

Zpracované otázky k maturitě z matematiky na Gymnáziu Jírovцова 8 pro rok 2020 Verze 1.1

Nějako jsem to zpracoval, nějak omdmatureoval (za 1) a teď jsem to nějak o
upravil, abych to mohl nějak nasdílet dalším generacím

Jakub Ambroz 8.E



Gymnázium, České Budějovice, Jírovцова 8
Česká republika
18. srpna 2020

Meta

0.0.1 Verze

Public 1.1, ze dne 18. srpna 2020

0.0.2 Kde stáhnout?

- <https://github.com/AmbryTheBlue/Maturitni-otazky-mat>

0.1 O díle

- Je to většinou jen z wiki či tabulek, ale někde jsem využíval stránky Karlovky nebo Masarykovy univerzity. Nebo často taky stránky matematika.cz. Ale v některých případech jsem využil i vlastní úvahu!
- Cílem bylo projít si termínů, které by se mohli objevit při maturitě a také prohloubení znalostí o \LaTeX prostředí. A když už to je, tak jsem se to rozhodl darovat lidu.
- Je to pořád docela WIP, ale účel to splnilo! Pokud někde narazíte na nějaké nejasnosti, tak **dejte vědět a možná to opravím**. (seznam už známých nedostatků je v přiloženém souboru TODO-list.txt popřípadě jako issues na githubu)
- Bohužel jsou způsoby zápisu občas nekonzistentní. Viz citát z tabulek „Norma ČSN ISO 31-11 není závazná a má pouze charakter doporučení“. TO by vysvětlovalo, proč jsem některý věci v životě neviděl, protože prostě vypadají blbě a nikdo je nechce používat xD. Některý věci mi zase třeba přijdou v pohodě a asi se uchytí, protože kopírují zahraniční styly zápisu. Ale v české literatuře/ na hodinách se s nimi možná nesetkáte tolik.
- **(nekomerčně) Šířte a upravujte dílo a jeho deriváty, jak uznáte za vhodné** (jedinou podmínkou je zachování jména autora a zachování těchto dvou pravidel). Nenesu zodpovědnost, za nic co vám čtení tohoto způsobí. Pokud si odsud odnesete něco, kvůli čemu nedáte maturitu není to můj problém. **Plné znění licence je v přiloženém souboru licence.txt**

- Pokud vás zajímá používání \LaTeX , tak nějaké typy a moje osobní postřehy jsou na konci tohoto souboru (jak .pdf tak .tex)

1 Logická výstavba matematiky

1.0.1 Výrok

Výrok je nějaké sdělení, oznamovací věta nebo tak něco. Má smysl pokládat otázku je-li to pravda nebo ne. Můžeme výrokům přiřadit *pravdivostní hodnotu* 1 (pro *pravdivé výroky*) nebo 0 (pro *nepravdivé výroky*). Výroky se značí malými písmeny a, b, \dots, u, v, \dots (Na wiki se používají i velká písmena)

1.1 Logické operace

Pomocí logických operací vznikají z jednodušších výroků *výroky složené*.

1.1.1 Negace

Negace výroku a se značí $\neg a$ a říká nám, že není pravda, že a . Má pravdivostní hodnotu 1, má-li původní výrok hodnotu 0. Hodnoty 0 nabývá negace pokud je výrok pravdivý (tj. 1). Můžeme se setkat i s dalšími notacemi: a' nebo $\sim a$ nebo $\neg a$ nebo $!a$ nebo \bar{a} (nebo \overline{a}).

1.1.2 Konjunkce

Konjunkce (neboli také *logické a*) výroků a, b se značí $a \wedge b$ a říká, a a zároveň b . Má pravdivostní hodnotu 1, je-li a 1 a zároveň b je 1.

1.1.3 Disjunkce

Disjunkce (neboli také *logické nebo*) se značí $a \vee b$ a čte se a nebo b . Má pravdivostní hodnotu 1, je-li alespoň jeden z výroků pravdivý.

1.1.4 Úplná disjunkce

Úplná disjunkce (neboli také *logické exkluzivní (/ vylučovací) nebo*) se značí $a \underline{\vee} b$ (nebo $a \oplus b$) a čte se jen a nebo jen b . Má pravdivostní hodnotu 1, je-li právě jeden z výroků pravdivý.

1.1.5 Implikace

Značí se $a \implies b$ (nebo $a \Rightarrow b$ (také se na setkáme s $a \rightarrow b$ nebo $a \longrightarrow b$)) a samozřejmě může být šipka otočená i druhým směrem, ale to pak znázorňuje obrácenou implikaci (viz sekce 1.1.8)) a říká, že jestliže platí a pak platí b (to znamená, že nám a neříká nic o b , pokud je a 0). Terminologie:

- a je *postačující podmínka* pro b
- b je *nutná podmínka* pro a
- a - *předpoklad* implikace
- b - *závěr* implikace

1.1.6 Ekvivalence

Ekvivalence se značí $a \iff b$ (nebo $a \Leftrightarrow b$ (také $a \leftrightarrow b$ a $a \longleftrightarrow b$)) a říká, že a platí právě tehdy, když b . Terminologie:

- a je ekvivalentní s b
- a platí právě tehdy, když platí b (anglicky "If and only if"). Tj. b platí vždy, když platí a a pouze, když platí a .
- a je *nutná a postačující* podmínka pro b

Ekvivalence je ekvivalentní s $(a \implies b) \wedge (b \implies a)$.

1.1.7 Tabulky pravdivostních hodnot

Tabulka 1 obsahuje základní složené výroky a jejich pravdivostní hodnoty. Tabulka 2 obsahuje negace složených výroků.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \underline{\vee} b$	$a \implies b$	$a \iff b$	$a \Leftarrow b$
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1

Tabulka 1: Tabulka pravdivostních hodnot

výrok	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \underline{\vee} b$	$a \implies b$	$a \iff b$
jeho negace	a	$\neq a \vee \neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$a \iff b$	$a \wedge \neg b$	$a \underline{\vee} b$

Tabulka 2: Tabulka negací složených výroků

1.1.8 Další pojmy

- *Obrácená implikace* k implikaci $a \implies b$ je implikace $b \implies a$ (Tyto implikace nejsou ekvivalentní)
- *Obměněná implikace* k implikaci $a \implies b$ je implikace $\neg b \implies \neg a$. (Tyto implikace jsou ekvivalentní).
- *Tautologie* je složený výrok, který je vždycky pravdivý. Nezáleží na pravdivostních hodnotách výroků ze kterých je složen. Např.:
 $(a \implies b) \iff (\neg a \vee b)$ nebo $a \vee \neg a$.

1.1.9 Kvantifikované výroky

Obecný kvantifikátor se značí \forall , čte se „pro všechna“.

Existenční kvantifikátor se značí \exists , čte se „existuje (alespoň jednom)“

Existenční kvantifikátor s jednoznačností se značí $\exists!$, čte se „existuje právě jedno“

Výrok	Jeho negace
$\forall x \in \mathbb{M}; V(x)$	$\exists x \in \mathbb{M}; \neg V(x)$
$\exists x \in \mathbb{M}; V(x)$	$\forall x \in \mathbb{M}; \neg V(x)$

Tabulka 3: Tabulka negací kvantifikovaných výroků

Negace kvantifikovaných výroků, tabulka 3

1.2 Základní pojmy

1.2.1 Matematické výrazy

Výraz je konečná kombinace symbolů, které tvoří korektně vytvořenou formuli. *Matematické symboly* mohou být čísla, proměnné, operace, funkce, závorky ...

1.2.2 Výroková forma

Výroková forma je výraz obsahující proměnné, za které když dosadíme, tak se z něho stane výrok.

1.2.3 Axiom a soustava axiomů

Axiom je tvrzení, které se předem pokládá za platné, takže se nedokazuje. Základem logické výstavby matematiky je *soustava axiomů*. Ta musí být:

- *Bezesporná* - není možné z ní vyvodit tvrzení a zároveň jeho negaci
- *Nezávislá* - jeden axiom není možné vyvodit z ostatních axiomů
- *Úplná* - lze z ní vyvodit pravdivost nebo nepravdivost dalších matematických tvrzení

1.2.4 Definice

Definice nám slouží k *definování* pojmu. Definice definice je tedy (pokud možno) jednoznačné určení významu nějakého pojmu. Je to tvrzení, které nám říká význam slova. V matematice: Je definice vymezení pojmu pomocí základních pojmů nebo pojmů, které byly definovány předtím.

1.2.5 Matematická věta

Matematická věta je tvrzení, jehož pravdivost musí být dokázána. Při důkazu se vychází z axiomů či již dokázaných vět.

1.2.6 Důkaz

Důkaz je úvaha, která zdůvodňuje platnost matematické věty.

Přímý důkaz se používá k dokázání matematických vět tvaru implikace, tj. „jestliže platí a , pak platí b “. Spočívá v tom, že se postupnými implikacemi z vlastností výroku a dá odvodit výrok b . Důkaz spočívá v nalezení takové řady výroků, aby platilo:

$$(a \implies x_1) \wedge (x_1 \implies x_2) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \implies x_n) \wedge (x_n \implies b) \quad (1)$$

Důkaz sporem je založen na vlastnosti implikací: platí-li $a \implies b$ a neplatí-li výrok b , neplatí ani výrok a . Používá se tak, že prokážeme, že dojdeme ke sporu, platí-li předpoklad.

Důkaz nepřímý spočívá na tom, že implikace $a \implies b$ je ekvivalentní s $\neg b \implies \neg a$. Zdůvodnění: Platí-li a musí platit b , v opačném případě by platilo $\neg b$. To znamená, že když platí $\neg b$, tak musí platit $\neg a$. Lze ho převést na důkaz sporem.

Matematickou indukce je způsob dokazování matematických vět a tvrzení, které se používá, když chceme dokázat, že platí pro všechna přirozená čísla (případně jinou, předem danou nekonečnou posloupnost). Chceme-li dokázat, že věta platí pro všechna n , tak dokážeme, že platí pro nejmenší číslo, tedy $n = 1$ (někdy $n = 0$). A poté dokážeme že platí-li to pro m pak to platí i pro $m + 1$ - to se nazývá *indukční krok*. Ukázka:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 + 2 + 3 + \dots + m &= \frac{m(m+1)}{2} && \text{Přičteme } m+1 \text{ a upravíme:} \\ \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} && \text{Dále upravíme:} \\ 1 + 2 + \dots + (m+1) &= \frac{(m+1)((m+1)+1)}{2} && \text{to je stejné tvrzení jako pro } n = m+1 \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že tvrzení pro $n = m + 1$ je pravdivé, pokud je pravdivé tvrzení pro $n = m$.

Důkazové úlohy o dělitelnosti - důležité pravidlo: Součin n po sobě jdoucích čísel je vždy dělitelný číslem n .

Ambryho znalost z olympiád: máme 2 čísla u nichž víme zbytek po dělení x , tak jejich součet bude mít zbytek po dělení x rovný zbytku po dělení součtu zbytků po dělení x daných 2 čísel.

1.3 Číslo

Číslo je abstraktní entita využívaná pro vyjádření množství nebo pořadí.

1.3.1 Číslice

Číslice (neboli *cifra*) je grafický znak používaný k reprezentaci čísel. My používáme arabské číslice.

1.3.2 Číselná soustava

Je způsob reprezentace čísla.

Poziční číselná soustava má nějakou *bázi* (neboli *základ*), což je většinou kladné celé číslo definující počet číslic, které jsou v soustavě k dispozici. Všechny možná čísla můžeme získat jako bázi umocněnou na pozici číslice a vynásobením příslušnou číslicí a sečtením. My používáme běžně *desítkovou* (neboli *dekadickou*) soustavu. Ale soustava může být libovolného základu, př. z populárních: 12 (je kůl, dřív populárnější viz tucet a veletucet), 2, 8, 16 (IVT).

Můžeme zapsat i desetinná čísla, pomocí části za desetinnou čárkou (respektive tečkou v zahraničí) a pro ně jsou mocniny základu záporné. Příklad:

$$345,789 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} \quad (2)$$

$$\frac{758}{999} = 0, \overline{758} \quad (3)$$

Nepoziční číselné soustavy - např. *Římské číslice*, ale dnes se žádné běžně nepoužívají.

1.4 Dělitelnost

1.4.1 Prvočíslo

Prvočíslo je přirozené číslo, které má právě 2 dělitele. Jeden z nich je 1 a druhý je číslo samotné. Tzn. nepatří tam 1, protože ta má jen jednoho dělitele a to sama sebe.

1.4.2 Číslo složené

Jsou taková čísla, která mají alespoň 3 různé dělitele (tzn. sebe sama, jedničku a ještě jedno jiné číslo). Každé přirozené číslo větší než 1 (to není ani složené číslo ani prvočíslo) je buď prvočíslo nebo číslo složené. Každé složené číslo lze zapsat jako násobek 2 menších čísel. Z zoho vyplývá *Základní věta aritmetiky* viz 1.4.3.

1.4.3 Základní věta aritmetiky

Říká, že každé přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel - tzn. *kanonický rozklad čísla na prvočinitele*. Každé prvočíslo se rovná první mocnině sama sebe a každé složené číslo se dá zapsat jako násobek 2 menších čísel (a ty jsou buď prvočísla, nebo se čísla složená dále rozloží).

1.4.4 Kritéria dělitelnosti

Číslo p je dělitelné celým nenulovým číslem q (tj. číslo q dělí p) právě tehdy, když p je celočíselným násobkem q , jestliže existuje takové celé číslo k , pro které platí: $p = kq$. Jiná definice je, že zbytek po dělení je roven 0.

$$(\exists k \in \mathbb{Z} : p = kq) \iff (q \mid p) \quad (4)$$

Zápis $a \mid b$ čteme jako a dělí b . Číslo a se nazývá *dělitel* a b *dělenec*

BTW samozřejmá znalost: čísla dělitelná 2 se nazývají *sudá* a ostatní se nazývají *lichá*.

1.4.5 Nejmenší společný násobek

Násobek čísla a je číslo, které je produktem násobení čísla a a nějakého celého čísla $k \in \mathbb{Z}$.

Nejmenší společný násobek je nejmenší kladné celé číslo, které je celočíselným násobkem všech daných čísel. *Společný násobek* několika čísel je takové číslo, které je násobkem každého z nich. A nejmenší z nich je *nsn*.

Využívá se např. při sčítání zlomků s různým jmenovatelem. Ale není to nutné

1.4.6 Největší společný dělitel

Společný dělitel 2 čísel je takové číslo, kterým jsou obě čísla beze zbytku dělitelná.

Největší společný dělitel se značí také NSD nebo D . Je to největší číslo, kterým jsou obě (nebo všechna) čísla beze zbytku dělitelná.

$$NSD(a, b) = \max\{n \in \mathbb{N} : n \mid a \wedge n \mid b\} \quad (5)$$

Zajímavá vlastnost:

$$NSD(a, b) \cdot nsn(a, b) = ab \quad (6)$$

1.4.7 Soudelěná a nesoudelěná čísla

Nesoudelěná čísla jsou v matematice taková celá čísla, která mají pouze jednoho společného dělitele. Oproti tomu *čísla soudelěná* mají více než jednoho společného dělitele.

1.5 Meta

1.5.1 Zdroje

- Tabulky
- <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika>
- https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_logic_symbols
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Matematick%C3%BD_v%C3%BDraz
- <https://pohodovamatematika.sk/vyrokove-formy-kvantifikovane-vyroky.html>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Axiom>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Definice>
- https://vyuka.odbskmb.cz/v%C3%BDroky_soubory/Page1205.htm
- https://www.gymelg.cz/sites/default/files/matematika/Sp/definice_vety_dukazy.pdf

- [wiki: důkaz přímý](#)
- [wiki: důkaz sporem](#)
- [wiki: nepřímý důkaz](#)
- [wiki: matematická indukce](#)
- <http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/01%20Z%C3%A1kladn%C3%AD%20poznatky/05%20D%C4%9Blitelnost/05%20D%C5%AFkazy%20d%C4%9Blitelnosti%20I.pdf>
- [wiki: číslo](#)
- [wiki: číselná soustava](#)
- [wiki: složené číslo](#)
- [wiki: Základní věta aritmetiky](#)
- [wiki: Největší společná násobek](#)
- [wiki: Největší společný dělitel](#)
- [wiki: divisor](#)
- [wiki: dělitelnost](#)
- [wiki: Nesoudělná čísla](#)

1.5.2 Zadání/Pojmy

Pojem matematického výrazu, axiomy, definice, věty, výrok, pravdivostní hodnota výroku, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, kvantifikátory, negování složených výroků, výroková forma, číslo, číslice, číselné soustavy, dekadický poziční systém, prvočísla a čísla složená, základní věta aritmetiky, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel, čísla soudělná a nesoudělná, kriteria dělitelnosti, důkazy matematických vět, důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí, důkazové úlohy o dělitelnosti.

2 Množiny

2.1 Definice a značení

Je to nějaká skupina (/ soubor) prvků, těch může být konečně (včetně nuly) nebo nekonečně mnoho. Obvykle se značí velkým tiskacím písmenem.

Rigorózní definice:

Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišitelné a tvoří součást světa našich představ a myšlenek; tyto objekty nazýváme prvky množiny. - Georg Cantor

Množina je jednoznačně určena svými prvky ale nevšímá si jejich pořadí nebo jiné struktury. Prvkem množiny může být číslo, písmeno, (ne)uspořádaná k-tice, nějaká množina ...

2.2 Pojmy

- Určení množiny:
Výčtem prvků $A = \{2, 4, 8, 16\}$
Charakteristickou vlastností prvků $B = \{b \in \mathbb{N}; b \leq 15\}$
Pomocí jiných množin $C = A \cap B$
- *Prvek* množiny značí se $a \in A$ (čteme a je prvkem množiny A), případně $b \notin A$ (b není prvkem množiny A).
- *Prázdná množina* je taková, která nemá žádný prvek, značí se \emptyset (v TeXu ještě možnost \varnothing) nebo $\{\}$
- *Počet prvků* konečné množiny A se značí $|A|$
- *Podmnožina* (neboli část), značí se $B \subset A$ (to říká, že množina B je podmnožinou množiny A). Vztah být podmnožinou se nazývá *inkluzí*. To znamená, že každý prvek množiny B je prvkem množiny A .

$$B \subset A \quad (\forall x)(x \in B \implies x \in A) \quad (7)$$

Nový zápis podle normy ISO 31-11:

$$B \subseteq A \quad \forall x \in B; x \in A \quad B \text{ je podmnožinou } A \quad (8)$$

$$B \subset A \quad B \subseteq A \wedge B \neq A \quad B \text{ je vlastní podmnožinou } A \quad (9)$$

U ostré inkluze hovoříme o vlastní podmnožině. U neostré inkluze hovoříme o nevlastní podmnožině.

