{EG - F^2}\, du_1\, du_2$$

Definizione 8.2 (area di una regione su una superficie)**:** $\text{area}(K) := \int_{\varphi^{-1}(K)} \|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|\, du_1\, du_2$

Osservazione ***(Buona definizione)*** La definizione che abbiamo dato di area non dipende dalle coordinate, ovvero per φ, ψ due parametrizzazioni vale

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \|\varphi_{u_1} \wedge \varphi_{u_2}\|\, du_1\, du_2 = \int_{\psi^{-1}(K)} \|\psi_{v_1} \wedge \psi_{v_2}\|\, dv_1\, dv_2$$

Dimostrazione. Uso teo cambiamento variabili:

$$\int_{h(E)} f(y)dy = \int_E f(h(x)) \cdot |\det J_h(x)| dx$$

con $h : \Omega \to \mathbb{R}^2$ omeo su $h(\Omega)$ e $E \subseteq \Omega$, applicato al nostro caso con $h = \varphi^{-1} \circ \psi$ □

8.1.1 Parametrizzazioni ortogonali

Definizione 8.3 (parametrizzazione ortogonale)**:** $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione tale per cui $\langle \varphi_{u_1}, \varphi_{u_2} \rangle = 0$, ovvero $F = 0$.

Teorema 30 (esistenza di una parametrizzazione ortogonale) $\forall S$ superficie e $\forall p \in S$ $\exists \varphi$ parametrizzazione ortogonale tale che $p \in \varphi(U)$

8.2 Seconda forma fondamentale

Definizione 8.4 (applicazione di Gauss)**:** Preso il campo vettoriale unitario $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ normale alla superficie S orientata (ovvero $N := \frac{\varphi_{u_1}\wedge\varphi_{u_2}}{\|\varphi_{u_1}\wedge\varphi_{u_2}\|}$) si può immaginare come $N\colon S \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, detta applicazione di Gauss.

Osservazione Considero $dN_p\colon T_pS \to T_{N(p)}S^2$, osservo che $T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp = T_pS$, quindi

$$\begin{array}{rl} \textsc{Applicazione di Gauss} & N : S \to S^2 \\ \textsc{Differenziale} & dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2 = T_pS \end{array}$$

Definizione 8.5 (operatore di Weingarten)**:** Endomorfismo $L_p\colon T_pS \to T_pS$ tale che $L_p = -dN_p$ (vale $T_{N(p)}S^2 = T_pS$), ovvero

$$\begin{array}{rccc} L_p: & T_pS & \to & T_pS \\ & \boldsymbol{v} & \mapsto & -\frac{d}{d\boldsymbol{v}}N_p \end{array}$$

Vedremo che è un'applicazione lineare $L_p(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ e quindi gli autovettori sono le direzioni del dN_p. Praticamente mi prende un vettore spostamento sul piano tangente (direzione) e mi sputa fuori il vettore rate of change del campo normale. Se il vettore normale si inclina nella mia direzione ho un autovettore, se invece si storta da un'altra parte no.
Quindi l'op. di Weingarten mi "sonda" come sta cambiando la curvatura (ovvero il vettore $\perp S$) nella direzione in cui mi muovo.

Osservazione L'operatore di Weingarten è suriettivo sse la superficie si "storta/curva" in tutte le direzioni, ovvero se la curvatura di Gauss $K \neq 0$, un esempio è la sfera. Invece non è suriettivo dove il campo normale si può stortare solo in una direzione, come nel cilindro che ha $k_1 = 0$, e infatti l'immagine di L_p è una retta in direzione della curvatura principale con $k_2 \neq 0$

Proposizione 48 (simmetria dell'operatore di Weingarten) $\forall p \in S$, L_p è simmetrico sul piano euclideo $(T_pS, \mathbf{I}_p)$ (ossia autoaggiunto rispetto alla prima forma fondamentale), ovvero

$$\mathbf{I}(L_p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{v}, L_p(\boldsymbol{w})) \overset{\text{per simm.}}{=} \mathbf{I}(L_p(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_pS$$

Dimostrazione. (OK) Presa $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione studio per la base $\{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$. Per $\langle L_p(\varphi_{u_i}), \varphi_{u_i}\rangle$ banale, studio per $\langle L_p(\varphi_{u_1}), \varphi_{u_2}\rangle$:

$$\left\langle \overset{\clubsuit}{\boxed{L_{\varphi(u)}(\varphi_{u_1})}}, \varphi_{u_2} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial (N\circ\varphi)}{\partial u_1}, \varphi_{u_2} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial u_1} \overbrace{\cancel{\langle N\circ\varphi, \varphi_{u_2}\rangle}}^{=0 \text{ poiché } N \perp \varphi_{u_2} \in T_pS} + \langle N\circ\varphi, \varphi_{u_2u_1}\rangle = \langle N\circ\varphi, \varphi_{u_2u_1}\rangle \qquad (\star)$$

$$\clubsuit \to L_{\varphi(\overline{u})}(\varphi_{u_1}) = -\left[\frac{d}{dt} N(\varphi(\overline{u}_1 + t, \overline{u}_2))\right]_{t=0} = -\frac{\partial (N\circ\varphi)}{\partial u_1}(\overline{u})$$

Dunque $\langle L_{\varphi(u)}(\varphi_{u_1}), \varphi_{u_2}\rangle \overset{\star}{=} \langle N\circ\varphi, \varphi_{u_2u_1}\rangle \overset{\text{Schwartz}}{=} \langle N\circ\varphi, \varphi_{u_1u_2}\rangle \overset{\text{per }\star}{=} \langle L_{\varphi(u)}(\varphi_{u_2}), \varphi_{u_1}\rangle$ $\square$

Definizione 8.6 (seconda forma fondamentale)**:** Presa $\varphi\colon U \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di M superficie orientata e $p \in M$ definisco la forma bilineare simmetrica su T_pM

$$h_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} \quad | \quad h_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g_p(L_p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \langle L_p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = \langle -dN_p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_pM$$

Matrice associata alla seconda forma fondamentale se $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ sono scritti nella base di $T_pS : \mathscr{B} = \{\frac{\partial\varphi}{u_1}, \frac{\partial\varphi}{u_2}\} = \{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$

$$h_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = h_p(v_1\varphi_{u_1} + v_2\varphi_{u_2}, w_1\varphi_{u_1} + w_2\varphi_{u_2}) \overset{\text{bilinearità}}{=} ev_1w_1 + f(v_1w_2 + v_2w_1) + gv_2w_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}^{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a h_p nella base $\mathscr{B} = \{\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}\}$ è

$$\mathbf{II}_p := \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} e = h_p(\varphi_{u_1}, \varphi_{u_1}) = \langle L_p(\varphi_{u_1}), \varphi_{u_1}\rangle = -\left\langle dN_{\varphi_{u_1}}, \varphi_{u_1}\right\rangle \overset{\star}{=} \langle N \circ \varphi, \varphi_{u_1 u_1}\rangle = \left\langle \overline{N}, \varphi_{u_1 u_1}\right\rangle \\ f = h_p(\varphi_{u_1}, \varphi_{u_2}) = \langle L_p(\varphi_{u_1}), \varphi_{u_2}\rangle = \left\langle \overline{N}, \varphi_{u_1 u_2}\right\rangle \\ g = h_p(\varphi_{u_2}, \varphi_{u_2}) = \langle L_p(\varphi_{u_2}), \varphi_{u_2}\rangle = \left\langle \overline{N}, \varphi_{u_2 u_2}\right\rangle \end{cases}$$

Osservazione ***(Matrice della II f.f. per grafico di funzione)*** $S = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ allora una sua parametrizzazione è $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$ e la matrice associata alla seconda forma fondamentale è

$$\mathbf{II}_p := \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\boldsymbol{\nabla} f\|}} H_f \quad \text{dove } H_f \text{ è l'hessiana di } f$$

8.3 Curvatura

8.3.1 Curvatura normale

Proposizione 49 Sia $\alpha = \alpha(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ curva tale che $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ (regolare), allora vale

$$\boxed{\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{N}(p), \ddot{\alpha}(0)\rangle} = \kappa(0)\cos\theta = \left\|\ddot{\alpha}(s)^{\perp}\right\| =: \kappa_n$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= \mathbf{II}_p(\dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0)) = \langle L_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0)\rangle = -\langle dN_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0)\rangle = \\ &= -\left\langle \left[\frac{d}{dt} N \circ \alpha(t)\right]_{t=0}, \dot{\alpha}(0)\right\rangle = \cancel{-\frac{d}{dt}\langle N \circ \alpha(t), \dot{\alpha}(0)\rangle} + \langle N \circ \alpha(t), \ddot{\alpha}(0)\rangle = \langle N(p), \ddot{\alpha}(0)\rangle \end{aligned}$$

Inoltre, per $\alpha = \alpha(s)$ curva biregolare vale $\ddot{\alpha} = \kappa \cdot \boldsymbol{n}$, e dunque

$$\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle N(p), \kappa(0) \cdot \boldsymbol{n}(0)\rangle = \kappa(0) \cdot \langle N(p), \boldsymbol{n}(0)\rangle = \kappa(0)\cos\theta \qquad \text{con } \theta \text{ angolo tra } \boldsymbol{N} \text{ e } \boldsymbol{n}$$

□

Osservazione In particolare **II** dipende solo da $\dot{\alpha}(0)$

Definizione 8.7 (curvatura normale): $\kappa_n := \kappa(0) \cdot \langle N(p), \boldsymbol{n}(0)\rangle = \kappa\cos\theta$ per $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ curva biregolare e S orientata da $\boldsymbol{N}$, θ angolo tra $\boldsymbol{N}(p)$ e $\boldsymbol{n}(0)$. Ovvero

$$\kappa_n := \left\|\ddot{\alpha}(s)^{\perp}\right\|$$

Osservazione Dalla 49 vale

$$\mathbf{II}_p(\dot{\alpha}(0), \dot{\alpha}(0)) = \langle \ddot{\alpha}(0), N(p)\rangle = \kappa(0) \cdot \langle N(p), \boldsymbol{n}(0)\rangle = \kappa_n$$

ovvero la curvatura normale nella direzione $\boldsymbol{v}$ in p è

$$\kappa_{\boldsymbol{v}}(p) = h_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle L_p \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$$

e quindi:

Teorema 31 (teorema di Meusnier) Tutte le curve su S passanti per uno stesso punto $p \in S$ con lo stesso vettore tangente ad S in p hanno la stessa curvatura normale.

Osservazione Quindi abbiamo

$$\kappa = \frac{\overset{\text{fissa } \forall \alpha}{\boxed{\kappa_n}}}{\cos\theta}$$

8.3.2 Sezione normale

Teorema 32 (valore regolare su superfici) Sia $f \in C^\infty(S)$, se $a \in \mathbb{R}$ è valore regolare e $C := f^{-1}(a) \neq \emptyset$, allora C è una 1-varietà

Dimostrazione. Per $p \in C$ esiste per locale liscezza di funzione liscia su varietà estensione $\widetilde{f} \in C^\infty(A)$ di f su A intorno aperto di p $f = \widetilde{f}\Big|_{A\cap S}$. Inoltre posso supporre localmente $S = g^{-1}(b)$ con b valore regolare di g (da 12), quindi presa $F = \left(\widetilde{f}, g\right)$ ho $C = F^{-1}(a,b)$. Dimostro $J_{F(p)} = \begin{pmatrix}\nabla\widetilde{f}(p)\\ \nabla g(p)\end{pmatrix}$ suriettivo: $\nabla\widetilde{f}(p)$ e $\nabla g(p)$ indipendenti (non nulli in quanto p punto regolare per entrambe le funzioni), siccome

$$\ker dg_p = T_pS, \quad \dim\left(d\widetilde{f}_p\right) = 2, \quad \dim\left(d\widetilde{f}_p\Big|_{T_pS}\right) = \dim(df_p) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\langle dg_p, d\widetilde{f}_p\right\rangle = \mathbb{R}^3$$

Quindi (a,b) valore regolare di F, e la tesi deriva dal teorema del 17 □

Proposizione 50 Preso $H \neq T_pS$ piano $\Longrightarrow$ $S \cap (p+H)$ è una 1-varietà in un intorno di p

Dimostrazione. (P. 57)

□

Definizione 8.8 (sezione normale)**:** Preso $v \in T_pS$ e $H = \operatorname{span}(N(p), v)$, la curva $C = S\cap(p+H)$ ben definita per un intorno piccolo di p è detta sezione normale ad S in p. Vale $T_pC = T_pS \cap H = \mathbb{R}v$.

