Metodi II

Marco Ambrogio Bergamo

Anno 2024-2025

Indice

Parte I

Operatori su spazi di Hilbert

1 Preliminari

Definizione 1.1 (Distanza)**:** un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(i) (Non negatività) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$

(ii) (Definita positiva) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) (Simmetrica) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$

(iv) (Disugualianza triangolare) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$

Definizione 1.2 (Spazio metrico)**:** La coppia (X, d) dove X è un insieme e d è una distanza

$$\text{Definito: } d(x,y) \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad \text{Topologia: } \mathcal{T} := (A \subseteq V \mid \forall x \in A\ \exists r > 0 \text{ t.c. } \overbrace{\{y \in V \mid d(x,y) < r\}}^{B_r(x)} \subset A)$$

1.1 Sapzi di Banach

Definizione 1.3 (Norma)**:** Sia V un K-spazio vettoriale. È un'applicazione $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ tale che

(i) (Non negatività) $||x|| \geq 0 \quad \forall x \in V$

(ii) (Definita positiva) $||x|| = 0 \iff x = 0$

(iii) (Assoluta omogeneità) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \quad \forall \lambda \in K, x \in V$

(iv) (Disugualianza triangolare) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Definizione 1.4 (Spazio normato)**:** La coppia $(V, || \cdot ||)$ dove V è spazio vettoriale su un campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $|| \cdot ||$ è una norma.

$$\text{Definito: } ||x|| \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad d(x,y) := ||x - y|| \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad \text{Topologia}$$

*Esempio (p-**norme**)* Sia $p \in [1, \infty)$

$$\begin{array}{ll} \text{In } \mathbb{C}^n & \|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \text{In } C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) & \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

vediamo che

(i) dato dal valore assoluto $|\cdot|$

(ii) come prima

(iii) dato dal fattore $\frac{1}{p}$

(iv) dalla disuguaglianza $|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p$

Definizione 1.5 (Isometria)**:** Siano $(V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|')$ spazi normati, è $U : V \to W \mid \|v\| = \|U(v)\|' \quad \forall v \in V$.

Definizione 1.6 (Isomorfismo di spazi normati)**:** Siano $(V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|')$ spazi normati, è $U : V \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow W \mid \|v\| = \|U(v)\|' \quad \forall v \in V$ (biunivoca+isometria)

Definizione 1.7 (Spazio completo)**:** Spazio topologico in cui tutte le successioni di Cauchy convergono ad un elemento dello spazio.

Definizione 1.8 (Spazio di Banach)**:** È uno spazio normato (vettoriale con norma) **completo** rispetto alla metrica (indotta dalla norma).

*Esempio (**Spazio delle funzioni limitate (bounded)**)* $\mathcal{B}(E)$ l'insieme delle funzioni limitate $f: E \to \mathbb{R}$, con E insieme. Definiamo come norma di $f \in \mathcal{B}(E)$ la **norma uniforme (o sup norm)**:

$$||f||_\infty = \sup_E |f|$$

Tale spazio è completo (DIM) rispetto a questa norma
(Notare che la distanza indotta da tale norma è simile alla lagrangiana di ordine 1, qui abbiamo sup e non max).

Definizione 1.9 (Sottospazio denso)**:** $A \subset X$ (sp. topologico), A denso se $\overline{A} = X$, ovvero se A interseca ogni aperto non vuoto di X. In generale, se $A \subset B \subset X$ (sp. topologico): A è denso in B se $B \subset \overline{A}$

Definizione 1.10 (Completamento a uno spazio di Banach)**:** Sia $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato, allora lo è $\mathbb{B}(V)$ sapazio di Banach t.c. V è isometrico a un Sottospazio denso di $\mathbb{B}(V)$ tramite $J: V \hookrightarrow \mathbb{B}(V)$ iniettiva.

Teorema 1 (Esistenza e unicità del completamento). $(V, \|\cdot\|)$ spazio normato $\implies \exists!\, \mathbb{B}(V)$ Completamento a uno spazio di Banach a meno di Isomorfismo di spazi normati

1.2 Spazi di Hilbert

Definizione 1.11 (Prodotto interno hermitiano)**:** Un'applicazione $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to K$ tale che

(i) (Non negatività) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \in V$

(ii) (Definita positiva) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

(iii) (Linearità nella **seconda** componente) $\langle x, y+b\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, b\rangle, \quad \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(iv) (Simmetria coniugata) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Dalle ultime due deriva:

(v) (Linearità-coniugata nella **prima** componente) $\langle x+a, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle a, y\rangle, \quad \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$

Osservazione Questa def. è in ambito fisico (viene comoda poi con notazione di Dirac) In ambito matematico si definisce al contrario, ovvero linearità nella prima e linearità-coniugata nella seconda componente.

Definizione 1.12 (Spazio prehilbertiano/hermitiano)**:** La coppia $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ dove H è spazio vettoriale su un campo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) e $\langle \cdot,\cdot \rangle$ è prodotto interno hermitiano.

$$\text{Definito: } \langle x, y\rangle \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad ||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad d(x,y) := ||x-y|| \quad \xrightarrow{\text{Induce}} \quad \text{Topol.}$$

Teorema 2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz). (V, S) spazio hermitiano, allora vale

$$|S(v,w)|^2 \leq S(v,v)S(w,w) = \|v\|^2\|w\|^2 \quad \forall v, w \in V$$

ovvero

$$|S(v,w)| \leq \|v\|\|w\|$$

Dimostrazione. P. 8 □

Definizione 1.13 (Spazio ortogonale)**:** Sia $W \subseteq (V, S)$ spazio hermitiano, allora $W^\perp := \{v \in V \mid S(w,v) = 0,\ \forall w \in W\}$

Proposizione 1 (Regola del parallelogramma). (V, S) spazio hermitiano, vale

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

è estensione del teo di Pitagora dai triangoli (ipotesi di angolo retto) ai quadrilateri (ipotessi di parallelismo dei lati): somma dei quadrati cotrsuiti sulle diagonali è uguale alla somma dei quadrati costruiti su tutti i lati

Proposizione 2 (Identità di polarizzazione)**.** (V, S) spazio hermitiano, vale

$$S(v, w) = \frac{1}{4}\left[\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\left(\|v - iw\|^2 - \|v + iw\|^2\right)\right]$$

Teorema 3 (Identità di Parseval - Teo. Pitagora)**.** Sia $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ di Hilbert e $\mathfrak{b}$ una base di Hilbert. Allora

$$\|\psi\|^2 = \sum_{\varphi \in \mathfrak{b}} |(\varphi, \psi)|^2$$

Definizione 1.14 (Isometria)**:** Siano $(V, S), (V, S')$ spazi hermitiani, è $U : V \to V' \mid S'(U(v), U(w)) = S(v, w) \quad \forall v, w \in V$.

Definizione 1.15 (Operatore unitario)**:** (isomorfismo di spazi hermitiani) Siano $(V, S), (V, S')$ spazi hermitiani, è $U : V \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow V' \mid S'(U(v), U(w)) = S(v, w) \quad \forall v, w \in V$ (biunivoca+isometria)

Definizione 1.16 (Spazio di Hilbert/hilbertiano)**:** È uno spazio prehilbertiano (vettoriale con prodotto interno) **completo** rispetto alla metrica (indotta dalla norma indotta dal prodotto interno).

Osservazione Delle volte è facile trovare norme /distanze per le quali lo spazio è completo, ma difficile trovare l'espressione di un prodotto interno che induca tale norma.

Definizione 1.17 (Completamento a uno spazio di Hilbert)**:** Sia (V, S) spazio hermitiano, allora lo è $\mathbb{H}(V)$ sapazio di HIlbert t.c. V è **isometrico** a un Sottospazio denso di $\mathbb{H}(V)$ tramite $J : V \hookrightarrow \mathbb{H}(V)$ iniettiva.

Teorema 4 (Esistenza e unicità del completamento)**.** (V, S) spazio hermitiano $\implies \exists!\, \mathbb{H}(V)$ Completamento a uno spazio di Hilbert a meno di Operatore unitario

1.2.1 Riflessività degli spazi di Hilbert

`https://en.wikipedia.org/wiki/Reflexive_space`

Proposizione 3 . Siano $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert e $K \subseteq \mathcal{H}$ non vuoto. Valgono

(i) $K^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} \mid (\psi, \phi) = 0,\ \forall \phi \in K\}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$

(ii) $K^\perp = \langle K \rangle^\perp = \overline{\langle K \rangle}^\perp = \overline{\langle K \rangle}^\perp$

(iii) K chiuso $\implies \mathcal{H} = K \oplus K^\perp$

(iv) $(K^\perp)^\perp = \overline{K}$

Dimostrazione. Abbiamo

(i) Sia $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $K^\perp$ (ovvero $(\psi_n, \phi) = 0\ \forall n, \phi \in K$) con limite ψ, allora

$$\begin{cases} (\cdot,\cdot) \text{ bilineare} & \implies K^\perp \text{ sottospazio vettoriale} \\ \mathcal{H} \text{ completo} & \implies \psi \in \mathcal{H} \\ (\cdot,\cdot) \text{ continuo} & \implies (\psi, \phi) = 0 \end{cases} \qquad \implies \psi \in K^\perp \quad \forall \psi \text{ p.to limite di } K^\perp$$

p. 11 □

Corollario 1 . $K \subset \mathcal{H}$ denso in $\mathcal{H} \iff K^\perp = \{0\}$

Dimostrazione. Dai punti (ii) e (iv). □

Definizione 1.18 (Spazio duale)**:** Sia V un K-spazio vettoriale

$$V^* := \hom(V, K) = \{\varphi : V \to K \text{ lineare}\}$$

Quando V ha una topologia (banach, hilbert...) si intende $V^* := \hom(V, K) = \{\varphi : V \to K \text{ lineare e continua}\}$. È esso stesso uno spazio vettoriale con la usuale somma di funzioni e prodotto per scalare.

Definizione 1.19 (Spazio duale di un Hilbert)**:** $\mathcal{H}^* := \{\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \text{ lineare e continua}\}$

Proposizione 4 . $T : X \to Y$ lineare tra spazi normati, allora $\ker T$ chiuso $\iff$ T continuo

Dimostrazione. .

$\Longleftarrow$) $\ker T = T^{-1}(0)$ chiuso in quanto preimmagine di un chiuso tramite applicazione continua

$\square$

Teorema 5 (rappresentazione di Riesz)**.** $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ spazio di hilbert, allora

$$F \in \mathcal{H}' \implies \exists!\, \psi_F \in \mathcal{H} \mid F(\psi) = (\psi_F, \psi)$$

La mappa

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{H}^* & \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \mathcal{H} \\ & F & \mapsto & \psi_F \end{array}$$

è biettiva

Dimostrazione. Sia $F \in \mathcal{H}'$ come in ipotesi, ovvero $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ lineare e continua.

- Abbiamo
$$\begin{cases} F \text{ continua} \implies \ker F \text{ sottospazio chiuso} \\ \text{Teo sopra} \implies \mathcal{H} = \ker(F) \oplus \ker(F)^{\perp} \end{cases}$$
Se $\ker F = \mathcal{H}$ scegliamo $\psi_F = 0$ e abbiamo finito. Altrimenti
$$\boxed{\dim(\ker(F)^{\perp}) = 1}$$
Dim: intuitivamente poiché
$$\mathcal{H}/\ker F \cong \operatorname{Im}(F) = \mathbb{C}$$
ed essendo $\mathcal{H} = \ker(F) \oplus \ker(F)^{\perp} \implies \dim(\mathcal{H}) = \dim \ker F + \dim \ker(F)^{\perp}$ e $\dim(\mathcal{H}/\ker F) = \dim \ker F^{\perp}$.
Rigorosamente:
$$\begin{aligned} \begin{cases} \phi \in \ker(F)^{\perp} & \text{fissato} \\ \phi_1 \in \ker(F)^{\perp} & \text{qualunque} \end{cases} &\implies \phi_1 - \frac{F(\phi_1)}{F(\phi)}\phi \begin{array}{ll} \in \ker(F)^{\perp} & \text{in quanto } \ker(F)^{\perp} \text{ sottospazio} \\ \in \ker F & \text{per linearità di } F \end{array} \\ &\implies \phi_1 - \frac{F(\phi_1)}{F(\phi)}\phi = 0 \quad \text{poiché } \ker F \cap \ker(F)^{\perp} = \{0\} \\ &\implies \operatorname{span}(\phi) = \ker(F)^{\perp} \implies \dim \ker(F)^{\perp} = 1 \end{aligned}$$

- Scomponiamo un qualunque vettore di $\mathcal{H}$:
$$\begin{cases} \mathcal{H} = \ker\ F \oplus \ker F^{\perp} \\ \ker(F)^{\perp} = \operatorname{span}(\phi) \\ F \text{ lineare} \end{cases} \implies \begin{cases} \psi = \underbrace{\widetilde{\psi}}_{\in \ker F} + \underbrace{\widetilde{\phi}}_{\in \ker(F)^{\perp}} \\ \widetilde{\phi} = \frac{F(\widetilde{\phi})}{F(\phi)}\phi \\ F(\psi) = F(\widetilde{\psi}) + F(\widetilde{\phi}) = F(\widetilde{\phi}) \end{cases} \implies \psi = \widetilde{\psi} + \frac{F(\psi)}{F(\phi)}\phi$$

- **Esistenza:** ora, scelto e fissato un qualunque $\phi \in \ker(F)^{\perp}$, facciamo un'*ansatz* per la ψ_F:
$$\psi_F := \frac{\overline{F(\phi)}}{\|\phi\|^2}\phi$$
dove al numeratore è il complesso coniugato. Infatti
$$\begin{aligned} (\psi_F, \psi) &= \left(\frac{\overline{F(\phi)}}{\|\phi\|^2}\phi,\ \widetilde{\psi} + \frac{F(\psi)}{F(\phi)}\phi\right) \quad \text{sostituendo con cose sopra} \\ &= \frac{F(\phi)}{\|\phi\|^2}\cancel{(\phi, \widetilde{\psi})} + \left(\frac{\overline{F(\phi)}}{\|\phi\|^2}\phi,\ \frac{F(\psi)}{F(\phi)}\phi\right) \quad \text{bilin. e } \phi \perp \widetilde{\psi} \\ &= \frac{\cancel{F(\phi)}}{\cancel{\|\phi\|^2}}\frac{F(\psi)}{\cancel{F(\phi)}}\cancel{(\phi, \phi)} \quad \text{antilinearità nella prima componente} \\ &= F(\psi) \end{aligned}$$

- **Unicità:** Se ce ne fossero due:

$$\begin{cases} \psi_F^1 \in \mathcal{H} : F(\psi) = (\psi_F^1, \psi) \\ \psi_F^2 \in \mathcal{H} : F(\psi) = (\psi_F^2, \psi) \end{cases} \implies (\psi_F^1 - \psi_F^2, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \iff \psi_F^1 - \psi_F^2 = 0 \iff \psi_F^1 = \psi_F^2$$

- **Biunivocità di D:** quindi la mappa $D : F \mapsto \psi_F$ sopra definito è
  - Ben definita
  - Iniettiva: infatti $\ker D = \{F \in \mathcal{H}' : F(\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}\} = \{\underline{0}\}$ (mappa nulla)
  - Suriettiva: poiché $\forall \psi' \in \mathcal{H}$ possiamo definire $F_{\psi'} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ t.c. $F_{\psi'}(\psi) := (\psi', \psi)$

□

Corollario 2 ($\mathcal{H} \cong (\mathcal{H}^*)^*$). Ogni spazio di Hilbert è riflessivo, ovvero la mappa ($F \in \mathcal{H}^*$)

$$\begin{array}{cccc} J_F : & \mathcal{H} & \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & (\mathcal{H}^*)^* \\ & \psi & \mapsto & F(\psi) \end{array}$$

è un Operatore unitario, quindi $\mathcal{H} \cong (\mathcal{H}^*)^*$

Dimostrazione. p. 13 □

2 Operatori lineari limitati

Con **operatori** si intende generalmente le funzioni $X \to Y$ tra spazi vettoriali di funzioni (infinito-dimensionali). Usiamo un termine diverso da funzione poiché agiscono essi stessi su funzioni.

Definizione 2.1 (Operatori lineari e lineari continui)**:** Siano X, Y degli Spazio di Banach, allora indichiamo con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X,Y) &:= \{\text{operatori } X \to Y \text{ lineari}\} \\ \mathcal{B}(X,Y) &:= \{\text{operatori } X \to Y \text{ lineari e continui}\} \end{aligned}$$

Osservazione ***(Linearità e continuità)*** Siano X, Y spazi vettoriali normati.

(i) X **dimensione finita**: $T \in \mathcal{L}(X,Y) \implies$ continuo

(ii) X **dimensione infinita**: $T \in \mathcal{L}(X,Y) \not\Longrightarrow$ continuo.

Dimostrazione. Abbiamo

(i) Sia $(e_1, \dots, e_n)$ base finita di X. Abbiamo $\begin{cases} T \text{ lineare} & \implies T(x) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \\ \text{base finita} & \implies M := \sup_i \{\|f(e_i)\|\} \text{ ben def.} \end{cases}$ e quindi

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| && \text{(linearità)} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| && \text{(disug. triang.)} \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |x_i| && (M \text{ ben def.}) \\ &\leq M(C\|x\|) && (\text{per qualche } C > 0) \end{aligned}$$

e quindi T è limitato (+lineare) $\iff$ continuo.