- *Rovnost množin* A, B se značí $A = B$. O rovnosti platí: $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$ Jiná definice :

$$A = B \quad (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \quad (10)$$

- *Průnik množin* A, B se značí $A \cap B$. Průnikem jsou všechny prvky, které patří do obou množin.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad (11)$$

- *Průnik systému množin* - to je množina všech prvků, které patří do každé z množin A_1, A_2, \dots, A_n . Značení:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad (12)$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \quad (13)$$

- *Disjunkt ní množiny* nemají žádný společný prvek. Jejich průnik je tedy prázdná množina. $A \cap B = \emptyset$
- *Sjednocení množin* A, B se zapisuje $A \cup B$. Říká že prvek je ve sjednocení množin vyskytuje-li se alespoň v jedné ze sjednocovaných množin.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (14)$$

- *Sjednocení systému množin* je množina všech prvků, které patří do alespoň jedné z množin A_1, A_2, \dots, A_n . Zápis:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (15)$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \quad (16)$$

- *Princip inkluze a exkluze* - platí pro konečné množiny, popisuje vztah mezi velikostmi sjednocení množin a velikostmi všech možných průniků:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (17)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (18)$$

Například: máme 10 anglicky mluvících , 7 bulharsky mluvících a 3 z nich mluví i anglicky. Kolik je ve skupině lidí?

Existuje obecný zápis tohoto pravidla, ale mimo SŠ:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (19)$$

- *Rozdíl* množin A, B zapíšeme jako $A \setminus B$ (nebo i jako $A - B$) a to říká, že výsledná množina obsahuje všechny prvky A , které nejsou prvky B . Z toho jasně vyplývá, že to není operace komutativní. Zápis:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad (20)$$

- *Symetrický rozdíl* (také *symetrická difference*) je v rozdíl sjednocení a průniku 2 množin. Značí se $A \triangle B$ (nebo $A \div B$ nebo $A \ominus B$ (v angličtině také $A \oplus B$ pomocí symbolu pro XOR)) Platí:

$$A \triangle B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (21)$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (22)$$

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (23)$$

- *Doplňěk* (také *komplement*) množiny A v množině U , kde $A \subset U$ se značí:

A' nebo A'_U podle staré normy v tabulkách

$C_U A$ (přesněji $\mathbb{C}_U A$) - doplněk množiny A v množině U , podle nové normy ISO 31-11, podle tabulek

A^c (přesněji $A^{\mathbb{C}}$ (další T_EXmožnosti A^c nebo $A^{\mathbb{C}}$ nebo A^c)) značení podle wikipedie (i v ANJ verzi), ale česká uznává i značení A' Doplněk označuje všechny prvky, které nejsou v A , ale jsou v nějaké předem dané množině (tady U). Aby bylo možná doplněk určit je třeba znát množinu, vzhledem ke které se doplněk počítá. Je to množina, která doplňuje všechny prvky, které chybí množině A k tomu, aby byla ekvivalentní s B Je ekvivalentní s rozdílem.

$$A^{\mathbb{C}} = U - A \quad (24)$$

$$A'_U = U \setminus A \quad (25)$$

$$A' = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} \quad (26)$$

Musí platit, že $A \subseteq U$. Potom A' obsahuje všechny prvky, které obsahuje U ale neobsahuje A .

- *de Morganovy vzorce*

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (27)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (28)$$

Nějaké další vlastnosti doplňků:

$$\begin{array}{llll} A \cup A^c = U & A \cap A^c & = \emptyset & (A^c)^c = A \\ \emptyset^c = U & U^c & = \emptyset & A^c \setminus B^c = B \setminus A \end{array}$$

$$A \subseteq B \implies B^c \subseteq A^c$$

- *Kartézský součin* se značí $A \times B$ a je to množina všech uspořádaných dvojic (tj. 2 prvky u kterých záleží na pořadí, tzn. (a, b) je jiné než (b, a) pro $a \neq b$), kde prvním členem je prvek množiny A a druhým členem prvek množiny B . Viz:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\} \quad (29)$$

Je možné rozšířit definici na libovolné n množin, kde výsledkem kartézského součinu je množina uspořádaných n -tic:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\} \quad (30)$$

- n -tá *Kartézská mocnina množiny* A se značí A^n a výsledkem je množina uspořádaných n -tic:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge \dots \wedge a_n \in A\} \quad (31)$$

- *Relace* je libovolná podmnožina kartézského součinu n množin.

2.3 Grafické znázornění

Pomocí Vennových diagramů. Kruhy s průniky, nic extra na nich není.

2.4 Zobrazení

Zobrazení F z množiny A do množiny B je předpis, který každému prvku $x \in A$ přiřazuje nejvýše jeden prvek $y \in B$. Prvek s první množiny se nazývá *vzor* a jemu přiřazen vždy nejvýše jeden *obraz* z druhé množiny. (Mimo SŠ: je to typ binární relace, která splňuje podmínku existence a jednoznačnosti). Značení:

$$y = f(x) \quad y = F(x) \quad f : x \mapsto y \quad f : x \rightarrow y \quad (32)$$

- y je *obraz* prvku x při zobrazení F , označení $y = F(x)$
- x je *vzor* prvku y při zobrazení F
- D_F je *definiční obor* zobrazení F , tj. množina vzorů všech prvků $y \in B$
- H_F je *obor hodnot* zobrazení F , tj. množina obrazů všech prvků $x \in A$

2.4.1 Speciální případy

- Zobrazení z A do B . Nastává když $D_F \subset A \wedge H_F \subset B$
- Zobrazení A do B . Nastává když $D_F = A \wedge H_F \subset B$
- Zobrazení z A na B . Nastává když $D_F \subset A \wedge H_F = B$. Také se nazývá *surjektivní*.
- Zobrazení A na B . Nastává když $D_F = A \wedge H_F = B$
- Zobrazení v množině je takové zobrazení, kde $A = B$, tedy výchozí a cílová množina jsou totožné.
- *Prosté zobrazení* (také *injektivní*) je typ, kdy každé dva různé prvky z A mají různé obrazy v B

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A \wedge x_2 \neq x_1) : F(x_1) \neq F(x_2) \quad (33)$$

- *Vzájemně jednoznačné zobrazení* (také *bijektivní*) je prosté zobrazení A na B . Tzn. nastane právě tehdy, když mají množiny stejně prvků a každý vzor má právě 1 obraz (tj. každé 2 vzory mají různý obraz = prosté zobrazení). Z toho vyplývá, že každému obrazu náleží právě jeden vzor.

2.4.2 Inverzní zobrazení

Inverzní zobrazení k prostému zobrazení F z množiny A do množiny B je zobrazení F^{-1} z množiny B do množiny A , pro které platí:

$$D_{F^{-1}} = H_F \quad (34)$$

$$H_{F^{-1}} = D_F \quad (35)$$

$$F^{-1}(d) = c \iff F(c) = d \quad (36)$$

2.4.3 Složené zobrazení

Máme: Zobrazení F z množiny A do množiny B a zobrazení G z množiny B do množiny C . *Složené zobrazení* ze zobrazení F, G (v tomto pořadí) je zobrazení H z množiny A do množiny C , pro které platí:

- D_H je množina všech $x \in D_F$, pro která $F(x) \in D_G$
- $\forall x \in D_H : H(x) = G(F(x))$

Značí se:

$$H = G \circ F \quad (37)$$

2.4.4 Funkce

Funkce je speciálním případem zobrazení. Funkce reálné či komplexní proměnné je zobrazení v množině reálných či komplexních čísel. Pro standardní $y = f(x)$ se proměnná x nazývá *argument funkce (nezávisle proměnná)* a proměnná y se označuje jako *funkční hodnota (závisle proměnná)*.

Má definiční obor a obor hodnot definované v podstatě stejně jako zobrazení. O prvcích zobrazované množiny, které nejsou v definičním oboru, říkáme, že pro ně funkce *není definována*.

2.5 Meta

Možná si pak dodělám obrázky Vennových diagramů, jen tak protože můžu.

2.5.1 Zdroje

- Tabulky
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BEina>

- <https://matematika.cz/mnoziny>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_mno%C5%BEin
- <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=inkl>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Princip_inkluze_a_exkluze
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Symetrick%C3%A1_diference
- https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Dopl%C4%Bk_mno%C5%BEiny
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Complement_\(set_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Complement_(set_theory))
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Zobrazen%C3%AD_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Zobrazen%C3%AD_(matematika))
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce_(matematika))

2.5.2 Zadání/Pojmy

Pojem množiny, způsob zadání množiny, podmnožina, vztahy mezi množinami, rovnost množin, inkluze množin, operace s množinami a jejich vlastnosti, sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk, disjunkt ní množiny, grafické znázornění množin, uspořádaná dvojice, kartézský součin, zobrazení, typy zobrazení, funkce, složené zobrazení.

3 Číselné obory

3.1 Množiny čísel

Máme několik množin čísel. Formální definice jsou náročnější, ale na ty asi kašlem.

- *Přirozená čísla* - kladná celá čísla nebo nezáporná celá čísla -> problém zda-li patří nula nebo ne -> existují různé způsoby značení, takže sranda, protože každý autor píše jinak. Vždy se ale značí N nebo \mathbb{N} . Aby se předešlo záměnám přidávají se indexy v podobě plus a nuly, které to mají jasněji určit:
Nezáporná celá čísla (tj. včetně nuly) : N_0 , N^0 , \mathbb{N}_0 nebo \mathbb{N}^0 (taktéž je

to ekvivalentní se zápisem pomocí celých čísel: Z_0^+ nebo \mathbb{Z}_0^+), (podle tabulek by to od normy ISO 31-11 mělo být jen \mathbb{N} , ale v celých tabulkách se to používá pro kladná celá čísla ...)

Kladná celá čísla (tj. bez nuly): \mathbb{N}^+ (pomocí celých čísel \mathbb{Z}^+) (podle tabulek normy ISO 31-11 by to mělo být \mathbb{N}^* , ale to jsem v životě neviděl, takže asi tak)

- *Celá čísla* - značí se \mathbb{Z} . Přirozená čísla jsou speciální podmnožinou celých čísel. Vzájemným sčítáním, odečítáním a násobením celých čísel vždy získáme opět jen celé číslo. Výjimku tvoří dělení.
- *Racionální čísla* se značí \mathbb{Q} . Jsou to čísla která jde vyjádřit jako zlomek dvou celých čísel $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Celá čísla jsou jejich speciální podmnožinou, kde *základní tvar* zlomku má jako dělitele 1.
- *Reální čísla* značí se \mathbb{R} . Jsou všechna čísla i ta která nejdu vyjádřit zlomkem, ale jdou vyjádřit nějakým (i nekonečným) desetinným rozvojem. Lze si je představit jako množinu vzdáleností bodů přímky od jednoho konkrétního bodu přímky, který si označíme 0.
- *Iracionální čísla* jsou všechna desetinná čísla, která se nedají vyjádřit pomocí zlomku (např. $\pi, \sqrt{2}, \dots$). Je to tedy množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- *Komplexní čísla* se značí \mathbb{C} . Zavedeny byly kvůli řešení rovnic styl $x^2 + 1 = 0$. Byla zavedena i imaginární jednotka $i^2 = -1$ (respektive $i^2 = -1$ nebo $i^2 = -1$).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad (38)$$

Pro $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ můžeme ještě vytvořit kladné (respektive záporné) podmnožiny pomocí plus (resp. mínus) v horním indexu a rozlišit přítomnost nuly pomocí dolního indexu s nulou, je-li součástí.

3.2 Číselná osa

Reálná čísla můžeme znázornit na číselné ose (nekonečná přímka, která má bod, který označujeme jako 0). To se může hodit třeba ke znázornění intervalů. Nebo k pochopení *absolutní hodnoty* jako vzdálenosti od nuly.

3.2.1 Absolutní hodnota

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad (39)$$

Absolutní hodnota rozdílu reálných čísel je rovna vzdálenosti těchto čísel na číselné ose. Pak jsou v tabulkách nějaké zajímavé příklady, ale mě moc zajímavé nepřijdou.

3.3 Operace s reálnými čísly a jejich vlastnosti

3.3.1 Neutrální prvky

Je takový prvek množiny (pro nás reálná čísla), pro který platí, že výsledkem operace neutrálního prvku a libovolného jiného prvku x z dané množiny je opět x . Pro násobení (a dělení) je neutrálním prvkem tzv. *jednotkový prvek* - je roven 1. Pro sčítání (a odečítání) je to tzv. *nulový prvek* - je roven 0. Občas se pro neutrální prvek používá označení *identita*.

3.3.2 Porovnávání

- $>$ a $<$
- \geq a \leq
- \gg a \ll je *mnohem (řádově) větší* (resp. *menší*) než

3.3.3 Základní operace

Můžeme sčítat, odečítat, násobit a dělit. To je novinka :/

3.3.4 Vlastnosti sčítání a násobení

Komutativnost říká že nezáleží na pořadí prvků:

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \quad (40)$$

Asociativita říká, že nezáleží na pořadí v jakém provedeme operace (na upřednostnění se používají závorky):

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (41)$$

Distributivnost říká, že můžeme jednu operaci distribuovat přes jinou. Pro nás násobení a sčítání.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (42)$$

3.3.5 Součet a součin většího množství čísel

3.3.6 Mocniny a odmocniny

Zápis a^k kde a se označuje jako *základ* a k jako *exponent*.

$$a^0 = 1 \quad \text{Platí pro} \quad (43)$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}} \quad a \neq 0 \quad (44)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (45)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N} \quad (46)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff (b^n = a \wedge b \geq 0) \quad a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (47)$$

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}, \sqrt{a^2} = |a| \quad (48)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (49)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (50)$$

$$(51)$$

Definuje se i mocnina kladného celého čísla s iracionálním exponentem, ale mimo SŠ.

Operace s mocninami a odmocninami

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (52)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (53)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (54)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (55)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (56)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} \quad (57)$$

3.4 Komplexní čísla

3.4.1 Zápis

Algebraický tvar

$$a = a_1 + a_2 i \quad a_1, a_2 \in R \quad i^2 = -1 \quad (58)$$

- a_1 - reálná část
- a_2 - imaginární část
- i imaginární jednotka (také možné značení i nebo \imath v L^AT_EX)

Goniometrický tvar

$$a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (59)$$

- $|a|$ - absolutní hodnota - tj. vzdálenost od středu $0 + i0$
- α - argument je velikost orientovaného úhlu

Exponenciální tvar je asi mimo látku SŠ.

$$a = |a| \cdot e^{i\alpha} \quad , \text{ kde: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (60)$$

Gaussova rovina Je rovina komplexních čísel, kde je osa x osa reálných čísel (tj. *reálná osa*) a osa y je osa ryze imaginárních čísel (tj. *imaginární osa*).

Vlastnosti:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} \quad (61)$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^{4k+m} = i^m \quad , \text{ kde: } (k, m \in \mathbb{N}_0) \quad (62)$$

3.5 Zvláštní případy komplexních čísel

- číslo *reálné*: $a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 = 0$
- číslo *imaginární*: $a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \neq 0$
- číslo *ryze imaginární*: $a_1 = 0 \wedge a_2 \neq 0$
- *komplexní jednotka*: $|a| = 1$ (v goniometrickém tvaru $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$, v exponenciálním tvaru $a = e^{i\alpha}$). Obrazy komplexních čísel leží na kružnici s poloměrem 1 a středem v počátku. Je to komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.
- *komplexní čísla sdružená* se zapisují a, \bar{a} (nebo také a^*). Komplexní číslo sdružené má stejnou reálnou část a opačné znaménko u imaginární části. Geometricky se na to můžeme dívat, jako číslo osově souměrné podle reálné osy.

$$a = a_1 + a_2 i \qquad \bar{a} = a^* = a_1 - a_2 i \qquad (63)$$

Nějaké random zajímavé vlastnosti:

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{a})} &= a & \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} & |\bar{a}| &= |a| \end{aligned}$$

- *Komplexní čísla opačná* se značí $a, -a$. Opačné hodnoty reálné i imaginární části. (?Geometricky je to číslo, které je středově souměrné přes střed Gaussovy roviny?).

$$a = a_1 + a_2 i \qquad -a = -a_1 - a_2 i \qquad (64)$$

3.6 Operace s komplexními čísly

$$a = a_1 + a_2 i = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |a|e^{i\alpha} \qquad (65)$$

$$b = b_1 + b_2 i = |b|(\cos \beta + i \sin \beta) = |b|e^{i\beta} \qquad (66)$$

3.6.1 Rovnost

$$a = b \iff (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2) \qquad (67)$$

3.6.2 Součet a rozdíl

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2)i \quad (68)$$

Součet a rozdíl čísel sdružených

$$a + \bar{a} = 2a_1 \qquad a - \bar{a} = 2a_2i \quad (69)$$

3.6.3 Součin

$$a = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i = \quad (70)$$

$$= |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = \quad (71)$$

$$= |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha + \beta)} \quad (72)$$

Součin čísel sdružených

$$a \cdot \bar{a} = a_1^2 + a_2^2 = |a|^2 \quad (73)$$

3.6.4 Podíl

Pokud platí $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \bar{b}}{b \cdot \bar{b}} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{b_1^2 + b_2^2} = \quad (74)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \quad (75)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)} \quad (76)$$

Podíl podíl sdružených čísel jsem spočítal sám tak opatrně s tím. Platí $a \neq 0$. Ze vzorců pro obecný podíl logicky vyplývá že podíl čísel sdružených

bude mít vždy velikost *komplexní jednotky*.

$$\frac{a}{\bar{a}} = \frac{a \cdot \overline{(\bar{a})}}{\bar{a} \cdot \overline{(\bar{a})}} = \frac{(a_1^2 - a_2^2) + 2a_1a_2i}{a_1^2 + a_2^2} \quad (77)$$

$$= \frac{|a|}{|\bar{a}|} \cdot [\cos(\alpha + \alpha) + i \sin(\alpha + \alpha)] = 1 \cdot [\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)] = \quad (78)$$

$$= \frac{|a|}{|\bar{a}|} \cdot e^{i(\alpha + \alpha)} = 1 \cdot e^{i2\alpha} \quad (79)$$

3.7 Mocnina komplexního čísla

Platí $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = [|a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = |a|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \quad (80)$$

3.7.1 Moivreova věta

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) \quad n \in \mathbb{N} \quad (81)$$

Tato Moivreova věta platí dokonce i pro $n \in \mathbb{Z}$

3.8 „Odmocnina“ komplexního čísla

Máme rovnici:

$$x^n = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad |a| \neq 0 \quad (82)$$

Ta má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad (83)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (84)$$

Obrazy čísel x_k jsou vrcholy pravidelného n -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$

3.9 Meta

Můžu pro všechny obory čísel psát X nebo \mathbb{X} ale jsem líný, takže budu používat jen to druhé, bo je to víc sexy.