Proposizione 51 Presa $\alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ parametrizzazione naturale di una sezione normale ad S in $p = \alpha(0)$, vale

$$\kappa_n = \mathbf{II}_p(\dot\alpha(0), \dot\alpha(0)) = \pm\kappa_\alpha(0)$$

ovvero la curvatura normale equivale in modulo alla curvatura della sezione normale

Dimostrazione. Siccome $\boldsymbol{n}(0) \in H$ e $\boldsymbol{n}(0) \perp \boldsymbol{t}(0) = v$, vale $\boldsymbol{n}(0) = \pm N(p)$, quindi $\mathbf{II}_p(\dot\alpha(0), \dot\alpha(0)) = \langle N(p), \boldsymbol{n}(0)\rangle \cdot \kappa_\alpha(0) = \pm\kappa_\alpha(0)$ □

Osservazione Il segno della seconda forma fondamentale dipende dalla scelta di N, ma il modulo no.

Osservazione Se anche S non orientabile posso definire localmente $\mathbf{II}_p$

8.3.3 Curvature principali e classificazione dei punti di una superficie

Definizione 8.9 (curvature principali, direzioni principali di curvatura)**:** L_p essendo simmetrica ($\mathbf{II}_p$ bilineare) la possiamo diagonalizzare (teo. spettrale) e quindi possiede due autovalori k_1, k_2 detti curvature principali, i cui autospazi sono le direzioni principali di curvatura (per $k_1 \neq k_2$).
Si definisce linea di curvatura $\alpha\colon I \to S$ t.c. $\alpha'(t)$ direzione di curvatura $\forall t$

Definizione 8.10 (curvatura gaussiana, curvatura media)**:**

Curvatura Gaussiana $K(p) = k_1 \cdot k_2 = \det L_p$ Curvatura Media $H(p) = k_1 + k_2 = \operatorname{Tr}(L_p)$

Proposizione 52 Sia $f : S^1 \to \mathbb{R} \mid \quad f(v) = \mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ la restrizione a S^1 della forma quadratica associata a L_p . Allora f ha un massimo e un minimo assoluti, che sono k_1 e k_2 rispettivamente.

Dimostrazione. Per $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$base di autovettori ortonormali di $\mathbf{H}$ vale per $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2$ di $|\boldsymbol{v}| = 1$

$$\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle L_p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i,j} v_iv_j\langle L_p(\boldsymbol{e}_i), \boldsymbol{e}_j\rangle = k_1v_1^2 + k_2v_2^2 \begin{cases} \geq k_1\left(v_1^2 + v_2^2\right) = k_1 \\ \leq k_2\left(v_1^2 + v_2^2\right) = k_2 \end{cases}$$

□

Osservazione Nella curvatura Gaussiana, se cambio orientazione $L_p \to -L_p$ il determinante non cambia (cambio i segni a tutta la matrice) $\Longrightarrow$ K_p è indipendente dalla scelta dell'orientazione $\Longrightarrow$ la possiamo definire su qualunque superficie, anche le non orientabili

Definizione 8.11 (classificazione dei punti di una superficie)**:** In funzione di k_1 e k_2

Ellittico	$k_1 \cdot k_2 > 0$	Parabolico	$k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$
Iperbolico	$k_1 < 0 < k_2$	Planare	$k_1 = k_2 = 0$

Inoltre i punto si definisce OMBELICALE se $k_1 = k_2$

Definizione 8.12 (indicatrice di Dupin)**:** $Q := \{\boldsymbol{v} \in T_pS \mid |\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})| = 1\}$

Definizione 8.13 (isotropia per $\mathbf{II}_p$, direzione asintotica, curva asintotica, linea di curvatura)**:**

ISOTROPIA	$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ isotropo per $\mathbf{II}_p$ se $\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$
DIREZIONE ASINTOTICA	$L \subset T_pS$ retta tale che $\forall \boldsymbol{v} \in L$ vale $\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$
CURVA ASINTOTICA	$C \subseteq S \mid \forall p \in C,\ \forall \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \in T_pC \subset T_pS :\quad \boldsymbol{v}$ è direzione asintotica
LINEA DI CURVATURA	$C \subseteq S \mid \forall p \in C$: T_pC è autospazio per L_p

Osservazione Se prendo $C \subseteq S \mid \forall p \in C$ p è iperbolico e T_pC è autospazio dell'autovalore 0 $\implies$ C è curva asintotica + linea di curvatura.
NB: ci sono linee asintotiche che non sono di curvatura (se ci sono punti iperbolici)

Proposizione 53 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie connessa e orientata, se $\forall p \in S$ ombelicale $\implies S$ aperto di una sfera o un piano

Dimostrazione. $\forall p \in S : k_1(p) = k_2(p) := \lambda(p)$, che a priori potrebbe variare con p.

- Vediamo che $\lambda \equiv$ cost.
$$dN_p = -L_p = -\lambda(p)\,\mathrm{Id}_{T_pS} = \begin{pmatrix} -\lambda(p) & 0 \\ 0 & -\lambda(p) \end{pmatrix}$$
essendo $\lambda(p)$ i due autovalori. Si tratta quindi di un "ingrandimento". Fisso p e prendo param. in suo intorno $\varphi : U \to S$ con $p \in \varphi(U)$. Localmente abbiamo $N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$ con $(u,v) \in U$. Ma allora
$$dN_{\varphi(u,v)}(v) = -\lambda(\varphi(u,v))v \quad \forall v \in T_{\varphi(u,v)}S$$
In particolare vale
$$\begin{cases} dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u) = -\lambda(\varphi(u,v))\varphi_u \\ dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_v) = -\lambda(\varphi(u,v))\varphi_v \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = -\lambda\circ\varphi(u,v)\varphi_u \\ \frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = -\lambda\circ\varphi(u,v)\varphi_v \end{cases}$$
e derivando
$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(N\circ\varphi) = -\frac{\partial\lambda}{\partial v}\varphi_u - \lambda\varphi_{uv} \\ \frac{\partial^2}{\partial v\partial u}(N\circ\varphi) = -\frac{\partial\lambda}{\partial u}\varphi_v - \lambda\varphi_{vu} \end{cases} \overset{\text{Schwarz}}{\implies} \frac{\partial\lambda}{\partial v}\varphi_u = \frac{\partial\lambda}{\partial u}\varphi_v$$
Essendo φ_u, φ_v indipendenti $\implies \frac{\partial\lambda}{\partial v} \equiv \frac{\partial\lambda}{\partial u} \equiv 0$ su tutto U $\implies \lambda \equiv$ cost. su tutto U (eventualmente restringendo a una comp. connessa) $\implies \lambda$ costante su tutte le comp. connesse di S $\implies \lambda$ costante su tutta S

- Se $\lambda \equiv 0$: $\implies dN_p \equiv 0 \implies N \equiv$cost. $\forall p \in S$. Fisso $p_0 \in S$ e $\pi = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p_0, N\rangle = 0\}$, voglio verificare che $S \subseteq \pi$ localmente in una param. $\varphi : U \to S$. Suppongo U connsesso e prendo
$$\begin{array}{rccc} f: & U & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \langle \varphi(u,v) - \varphi(u_0,v_0), N\rangle \end{array}$$
Ho che
$$\begin{cases} f(u_0,v_0) = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \overset{1)}{=} \begin{pmatrix} \langle\varphi_u, N\rangle \\ \langle\varphi_v, N\rangle \end{pmatrix} \overset{2)}{=} \mathbf{0} \end{cases} \implies f \equiv 0 \quad \text{su } U$$
In 1) poiché $dN = 0$, in 2) poiché $\varphi_u \in T_pS \perp N$. Allora ho la tesi.

- Se $\lambda \equiv c \neq 0$: ho che
$$\begin{cases} \frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial u} = -\lambda\varphi_u \\ \frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial v} = -\lambda\varphi_v \end{cases}$$
Definisco
$$\psi(u,v) := \varphi(u,v) + \frac{1}{\lambda}N(\varphi(u,v))$$

$$\boldsymbol{\nabla}\psi = \begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial u} = \varphi_u + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} = \varphi_v + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial(N\circ\varphi)}{\partial v} = 0 \end{cases} \implies \psi \equiv \text{cost.} = x_0 \in \mathbb{R}^3 \implies \varphi(u,v) = x_0 - \frac{1}{\lambda}N(\varphi(u,v))$$

In particolare

$$\|\varphi(u,v)-x_0\| = \left\|\frac{1}{\lambda}N(\varphi(u,v))\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\underbrace{\|N(\varphi(u,v))\|}_{=1} = \frac{1}{|\lambda|}$$

Quindi $\forall p \in S$ abbiamo $\|p-x_0\| = \frac{1}{|\lambda|}$ (luogo dei punti a distanza costante da x_0) $\Longrightarrow$ $\varphi(U) \subseteq$ sfera di centro x_0 e raggio $\frac{1}{|\lambda|}$

□

8.3.4 Matrice dell'operatore di Weingarten

Lemma 13 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio euclideo di $\dim(V) = n$, $L \in \mathrm{End}(V)$ t.c. $h(a,b) = \langle La, b\rangle$ con L simmetrico su $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ($\Longleftrightarrow$ h bilineare). Per $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ base definisco

$$G_{ij} = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle \quad (G \text{ SPD}) \qquad H_{ij} = h(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \quad (H \text{ simm}) \qquad A \text{ matrice di } L \quad L\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i a_{ij}$$

Allora $A = G^{-1}H$

Osservazione ***(Immagine dell'operatore di Wingarten)*** Abbiamo che $L\boldsymbol{v}_j$ è sicuramente un vettore di T_pS, quindi lo possiamo scrivere come combinazione della base, ovvero

$$L\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_1 a_{1j} + \dots \boldsymbol{v}_n a_{nj} = (\boldsymbol{v}_1|\dots|\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i a_{ij}$$

dove $\boldsymbol{a}_j$ è il vettore delle componenti di $L\boldsymbol{v}_j$ rispetto alla base $\mathscr{B}$. Quindi la matrice

$$A = (\boldsymbol{a}_1|\dots|\boldsymbol{a}_n)$$

è la matrice che ha per **colonne** i vettori componenti rispetto a $\mathscr{B}$ dell'immagine rispetto a L dei vettori di $\mathscr{B}$. È quindi la matrice associata a L nella base $\mathscr{B}$.