(ii) Facili da costruire controesempi in **spazi non completi** (ma ci sono anche in spazi completi): prendendo una successione di Cauchy senza limite $\{e_i\}$ di vettori l.i. e vediamo che $\frac{\|T(e_i)\|}{\|e_i\|} \to \infty$ (in un certo senso l'operatore lineare non è continuo perché lo spazio ha "buchi"). Per esempio prendiamo

$$\begin{cases} X = (C^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) & \text{ovvero } \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \\ T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \mid T(f) := f'(0) & \text{derivata calcolata in 0 (lineare)} \end{cases}$$

prendiamo allora una successione di Cauchy non convergente in X

$$\begin{cases} f_n(x) := \frac{1}{n} \sin\left(n^2 x\right) & \xrightarrow{\text{unif.}} 0 \\ T(f_n) = \frac{n^2 \cos\left(n^2 \cdot 0\right)}{n} = n & \longrightarrow +\infty \quad \text{ma } T(0) = 0 \end{cases}$$

□

Definizione 2.2 (Spazio duale)**:** Sia X di Banach.

algebrico	$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$
topologico/continuo	$X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$

Definizione 2.3 (Norma di un operatore)**:** $\|T\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$

Proposizione 5 . $\|T(v)\| \leq \|T\| \|v\|$

Proposizione 6 (Norma di un operatore lineare)**.** $\|T\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \overset{\text{lin.}}{=} \sup_{v : \|v\| = 1} \|T(v)\|$

Teorema 6 . Siano X, Y sp. vett. normati e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Allora $\forall v \in X$

$$\exists K \in \mathbb{R} : \|T(v)\|_Y \leq K\|v\|_X \iff \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_Y}{\|v\|_X} < \infty$$

Dimostrazione. .

$\implies$) allora $\frac{\|T(v)\|_Y}{K\|v\|_X} \leq K < \infty$. Prendere il sup del primo termine.

$\impliedby$) prendere $K = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(v)\|_Y}{\|v\|_X}$

□

Definizione 2.4 (Operatore lineare limitato)**:** $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sp. normati è limitato se vale una delle due condizioni del teo. sopra, ovvero se $\|T\| < \infty$

Esempio Abbiamo (p. 17)

- **Operatore moltiplicazione:**
- **Operatore parità:**

Proposizione 7 . T isometria $\implies$ T limitato

*Osservazione (**Linearità e limitatezza**)* Siano X, Y spazi vettoriali normati.

(i) X **dimensione finita**: $T \in \mathcal{L}(X,Y) \implies$ limitato

(ii) X **dimensione infinita**: $T \in \mathcal{L}(X,Y) \not\Longrightarrow$ limitato.

dim. come prima

Teorema 7 (Equiv. continuo-limitato per i lineari)**.** Sia $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sp. normati. Allora sono equivalenti

$$T \text{ continuo in } 0 \iff T \text{ continuo} \iff T \text{ limitato}$$

Dimostrazione. p. 15

1 $\implies$ 2) Sia T lineare in 0

$$\lim_{v \to v'} T(v) - T(v') \overset{\text{lin}}{=} \lim_{v \to v'} T(v - v') = \lim_{w \to 0} T(w) \overset{\text{ip}}{=} 0$$

con $w := v - v'$. Quindi

$$\lim_{v \to v'} T(v) = T(v') \iff T \text{ continuo}$$

2 $\implies$ 3) Fissiamo $v, w \in X$. T continuo $\implies$ T continuo in 0, quindi

$$\begin{cases} \exists \delta > 0 : \|v\| < \delta \wedge \|T(v)\| < 1 \\ \text{sia } \delta' : 0 < \delta' < \delta \\ v' := \delta' \frac{w}{\|w\|} \implies \|v'\| = \delta' < \delta \end{cases} \implies \|T(v')\| = \delta' \frac{\|T(w)\|}{\|w\|} < 1$$

$$\implies \|T(w)\| < \frac{\|w\|}{\delta'}$$

3 $\implies$ 1) T limitato $\iff \exists K : \|T(v)\| \leq K\|v\| \implies \lim_{v \to 0} T(v) = 0$

□

Proposizione 8 (Proprietà norma operatoriale)**.** X, Y spazi normati. Allora

(i) $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{\text{operat.}})$ è spazio vettoriale normato

(ii) Y di Banach $\implies \mathcal{B}(X,Y)$ di Banach

(iii) $\|\mathbb{I}\| = 1$

(iv) $\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad \forall S \in \mathcal{B}(Y,Z), T \in \mathcal{B}(X,Y)$

Teorema 8 (Esistenza e unicità dell'estensione al completamento). Sia X normato, Y Banach, $W \subset X$ denso. Allora

$$T \in \mathcal{B}(\overset{\subset X}{W}, \overset{Banach}{Y}) \implies \exists! \quad \widetilde{T} \in \mathcal{B}(X,Y) \text{ t.c. } \begin{cases} \widetilde{T}|_W = T \\ \left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\| \end{cases}$$

ovvero un operatore lineare continuo/limitato è determinato da cosa fa sui sottoinsiemi densi.

Dimostrazione. p. 16

- **Esistenza:** Abbiamo

$$\begin{aligned} \forall x \in X &\implies \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W : \lim_{n\to\infty} x_n = x && W \text{ denso in } X \\ &\implies \exists K > 0 : \|T(x_n) - T(x_m)\| \leq K\|x_n - x_m\| && T \text{ limitato} \\ &\implies \{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ di Cauchy} && \{x_n\} \text{ di Cauchy} \\ &\implies \begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} T(x_n) := \widetilde{T}x \\ \text{tale lim non dipende da } \{x_n\}_n \end{cases} && Y \text{ di Banach, } \|\cdot\| \text{ continuo} \end{aligned}$$

  Quindi abbiamo per costruzione

$$\begin{cases} \widetilde{T}|_W = T \quad \text{(prendere succ. costante)} \\ \widetilde{T} \text{ lineare} \\ T \in \mathcal{B}(W,Y) \implies \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq K \overset{n\to\infty}{\implies} \left\|\widetilde{T}\right\| \leq K \implies \widetilde{T} \in \mathcal{B}(X,Y) \end{cases}$$

- **Unicità:** Supponiamo esista U con le stesse proprietà di $\widetilde{T}$

$$\begin{aligned} W \supset \{x_n\}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X &\implies \widetilde{T}(x_n) = T(x_n) = U(x_n) && \text{uguali sulla restrizione} \\ &\implies (\widetilde{T} - U)(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} && \text{e converge a } 0 \in Y \\ &\implies (\widetilde{T} - U)(x) = 0 \\ &\implies \widetilde{T} = U \end{aligned}$$

- **Norma:**
  - $\underline{\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|}$: sia $\{x_n\}_n$ come sopra.

$$\left\|\widetilde{T}(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\widetilde{T}(x_n)\right\| \leq \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T\|\|x\| \implies \frac{\left\|\widetilde{T}(x)\right\|}{\|x\|} = \left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\|$$

  - $\underline{\left\|\widetilde{T}\right\| \geq \|T\|}$:

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\left\|\widetilde{T}(x)\right\|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in W\setminus\{0\}} \frac{\left\|\widetilde{T}(x)\right\|}{\|x\|} \overset{\widetilde{T}|_W = T}{=} \|T\|$$

□

Osservazione È importante perché l'**evoluzione nel tempo** di un sistema dinamico (eq. di Schrödinger) e le **simmetrie continue** (rotazioni, traslazioni ecc) sono descritte tramite operatori unitari su sp. di Hilb. definiti però solo su sottospazi densi.

2.1 Operatore aggiunto

Definizione 2.5 (Operatore aggiunto/coniugato (Hermitiano))**:** Siano $(\mathcal{H}_1, (\cdot,\cdot)_1)$ e $(\mathcal{H}_2, (\cdot,\cdot)_2)$ spazi di Hilb. e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Allora il suo aggiunto è

$$T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \mid (\phi, T\psi)_2 = (T^*\phi, \psi)_1 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_2, \psi \in \mathcal{H}_1$$

Proposizione 9 (Esistenza e unicità dell'aggiunto). Siano $(\mathcal{H}_1, (\cdot,\cdot)_1)$ e $(\mathcal{H}_2, (\cdot,\cdot)_2)$ spazi di Hilb.

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \implies \exists!\, T^*$$

Dimostrazione. Alcuni preliminari per l'esistenza, poi esistenza e unicità

- Dimostriamo che fissato $\phi \in \mathcal{H}_2$

$$f_\phi(\psi) := (\phi, T\psi)_2 \quad \underline{\in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C})}$$

  - Lineare: dalla bilinearità di $(\cdot,\cdot)$
  - Limitata: dalla Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|f_\phi(\psi)| = |(\phi, T\psi)_2| \le \|\phi\|_2 \|T\psi\|_2 \overset{T\in\mathcal{B}}{\le} \|\phi\|_2 \|T\| \|\psi\|_1 \implies \frac{|f_\phi(\psi)|}{\|\psi\|_1} \le \underbrace{\|T\|\|\phi\|_2}_{\text{costante}} \implies f_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C})$$

  - Rappresentazione di Riesz: essendo $f_\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathbb{C})$, tramite il rappresentazione di Riesz

$$\exists \Psi_\phi \in \mathcal{H}_2 : \quad f_\phi(\psi) = (\phi, T\psi)_2 = (\Psi_\phi . \psi)_1 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

- Abbiamo, grazie alla bilinearità del prod. int.:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_2 & \to & \mathcal{H}_1' \\ \phi & \mapsto & f_\phi \end{array} \quad \text{lineare} \implies \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_2 & \to & \mathcal{H}_1 \\ \phi & \mapsto & \Psi_\phi \end{array} \quad \text{lineare}$$

- **Esistenza:** definiamolo come

$$T^*(\phi) := \Psi_\phi$$

  Infatti $\forall \psi \in \mathcal{H}_1$:

$$(T^*(\phi), \psi)_1 = (\Psi_\phi, \psi)_1 = (\phi, T\psi)_2 \quad \checkmark$$

- **Unicità:** supponiamo che ne esista un altro

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}:1, \mathcal{H}_2) \mid (K(\phi), \psi)_1 = (\phi, T\psi)_2 &\implies (K(\phi), \psi)_1 = (T^*(\phi, \psi)_1) \\ &\implies ((K - T^*)(\phi), \psi)_1 = 0 \\ &\overset{\psi = (K-T^*)(\phi)}{\implies} ((K - T^*)(\phi), (K - T^*)(\phi))_1 = \|(K - T^*)(\phi)\|_1 = 0 \\ &\implies (K - T^*)(\phi) = 0 \quad \forall \phi \\ &\implies K = T^* \end{aligned}$$

□

Definizione 2.6 (Mappa aggiunzione)**:** È la mappa

$$\begin{array}{cccc} * : & \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) & \to & \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) \\ & T & \mapsto & T^* \end{array}$$

Proposizione 10 (Proprietà mappa aggiunzione). La Mappa aggiunzione su $\underline{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$ è

(i) **Antilineare/lineare-coniugata**: $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \text{(additività)} \\ f(sx) = \overline{s} f(x) & \text{(omogeneità coniugata)} \end{cases}$

(ii) **Involutiva**: $(T^*)^*$

Dimostrazione. p. 21 □

Proposizione 11 (Proprietà aggiunto). Abbiamo

(i) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \implies T^*$ limitato con $\|T^*\| = \|T\|$

(ii) $\|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*T\|$

(iii) $(TS)^* = S^*T^*$

(iv) $\begin{cases} \ker(T) = [\operatorname{ran}(T^*)]^\perp \\ \ker(T^*) = [\operatorname{ran}(T)]^\perp \end{cases}$

(v) T biunivoca $\iff$ T^* biunivoca. In questo caso $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Dimostrazione. Abbiamo

(i) Applicando la Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|(T^*\phi, \psi)_1| = |(\phi, T\psi)_2| \leq \|\phi\|_2 \|T(\psi)\|_2 \leq \|\phi\|_2 \|T\| \|\psi\|_1$$

scegliendo $\psi = T^*\phi$ otteniamo

$$\|T^*\phi\|_1^2 \leq \|\phi\|_2 \|T\| \|T^*\phi\|_1 \implies \|T^*\phi\|_1 \leq \|T\| \|\phi\|_2 \implies \|T^*\| \leq \|T\|$$

Quindi $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Ora basta scambiare i ruoli di T e T^* per dimostrare che $\|T^*\| \geq \|T\|$ e quindi $\|T^*\| = \|T\|$

(ii)

(iii)

(iv) La prima:

$$\psi \in \ker T \iff T\psi = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_2 \iff 0 = (\phi, T\psi)_2 = (T^*\phi, \psi)_1 \iff \psi \in [\mathrm{ran}(T^*)]^\perp$$

(v)

□

2.1.1 Altre proprietà

Definizione 2.7 (Zoologia di operatori (limitati))**:** Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$:

- **Isometrico:** se $(T\psi, T\phi)' = (\psi, \phi) \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$
- **Positivo:** se $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ (poiché lavoriamo sulla forma quadratica) e $(\psi, T\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$.

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$:

- **Normale:** se $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ e $TT^* = T^*T$ (commuta con l'aggiunto)
- **Autoaggiunto:** se $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ e $T = T^*$ (uguale all'aggiunto), ovvero $(\psi, T\psi) = (T\psi, \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$
- **Unitario:** se isometrico + (limitato) + suriettivo (ovvero è **isomorfismo di spazi di Hilbert**)

Proposizione 12 . Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, abbiamo

$$\text{isometrico} \iff \begin{cases} \text{limitato} \\ T^*T = \mathbb{I} \end{cases}$$

$$\text{unitario} \iff \begin{cases} \text{limitato} \\ T^*T = \mathbb{I} \\ TT^* = \mathbb{I}' \end{cases}$$

Definizione 2.8 (Operatore positivo e ordinamento di operatori)**:** $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Diciamo

$$\begin{aligned} T \geq 0 &\iff (\psi, T\psi) \geq 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \quad \text{(forma quadratica semidefinita positiva)} \\ T \geq U &\iff T - U \geq 0 \end{aligned}$$

NB: essendo forma quadratica T deve essere **endomorfismo**.

Lemma 1 (norma con forma quadratica). Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoaggiunto vale Abbiamo

$$\boxed{\|T\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H} | \|\psi\| = 1} \{|(\psi, T\psi)|\}}$$

In generale

$$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \text{(lineare) t.c.} \begin{cases} (\psi, T\psi) = (T\psi, \psi) \; \forall \psi \in \mathcal{H} & \text{"autoaggiunto"} \\ \sup_{\psi \in \mathcal{H} | \|\psi\| = 1} \{\|(\psi, T\psi)\|\} & \text{finito} \end{cases} \implies T \text{ limitato}$$

Lemma 2 . Se $\mathcal{H}$ è **complesso**, $\geq$ definito sopra è un ordine parziale in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se non è complesso non può esserlo.

Proposizione 13 . $\mathcal{H}$ di dimensione finita, allora operatore isometrico $\implies$ unitario

Definizione 2.9 (Autovettore, autovalore)**:** V complesso e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se $T(v) = \lambda v$ per $\lambda \in \mathbb{C}, v \in V \setminus \{0\}$ allora λ autovalore e v autovettore. $W_\lambda \subseteq V$ span degli autovalori relativi a λ è detto autospazio.