3.9.1 Zdroje

- Tabulky
- [wiki: Přirozená čísla](#)
- [wiki: Celá čísla](#)
- [wiki: Racionální čísla](#)
- [wiki: Iracionální čísla](#)
- [wiki: komplexně sdružené číslo](#)
- [wiki: Neutrální prvky](#)

3.9.2 Zadání/Pojmy

Obor čísel přirozených, celých, racionálních, reálných, čísla iracionální, znázornění čísel na číselné ose, základní operace v číselných oborech a jejich vlastnosti, uzavřenost, asociativnost, neutrální prvky, komutativnost, distributivnost, mocniny, odmocniny a operace s nimi, vztahy mezi reálnými čísly, absolutní hodnota reálného čísla, její geometrická interpretace, zavedení komplexních čísel, množina uspořádaných dvojic reálných čísel, operace sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel, vztah rovnosti, imaginární jednotka, čísla komplexně sdružená, absolutní hodnota a její geometrický význam, Gaussova rovina, algebraický a goniometrický tvar, Moivreova věta, násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

4 Algebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy

4.1 Povolené úpravy rovnic a nerovnic

Za *ekvivalentní* se považují úpravy, kdy nepřijdeme o žádné řešení a ani ne získáme žádné další navíc. Přičtení (respektive odečtení) libovolného čísla (takže i proměnné, neznámé a parametry) k obou stranám rovnice.

Násobení (respektive dělení, pokud to není nula) libovolným kladným číslem. Pokud násobíme (dělíme) zápornými čísly musíme otočit u nerovnic znaménko, vysvětlení:

$$\begin{array}{ll}
 L < P & / - L - P \\
 L - L - P < P - L - P & \\
 -P < -L & \\
 -L > -P & / \cdot (-1) \\
 L < P &
 \end{array}$$

Protože můžeme násobit libovolným číslem, můžeme také umocnit (i odmocnit), ale pozor na ztrátu řešení:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 = 1 & x_1 = 1, x_2 = -1 \\
 \sqrt{x^2} = \sqrt{1} & \\
 x = 1 & \text{vs: } |x| = 1
 \end{array}$$

4.1.1 Definiční obor rovnice

Tradičně celé \mathbb{R} ale můžeme chtít hledat řešení i v \mathbb{C} . Z této množiny mohou být odebrána některá čísla (nebo podmnožiny), když jsou v rovnici operace, které nejsou pro tyto hodnoty definovány. Jako například dělení nulou, nebo logaritmus ze záporného čísla. (V případě, že řešíme jen v \mathbb{R} , tak i odmocnina ze záporného čísla)

V algebraických rovnicích bychom se s něčím takovým neměli setkat.

4.1.2 Množina kořenů rovnice

Součástí množiny *kořenů rovnice* jsou všechna čísla, která když dosadíme za neznámou, tak nám bude platit rovnost v zadání.

4.1.3 Zkouška

Dosazením nalezeného kořenu(kořenů) do původní rovnice a ověření, že se pravá strana rovná pravé.

4.2 Polynom

Mnohočlen se také nazývá *polynom*. A má takovýto tvar:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad a_n \neq 0 \quad (85)$$

Čísla a se nazývají *koefficienty polynomu* a pro ten nejvyšší (a_n) musí platit, že je nenulový. *Stupeň polynomu* je roven nejvyššímu exponentu, který má nenulový koeficient. *Kořen polynomu* je číslo (často značené α), pro které platí, že když ho dosadíme za x , tak se polynom bude roven nule. Polynom můžeme rozložit na *kořenové činitele* (speciální případ pro kvadratickou rovnici je (97))

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \quad (86)$$

4.2.1 Hornerovo schéma

Polynom můžeme zapsat ve tvaru:

$$p(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0 \quad (87)$$

Pak můžeme vypočítat hodnotu polynomu pro nějaké x pomocí tzv. *Hornerova schéma*:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n \\ c_{n-1} &= c_n x + a_{n-1} \\ c_{n-2} &= c_{n-1} x + a_{n-2} \\ &\vdots \\ c_0 &= c_1 x + a_0 \end{aligned}$$

4.3 Algebraická rovnice

Za algebraickou rovnicí se označuje taková rovnice, kde na jedné straně je nějaký polynom n -tého stupně a na druhé straně je nula. Obdobně to platí pro nerovnici. Máme speciální případy algebraických rovnic.

4.3.1 Lineární rovnice

Je to polynom 1.stupně. Často se využívá značení:

$$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad (88)$$

$$(89)$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \implies \text{jediný kořen: } x = -\frac{b}{a} \\ a = 0 \begin{cases} b = 0 \implies \text{každé } x \in \mathbb{R} \text{ je řešením} \\ b \neq 0 \implies \text{žádné řešení} \end{cases} \end{cases} \qquad (90)$$

4.3.2 Kvadratická rovnice

Polynom 2.stupně. Tato rovnice se obvykle řeší přes diskriminant D .

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \qquad (91)$$

$$\text{Diskriminant:} \qquad D = b^2 - 4ac \qquad (92)$$

$$\begin{cases} D > 0 \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ D = 0 \implies x = -\frac{b}{2a} \\ D < 0 \implies \begin{cases} \text{žádné řešení pro } x \in \mathbb{R} \\ \text{pro } x \in \mathbb{C} \text{ platí: } x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \end{cases} \end{cases} \qquad (93)$$

Existují i zvláštní případy kvadratické rovnice, ale i ty se dají řešit obecným způsobem. Ale často je triviální způsob rychlejší a jednodušší (natolik, že to sem psát nebudu)

Rovnice ryze kvadratická

$$x^2 + px + q = 0 \qquad p, q \in \mathbb{R} \qquad (94)$$

Rovnice ryze kvadratická

$$ax^2 + c = 0 \qquad a \neq 0 \qquad (95)$$

Kvadratická rovnice bez absolutního členu

$$ax^2 + bx = 0 \qquad a \neq 0 \qquad (96)$$

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů pro kořeny x_1, x_2 vypadá:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \qquad (97)$$

Z Viètových vzorců (viz 4.4) vyplývá následující vztah mezi kořeny a koeficienty:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (98)$$

Bikvadratická rovnice je řešená pomocí substituce za x^2 a tím se převede na klasickou kvadratickou rovnici:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \qquad (99)$$

Kvadratická rovnice v komplexních číslech Platí-li, že koeficienty jsou komplexní čísla, tak jsou kořeny kvadratické rovnice 2 komplexní čísla:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad a, b, c \in \mathbb{C} \qquad D = b^2 - 4ac \qquad (100)$$

4.3.3 Kubická a kvartická rovnice

Jsou názvy rovnic pro polynom třetího (respektive čtvrtého) stupně.

4.4 Viètovy vzorce

Někdy jen *Vietovy vzorce* (bez obrácené francouzské čárky, bo se blbě píše) jsou obecným návodem, jak řešit polynomy n -tého stupně. Podle *základní věty algebry* má polynom n -tého stupně maximálně n kořenů. Pro polynom obecně zapsaný:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad (101)$$

Je možné vypočítat jednotlivé kořeny x_1, x_2, \dots, x_n pomocí následujících rovnic

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n) + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}. \end{cases} \quad (102)$$

Poznámka: Viètovy vzorce jsou obecně platné nejen v \mathbb{R} ale také v \mathbb{C} .

4.5 Rovnice s parametry

Prostě s parametrem počítáme, jako by tam bylo normálně číslo a neznámou vyjádříme v závislosti na parametru (parametrech). Tady není, co řešit

4.6 Iracionální rovnice

Mají neznámou pod odmocninou. Řeší se pomocí umocňování, které rovnici převede na algebraickou. Umocňování, ale není ekvivalentní úprava, takže je třeba provést **zkoušku!**

4.7 Rovnice s absolutní hodnotou

Najdeme pro jaké případy se hodnota polynomu v absolutní hodnotě rovná nula a pak rozdělíme rovnici na případ, kdy je hodnota v absolutní hodnotě záporná a kdy kladná. Pro zápornou „otočíme“ znaménka v polynomu. Pak jednotlivé rovnice řešíme jen v definičním oboru, kdy je polynom kladný respektive záporný. Nic extra.

4.8 Rovnice jako funkce a grafické řešení

Na pravou i levou funkci můžeme nahlížet jako na funkci, kde argumentem je neznámá. Tuto funkci můžeme graficky znázornit a podívat se, kdy platí rovnost (popřípadě nerovnost). Nevím co víc k tomu říct.

4.9 Soustavy

Mohou mít více proměnných (to teda můžou i normální rovnice) a kořeny řešení je taková kombinace čísel, které když dosadíme za proměnné, tak budou všechny rovnice (nerovnice) platné. Soustava může mít více řešení.

4.9.1 Řešení

Každou rovnici můžeme upravovat standardně jako samostatnou rovnici. Více rovnic (a nerovnic) můžeme samozřejmě sčítat odečítat a z toho vyplývá, že je můžeme i násobit a dělit (tady opět pozor na nerovnice znaménka musí být shodně otočena a pozor na násobení/dělení záporným číslem, prostě se nad tím předtím zamyslet).

4.9.2 Soustavy lineárních rovnic

Soustavu m lineárních rovnic s n proměnnými můžeme zapsat:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (103)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (104)$$

$$\vdots \quad (105)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (106)$$

Kde x_1, x_2, \dots, x_n jsou neznámé, a_{ij} jsou koeficienty (kde i určuje rovnici a j proměnnou) a b_i je tzv. *absolutní člen*. V obecném případě mohou koeficienty i absolutní člen být komplexní čísla.

Takovouto soustavu lze vyjádřit pomocí matice a vektorů.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (107)$$

4.10 Meta

4.10.1 Zdroje

- [wiki: Vietovy vzorce](#)

- [wiki-en: Vietas formulas](#)
- https://vyuka.odbskmb.cz/algebraick%C3%A9%20rovnice_soubory/Page331.htm
- [wiki: polynom](#)
- [wiki: Kvadratická rovnice](#)
- [wiki: rovnice](#)
- [wiki: Soustava rovnic](#)

4.10.2 Pojmy/Zadání

Pojem algebraická rovnice (nerovnice), definiční obor rovnice (nerovnice), množina kořenů rovnice (nerovnice), úpravy rovnic (nerovnice), zkouška. Grafické řešení rovnic (nerovnic). Polynomy, funkce, rovnice, souvislosti. Lineární a kvadratická rovnice (nerovnice), lineární a kvadratické rovnice (nerovnice) s parametry, lineární a kvadratické rovnice (nerovnice) s neznámou v absolutní hodnotě, Vietovy vzorce, iracionální rovnice (nerovnice). Soustavy rovnic (nerovnic), jejich typy a způsob řešení. Řešení algebraických rovnic v oboru komplexních čísel, rozklad kvadratického trojčlenu na součin v \mathbb{C} .

5 Vlastnosti algebraických funkcí a posloupností

5.1 Základní pojmy

5.1.1 Funkce reálné proměnné

Funkce, kde je argumentem nějaká reálná proměnná (tradičně značená x). Funkční hodnoty se tradičně značí y :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f : y = ax^2 + bx + c \qquad (108)$$

5.1.2 Definiční obor

Definiční obor (také *doména*) je množina hodnot, jichž může nabývat argument funkce. Může to být libovolná podmnožina $n\mathbb{R}$, ale tradičně celé \mathbb{R} , ale musíme si dát pozor a odstranit z této množiny hodnoty, pro které nejsou operace ve funkci nadefinované (dělení nulou, logaritmus záporného čísla atd.)! Značí se třeba $D(f)$ nebo D_f .

5.1.3 Obor hodnot

Množina všech *funkčních hodnot*, kterých funkce nabývá pro argumenty z definičního oboru. Značí se \mathcal{H}_f nebo $\mathcal{H}(f)$ (nebo normálně $H(f)$ a H_f).

5.1.4 Graf funkce

Je grafické znázornění funkce do roviny jako množinu bodů určených v soustavě souřadnic, kde x je argument a y je odpovídající funkční hodnota.

$$\{X[x, f(x)]; x \in D_f\} \quad (109)$$

5.1.5 Prostá funkce

Prostá funkce je taková funkce, že každé 2 argumenty z definičního oboru platí, že jim odpovídající funkční hodnoty jsou také různé. Tedy platí:

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f) \wedge x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad (110)$$

5.1.6 Složená funkce

Funkce h složená z funkcí f, g (v tomto pořadí) se značí:

$$h = g \circ f \quad (111)$$

A platí pro ní, že její definiční obor D_h je množina všech $x \in D_f$, pro které platí $f(x) \in D_g$. Dále platí, že má předpis pro $\forall x \in D_h$:

$$h(x) = g(f(x)) \quad (112)$$

Z toho vyplývá, že záleží na pořadí v jakém pořadí v jakém funkce složíme, takže obecně $g \circ f \neq f \circ g$.

5.2 Omezenost

Zdola omezená funkce je taková, pro kterou existuje $d \in \mathbb{R}$ pro které platí:

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) : f(x) \geq d \quad (113)$$

Shora omezená funkce je taková, pro kterou existuje $c \in \mathbb{R}$ pro které platí:

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f) : f(x) \leq c \quad (114)$$

Omezená funkce je taková funkce, která je omezená zdola a zároveň shora omezená.

5.3 Sudá a lichá funkce

Sudá funkce má graf, který je osově souměrný podle osy y . Matematicky zapíšeme:

$$x \in D_f \implies (-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)) \quad (115)$$

Lichá funkce má graf souměrný podle počátku (středu soustavy souřadnic). To nám říká, že pro každý argument x s hodnotou y má $-x$ hodnotu $-y$:

$$x \in D_f \implies (-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)) \quad (116)$$

5.4 Maximum a minimum

Funkce f má extrém v bodě $c \in \mathcal{D}_f$. Tak pokud je $f(c)$ maximum funkce f pak platí:

$$x \in D_f \implies f(x) \leq f(c) \quad (117)$$

A pokud je $f(c)$ minimum funkce, pak platí:

$$x \in D_f \implies f(x) \geq f(c) \quad (118)$$

Ne každá funkce má maximum respektive minimum. Aby je měli musí být omezené shora (respektive zdola).

5.5 Monotónnost

Monotónnost (nebo *monotonie*, *monotonicita* zkoumá, zda-li je funkce (celá, na intervalu nebo v bodě) monotónní, tzn. rostoucí, klesající, konstantní, nerostoucí ...

Funkce f je:

- *rostoucí*

$$(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (119)$$

- *klesající*

$$(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \implies f(x_1) > f(x_2) \quad (120)$$

- *konstantní*

$$(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 \neq x_2) \implies f(x_1) = f(x_2) \quad (121)$$

- *nerostoucí*, tzn. je klesající nebo konstantní

$$(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \implies f(x_1) \geq f(x_2) \quad (122)$$

- *neklesající*, tzn. je rostoucí nebo konstantní

$$(x_1, x_2 \in D_f \wedge x_1 < x_2) \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (123)$$

- nějaká *v intervalu* I , stejně jako předchozí, jen místo celého D_f řešíme monotonii jen na nějakém intervalu. Zapisuje v podstatě stejně, příklad *funkce rostoucí v intervalu* I :

$$(x_1, x_2 \in I \wedge x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (124)$$

- *Ryze monotónní* označuje funkci (její interval), která je rostoucí nebo klesající (na intervalu).

Pozor v alternativní terminologii se občas používá „rostoucí“ pro neklesající a „ryze rostoucí“ pro rostoucí atd. Takže bacha, kontrolovat definice, kterou autor používá.

5.6 Periodická funkce

Periodická funkce má nějakou *periodu* p . Říká nám to, že se funkční hodnoty po intervalu dlouhém p začnou opakovat a to přesně v tom pořadí v jakém byli na tom intervalu. A vzdálené od sebe stejně. A po skončení tohoto intervalu, je další a další a další interval, kde platí to samé.

$$p \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z} : \quad (125)$$

$$x \in D_f \implies (x + kp \in D_f \wedge f(x + kp) = f(x)) \quad (126)$$

5.7 Inverzní funkce

Inverzní funkce k prosté funkci f se značí f^{-1} a platí pro ni:

$$D_{f^{-1}} = H_f \quad (127)$$

$$f^{-1}(d) = c \iff f(c) = d \quad (128)$$

Zobrazí-li se jako grafy, tak jsou osově souměrné podle osy určené $f(x) = x$, tato funkce je inverzní sama k sobě. Vlastnost inverzních funkcí:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x \quad (129)$$

5.8 Meta

5.8.1 Zdroje

- moje hlava
- Tabulky
- [wiki: inverzní funkce](#)
- [wiki: Definiční obor](#)
- [wiki: obor hodnot](#)
- [mff: Složená funkce](#)
- [wiki: monotonie](#)

5.8.2 Zadání/Pojmy

Pojem funkce reálné proměnné, definiční obor funkce, obor hodnot funkce, graf funkce, složená funkce, prostá funkce, omezenost funkce, sudá a lichá funkce, maximum a minimum funkce, periodická funkce, inverzní funkce, složená funkce

6 Grafy elementárních algebraických funkcí

6.1 Lineární funkce

$$f : y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad (130)$$

Vypadá jako přímka. Můžeme tím určit libovolnou přímku v rovině, kromě osy y . Pro $a > 0$ je funkce rostoucí, pro $a < 0$ je klesající a pro $a = 0$ je konstantní.

6.2 Kvadratická funkce

$$f : y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \qquad (131)$$

Grafem je *parabola*. Vrchol je určen:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right] \qquad (132)$$

Nebo můžeme extrém nalézt pomocí derivace. Ta musí být v extrému rovna nule.

- $a > 0 \implies$ funkce f je omezená. Bod který je vrcholem je minimum. Obor hodnot je od vrcholu do $+\infty$.
- $a < 0 \implies$ funkce f je omezená. Bod který je vrcholem je maximum. Obor hodnot je od $-\infty$ do vrcholu.
- $a = 0 \implies$ je to funkce lineární a ne kvadratická!