Dimostrazione.

$$h_{ij} = \langle L\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k a_{ki}, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_{kj} = \langle A_i, G_j\rangle = A_i^T \cdot G_j$$

$$H = A^T G \quad \Rightarrow \quad A^T = HG^{-1} \quad \Rightarrow \quad A = \left(HG^{-1}\right)^T = \left(G^{-1}\right)^T H^T = G^{-1}H$$

□

Corollario 13 Usando la formula per l'inversa di una matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

allora la matrice $\mathbf{A}$ di L_p è

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}}$$

e dunque

$$\textsc{Curv. Gaussiana } K(p) = \det \mathbf{A} = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \qquad H(p) = \mathrm{Tr}\mathbf{A} = \frac{Eg+Ge-2Ff}{2(EG-F^2)}$$

Proposizione 54 Se $f(x) = Ax+b$ è una isometria di $\mathbb{R}^n$ e S è una superficie, allora $S' := f(S)$ è una superficie, $T_{f(p)}S' = A \cdot T_pS$ e gli operatori di Weingarten L_p e $L'_{f(p)}$ di S e S' sono simili, ovvero ($L'_{f(p)} = AL_pA^{-1}$).

Dimostrazione. Per $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione di S, $\psi := f\circ\varphi\colon U \to S'$ è parametrizzazione di S', allora $N'(q) := A \cdot N\left(f^{-1}(q)\right)$ è una orientazione di S' e dunque

$$L'_{f(p)} = -dN'_{f(p)} = -A\cdot dN_p \cdot \left(df^{-1}\right)_{f(p)} = -A\cdot dN_p \cdot A^{-1} = AL_pA^{-1}$$

□

8.3.5 Altri risultati sulla curvatura

Proposizione 55 La curvatura Gaussiana K non dipende dall'orientazione ed è definita anche per S non orientabile.

Proposizione 56 Le curvature principali in $p \in S$ sono il minimo e il massimo di $\mathbf{II}_p$ sul cerchio unitario in T_pS

Proposizione 57 (superficie come locale grafico di una funzione) Ogni superficie è localmente il grafico di una funzione definita sul piano tangente.

Dimostrazione. WLOG assumo $p = (0,0,0)$ e $T_pS = \langle e_1, e_2 \rangle$ (a cui mi riconduco a meno di isometria), e $\psi\colon \overset{S}{(x,y,z)} \overset{}{\longmapsto} \overset{T_pS}{(x,y)}$. Ma allora $d\psi_p = \mathrm{Id}_{T_pS}$ e per il funzione inversa per applicazioni tra varietà ψ è invertibile in un intorno di p. □

Proposizione 58 Preso $\Sigma = T_pS + p$ piano affine tangente in p ad S genera $\Sigma_+ = \langle x - p, \boldsymbol{n} \rangle \geq 0$ e Σ_- semispazi di $\mathbb{R}^3$

- Per p ellittico, $\exists A \subset S$ intorno di p tale che $A \setminus \{p\} \subseteq \Sigma_+$ oppure $A \setminus \{p\} \subseteq \Sigma_-$
- Per p iperbolico, $\forall A \subset S$ intorno di p vale $A \setminus \{p\} \cap \Sigma_+ \neq \emptyset$ e $A \setminus \{p\} \cap \Sigma_- \neq \emptyset$

Dimostrazione. (P. 66) WLOG assumo $p = (0,0,0)$ e $T_pS = \langle e_1, e_2 \rangle$ (a cui mi riconduco a meno di isometria) e prendo $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione tale che $S = \Gamma_f$ (Proposizione 57) . Presa dunque la 7.2 standard del grafico Γ_f si osserva $\mathbf{H} = H_f$ matrice Hessiana di f e che $\nabla f(p) = 0$. Le tesi dalla scomposizione di Taylor di f in p e dal fatto che H_f definita positiva per p ellittico e indefinita per p iperbolico. □

8.4 Coordinate polari e cilindriche e Superfici di rivoluzione

8.4.1 Coordinate

Definizione 8.14 (coordinate polari):

Definizione 8.15 (coordinate cilindriche): $f \in C^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^3 - \{x = y = 0\}\right)$ tale che $f\colon (u, r, z) \longmapsto (ru_1, ru_2, z)$ con $\Omega := S^1 \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ $(S^1 \ni u = (u_1, u_2))$.

8.4.2 Superfici di rotazione

Definizione 8.16 (superficie di rotazione): Per $C \subset \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ curva regolare, si definisce superficie di rotazione la superficie regolare $S = \left\{(x,y,z) \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \in C\right\}$

Osservazione Presa $\alpha\colon (a,b) \to C$ parametrizzazione di C $(\alpha = (\beta, \gamma))$,

$$\varphi\colon (\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times (a,b) \to S \mid \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \beta(v)\cos u \\ \beta(v)\sin u \\ \gamma(v) \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione di S (dalle coordinate cilindriche, quindi la buona definizione delle superfici di rotazione come 2-varietà)

Teorema 33 Sia $C \subset \left\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$ una 1-varietà e $S = R_C = \left\{(x,y,z) \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \in C\right\}$. Allora R_C è una 2-varietà (superficie) ed è omeomorfa a $S^1 \times C$

Dimostrazione. (OK) Sia

$$f : \underbrace{S^1 \times (0,+\infty) \times \mathbb{R}}_{:=M} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \supseteq S \mid ((a,b), r, z) \mapsto (ra, rb, z)$$

è diffeo. con M una 3-varietà e con inversa

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}, z\right)$$

Abbiamo che S è superficie $\iff$ $f^{-1}(S)$ è superficie e vediamo che

$$f^{-1}(S) = \{(\underbrace{(a,b)}_{\in S^1}, r, z) \in M \mid \underbrace{(ra, rb, z) \in S}_{\iff (r\sqrt{a^2+b^2}, z) = (r,z) \in C}\} = \{\underbrace{(a,b)}_{\in S^1}, \underbrace{(r,z)}_{\in C}\} = S^1 \times C$$

$\square$

Osservazione ***(Invarianti delle superfici di rotazione)*** Fissiamo

- Parametrizzazione per C: $\alpha : J \to C \mid \alpha(v) = \begin{pmatrix} \beta(v) \\ \gamma(v) \end{pmatrix}$ con $\beta, \gamma \in C^{\infty(J)}$
- Parametrizzazione per R_C: $\varphi : (-\pi, \pi) \times J \to S \mid \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \beta(v) \cos u \\ \beta(v) \sin u \\ \gamma(v) \end{pmatrix}$

Allora:

- **I** f.f.

$$\begin{cases} \varphi_u = (-\beta \cdot \sin u, \beta \cdot \cos u, 0) \\ \varphi_v = (\beta' \cdot \cos u, \beta' \cdot \sin u, \gamma') \\ \varphi_{uu} = (-\beta \cdot \cos u, \beta \cdot \sin u, 0) \\ \varphi_{uv} = (-\beta' \cdot \sin u, \beta' \cdot \cos u, 0) \\ \varphi_{vv} = (\beta'' \cdot \cos u, \beta'' \cdot \sin u, \gamma'') \end{cases} \implies \begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \beta^2 \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = (\gamma')^2 + (\beta')^2 = \|\dot{\alpha}\|^2 \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \end{cases} \implies \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \beta(v)^2 & 0 \\ 0 & \|\dot{\alpha}\|^2 \end{pmatrix}$$

- Campo di Gauss:

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin u \beta(v) & \cos u \beta(v) & 0 \\ \cos u \beta'(v) & \sin \beta'(v) & \gamma'(v) \end{pmatrix} = \beta(v) \begin{pmatrix} \gamma'(v) \cos u \\ \gamma'(v) \sin u \\ -\beta'(v) \end{pmatrix}$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = |\beta| \sqrt{\gamma'^2 \cos^2 u + \gamma'^2 \sin^2 u + \beta'} \overset{\beta \geq 0}{=} \beta \sqrt{\gamma'^2 + \beta'^2}$$

Allora

$$\overline{N} = \frac{(\gamma' \cdot \cos u, \gamma' \cdot \sin u, -\beta')}{\sqrt{\gamma'^2 + \beta'^2}}$$

- **II** f.f.:

$$e = \frac{-\beta\gamma'}{|\dot{\alpha}|} \qquad f = 0 \qquad g = \frac{(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'')}{|\dot{\alpha}|}$$

$$k_1 = \frac{e}{E} = \frac{-\gamma'}{\beta\,|\dot{\alpha}|} \qquad k_1 = \frac{g}{G} = \frac{(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'')}{|\dot{\alpha}|^3} \qquad K = -\frac{\gamma'\,(\beta''\gamma' - \beta'\gamma'')}{|\dot{\alpha}|^4\,\beta}$$

OSS:

- $F = 0 \iff \{\varphi_u, \varphi_v\}$ sono base ortogonale di $T_{\varphi(u,v)} R_C$
- $f = 0 \iff \{\varphi_u, \varphi_v\}$ sono disezioni principali di curvatura, ossia sono autovettori.

Proposizione 59 Superficie di rotazione $\implies$ orientabile

Proposizione 60 Per una superficie di rotazione le linee coordinate sono linee di curvatura.

Dimostrazione. Dai risultati precedenti la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} e/E & 0 \\ 0 & g/G \end{pmatrix}$ è diagonale $\square$

Proposizione 61 Una superficie di rotazione è invarianti per le rotazioni attorno all'asse z.

Definizione 8.17 (Paralleli e meridiani)**:** Fissati v_0, u_0: $\begin{cases} \text{PARALLELO}: & \text{curva } u \mapsto \varphi(u, v_0) \\ \text{MERIDIANO}: & \text{curva } v \mapsto \varphi(u_0, v) \end{cases}$

Proposizione 62 La curvatura di una superficie di rotazione è costante lungo i paralleli.

Esempio 11 ***(pseudosfera di Beltrami)*** Superficie di rotazione ottenuta ruotando una **trattrice** C di parametrizzazione $\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log(\tan t/2))$. Ha curvatura Gaussiana costante $K \equiv -1$.

9 Derivata covariante, Simboli di Christoffel e Teorema Egregium

9.1 Campi vettoriali

Definizione 9.1 (campo vettoriale)**:** $X \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
$\mathfrak{X}(\Omega)$ spazio vettoriale reale dei campi vettoriali su Ω, e presi $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$$(f \cdot X)(x) \coloneqq f(x) \cdot X(x) \qquad\qquad (Xf)(x) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial X(x)}(x) = df_x(X(x))$$

Osservazione Dalla definizione differenziale di applicazioni tra varietà vale $(Xf)(x) = \left[\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\right]_{t=0}$ con $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ tale che $\begin{array}{l} \alpha(0) = x \\ \dot{\alpha}(0) = v \end{array}$

Osservazione ***(proprietà della derivata di una funzione lungo un campo)***

Linearità $X(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 X f_1 + \lambda_2 X f_2$ Regola di Leibniz $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$

Definizione 9.2 (derivata di un campo)**:** Presi $X, Y \in \mathfrak{X}(x)$, definiamo $\frac{\partial Y}{\partial v}$ e $\frac{\partial Y}{\partial X} : \mathfrak{X}(\Omega) \times \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega)$

$$\frac{\partial Y}{\partial v}(x) = \left(\frac{\partial Y_1}{\partial v}(x), \ldots, \frac{\partial Y_n}{\partial v}(x)\right)^T \qquad\qquad \frac{\partial Y}{\partial X}(x) \coloneqq \frac{\partial Y}{\partial X(x)}(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial Y}{\partial x_i}(x)$$

Osservazione ***(proprietà della derivata di un campo lungo un campo)***

$$\frac{\partial Y}{\partial (f \cdot X)} = f \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial X}(f \cdot Y) = (Xf) \cdot Y + f \cdot \frac{\partial Y}{\partial X}$$

9.1.1 Campi vettoriali su superficie e Campi tangenti

Definizione 9.3 (campo vettoriale su una superficie)**:** $X \in C^\infty\left(S, \mathbb{R}^3\right)$ campo vettoriale su una superficie S.
Campo vettoriale *tangente* se $\forall p \in S$ vale $X(p) \in T_p S$, campo vettoriale *normale* se S orientabile e $\forall p \in S$ vale $X(p) \perp T_p S$. $\mathfrak{X}(S)$ spazio vettoriale reale dei campi tangenti ad S, e presa $f \in C^\infty(S)$

$$(f \cdot X)(p) \coloneqq f(p) \cdot X(p) \qquad\qquad (Xf)(p) \coloneqq df_p(X(p))$$