Proposizione 14 (Prop. operatori normali). Sia $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se è **normale** valgono:

(i) $\|T\psi\| = \|T^*\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$ (T e l'aggiunto hanno stessa norma)

(ii) $\begin{cases} \ker(T) = \ker(T^*) \\ \overline{\operatorname{ran}(T)} = \overline{\operatorname{ran}(T^*)} \end{cases}$

(iii) ψ è λ-autovettore di $T^* \iff \psi$ è $\overline{\lambda}$-autovettore di T^*

(iv) $\lambda \neq \lambda'$ autovalori $\implies W_\lambda \perp W_{\lambda'}$

Dimostrazione. Abbiamo

(i) Se T normale:

$$\|T\psi\|^2 = (T\psi, T\psi) = (T^*Tpsi, \psi) = (TT^*\psi, \psi) = (T^*\psi, T^*\psi) = \|T^*\psi\|^2$$

(ii) Dalle ugualianze sopra si vede che $\psi \in \ker T \iff \psi \in \ker T^*$, quidni $\ker T = \ker T^*$. Questo implica da Proprietà aggiunto che $[\operatorname{ran}(T^*)]^\perp = [\operatorname{ran}(T)]^\perp \iff \overline{\operatorname{ran}(T^*)} = \overline{\operatorname{ran}(T)}$

(iii) Consideriamo l'operatore $(T - \lambda \mathbb{I})$. Abbiamo

$$\begin{cases} (T - \lambda \mathbb{I})^* = T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I} & \text{Proprietà mappa aggiunzione } * \text{ è antilineare} \\ \|(T - \lambda \mathbb{I})\psi\| = \left\|(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})\psi\right\| & (T - \lambda \mathbb{I}) \text{ normale se } T \text{ normale (verificare)} \end{cases}$$

quindi $(T - \lambda \mathbb{I})\psi = 0 \iff (T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})\psi = 0$

(iv) Siano $\lambda \neq \lambda' \in \mathbb{C}$ autovalori di $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$ autovettori. Allora

$$\lambda(\psi', \psi) = (\psi', T\psi) = (T^*\psi', \psi) \overset{iii)}{=} (\overline{\lambda'}\psi', \psi) = \overline{\lambda'}(\psi', \psi) \overset{\lambda \neq \lambda'}{\iff} (\psi', \psi) = 0$$

□

Corollario 3 (proprietà varie). Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, allora valgono

(i) $T \geq 0 \implies \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}^+$

(ii) T limitato e autoaggiunto $\implies \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$

(iii) T isometrico $\implies |\lambda| = 1$

Dimostrazione. Sia $\psi \in \mathcal{H}$ un λ-autovettore di T, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) Allora

$$0 \leq (\psi, T\psi) = \lambda(\psi, \psi) = \lambda\|\psi\|^2 \iff \lambda \in \mathbb{R}^+$$

(ii) Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e autoaggiunto, da iii) di Prop. operatori normali:

$$\lambda(\psi, \psi) = (\psi, T\psi) = (T\psi, \psi) = \overline{\lambda}(\psi, \psi) \iff \lambda = \overline{\lambda} \iff \lambda \in \mathbb{R}$$

(iii) Se T isometrico:

$$|\lambda|^2(\psi, \psi) = (T\psi, T\psi) = (\psi, \psi) \overset{\psi \neq 0}{\iff} |\lambda| = 1$$

□

Proposizione 15 (Condizioni sufficienti per essere autoaggiunto). Valgono

(i) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid (\psi', T\psi) = (T\psi', \psi) \quad \forall \psi, \psi' \in \mathcal{H} \implies T$ limitato e autoaggiunto

(ii) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid (\psi, T\psi) = (T\psi, \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \implies T$ autoaggiunto

(iii) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid T \geq 0 \implies T$ autoaggiunto

Dimostrazione. iii) dalla proprietà del prodotto interno $(a, b) = \overline{(b, a)}$ e dal fatto che $(\psi, T\psi) \in \mathbb{R}$ (essendo ≥ 0):

$$(\psi, T\psi) \overset{(\cdot,\cdot)}{=} \overline{(T\psi, \psi)} \overset{\geq 0 \in \mathbb{R}}{=} (T\psi, \psi)$$

□

2.1.2 Proiettori ortogonali

Definizione 2.10 (Proiettore ortogonale)**:** $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \begin{cases} P^2 = P & \text{(idempotente)} \\ P^* = P & \text{(autoaggiunto)} \end{cases}$

Lemma 3 . P Proiettore ortogonale $\implies P$ positivo $(P \geq 0)$

Dimostrazione. $(\psi, P\psi) = (\psi, P^2\psi) = (P^*\psi, P\psi) = (P\psi, P\psi) = \|P\psi\|^2 \geq 0 \overset{P \in \mathcal{B}}{\implies} P \geq 0$ □

Teorema 9 (proprietà proiettori). Sia $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Proiettore ortogonale e $W \coloneqq P[\mathcal{H}]$ la proiezione di tutto lo spazio (immagine di P). Allora

(i) $Q \coloneqq \mathbb{I} - P$ è un Proiettore ortogonale.

(ii) $Q(\mathcal{H}) = W^\perp$ e $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$

(iii) $\|\psi - P(\psi)\| =| \{\|\psi - \psi'\| : \psi' \in W\} \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$

(iv) Sia $e_{i \in I}$ una base di W, allora $P(\cdot) = s - \sum_{i \in I} e_i(e_i, \cdot)$

(v) $\mathbb{I} \geq P$

(vi) $P \neq 0 \implies \|P\| = 1$

Dimostrazione. Abbiamo

(i) Abbiamo

$$\begin{cases} Q^2 = (\mathbb{I} - P)^2 = \mathbb{I} + P^2 - 2P = \mathbb{I} - P = Q \\ Q^* = (\mathbb{I} - P)^* = \mathbb{I}^* - P^* = \mathbb{I} - P = Q \end{cases} \implies Q \text{ proiett. ortog.}$$

(ii) Abbiamo

- $\underline{Q(\mathcal{H}) \subseteq W^\perp}$:

$$\psi' \in Q(\mathcal{H}) \iff \psi' = Q(\widetilde{\psi}) \quad \widetilde{\psi} \in \mathcal{H}$$

$$\implies (\psi, \psi') = (\psi, Q\widetilde{\psi}) \overset{Q\text{autoagg.}}{=} (Q\psi, \widetilde{\psi}) = (\psi - \overbrace{P\psi}^{=\psi}, \widetilde{\psi}) = 0 \quad \forall \psi \in W = \operatorname{ran} P$$
$$\iff \psi' \in W^\perp$$

- $\underline{W \text{ chiuso}}$: Sia

$$\begin{aligned} \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \{P\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W \text{ di cauchy/converg} &\implies \lim_{n\to\infty} P(\psi_n) = \Psi \\ &\implies P(\lim_{n\to\infty} P(\psi_n)) = P(\Psi) \\ &\implies \lim_{n\to\infty} P(\psi_n) = P(\Psi) \quad \text{poiché } P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ e } P^2 = P \\ &\implies \Psi = P(\Psi) \\ &\iff \Psi \in W \end{aligned}$$

- $\underline{W \cap Q(\mathcal{H}) = \emptyset}$: serve per dire che la decomposizione di $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\psi = P(\psi) + Q(\psi) \in W \oplus Q(\mathcal{H})$$

è unica. Infatti

$$\phi \in W \cap Q(\mathcal{H}) \implies \begin{cases} \phi = P\phi \\ \phi = Q\phi \end{cases} \implies \phi + \phi = \overbrace{(Q+P)}^{=\mathbb{I}}\phi \implies 2\phi = \phi \implies \phi = 0$$

- $\underline{Q(\mathcal{H}) = W^\perp}$: infatti

$$\begin{cases} W \text{ chiuso} \\ W \cap Q(\mathcal{H}) = \emptyset \end{cases} \implies \mathcal{H} = W \oplus \overset{\subseteq W^\perp}{Q(\mathcal{H})} \overset{\mathcal{H}=W\oplus W^\perp}{\implies} Q(\mathcal{H}) = W^\perp \quad \text{per unicità scomposizione}$$

(iii) NO

(iv) NO

(v) $\mathbb{I} \geq P \iff \mathbb{I} - P = Q \geq 0$. Infatti $\forall \psi \in \mathcal{H}$

$$0 \leq \|Q\psi\|^2 = (Q\psi, Q\psi) = (\psi, Q^2\psi) = (\psi, Q\psi) \iff Q \geq 0$$

(vi) da sopra

$$0 \leq (\psi, Q\psi) \overset{Q=\mathbb{I}-P}{=} \|\psi\|^2 - (\psi, P\psi) = \|\psi\|^2 - \|P\psi\|^2 \implies \frac{\|P(\psi)\|}{\|\psi\|} \leq 1 \iff \|P\| \leq 1$$

Se $P \neq 0 \implies W \neq \{0\}$ e quindi continiene un vettore di norma unitaria essendo sottospazio. Su tale $\psi : \|P\psi\| = 1 \implies \|P\| = 1$

□

Proposizione 16 (ortogonalità dei proiettori). Sia $W \subset \mathcal{H}$ sottospazio chiuso, siano $\begin{cases} P : \mathcal{H} \to W \\ Q : \mathcal{H} \to W^\perp \end{cases}$ i

Proiettore ortogonale associati $\implies P, Q$ ortogonali

Dimostrazione. p. 29 □

2.2 Radice di operatori positivi

Definizione 2.11 (radice (positiva) quadrata di un operatore)**:** $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è radice quadra di $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se $A = B^2$. Inoltre se $B \geq 0$ è chiamato radice positiva, in tal caso scriviamo $B = \sqrt{A}$

Teorema 10 (esistenza e unicità della radice). Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ positivo $\implies \exists! \sqrt{A}$ tale che

(a) commuta con ogni operatore limitato su $\mathcal{H}$

(b) A biettiva $\implies \sqrt{A}$ biettiva

Definizione 2.12 (modulo di un operatore)**:** Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, il suo modulo è

$$|A| := \sqrt{A^*A}$$

che è limitato, positivo e autoaggiunto

Corollario 4 (proprietà del modulo). Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, allora

(a) $\ker(|A|) = \ker(A)$

(b) $\overline{\operatorname{ran}(|A|)} = (\ker(A))^\perp$

Dimostrazione. .

a) per $\psi \in \mathcal{H}$ vale:

$$\||A|\psi\|^2 = (|A|\psi, |A|\psi) \overset{|A|\text{autoagg.}}{=} (\psi, |A|^2\psi) = (\psi, A^*A\psi) = (A\psi, A\psi) = \|A\psi\|^2 \tag{1}$$

e quindi $|A|\psi = 0 \iff A\psi = 0$.

b) sappiamo

$$\begin{cases} \overline{\text{ran}(|A|)} = ((\text{ran}(|A|))^\perp)^\perp \\ (\text{ran}(|A|))^\perp = \ker(|A|). \end{cases}$$

infatti

$$\begin{aligned} \psi \in (\text{ran}(|A|))^\perp &\implies 0 = (\psi, |A|\psi') = (|A|\psi, \psi') \quad \forall \psi' \in \mathcal{H} \\ &\implies \psi \in \ker(|A|) \end{aligned}$$

funziona anche il contrario, quindi $\overline{\text{ran}(|A|)} = (\ker(|A|))^\perp$. Unendo con punto uno si ha la tesi.

$\square$

Teorema 11 (Decomposizione polare)**.** Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \implies \exists!\, P, U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tali che

$$A = UP \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} P \geq 0 & \text{"modulo"} \\ U \text{ isometrico su} \operatorname{ran}(P) & \text{"fase"} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U|_{\ker(P)} = 0$$

Inoltre valgono

(i) $P = |A|$ e $\ker(U) = \ker(A) = \ker(P) = [\text{ran}(P)]^\perp$

(ii) A biettivo $\implies U = A|A|^{-1}$ (la fase U è come A con modulo rinormalizzato)

Dimostrazione. .

- **Unicità/esistenza**:

  $\boxed{P}$: dimostriamo che se esiste la decomposizione $\implies P = \sqrt{A^*A}$ che esiste ed è unica. Infatti

$$\begin{aligned} A = UP &\implies A^* = (UP)^* = PU^* \qquad\qquad P \geq 0 \implies P \text{ autoagg.} \\ &\implies A^*A = PU^*UP \overset{\spadesuit}{=} P^2 \end{aligned}$$

  dove $\spadesuit$: $(UP\psi, UP\psi') = (P\psi, P\psi') \implies (\psi, PU^*UP\psi') = (\psi, P^2\psi')$

  $\boxed{U}$:

(i)

(ii)

$\square$

3 Operatori compatti

Sono generalizzazione di matrici a rango finito.

3.1 Operatori compatti su spazi normati

Definizione 3.1 (Insieme relativamente compatto)**:** $W \subseteq X$ relativamente compatto se $\overline{W}$ compatto

Osservazione Vale

$$\text{relativamente compatto} \underset{+\text{completo}}{\overset{\text{sp. metrico}}{\underset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}}} \text{totalmente limitato}$$

Definizione 3.2 (Insieme compatto per successioni)**:** $W \subseteq X$ normato è compatto per successioni se ogni successione di elementi di W ammette una sottosuccessione convergente.

Proposizione 17 . $W \subseteq X$ normato, allora compatto per successioni $\implies$ relativamente compatto (se W non completo il limite potrebbe non essere in W)

Definizione 3.3 (Operatore compatto)**:** Siano X, Y spazi normati, lo è $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se vale almeno una

(i) LIMITATO $\mapsto$ RELATIMAVEMNTE COMPATTO

(ii) SUCC. CONVERG. $\mapsto$ SUCC. CHE AMMETTE SOTTOSUCC. CONVERG.

Indicati con $\mathcal{B}_\infty(X, Y)$

Osservazione Quindi per dei Banach è compatto se LIMITATO $\mapsto$ TOTALMENTE LIMITATO

Lemma 4 (compatto $\implies$ limitato)**.** X, Y normati $\implies \mathcal{B}_\infty(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
B_1(0) \text{ palla unitaria in } 0 &\implies T(B_1(0)) \text{ rel. compatto} \\
&\implies \overline{T(B_1(0))} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_r(y_i) \subset B_{R+r}(0) \qquad R \text{ massima dist. di } y_i \text{ da } 0 \\
&\implies \|T(v)\| \le R + r \quad \forall v : \|v\| = 1 \\
&\implies \|T\| \le r + R
\end{aligned}$$

□

Lemma 5 (di Banach)**.** X spazio normato.

$$\{x_i\}_i \subset X \text{ tutti vettori l.i.} \implies \exists \{y_i\}_i \mid \begin{cases} \|y_n\| = 1 \quad \forall n \\ y_n \in X_n := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(x_1, \dots, x_n) \\ d(y_n, X_{n-1}) := \inf_{x \in X_{n-1}} \|x - y_n\| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dimostrazione. Notiamo che $d(y_n, X_{n-1})$ esiste in quanto l'inf di un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^+$. Costruiamo tale successione:

$$y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

poi vediamo che $\begin{cases} x_n \notin X_{n-1} \\ d(x_n, X_{n-1}) := k > 0 \end{cases}$, scegliamo

$$x' \in X_{n-1} \mid k < \|x_n - x'\| < 2k$$

Dato che $\begin{cases} x' \in X_{n-1} \\ k = d(x_n, X_{n-1}) = d(x_n - x', X_{n-1}) \end{cases}$ definiamo

$$y_n := \frac{x_n - x'}{\|x_n - x'\|}$$

□

Teorema 12 (Banach). Sia X normato e $T \in \mathcal{B}_\infty(X)$. Allora

(i) $\forall \delta > 0$ esiste numero finito di λ-autospazi con $|\lambda| > \delta$

(ii) $\lambda \neq 0$ autoval., W_λ relativo autosp. $\implies \dim(W_\lambda) < +\infty$

(iii) $\sigma_p(T) \subset \mathbb{C}$ limitato e numerabile con al più un punto di acc. in 0. Ovvero possono essere ordinati $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq 0$

Dimostrazione. Basta dimostrare i) e gli altri seguono.
Sia $\dim X$ infinita (altrimenti ovvio). Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \delta > 0\ \exists \text{ numero finito di } \lambda\text{-autovettori } \underline{\text{l.i.}} \text{ t.c. } |\lambda| > \delta \quad \forall \lambda$$

- Supponiamo PER ASSURDO che sia falsa, ovvero ce ne siano infiniti: chiamiamoli $(x_i)_i$.

$$(x_i)_i \overset{\text{lemma di Banach}}{\longrightarrow} (y_n)_n$$

  Sia $(\lambda_i)_i$ la successione di autovalori (anche ripetuti) disposti in **ordine crescente**, ovvero $|\lambda_i| > \delta \quad \forall i > \bar{i}$, con $Tx_i = \lambda_i x_i$. Quindi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y_n}{\lambda_n} \right\| &\overset{\|y_n\|=1}{<} \delta \implies (y_n/\lambda_n)_n \quad \text{limitata} \\ &\overset{T\in\mathcal{B}_\infty}{\implies} (T(y_n/\lambda_n))_n \quad \text{ammette sottosucc. convergente} \end{aligned}$$

- Quello appena detto è assurdo in quanto la successione $(T(y_n/\lambda_n))_n$ è crescente. Infatti: essendo per costruzione $y_n = \sum_{k=1}^n \overset{\in\mathbb{C}}{\beta_k} x_k$

$$T\frac{y_n}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\beta_k x_k = y_n + z_n \qquad z_n := \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right)\beta_k x_k \quad \in X_{n-1}$$

  Quindi, per costruzione col lemma di Banach:

$$\forall p > q \in \mathbb{N}: \quad \left\| T\frac{y_p}{\lambda_p} - T\frac{y_q}{\lambda_q} \right\| = \|y_p + z_p - (y_q + z_q)\| = \left\| y_p - \underbrace{(y_q + z_q - z_p)}_{\in X_{p-1}} \right\| > \frac{1}{2}$$

  ovvero è strettamente crescente e quindi non può ammettere sottosuccessione convergente. $\lightning$

$\square$

3.2 Operatori normali su spazi di Hilbert

Proposizione 18 . $T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) \iff |T| \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$

Dimostrazione. Per il $\implies$)

$$\begin{aligned} \{x_n\}_n \text{ limitata } &\overset{T\in\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})}{\implies} \exists\ \{T(x_{n_k})\}_{n_k} \text{ convergente} \\ &\implies \{|T|(x_{n_k})\}_{n_k} \text{ convergente} \qquad \text{da 1: } \||T|(x_{n_k})\| = \|T(x_{n_k})\| \end{aligned}$$

Per il $\impliedby$) basta scambiare i ruoli di T e $|T|$ $\square$

Teorema 13 (Hilbert). Sia $T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ autoaggiunto ($T = T^*$). Allora

(i) $\sigma_p(T) \neq \varnothing \overset{\text{proprietà varie}}{\implies} \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$

(ii) $\|T\| = \sup_{\lambda\in\sigma_p(T)}\{|\lambda|\} = \max_{\lambda\in\sigma_p(T)}\{|\lambda|\}$

(iii) $T = 0 \iff \sigma_p(T) = \{0\}$

Dimostrazione. per prima cosa ogni λ-autospazio $\mathcal{H}_\lambda$ con $\lambda \neq 0$ è finito dimensionale in quanto

$$\begin{aligned} B_1(0) \subset \mathcal{H}_\lambda &\implies \lambda^{-1}B_1(0) \text{ limitato} \\ &\implies T(\lambda^{-1}B_1(0)) = B_1(0) \text{ relativamente compatto} \\ &\iff \dim \mathcal{H}_\lambda < +\infty \end{aligned}$$

i)-ii) Dimostriamo che $\sigma_p(T) \neq \varnothing$ trovando come autovalore $\|T\|$ e vedendo che $\|T\| = \max_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\lambda|$

- $\underline{\sup_{\lambda \in \sigma_p(T)}\{|\lambda|\} \leq \|T\|}$:
- $\underline{\|T\| \in \sigma_p(T)}$:

$\square$

Teorema 14 (spettrale per operatori compatti autoaggiunti). Sia $T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ autoaggiunto ($T = T^*$). Allora

(i) siano P_λ i proiettori sui λ-autospazi

$$T = \mathrm{u}\text{-}\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda$$

dove la convergenza è intesa nella topologia uniforme, ovvero qua quella indotta dalla norma operatoriale:

$$\left\| T - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(ii) $\mathcal{H}$ ammette una base di Hilbert/Schauder di autovettori di T.