6.3 Mocninné funkce

$$f : y = x^n \quad n \in \mathbb{N} \quad D_f = \mathbb{R} \quad (133)$$

- n je liché \implies funkce je lichá, $H_f = \mathbb{R}$
- n je sudé \implies funkce je sudá, $H_f = \mathbb{R}_0^+$

Pro záporná čísla je graf úplně jiný.

$$f : y = x^n \quad n \in \mathbb{Z}^- \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (134)$$

- n je liché \implies funkce je lichá, $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- n je sudé \implies funkce je sudá, $H_f = \mathbb{R}^+$

6.4 Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad q, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (135)$$

Musí platit podmínky $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$. Pro definiční obor platí $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ a pro obor hodnot $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Grafem této funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami:

$$x = -\frac{d}{c} \quad y = \frac{a}{c} \quad (136)$$

Nepřímá úměrnost je zvláštním případem lomené funkce. Je to lichá funkce s předpisem:

$$y = \frac{b}{x} \quad b \neq 0 \quad (137)$$

6.5 Absolutní hodnota

Elementární funkce můžeme v absolutní hodnotě jednoduše zpátky do kladné části y . Je-li funkce složitější a jen část je v absolutní hodnotě, tak glhf. Nenapadá mě žádné obecné pravidlo.

6.6 Odmocninné grafy

Neboli grafy funkcí s exponentem $\frac{1}{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pro sudá n není definován pro záporná x . Je to funkce rostoucí bez omezenosti shora (zdola jsou omezeny jen sudá n).

6.7 Meta

Nevím moc, co k tomu dát za info. Je to nějaká kratší otázka. Grafy vyplývají z předpisu funkce.

6.7.1 Zdroje

- moje hlava, tabulky, moje hlava po předkopné

6.7.2 Pojmy/zadání

Lineární funkce (rozdělení podle koeficientu a), kvadratická funkce (rozdělení podle koeficientu a), určení extrému kvadratické funkce (doplněním na čtverec i pomocí diferenciálního počtu). Mocninné funkce s přirozeným mocnitelem, mocninné funkce se záporným celým mocnitelem a jejich vlastnosti v závislosti na mocniteli. Mocninné funkce s exponentem $1/n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Lineární lomená funkce. Grafy elementárních funkcí s absolutními hodnotami.

7 Limita a spojitost funkce

7.0.1 Okolí bodu

V matematice můžeme okolí bodu definovat pomocí intervalu na množině reálných čísel. Máme číslo $r \in \mathbb{R}$, pak *epsilon okolí* pro $\varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0$ je otevřeným intervalem $(r - \varepsilon; r + \varepsilon)$.

Epsilon okolí bodu (a) se také někdy značí $U(a, \varepsilon)$

V tabulkách uvidíme značení $U(a)$ a jednoduché vysvětlení přes interval $(a - \delta; a + \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$

okolí (také *prstencové okolí* je stejné jen neobsahuje bod r :

$$(r - \varepsilon; r) \cup (r; r + \varepsilon) \quad (138)$$

Setkáme se značením $R(a, \varepsilon)$.

Jednostranné okolí bodu je přesně to, co jméno napovídá . . . V tabulkách značí *levé okolí* $U_L(a)$ a *pravé okolí* $U_P(a)$.

7.0.2 Hromadný bod

Prvek $a \in \mathbb{R}$ je *hromadným bodem* nějaké množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí, že v každém redukovaném okolí (!jakkoliv malém!) leží nějaký bod množiny M :

$$\forall \varepsilon > 0 : R(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \quad (139)$$

Každé reálné číslo je hromadným bodem množiny reálných čísel. Protože mezi každými 2 reálnými čísly je nekonečně mnoho reálných čísel. Takže můžeme vzít sebemenší epsilon a pořád najdeme nekonečně mnoho reálných čísel.

7.0.3 Přírůstek argumentu

Argument je vstupní hodnota funkce, standardně x . O proměnné y říkáme, že je *funkcí argumentu* x . *Přírůstek* je změna. Když označíme počáteční hodnotu x_0 a konečnou hodnotu x , tak se *přírůstek argumentu v bodě* x (Je-li funkce nadefinovaná na okolí bodu x_0 a je-li x součástí tohoto okolí) označuje:

$$\Delta x = x - x_0 \quad (140)$$

7.0.4 Přírůstek funkce

Také nazýván *funkční hodnoty*

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) \quad (141)$$

7.1 Spojitost

V praxi zjišťujeme pomocí derivace. Je-li funkce v bodě derivovatelná je v daném bodě i spojitá.

7.1.1 Spojitost funkce v bodě

Intuitivně vidíme, že není nijak rozdělená. Formálně se definuje pomocí limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (142)$$

Můžeme si i definovat spojitost zleva (respektive zprava):

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \qquad (143)$$

Definice ?přes okolí? - můžeme napsat přímo. Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \qquad (144)$$

Tedy pro libovolně malé ε existuje nějaké δ tak, že pro všechny body x definičního oboru platí, že pokud leží v delta okolí bodu a ($U_\delta(a)$) tak funkční hodnoty leží v epsilon okolí bodu a ($U_\varepsilon(a)$).

7.1.2 Spojitá funkce

Pokud je funkce spojitá v bodě pro všechny body svého definičního oboru nazýváme funkci jako *spojitou*.

7.1.3 Funkce spojitá na intervalu

Funkce je spojitá na intervalu, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu. (No shit scherlock) Pozor na rozlišování otevřeného a uzavřeného intervalu. Je-li to uzavřený interval $\langle a; b \rangle$, tak je v krajních bodech spojitá jen zprava pro a , respektive zleva pro b .

7.2 Limita funkce

Limita popisuje chování funkce v okolí určitého bodu. Může pomoci chápání funkce i v nedefinovaných bodech. Tzv. *nevlastní body* jsou $\pm\infty$. Využívá se často v diferenciálním a integrálním počtu. Řešení případů, kdy se v předpisu dělí nulou.

7.2.1 Vlastní limita ve vlastním bodě

Limitu nazýváme jako *vlastní* (nebo *konečnou*), když je L rovno konečnému číslu.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \qquad (145)$$

Vlastním bodem je myšleno libovolné reálné číslo. *Nevlastním bodem* se myslí $\pm\infty$. Definice, kde x_0 je *hromadný bod* (viz 7.0.2). Potom je $L \in \mathbb{R}$ limitou funkce f v bodě x_0 , jestliže:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon) \quad (146)$$

Převedení do normálního jazyka:

Pro libovolné (tj. sebemenší) ε existuje alespoň jedno δ , takové aby pro všechna x (která jsou součástí definičního oboru) platí:

Že je-li absolutní hodnota rozdílu $x - x_0$ je někde mezi nulou a delta, pak musí být absolutní hodnota funkční hodnoty a limity menší než ε .

Takže ε určuje funkční hodnoty a δ určuje okolí argumentu funkce. Potom nám zápis říká, že pro jakkoliv malé okolí limity L jsme schopni najít takové (dostatečně malé) δ , aby pro všechny body tohoto okolí platilo, že když se vloží do funkce jako argument, tak funkční hodnota bude v okolí limity určeném ε .

A to platí pro jakkoliv malé redukované okolí určené ε .

7.2.2 Nevlastní limita ve vlastním bodě

Je velmi obdobné předchozímu. Hledáme funkční hodnotu pro nějaký bod z definičního oboru, ale místo toho, aby limita byla rovna nějakému konečnému číslo, tak je rovna $\pm\infty$. Musíme tedy trochu upravit definici. Funkční hodnota v daném bodě musí přerůst všechny možné hranice K , takže když zmenšíme okolí dostatečně musíme najít takové, kde jsou všechny funkční hodnoty větší (respektive menší) než K :

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > K) \quad (147)$$

$$\text{, pak: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (148)$$

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))(0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < K) \quad (149)$$

$$\text{, pak: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad (150)$$

$$(151)$$

7.2.3 Vlastní limita v nevlastním bodě

Protože *nevlastní bod* znamená v podstatě $\pm\infty$, tak je jasné, že v tomto případě řešíme, jaké hodnotě se blíží funkce v těchto případech. A pokud je

tato limita celé číslo, tak je to vlastní limita.

Pokud je $L \in \mathbb{R}$ limitou funkce

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x > A \implies |f(x) - L| < \varepsilon) \quad (152)$$

$$\text{v bodě } +\infty \quad (153)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x < A \implies |f(x) - L| < \varepsilon) \quad (154)$$

$$\text{v bodě } -\infty \quad (155)$$

To nám zjednodušeně říká, že pro jakkoliv malé epsilon okolí limity na množině funkčních hodnot lze najít bod A , od kterého až k nekonečnu (respektive mínus nekonečnu) platí pro všechny prvky množiny definičního oboru, že jim příslušící funkční hodnoty jsou v daném epsilon okolí limity.

7.2.4 Nevlastní limita v nevlastním bodě

V tomhle případě zjišťujeme, jestli se funkce v *nevlastním bodě* (tj. $\pm\infty$) blíží $+\infty$ nebo $-\infty$. Takže používáme kombinaci principů, ze 2 předchozích případů.

Možnosti, že limita je $+\infty$ a to v pořadí v bodech $+\infty$ a potom $-\infty$:

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x > A \implies f(x) > K) \quad (156)$$

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x < A \implies f(x) > K) \quad (157)$$

Možnost, že by limita byla $-\infty$:

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x > A \implies f(x) < K) \quad (158)$$

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D(f))(x < A \implies f(x) < K) \quad (159)$$

Slovy to je cca: Máme libovolně velikou mez K a musí platit, že existuje nějaký bod A z definičního oboru. Od tohoto bodu až po $+\infty$ (respektive $-\infty$) překonávají všechny odpovídající funkční hodnoty danou mez. Proto se říká, že funkce f *roste přes všechny meze* respektive *klesá pod všechny meze*, je-li limitou $-\infty$.

7.2.5 Limity zprava a zleva

Některé funkce mohou mít různé limity bereme-li v potaz je pravé (levé) okolí bodu. Zapisuje se:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A \quad (160)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \quad (161)$$

7.2.6 Pravidla počítání s limitami

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \qquad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \qquad (162)$$

Máme-li 2 funkce jejichž limity jsou uvedeny výše, potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot A \qquad (163)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B \qquad (164)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \qquad (165)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{Pokud } B \neq 0 \qquad (166)$$

Poté platí *l'Hospitalovo pravidlo* (viz 23.5). Další zajímavé vlastnosti:

- Máme-li 2 funkce $f(x), g(x)$ pro něž v okolí bodu a platí $f(x) \leq g(x)$. Pak platí (pokud mají obě funkce v bodě limitu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \qquad (167)$$

- z předchozího vyplývá vlastnost pro 3 limity $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, je to tzv. *Věta o třech limitách*

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \right) \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \qquad (168)$$

7.2.7 Důležité limity

Platí-li $n \in \mathbb{N}$ a $a \in (0, 1)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad (169)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^- \infty} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+ \infty} \frac{1}{x} = +\infty \qquad (170)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+ \infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \nexists \qquad (171)$$

$$(172)$$

Jako je to v tabulkách a takže opisovat nebudu.

7.2.8 Asymptota

Asymptota (neboli *asymptotická přímka*) náleží nějaké křivce. Vzdálenost této přímky a křivky se limitně blíží k nule, když se jedna nebo obě souřadnice blíží nekonečnu. Pomocí limit můžeme určit rovnice asymptot funkce.

„Jak najdeme asymptoty bez směrnice pro funkce f ?

Stačí když najdeme body, kde má funkce nevlastní limity ve vlastním bodě (většinou body, kde není definována).“

Asymptoty se směrnicí - k těm se graf blíží, když se x blíží $\pm\infty$. Jsou svislé nebo šikmé (vždy je to graf lineární funkce $y = kx + q$).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - q) = 0 \quad (173)$$

Asymptoty bez směrnice - těm se graf funkce $f(x)$ blíží, když se x blíží nějakému číslu a . Jsou vždy kolmé na osu x . S grafem funkce se nikdy neprotínají.

7.3 Meta

7.3.1 Zdroje

- [wiki: limita funkce](#)
- [matematika.cz limita funkce](#)
- [realisticky: přírůstek argumentu](#)
- [matematika.cz spojitost funkce](#)
- [matematika.cz jednostranná limita](#)
- [realisticky.cz asymptoty funkce](#)
- [wiki: Asymptota](#)
- [realisticky.cz limity, posloupnosti ... prostě menu \(dobrý to zdroj](#)
- <https://matematika.cz/vlastni-limita-nevlastni-bod>
- <https://matematika.cz/nevlastni-limita-nevlastni-bod> <https://maths.cz/clanky/212-limity-funkci>

7.3.2 Zadání/Pojmy

Okolí bodu, přírůstek argumentu, přírůstek funkce, funkce spojitá v bodě, funkce spojitá v uzavřeném intervalu. Limita funkce, pravidla pro počítání limit, nevlastní limity a limity v nevlastních bodech, důležité limity. Asymptoty grafu funkce.

8 Nealgebraické funkce

8.1 Exponenciální funkce

$$y = f(x) = a^x \quad (174)$$

Základ a je kladné číslo různé od nuly (pro nulu je grafem konstantní funkce $y = 1$). Grafem exponenciální funkce je *exponenciála* neboli *exponenciální křivka*. $D_f \subseteq \mathbb{R}$ (existuje i pro $D_f \subseteq \mathbb{C}$).

Derivací je exponenciály je:

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (175)$$

A protože přirozený logaritmus z Eulerova čísla (e) je roven jedné často se využívá zápis exponencionály ve tvaru:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} = \exp(x \cdot \ln a) \quad (176)$$

Vlastnosti exponencionály:

- je prostá
- je spojitá
- Vždy prochází body $[0, 1]$, $[1, a]$
- Pro $a > 0$ je rostoucí a zdola omezená
- Pro $a \in (0; 1)$ je klesající a shora omezená
- grafy funkcí $y = a^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou souměrně sdružené podle osy y

Pro záporná a není definována, protože pro sudá x by byla funkce kladná, pro lichá n by byla záporná a pro jiná reálná čísla by to byl docela zmatek, protože odmocnina je definována jen pro kladná čísla (aspoň v tabulkách, kalkulačka některé jednodušší zvládá).

8.2 Logaritmus

Je to inverzní funkce k exponenciále ($y = a^x$). Logaritmická funkce se *základem* a je definována jen pro $x > 0$ a značí se:

$$f(x) = y = \log_a x \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad (177)$$

Můžeme číst a na kolikátou se rovná x . Logaritmy s často používaným základem mají speciální značení:

- Základ 10, *dekadická* logaritmická funkce

$$y = \log x = \log_1 0 x \quad (178)$$

- Základ je Eulerovo číslo e , nazývá se *přirozená* logartmická funkce

$$y = \ln x = \log_e x \quad (179)$$

Grafem logaritmu je *logaritmická křivka*, pro kterou platí, že:

- je funkce prostá
- Pro $a > 1$ je funkce rostoucí
- Pro $0 < a < 1$ je funkce klesající
- prochází body $[1, 0], [a, 1]$
- osa y je její asymptotou
- grafy funkcí $y = \log_a x$ a $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ jsou souměrně sdružené podle osy x

8.2.1 Počítání s logaritmy

Logaritmus základní pravidla pro $a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge x > 0$

$$\log_a x = L \iff a^L = x \quad (180)$$

$$a^{\log_a L} = L \text{ čili } \log_a a^L = L \quad (181)$$

Počítání s logaritmy

- logaritmus součinu

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (182)$$

- logaritmus podílu

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (183)$$

- logaritmus mocniny

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad (184)$$

Převody logaritmů s různými základy

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \quad (185)$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad (186)$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (187)$$

8.3 Meta

8.3.1 Zdroje

- [wiki: exponenciální funkce](#)
- [wiki: logaritmus](#)
- tabulky
- moje hlava

8.3.2 Pojmy/zadání

Exponenciální funkce, definiční obor, obor hodnot, graf a vlastnosti v závislosti na jejím základu a . Logaritmická funkce, definiční obor, obor hodnot, graf a vlastnosti v závislosti na jejím základu a . Funkce $y = \log x$ a $y = \ln x$. Pojem logaritmus, vlastnosti logaritmů.

9 Goniometrie a trigonometrie

9.1 Goniometrické funkce

9.1.1 Zavedení

K zavedení se často používá tzv. *jednotková kružnice* (kružnice s poloměrem jedna), kde α je orientovaný úhel

Sinus je v pravoúhlém trojúhelníku poměr protilehlé odvěsny a přepony. V jednotkové kružnici je to y -ová souřadnice. Značí se $\sin(\alpha)$. Grafem je *sinusoida*.

Kosinus je v pravoúhlém trojúhelníku poměr přilehlé odvěsny a přepony. V jednotkové kružnici je to x -ová souřadnice. Značí se $\cos(\alpha)$. Grafem je *sinusoida*.

Tangens je poměr sinu a kosinu úhlu. V pravoúhlém trojúhelníku tedy poměr protilehlé a přilehlé odvěsny. Značí se $\tan(\alpha)$ nebo také $\operatorname{tg}(\alpha)$. Grafem je tzv. *tangentoida*. Není definován pro α takové, kdy je kosinus roven nule.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad (188)$$

Kotangens je poměr kosinu a sinu úhlu. V pravoúhlém trojúhelníku tedy poměr přilehlé a protilehlé odvěsny. Značí se $\cot(\alpha)$ nebo $\operatorname{cotg}(\alpha)$ nebo $\operatorname{cotan}(\alpha)$. Grafem je tzv. *kotangentoida*. Není definován pro α takové, kdy je sinus roven nule.

Sekans a kosekans jsou taktéž goniometrické funkce, ale málo se používají, protože jsou to jen převrácené hodnoty již existujících.

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \csc = \frac{1}{\sin \alpha} \qquad (189)$$

9.1.2 Tabulka vlastností

To je asi líp v tabulkách, to bych jen opisoval. Tak na to kašlu ...

Všechny jsou periodické (tg a cotg s periodou π vs \sin/\cos in 2π). Sinus a

kosinus jsou omezené $\langle -1, 1 \rangle$. Sinus začíná v nule a roste, kosinus začíná v 1 a klesá. Tangens pořád roste a prochází počátkem. Kotangens pořád klesá a počátkem prochází asymptota.

Kosinus je sudý. Sinus, tangens, kotangens jsou funkce liché.

9.1.3 Nějaké vzorce

meh... jsou v tabulkách. To bych jen opisoval.

Tady by asi měly být vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

9.2 Řešení trojúhelníku

Je-li pravoúhlý můžeme využít pravidla uvedená výše (viz 9.1.1). To se nazývá *goniometrické funkce ostrého úhlu*, protože platí jen pro ostré úhly v daném pravoúhlém trojúhelníku. Pro obecný trojúhelník musíme využít složitější pravidla.