Osservazione Possiamo localmente estendere X campo su S a $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e $f \in C^\infty(S)$ a $\widetilde{f} \in C^\infty(A)$, e vale dunque $Xf|_{A \cap S} = \widetilde{X}\widetilde{f}$

9.2 Derivata covariante

Definizione 9.4 (componenti di un campo su una superficie)**:** Dato $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale su una superficie S, siano $X^\top$ e $X^\perp$ rispettivamente le componenti tangente e normale alla superficie, ovvero

$$X^\perp = \langle X(p), N(p)\rangle \cdot N(p) \qquad X^\top = X - X^\perp \qquad \forall p \in A \text{ con } A \subset S \text{ aperto orientabile e } N \text{ campo normale}$$

Definizione 9.5 (derivata covariante)**:** Presi $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$

$$\nabla_X Y = \left[\frac{\partial Y}{\partial X}\right]^\top$$

Osservazione ***(proprietà della derivata covariante)*** Direttamente dalle proprietà della derivata di un campo lungo un campo

$$\nabla_{f \cdot X} Y = f \cdot \nabla_X Y \qquad\qquad \nabla_X(f \cdot Y) = (Xf) \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$$

9.2.1 Campi coordinati

Definizione 9.6 (campi coordinati)**:** $X_i \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$ campo tangente tale che $X_i \coloneqq \varphi_{u_i} \circ \varphi^{-1}$ per $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione di S e $(u_1, u_2) \in U$

Proposizione 63 (scomposizione campo tangente) $\forall Y \in \mathfrak{X}(\varphi(U))\ \exists a_1, a_2 \in C^\infty(\varphi(U))$ tali che $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2$

Dimostrazione. Di certo $\exists! a_1, a_2$ funzioni, siccome $\forall p$ $\{X_1(p), X_2(p)\}$ base di T_pS, devo dimostrarle lisce. Suddividendo X_1, X_2, Y in componenti e ricordando $X_1(p), X_2(p)$ indipendenti, vale

$$\begin{array}{cc} X_1 & X_2 \end{array} \qquad\qquad Y$$
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \underset{\text{un minore inv.}}{\overset{\text{WLOG}}{\Longrightarrow}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $\forall p$, a_j composizione di funzioni lisce quindi liscia. $\square$

Osservazione ***(campi coordinati normalizzati)*** In particolare, per $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione ortogonale i campi coordinati sono ortogonali $X_1(u) \perp X_2(u)$ e posso essere normalizzati $e_1 = {}^{X_1}/\sqrt{E}, e_2 = {}^{X_2}/\sqrt{G}$

9.3 Simboli di Christoffel

Notazione 4 ***(convenzione di Einstein)*** Indici ripetuti indicano una somma sull'indice (es. $a_i b^i = \sum_i a_i b^i$)

Notazione 5 $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}$ e $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial u_2}$

Definizione 9.7 (simboli di Christoffel): $\Gamma_{ij}^k := \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \circ \varphi \in C^\infty(U)$, con $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k \in C^\infty(W)$ tali che $\nabla_{X_i} X_j = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k X_k$, con $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione di S e X_i campi coordinati di $\varphi(U) =: W$, dunque

$$(\nabla_{X_i} X_j)(\varphi(u)) = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k X_k(\varphi(u))$$

Proposizione 64 (proprietà dei simboli di Christoffel) Valgono

(i) $(\nabla_{X_i} X_j) \circ \varphi = \varphi_{u_j u_i}^\top$ (ii) $\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i$ (iii) $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

Dimostrazione. Preso $u = (u_1, u_2)$, sia $\alpha(t) := \varphi(u_1 + t, u_2)$, per cui dunque $\dot{\alpha}(0) = \varphi_{u_1} = X_1(\varphi(u))$, quindi

$$(\nabla_{X_1} X_j)(\varphi(u)) = \left[\frac{\partial X_j}{\partial X_1}(\varphi(u))\right]^\top = \left[\frac{d}{dt} X_j(\alpha(t))\right]_{t=0}^\top = \left[\frac{d}{dt} X_j(\varphi(u_1 + t, u_2))\right]_{t=0}^\top \overset{\spadesuit}{=} \varphi_{u_j u_1}(u)^\top$$

($\spadesuit$) siccome $X_j \circ \varphi = \varphi_{u_j}$. Analogamente per $\nabla_{X_2} X_j$, quindi (i). Per Scwharz $\varphi_{u_2 u_1} = \varphi_{u_1 u_2}$, da cui (ii) e (iii). $\square$

9.3.1 Formula chiusa dei simboli di Christoffel

Presi i coefficienti $g_{ij} = \langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \rangle$ della prima forma fondamentale, sia $\langle X_i, X_j \rangle \in \varphi(W)$ la funzione $p \mapsto \langle X_i(p), X_j(p) \rangle$, allora $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle \circ \varphi$.

Inoltre, siccome $\mathbf{G}$ definita positiva e dunque invertibile, sia $g^{ij} := \left[\mathbf{G}^{-1}\right]_{ij}$, ovvero $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$

Proposizione 65 Vale

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} \right) = \frac{1}{2} g^{km} \left(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \right)$$

Dimostrazione. Premesso un lemma

Lemma 14

$$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{mj}$$

Dimostrazione. Preso $p = \varphi(u)$ e considerate le proprietà dei simboli di Christoffel (i)

$$\partial_i g_{jk} = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \varphi_{u_j}, \varphi_{u_k} \rangle = \langle \varphi_{u_j u_i}, \varphi_{u_k} \rangle + \langle \varphi_{u_j}, \varphi_{u_k u_i} \rangle = \left\langle \varphi_{u_j u_i}^\top, \varphi_{u_k} \right\rangle + \left\langle \varphi_{u_j}, \varphi_{u_k u_i}^\top \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk}(u) &= \langle \nabla_{X_i} X_j(p), X_k(p) \rangle + \langle X_j(p), \nabla_{X_i} X_k(p) \rangle = \\ &= \left\langle \Gamma_{ij}^m(u) X_m(p), X_k(p) \right\rangle + \langle X_j(p), \Gamma_{ik}^m(u) X_m(p) \rangle = \Gamma_{ij}^m g_{mk}(u) + \Gamma_{ik}^m g_{mj}(u) \end{aligned}$$

$\square$

Da una permutazione ciclica degli indici $i \to j \to k \to i$ e dal risultato del lemma otteniamo

$$\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} = 2\Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

da cui moltiplicando per g^{ks}e esplicitando la somma sui k otteniamo (a meno di cambio di variabili) la tesi

$$g^{ks}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) = 2\Gamma_{ij}^m g_{mk} g^{ks} = 2\Gamma_{ij}^m \delta_{ms} = 2\Gamma_{ij}^s$$

□

Osservazione La derivata covariante è un oggetto della geometria intrinseca

Osservazione In particolare, per una parametrizzazione ortogonale vale $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ e $\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/E & 0 \\ 0 & 1/G \end{pmatrix}$, da cui $g_{km} = g^{km} = 0$ per $k \neq m$, e quindi $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$

$i = j = k \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \partial_i g_{ii} = \frac{\partial}{\partial g_{ii}}\left(\partial_i g_{ii}\right) = \frac{1}{2}\partial_i \log g_{ii} = \partial_i \sqrt{\log g_{ii}}$

$i = j \neq k \quad \Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2} g^{kk}\left(\cancel{2\partial_i g_{ik}} - \partial_k g_{ii}\right) = -\frac{1}{2g^{kk}}\partial_k g_{ii}$

$\begin{matrix} i = 1 \\ j = 2 \end{matrix} \quad \Gamma_{12}^k = \frac{1}{2} g^{kk}\left(\partial_1 g_{2k} + \partial_2 g_{1k} - \cancel{\partial_k g_{12}}\right) = \partial_l \sqrt{\log g_{kk}}$ con $l = 1$ se $k = 2$, $l = 2$ se $k = 1$

9.3.2 Formula chiusa della Curvatura Gaussiana

Lemma 15 Sia $\varphi \colon U \to S$ parametrizzazione, allora $\forall u \in U$ vale

$$\det\left(\mathbf{H}_{\varphi(u)}\right) = \det\left(h_{ij}\right)(u) = \langle \nabla_{X_1}\nabla_{X_2} X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1} X_2, X_1 \rangle \left(\varphi\left(u\right)\right)$$

Dimostrazione. Preso il versore normale identificato da φ, dalle proprietà dei simboli di Christoffel (i)

$$\nabla_{X_1}\nabla_{X_2} X_2 \circ \varphi = \left[\overbrace{\partial_1\left(\nabla_{X_2} X_2\right) \circ \varphi}^{\spadesuit}\right]^{\top} = \varphi_{u_1 u_2 u_2} - h_{22} \cdot \overline{N}_{u_1} \quad \text{siccome } \overline{N}_{u_1} \perp N$$

$$\spadesuit \;\to\; \frac{\partial}{\partial u_1}\boxed{\overset{\clubsuit}{\left(\nabla_{X_2} X_2\right) \circ \varphi}} = \varphi_{u_1 u_2 u_2} - \partial_1 h_{22} \cdot N - h_{22} \cdot \partial_1\left(N \circ \varphi\right) = \varphi_{u_1 u_2 u_2} - \partial_1 h_{22} \cdot N - h_{22} \cdot \overline{N}_{u_1}$$

$$\clubsuit \;\to\; \left(\nabla_{X_2} X_2\right) \circ \varphi = \varphi_{u_2 u_2}^{\top} = \varphi_{u_2 u_2} - \langle \varphi_{u_2 u_2}, N \rangle \cdot N = \varphi_{u_2 u_2} - h_{22} \cdot N$$

da cui preso $\nabla_{X_1}\nabla_{X_2} X_2 \circ \varphi - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1} X_2 \circ \varphi = -h_{22} \cdot \overline{N}_{u_1} + h_{12} \cdot \overline{N}_{u_2}$, deriva la tesi

$$\langle \nabla_{X_1}\nabla_{X_2} X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1} X_2, X_1 \rangle \circ \varphi = -h_{22}\overbrace{\left\langle \overline{N}_{u_1}, X_1 \circ \varphi \right\rangle}^{\heartsuit} + h_{12}\overbrace{\left\langle \overline{N}_{u_2}, X_1 \circ \varphi \right\rangle}^{\diamondsuit} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$

$$\heartsuit \;\to\; \left\langle \overline{N}_{u_1}, X_1 \circ \varphi \right\rangle = \left\langle \overline{N}_{u_1}, \varphi_{u_1} \right\rangle = -\left\langle N, \varphi_{u_1 u_1} \right\rangle = -h_{11} \qquad \diamondsuit \;\to\; \left\langle \overline{N}_{u_2}, X_1 \circ \varphi \right\rangle = -h_{21}$$

□

Lemma 16

$$\nabla_{X_i}\nabla_{X_j} X_k = \left(\partial_i \Gamma_{jk}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m\right) X_m$$

Dimostrazione.

$$\nabla_{X_i}\nabla_{X_j} X_k \circ \varphi = \nabla_{X_i}\left(\Gamma_{jk}^m \cdot \left(X_m \circ \varphi\right)\right) = \left(X_i \Gamma_{jk}^m\right) \cdot \left(X_m \circ \varphi\right) + \Gamma_{jk}^m \cdot \nabla_{X_i}\left(X_m \circ \varphi\right) = \left(\partial_i \Gamma_{jk}^m + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m\right) X_m \circ \varphi$$

□

Teorema 34 (teorema Egregium - I versione)

$$K = \frac{\det\left(h_{ij}\right)}{\det\left(g_{ij}\right)} = \frac{g_{1m}}{\det\left(g_{ij}\right)}\left(\frac{\partial \Gamma_{22}^m}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^m}{\partial u_2} + \Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^m - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^m\right) = \frac{g_{1m}}{\det\left(g_{ij}\right)}\left(\partial_1 \Gamma_{22}^m - \partial_2 \Gamma_{12}^m + \Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^m - \Gamma_{12}^s \Gamma_{2s}^m\right)$$

Dimostrazione. Dai Lemmi precedenti

$$\begin{aligned}\det\left(h_{ij}\right) &= \langle \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_2, X_1\rangle = \langle\left(\partial_1\Gamma_{22}^m + \Gamma_{22}^s\Gamma_{1s}^m\right) - \left(\partial_2\Gamma_{12}^m + \Gamma_{12}^s\Gamma_{2s}^m\right), X_1\rangle \\ &= \left(\partial_1\Gamma_{22}^m - \partial_2\Gamma_{12}^m + \Gamma_{22}^s\Gamma_{1s}^m - \Gamma_{12}^s\Gamma_{2s}^m\right)\cdot g_{1m}\end{aligned}$$

□

Corollario 14 (teorema Egregium - II versione) La curvatura Gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale e non dalla seconda, ed è dunque oggetto della geometria intrinseca.