Dimostrazione. (i) Siano

$$\lambda \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R} \text{ per il Hilbert, con } \begin{cases} \mathcal{H}_\lambda & \text{i relativi autospazi} \\ P_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\lambda & \text{i proiettori ortogonali} \end{cases}$$

$$\text{dal proprietà proiettori abbiamo che } \begin{cases} \mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda \oplus \mathcal{H}_\lambda^\perp \\ Q_\lambda = \mathbb{I} - P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\lambda^\perp \text{ proiettore ortog. su } \mathcal{H}_\lambda^\perp \end{cases}$$

- **Preliminari:**

1) Azione di TP_λ: Vale

$$TP_\lambda = P_\lambda T = \lambda P_\lambda$$

Infatti

$$\begin{cases} T\overbrace{(P_\lambda \psi)}^{\in \mathcal{H}_\lambda} = \lambda(P_\lambda \psi) \implies TP_\lambda = \lambda P_\lambda \\ (TP_\lambda)^* \overset{\text{sopra}}{=} (\lambda P_\lambda)^* \overset{\text{autoagg.}}{\iff} P_\lambda T = \overline{\lambda} P_\lambda \overset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda P_\lambda \end{cases} \implies \text{tesi}$$

2) Commutatori: Vale

$$\begin{cases} [T, P_\lambda] = 0 & \text{da sopra} \\ [T, Q_\lambda] = 0 & \text{ragionando come sopra} \\ [P_\lambda, Q_\lambda] = 0 & \text{lo sappiamo} \end{cases}$$

e quindi vale anche

$$P_\lambda(Q_\lambda T) = (Q_\lambda T) P_\lambda \quad \text{ovvero} \quad [Q_\lambda T, P_\lambda] = 0$$

3) Natura di $Q_\lambda T$: $Q_\lambda T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ poiché prodotto di un limitato e un compatto, inoltre è autoaggiunto poiché

$$(Q_\lambda T)^* = TQ_\lambda \overset{[T,Q_\lambda]=0}{=} Q_\lambda T$$

4) Scomposizione di T: dato che $[T, Q_\lambda] = 0$ e $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$ abbiamo

$$\boxed{T = T\mathbb{I} = T(P_\lambda + Q_\lambda) = \lambda P_\lambda + Q_\lambda T}$$

- **Costruzione della serie:** Siano $\mathcal{H}_i, P_i \ldots$ tutte le cose relative all'i-esimo autovalore. Grazie a 4) definiamo

$$\boxed{T = \lambda_0 P_0 + T_1 \qquad \text{con } T_1 := Q_0 T}$$

dove

- $T_1 \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ e autoaggiunto da 3)
- $\forall \lambda \in \sigma_p(T_1) : |\lambda| \leq |\lambda_0|$. Infatti

$$\|T_1\| = \|TQ_0\| \leq \|T\|\|Q_0\| \overset{\text{proprietà proiettori}}{=} \|T\|$$

- Scegliamo $\lambda_1 \in \sigma_p(T_1)$ massimale, ovvero $|\lambda_1| = \|T_1\|$ e per il punto prec. sarà $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$
- Ogni λ_1-autovettore di T_1 è anche λ_1-autovettore di T. Infatti

$$\psi_1 \in \mathcal{H}_1[T_1] \implies T\psi_1 = \lambda_0 \underbrace{P_0\psi_1}_{=0} + \underbrace{T_1\psi_1}_{=\lambda_1\psi_1} = \lambda_1\psi_1 \quad \text{poiché per Prop. operatori normali: } \psi_1 \in \mathcal{H}_0^\perp$$

Quindi possiamo replicare lo stesso ragionamento su T_1: $T_1 = \lambda_1 P_1 + T_2$, ovvero

$$\boxed{T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + T_2}$$

procedendo in questo modo otteniamo una serie:

$$\boxed{T - \sum_{i=0}^{n} \lambda_1 P_i = T_{n+1}}$$

dove

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq 0 \qquad |\lambda_i| = \|T_i\|$$

Se $T_{n+1} \equiv 0$ per qualche n, allora $\lambda_{n+1} = 0$ e il processo si ferma. Altrimenti infinito

- **Convergenza della serie di autovalori:** dal teorema di Banach ci aspettiamo che sia così. Comunque PER ASSURDO neghiamo la tesi, ovvero (essendo successione decrescente di valori positivi)

$$\exists \varepsilon > 0 : |\lambda_n| \geq \varepsilon \quad \forall n$$

Sia allora

$$\{\psi_i\} : \psi_i \in \mathcal{H}_i \text{ e } \|\psi_i\| = 1 \implies \text{succ. limitata} \overset{T\in\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})}{\implies} \exists \text{sottosucc. conv. di } \{T\psi_i\}_i$$

ma è assurdo in quanto $\forall n \neq m$

$$\|T\psi_n - T\psi_m\|^2 = \|\lambda_n\psi_n - \lambda_m\psi_m\|^2 \overset{\psi_n\perp\psi_m}{=} |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2\varepsilon$$

quindi la successione $\{T\psi_i\}_i$ è crescente e quindi non può ammettere sottosuc. conv. $\lightning$

- **Convergenza della serie di operatori:** quindi abbiamo

$$\begin{cases} T - \sum_{i=0}^n \lambda_1 P_i = T_{n+1} \\ |\lambda_i| = \|T_i\| \end{cases} \implies \lim_{n\to\infty} \left\| T - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i \right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_{n+1}\| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1}| = 0$$

ovvero la serie

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i$$

converge a T nella topologia uniforme (norma operatoriale)

- **La serie contiene tutti gli autovalori $\neq 0$:** sia $\lambda \neq \lambda_n \quad \forall n$ con P_λ il relativo proiettore.

$$\begin{aligned} \lambda \neq \lambda_n &\overset{\text{Prop. operatori normali}}{\implies} \text{autosp. } \perp \\ &\implies P_\lambda P_n = P_n P_\lambda = 0 \\ &\implies TP_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n P_\lambda = 0 \\ &\implies T(\psi_\lambda) = T(P\psi_\lambda) = 0 \qquad \psi_\lambda \in \mathcal{H}_\lambda \\ &\implies \psi \text{ è 0-autovettore} \\ &\implies \lambda = 0 \end{aligned}$$

□

Dimostrazione. (ii) Per teorema di Banach ogni autospazio $\mathcal{H}_n$ è di dimensione finita e quindi ammette base ortonormale. Dobbiamo dimostrare che l'unione di tali basi genera $\mathcal{H} \iff$ l'ortogonale dello span dell'unione è 0.

$$\psi \in \text{span}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots)^\perp \implies \begin{cases} T\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \psi = 0 \iff \psi \in \ker T \\ \text{per coatruzione } \psi \in \mathcal{H}_0^\perp = \ker(T)^\perp \end{cases} \implies \psi = 0$$

□

3.3 Operatori di Hilbert-Schmidt

Definizione 3.4 (Operatore di Hilbert-Schmidt)**:** $A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ se $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ed esiste base ortonormale $\{\psi_i\}_i$ di $\mathcal{H}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2 < \infty$$

Inoltre diamo la struttura di spazio normato $(\mathcal{B}_2(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$ con

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2}$$

Teorema 15 **(Indipendenza dalla scelta della base).** Siano $\{\psi_i\}_i$ e $\{\phi_j\}_j$ due basi di $\mathcal{H}$. Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, allora

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2 < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} \|A\phi_j\|^2 < \infty$ e coincidono

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2 < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} \|A^*\phi_j\|^2 < \infty$ e coincidono

Dimostrazione. .

ii) Sia $\|A\|_2^2$ finita. Tramite Identità di Parseval - Teo. Pitagora abbiamo:

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A(\psi_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |(A(\psi_i), \phi_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(\psi_i, A^*(\phi_j))|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|A^*(\phi_j)\|^2 = \|A^*\|_2^2$$

abbiamo potuto scambiare le serie perché tutti i termini sono positivi. Da tale catena di ugualianze segue la tesi.

i) conseguenza di ii)

□

Proposizione 19 **(Proprietà operatori di Hilbert-Schmidt).** $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ è sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che:

(i) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 \quad \forall A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$

(ii) $\begin{cases} \|AK\|_2 \le \|K\|\|A\|_2 \\ \|KA\|_2 \le \|K\|\|A\|_2 \end{cases} \qquad \forall \mathcal{B}_2(\mathcal{H}), K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

(iii) $\|A\| \le \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$

Teorema 16 **(Op. di Hilbert-Schmidt sono spazio di Hilbert).** Sia $\{\psi_i\}_i$ base ortonormale di $\mathcal{H}$. Allora $(\mathcal{B}_2(\mathcal{H}), (\cdot,\cdot)_2)$ è uno spazio di Hilbert, con

$$(\cdot,\cdot)_2 : \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \qquad (A,B)_2 := \sum_{i=1}^{\infty} (A\psi_i, B\psi_i)$$

che quindi è un prodotto scalare su $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ e induce la norma $\|A\|_2^2 = (A,A)_2$

Proposizione 20 . Vale

$$\|A\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} m_\lambda \lambda^2$$

con $\mathrm{sing}(A) = \sigma_p(|A|)$ e m_λ la molteplicità di $\lambda \in \sigma_p(|A|)$

3.4 Operatori classe traccia

Proposizione 21 . Sono equivalenti

(i) $\exists$ b.o.c $\{\psi_i\}_i$ t.c. $\sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, |A|\psi_i) < \infty$

(ii) $\sqrt{|A|} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$

(iii) $A \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ e $\sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} m_\lambda \lambda < \infty$

Definizione 3.5 (Operatore di classe traccia)**:** Sia $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Allora $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{|A|} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Definiamo

$$\|A\|_1 := \left\| \sqrt{|A|} \right\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} m_\lambda \lambda^1$$

Si dimostra che è di Banach rispetto a tale norma.

Corollario 5 . Vale

$$\overset{\text{Banach}}{\mathcal{B}_1(\mathcal{H})} \subset \overset{\text{Hilbert}}{\mathcal{B}_2(\mathcal{H})} \subset \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Proposizione 22 (Proprietà operatori classe traccia). Valgono:

(i) $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \implies A = \overset{\in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})}{B} \overset{\in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})}{C}$ e $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) \implies BC \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$
Inoltre $\|BC\|_1 \leq \|B\|_2 \|C\|_2$

(ii) $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ è un sottospazio di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ e un suo ideale, ovvero $\forall A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \quad KA, AK \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ e

$$\|KA\|_1 \leq \|K\| \|A\|_1 \quad \text{e} \quad \|AK\|_1 \leq \|K\| \|A\|_1$$

(iii) $\|\cdot\|_1$ è una norma su $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ e tale spazio è di Banach.

Definizione 3.6 (Traccia)**:** Sia $\{\psi_i\}_i$ una b.o.c, allora è la mappa

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \qquad \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, A\psi_i)$$

Proposizione 23 (Proprietà mappa traccia). Valgono:

(i) L'immagine di Tr non dipende dalla base

(ii) $\forall B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) : \quad \mathrm{Tr}(BC) = (B^*, C)_2$

(iii) $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \implies |A| \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ e

$$\|A\|_1 = \mathrm{Tr}(|A|)$$

(iv) È lineare: $\forall A, B \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \qquad \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$

(v) Commuta con l'aggiunto: $\mathrm{Tr}(A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$

(vi) È ciclica: $\forall A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \qquad \mathrm{Tr}(AK) = \mathrm{Tr}(KA)$

Dimostrazione. .

(i) da ii) dato che il prodotto hermitiano non dipende dalla base.

(ii) Per Proprietà operatori classe traccia posso scrivere $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ come $A = BC$ con $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Allora, essendo $\{\psi_i\}_i$ una b.o.c.,

$$(B^*, C)_2 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{\infty} (B^*\psi_i, C\psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, BC\psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\psi_i, A\psi_i) \overset{def}{=} \mathrm{Tr}(A)$$

(iii) Dato che $|(|A|)| = |A| \implies$ dalla def di $\|\cdot\|_1$ che $\|A\|_1 = \||A|\|_1$ finita in quando $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Sia $\{\psi_{\lambda,i}\}$ b.o.c. di $|A|$ con moleplicità i, allora

$$\mathrm{Tr}(|A|) \overset{def}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} \sum_{i=1}^{m_\lambda} (\psi_{\lambda,i}, |A|\psi_{\lambda,i}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} \sum_{i=1}^{m_\lambda} \lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{sing}(A)} \lambda m_\lambda = \|A\|_1$$

(iv) dalla bilinearità del prodotto hermitiano

(v) dall'antilinearità del prodotto hermitiano

(vi) Dimostriamo prima che la tesi vale per $A, K \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Punto ii) vale

$$\mathrm{Tr}(AK) = (A^*, K)_2 \qquad \mathrm{Tr}(KA) = (K^*, A)_2$$

quindi, essendo $(\mathcal{B}_2(\mathcal{H}), (\cdot,\cdot)_2)$ di hilb. per Op. di Hilbert-Schmidt sono spazio di Hilbert, vale l'Identità di polarizzazione:

$$4(A^*, K)_2 = \|A^* + K\|_2^2 + \|A^* - K\|_2^2 - i\|A^* + iK\|_2^2 + i\|A^* - iK\|_2^2$$

inoltre da Proprietà operatori di Hilbert-Schmidt vale $\forall C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H}) : \quad \|C^*\| = \|C\|$ e usando la linearità della mappa aggiunzione la riscriviamo come

$$4(A^*, K)_2 = \|A + K^*\|_2^2 + \|A - K^*\|_2^2 - i\|K^* + iA\|_2^2 + i\|K^* - iA\|_2^2 = 4(K^*, A)_2$$

ovvero

$$(A^*, K)_2 = (K^*, A)_2 \iff \mathrm{Tr}(AK) = \mathrm{Tr}(KA) \quad \forall A, K \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$$

Sia ora $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Per Proprietà operatori classe traccia $A = BC$ con $B, C \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$, quindi essendo $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ un ideale di $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (DA VERIFICARE)

$$\mathrm{Tr}(AK) = \mathrm{Tr}(\underset{\in \mathcal{B}_2}{C} \underbrace{DK}_{\in \mathcal{B}_2}) = \mathrm{Tr}(DKC) = \mathrm{Tr}(KCD) = \mathrm{Tr}(KA)$$

$\square$

4 Operatori lineari non limitati

Definizione 4.1 (Dominio)**:** Sia X spazio vettoriale e

$$T : \mathrm{Dom}(T) \to X$$

con $\mathrm{Dom}(T) \subset X$ il **dominio massimale** (ovvero dominio nel classico senso):

$$\mathrm{Dom}(T) := \{x \in X \mid \exists x' \in X : Tx = x'\} = T^{-1}(X)$$

Tale dominio delle volte è God-given, quindi lavoreremo con suoi sottoinsiemi. In particolare lavoreremo con

$$T : \mathrm{dom}(T) \to X$$

dove $\mathrm{dom}(T) \subseteq \mathrm{Dom}(T) \subset X$ sottospazio vett. di X è detto **dominio**. Si dice **dominio massimale** se $\mathrm{dom}(T) = \mathrm{Dom}(T)$

Osservazione **Rango** e **kernel** sono nelle definizioni standard prendendo come dominio $\mathrm{dom}(T)$

Definizione 4.2 (Grafico)**:** $\mathrm{gph}(T) := \{(x, x') \in \mathrm{dom}(T) \oplus X \mid x' = Tx\} \subset X \oplus X$

Definizione 4.3 (Estensione)**:** T' è estensione di T se

$$\mathrm{gph}(T) \subset \mathrm{gph}(T') \iff \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(T') \\ T'|_{\mathrm{dom}(T)} \equiv T \end{cases}$$

Definizione 4.4 (Operatore chiuso/chiudibile e chiusura)**:** Sia $T : \mathrm{dom}(T) \to X$ lineare.