9.2.1 Sinová věta

Platí v každém trojúhelníku (ty strany nemusí být takhle označené, platí cyklická záměna). Úhel α leží proti straně a a β proti b :

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (190)$$

9.2.2 Kosinová věta

Je zobecněním Pythagorovy věty. Pozor při cyklické záměně, ať se nepoplete, která strana je která a které úhly které náleží, při zadávání do kalkulačky.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (191)$$

9.3 Goniometrické funkce složeného argumentu

Jestli se tím myslí $\sin(x+j)$ tak jednoduše se na funkci posuneme o j doprava (tj. doleva pro záporné j). To relativně znamená, že funkce se posouvá doleva (prava pro $j < 0$) o j .

Jako fakt nevím, co k tomu říct ...

9.4 Cyklometrické funkce

Jsou funkce inverzní ke goniometrickým funkcím. K různým goniometrickým funkcím se přiřazují pomocí předpony *arkus* (nebo *arcus*). Na kalkulačce se často využívá značení exponentem v -1 , ale zápis může být trochu matoucí:

$$\arccos \alpha = \cos^{-1} \alpha \neq (\cos \alpha)^{-1} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha \quad (192)$$

Jsou definovány jen v určitých intervalech, kde je daná goniometrická funkce prostá. Požíváme je vždy, když k dané hodnotě goniometrické funkce hledáme neznámý argument.

9.5 Hyperbolické funkce

Značí se \tanh a \sinh a \cosh a v SŠ se nepoužívají (aspoň já to nikdy neviděl), takže jen pro info, že existují.

9.6 Meta

9.6.1 Zdroje

- Tabulky, moje hlava
- wiki pro kontrolu alternativ zápisů tg a cotg

9.6.2 Pojmy/Zadání

Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens, definiční obory, obory hodnot, grafy, vlastnosti. Goniometrické funkce složeného argumentu. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi, goniometrické funkce ostrého úhlu, řešení pravoúhlého trojúhelníku, sinová věta, kosinová věta, řešení obecného trojúhelníku.

10 Nealgebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy

10.1 Meta

Tady moc nevím, co k tomu. Je to asi v předchozích otázkách.

10.1.1 Zdroje

10.1.2 Pojmy/Zadání

Exponenciální rovnice a nerovnice, logaritmické rovnice a nerovnice. Goniometrické rovnice a nerovnice.

11 Kombinatorika

11.1 Faktoriály

Zapisuje se jako $n!$ (čte se jako n faktoriál a je definován jen pro celá nezáporná čísla $n \in \mathbb{N}_0$ a je definován jako:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad n \in \mathbb{N} \quad (193)$$

$$0! = 1 \quad n = 0 \quad (194)$$

11.2 Kombinační čísla

Čte se jako n nad k . Platí pro celá kladná čísla, kde n je větší nebo rovno k . Definováno jako

$$n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \leq n \quad (195)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (196)$$

Pár zajímavých vlastností

$$\begin{array}{ll} \binom{0}{0} = 1 & \binom{n}{0} = 1 \\ \binom{n}{n} = 1 & \binom{n}{1} = 1 \\ \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Kombinační čísla lze uspořádat do *Pascalova trojúhelníku*, tak že n se zvětšuje s řádkem a k jsou jednotlivé sloupce. Viz tabulky.

11.2.1 Binomická věta

Kombinační čísla $\binom{n}{k}$ se někdy nazývají jako *binomické koeficienty*, např. v L^AT_EXu se kombinatorická čísla vytváří pomocí příkazu *binom*.

$$a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \quad (197)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \quad (198)$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \quad (199)$$

11.3 Množinový pohled

Kombinatorika řeší, jak vybrat k -tici z n -prvkové množiny. Nebo vybírání k -prvkovou podmnožinu n -prvkové množiny. Lacičky řečeno vybíráme k z n věcí.

Můžeme je dále dělit podle toho, jestli záleží na pořadí vybraných prvků (tj. je to *uspořádaná* k -tice) nebo ne (tj. *neuspořádaná*). Nebo podle toho, jestli se prvky mohou vybrat vícekrát, respektive pouze jednou (tj. *s opakováním*, respektive *bez opakování*).

Základním pojmem je pojem (k -prvková) *skupina*, nazývaná je také *k-tice*.

11.4 Variace

Uspořádaná k -tice sestavená z n -prvků.

11.4.1 Variace bez opakování

Uspořádaná k -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Platí-li $k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$ je počet těchto variací:

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (200)$$

11.4.2 Variace s opakováním

Uspořádaná k -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát. Platí-li $k, n \in \mathbb{N}$ je počet těchto variací:

$$V'(k, n) = n^k \quad (201)$$

11.5 Permutace

U permutací, je vždy využit každý prvek z n -prvkové množiny.

11.5.1 Permutace bez opakování

Uspořádaná n -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. (To znamená, že je to vlastně speciální případ variace bez opakování, kde $k = n$). Platí-li $n \in \mathbb{N}$ je počet těchto permutací:

$$P(n) = n! \quad (202)$$

11.5.2 Permutace s opakováním

Uspořádaná k -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní alespoň jednou. To znamená, že $k > n$. Vyskytuje-li se tam i -tý prvek k_i -krát a platí-li: $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N} \wedge k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = k \wedge n \in \mathbb{N}$, poté je počet permutací s opakováním:

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \quad (203)$$

11.6 Kombinace

Neuspořádaná k -tice sestavená z n -prvků.

11.6.1 Kombinace bez opakování

Neuspořádaná k -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. (tj. k -prvková podmnožina n -prvkové množiny). Platí-li $k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$ je počet těchto kombinací:

$$K(k, n) = \binom{n}{k} \quad (204)$$

11.6.2 Kombinace s opakováním

Neuspořádaná k -tice sestavená z n -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát. Platí-li $k, n \in \mathbb{N}$ je počet těchto kombinací:

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k} \quad (205)$$

11.7 Pravidla

11.7.1 Součtu

Říká, že máme-li a způsobů, jak něco udělat. A b způsobů, jak udělat něco jiného. A není možné provést a i b , takže je nutné si jeden z nich vybrat. Poté je počet možných věcí, které můžeme provést roven $a + b$.

Příklad: Chceme-li vybrat 1 míček z množiny 5 červených míčků máme 5 možností. Chceme-li vybrat jeden míček z množiny 7 modrých míčků máme 7 možností. Spojíme-li tyto množiny je počet možností, jak vybrat jeden míček $12 = 5 + 7$.

11.7.2 Součinu

Existují-li 2 nezávislé jevy (př. hod mincí a hod kostkou). Každý má nějaký počet možných výsledků. Můžeme provést oba děje. Pak počet možných výsledků (tj. kombinací 2 původních) je roven počtu možností prvního jevu krát počet možností druhého jevu.

Příklad 1: Máme-li například červenou a modrou kostku a vrhneme je. Je počet možností, které mohou padnout, roven počtu možností na jedné kostce krát počtu možností na druhé kostce. Je to proto, že ke každé možnosti na modré kostce můžeme přiřadit každou možnost na druhé kostce. Je-li jedna kostka 6-stěnná a druhá 20-stěnná je počet možných kombinací $120 = 6 \cdot 20$

Příklad 2: Vybíráme 1 muže ze skupiny 8 mužů. Vybíráme 1 ženu ze skupiny 4 žen. Nyní chceme zjistit počet možných dvojic muž žena. Každému muži můžeme jakoby přiřadit každou dívku, výsledek je tedy: $32 = 8 \cdot 4$

11.8 Meta

11.8.1 Zdroje

- Tabulky!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinatorika>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Variace_\(kombinatorika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Variace_(kombinatorika))
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinace>
- <https://matematika.cz/kombinatorika>
- <http://www.gymklob.info/matematika/kombinatorika/uvod.htm>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo_sou%C4%8Dtu

11.8.2 Zadání/ pojmy

Základní kombinatorická pravidla (součtu a součinu), pojem faktoriálu čísla, skupiny v kombinatorice, variace, permutace, variace s opakováním, kombinace, kombinační čísla a jejich vlastnosti, binomická věta.

12 Pravděpodobnost

Pravděpodobnost nějakého jevu je číslo, které je mírou (poměrem) očekávatelnosti výskytu tohoto jevu. Tj. jako moc můžeme daný jev očekávat. v průběhu budu, ke znázornění využívat příklad 6-stěnné kostky, ve které je každá stěna označena různým číslem od 1 do 6. A která vždy spadne na nějakou stěnu.

12.1 Náhodné pokusy

Náhodný pokus je pokus, který může mít za stejných podmínek různé výsledky ovlivněné náhodou.

Množina všech možných výsledků pokusu označuje se Ω , tyto výsledky se navzájem vylučují a jeden z nich vždy nastane. Příklad: padne číslo od 1 do 6

Počet možných výsledků pokusu se značí m . Příklad: počet stěn kostky, tedy 6.

Jednotlivé výsledky pokusu se značí ω_i , kde $\omega_i \in \Omega$ a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. Příklad: Padne 5, nebo padne 3.

Pravděpodobnost výsledku se pro ω_i značí $p(\omega_i)$. Platí:

$$0 \leq p(\omega_i) \leq 1 \quad (206)$$

$$\sum_{i=1}^m p(\omega_i) = 1 \quad (207)$$

$p(\omega_i)$ se často zapisuje ve tvaru procenta. Jsou-li pravděpodobnosti všech výsledků stejné, pak platí:

$$p(\omega_i) = \frac{1}{m} \quad (208)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (209)$$

Příklad: V případě necinknuté kostky předpokládáme stejné pravděpodobnosti, tedy pravděpodobnost, že padne 5 je $\frac{1}{6}$ a pravděpodobnost, že padne 4 je také $\frac{1}{6}$.

Kdyby byla kostka cinknutá, aby padala 6 více platí například: $p(6) = \frac{1}{4}$.

12.2 Jevy a jejich pravděpodobnost

Jev - značí se A, B, \dots je to nějaká podmnožina množiny Ω . Příklad: padne 6, nebo také jev padne číslo sudé, nebo jev padne číslo menší než 4...

Výsledek příznivý jevu - značí se $\omega \in A$ (čte se výsledek ω příznivý jevu A). Příklad: pro jev padne sudé číslo jsou příznivými výsledky padne 2, padne 4 nebo padne 6.

Počet výsledků příznivých jevu - značí se $m(A)$. Příklad: pro jev padne liché číslo je počet výsledků příznivých jevu 3.

Pravděpodobnost jevu - značí se $P(A)$ pro jev A . Je to součet pravděpodobností všech výsledků příznivých jevu A . Platí, že $0 \leq P(A) \leq 1$. Jsou-li všechny výsledky pokusu stejně pravděpodobné, pak:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} \quad (210)$$

Příklad: pravděpodobnost, že padne sudé číslo na necinknuté kostce je $\frac{1}{2}$, protože:

$$P(sude) = \frac{m(sude)}{m} = \frac{3}{6}$$

Nemožný jev - značí se \emptyset a platí $P(\emptyset) = 0$. Příklad: jev, že padne 7.

Jistý jev - značí se Ω a platí $P(\Omega) = 1$. Příklad: jev, že padne kladné celé číslo.

Podjev značí se $B \subset A$ a říká, že jev B je podjevem jevu A . Platí $P(B) \leq P(A)$. Příklad: jev padne číslo větší než 4, je podjevem jevu padne číslo větší než 2.

Opačný jev A' je opačný k jevu A . Příklad: jev padne sudé číslo je opačný k jevu padne liché číslo (platí i obráceně).

$$A' = \Omega \setminus A \quad (211)$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (212)$$

Průnik jevů - značí se $A \cap B$ a označuje množinu jevů, které jsou podmnožinou jak množiny A , tak množiny B . O pravděpodobnostech platí:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \wedge P(A \cap B) \leq P(B)$$

Příklad: jev A padne číslo větší než 3, jev B padne sudé číslo. $C = A \cap B$, pak jev C obsahuje možné výsledky 4 a 6.

Navzájem se vylučující jevy taktéž *Neslučitelné jevy*. Platí pro ně $A \cap B = \emptyset$. Příklad: padne číslo menší než 2 a padne číslo sudé.

Sjednocení jevů se značí $A \cup B$. O pravděpodobnosti platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (213)$$

Jsou-li jevy A, B navzájem nezávislé, pak (vyplývá z definice vylučujících se jevů):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (214)$$

Příklad: padne sudé číslo a jev padne číslo větší než 2. Máme 3 sudá čísla a 4 čísla větší než 2. Čísla 4 a 6 se tam ale vyskytují dvakrát (protože jsou v průniku jevů).

Příklad vylučující se: Padne číslo větší než 5 a padne číslo menší než 3.

Nezávislé jevy jsou jevy, které se vzájemně neovlivňují. (Je to obdobné pravidlu součinu v kombinatorice, viz 11.7.2)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (215)$$

Příklad: Jev A : hodím v prvním hodě na kostce 5. Jev B : hodím v druhém sudé číslo. To, co hodím na první hod, nemá vliv na hod druhý, takže celková pravděpodobnost, že nastane obojí je: $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$.

12.3 Opakování náhodného pokusu

Náhodný pokus je n -krát zopakován, jednotlivá opakování jsou na sobě nezávislá. Pravděpodobnost, že přitom k -krát nastane jev A , který má pravděpodobnost $P(A) = p$ zjistíme vzorcem (pro nezáporné celé k , menší než n : $k = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (216)$$

Vyplývá z definice nezávislých jevů a z kombinace nezávislých jevů (viz 11.6.1). Nebo přímo z binomické věty (viz 11.2.1)

12.3.1 Bernoulliho schéma

Nazývané také *binomické rozdělení*. Popisuje četnost výskytu náhodného jevu v pokusech, ve kterých má vždy stejnou pravděpodobnost. Značení, kde n je počet pokusů a p je pravděpodobnost jevu:

$$B(n, p) \qquad Bi(n, p) \qquad (217)$$

Rovnice pro výpočet pravděpodobnosti, že jev s pravděpodobností p nastane k -krát v n pokusech (216)

12.4 Meta

12.4.1 Zdroje

- Tabulky!!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravd%C4%9Bpodobnost>
- <https://matematika.cz/pravdepodobnost>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/N%C3%A1hodn%C3%BD_jev
- https://sk.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_sch%C3%A9ma

12.4.2 Pojmy/ zadání

Náhodné pokusy, množina všech možných výsledků pokusu, jevy v množinovém pojetí a operace s jevy, jistý jev, nemožný jev, klasická definice pravděpodobnosti, základní vlastnosti pravděpodobnosti jevů, pravděpodobnost opačných jevů, pravděpodobnost sjednocení jevů pro jevy neslučitelné i slučitelné, nezávislé jevy, pravděpodobnost průniku nezávislých jevů, opakované nezávislé pokusy, binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma) a jeho užití.

13 Statistika

- *Statistický soubor* - konečná neprázdná množina objektů nazývaných *statistické jednotky*
- *Statistická jednotka* = prvek statistického souboru. Předpokládáme očíslování $1, 2, \dots, n$

- *Rozsah souboru* - počet statistických jednotek ve statistickém souboru, označení n
- *Znak* - vyšetřovaná vlastnost statistických jednotek, značení x , např.: pohlaví, měsíční plat ...
- *Hodnota znaku* - znak x nabývá hodnot: $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$, kde $r \leq n$
- tyto hodnoty jsou navzájem neslučitelné a pro každou statistickou jednotku musí jedna z těchto hodnot nastat, např.: muž/žena, 20 000 Kč ...
Označení hodnoty znaku x pro statistickou jednotku i : x_i
- *Kvantitativní znak* - jeho hodnoty se liší velikostí, např.: výška v cm, nebo měsíční plat zaměstnance ...
- *Kvalitativní znak* - jeho hodnoty se liší kvalitou, např.: pohlaví, barva vlasů ...
- *Četnost hodnoty znaku x_j^** - počet statistických jednotek pro, které znak x nabývá hodnoty x_j^* se značí n_j . Specifikuje se také jako absolutní. Platí:

$$\sum_{j=1}^r n_j = n \quad (218)$$

- *Relativní četnost znaku x_j^** - může se udávat jako desetinné číslo, nebo častěji v procentuálním tvaru. Udává podíl četnosti tohoto znaku a rozsah souboru (tj. součet četností všech hodnot znaku (tj. počet všech prvků = rozsah souboru)). Značí se pomocí ν (v češtině se čte jako 'ný') s indexem odpovídajícím indexu absolutní četnosti.

$$\nu_j = \frac{n_j}{n} \quad \sum_{j=1}^t \nu_j = 1 \quad (219)$$

- *Kumulativní četnost* - jen tak pro zajímavost. Může být relativní nebo absolutní. Seřadíme nějak hodnoty znaku, a při výpisu do tabulky, vždy sečteme s předchozími, tak aby u posledního vyšlo 1 pro relativní respektive n pro absolutní.

13.1 Rozdělení četnosti

Také nazývané jako *rozložení četnosti*. Zobrazujeme ve formě tabulky nebo grafu. Například známky žáků ve škole. Příklad viz tabulku 4.

Známka	Počet žáků
1	5
2	10
3	5
4	4
5	1

Tabulka 4: Tabulka známek žáků

13.1.1 Skupinové rozložení četností

Rozdělíme soubor na nějaké podskupiny na základě jiného znaku. Například na kluky a dívky nebo podle ročníků, podle předmětů . . .Příklad viz tabulku 5.

Známka	chlapci	dívky
1	4	1
2	3	7
3	2	3
4	2	2
5	1	0

Tabulka 5: Tabulka známek chlapců a dívek

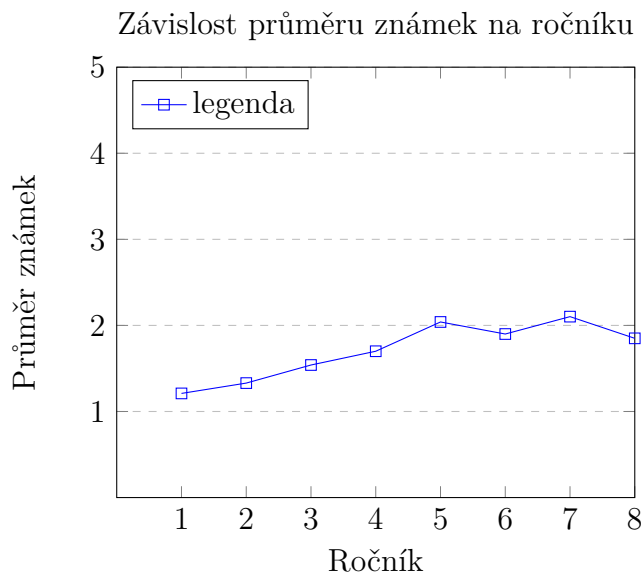
13.2 Grafické znázornění četností

13.2.1 Tabulka

V prvním řádku jsou hodnoty znaku x a v druhém odpovídající četnosti. Příklady tabulek 4 a 5. (U nich je to ale položeno obráceně, místo řádků jsou to sloupce, tj. první sloupec je hodnota znaku a druhý je jeho četnost.)