Osservazione In particolare, per una parametrizzazione ortogonale vale

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_1\left(\frac{\partial_1 G}{\sqrt{EG}}\right) + \partial_2\left(\frac{\partial_2 E}{\sqrt{EG}}\right)\right)$$

10 Isometrie tra superfici - geometria intrinseca

La geometria intrinseca studia proprietà oggetti invarianti per isometrie.

Definizione 10.1 (isometria tra superfici)**:** $f\colon S_1 \to S_2$ se $\begin{cases} f \text{ diffeomorfismo tra } S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ superfici} \\ df_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2 \text{ è un'sometria}\end{cases}$

df_p è un isometria vuol dire:

- $\forall p \in S_1$ $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in T_pS_1$ vale $\langle df_p(\boldsymbol{v}), df_p(\boldsymbol{v}')\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\rangle$
- df_p è isometria $\iff$ la matrice associata è ortogonale.

  ovvero se il diff. mantiene gli angoli dei vettori di input.
  S_1 e S_2 sono dette isometriche

Definizione 10.2 (isometria locale)**:** $f : S_1 \to S_2 \in C^\infty$ t.c.:

- è suriettiva
- è C^∞
- $\forall p \in S_1$ $\exists U$ intorno aperto di p in S_1 t.c. $f(U)$ è aperto in S_2 e $f|_U : U \to f(U)$ è isometria

  S_1 e S_2 sono dette localmente isometriche se esistono $f_1 \in C^\infty(S_1, S_2)$ e $f_2 \in C^\infty(S_2, S_1)$ isometrie locali

Osservazione Una isometria solale è un diffeomorfismo locale.

*Esempio 12 (**Piano e cilindro**)* Esiste un'isometria locale tra il piano (S_1) e il cilindro (S_2) (posso arrotolare il foglio), data da

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{x}{R}\right) \\ R\sin\left(\frac{x}{R}\right) \\ y\end{pmatrix}$$

si verifica che df_p è isometria. Però

- $\nexists g : S_2 \to S_1$ isometria locale
- S_1 e S_2 non sono isometrici, se lo fossero ci sarebbe diffeo. e quindi omeo, ma $\pi_1(S_1) = \{e\}$ mentre $\pi_1(S_2) = \mathbb{Z}$

Proposizione 66 (**I** di superfici isometriche) $f\colon S \to S'$ isometria tra superfici, $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione di S, allora $\psi := f \circ \varphi$ è parametrizzazione di S' t.c. $\forall (v_0, u_0) \in U$ i coefficienti della **I** f.f. di S_1 in $\varphi(u_0, v_0)$ sono uguali ai coefficienti della **I** f.f. di S' in $\psi(u_0, v_0) = f \circ \varphi(u_0, v_0)$, ovvero $\left(g_{ij}\right)_\varphi = \left(g_{ij}\right)_\psi$

Dimostrazione. ψ parametrizzazione perché f diffeomorfismo

$$\left(g_{ij}\right)_\psi = \left\langle \psi_{u_i}, \psi_{u_j}\right\rangle = \left\langle \partial_i\left(f\circ\varphi\right), \partial_j\left(f\circ\varphi\right)\right\rangle = \left\langle df_{\varphi(u)}\varphi_{u_i}, df_{\varphi(u)}\varphi_{u_j}\right\rangle \overset{f \text{ isom}}{=} \left\langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j}\right\rangle = \left(g_{ij}\right)_\varphi$$

□

Corollario 15 La curvatura gaussiana è invariante per isometrie, $K_S(p) = K_{S'}(f(p))$

Proposizione 67 (locale isometria di superfici con stessa **I**) Se S_1, S_2 superfici e $\begin{matrix} \varphi\colon U \to S_1 \\ \psi\colon U \to S_2 \end{matrix}$ parametrizzazioni e $(g_{ij})_\varphi = (g_{ij})_\psi$, allora $\varphi(U)$ e $\psi(U)$ isometriche di isometria $f := \psi \circ \varphi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \varphi(U) \subseteq S_1 \arrow[rr, "f:=\psi\circ\varphi^{-1}"] & & \psi(U) \subseteq S_2 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Percorrendo a ritroso la dimostrazione della Proposizione 66. □

Osservazione Una curva è isometrica a un segmento aperto, tramite la parametrizzazione naturale. La geometria intrinseca delle varietà di dimensione 1 è dunque banale: sono tutte localmente isometriche.

11 Trasporto Parallelo e Geodetiche

11.1 Campo tangente e Derivata covariante lungo una curva

Definizione 11.1 (campo vettoriale tangente lungo una curva)**:** $W \in C^\infty\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ tangente a $\alpha\colon I \to S$ con S superficie se $W(t) \in T_{\alpha(t)}S \ \forall t \in I$.

Esempio 13 $\dot{\alpha}(t)$ è campo tangente ad S lungo α

Definizione 11.2 (derivata covariante lungo una curva)**:** $\frac{DW}{dt} := \left[\frac{dW(t)}{dt}\right]^\top$, dove $[v]^\top$ è la proiezione di v su T_pS. È la derivata del campo vettoriale rispetto alla superficie, ovvero prende la variazione relativa alla superficie, non assoluta in $\mathbb{R}^3$

siccome vale per $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ opportuni

$$\frac{D(Y \circ \alpha)}{dt}(t_0) = (\nabla_X Y)(\alpha(t_0)) \qquad \text{con } \alpha \text{ curva su } S \text{ tale che } X(\alpha(t_0)) = \dot{\alpha}(t_0)$$

*Osservazione (**proprietà della derivata** $\frac{DW}{dt}$)* Presa $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione contenente $\alpha(t_0)$, e $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ tale che $\alpha(t) \in \varphi(U)$

Regola di Leibniz $\frac{D}{dt}(fW) = f' \cdot W + f \cdot \frac{DW}{dt}$ Scomposizione $W(t) = w_i(t) \cdot X_i(\alpha(t))$

Proposizione 68 (prodotto scalare di campi lungo una curva) Dati $\alpha\colon I \to S$ e V, W campi lungo α, allora vale

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \qquad \text{con } \langle V, W\rangle(t) := \langle V(t), W(t)\rangle$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle = \left\langle \left[\frac{dV}{dt}\right]^\top, W \right\rangle + \cancel{\left\langle \left[\frac{dV}{dt}\right]^\perp, W \right\rangle} + \left\langle V, \left[\frac{dW}{dt}\right]^\top \right\rangle + \cancel{\left\langle V, \left[\frac{dW}{dt}\right]^\perp \right\rangle}$$

□

Proposizione 69 (derivata $\frac{DW}{dt}$ in coordinate) Siano $(u_1(t), u_2(t)) := \varphi^{-1} \circ \alpha(t)$ e w_i le scomposizioni in coordinate di W

$$\frac{DW}{dt} = \left(w_k' + w_j \cdot u_i' \cdot (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\right) \cdot (X_k \circ \alpha)$$

Dimostrazione. Dimostro per $W = X_1 \circ \alpha = \varphi_{u_1}\left(\varphi^{-1} \circ \alpha\right) = \varphi_{u_1}(u_1(t), u_2(t))$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\varphi_{u_1}(u_1, u_2) = \varphi_{u_1u_1}(u_1, u_2) \cdot u_1' + \varphi_{u_1u_2}(u_1, u_2) \cdot u_2'$$
$$\frac{DW}{dt} = \left[\frac{dW}{dt}\right]^\top = \varphi_{u_1u_i}^\top(u_1, u_2) \cdot u_i' = \nabla_{X_1}X_i(u_1, u_2) \cdot u_i' = (\nabla_{X_1}X_i \circ \alpha) \cdot u_i' = u_i' \cdot \left(\Gamma_{1j}^k \circ \alpha\right)(X_k \circ \alpha)$$

La tesi scomponendo con Leibniz $W = w_i \cdot (X_i \circ \alpha)$

$$\begin{aligned}\frac{DW}{dt} &= \frac{D}{dt} w_k \cdot (X_k \circ \alpha) = w_k' \cdot (X_k \circ \alpha) + w_k \cdot \frac{DX_k \circ \alpha}{dt} = w_k' \cdot (X_k \circ \alpha) + w_j \cdot \frac{DX_k \circ \alpha}{dt} = \\ &= \left(w_k' + w_j \cdot u_i' \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha\right)\right) \cdot (X_k \circ \alpha)\end{aligned}$$

□

11.1.1 Campo Parallelo

Definizione 11.3 (campo parallelo)**:** $W \in C^\infty\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ campo lungo $\alpha \colon I \to S$ è parallelo se $\frac{DW}{dt} \equiv 0$ su I.

Osservazione W parallelo $\iff \begin{cases} \|W\| \text{ costante} \\ \text{angolo che forma } W \text{ con } S \text{ è costante} \end{cases}$. Infatti un campo parallelo è determinato da un solo vettore in un solo punto (ha il grado di libertà di un vettore).

Osservazione W parallelo $\iff w_k' = -u_i' \cdot w_j \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \alpha$ per $k = 1, 2$, ovvero

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } A_{kj} = -u_i' \cdot \Gamma_{ij}^k \circ \alpha \tag{1}$$

Proposizione 70 (esistenza e unicità di un campo parallelo) Dati $\alpha \colon I \to S$, $t_0 \in I$ e $w \in T_pS$, $\exists! W$ campo parallelo lungo α tale che $W(t_0) = w$ e definito su tutto I. La mappa $w \to W$ è lineare.