- T è **chiuso** se $\mathrm{gph}(T)$ chiuso in $(X \oplus X, \|\cdot\|_{X \oplus X})$
- T è **chiudibile** se $\exists\, \overline{T} \mid \mathrm{gph}(\overline{T}) = \overline{\mathrm{gph}(T)}$ (detto **chiusura di** T)

Proposizione 24 (Caratterizzazione chiusura). X normato, $T : \mathrm{dom}(T) \subset X \to X$. Allora

$$T \text{ chiuso} \iff \left[\forall \{x_n\}_n \subset \mathrm{dom}(T) \mid \begin{cases} x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X \\ Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in X \end{cases} \implies \begin{cases} x \in \mathrm{dom}(T) \\ Tx = y \end{cases} \right]$$

Proposizione 25 (Caratterizzazione chiudibilità). Sia $A : \mathrm{dom}(A) \subset X \to X$. Allora sono equivalenti

(i) A è chiudibile

(ii) $\overline{\mathrm{gph}(A)}$ non contiene punti della forma $(0, \overset{\neq 0}{z})$ (ovvero $T(0) = 0$ nella chiusura)

(iii) A ammette estensione chiusa

Dimostrazione. .

i) $\iff$ ii) Facciamo $\neg \iff \neg$

$$\begin{aligned} A \text{ non chiudibile} &\iff \exists\, \{x_n\}_n, \{x'_n\}_n \mid \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = x \\ \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y \neq \lim_{n\to\infty} T(x'_n) = y' \end{cases} && \text{ovvero non è continuo} \\ &\iff \text{la succ. } \{\widetilde{x}_n\}_n := x_n - x'_n : \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = x - x = 0 \\ \lim_{n\to\infty} T(\widetilde{x}_n) = y - y' = z \neq 0 \end{cases} && \text{per linearità traslo in 0} \\ &\iff (0, \overset{\neq 0}{z}) \in \overline{\mathrm{gph}(A)} \end{aligned}$$

Sostanzialmente mi dice che non è chiudibile $\iff$ non continuo, infatti pensare a funzione con salto finito $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se chiudo il grafico non è più una funzione perché nel punto di salto ho due immagini, quindi non è chiudibile. Qui lavoriamo con operatori lineari quindi equivale ad avere il punto di salto dove voglio, in particolare in 0.

i) $\iff$ iii) $\implies$) Se A chiudibile $\implies$ $\overline{A}$ è un'estensione chiusa.
$\impliedby$) A ammette estensione chiusa B $\implies$ $\text{gph}(A) \subseteq \text{gph}(B) \not\ni (0,z)$ per ii) essendo B chiuso $\implies$ $(0,z) \notin \overline{\text{gph}(A)} \iff A$ chiudibile

$\square$

Lemma 6 . X, Y di Banach, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $A : \text{dom}(A) \to Y$ op. lineari.

$$\begin{cases} A \text{ chiudibile} \\ \text{ran}(T) \subset \text{gph}(A) \end{cases} \implies AT \in \mathcal{B}(X,Y)$$

Definizione 4.5 (Somma diretta di spazi di Hilbert)**:** $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$ è spazio di Hilbert con

$$((x,x'),(y,y'))_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}'} := (x,y)_{\mathcal{H}} + (x',y')_{\mathcal{H}'} \quad \forall\, x,y \in \mathcal{H},\; x',y' \in \mathcal{H}'$$

che induce la topologia prodotto.

4.1 Operatore aggiunto Hermitiano

Definizione 4.6 (Aggiunto Hermitiano)**:** Sia $T : \text{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ denso. L'aggiunto è

$$T^* : \text{dom}(T^*) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid \begin{cases} \text{dom}(T^*) = \{\phi \in \mathcal{H} \mid \exists \Psi_\phi \in \mathcal{H} : (\phi, T\psi) = (\Psi_\phi, \psi) \quad \forall \psi \in \text{dom}(T)\} \\ \text{ran}(T^*) = \{T^*(\phi) = \Psi_\phi \in \mathcal{H} \quad \forall \phi \in \text{dom}(T^*)\} \end{cases}$$

Osservazione È chiamato aggiunto *Hermitiano* poiché è definito attraverso il prodotto Hermitiano (dato che lavoriamo in spazi di Hilbert) e non tramite la più generale definizione tra gli spazi duali.

Proposizione 26 (Aggiunto scambia le inclusioni). Siano T, T' densamente definiti:

(i) (Scambio di inclusioni) $T \subset T' \implies T^* \supset (T')^*$ ovvero più un operatore "è piccolo" più fare l'aggiunto ne aumenta il dominio

(ii) (aggiunto del prodotto) $(TT')^* \supseteq (T')^* T^*$

Teorema 17 (aggiunto e chiudibilità). T densamente definito su $\mathcal{H}$. Allora

(i) T^* è chiuso e $\text{gph}(T^*) = [\tau(\text{gph}(T))]^\perp$ dove

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \\ & (\phi, \psi) & \mapsto & (-\psi, \phi) \end{array}$$

(ii) T chiudibile $\iff$ $\text{dom}(T^*)$ denso. In questo caso

$$T \subseteq \boxed{\overline{T} = (T^*)^*}$$

Dimostrazione. $\square$

Corollario 6 (Ker/Range aggiunto). Sia $T : \text{dom}(T) \to \mathcal{H}$ denso. Allora

(i) $\begin{cases} \ker(T^*) = [\text{ran}(T)]^\perp \\ \ker(T) \subseteq [\text{ran}(T^*)]^\perp \quad = \text{se } T^* \text{ denso} \end{cases}$

(ii) T chiuso $\implies \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \tau[\text{gph}(T)] \oplus \text{gph}(T^*)$ somma ortogonale

(iii) Vale

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} \ker(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}) = [\text{ran}(T - \lambda\mathbb{I})]^\perp \\ \ker(T - \lambda\mathbb{I}) \subseteq [\text{ran}(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I})]^\perp \end{cases}$$

4.2 Zoologia di operatori (operatori autoaggiunti & co.)

Il problema è che non si può usare teo. rappresentazione di Riesz. In generale l'assegnazione $\mathrm{dom}(T^*) \to \mathcal{H} : \phi \mapsto \Psi_\phi$ non è unica a meno che $\mathrm{dom}(T)$ sia denso in $\mathcal{H}$. Per questo lavoreremo praticamente sempre con domini densi.

Definizione 4.7 (Zoologia di operatori)**:** Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Allora T è:

- **Hermitiano:** se $(\phi, T\psi) = (T\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(T)$ l'aggiunto non è unico se il dominio non è denso, quindi non è ben def.
- **simmetrico:** se $\begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T \text{ Hermitiano} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T \subseteq T^* \end{cases}$
- **essenzialm. (quasi) autoag.:** se $\begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T^* \text{ autoaggiunto} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ \mathrm{dom}(T^*) \text{ denso} \\ T^* = T^{**} \end{cases} \overset{prop}{\iff} \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T \text{ chiudibile} \\ \overline{T} = T^* \iff \overline{T} \text{ autoag.} \end{cases}$
- **autoaggiunto:** se $\begin{cases} \mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(T^*) \\ T \text{ simmetrico} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T = T^* \end{cases}$
- **normale:** se $T^*T = TT^*$ (definiti sui domini standard)

Teorema 18 (Hellinger-Toeplitz)**.** Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Allora

$$\begin{cases} \mathrm{dom}(T) = \mathcal{H} \\ T \text{ Hermitiano} \end{cases} \implies T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ e autoaggiunto}$$

Osservazione Quindi un operatore Hermitiano illimitato è per forza definito non su tutto $\mathcal{H}$

Proposizione 27 (Alcune proprietà)**.** Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Allora

(i) se $\mathrm{dom}(T), \mathrm{dom}(T^*), \mathrm{dom}(T^{**})$ sono tutti densi allora

$$T^* = (\overline{T})^* = \overline{T^*} = T^{***}$$

(ii) T essenzialmente autoaggiunto $\iff$ $\overline{T}$ autoaggiunto (unito ad (i) vuol dire ess. autoag. $\iff$ $\overline{T} = T^*$)

(iii) T autoaggiunto $\implies$ **massimalmente simmetrico** (non ammette estensione propria ad un operatore simmetrico)

(iv) T essenzialmente autoaggiunto $\implies$ $\exists!$ estensione autoaggiunta, che è $\overline{T}$ e vale $\overline{T} = T^*$

Dimostrazione. □

Teorema 19 (Proprietà operatori simmetrici)**.** Sia T simmetrico. Allora sono equivalenti:

(i) T autoaggiunto

(ii) $\begin{cases} T \text{ chiuso} \\ \ker(T^* \pm i\mathbb{I}) = \{0\} \quad (\text{ovvero } \pm i \notin \sigma_p(T) \text{ NON sono autovalori}) \end{cases}$

(iii) $\mathrm{ran}(T^* \pm i\mathbb{I}) = \mathcal{H}$

Dimostrazione. .

$1 \implies 2)$ $\underline{T \text{ chiuso:}}$ T autoaggiunto $\overset{def}{\iff} \begin{cases} \mathrm{dom}(T) \text{ denso} \\ T = T^* \end{cases} \overset{\text{aggiunto e chiudibilità}}{\implies} T^* \text{chiuso} \overset{T=T^*}{\implies} T \text{ chiuso}$

$\underline{\pm i \notin \sigma_p(T)}$: sia

$$\begin{aligned} \psi \in \ker(T^* \pm i\mathbb{I}) &\iff (T^* \pm i\mathbb{I})\psi = 0 \\ &\iff T^*\psi \overset{T^*=T}{=} T\psi = \mp i\psi \\ &\implies \mp i(\psi,\psi) = (\psi, \mp i\psi) = (\psi, T\psi) = (T\psi,\psi) = (\mp i\psi,\psi) = \pm i(\psi,\psi) \quad \text{con antilin./linearità} \\ &\implies (\psi,\psi) = 0 \\ &\iff \psi = 0 \end{aligned}$$

$2 \implies 3)$ $\underline{\mathrm{ran}(T^* \pm i\mathbb{I}) \text{ denso:}}$ Da COROLLARIO 5.16.1 del Bracchi sappiamo che

$$\ker(T^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}) = [\mathrm{ran}(T - \lambda\mathbb{I})]^{\perp}$$

quindi nel nostro caso

$$\{0\} \overset{ip}{=} \ker(T^* \pm i\mathbb{I}) = [\mathrm{ran}(T \mp i\mathbb{I})]^{\perp} \iff \mathrm{ran}(T^* \pm i\mathbb{I}) \text{ denso}$$

$\underline{\mathrm{ran}(T^* \pm i\mathbb{I}) \text{ chiuso:}}$ essendo il range denso, abbiamo che

$$\forall \varphi \in \mathcal{H} \quad \exists \{\psi_n\}_n \subset \mathrm{dom}(T) \mid (T \pm i\mathbb{I})\psi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi \in \mathcal{H}$$

e il range è chiuso se

$$\begin{cases} \psi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi \in \mathrm{dom}(T) \\ T\psi = \varphi \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

Infatti

$$\begin{cases} \|(T \pm i\mathbb{I})\psi_n\|^2 = \|T\psi_n \pm i\psi_n\|^2 = \|T\psi_n\|^2 + \|\psi_n\|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}(T\psi_n, \pm i\psi_n)}_{=2\mathrm{Re}\pm i(T\psi_n,\psi_n)=0} \geq \|\psi_n\|^2 \\ (T \pm i\mathbb{I})\psi_n \text{ di Cauchy} \end{cases} \implies \{\psi_n\}_n \text{ di Cauchy}$$

$$\overset{\mathcal{H}}{\implies} \text{convergente}$$

Essendo per ipotesi T chiuso $\implies$ $(T \pm i\mathbb{I})$ chiuso, e quindi per Caratterizzazione chiusura (essendo $\{\psi_n\}_n$ e $\{(T \pm i\mathbb{I})\psi_n\}_n$ convergenti in $\mathcal{H}$) vale $(\spadesuit)$.

$3 \implies 1)$

□

Teorema 20 (Caratterizzazione essenzialmente autoaggiunti). Sia T simmetrico. Allora sono equivalenti

(i) T è essenzialmente autoaggiunto

(ii) $\ker(T^* \pm i\mathbb{I}) = \{0\}$ ovvero $\pm i \notin \sigma_p(T^*)$ ($\pm i$ NON AUTOVALORE di T^*)

(iii) $\overline{\mathrm{ran}(T \pm i\mathbb{I})} = \mathcal{H}$ (denso)

4.3 Indici di difetto (criteri di autoaggiunzione per op. simmetrici)

Definiamo

$$T_{\pm} := T \pm i\mathbb{I} \qquad T^*_{\pm} := T^* \pm i\mathbb{I}$$

Definizione 4.8 (Trasformata di Cayley)**:** La mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \subset \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{x-i}{x+i} \end{array}$$

ci porta alla definizione di trasformata di Cayley di T operatore su $\mathcal{H}$:

$$V(T) : \mathrm{ran}(T_+) \to \mathrm{ran}\, T_- \qquad V(T) := (T - i\mathbb{I})(T + i\mathbb{I})^{-1}$$

Proposizione 28 ($V(T)$ **isometria**). Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ simmetrico, allora

(i) $T + i\mathbb{I}$ iniettivo

(ii) $V(T)$ ben definita

(iii) $V(T)$ è isometria e $\mathrm{ran}(V) = \mathrm{ran}(T - i\mathbb{I})$

Dimostrazione. □

Proposizione 29 . Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Se $V(B)$ è ben definita allora

(i) $\mathbb{I} - V$ iniettivo

(ii) $\mathrm{ran}(\mathbb{I} - V) = \mathrm{dom}(T)$

(iii) (**inversa**) $T = i(\mathbb{I} + V)(\mathbb{I} - V)^{-1}$ ovvero non perdo informazioni

Dimostrazione. Vediamo che V è ben definita su

$$\mathrm{dom}(V) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi \in \mathrm{ran}(T_+)\}$$

$\forall \psi \in \mathrm{dom}(V)$ chiamiamo $\phi := (T_+)^{-1}\psi$. Allora $V\psi = T_-\phi$ e da cui

$$\begin{cases} (\mathbb{I} + V)\psi = T_-\phi + \mathbb{I}\psi = (T - i\mathbb{I})\phi + (T + i\mathbb{I})\phi = 2T\phi \\ (\mathbb{I} - V)\psi = 2i\phi \end{cases}$$

(i) Allora $\psi \in \ker(\mathbb{I} - V) \implies \phi = 0 \overset{\psi = T_+\phi}{\implies} \psi = 0$

(ii) Dato che $\phi \in \mathrm{dom}(T)$ e $\mathrm{ran}(\mathbb{I} - V) = \mathrm{dom}(T)$

(iii) unendo le uguaglianze sopra arriviamo alla tesi.