13.2.2 Spojnicový diagram

Nazýván také *polygon četnosti*. Je to lomená čára spojující body, jejichž první souřadnice jsou hodnoty znaku x a druhé souřadnice jsou odpovídající četnosti. Pouze pro kvantitativní znaky. Viz obrázek 1



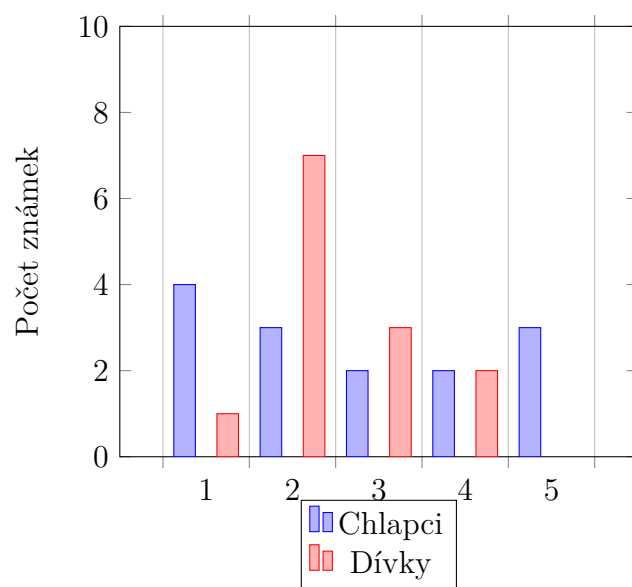
Obrázek 1: Příklad spojnicového grafu

13.2.3 Sloupkový diagram

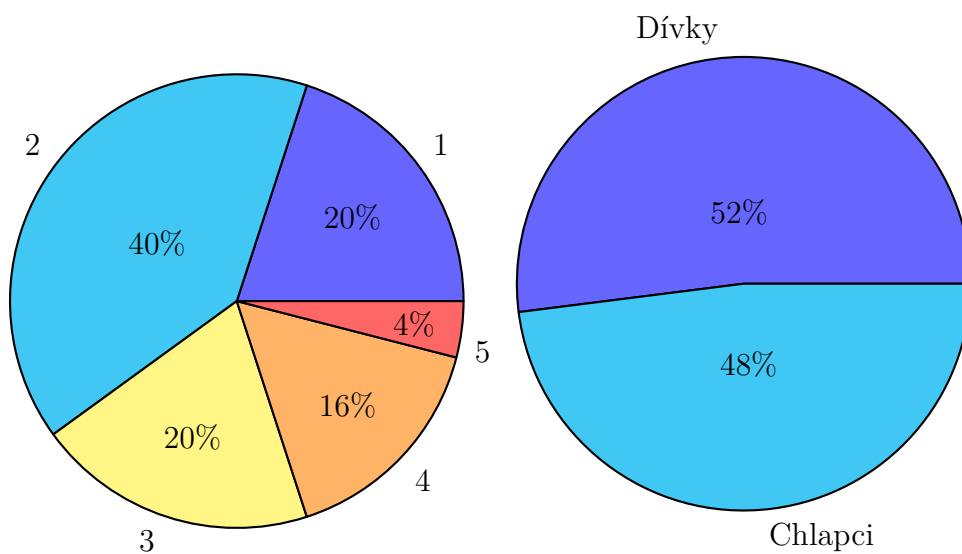
Nazývaný také *histogram*. Základny sloupků znázorňují jednotlivé hodnoty znaku x a (u kvantitativního znaku popř. intervaly, do nichž jsou tyto hodnoty sdruženy), výšky sloupců znázorňují četnosti odpovídající danému znaku. (zejména pro kvantitativní znaky). Viz obrázek 2 (využívá hodnoty z předchozích tabulek 4 a 5).

13.2.4 Kruhový diagram

Jednotlivé hodnoty znaku x jsou znázorněny kruhovými výsečemi, jejichž obsahy (středové úhly) jsou přímo úměrné odpovídajícím četnostem. (Zejména pro kvalitativní znaky) Viz obrázek 3 (využívá hodnoty z předchozích tabulek 4 a 5).



Obrázek 2: Příklad sloupkového diagramu



Obrázek 3: Kruhový diagram

13.3 Charakteristiky polohy kvantitativního znaku

- *Aritmetický průměr* značí se \bar{x} (v \TeX u druhá možnost \overline{x}) nebo také p_a . Sečteme všechny naměřené hodnoty a vydělíme jejich počtem.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r x_j^* n_j \quad (220)$$

- *Vážený aritmetický průměr* - jednoduchá obdoba aritmetického průměru, kdy mají různé prvky různou váhu. Hodnotu znaku prvně vynásobíme váhou a poté všechny sečteme a vydělíme celkovou váhou. Př.: Počítání průměru známek, kde mají různé písemky (/ testy / zkoušení) různou váhu.
- *Geometrický průměr* - všechny hodnoty znaku vynásobíme a poté odmocníme počtem prvků souboru. Je vždy menší nebo roven aritmetickému průměru. Značí se p_g nebo \bar{x}_G nebo:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (221)$$

- *Harmonický průměr* - je definován jako podíl počtu (rozsah souboru) a součtu jejich převrácených hodnot. To znamená totéž, co převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot. Je vždy menší nebo roven geometrickému průměru. Zapisuje \bar{x}_H :

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (222)$$

- *Kvadratický průměr* - je to odmocnina aritmetického průměru druhých mocnin. Asi mimo SŠ, ale využívá se např. při výpočtu rozptylu viz rovnice (225).

$$K = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \quad (223)$$

- *Modus* - hodnota znaku s nejvyšší četností, značí se $Mod(x)$

- *Medián* - značí se $Med(x)$ prostřední z hodnot x_1, x_2, \dots, x_n znaku x uspořádaných podle velikosti (pro liché n)
- pro sudé n je to aritmetický průměr dvou prostředních hodnot (znaku x uspořádaných podle velikosti)
- *První kvartil* - značí se Q_1 , medián první poloviny hodnot (pro liché n je poslední hodnotou $Med(x)$) seřazených dle velikosti
- *Třetí kvartil* - značí se Q_2 , medián druhé poloviny hodnot (pro liché n je první hodnotou $Med(x)$) seřazených dle velikosti

13.3.1 Vztahy mezi průměry

Označíme-li si A jako aritmetický, G jako geometrický, H jako harmonický a K jako kvadratický, pak platí (pokud jsou to průměry stejného souboru):

$$K \geq A \geq G \geq H \quad (224)$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Nejdůležitější je *AG nerovnost* mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

13.4 Charakteristiky variability kvantitativního znaku

- *Rozptyl* - také nazýván *střední kvadratická odchylka* a *variance*. Pro všechny naměřené hodnoty se spočítá jejich vzdálenost od aritmetického průměru. Ta se stane stranou čtverce. Variace je průměrem obsahu těchto čtverců. Čím větší je rozptyl naměřených hodnot, tím je hodnota variace větší. Značí se σ^2 , s_x^2 nebo $var(x)$.

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r \left(x_j^* - \bar{x} \right)^2 \cdot n_j = \quad (225)$$

$$= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right) - \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^r x_j^{*2} n_j \right) - \bar{x}^2 \quad (226)$$

- *Směrodatná odchylka* - značí se s_x nebo σ

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (227)$$

- *Variační koeficient* - má smysl jen tehdy jsou li všechny hodnoty znaku nezáporné.

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (228)$$

- *Mezikvartilová odchylka*

$$Q(x) = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1) \quad (229)$$

13.5 Korelace

Ve statistickém souboru vyšetřujeme uspořádanou dvojici kvantitativních znaků (x, y) . Koeficient korelace r_{xy} se potom vypočítá:

$$\text{Výsledek šetření: } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n) \quad (230)$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x \cdot s_y} = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} \quad (231)$$

Koeficient korelace je vždy číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Mezní hodnoty $r_{xy} = 1$ (respektive $r_{xy} = -1$) nabývá tehdy, když s rostoucí hodnotou znaku x roste (respektive klesá) hodnota znaku y . A to podle vzorce $y_i = a + bx_i$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $b > 0$ (respektive $b < 0$).

13.6 Meta

13.6.1 Zdroje

- Tabulky!!
- <https://matematika.cz/rozlozeni-cetnosti>
- <https://matematika.cz/zaklady-statistiky>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Sm%C4%9Brodavn%C3%A1_odchylka
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br

- https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadratick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti_mezi_pr%C5%AFm%C4%9Br

13.6.2 Pojmy/ zadání

Statistický soubor, statistické jednotky, statistické znaky, četnost a relativní četnost, rozdělení četností a skupinové rozdělení četností, grafické znázornění rozdělení četností (spojnicový diagram, histogram, kruhový diagram). Charakteristiky znaku statistického souboru. Charakteristiky polohy, aritmetický průměr, vážený aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, modus, medián. Charakteristiky variability, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient.

14 Posloupnosti a řady

14.1 Posloupnosti

Posloupnost je konečná nebo nekonečná řada objektů, které se mohou opakovat. Záleží v ní na pořadí, takže na konečnou posloupnost lze nahlížet jako na uspořádanou k-tici. Můžeme se setkat s následujícími značeními, v případě, že nemůže dojít k záměně s něčím jiným, může se značit i pouze jako a_n . Čteme je jako 'posloupnost a_n pro n jdoucí od jedné do nekonečna':

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad [a_n]_{n=1}^{\infty} \quad (a_n) \quad (232)$$

Posloupnost je funkce, která má jako definiční obor množinu přirozených čísel \mathbb{N} (nebo podmnožinu přirozených čísel, pokud je posloupnost konečná). Oborem hodnot je libovolná množina (v SŠ předpokládáme reálná čísla \mathbb{R})

Nekonečná posloupnost je zobrazením \mathbb{N} do \mathbb{R} . Značí se:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad a_1, a_2, \dots, a_k \quad (233)$$

Konečná posloupnost - zobrazení množiny $\{n, k \in \mathbb{N}; n \leq k\} = \{1, 2, \dots, k\}$ do \mathbb{R} . Zapisuje se:

$$(a_n)_{n=1}^k \quad a_1, a_2, \dots, a_k \quad (234)$$

Obraz čísla $n \in \mathbb{N}$ se značí a_n (respektive b_n, c_n, \dots). N -tý člen posloupnosti se značí a_n .

14.1.1 Určení posloupnosti

Vzorcem pro n-tý člen - Dosazením n získáme hodnotu členu posloupnosti

$$a_n = -2n \quad (235)$$

Rekurentně - člen je určen podle předchozího (popřípadě předchozích) členů.

$$b_{n+1} = b_n + 10 \quad d_{n+2} = d_n + d_{n+1} \quad (236)$$

Výčtem - napíšeme všechny členy (nejsem si jistej, jaká přesně je konvence)

$$(c_k) = (2, 4, 6, 8, \dots, 2048) \quad (c_n) = (3, 6, 9, 12, \dots) \quad (237)$$

14.1.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je

- *Rostoucí* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r < a_s \quad (238)$$

- *Klesající* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r > a_s \quad (239)$$

- *Neklesající* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r \leq a_s \quad (240)$$

- *Nerostoucí* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r \geq a_s \quad (241)$$

- *Monotónní* právě tehdy, když je neklesající nebo nerostoucí
- *Zdola omezená* existuje-li $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq d$.
Matematický zápis:

$$\exists d \in \mathbb{R}; (\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq d) \quad (242)$$

- *Shora omezená* existuje-li $c \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c$.
Matematický zápis:

$$\exists c \in \mathbb{R} | (\forall n \in \mathbb{N} | a_n \leq c) \quad (243)$$

- *Omezená* právě tehdy, když je zároveň omezená ze shora i ze zdola.

Graf je nespojitý, protože definiční obor jsou jen přirozená čísla. Je to množina bodů, kde souřadnice x je rovna n a souřadnice y je rovna příslušnému a_n .

14.1.3 Aritmetická posloupnost

Je jednoduchá posloupnost, kde je mezi 2 následujícími členy vždy stejný rozdíl. Ten se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti a značí se d . Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *aritmetická*, když:

$$(\exists d \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} = a_n + d) \quad (244)$$

Pro aritmetickou posloupnost platí, že každý člen kromě prvního je aritmetickým průměrem obou sousedních členů. Vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (245)$$

Součet prvních n členů:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad (246)$$

Vztah mezi dvěma členy:

$$a_s = a_r + (s - r) \cdot d \quad r, s \in \mathbb{N} \quad (247)$$

14.1.4 Geometrická posloupnost

Člen je vždy nalezen vynásobením předchozího stále stejným číslem q , které se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *geometrická*, když:

$$(\exists q \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} = a_n \cdot q) \quad (248)$$

Vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (249)$$

Součet prvních n členů:

$$s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \Leftarrow q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \Leftarrow q = 1 \end{cases} \quad (250)$$

Vztah mezi dvěma členy:

$$(\forall r, s \in \mathbb{N}) (a_s = a_r \cdot q^{s-r}) \quad (251)$$

14.1.5 Vztah aritmetické a geometrické posloupnosti

Je-li a_n aritmetická posloupnost, tak je posloupnost b^{a_n} posloupnost geometrická, platí pro libovolný základ $b \geq 0$.

Je-li g_n geometrická posloupnost s kladnými členy, tak je posloupnost $\log_b g_n$ aritmetická, platí pro libovolný základ $b > 0, b \neq 1$.

14.1.6 Využití aritmetické a geometrické posloupnosti

14.1.7 Limita posloupnosti (vlastní)

Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *limita* (popř. *vlastní limita*) posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. To jest, když (matematicky):

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0) (\forall |a_n - a| < \varepsilon) \quad (252)$$

Lidskými slovy: limita posloupnosti představuje číslo, ke kterému se daná posloupnost v nekonečnu přibližuje. Zápis limity (čteme: 'limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu je a '):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (253)$$

- *Konvergentní posloupnost* je posloupnost, která má vlastní limitu.
- *Divergentní posloupnost* je posloupnost, která nemá vlastní limitu.

Příklady limit:

$$\forall q \in (-1, 1); \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (254)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2,718282 \quad (\text{Eulerovo číslo}) \quad (255)$$

14.1.8 Nevlastní limita posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu plus nekonečno* (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$), jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $a_n > K$.

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0)(\forall a_n > K) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \right) \quad (256)$$

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu minus nekonečno* (tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$), jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $a_n < L$.

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0)(\forall a_n < L) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \right) \quad (257)$$

14.1.9 Věty o limitách posloupností

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Každá konvergentní posloupnost je omezená.
3. Každá omezená monotónní posloupnost je konvergentní.
Každá shora omezená neklesající posloupnost je konvergentní.
Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost je konvergentní.
- 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (258)$$

$$(\forall r > 0) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \right) \quad (259)$$

5. Necht (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti, jejichž limity jsou $\lim a_n = A$, respektive $\lim b_n = B$ a $c \in \mathbb{R}$ je reálné číslo. Potom jsou konvergentní i posloupnosti: $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $(c \cdot a_n)$ (a navíc pro nenulová B a b_n je konvergentní i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$) a platí o nich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B \quad (260)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B \quad (261)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B \quad (262)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot A \quad (263)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad (264)$$

14.2 Nekonečné řady

- *Nekonečná řada* - je součet členů nějaké posloupnosti, například pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ by byla řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (265)$$

- *n-tý člen řady* se značí a_n
- *n-tý částečný součet* se vypočítá:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (266)$$

- *Součet řady* se vypočítá přes limitu, pokud existuje:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (267)$$

Má-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet s , píšeme:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (268)$$

- *Konvergentní řada* je řada, která má konečný součet. Název vyplývá z toho, že posloupnost musí být konvergentní, aby toto platilo.
- *Divergentní řada* je řada, která nemá konečný součet. Název vyplývá z toho, že posloupnost musí být divergentní, aby toto platilo.

14.2.1 Geometrická řada

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrická, jestliže posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická. Řada vypadá následovně, označíme-li si *kvocient* geometrické řady q :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ kde } a_1, q \in \mathbb{R} \quad (269)$$

Geometrická řada (s $a \neq 0$) je konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$. Její součet potom vypočítáme:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \quad (270)$$

Uplatnění najde vzorec v převodu periodického desetinného rozvoje do tvaru zlomku. Příklad:

$$\begin{aligned} 0,278\overline{175} &= \frac{278}{1000} + \frac{175}{1000\ 000} + \frac{175}{100\ 000\ 000} + \dots \\ &\quad x = 0,275 \\ &\quad a_1 = \frac{175}{1000\ 000} \\ &\quad q = \frac{1}{1000} \\ s &= \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{175}{1000\ 000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{\frac{175}{1000}}{999} = \frac{175}{999\ 000} \\ &\quad 0,278\overline{175} = x + s \end{aligned}$$

Ambryho kompletní systém součtu nekonečné geometrické řady

$$(\forall a_1, q \in \mathbb{R}) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 = 0)(s = 0) \\ (\forall a_1 \neq 0) \left\{ \begin{array}{l} (\forall |q| < 1)(s = \frac{a_1}{1-q}) \\ (\forall q < -1)(\text{nekonverguje (osciluje)}) \\ (\forall q \geq 1) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 > 0)(s = +\infty) \\ (\forall a_1 < 0)(s = -\infty) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (271)$$

Ambryho kompletní systém součtu nekonečné aritmetické řady
jen tak pro test těch závorek, je to asi trochu mimo.

$$(\forall a_1, d \in \mathbb{R}) \left\{ \begin{array}{l} (\forall d > 0)(s = +\infty) \\ (\forall d < 0)(s = -\infty) \\ (\forall d = 0) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 > 0)(s = +\infty) \\ (\forall a_1 < 0)(s = -\infty) \\ (\forall a_1 = 0)(s = 0) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (272)$$

14.3 Finanční matematika

- K_0 je počáteční kapitál také vklad, úvěr
- n je počet let
- K_n označuje kapitál po n letech (po připsání úroku za n -tý rok)
- U_n je úrok za n let
- i je úroková míra (roční) vyjádřená desetinným číslem, jestliže je úroková míra $p\%$, potom $i = \frac{p}{100}$
- k je zdaňovací koeficient, jestliže daň z úroku je $d\%$, potom $k = 1 - \frac{d}{100}$

14.3.1 Jednoduché úročení

Z vloženého kapitálu získáváme pravidelně určitý výnos, tj. roční úrok. Tyto peníze už ale nejsou dále úročeny.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + nki) \quad U_n = nki \cdot K_0 \quad (273)$$

Kapitál K a úrok U po t dnech (úročí se v den splatnosti):

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right) \quad U_n = \frac{t}{360} \cdot ki \cdot K_0 \quad (274)$$

14.3.2 Složené úročení

Úročí se i kapitál získaný z úroků. Pro úrokovací období jeden rok:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + ki)^n \quad U_n = K_0 [(1 + ki)^2 - 1] \quad (275)$$

Úrokovací období t dní. Kapitál K_m a úrok U_m po m úrokovacích obdobích (po připsání úroku za m -té období):

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right)^m \quad U_m = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right)^m - 1\right] \quad (276)$$

14.3.3 Pravidelné spoření při složeném úročení

- S_m značí *naspořený kapitál* po m úrokovacích obdobích (po připsání úroku za m -té období)

Úrokovací období t dní. Při pravidelném ukládání částky a na začátku každého úrokovacího období:

$$S_m = a \cdot q \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \quad , \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot ki \quad (277)$$

Úrokovací období t dní. Při pravidelném ukládání vždy stejné částky. První částka je uložena na začátku prvního úrokovacího období a časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími vklady je $\frac{1}{j}$ délky úrokovacího období, kde $j \in \mathbb{N}$:

$$S_m = K \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \quad , \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot ki \quad (278)$$

A K je naspořený kapitál po připsání úroku za první úrokovací období.