Dimostrazione. Presa la condizione iniziale $\begin{pmatrix}\overline{w}_1 & \overline{w}_2\end{pmatrix}^T$, $\exists! \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^T$ che risolve l'equazione differenziale (1), e dunque $W(t) \coloneqq w_i \cdot X_i(\alpha(t))$ campo parallelo. Finita una parametrizzazione ne prendo una nuova, prendo la condizione iniziale e proseguo □

11.2 Trasporto Parallelo

Definizione 11.4 (trasporto parallelo)**:** Presi $\alpha \colon I \to S$, $t_0, t_1 \in I$ si definisce trasporto parallelo lungo α $P_{\alpha,t_0,t_1} \colon T_{\alpha(t_0)}S \to T_{\alpha(t_1)}S$ tale che $P_{\alpha,t_0,t_1}(w) \coloneqq W(t_1)$ con $W \colon I \to \mathbb{R}^3$ unico campo parallelo tale che $W(t_0) = w$

Osservazione Il trasporto parallelo P è lineare, ed è un isomorfismo tra $T_{\alpha(t_0)}S$ e $T_{\alpha(t_1)}S$. Per semplicità scriviamo $P_\alpha \colon T_pS \to T_qS$ con $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e $[0,1] \subset I$

Proposizione 71 (trasporto parallelo come isometria tra superfici) P_α è un'isometria tra superfici

Dimostrazione. $\langle v, w\rangle = \langle P_\alpha v, P_\alpha w\rangle$ siccome $\langle V(t_0), W(t_0)\rangle = \langle V(t_1), W(t_1)\rangle$ per i campi paralleli costruiti V, W, siccome da 68 vale $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \cancel{\frac{DV}{dt}}, W\right\rangle + \left\langle V, \cancel{\frac{DW}{dt}}\right\rangle = 0$. □

Proposizione 72 Il trasporto parallelo non dipende dalla parametrizzazione di α

Dimostrazione. Per β riparametrizzazione di α prendo h diffeomorfismo tra le coordinate, il campo parallelo trovato lungo β sarà $Z = W \circ h$ con W campo parallelo trovato lungo α □

*Esempio 14 (**trasporto parallelo su una sfera (Levi - Civita)**)* Trasporto parallelo lungo l'equatore e lungo gli altri paralleli della sfera. Il trasporto parallelo NON è invariante per omotopia

11.2.1 Isometrie e Trasporto parallelo

Proposizione 73 (invarianza per isometria tra superfici della derivata $\frac{DW}{dt}$) Dati $\alpha \colon I \to S$, V campo lungo αe $f \colon S \to S'$ isometria tra superfici, presi $\beta \coloneqq f \circ \alpha$ e $W(t) \coloneqq df_{\alpha(t)} V(t)$ V campo lungo β, vale

$$\frac{DW}{dt} = \frac{D}{dt} df_{\alpha(t)} V(t) = df_{\alpha(t)} \left(\frac{DV}{dt}\right)$$

Dimostrazione. Sviluppando $\frac{DW}{dt} = \left(w_k' + w_j \cdot u_i' \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha\right)\right) \cdot (X_k \circ \alpha)$ osservo che $\frac{DW}{dt}$ si comporta bene per isometria perché per isometria non variano Γ_{ij}^k e X_k. □

Osservazione In particolare V parallelo lungo $\alpha \iff W$ parallelo lungo β

Proposizione 74 (invarianza per isometria tra superfici del trasporto parallelo) Il trasporto parallelo commuta con le isometrie, ovvero $P_\beta \circ df = df \circ P_\alpha$ ed è commutativo

$$\begin{tikzcd} T_{\alpha(t_0)}S \arrow[r, "P_\alpha"] \arrow[d, "df_{\alpha(t_0)}"'] & T_{\alpha(t_1)}S \arrow[d, "df_{\alpha(t_1)}"] \\ T_{\beta(t_0)}S' \arrow[r, "P_\beta"] & T_{\beta(t_1)}S' \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Da 73 e nelle stesse notazioni, con V parallelo lungo α, $v \in T_{\alpha(0)}S$ e $\overline{v} = df_{(0)}(v)$, allora

$$P_\beta \overline{v} = W(t_1) = df_{\alpha(t_1)}(V(t_1)) = df_{\alpha(t)} P_\alpha v \qquad \Longrightarrow \qquad P_\beta \circ df_{\alpha(t_1)} = df_{\alpha(t_0)} \circ P_\alpha$$

□

11.3 Geodetiche

Definizione 11.5 (geodetica parametrizzata)**:** Curva $\alpha \colon I \to S$ tale che $\dot{\alpha} \colon I \to S$ campo parallelo lungo α, ovvero $\frac{D\dot{\alpha}}{dt} = [\ddot{\alpha}]^\top = 0$. In particolare quindi α geodetica $\iff \ddot{\alpha} \perp T_{\alpha(t)}S$ ovvero $\ddot{\alpha} = \lambda \cdot N(\alpha(t))$.

Osservazione $|\dot{\alpha}(t)|$ costante per α geodetica parametrizzata, siccome $\frac{d}{dt}\langle W, W\rangle = 2\left\langle \cancel{\frac{DW}{dt}}, W\right\rangle = 0$, per W campo parallelo lungo α

Teorema 35 Sia $\beta : J \to U \mid \beta(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ curva in U, sia $\alpha : J \to S$ curva tracciata, $\varphi : U \to S$ param. t.c. $\alpha(J) \subseteq \varphi(U)$. $\alpha(t) = \varphi \circ \beta = \varphi(u(t), v(t))$ con $u, v \in C^\infty(J)$. Allora:

$$\alpha \text{ è geodetica } \iff \begin{cases} \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}(E_u u'^2 + 2F_u u'v' G_u v'^2) = \frac{1}{2}(u', v') \begin{pmatrix} E_u & F_u \\ F_u & G_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}(E_v u'^2 + 2F_v u'v' G_v v'^2) = \frac{1}{2}(u', v') \begin{pmatrix} E_v & F_v \\ F_v & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \end{cases}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}\boldsymbol{\beta}') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}'^T \mathbf{M}_u \boldsymbol{\beta}' \\ \boldsymbol{\beta}'^T \mathbf{M}_v \boldsymbol{\beta}' \end{pmatrix}$$

Osservazione È un problema di cauchy e le eq. dipendono solo dalla **I** f.f. (geom. intrinseca)

Corollario 16 Fisso $p \in S$ superficie. Allora $\forall v \in T_p \quad \exists! \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \mid \begin{cases} \alpha(0) = p \\ \dot{\alpha}(0) = v \\ \alpha \text{ geodetica} \end{cases}$

Corollario 17 (immagine isometrica di una geodetica parametrizzata) Le isometrie mandano geodetiche in geodetiche, ovvero α geodetica su S, $f \colon S \to S'$ isometria tra superfici $\Rightarrow f \circ \alpha$ geodetica

Dimostrazione. Da 73, $\dot{\alpha}$ parallelo lungo $\alpha \Rightarrow df_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}) = W = \dot{\beta}$ parallelo lungo $f \circ \alpha = \beta$, ma dunque $\frac{D\dot{\beta}}{dt} \equiv 0$, $f \circ \alpha$ geodetica parametrizzata □

*Esempio 15 (**geodetiche sul cilindro**)* Rette verticali, circonferenze orizzontali, eliche. Infatti il piano è isometrico local. al cilindro e quelle appena citate sono le immagini di rette sul piano, che sono le sue uniche geodetiche.

Definizione 11.6 (triangolo geodetico)**:** Regione di superficie S delimitata da tre geodetiche.

Teorema 36 Presa $\alpha : J \to \mathbb{R}$ curva tracciata su S, se vale che $\forall t_0, t_1 \in J$ e $\forall \beta : L \to S$ curva tracciata t.c. $\begin{cases} \beta(s_0) = \alpha(t_0) \\ \beta(s_1) = \alpha(t_1) \end{cases}$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\|\dot{\beta}(\tau)\right\| d\tau \geq \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\alpha}(\tau)\| d\tau$$

$\Longrightarrow$ α geodetica.
Ovvero se tra due punti prendo la curva tracciata più corta, allora è geodetica.

Osservazione Non è vero il viceversa, infatti posso avere più geodetiche che collegano due punti (vedi cilindro)

12 Teorema di Gauss - Bonnet

12.1 Valore algebrico della derivata covariante e Curvatura geodetica

Sia $\overline{\cdot}: T_pS \to T_pS$ la rotazione di 90° in senso antiorario dei vettori tangenti in p a S orientata, ovvero $\overline{v} := N(p) \wedge v$. $\overline{\cdot}$ è un'isometria, $\langle \overline{v}, \overline{u} \rangle = \langle v, u \rangle$

Definizione 12.1 (valore algebrico della derivata covariante)**:** Preso X campo lungo α tangente a S orientata tale che $\|X\| \equiv 1$

$$\left[\frac{DX}{dt}(t)\right] := \left\langle \frac{DX}{dt}(t), \overline{X}(t) \right\rangle \qquad \text{con } \overline{X}(t) = N(\alpha(t)) \wedge X(t)$$

Osservazione Siccome vale $0 = \frac{d}{dt}\|X\|^2 = \frac{d}{dt}\langle X, X\rangle = 2\left\langle \frac{DX}{dt}, X\right\rangle = 0$, allora $\frac{DX}{dt} \perp X$ su $T_{\alpha(t)}S$ e perciò $\frac{DX}{dt} = \lambda \cdot \overline{X}$, e $\left\{N, X, \overline{X}\right\}$ base positiva.

Definizione 12.2 (curvatura geodetica)**:** Per $\alpha = \alpha(s)$ tracciata su s e $X = \dot{\alpha}$ ($\|\dot{\alpha}\| = 1$)

$$\kappa_g := \left[\frac{D\dot{\alpha}}{ds}\right]$$

Osservazione $\kappa_g = \left[\frac{D\dot{\alpha}}{dt}(t)\right] = \left\langle \frac{D\dot{\alpha}}{ds}, N \wedge \dot{\alpha}\right\rangle = \left\langle [\ddot{\alpha}]^{\top}, N \wedge \dot{\alpha}\right\rangle = \langle \ddot{\alpha}, N \wedge \dot{\alpha}\rangle$, e quindi ricordando $\kappa_n = \langle \ddot{\alpha}, N\rangle$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}^{\perp} + \ddot{\alpha}^{\top} \\ &= \langle \ddot{\alpha}, N\rangle + \langle \ddot{\alpha}, N \wedge \dot{\alpha}\rangle \\ &= \boxed{\kappa_n \boldsymbol{N} + \kappa_g (\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{\dot{\alpha}})} \qquad\qquad \|\ddot{\alpha}\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2\end{aligned}$$

dove $\begin{cases} \kappa_n = \text{curvatura normale } (\textbf{estrinseca}) \\ \kappa_g = \text{curvatura geodetica } (\textbf{intrinseca}) \end{cases}$

12.1.1 Angolo tra campi tangenti lungo una curva

Lemma 17 Prese $a, b \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ e φ_0, t_0 tali che $a^2 + b^2 \equiv 1$ e $\begin{matrix} a(t_0) = \cos\varphi_0 \\ b(t_0) = \sin\varphi_0 \end{matrix}$, allora $\exists \varphi \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ tale che $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e e $\begin{matrix} a \equiv \cos\varphi \\ b \equiv \sin\varphi \end{matrix}$

Dimostrazione. Se esistesse φ allora varrebbe $\varphi' = ab' - a'b$ (calcolando a' e b'), definisco allora

$$\varphi(t) := \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (ab' - a'b)(\tau)\, d\tau$$

e verifico che sia la φ cercata, ovvero tale che

$$F(t) = (a - \cos\varphi)^2 + (b - \sin\varphi)^2 = 2 - 2\Big(\overbrace{a\cos\varphi + b\sin\varphi}^{A}\Big) \equiv 0$$

Ciò è vero vero in quanto $F(t_0) = 0$ e $\frac{d}{dt}F \equiv 0$, dato che (ricordando $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow 2(aa' + bb') = 0$)

$$A' = a'\cos\varphi + b'\sin\varphi - a(ab' - a'b)\sin\varphi + b(ab' - a'b)\cos\varphi = [\ldots] = \big(\overset{=0}{1 - b^2 - a^2}\big)[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi] = 0$$

$\square$

Lemma 18 (angolo tra campi tangenti lungo una curva) Prese V, W campi lungo α tangente a S orientata tali che $\|V\| \equiv \|W\| \equiv 1$, allora $\exists \varphi \in C^{\infty}$ determinazione dell'angolo tra $V(t)$ e $W(t)$ (ossia considerando la base lungo α $\left\{V(t), \overline{V}(t)\right\}$ $\exists \varphi$ tale che $W(t) = \cos\varphi \cdot V + \sin\varphi \cdot \overline{V}$) per cui vale $\left[\frac{DW}{dt}\right] = \left[\frac{DV}{dt}\right] + \varphi$