□

Teorema 21 (**Unitarietà di** $V(T)$). Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Allora

(i) T simmetrico $\implies$ [autoaggiunto $\iff$ $V(T)$ unitario su $\mathcal{H}$]

(ii) $\begin{cases} V : \mathcal{H} \to \mathcal{H} & \text{unitario} \\ \mathbb{I} - V & \text{iniettivo} \end{cases} \implies$ è la trasf. di Cayley di un operatore autoaggiunto

Dimostrazione. □

Definizione 4.9 (Indici di difetto)**:** Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ simmetrico. Allora

spazi di difetto $N_\pm(T) := \ker(T^*_\pm)$ (i $\pm i$-autospazi dell'aggiunto)
indici di difetto $d_\pm(T) := \dim(\ker(T^*_\pm))$

Teorema 22 (**Von Neumann**). Sia $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ simmetrico. Allora

(i) T ammette estensioni autoaggiunte $\iff$ $d_+(T) = d_-(T)$

(ii) $d_+(T) = d_-(T) \implies$ c'è corrispondenza biunivoca tra

$$[\text{estensioni autoaggiunte di } T] \quad \longleftrightarrow \quad [\text{isometrie } N_-(T) \to N_+(T)]$$

(iii) T è essenzialmente autoaggiunto $\iff$ $d_+m(T) = d_-(T) = 0$ (ovvero T ammette estens. autoagg. unica)

permette di contare quante estensioni autoaggiunte ci sono di un operatore simmetrico

Dimostrazione. (i)

$\Longrightarrow$) Per ipotesi $\exists S : T \subset S = S^*$. Allora per Unitarietà di $V(T)$ $V(S) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitario e quindi:

$$\begin{aligned}
& V(T)[\text{dom}(V(T))] \subseteq \text{ran}(V(T)) && \text{def. di dom/ran} \\
\Longrightarrow\ & V(T)[\text{ran}(T_+)] \subseteq \text{ran}(T_-) && \text{vedi dom/ran della trasf.} \\
\Longrightarrow\ & V(S)[\text{ran}(T_+)] \subseteq \text{ran}(T_-) && T \subset S \implies T \pm i\mathbb{I} \subset S \pm i\mathbb{I} \implies V(T) \subset V(S) \\
\Longrightarrow\ & V(S)[\text{ran}(T_+)]^\perp = \text{ran}(T_-)^\perp && \text{per proprietà degli ortog.} \\
\Longrightarrow\ & V(S)[\text{ran}(T_+)^\perp] = \text{ran}(T_-)^\perp && V(S)[\text{ran}(T_+)^\perp] = [V(S)[\text{ran}(T_+)]]^\perp \text{ in quanto isometria+isomorf.} \\
\Longrightarrow\ & V(S)[\ker(T_-^*)] = \ker(T_+^*) && \text{per Ker/Range aggiunto con } \lambda = \pm i \\
\Longrightarrow\ & V(S)[N_-] = N_+ && \\
\Longrightarrow\ & d_- = d_+ && \text{essendo } V(S) \text{ isomorfismo}
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Abbiamo

- Prima parte:
  * dal Ker/Range aggiunto scegliendo in iii) $\pm i$ abbiamo

    $$\mathcal{H} = \overline{\text{ran}(T_+)} \oplus N_- = \overline{\text{ran}(T_-)} \oplus N_+ \qquad \text{somma ortogonale}$$

    in quanto i due spazi sono ortogonali
  * Essendo T simmetrico, da $V(T)$ isometria e da Esistenza e unicità dell'estensione al completamento

    $$V(T) \text{ isometria} \implies \exists \widetilde{T(V)} : \overline{\text{ran}(T_+)} \to \overline{\text{ran}(T_-)} \quad \text{estensione } \textbf{unitaria} \text{ (su dominio e immagine)}$$
  * Dall'ipotesi

    $$d_+(T) = d_-(T) \implies \exists U_0 : N_- \to N_+ \quad \textbf{unitario}$$

  Allora possiamo definire

  $$\boxed{\begin{array}{llcll} U: \ \mathcal{H} = & \overline{\text{ran}(T_+)} \oplus N_- & \to & \overline{\text{ran}(T_-)} \oplus N_+ & = \mathcal{H} \\ \quad\ \ \psi = & \phi + \psi_0 & \mapsto & \widetilde{V(T)}\phi + U_0\psi_0 & \end{array}}$$

  ovvero $U = \widetilde{V(T)} + U_0$, che è **unitario** su $\mathcal{H}$ in quanto somma di unitari che agiscono su spazi ortogonali che generano $\mathcal{H}$.
- Abbiamo che $\mathbb{I} - U$ è iniettivo in quanto, dato $\chi = \chi_1 + \chi_0 \in \overline{\text{ran}(T_+)} \oplus N_-$:

  $$\begin{aligned}
  \chi \in \ker(\mathbb{I} - U) &\implies (\mathbb{I} - U)\chi = 0 \\
  &\implies U\chi = \chi \\
  &\iff \widetilde{V(T)}\chi_1 + U_0\chi_0 = \chi_1 + \chi_0 \\
  &\iff \begin{cases} \widetilde{V(T)}\chi_1 = \chi_1 \\ U_0\chi_0 = \chi_0 \end{cases} \qquad \text{poiché agiscono su spazi ortogonali} \\
  &\implies \begin{cases} \chi_1 = 0 & V - \mathbb{I} \text{ iniett.} \\ \chi_0 \in N_+ \cap N_- = \{0\} & \text{per dominio e range di } U_0 \end{cases}
  \end{aligned}$$

  E quindi:

  $$\begin{cases} U : \mathcal{H} \to \mathcal{H} & \text{unitario} \\ \mathbb{I} - U & \text{iniettivo} \end{cases} \overset{\text{Unitarietà di } V(T)}{\Longrightarrow} U \text{ è la trasformata di } T_{U_0} \text{ autoaggiunto}$$
- Essendo per costruzione che $V(T) \subset U \implies T \subset T_{U_0}$, ovvero T_{U_0} è un'estensione autoaggiunta di T e per ogni diverso operatore unitario (su dominio e range) U_0 corrisponde una diversa estensione autoaggiunta.

□

Dimostrazione. (ii) Abbiamo già dimostrato nell'ultimo passaggio che per ogni diverso operatore unitario c'è una diversa estensione. Per il contrario:

- $T \subset S = S^*$
- $V(T) \subset V(S)$ con $V(T)$ unitario su $\overline{\mathrm{ran}(T_+)} \to \overline{\mathrm{ran}(T_-)}$ e $V(S)$ unitario su $\mathcal{H}$
- $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{ran}(T_+)} \oplus N_- = \overline{\mathrm{ran}(T_-)} \oplus N_+$

allora deve essere sul primo fattore della somma diretta

$$V(S)|_{\overline{\mathrm{ran}(T_+)}} \equiv V(T)$$

mentre sul secondo essendo $V(S)$ unitario deve corrispondere a un operatore unitario $N_- \to N_+$. Inoltre se S' fosse una seconda estensione autoaggiunta di $T \implies V(S)$ sarebbe diversa da $V(S')$ solo per l'operatore unitario tra gli spazi di difetto. $\square$

Corollario 7 (Costruzione esplicita delle estensioni autoaggiunte). Dato un operatore simmetrico t.c. $d_+(T) = d_-(T)$ si può costruire per ogni isometria $U : N_- \to N_+$ un'estensione autoaggiunta come segue:

$$\begin{array}{rccl} T_U : & \mathrm{dom}(T_U) & \to & \mathcal{H} \\ & \psi & \mapsto & \overline{T}\widetilde{\psi} + i(\mathbb{I} - U)\psi_- \end{array}$$

con

$$\mathrm{dom}(T_U) \coloneqq \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \exists! \begin{cases} \widetilde{\psi} \in \mathrm{dom}(\overline{T}) \\ \psi_- \in N_- \end{cases} : \psi = \widetilde{\psi} + (\mathbb{I} + U)\psi_- \right\} = \mathrm{dom}(\overline{T}) \oplus (\mathbb{I} + U)N_-$$

i segni in blu possono essere scambiati mentre quelli in rosso vanno cambiati se si sceglie $U : N_+ \to N_-$

Riscritto:

$$\begin{array}{rccl} T_U : & \mathrm{dom}(T_U) & \to & \mathcal{H} \\ & \psi & \mapsto & \overline{T}\widetilde{\psi} + i\psi_- - iU\psi_- \end{array}$$

con

$$\mathrm{dom}(T_U) \coloneqq \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \exists! \begin{cases} \widetilde{\psi} \in \mathrm{dom}(\overline{T}) \\ \psi_- \in N_- \end{cases} : \psi = \widetilde{\psi} + \psi_- + U\psi_- \right\} = \mathrm{dom}(\overline{T}) \oplus N_- \oplus N_+$$

poiché

$$\begin{aligned} T\psi &= T(\widetilde{\psi} + \psi_- + U\psi_-) \\ &= \overline{T}\widetilde{\psi} + T^*\psi_- + T^*(U\psi) && \text{essendo } T = T^* \\ &= \overline{T}\widetilde{\psi} + i\psi_- - i(U\psi) && \text{essendo } \begin{cases} \psi_- \in N_- = E_{+i}[T^*] \\ U\psi_- \in N_+ = E_{-i}[T^*] \end{cases} \\ &= \overline{T}\widetilde{\psi} + i(\mathbb{I} - U)\psi_- \end{aligned}$$

5 Teoria spettrale

Definizione 5.1 (Operatore shiftato)**:** Sia X sp. vettoriale normato e $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore. Allora è

$$A_\lambda := A - \lambda\mathbb{I} : D(A) \to X \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}$$

Definizione 5.2 (Insieme risolvente)**:** Sia X sp. vettoriale normato e $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore e A_λ il suo operatore shiftato. L'insieme risolvente è

$$\rho(\mathbb{C}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \overline{\operatorname{ran}(A_\lambda)} = X & (\text{"suriettivo"}) \\ \ker(A_\lambda) = \{0\} & (\text{iniettivo}) \\ (A_\lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(A_\lambda) \to X & \text{limitato} \end{cases} \}$$

*Osservazione **(limitatezza dell'inversa)*** La terza richiesta nel caso finito dimensionale non serve (tutti gli operatori lineari sono limitati). La metto perché voglio che l'inversa sia un operatore "bello".

Definizione 5.3 (Operatore risolvente)**:** Nelle ipotesi di prima è definito come

$$R_\lambda(A) := (A_\lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(A_\lambda) \to D(A) \quad \text{con } \lambda \in \rho(A)$$

Definizione 5.4 (Spettro di un operatore)**:** Nelle ipotesi di prima è

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

ovvero lo spettro è tutto ciò che **non è** l'insieme risolvente. Esso è diviso in tre unioni **disgiunte**:

$\not{2}$) **Spettro puntuale** (non iniettivo): $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(A_\lambda) \neq \{0\}\}$

$\not{3}$) **Spettro continuo** (non limitato): $\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \overline{\operatorname{ran}(A_\lambda)} = X & (\text{"suriettivo"}) \\ \ker(A_\lambda) = \{0\} & (\text{iniettivo}) \\ (A_\lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(A_\lambda) \to X & \text{non limitato} \end{cases} \}$

$\not{1}$) **Spettro residuo** (non suriettivo): $\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} \overline{\operatorname{ran}(A_\lambda)} \neq X & (\text{non "suriettivo"}) \\ \ker(A_\lambda) = \{0\} & (\text{iniettivo}) \end{cases} \}$

*Osservazione **(Autovalori e spettro)*** $\sigma_p = \{\text{autovalori}\}$

*Osservazione **(Spettro di operatore autoaggiunto su $\mathcal{H}$)*** $X = \mathcal{H}$ e A autoaggiunto (esiste base di autovettori) $\implies \sigma_r(A) = \varnothing$

Teorema 23 . Sia $\mathcal{H}$ di Hilbert.

(i) se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è **normale**:
   - (a) $\sigma_r(T) = \sigma_r(T^*) = \{0\}$
   - (b) $\sigma_p(T^*) = \overline{\sigma_p(T)}$
   - (c) $\sigma_c(T^*) = \overline{\sigma_c(T)}$
   - (d) i suoi autospazi con diversi autovalori sono ortogonali e formano una base per $\mathcal{H}$

(ii) se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è **unitario**:
   - (a) $\sigma(T) \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ non vuoto e compatto
   - (b) $\sigma_r(T) = \{0\}$

(iii) se $T : \operatorname{dom}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è **autoaggiunto**:
   - (a) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$
   - (b) $\sigma_r = \{0\}$
   - (c) i suoi autospazi con diversi autovalori sono ortogonali

Parte II
Distribuzioni

5.0.1 Preliminari

Definizione 5.5 (Spazio duale)**:** Sia X un insieme.

algebrico	$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$	funzioni lineari
topologico/continuo	$X' := \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$	funzioni lineari e continue
forte	$X'_d := (X', \mathcal{T}_{\text{unif}})$	con topol. di converg. unif. sui limitati

se X normato allora X'_d coincide con la norma-topologia usuale

6 Test funzioni

Definizione 6.1 (Multi-indice)**:** di dimensione $n \in \mathbb{N}_1$ è una n-tupla $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^n$. Definiamo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$

Definizione 6.2 (Derivate multiple con multi-indice)**:** Sia $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e α un n-multi-indice, allora

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Definizione 6.3 (Supporto di una funzione)**:** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, allora $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$

Definizione 6.4 (Spazio delle test funzioni)**:** È $\mathcal{D} := (C_c^\infty(\Omega), \mathcal{D}\text{-}\lim)$, con

$$f = \mathcal{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n \iff \exists K \Subset \Omega \mid \begin{cases} \text{supp}(f_n) \subseteq K \\ \forall \boldsymbol{\alpha} : \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_n - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{C^0(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} 0 \end{cases}$$

7 Distribuzioni

Proposizione 30 . Il pairing

$$\begin{array}{cccc} (\cdot,\cdot): & C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ & (\phi, f) & \to & \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) d^n x \end{array}$$

è **separante**, ovvero

$$\phi, \phi' \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid (\phi, f) = (\phi', f) \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \implies \phi = \phi'$$

Dimostrazione. La tesi è $(\phi - \phi', f) = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \implies \phi = \phi'$. Se per assurdo:

$$\begin{aligned} \phi \neq \phi' \text{ in } x \in \mathbb{R}^n &\overset{\text{lisce}}{\implies} \text{differiscono in un intorno } \Omega \text{ di } x \\ &\overset{\text{WLOG}}{\implies} \phi - \phi > 0 \text{ in } \Omega \\ &\implies f \in C_0^\infty(\Omega) \implies \int_{\mathbb{R}^n} (\phi - \phi')(x) f(x) d^n x > \inf_{x\in\Omega}((\phi - \phi')f)\text{Vol}(\Omega) > 0 \quad \lightning \end{aligned}$$

□

Definizione 7.1 (Spazio delle distribuzioni)**:** È $\mathcal{D}'(\Omega)$ ovvero l'insieme dei funzionali $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ **continui (per successioni)** rispetto al $\mathcal{D}$– lim, ovvero

$$u \in \mathcal{D}^*(\Omega) \text{ continuo rispetto al } \mathcal{D}\text{– lim} \iff \left[f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} f \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f) \qquad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega) \right]$$

Essendo la convergenza in $\mathcal{D}$ molto forte, sono "poche" le successioni che convergono lì e quindi per la continuità di $u \in \mathcal{D}'$ devo fare "pochi check". Quindi è facile che $u \in \mathcal{D}^*$ sia anche $\in \mathcal{D}'$

Teorema 24 (Caratterizzazione delle distribuzioni)**.** Sia $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, allora

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall K \Subset \Omega\ \exists c_K \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_0 : \boxed{|u(f)| \leq c_K \|f\|_{C^k(K)}} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq K$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\|f\|_{C^k(K)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha f|$

$\Longleftarrow$) Essendo $u \in \mathcal{D}^*$ lineare basta verificare che sia continua in 0. Facile verificare che se vale la disuguaglianza boxata:

$$f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} 0 \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} 0 = u(0)$$

$\Longrightarrow$) **per assurdo** non vale la disuguaglianza boxata. Ovvero

$$\exists K \Subset \Omega, f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq K \quad \text{t.c.} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : \frac{|u(f)|}{\|f\|_{C^k(K)}} \quad \text{illimitato}$$

ovvero $\forall N \in \mathbb{N}_0$ possiamo trovare $f_N \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f_N) \subseteq K$ tale che

$$\boxed{|u(f_N)| \geq N \|f_N\|_{C^N(K)}} \qquad (\star)$$

Definiamo

$$g_N(x) \coloneqq \frac{1}{N} \frac{f_N(x)}{\|f_N\|_{C^N(K)}}$$

Abbiamo per costruzione $\operatorname{supp}(g_N) \subseteq K$ e $g_N \in \mathcal{D}(\Omega)$, inoltre

$$\begin{cases} |\partial^\beta g_N| \overset{\text{lin}}{=} \frac{1}{N} \frac{|\partial^\beta f_N(x)|}{\|f_N\|_{C^N(K)}} \leq \frac{1}{N} & |\beta| \leq N \\ |u(g_N)| = \left| u\left(\frac{1}{N} \frac{f_N}{\|f_N\|_{C^N(K)}}\right)\right| \overset{\text{lin}}{=} \left| \frac{1}{N} \frac{1}{\|f_N\|_{C^N(K)}} u(f_N) \right| \overset{(\star)}{\geq} \left| \frac{N\|f_N\|_{C^N(K)}}{N\|f_N\|_{C^N(K)}} \right| = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{n\to\infty} g_N(x) = 0 \\ |u(g_N)| \geq 1 \end{cases} \quad ↯$$

□

Definizione 7.2 (Convergenza distribuzionale (debole))**:** Dotiamo $\mathcal{D}'$ di una topologia tramite una nozione di convergenza: sia $\{u_n\}_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, allora

$$u = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{D}' \iff \left[u_n(f) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega) \right] \qquad (\sim\text{"puntuale"})$$

detta debole poiché qualsiasi successione di funzioni che converge nelle usuali topologie converge anche qua, il contrario no (qui "converge quasi tutto")

Teorema 25 (($\mathcal{D}', \mathcal{D}'-\lim$) è completo)**.** Sia $\{u_n\}_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che

$$\left[\mathbb{C}\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n(f) \quad \exists \text{ finito } \forall f \in \mathcal{D}(f) \right] \implies u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

dove u è definito "puntualmente":

$$u(f) \coloneqq \mathbb{C}\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

Definizione 7.3 (Supporto di una distribuzione)**:** Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

$$\operatorname{supp}(u) \coloneqq \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid \exists B_x \subset \mathbb{R}^n \text{ con } x \in B_x :\ u|_{B_x} = 0\}$$

Definizione 7.4 (Derivata distribuzionale (debole))**:** Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La sua derivata lungo la direzione j è $\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita come

$$\partial_j u(f) = -u(\partial_j f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e quindi in generale

$$\partial^\alpha u(f) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Osservazione Tale definizione è coerente con le distribuzioni generate da funzioni $C^\infty((a,b))$ con $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, infatti

$$\partial_x \underbrace{\phi}(f) = \int_a^b \partial_x \phi(x) f(x) dx \overset{\text{per parti}}{=} \cancel{\phi(x) f(x)\Big|_a^b} - \int_a^b \phi(x) \partial_x f(x) dx = -\underbrace{\phi}(\partial_x f)$$

Proposizione 31 (Convergenza delle derivate)**.** Sia Sia $\{u_n\}_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ convergente con $u = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$. Allora

$$\mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha u_n = \partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

ovvero se converge una successione di distribuzioni convergono anche le successioni di qualsiasi derivata

Dimostrazione. Per dimostrare la convergenza in $\mathcal{D}'$ basta dimostrare la convergenza "puntuale", ovvero che converge la valutazione in una test funzione fissata, per ogni test funzione. Vale infatti

$$\partial^\alpha u_n(f) \overset{def}{=} (-1)^{|\alpha|} u_n(\partial^\alpha f) \quad \underset{\mathbb{C}}{\xrightarrow{n\to\infty}} \quad (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha f) \qquad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che $u = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$. Quindi è verificata la def. di convergenza in $\mathcal{D}'$ □

Teorema 26 (Esistenza della primitiva distribuzionale)**.** Ogni $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ammette primitiva $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ovvero

$$v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \implies \exists w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : v = \partial_x w$$

Ossia, dato $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ <u>esiste</u> sempre <u>soluzione distribuzionale</u> $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale

$$\partial_x w = v$$

Inoltre, se $\widetilde{w} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è un'altra primitiva, allora essa differisce da w di una costante (i.e. una distribuzione generata da una funzione costante)

Dimostrazione. .