14.3.4 Pravidelné splácení dluhu

Když je úrokovací období t dní.

- D je počáteční výše *dluhu*
- s je výše *splátky* placené vždy na konci úrokovacího období
- m je počet splátek

$$s = D \cdot q^m \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1} \quad , \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot i \quad (279)$$

14.4 Meta

Matematický zápis omezenosti posloupností jsem stvořil sám, ale Jonáš mi to schválil, tak snad dobré.

14.4.1 Zdroje

- Tabulky!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Posloupnost>
- <https://matematika.cz/posloupnosti>
- Z tohoto jdou možná pochopit limity <http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/posloupnosti/limita/limita.htm>
- <https://matematika.cz/limita-posloupnosti>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Aritmetick%C3%A1_posloupnost
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A1_posloupnost

14.4.2 Pojmy/ zadání

Pojem posloupnosti, způsoby zadání (určení) posloupností, vzorec pro n -tý člen, rekurentní zadání, graf posloupnosti, vlastnosti posloupností, monotónnost, omezenost. Aritmetická a geometrická posloupnost, důležité věty pro aritmetickou a geometrickou posloupnost, praktické užití aritmetické a geometrické posloupnosti. Limita posloupnosti, konvergentní a divergentní

posloupnosti, věty o limitách posloupností, výpočty limit. Nekonečná řada, součet nekonečné řady, nekonečná geometrická řada a její součet, převod daného racionálního čísla daného periodickým desetinným rozvojem na tvar zlomku, úlohy na aplikace vzorce pro součet konvergentní nekonečné řady.

15 Základy planimetrie a konstrukční úlohy

15.1 Základní pojmy a definice

15.1.1 Bod

Ambryho definice Dále nadělitelný, minimální (nebo nulová) výška, šířka a plocha.

Je tzv. *bezrozměrný*. Bod může určen například průnikem 2 různoběžných přímk nebo n souřadnicemi v n -rozměrném prostoru. Zapisují jako velká písmena, začínající od A.

15.1.2 Přímka

Ambryho definice Množina bodů pro něž platí, že mezi každými 2 body (A, B) je nekonečně mnoho bodů C , které leží na jejich spojnici. Zároveň platí, že pro každé body A a C je možné najít nekonečné množství bodů B , které mohou být v libovolné vzdálenosti (až nekonečné).

Přímka je určena 2 body. Nemá počátek a konec. Zapisují se malými písmeny, jako p nebo q ...

15.1.3 Rovina

Určená 3 body neležícími v 1 přímce, nebo přímkou a bodem jí nenáležící. Rovina je nekonečné ve všech směrech. Většinou se k jejímu označení používají řecké písmena, standardně začínající ρ .

15.1.4 Polorovina

Určena přímkou, která dělí rovinu na 2 poloviny, a bodem, který jednu z nich určuje. Značí se jako rovina.

název	úhel
nulový	$\alpha = 0^\circ$
ostrý	$\alpha < 90^\circ$
pravý	$\alpha = 90^\circ$
tupý	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
dutý	$\alpha < 180^\circ$
konvexní	$\alpha \leq 180^\circ$
přímý	$\alpha = 180^\circ$
konkávní	
(=vypuklý,	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$
=nekonvexní)	
plný	$\alpha = 360^\circ$

15.1.5 Polopřímka

Má *počátek* (tj. bod), ale nemá konce. Určená dvěma body a informací, který z nich je počátkem a druhý je *pomocným bodem*. Nebo přímkou a jedním jejím bodem, který ji rozdělí a stane se počátkem. 2 takhle vzniklé polopřímky jsou *opačné*. Značí se jako přímka.

15.1.6 Úsečka

Nejkratší možná spojnice 2 bodů. Je podmnožinou přímky. Označuje se 2 body v "absolutní hodnotě" (značení pro vzdálenost): $|AB|$

15.1.7 Obrazce

Část roviny ohraničená spojitou čarou. Patří jsem mnohoúhelníky (jako čtverec, trojúhelník, kosodélník ...), kružnice, elipsy ale i mnoho dalších.

15.2 Úhly

V rovině může být definován, pomocí 2 polopřímek se stejným počátkem. Nebo ekvivalentně pomocí přímek a bodů.

15.2.1 Pravidla pro dvojice úhlů

Dvě různoběžné přímky se protnou v bodě V , úhly které takto vzniknou mají dohromady 360° .

- Úhly které jsou naproti sobě (tj. nemají společnou ani jednu polopřímku) mají se nazývají *vrcholové* a mají stejnou velikost.
- Úhly, které mají společné právě jednu polopřímku se nazývají *vedlejší* a společně mají 180° .
- *Souhlasné* úhly jsou stejně veliké. Označují dvojici, kde jeden označuje úhel, který svírají dvě přímky (p, q) , a druhý označuje úhel mezi p a nějakou rovnoběžku q (nebo q a rovnoběžkou p).
- *Střídavé* úhly jsou stejně veliké. Pravidlo je jen kombinací pravidle o souhlasných a vrcholových úhlech.

15.3 Mnohoúhelníky

Mnohoúhelník (nebo také *polygon*) je část roviny vymezená úsečkami, které spojují n bodů (kde $n \geq 3$) a žádné 4 body neleží na jedné přímce.

- Body určující mnohoúhelník se nazývají *vrcholy*
- úsečky spojující sousední vrcholy se nazývají *strany*
- *úhlopříčky* - úsečky spojující nesousední vrcholy
- *vnitřní úhly* - jsou svírány sousedními stranami
- *vnější úhly* - doplňkový úhel do 180° k vnitřnímu úhlu
- počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů je stejný, označíme-li ho n , tak se podle něj vytváří název n -úhelník (trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník....)

Zapisuje se pomocí velkých písmen označujících body za sebou bez mezer, před něj se vloží symbol pro tento útvar. Vlastnosti

- *Obvod* je součet délek všech stran.
- součet vnitřních úhlů je roven $\pi(n - 2)$ rad
- počet úhlopříček je roven $\frac{1}{2}n(n - 3)$
- Jestliže existuje kružnice na které leží všechny vrcholy, říkáme, že je *opsaná* mnohoúhelníku. Mnohoúhelník, kterému jde kružnice opsat je *tětivový* (jeho strany jsou tětivami opsané kružnice)

- n -úhelník jde vždy rozdělit na $n - 2$ trojúhelníků

Dají různě dělit na druhy. Jednoduché vs *degenerované* - alespoň 2 strany se protínají. *Konvexní* (vnitřní úhly jsou menší než 180°) a *nekonvexní* (minimálně jeden vnitřní úhel větší než 180°). *Pravouhelníky* (všechny vnitřní úhly jsou 90° nebo 270°) a nepravouhelníky. *Pravidelné* (všechny strany a vnitřní úhly jsou shodné) a nepravidelné.

15.3.1 Pravidelné mnohoúhelníky

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \qquad \alpha = \frac{n-2}{n} \pi \text{ rad} \qquad (280)$$

Označíme vnitřní úhel α , tak je jeho velikost podle vzorce nahoře, kde n je počet vrcholů. součet všech vnitřních úhlů je potom logicky $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

$$\beta = \frac{2\pi}{n} \text{ rad} \qquad (281)$$

Velikost středového úhlu (popřípadě vnějšího) je podle 281.

Eukleidovská konstrukce je možná jsou-li liché dělitele n různá Fermatova čísla. Lol tak to je info jak brno. Obsah se počítá rozdělením na vhodné nepřekrývající se trojúhelníky a obdélníky a sečtením jednotlivých obsahů.

Pravidelné mnohoúhelníky jsou symetrické. Počet os souměrnosti je roven počtu vrcholů. Je-li počet vrcholů sudý má i střed souměrnosti.

Má kružnici opsanou (o poloměru r) i kružnici vepsanou (o poloměru ρ). Jejich středy jsou ve stejném bodě. Vzorce pro jejich výpočet n -úhelníku s délkou strany s :

$$r = \frac{s}{2 \sin\left(\frac{180}{n}\right)} \qquad \rho = \frac{s}{2 \tan\left(\frac{180}{n}\right)} \qquad (282)$$

15.4 Trojúhelníky

Značí se $\triangle ABC$. Kde velká tiskací písmena mohou být nahrazena jinými, pokud jsou to body určující vrchol trojúhelníku. Úhly u vrcholů se zpravidla označují α , β a γ nebo jiným řeckým písmenem. Strany se označují malými písmeny, podle protilehlého vrcholu. Vlastnosti:

- Nemá úhlopříčky
- Součet délek dvou stran je vždy větší než zbylá strana.
- Součet vnitřních úhlů je 180°

Zavedeme-li veličinu $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, pak můžeme vypočítat úhly následovně:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad (283)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad (284)$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{ba}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ba}} \quad (285)$$

15.4.1 Konstrukce

Trojúhelník je jednoznačně určen:

- (sss) - délkou všech 3 stran
- (sus) - délkou 2 stran a úhlem, který svírají
- (usu) - délkou jedné strany a velikostí úhlů, které k ní přiléhají
- (Ssu) - délkou 2 stran a úhlu proti větší z nich

15.4.2 Druhy

Podle stran:

- *obecný* - žádné 2 strany nejsou shodné
- *Rovnoramenný* - 2 strany jsou shodné, ale ne s třetí stranou
- *Rovnostranný* - všechny strany jsou shodné (-> všechny úhly shodné -> 60°)

Tak to je divná definice z wiki, já bych to dělal tak, že obecné \ni rovnoramenné \ni rovnostranné.

Podle úhlů:

- *ostroúhlý* - všechny úhly ostré
- *Pravoúhlý* - jeden úhel pravý, zbylé ostré
- *Tupoúhlý* - jeden tupý úhel, zbylé ostré

15.4.3 cool Věci

Výška je úsečka kolmá na stranu a protínající protilehlý vrchol. Průnik všech 3 výšek se nazývá *ortocentrum* (pro ostroúhlý uvnitř trojúhelníku, pro pravoúhlý ve vrcholu a pro tupouhlý vně). Bod, kde protíná stranu se nazývá *pata výšky*

Těžnice je úsečka spojující střed strany a protilehlý vrchol, označuje se t_a , t_b a t_c (nebo jinak podle stran/vrcholů). Všechny 3 se protínají v jednom bodě, který se nazývá *těžiště*. To rozděluje každou těžnici v poměru 2:1. Každá těžnice rozděluje trojúhelník na dva se stejným obsahem.

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad (286)$$

V analytické geometrii se dá určit těžiště trojúhelníku v rovině výpočtem $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$

$$t_x = \frac{1}{3}(a_x + b_x + c_x) \quad (287)$$

$$t_y = \frac{1}{3}(a_y + b_y + c_y) \quad (288)$$

Střední příčka je spojnice středů stran (tj. *pat těžnic*). Je rovnoběžná s protilehlou stranou a má poloviční délku. Rozděluje trojúhelník na 4 shodné - *příčkový* (těžiště má ve stejném bodě jako původní trojúhelník) a 3 při vrcholech.

Osy úhlů dělí úhel na polovinu a protilehlou stranu v poměru délek přilehlých stran. Jejich průsečík je středem *kružnice vepsané*, která se dotýká všech stran zevnitř.

$$\rho = \frac{1}{2}(a + b + c) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{S}{s} \quad (289)$$

Osy stran jsou kolmice vedené ze středů stran. Jejich průsečík je středem *kružnice opsané*, která prochází všemi vrcholy.

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad (290)$$

Kružnice připsaná - dotýká se jedné strany a 2 přímek, které jsou prodloužením zbylých stran.

Eulerova přímka - prochází těžištěm, ortocentrem, středem kružnice opsané. To je náhodička, co? Plus na ní leží střed *kružnice devíti bodů*, což vypadá taky jako shoda náhod.

15.4.4 Obvod a obsah

Obvod:

$$o = a + b + c \quad (291)$$

Obsah:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2} \quad (292)$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad s = o/2 \quad (293)$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad (294)$$

15.4.5 Věty

Sinová věta

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (295)$$

tangentová věta - vypadá divně, asi nedůležitá, už se mi to nechce přepisovat....

Cosinová věta - platí ve všech podobách po *cyklické zaměně*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (296)$$

Pythagorova věta - je zjednodušením kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (297)$$

Euklidova věta o výšce - obsah čtverce sestrojeného na odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \quad (298)$$

Euklidova věta o odvěsně - Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé.

$$a^2 = c \cdot c_a \qquad b^2 = c \cdot c_b \qquad (299)$$

Podobnost trojúhelníků - když mají 2 úhly shodně jsou trojúhelníky podobné (věta uu). Zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Nebo když jsou poměry délek všech odpovídajících si stran stejné (věta sss), nebo když poměry dvou odpovídajících si stran jsou stejné a shodují se v úhlu jimi sevřeném (věta sus). Nebo poměr 2 stran a shodný úhel, proti větší z nich (věta Ssu).

15.4.6 Rovnoramenný

Osově souměrné podél osy procházející kolmo středem *základny* (tj. strana, již jsou přilehlé strany, které jsou shodné) a *hlavním vrcholem* (tj. vrchol protilehlý základně). Tato osa je zároveň výškou a těžnicí základny. Z toho vyplývají další vlastnosti: *Ramena* (tj. stejně dlouhé strany) mají shodné těžnice, výšky.

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin \gamma \qquad \text{kde } a = b \qquad (300)$$

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad \text{kde } a = b \qquad (301)$$

15.4.7 Rovnostranný

Speciální případ rovnoramenného trojúhelníka. Je osově souměrný podle 3 os. Shodné výšky a těžnice. Výšky a těžnice jedné strany jsou totožné. Všechny vnitřní úhly 60° . Střed kružnice opsané, kružnice vepsané, těžiště a ortocentrum v jednom bodě.

15.5 Čtyřúhelníky

Součet velikostí vnitřních úhlů je 360° .

15.5.1 Obvod a obsah

Obvod je roven součtu všech stran. Obsah S se dá vypočítat pomocí délek úhlopříček e , f a úhlu θ , který svírají (libovolný).

$$S = \frac{1}{2}ef \sin \theta \quad (302)$$

Ve vzorcích se také používá s , které je polovinou obvodu.

$$o = a + b + c + d = 2s \quad (303)$$

Alternativní výpočty obsahu pro konvexní čtyřúhelník, Bretschneiderův vzorec (asi mimo SŠ):

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} \right)} \quad (304)$$

Přes rozdělení na 2 trojúhelníky:

$$S = \frac{1}{2} (ab \sin \alpha + cd \sin \gamma) \quad (305)$$

15.5.2 Rozdělení

Základní dělení je na nekonvexní konvexní. Konvexní se dále dělí:

Různoběžník - žádné protilehlé strany nejsou rovnoběžné, nijak zajímavý.

Deltoid - dvě dvojice vzájemně přilehlých stran mají stejnou velikost. $S = \frac{1}{2}ef$. Tvar létajícího draka. Je osově souměrný podle právě jedné úhlopříčky, která se nazývá *hlavní* (ta druhá je nečekaně *vedlejší*). Úhlopříčky jsou na sebe kolmé a vedlejší je půlena hlavní. Je to různoběžník. Je vždy tečnový. Když je úhel vrcholů u vedlejší úhlopříčky pravý, tak je tětivový.

Dvojtředový čtyřúhelník - lze mu opsat i vepsat kružnici. Je zároveň tětivový i tečnový. Z Brahmaguptova vzorce: $S = \sqrt{abcd}$. Může to být čtverec, lichoběžník nebo deltoid.

Tečnový - lze mu opsat tečnu. $S = \rho s$, kde ρ je poloměr vepsané kružnice. Je jím každý čtverec, kosočtverec a deltoid.

Tětivový - lze mu opsat kružnici. Ptolemaiova věta: $ef = ac + bd$. Brahmaguptův vzorec: $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Např.: čtverec, obdélník a rovnoramenný lichoběžník.

Lichoběžník Má právě jednu dvojici rovnoběžných stran - nazývají se *základny*, jejich spojnice jsou potom *ramena*. Úhlopříčky se (u obecného) vzájemně nepůlí a neprotínají se na střední příčce. Velikost střední příčky m , která je spojnici středů ramen je aritmetický průměr základů $m = \frac{a+c}{2}$. Obsah je $S = m \cdot v = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$. Výška se dá vypočítat prapodivným vzorcem, který je asi mimo SŠ.

$$v = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)} \quad (306)$$

Kromě *obecného* ještě existuje *pravoúhlý lichoběžník* (tj. jedno rameno svírá pravý úhel se základnami) nebo *rovnoramenný* (tj. ramena mají stejné délky), který má kružnici opsanou a je tak tětivovým trojúhelníkem.