Dimostrazione. Ricordando che $\frac{DV}{dt} = \lambda \cdot \overline{V} \implies \lambda := \left\langle \frac{DV}{dt}, \overline{V} \right\rangle$ e che $\frac{D\overline{V}}{dt} = \overline{\frac{DV}{dt}}$

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \left\langle \frac{DW}{dt}, \overline{W} \right\rangle = \left\langle \overset{\clubsuit}{\frac{dW}{dt}}, \overset{\heartsuit}{\overline{W}} \right\rangle = \varphi' \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cdot \left\langle \tfrac{DV}{dt}, \overline{V} \right\rangle + \varphi' \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot \left\langle \tfrac{D\overline{V}}{dt}, V \right\rangle = \varphi' + \left\langle \frac{DV}{dt}, \overline{V} \right\rangle$$

$$\clubsuit \to \tfrac{dW}{dt} = -\varphi' \sin\varphi \cdot V + \cos\varphi \cdot \tfrac{dV}{dt} + \varphi' \sin\varphi \cdot \overline{V} + \cos\varphi \cdot \tfrac{d\overline{V}}{dt} \qquad \heartsuit \to \overline{W} = \cos\varphi \cdot \overline{V} + \sin\varphi \cdot \overline{\overline{V}} = -\sin\varphi \cdot V + \cos\varphi \cdot \overline{V}$$

□

Proposizione 75 (angolo tra un campo tangente e e_1) e_1 e e_2 campi coordinati normalizzati per una parametrizzazione ortogonale φ compatibile con l'orientazione di S (vale dunque $e_2 = \overline{e_1}$), $\psi \in C^\infty$ determinazione dell'angolo tra W campo unitario lungo $\alpha(t) = \varphi(u_1(t), u_2(t))$ tangente a S e e_1 (ossia $W(t) = \cos\psi \cdot e_1 + \sin\psi \cdot e_2$), allora

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(u_2' \cdot \partial_1 G - u_1' \cdot \partial_2 E\right) + \psi'$$

Dimostrazione. Dal Lemma precedente calcolo $\left[\frac{De_1}{dt}\right]$ ($\spadesuit$ dalla scrittura in coordinate di $\frac{DX_1}{dt}$ (69) con componenti $w_1 \equiv 1$, $w_2 \equiv 0$)

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{De_1}{dt}, \overline{e_1} \right\rangle = \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle \overset{\diamondsuit}{=} \frac{1}{\sqrt{E}} \left\langle \frac{DX_1}{dt}, e_2 \right\rangle \overset{\spadesuit}{=} \frac{1}{\sqrt{E}}\left(u_i' \cdot \Gamma_{i1}^2(u_1, u_2)\right) \overset{\|X_2\| = \sqrt{G}}{\boxed{\langle X_2, e_2 \rangle}} =$$

$$= \sqrt{\frac{G}{E}}\left(u_1' \cdot \Gamma_{11}^2 + u_2' \cdot \Gamma_{21}^2\right) = \sqrt{\frac{G}{E}}\left(u_1' \cdot \frac{-\partial_2 E}{2G} + u_2' \cdot \frac{\partial_1 G}{2G}\right) = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(u_2' \cdot \partial_1 G - u_1' \cdot \partial_2 E\right)$$

$$\diamondsuit \to \frac{De_1}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot X_1\right) = \overset{\perp e_2}{\boxed{\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot X_1}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{DX_1}{dt}$$

$$\spadesuit \to \frac{DX_1}{dt} = \left(\overset{\equiv 1}{w_1} \cdot u_i' \cdot \left(\Gamma_{i1}^k \circ \alpha\right)\right) \cdot X_k \quad \text{prendo solo } k = 2 \text{ per componente } \parallel e_2$$

□

12.2 Curve regolari a tratti, chiuse e semplici e Regione poligonale semplice

Definizione 12.3 (angolo orientato)**:** $\theta := \varepsilon \cdot \arccos \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1||v_2|}$ con $v, u \in V$ vettori in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ piano euclideo orientato e $\varepsilon = \pm 1$ segno della base $\{u, v\}$ (se $u + v \neq 0$, altrimenti $\theta = \begin{cases} 0 & u, v \text{ stesso verso} \\ \text{N.D.} & u, v \text{ verso opposto} \end{cases}$)

Definizione 12.4 (curva parametrizzata su un compatto)**:** $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ per cui $\exists \tilde{\alpha} \in C^\infty\left((a - \varepsilon, b + \varepsilon), \mathbb{R}^3\right)$ (per semplicità parametrizzata naturalmente) tale che $\alpha = \tilde{\alpha}|_{[a,b]}$

Osservazione Una curva $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è regolare se restrizione di $\tilde{\alpha}$ regolare e quindi $\dot{\alpha} = \dot{\tilde{\alpha}}\Big|_{[a,b]}$

Definizione 12.5 (curva regolare a tratti)**:** $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ per cui $\exists a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = b$ tali che

(i) α continua (ii) $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ curva parametizzata regolare (iii) $\alpha(t_i)$ non punti di cuspide

Osservazione Per ogni punto $\alpha(t_i)$posso identificare due vettori tangenti

$$\dot{\alpha}\left(t_i^-\right) := \lim_{s \to t_i^-} \dot{\alpha}(s) \qquad \dot{\alpha}\left(t_i^+\right) := \lim_{s \to t_i^+} \dot{\alpha}(s)$$

In particolare $\alpha(t_i)$ di cuspide se $\dot{\alpha}\left(t_i^-\right)$ e $\dot{\alpha}\left(t_i^+\right)$ paralleli e di verso opposto. Sia dunque θ_i l'angolo orientato tra $\dot{\alpha}\left(t_i^-\right)$ e $\dot{\alpha}\left(t_i^+\right)$ detto *angolo esterno* (ben definito in quanto non punto di cuspide).

Definizione 12.6 (curva semplice e chiusa)**:** $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata tale che

(i) α continua (ii) $\alpha(a) = \alpha(b)$ (iii) $\alpha|_{[a,b)}$ iniettiva

Osservazione Sia θ_0 l'angolo orientato tra $\dot{\alpha}(b)$ e $\dot{\alpha}(a)$

Definizione 12.7 (regione poligonale semplice)**:** $R \subseteq S$ compatta tale che

1. R omeomorfa a D^2 e R° omeomorfa a $\left(D^2\right)^\circ$
2. ∂R è curva semplice e chiusa regolare a tratti senza cuspidi nemmeno in $\alpha(a) = \alpha(b)$

Definizione 12.8 (curva positivamente orientata)**:** $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ per cui $\exists R$ regione poligonale semplice in $\mathbb{R}^2$ tale che $\partial R = \alpha([a,b])$ e R rimane sulla sinistra, ovvero $\forall t \in [a,b]$ $\exists \lambda > 0$ t.c. $\alpha(t) + \lambda \overline{\dot{\alpha}}(t) \in R^\circ$

12.2.1 Teorema delle tangenti di Heinz Hopf

Teorema 37 (teorema delle tangenti di Heinz Hopf) Siano $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva semplice e chiusa regolare a tratti senza cuspidi, $\beta_i\colon (t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ le estensioni regolari dei tratti $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]} = \beta_i|_{[t_i,t_{i+1}]}$ e $\psi_i \in C^\infty$ determinazioni dell'angolo fra $\dot{\beta}_i$ e $e_1 = (1,0)$ (75). Allora

$$\sum_{i=0}^{N} \left[\psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)\right] + \sum_{i=0}^{N} \theta_i = \pm 2\pi$$

Il segno $\pm$ è concorde con l'orientazione di α ($+$ per α positivamente orientata)

12.3 Gauss - Bonnet locale

Teorema 38 (Gauss - Green) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $R \subseteq \Omega$ regione poligonale semplice con $\partial R = \alpha([a,b])$ semplice chiusa, regolare a tratti, e $P, Q \in C^\infty(\Omega)$. Allora

$$\iint_R (\partial_1 Q - \partial_2 P)\, du_1\, du_2 = \int_{\partial R} P\, du_1 + Q\, du_2 := \int_a^b \left[P(\alpha(t))\, u_1'(t) + Q(\alpha(t))\, u_2'(t)\right] dt$$

Teorema 39 (Gauss - Bonnet locale) Siano S superficie orientata, $\varphi\colon U \to S$ parametrizzazione ortogonale, $R \subseteq \varphi(U) \subseteq S$ regione poligonale semplice con $\partial R = \alpha([a,b])$ semplice chiusa e regolare a tratti ($\alpha(t) = \varphi(u_1(t), u_2(t))$), e θ_i angoli esterni nei vertici $\alpha(t_i)$. Allora

$$\iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_g(s)\, ds + \sum_{i=0}^{N} \theta_i = 2\pi$$

Dimostrazione. Siano $\psi_i \in C^\infty$ determinazioni dell'angolo fra $\dot{\alpha}_i$ e $e_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, allora dalla (75) vale che $\kappa_g(s) = \left[\frac{D\dot{\alpha}}{ds}\right] = \left[\frac{De_1}{ds}\right] + \dot{\psi}_i$ e quindi definito $A := \left[\frac{De_1}{ds}\right]$ si ha

$$\sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa_g(s)\, ds = \sum_{i=0}^{N} \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)\, ds + \psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)\right] = \int_a^b A(s)\, ds + \sum_{i=0}^{N} \left[\psi_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)\right] \overset{(37)}{=}$$

$$= \overset{\spadesuit}{\boxed{\int_a^b A(s)\, ds}} + 2\pi - \sum_{i=0}^{N} \theta_i = -\iint_R K\, d\sigma + 2\pi - \sum_{i=0}^{N} \theta_i$$

Sviluppando ora $A = \left[\frac{De_1}{ds}\right]$ come da (75) e ricordando lo sviluppo di K

$$A = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(u_2' \cdot \partial_1 G - u_1' \cdot \partial_2 E\right) \qquad K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\partial_1\left(\frac{\partial_1 G}{\sqrt{EG}}\right) + \partial_2\left(\frac{\partial_2 E}{\sqrt{EG}}\right)\right)$$

$$\spadesuit \to \int_a^b A(s)\, ds = \int_{\varphi^{-1}(\partial R)} \left[\frac{-\partial_2 E}{2\sqrt{EG}} u_1'(t) + \frac{\partial_1 G}{2\sqrt{EG}} u_2'(t)\right] ds = \text{(Gauss - Green)}$$

$$= \iint_{\varphi^{-1}(R)} \left[\partial_1\left(\frac{\partial_1 G}{2\sqrt{EG}}\right) + \partial_2\left(\frac{\partial_2 E}{2\sqrt{EG}}\right)\right] du\, dv = -\iint_{\varphi^{-1}(R)} K \cdot \overbrace{\boxed{\sqrt{EG}\, du\, dv}}^{= d\sigma \text{ per } F = 0} = -\iint_R K\, d\sigma$$

$\square$

Esempio 16 (***teorema di Gauss sul triangolo geodetico***) Se $R = T$ triangolo geodetico si ha $N = 2$, $\kappa_g \equiv 0$ e presi gli angoli interni $\alpha_i = \pi - \theta_i$, dal teorema di Gauss - Bonnet locale

$$\iint_R K\, d\sigma = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \pi$$

12.4 Triangolazioni

Teorema 40 (classificazione delle superfici) $\forall S$ superficie compatta e orientata è omeomorfa a un g-toro (toro con g buchi). $g \in \mathbb{N}$ è detto *genere* di S

Definizione 12.9 (regione poligonale)**:** $R \subseteq S$ compatta con S superficie orientata e $\partial R = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j$ con C_j curva semplice e chiusa regolare a tratti senza cuspidi e orientata in modo da tenere R a sinistra (cioè in senso antiorario per i bordi esterni e orario per gli interni

Definizione 12.10 (triangolazione)**:** $\mathcal{T} = \{T_i\}$ triangolazione di $R \subseteq S$ regione poligonale se $T_i \subseteq R$ omeomorfi al triangolo chiuso tali che $R = \bigcup_i T_i$ per $i \neq j$

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un lato in comune} \\ \text{un vertice in comune} \end{cases}$$

Quindi NO vertice che tocca lato, lati che si toccano ma paarzialmente (uno più corto), triangoli che si sovrappongono

Definizione 12.11 (caratteristica di Eulero - Poincaré)**:** Data S e $\mathcal{T}$ una sua triangolazione,

$$\chi(\mathcal{T}) = \overset{F}{\#\text{facce}} - \overset{L}{\#\text{lati}} + \overset{V}{\#\text{vertici}}$$

12.4.1 Teoremi sulle triangolazioni

Teorema 41 (esistenza di una triangolazione) $\forall R \subseteq S$ regione poligonale esiste sempre $\mathcal{T}$ triangolazione.