- <u>Esistenza:</u> dimostriamola costruendo esplicitamente la soluzione w.
  - Sappiamo già parzialmente come di deve comportare w: infatti dall'equazione differenziale discende che $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

    $$v = \partial_x w \implies \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \quad v(f) = \partial_x w(f) \overset{def}{=} -w(\partial_x f) \implies \boxed{w(\partial_x f) := -v(f)}$$

    ovvero w è ben definito su $\mathrm{ran}(\partial_x)$ dove tale operatore è considerato sulle test funzioni:

    $$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_x} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\int_\mathbb{R} dx} \mathbb{C}$$

  - Dimostriamo che (operatori definiti sulle test funzioni)

    $$\boxed{\mathrm{ran}(\partial_x) = \ker(\int_\mathbb{R} dx)}$$

    $\subseteq$) Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, allora

    $$\begin{aligned} \phi \in \mathrm{ran}(\partial_x) &\implies \exists \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \phi = \partial_x \psi \\ &\implies \int_\mathbb{R} \phi dx = \int_\mathbb{R} \partial_x \psi = \psi\Big|_{-\infty}^{+\infty} \overset{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})}{=} 0 \\ &\implies \phi \in \ker(\int_\mathbb{R} dx) \end{aligned}$$

    $\supseteq$) Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, allora

    $$\begin{aligned} \phi \in \ker(\int_\mathbb{R} dx) &\implies \begin{cases} \int_\mathbb{R} \phi dx = 0 \\ \phi(x) = \partial_x \psi(x) dx \text{ con } \psi(x) := \int_{-\infty}^x \phi(y) dy \quad \text{per teo fond. calcolo int.} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \psi \text{ a supp. compatto poiché lo è } \phi \text{ e } \int_\mathbb{R} \phi dx = 0 \\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ NON SO penso perché lo è } \phi \end{cases} \\ &\implies \phi \in \mathrm{ran}(\partial_x) \end{aligned}$$

- Dimostriamo che, fissata una qualunque $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $1(\rho) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$ (normalizzata), vale

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \operatorname{ran}(\partial_x) \oplus \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\rho}$$

  Infatti

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies f = \underbrace{(f - 1(f)\rho)}_{\in \ker(\int_{\mathbb{R}} dx) = \operatorname{ran}(\partial_x)} \underbrace{+1(f)\rho}_{\in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\rho} \quad \in \operatorname{ran}(\partial_x) \oplus \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\rho$$

  dove $1(f) = \int_{\mathbb{R}} f$ e per il primo addendo:

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(f(x) - 1(f)\rho(x)\Big) dx = \int_{\mathbb{R}} f - \overbrace{1(f)}^{=\int_{\mathbb{R}} f} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho}_{=1} = 0 \implies (f - 1(f)\rho) \in \ker(\int_{\mathbb{R}} dx) = \operatorname{ran}(\partial_x) \implies (\star)$$

  Col discorso appena fatto abbiamo dimostrato che $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{ran}(\partial_x) \oplus \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\rho$. Per l'inclusione opposta BOH pensarci.

- Dal punto precedente

$$(\star) \implies \exists F_\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \quad \boxed{\partial_x F_\rho = f - 1(f)\rho}$$

- ***(solo per completezza)*** possiamo definire la proiezione alla prima componente

$$\begin{array}{rrcll} \pi_{\rho,1}: & \mathcal{D}(\mathbb{R}) = & \operatorname{ran}(\partial_x) \oplus \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\rho & \to & \operatorname{ran}(\partial_x) \\ & f = & (f - 1(f)\rho) + 1(f)\rho & \mapsto & (f - 1(f)\rho) \end{array}$$

  e la primitiva sulla prima componente

$$F_\rho(x) := I(\pi_{\rho,1}(f))(x) := \int_{-\infty}^{x} \pi_{\rho,1}(f)(y)dy$$

- Quindi possiamo estendere w a tutto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$w(f) = w[\underbrace{(f - 1(f)\rho)}_{=\partial_x F_\rho} + 1(f)\rho] \overset{lin}{=} w(\partial_x F_\rho) + 1(f) \underbrace{w(\rho)}_{:=C \in \mathbb{C} \text{ arbitr.}} = \boxed{-v(F_\rho) + C(f)}$$

  dove l'arbitrarietà di C discende da quella di ρ. Ovvero

$$\boxed{w := -v(I(\pi_{\rho,1}(f))) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{C} \text{ arbitrario}}$$

  è sempre soluzione.

- Soluzione è distribuzione: essendo $w \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ dobbiamo verificare che sia continuo rispetto al $\mathcal{D}' - \lim$, e basta verificarlo in 0 (essendo lineare), ovvero dobbiamo dimostrare che data $(f_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vale

$$(f_n)_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} 0 \implies w(f_n) \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$$

  dall'ipotesi di convergenza sia $K \Subset \mathbb{R}$ il compatto che contiente $\operatorname{supp}(f_n) \quad \forall n$

  - Dimostriamo che

$$\boxed{I_{f_n} := 1(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0}$$

    Infatti

$$|I_{f_n}| = \left|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|dx \leq m(K) \cdot \sup_K |f_n| = m(K)\|f_n\|_{C^0(\mathbb{R})} \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$$

    ($m(K)$ è la misura di K) usando la convergenza in $\mathcal{D}$ di f_n

  - Sia $F_n^\rho := f_n - I_{f_n}\rho$. Notando che $(F_n^\rho)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dimostriamo che

$$\boxed{(F_n^\rho)_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{n\to\infty} 0}$$

    Infatti $\operatorname{supp}(F_n^\rho) \subseteq K' := K \cup \operatorname{supp}(\rho) \Subset \mathbb{R} \quad \forall n$ e

$$\left\|\partial_x^j F_n^\rho\right\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \left\|\partial_x^j f_n\right\|_{C^0(\mathbb{R})} + |I_{f_n}|\left\|\partial_x^j \rho\right\|_{C^0(\mathbb{R})} \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$$

    avendo usato la convergenza a 0 di f_n e il punto precedente (oltre al fatto che ρ non dipende da n)

Possiamo quindi concludere

$$w(f_n) = -v(F_n^\rho) + I_{f_n} w(\rho) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} 0$$

avendo usato i due punti precedenti e il fatto che $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ovvero è continuo per successioni.

□

8 Distribuzioni a supporto compatto

Definizione 8.1 (Spazio delle test funzioni per distr. a supp. comp.)**:** È $\mathcal{E}(\Omega) := (C^\infty, \mathcal{E}\text{-}\lim)$ con

$$f = \mathcal{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n \iff \forall \boldsymbol{\alpha}, K \Subset \Omega : \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_n - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{C^0(K)} \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} 0$$

Definizione 8.2 (Spazio delle distribuzioni)**:** È $\mathcal{E}'(\Omega)$ ovvero l'insieme dei funzionali $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$ **continui (per successioni)** rispetto al $\mathcal{E}-\lim$, ovvero

$$u \in \mathcal{E}^*(\Omega) \text{ continuo rispetto al } \mathcal{E}-\lim \iff \left[f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{E}}{\longrightarrow}} f \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f) \qquad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) \right]$$

Teorema 27 (Caratterizzazione delle distribuzioni). Sia $u \in \mathcal{E}^*(\Omega)$, allora

$$u \in \mathcal{E}'(\Omega) \iff \exists K \Subset \Omega, c_K \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_0 : \boxed{|u(f)| \le c_K \|f\|_{C^k(K)}} \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$$

Dimostrazione. Analoga a quella di Caratterizzazione delle distribuzioni □

Proposizione 32 (Estensione a funzioni lisce). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \text{supp}(u) \text{ compatto} \implies \exists\,!\,\tilde{u} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) : \tilde{u}(f) = u(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Dimostrazione. .

- Esistenza: data $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\text{supp}(u)$ compatto, sia $\rho \in C_c^\infty(\Omega) \mid \rho|_{\text{supp}(u)=1}$, allora definiamo l'estensione come

  $$\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \qquad \boxed{\tilde{u}(\phi) := u(\rho\phi)}$$

  allora

  $$\begin{aligned} u(\rho\phi) \text{ distribuzione } &\iff |u(\rho\phi)| \le c_K \sum_{|\alpha|\le k} \sup |\partial^\alpha \rho\phi| && \forall K \Subset \Omega, \exists c_K, N \\ &\iff |u(\phi)| \le c_K \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{\text{supp}(u)} |\partial^\alpha \phi| && \exists K = \text{supp}(u), \exists c_K, N \quad (\spadesuit) \\ &\iff \tilde{u} \text{ distribuzione} \end{aligned}$$

  in ($\spadesuit$) abbiamo scambiato derivata e integrale grazie alla regola di Leibnitz.

- Unicità: sia $\sigma \in C_c^\infty$ con $\sigma \neq \rho$ ma $\sigma|_{\text{supp}(u)} = \rho|_{\text{supp}(u)} = 1$. Allora

  $$u(\rho\phi) - u(\sigma\phi) = u((\rho - \sigma)\phi) \overset{\star}{=} 0 \quad \forall \phi \in C^\infty \implies u(\rho\phi) = u(\rho\sigma)$$

  dove in $\star$ poiché $\text{supp}(u) \cap \text{sup}((\rho - \sigma)\phi) = \emptyset$.

□

Teorema 28 (Espansione di Taylor, stima del resto, derivata del prodotto). Sia $\phi \in C^\infty(\Omega), x_0 \in \Omega$, allora $\forall N \in \mathbb{N}_0 \quad \exists r > 0$ con $B_r(x_0) \coloneqq B_r \subseteq \Omega$ tale che, $\forall h \in B_r(0)$ vale

(I) **Espansione di Taylor in $B_r(x_0)$:**

$$\phi(x_0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha \phi(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + R_{N+1,x_0}[\phi](h)$$

(II) **Resto di Lagrange** in x_0 è

$$R_{N+1,x_0}[\phi](h) = \sum_{|\eta| \leq N+1} \frac{\partial^\eta \phi(x_0 + th)}{\eta!} h^\eta \qquad \text{per qualche } t \in (0,1)$$

(III) **Stima delle derivate del resto:** per $|\beta| \leq N+1$

$$\left|\partial^\beta R_{(N+1),x_0}[\phi](h)\right| \leq |h|^{N+1-|\beta|} \cdot \sum_{|\eta| = N+1-|\beta|} \frac{\sup_{|\xi| \leq |h|} |\partial^\eta \phi(x_0 + \xi)|}{\eta!}$$

(IV) (non c'entra) **Derivata del prodotto:**

$$\partial^\alpha(\chi\psi) \coloneqq \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta \chi \cdot \partial^\gamma \psi$$

Teorema 29 (Caratterizzazione distr. a supporto su un punto). Sia $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) = \{0\}$. Allora esistono $N \in \mathbb{N}_0, \alpha$ multi-indice e $c_\alpha \in \mathbb{C}$ tali che

$$u_0 = \sum_{|\alpha \leq N|} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

Dimostrazione. Premettiamo un Lemma.

Lemma 7 . Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp}(u) = \{0\}$, allora se $\exists N \in \mathbb{N}_0$ tale che

$$\partial^\alpha f(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq N \implies u(f) = 0$$

Dimostrazione. Definiamo $h \in C_c^\infty$ tale che

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > 1 \\ C^\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad h_\epsilon(x) \coloneqq h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad \epsilon \in (0,1)$$

Vediamo che $h_\epsilon \in C_c^\infty \implies fh_\epsilon \in \mathcal{D}$ e inoltre

$$(f - fh_\epsilon)|_{B_\epsilon(0)} = 0 \overset{\text{supp}(u)=\{0\}}{\implies} u(f - fh_\epsilon) \overset{lin}{=} u(f) - u(fh_\epsilon) = 0 \implies \boxed{u(f) = u(fh_\epsilon)}$$

(ovvero u non fa distinzione tra f e fh_ϵ). Consideriamo l'espansione di Taylor (I) di f in $B_\epsilon(0)$ (con h di (I) $= x$):

$$f(x) = \underbrace{\cancel{\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha}}_{=0 \text{ per ip.}} + R_{N+1,0}[f](x) \qquad \text{in } B_\epsilon(0) \qquad \text{(V)}$$

Allora

$$
\begin{aligned}
\sup_{B_\epsilon} |\partial^\alpha (f h_\epsilon)| &= \sup_{B_\epsilon} \left| \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (\partial^\beta f) \cdot (\epsilon^{-|\gamma|} \partial^\gamma h) \right| && \text{da (IV) e } \partial^\gamma h_\epsilon = \epsilon^{-|\gamma|}\partial^\gamma h \\
&\le \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \epsilon^{-|\gamma|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \boxed{\sup_{B_\epsilon} |\partial^\beta f|} \cdot \sup_{B_\epsilon} |\partial^\gamma h| \\
&\le \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} \epsilon^{-|\gamma|} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \boxed{|\epsilon|^{N+1-|\beta|} \cdot \sum_{|\eta|=N+1-|\beta|} \frac{\sup_{|\xi|\le\epsilon} |\partial^\eta f(\xi)|}{\eta!}} \cdot \sup_{B_\epsilon} |\partial^\gamma h| && \text{da (V) e (III) con sup e } h = \text{max} = r = \epsilon \\
&\le \alpha! \epsilon^{N+1-(|\beta|+|\gamma|)} \underbrace{\sum_{\beta,\gamma,\eta} \frac{1}{\beta!\gamma!\eta!} \sup_{B_1} |\partial^\gamma h| \sup_{B_1} |\partial^\eta g|}_{:=\Gamma_N} \\
&\le \alpha! \epsilon^{N+1-|\alpha|} \cdot \Gamma_N && \text{con } \Gamma_N \text{ cost. e poiché } |\beta|+|\gamma|=|\alpha|
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
|u(f)| &= |u(f h_\epsilon|) \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le N} \sup_{B_\epsilon} |\partial^\alpha (f h_\epsilon)| && \text{essendo distrib. e con } K := \overline{B_1(0)} \\
&\le c\Gamma_N \sum_{|\alpha|\le N} \alpha! \epsilon^{N+1-|\alpha|} && \text{per sopra} \\
&\le c\Gamma_N \max_{|\alpha|\le N} (\alpha!) \sum_{|\alpha|\le N} \epsilon^{N+1-|\alpha|} \\
&= 0 && \text{per l'arbitrarietà di } \epsilon \in (0,1)
\end{aligned}
$$

□

Premesso il lemma, data $f \in \mathbb{R}^\setminus$, da (I) possiamo fare **espansione di Taylor in** $B_r(0)$ e per linearità

$$
u(f) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} u(x^\alpha) + \cancel{u(R_{N+1,0}[f](x))}
$$

dove il primo termine è ben definito poiché $u \in \mathcal{E}'$, e il secondo termine è zero poiché la funzione $R_{N+1,0}[f](x)$ soddisfa il precedente lemma, infatti per la (III) calcolata in 0:

$$
\partial^\beta R_{N+1,0}[f](0) = 0 \quad \forall |\beta| \le N+1
$$

Allora ponendo $b_\alpha := u(x^\alpha)$ abbiamo

$$
u(f) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{b_\alpha}{\alpha!} \delta(\partial^\alpha f) = \sum_{|\alpha|\le N} \overset{:=c_\alpha}{\boxed{\frac{b_\alpha}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}}} (\partial^\alpha \delta)(f)
$$

□

9 Prodotto tensore

Definizione 9.1 (Prodotto tensore di funzioni lisce e distribuioni generate)**:** Siano $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora

- **Prodotto tensore di funzioni lisce:**

$$
\phi \otimes \chi(x,y) := \phi(x) \cdot \chi(y)
$$

- **Distrib. generata dal prod. tensore di funzioni su tensori puri:**

$$
\underbrace{\phi \otimes \chi}(h \otimes f) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} d^n x d^m y \left[\phi(x)\chi(y)\right] \left[h(x) f(y)\right] = \underbrace{\phi}(h) \cdot \underbrace{\chi}(f)
$$

- **Distrib. generata dal prod. tensore di funzioni in generale:**

$$\underbrace{\phi \otimes \chi}(g) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} d^n x d^m y \left[\phi(x)\chi(y)\right]\left[g(x,y)\right] = \underbrace{\phi}\left(\underbrace{\chi}(g)\right)$$

Teorema 30 (Valutazione parziale)**.** Siano $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}^m$. Siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\forall \overline{y} \in \Omega_y \quad \exists B_\delta(\overline{y}) \mid \text{supp}(\phi_y(x)) \subset K_{\overline{y}} \text{ compatto } \forall y \in B_\delta(\overline{y})$$

ovvero ϕ è a supp. compatto solo lungo le x. Allora

$$y \mapsto u(\phi_y) \in C^\infty(\Omega_y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y^\alpha u(\phi_y) = u\Big(x \mapsto (\partial_y^\alpha \phi(x,y))|_y\Big)(y)$$

è equivalente allo scambio di derivata e integrale.

Dimostrazione. Definiamo

$$\Upsilon(y) := u(\phi_y(x))$$

- $\Upsilon \in C^0(\Omega_y)$: per $a \in B_\delta(0)$ definiamo

$$\phi_a(x,\overline{y}) := \phi(x, \overline{y}+a) - \phi(x,\overline{y})$$

e allora per linearità p. 90

- $\Upsilon \in C^1(\Omega_y)$:
- $\Upsilon \in C^\infty(\Omega_y)$:

□

Corollario 8 (corollario valutazione parziale)**.** Siano $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}^m$. Siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ e $g \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$, ovvero g è a supp. compatto lungo sia x che y. Allora

$$u(g_y) \in C_c^\infty(\Omega_y)$$

Teorema 31 (Prodotto tensore di distribuzioni)**.** Siano $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\Omega_y \subseteq \mathbb{R}^m$. Siano $u \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ e $v \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$ allora

$$\exists!\ u \otimes v \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y) \mid \boxed{u \otimes v(f \otimes h) = u(f) \cdot v(h)} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega_x), h \in \mathcal{D}(\Omega_y)$$

Dimostrazione. .

- Esistenza (ansatz): Dal corollario valutazione parziale, data $g \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y) \implies u(g_y) \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ e quindi è naturale definire

$$\boxed{u \otimes v(g) := v(u(g_y))} \qquad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$$

sicuramente questa definizione implica quella del teorema.

- Esistenza (verifica che ansatz è distribuzione): dobbiamo verificare Caratterizzazione delle distribuzioni. Sia K il supporto compatto di g e K_x, K_y le proiezioni. Basta applicare Caratterizzazione delle distribuzioni su v, poi Valutazione parziale per la derivata e di nuovo Caratterizzazione delle distribuzioni su u.

$$\begin{aligned}
v(u(g_y)) &\leq C_{K_y} \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{y \in K_y} \left|\partial^\beta u(g_y)\right| && v \text{ distribuzione} \\
&= C_{K_y} \sum_{|\beta| \leq N} \sup \left|u(\partial_y^\beta g_y)\right| && \text{Valutazione parziale} \\
&\leq C_{K_y} \sum_{|\beta| \leq N} \sup \left| C_{K_x} \sum_{|\alpha| \leq M} \sup_{x \in K_x} \left|(\partial_x^\alpha \partial_y^\beta g)(x,y))\right| \right| && u \text{ distribuzione} \\
&\leq C \sum_{|\gamma| \leq N+M} \sup_K \left|(\partial^\gamma g(x,y))\right|
\end{aligned}$$

OK

- Unicità: sappiamo che $\mathcal{D}(\Omega_x) \otimes \mathcal{D}(\Omega_y)$ denso in $\mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$. Da un esercizio sappiamo che

$$u(f) = 0 \quad \forall f \in X \text{ denso in } \Omega \implies u \equiv 0$$

allora dalla linearità delle distribuzioni e solito giochetto differenza abbiamo la tesi.

□

Proposizione 33 (Proprietà prodotto tensore)**.** Solito setting di questa parte. Valgono

(i) $u \otimes v = v \otimes u$

(ii) Se α e β sono multi-indici relativi rispettivamente a Ω_x e Ω_y, allora

$$\partial_x^\alpha \circ \partial_y^\beta (u \otimes v) = \partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v$$

(iii) Il prodotto tensore è **separatamente bilineare e continuo** su $\mathcal{D}'(\Omega_x) \otimes \mathcal{D}'(\Omega_y)$

(iv) $\text{supp}(u \otimes v) = \text{supp}(u) \times \text{supp}(v)$

Dimostrazione. .

i) Dalla completa simmetria di u, v in Prodotto tensore di distribuzioni allora tutto vale se vengono scambiati e l'unicità dice che sono uguali.

ii)-iii) Conseguenza di i) e def. derivata distribuzionale.

□

10 Convoluzione

Teorema 32 (Continuità convoluzione)**.** Valgono

(i) Sia $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tale che $\{v_j\}_j \xrightarrow[\mathcal{D}']{j \to \infty} v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\mathcal{D}'\text{-}\lim_{j \to \infty} u * v_j = u * v$$

(ii) La stessa cosa vale se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(v_j) \subset K$ compatto $\forall j$.

Dimostrazione. Per (i) basta vedere che

$$\lim_{j \to \infty} u * v_j(f) \overset{def}{=} \lim_{j \to \infty} v_j\Big(u(f(x+y))\Big) = v\Big(u(f(x+y))\Big)$$

dove abbiamo usato l'ipotesi di convergenza $\{v_j\}_j \xrightarrow[\mathcal{D}']{j \to \infty} v$. Per (ii) analogo

□

Teorema 33 (Mollificazione)**.** Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\rho * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

nel senso che $\rho * u$ è una distribuzione generata da una funzione liscia, detta **regolarizzazione** di u. Cioè la convoluzione tra una qualunque distribuzione e una funzione C_c^∞ è una funzione liscia

Dimostrazione. □

Lemma 8 (Regolarizzazione)**.** Sia $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$. Allora

$$\rho_n := n^d \rho(nx) \implies \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n \to \infty} \underbrace{\rho_n} = \delta_0$$

Dimostrazione. fare il limite valutato in f, poi cambio variabile $y = nx$ e tiro dentro il limite. □

Teorema 34 . $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Dimostrazione. Indichiamo con ρ_n la distrib. generata dal ρ_n del Regolarizzazione.

- C^∞ denso in $\mathcal{D}'$: ogni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ può essere approssimata arbitrariamente bene da una successione di funzioni lisce $\rho_n * u$ (so che tale distribuzione è generata da una funzione liscia da Mollificazione), infatti per Continuità convoluzione e Regolarizzazione:

$$\mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty}(u * \rho_n) = u * \left(\mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty}\rho_n\right) = u * \delta = u$$

- C_c^∞ denso in $\mathcal{D}'$: dobbiamo rendere il loro supporto compatto. Definiamo

$$\begin{cases} \sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \sigma|_{B_1(0)} \equiv 1 & \text{funzione adiabatica di cut-off} \\ \sigma_n(x) \coloneqq \sigma\left(\frac{x}{n}\right) & \text{si allarga con } n \to \infty \\ u_n \coloneqq \sigma_n \cdot (u * \rho_n) & \text{approx. sempre migliori (funioni lisce) di } u \text{ "cutoffate"} \end{cases}$$

Per $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ abbiamo

$$\begin{aligned} u_n(f) &= \sigma_n \cdot (u * \rho_n)(f) \\ &= u * \rho_n(\sigma_n f) \\ &= u * \rho_n(f) && \text{per } n \geq \overline{n} \text{ suff. grande } \sigma_n \equiv 1 \text{ su tutto supp}(f) \\ &= u * \delta(f) = u(f) && \text{per } n \to \infty \end{aligned}$$

Ho quindi dimostrato che $\forall u \in \mathcal{D}'$ posso trovare una successione $u_n \coloneqq \sigma_n \cdot (u * \rho_n)$ di funzioni lisce (lo so da Mollificazione) a supporto compatto (per come l'ho definita grazie alla funzione di cut-off) tale che il $\mathcal{D}'$-lim è u.

□

10.1 Soluzioni fondamentali

Definizione 10.1 : Se P è operatore lineare, E è soluzione fondamentale per P se

$$PE = \delta$$

Proposizione 34 . Abbiamo

- Posso scrivere ogni operatore differenziale $P = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ come convoluzione con $P\delta$:

$$Pu = \delta * Pu = P\delta * u$$

- Soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare $Pu = v$: essa è $E * v$ con E soluzione fondamentale, infatti

$$P(E * v) = P\delta * (E * v) = (P\delta * E) * v = (KE) \star v = \delta * v = v$$

11 Trasformata di Fourier

the Fourier transform interchanges smoothness conditions with rate conditions on vanishing at infinity

Teorema 35 (Esistenza e proprietà trasformata in L^1). Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora la sua trasformata esiste, è continua e limitata ($\in L^\infty$) con massimo

$$\left|\widehat{\phi}\right| \leq \|\phi\|_{L^1}$$

(ci sta, perché la sto integrando contro una funzione di modulo 1). Inoltre se $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ valgono

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x)\psi(x)$$

ovvero distribuzionalmente

$$\widehat{\phi}(\psi) = \phi(\widehat{\psi})$$

(ii) $\phi * \psi$ esiste $\forall^\infty x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi * \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\widehat{\phi * \psi} = \widetilde{\phi} \cdot \widehat{\psi}$

Dimostrazione. La trasformata è continua per il teorema di convergenza dominata. È limitata con disug. classiche

$$\left|\widehat{\phi}(k)\right| = \left|\int \phi e^{ixk}\right| \leq \int \left|\phi e^{ixk}\right| = \int \phi = \|\phi\|_{L^1}$$

(i) è integrale a variabili separate, quindi è prodotto degli integrali. Applicare def. trasformata e usare commutatività del prodotto degli integrali

(ii) Il seguente integrale esiste

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\phi(x)\psi(y-x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^2}$$

quindi la funzione integranda è misurabile e posso calcolare l'integrale con Fubini.

(iii) applicando definizioni, scambiando integrali e con cambio di variabile $y - x := y'$ e vedendo $e^{ik\cdot y} = e^{iky'}e^{ikx}$

□

12 Distribuzioni temperate

Parte III
Esempi

Oggetto	Esempi	Controesempi
Operatori lineari/continui	operatore moltiplicazione su $L^2(a,b)$	operatore moltiplicazione su $L^2(\mathbb{R})$
		operatore derivazione su $C^1[0,1]$
	operatore parità (è unitario/rotazione)	(vedi succ. $f_n = \sin(2\pi nx)$ in $\|\cdot\|_\infty$)
Operatori compatti	Integrale (contro una fun.) in $C([0,1],\mathbb{R})$ $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt \quad g \in C([0,1,]\mathbb{R})$	

Parte IV
Recap

13 Distribuzioni

13.1 Insiemi di operatori

13.2 Insiemi di funzioni scalari

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funzione. Qui trattiamo gli insiemi di tali funzioni, indicati con *[simbolo]*$(\Omega) \coloneqq \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid$ *[proprietà]*$\}$. Tutti gli insiemi di funzioni seguenti hanno la struttura di **spazio vettoriale** tramite le usuali operazioni di somma e prodotto per scalare.

- a.e. = quasi ovunque (*almost everywhere*)
- $\forall^\infty$ per quasi-ogni (insiemi di misura nulla)

13.2.1 Spazi

Simbolo	Nome	Definizione	Topologia	Tipo	Proprietà
$L^p(\Omega,\mu)$	Sp. di Lebesgue	$p \in [1,+\infty)$, f integ. con p-norma finita $L^p \approx L^p/\sim$ classi delle f uguali a.e.	$\Vert f\Vert_p := \left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$	Banach	Dis. Holder Dis. Minkowski $L^p \overset{p>q}{\hookrightarrow} L^q$ (incl. continua)
$L^2(\Omega)$	Quadrato sommabili	come sopra, $p=2$	$(f,g) := \left(\int_\Omega \lvert f\rvert\lvert g\rvert \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$	Hilbert	
L^∞			$\Vert f\Vert_\infty := \inf\{C \ge 0 \mid \lvert f(x)\rvert \le C \forall^\infty x \in \Omega\}$ $\approx \sup\{\lvert f(x)\rvert : x \in \Omega\}$	Banach. non sep.	
L^1_{loc}	Local. integ.				
$W^{k,p}$	Spazio di Sobolev	$\subset L^p$ con deriv. deboli fino a k in L^p $\mathcal{H}^k := W^{k,2}$			
l^p	Succ. p-sommabili	come L^p su sp. di misura $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \#)$			$(l^p)^* \cong l^{p'}$ (exp. coniug)
l^∞			$\Vert x\Vert_{l^p} := \lim_{p\to\infty} \Vert x\Vert_{l^p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lvert x_n\rvert$	Banach non rifl. non sep.	Strong dual space di l^1
C	convergenza	Succ. l^∞ converg.			
C_0		Succ. converg. a 0			Chiuso in l^∞
C_{00}		Succ. definitivamente 0			$\overline{C_{00}} = C_0$ in l^∞ denso in l^p
C^0	Continue	f continue	$\Vert f\Vert_{C^0} := \Vert f\Vert_\infty = \sup\{\lvert f(x)\rvert : x \in \Omega\}$		
C^k	Diff. di classe k	continue con k derivate continue	$\Vert f\Vert_{C^k(\Omega)} := \sum_{\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert \le k} \Vert\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\Vert_{C^0}(\Omega)$		
C^∞	Lisce				
C^ω	Analitiche				
C^0_c	Cont. supp.comp.				denso in L^p se $p \in [0,+\infty)$
C^k_c		$C^k_c := \{f \in C^k(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\}$			
$C^\infty_c(\Omega)$	Lisce supp.comp.	$C^\infty_c(\Omega) := \bigcap_{k>0} C^k_c(\Omega)$			
C^k_0		svaniscono sul bordo			
$\mathcal{D}(\Omega)$	Test funzioni	$(C^\infty_c, \mathcal{D}\text{-}\lim)$	$f = \mathcal{D}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$ se $\exists K \Subset \Omega \mid \operatorname{supp}(f_n) \subseteq K$ $\forall \boldsymbol{\alpha} : \Vert\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_n - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\Vert_{C^0(\Omega)} \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$		$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = \mathcal{E}(\Omega)$
$\mathcal{E}(\Omega)$	Test fun, per supp.comp.	$(C^\infty, \mathcal{E}\text{-}\lim)$	$f = \mathcal{E}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$ se: $\forall \boldsymbol{\alpha}, K \Subset \Omega : \Vert\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f_n - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\Vert_{C^0(K)} \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$		
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Sp. di Schwartz/rapida decres.	$(C^\infty(\mathbb{R}^n), \Vert\phi\Vert_{\alpha,\beta} < +\infty \ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	$\Vert\phi\Vert_{\alpha,\beta} := \left\Vert x^{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} \phi(x)\right\Vert_{C^0(\mathbb{R}^n)}$ (seminorma) Conv. indotta: $f = \mathcal{S}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n \iff$ $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} : \Vert f_n - f\Vert_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \xrightarrow[\mathbb{C}]{n\to\infty} 0$		

13.2.2 Spazi duali

Simbolo	Nome	Definizione	"Topologia"	Proprietà
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Distribuzioni	Duale continuo di $\mathcal{D}(\Omega)$: $f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow}} f \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f)$	Converg. (debole/distrib.): $u = \mathcal{D}'\text{-}\lim_{n\to\infty} u_n$ se $u_n(f) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$ (∼"puntuale")	Caratteriz.: $u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, allora $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff \forall K \Subset \Omega\ \exists c_K \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_0 :$ $\lvert u(f)\rvert \leq c_K \lVert f\rVert_{C^k(K)} \quad \forall f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq K$
$\mathcal{E}'$	Distr. a supporto comp.	Duale continuo di $\mathcal{E}(\Omega)$: $f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{E}}{\longrightarrow}} f \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f)$		Caratteriz.: $u \in \mathcal{E}^*(\Omega)$, allora $u \in \mathcal{E}'(\Omega) \iff \exists K \Subset \Omega, c_K \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_0 :$ $\lvert u(f)\rvert \leq c_K \lVert f\rVert_{C^k(K)} \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$ $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ $\overline{\mathcal{E}'(\Omega)} = \mathcal{D}'(\Omega)$
$\mathcal{S}'$	Distr. temperate	Duale continuo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $f_n \overset{n\to\infty}{\underset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}} f \implies u(f_n) \overset{n\to\infty}{\underset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} u(f)$		Caratteriz.: $u \in \mathcal{S}^*(\Omega)$, allora $u \in \mathcal{S}'(\Omega) \iff \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\ \exists c \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}_0 :$ $\lvert u(f)\rvert \leq c\lVert\phi\rVert_{\alpha,\beta} \quad \lvert\alpha\rvert, \lvert\beta\rvert \leq k$