Teorema 42 (buona definizione di χ) $\forall R \subseteq S$ la caratteristica di Eulero - Poincaré $\chi(\mathcal{T})$ non dipende dalla triangolazione $\mathcal{T}$ ma solo da R.

Proposizione 76 (caratteristica di un g-toro) Per R g-toro vale $\chi(R) = (2 - 2g)$

Proposizione 77 (invarianza omologica di χ) $\chi(R)$ è invariante per omologia di R

12.5 Gauss - Bonnet globale

Teorema 43 (Gauss - Bonnet globale) Siano S superficie orientata, $R \subseteq S$ regione poligonale con $\partial R = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j$, e $\chi(R)$ caratteristica di Eulero - Poincaré. Allora

$$\iint_R K\, d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j} k_g(s)\, ds + \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\text{di } C_j}^{\text{ang. est.}} \theta_s \right) = 2\pi \cdot \chi(R)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^{F}$ triangolazione di R, l_{ji} lati orientati positivamente e θ_{js} angoli esterni di T_j , $\{P_1, \ldots, P_V\}$ vertici di $\mathcal{T}$, $\{\beta_{ti} = \pi - \alpha_{ti}\}_i$ angoli esterni nel vertice P_t, $h_t := \#\{\beta_{ti}\}_i$ e $q_t := \#\{\text{lati in } P_t\}$. Allora applicando Gauss - Bonnet locale ai T_j e sommando sui T_j ottengo

$$\iint_{T_j} K\, d\sigma + \sum_{i=1}^{3} \int_{l_{ji}} \kappa_g + \sum_{s=1}^{3} \theta_{js} = 2\pi \quad \overset{\sum_{j=1}^{F}}{\longrightarrow} \quad \overset{\iint_R K\, d\sigma}{\boxed{\sum_{j=1}^{F} \sum_{i=1}^{3} \iint_{T_j} K\, d\sigma}} + \overset{\heartsuit}{\boxed{\sum_{j=1}^{F} \sum_{i=1}^{3} \int_{l_{ji}} \kappa_g}} + \overset{\clubsuit}{\boxed{\sum_{j=1}^{F} \sum_{s=1}^{3} \theta_{js}}} = 2\pi \cdot F$$

$$\heartsuit \rightarrow \sum_{j=1}^{F}\sum_{i=1}^{3}\int_{l_{ji}}\kappa_g = \sum_{\substack{l \text{ lato} \\ \text{esterno}}}\int_l \kappa_g = \sum_{j=1}^{k}\int_{C_j} k_g(s)\ ds$$

siccome i lati interni vengono percorsi due volte in sensi opposti

$$\clubsuit \rightarrow \sum_{j=1}^{F}\sum_{s=1}^{3}\theta_{js} = \sum_{t=1}^{V}\sum_{i=1}^{h_t}\beta_{ti} = \sum_{t=1}^{V}(h_t\cdot\pi - \overset{\diamondsuit}{\boxed{\sum_{i=1}^{h_t}\alpha_{ti}}}) = \sum_{t=1}^{a}\Big(\overbrace{h_t-2}^{q_t-2}\Big)\pi + \sum_{t=a+1}^{V}\Big(\overbrace{h_t-1}^{q_t-2}\Big)\pi + \sum_{\text{di } \partial R}^{\text{ang. est.}}\sigma_s =$$

$$= \sum_{t=1}^{V}(q_t-2)\,\pi + \sum_{\text{di } \partial R}^{\text{ang. est.}}\sigma_s = \overset{2\cdot L}{\boxed{\sum_{t=1}^{V}q_t}}\cdot\pi - 2\pi\cdot V + \sum_{\text{di } \partial R}^{\text{ang. est.}}\sigma_s = 2\pi\cdot L - 2\pi\cdot V + \sum_{\text{di } \partial R}^{\text{ang. est.}}\sigma_s$$

$$\diamondsuit \rightarrow \sum_{i=1}^{h_t}\alpha_{ti} = \begin{cases} 2\pi & \text{per } P_t \text{ v. interno} \\ \pi & \text{per } P_t \text{ v. est. punto lisco di } \partial R \\ \pi-\theta_s & \text{per } P_t \text{ v. est. spigolo di } \partial R \end{cases},\quad h_t = \begin{cases} q_t & \text{per } P_t \text{ v. interno} \\ q_t - 1 & \text{per } P_t \text{ v. esterno} \end{cases}$$

$$\left(\iint_R K\,d\sigma\right) + \left(\sum_{j=1}^{k}\int_{C_j} k_g(s)\ ds\right) + \left(2\pi\cdot L - 2\pi\cdot V + \sum_{\text{di } \partial R}^{\text{ang. est.}}\sigma_s\right) = 2\pi\cdot F$$

□

Teorema 44 (Gauss - Bonnet globale per genere) Presa $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta e orientata e g genere di S vale

$$\iint_S K\,d\sigma = 2\pi\,(2-2g)$$

Corollario 18 Se $K > 0\ \forall p \in S$, allora $g = 0$ e S è omeomorfa allo 0-toro ovvero a S^1

Dimostrazione. $2-2g > 0 \Rightarrow g < 1 \Rightarrow g = 0$ □

Parte III
Recap

13 Geometria algebrica

13.1 Gruppi fondamentali

- $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \quad \longrightarrow$ vedi toro $T = S^1 \times S^1$
- $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y) \quad \longrightarrow$ vedi bouquet di due circonferenze $B = S^1 \vee S^1$

Gruppi Fondamentali				
S^1	$S^{n\geq 2}$	$T = S^1 \times S^1$	$\mathbb{R}^2 -$ retta	$\mathbb{R}^2 -$ circonferenza
$\mathbb{Z}$	$\{*\}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

$\frac{C_a * C_b}{\ll ab^{-1} \gg} \cong \mathbb{Z}$	$\frac{C_a * C_b}{\ll aba^{-1}b^{-1} \gg} \cong \mathbb{Z}^2$

14 Geometria differenziale

Geometria Intrinseca

$\mathbf{I}_p$ e (g_{ij}) Lunghezza vettori tangenti e curve su S Area regioni di S Curvatura Gaussiana

Geometria Estrinseca

Campo ortogonale N Operatore di Weingarten L_p $\mathbf{II}_p$ e (h_{ij})

Invarianti	Invarianti Topologici	Gruppo fondamentale	Dimensione	Invarianti intrinseche
Trasformazioni	Omeomorfismi	Equivalenza omotopica	Diffeomorfismi	Isomorfismi

14.1 Curve e curvature

Nome	Definizione	Formula
Curvatura (per curva)	$\kappa(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\|$	$\kappa(s(t)) = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$
Curvatura normale	$\kappa_n := \left\|\ddot{\alpha}(s)^{\perp}\right\|$	$\kappa_n := \kappa(0) \cdot \langle N(p), \boldsymbol{n}(0)\rangle = \kappa \cos\theta$ $\kappa_{\boldsymbol{v}}(p) = h_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle L_p \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$
Curvatura geodetica	$\kappa_g := \left\|\ddot{\alpha}(s)^{\top}\right\| = \left[\frac{D\dot{\alpha}}{ds}\right]$	$\ddot{\alpha}^{\top} = \langle \ddot{\alpha}, N \wedge \dot{\alpha}\rangle = k_g(N \wedge \dot{\alpha})$
Direzione asintotica Curva asintotica	$L \subset T_pS$ retta tale che $\forall \boldsymbol{v} \in L$ vale $\mathbf{II}_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ $C \subseteq S \mid \forall p \in C,\ \forall \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \in T_pC \subset T_pS:\quad \boldsymbol{v}$ dir. asin. $\iff [\ddot{\alpha}]^{\perp} = 0$	
Geodetica	$\alpha \mid \dot{\alpha}$ campo parall. lungo α $\iff [\ddot{\alpha}]^{\top} = 0$	
Sezione normale	$C = S \cap (p + H)$ con $v \in T_pS$ e $H = \text{span}(N(p), v)$	
Curvature principali Direzioni principali Linea di curvatura	k_1, k_2 autovalori di L_p autospazi di L_p $\alpha \mid \alpha'$ direz. di curvatura $\forall t$	
Curvatura Gaussiana	$K(p) = k_1 k_2 = \det L_p = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}}$	
Curvatura media	$H(p) = k_1 + k_2 = \text{Tr}(L_p)$	
Paralleli (sup. di rot.) Meridiani (sup. di rot.)	curva $u \mapsto \varphi_{\text{standard}}(u, v_0)$ curva $u \mapsto \varphi_{\text{standard}}(u_0, v)$	

Curvature (scalari $\in \mathbb{R}$)		**Direzioni** (rette $\in T_pS$)		**Curve** $\subset S$	
Curvatura	$\lVert \ddot\alpha(s) \rVert$	**Direzione:**		**Curva:**	$\forall p \in \alpha(s)$
– normale	$\lVert \ddot\alpha(s) \rVert^{\perp}$	(asintotica)		(asintotica)	$[\ddot\alpha]_p^{\perp} = \mathbf{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha) = 0$
– geodetica	$\lVert \ddot\alpha(s) \rVert^{\top}$			geodetica	$[\ddot\alpha]_p^{\top} = \left[\frac{D\dot\alpha}{ds}\right]_p = 0$
– principali	$k_1, k_2 \in \sigma(\mathbf{II}_p)$	principali	k_i-autospazio	principali (linee di curv.)	$\mathbf{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha) = k_i$
		asintotica	0-autosp (dim=1)	asintotica	$\mathbf{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha) = 0$
– gaussiana	$k_1 \cdot k_2 = \det(\mathbf{II}_p)$				
– media	$k_1 + k_2 = \mathrm{tr}(\mathbf{II}_p)$				
				paralleli	curva $\theta \mapsto \varphi(\theta, z_0)$
				meridiani	curva $z \mapsto \varphi(\theta_0, z)$

Legenda:

vale $\forall$ direzione iniziale in T_pS

riguarda la $\mathbf{II}_p$

riguarda ogni superficie di rotazione in parametrizzazione standard, ovvero: presa $\alpha\colon (a,b) \to C$ parametrizzazione di C $(\alpha = (z, f(z)))$,

$$\varphi\colon (0, 2\pi) \times (a,b) \to S \mid \varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} f(z)\cos\theta \\ f(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Ricordiamo:

- curva asintotica $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ linea di curvatura
- geodetica $\underset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ linea di curvatura
- paralleli/meridiani $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ geodetiche + linee di curvatura