Rovnoběžník (kosodélník) - má obě dvojice protilehlých stran rovnoběžné. Z toho plyne, že protilehlé strany mají stejnou délku. Z toho plyne, že protilehlé úhly mají stejnou velikost.

$$S = ah_a = bh_b = ab \sin \alpha \quad (307)$$

Kde h_a je výška ke straně a a α je úhel přilehlých stran. Úhlopříčky se vzájemně půlí, jejich délka se spočítá podle kosinové věty:

$$e = |AC| = \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha} = \sqrt{(a + h_a \cot \alpha)^2 + h_a^2} \quad (308)$$

Kosočtverec - typ kosodélníku, který má všechny strany stejně dlouhé. Úhlopříčky jsou na sebe kolmé. má 2 osy souměrnosti a jeden střed souměrnosti = průsečík úhlopříček. Lze mu vepsat kružnici, která má střed v průsečíku úhlopříček.

$$S = \frac{u_1 u_2}{2} = av_a = a^2 \cdot \sin \alpha \quad o = 4a = 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (309)$$

obdélník - typ rovnoběžníku, který má všechny vnitřní úhly 90° . Úhlopříčky obdélníka jsou stejně dlouhé a dělí se na půl. Má kružnici opsanou s poloměrem rovným polovině délky úhlopříčky. Osově souměrný podle 2 os - rovnoběžky se stranami procházející průsečíkem úhlopříček. Středově souměrný podle průsečíku úhlopříček.

$$S = ab \quad (310)$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (311)$$

$$r = \frac{u}{2} \quad r \text{ je poloměr kružnice opsané} \quad (312)$$

$$o = 2a + 2b \quad (313)$$

Čtverec - typ rovnoběžníku, který má vnitřní úhly 90° a zároveň má všechny strany stejně dlouhé. Dědí vlastnosti obdélníku a kosočtverce: Úhlopříčky jsou shodné, na sebe kolmé a v průsečíku se půlí. Průsečík je středem souměrnosti, kružnice opsané i vepsané. Ze všech obdélníků s daným obvodem má největší obsah a ze všech obdélníků s daným obsahem má nejmenší obvod.

$$o = 4a \quad (314)$$

$$S = a^2 \quad (315)$$

$$u = a\sqrt{2} \quad (316)$$

$$r_1 = \frac{u}{2} \quad \text{poloměr kružnice opsané} \quad (317)$$

$$r_2 = \frac{a}{2} \quad \text{poloměr kružnice vepsané} \quad (318)$$

$$(319)$$

15.6 Kruh a kružnice

Kružnice (viz [21.2.1](#)) je množina bodů stejně vzdálená od středu. Plocha kružnicí vymezená je kruh.

$$o = 2\pi r \quad S = \pi r^2 \quad (320)$$

Pokud chceme místo poloměru r použít průměr d ?

$$o = \pi d \quad S = \pi \frac{d^2}{4} \quad (321)$$

15.6.1 Vzájemná poloha 2 kružnic

Pokud mají střed ve stejném bodě nazývají se *soustředné* a plocha vymezená těmito kružnicemi je *mezikružší*. Nebo se mohou protínat (tj. 2 společné body). Mohou mít dotyk (tj. 1 společný bod) a to buď vnější nebo vnitřní. Nemají-li společný bod kružnice buď leží vně, nebo menší leží uvnitř větší.

15.6.2 Vzájemná poloha s přímkou

Žádný společný bod značí vnější přímkou, neboli *nesečnu*. 1 bod dotyku je *tečna* - ta je vždy kolmá na poloměr ze středu do bodu dotyku. 2 body, průsečíky -> *sečna*. Úsečka, která spojuje průsečíky sečny a kružnice se nazývá *tětiva* (podle toho tětivové mnohoúhelníky/čtyřúhelníky).

15.6.3 Vyjádření pomocí rovnic

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{Středová rovnice} \quad (322)$$

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad \text{Vrcholová rovnice} \quad (323)$$

$$x = x_0 + r \cos \phi \quad \text{parametrické vyjádření} \quad (324)$$

$$y = y_0 + r \sin \phi \quad (325)$$

15.6.4 Úhly v kružnici

Středový úhel - jeho vrcholem je střed kružnice S a ramena procházejí body A, B na kružnici. Platí, že středový úhel je dvojnásobkem obvodového. (zároveň je taky dvojnásobkem úsekového)

Obvodový úhel - ramena prochází body A, B a vrchol leží na jejich oblouku této kružnice.

Úsekový úhel - úhel svíraný tětivou a s tečnou v bodě A .

15.6.5 Kruhová výseč

Část kruhu, která je "vyseknut" jako dort/pizza. Je určena kružnicí a úhlem. Obvod je roven součtu délky kruhového oblouku a dvojnásobku poloměru.

Středový úhel je α nebo θ .

$$S = \frac{\theta r^2}{2} \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \quad \alpha \text{ ve stupních} \quad s = (\theta + 2)r \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (326)$$

Kružnicový oblouk Délka části kružnice vymezené úhlem α nebo θ .

$$l = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \quad \alpha \text{ ve stupních} \quad l = r \cdot \theta \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (327)$$

15.6.6 Kruhová výseč

$$S = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (328)$$

Obvod se spočítá jako součet kružnicového oblouku a tětivy.

15.6.7 Mezikruží

Obsah je roven rozdílu obsahů jednotlivých kružnic. Obvod je roven součtu obvodů jednotlivých kruhů.

15.6.8 Thaletova kružnice/věta

”Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.” Vyplývá to ze znalostí o středovém a obvodovém úhlu.

15.7 Obvody a obsahy ostatních rovinných útvarů

Musíme si je vhodně rozložit na útvar (nebo jejich části), u kterých to zvládneme vypočítat. A pak správně sečíst.

15.8 Konstrukce

Vyplývá z vlastností obrazců.

15.9 Meta

U trojúhelníků platí cyklická záměna! Někde jsem ji dokonce napsal, někde ale ne...

Chybí konstrukce čtyřúhelníků, tak se to nějak odvodí podle vlastností.

Konstrukce - je to geometrie.. asi na to kašlu.

15.9.1 Zdroje

- moje hlava se špatnou pamětí, tak opatrně s důvěrou
- tabulky
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Obrazec>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Bod>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Polop%C5%99%C3%ADmka>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Ahel>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Mnoho%C3%BAheln%C3%ADk>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Troj%C3%BAheln%C3%ADk>
- další wiki, tady v tom je docela obsáhlá

15.9.2 Pojmy/Zadání

Základní planimetrické pojmy a vztahy mezi nimi: bod, přímka, rovina, polopřímka, polorovina, úsečka, úhel. Dvojice úhlů vrcholových, vedlejších, střídavých, souhlasných. Trojúhelník, shodnost trojúhelníků, konstrukce trojúhelníků. Čtyřúhelník, lichoběžník, rovnoběžník, strany, úhly a úhlopříčky ve čtyřúhelníku, tečnový a tětíkový čtyřúhelník, konstrukce čtyřúhelníků. Mnohoúhelník, konvexní a nekonvexní n-úhelník, pravidelný n-úhelník, strany, úhly, úhlopříčky, obsahy a obvody. Kružnice, úhly v kružnici, obvodový, středový a úsekový úhel, Thaletova kružnice, vzájemná poloha přímky a kružnice, vzájemná poloha kružnic, konstrukce kružnice, konstrukce tečny ke kružnici, délka kružnice, délka kružnicového oblouku, kruh, kruhová výseč, úseč, obvod a obsah kruhu, kruhové výseče a úseče. Obvody a obsahy dalších roviných útvarů. Pojem konstrukční úlohy, základní geometrické konstrukce,

konstrukce na základě výpočtu, konstrukce na základě geometrických míst bodů.

16 Zobrazení v rovině

Zobrazení přiřazuje každému bodu A útvaru U právě jeden bod A' útvaru U' . Bod A je označován jako *vzor* a bod A' jako *obraz*.

Samodružnost - bod je samodružný (nebo také *invariantní*) zobrazí-li se sám do sebe (tj. $A = A'$). Samodružný (/invariantní) útvar je takový útvar, který se zobrazí sám do sebe, tj. platí $U = U'$.

16.1 Afinní zobrazení

Asi mimo SŠ(, ikdyž v tabulkách je pravoúhlá afinita *emotikona-pokrceni-ramen*). Zachovává rovnoběžnost přímek. Každé 3 body na přímce se zobrazí buď do jednoho bodu nebo do 3 bodů se stejným dělicím poměrem. Příklad zkosení.

16.2 Podobná zobrazení

Útvary jsou si podobné je-li jeden získán z druhého pomocí zvětšení (/zmenšení), posunutí, rotace a zrcadlení. Podobnost zachovává velikost úhlů a poměr délek. Zachovává tvar. Je speciálním případem afinního zobrazení. Existuje takové kladné číslo k (*poměr podobnosti*), že platí $|XZ| = |X'Y'|$.

Stejnolehlost (homotetie) - má jediný samodružný bod (*střed stejnoolehlosti*). Všechny přímky spojující vzorový bod a jeho obraz procházejí středem souměrnosti S . Koeficient κ . Všechna podobná zobrazení se dají složit ze stejnoolehlosti a shodnosti.

$$\frac{|SX'|}{|SX|} = |\kappa| \qquad |X'Y'| = |\kappa| \cdot |XZ| \qquad (329)$$

16.3 Shodné zobrazení

Speciálním případem podobnosti. Zachovává velikost i tvar. Patří sem *posunutí* (*translace*), *otočení* (*rotace*) a *zrcadlení*. Patří sem také zsová (tj. zrcadlení) a středová (tj. rotace o 180°) souměrnost.

Nepřímá shodnost - obraz lze získat posunutím, rotací a zrcadlením vzoru.

Přímá shodnost - obraz lze získat pouze posunutím a rotací vzoru.

Identita - typ přímé shodnosti, kdy je obrazem každého bodu X sám bod X .

16.4 Využití v konstrukčních úlohách

Podobnost (15.4.5) a shodnost (15.4.1) trojúhelníků, Pythagorova a Euklidovy věty (15.4.5) jsou v kapitole o trojúhelnících 15.4. O kružnicích: Každé 2 existující kružnice v rovině jsou si nejen podobné, ale jsou i stejnohlé a pokud nejsou soustředné nebo stejně velké nebo stejně velké, tak právě 2 způsoby.

16.5 Meta

16.5.1 Zdroje

- Tabulky ftw
- https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz4
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A9_zobrazen%C3%AD
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Stejnolehlost>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/St%C5%99edov%C3%A1_soum%C4%9Brnost
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Podobnost_\(geometrie\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Podobnost_(geometrie))
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Shodn%C3%A9_zobrazen%C3%AD

16.5.2 Pojmy/Zadání

Shodná zobrazení v rovině, vzor, obraz, samodružný útvar, samodružný bod, identita, osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí. Řešení konstrukčních úloh s využitím shodných zobrazení. Podobnost a stejnoolehlost, podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta, Euklidovy věty, stejnoolehlost kružnic, řešení konstrukčních úloh pomocí stejnoolehlosti.

17 Tělesa

Tělesa jsou typem geometrického útvaru v (minimálně 3-dimenzionálního) prostoru. Mají nějaký objem a povrch. Je to omezená část prostoru ohraničená plochami. *Konvexní* v geometrii znamená, že obsahuje-li útvar (2D nebo 3D či N-rozměrný) 2 body, musí obsahovat i všechny body ležící na přímce je spojující. *Nekonvexní* jednoduše znamená opak: existují aspoň dva body, které když spojíme přímkou, tak část přímky leží mimo těleso.

Stěnová úhlopříčka je normálně úhlopříčka daného mnohoúhelníku, tj. spojuje sousední vrcholy.¹

Tělesová úhlopříčka spojuje nesousední vrcholy mnohostěnu a zároveň prochází vnitřkem tělesa. Některé tělesa je nemají např. jehlany a tetraedr.

17.1 Cavalieriův princip

Říká, že tělesa mají stejný objem, jestliže existuje roviny, pro všechny roviny ji rovnoběžné platí, že jejich průnik s tělesy má stejnou plochu.

17.2 Mnohostěny

Jeho povrch se skládá z konečně mnoha stěn, které jsou mnohoúhelníky. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$v - h + s = 2 \quad (330)$$

Kde v je počet vrcholů, h je počet hran a s je počet stěn.

Mezi mnohostěny patří mnoho různých typů, některé z nich jsou pravidelné a mají speciální jména - jehlany, hranoly (pro ně speciální případ kvádr (a pro

¹Pomocí úhlopříček lze určit konvexitu mnohoúhelníku. Náleží-li všechny úhlopříčky mnohoúhelníku, je konvexní.

název		stěn	vrcholů	hran	typ stěny
čtyřstěn (trojboký jehlan)	tetraedr	4	4	6	trojúhelník
šestistěn (krychle)	hexaedr	6	8	12	čtverec
osmistěn	oktaedr	8	6	12	trojúhelník
dvanáctistěn	dodekaedr	12	20	30	pětiúhelník
dvacetistěn	ikosaedr	20	12	30	trojúhelník

něj speciální případ krychle)). Obvykle se pojmenovávají podle počtu stěn.

17.2.1 Platónská tělesa

Byly objeveny už v antice. Je to skupina pravidelných konvexních mnohostěnů. Z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky. V trojrozměrném prostoru existuje 5 takových těles.

Dualita Když se podíváme na tabulku, všimneme si, že barevně vyznačené mají stejné čísla, jako k nim duální těleso, akorát prohozené vrcholy a stěny. A to je asi princip duality [fakt nevíím].

17.3 Hranoly

$$S = 2S_p + S_{pl} \qquad V = S_p v \qquad (331)$$

Je to typ mnohostěnů, který má 2 podstavy tvaru stejných mnohoúhelníků (jejichž strany jsou rovnoběžné) o obsahu S_p leží v rovnoběžných rovinách vzdálených v . S_{pl} je obsah pláště. Jestli je hranol *kolmý* nebo *kosý*, nemá vliv na objem, pokud je výška stejná. *Pravidelný n -boký* označuje hranol, jehož podstavou jsou pravidelné mnohostěny.

17.3.1 Kvádr

Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravoúhelníky.

$$S = 2(ab + ac + bc) \qquad V = abc \qquad u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (332)$$

Kde a, b, c jsou hranami kváдру. u_t je tělesová úhlopříčka.

17.3.2 Krychle

Speciální případ kváдру, jehož stěny jsou shodné čtverce. a je délka hrany krychle.

$$S = 6a^2 \qquad V = a^3 \qquad u_t = a\sqrt{3} \qquad (333)$$

17.4 Jehlany

$$S = S_p + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3}S_p v \qquad (334)$$

Vznikne spojením vrcholů podstavy a *hlavního vrcholu*. Výška v je vzdálenost hlavního vrcholu od podstavy.

17.4.1 Komolé jehlany

Je to jehlan, kterému byla "useknutá" špička rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3} \left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1}S_{p2}} + S_{p2} \right) \qquad (335)$$

17.5 Rotační tělesa

17.5.1 Rotační válec

Vznikne například rotací obdélníku kolem své strany.

$$S = 2S_p + S_{pl} \qquad V = S_p v \qquad (336)$$

$$S = 2\pi r(r + v) \qquad V = \pi r^2 v \qquad (337)$$

17.5.2 Rotační kužel

$$S = S_p + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3}S_p v \qquad (338)$$

$$S = \pi r(r + s) \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 v \qquad (339)$$

Kde délka strany $s = \sqrt{r^2 + v^2}$.

17.5.3 Komolý rotační kužel

$$S = \pi (r_1^2 + r_2^2) + \pi s (r_1 + r_2) \quad V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \quad (340)$$

Kde strana $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$. Podstavy jsou rovnoběžné.

17.5.4 Koule

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad S = 4 \pi r^2 \quad (341)$$

Povrch koule S se také nazývá obsah kulové plochy.

17.5.5 Kulová úseč a kulový vrchlík

Kulová úseč je průnik koule a poloprostoru hraničícího s rovinou, která je od S_0 středu koule vzdálená méně než poloměr r . To jest část koule "odsekne". *Kulový vrchlík* je průnik kulové plochy a poloprostoru. Takže podstava (To jest plocha získaná "odseknutím") se tam nepočítá.

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3r_1^2 + v^2) \quad , \text{ kde } r_1 \text{ je poloměr podstavy} \quad (342)$$

$$S = 2 \pi r v \quad (343)$$

17.5.6 Kulová vrstva a kulový pás

Kulová vrstva průnik koule a vrstvy, jejíž poloviny mají s koulí nějaký průnik (jejich vzdálenost od středu je menší než poloměr r) *Kulový pás* průnik kulové plochy a vrstvy, jako výše. Takže opět podstavy se nezapočítávají.

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) \quad , \text{ kde } r_1 \text{ a } r_2 \text{ jsou poloměry podstav} \quad (344)$$

$$S = 2 \pi r v \quad (345)$$

17.6 Meta

dualita je jen v ANJ, tak nevím terminologii.
~~Konvexnost nemá nikde dobrou definici~~

17.6.1 Zdroje

Tabulky a wikipedie

17.6.2 Zadání/pojmy

Pojem tělesa, konvexní a nekonvexní tělesa, mnohostěny, hranol, kvádr, krychle, vrcholy, hrany, stěny, stěnové úhlopříčky, tělesové úhlopříčky. Jehlan, komolý jehlan. Pravidelné mnohostěny (tzv. platónská tělesa) princip duality, Eulerova věta o mnohostěnech. Rotační tělesa, válec, kužel, komolý kužel, koule, kulová plocha. Polokoule, kulová úseč, kulový vrchlík (plášť kulové úseče), kulová výseč. Povrchy a objemy těles. Cavalieriho princip.

18 Polohové a metrické úlohy ve stereometrii

18.1 Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru

18.1.1 Bod a

Bod je v n -rozměrném prostoru určen n souřadnicemi v jednotlivých osách.

Bod - Pokud mají všechny hodnoty souřadnic stejná jedná se o jeden bod, v opačném případě se jedná o dva různé body A , B se vzdáleností určenou vzorcem (podobný těžnici kváдру):

$$|AB| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \quad (346)$$

Přímka - Bod buď leží na přímce nebo na ní neleží. Dosadíme souřadnice bodu do rovnice přímky, a pokud dojdeme ke sporu, tak bod není součástí přímky. Vzdálenost bodu a přímky je úsečka, která je částí *kolmice* na přímku procházející bodem v úseku od *paty kolmice* po bod. Vzdálenost bodu M a přímky $p : X = A + t\vec{u}$

$$|Mp| = \frac{|(M - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (347)$$

Rovina - Dosadíme, li souřadnice bodu do rovnice roviny a dostaneme se do sporu, pak bod neleží v rovině. Vzdálenost bodu a přímky se vypočítá jako délka úsečky kolmé na rovinu a končící v bodě. Vzdálenost bodu $M = [m_x, m_y, m_z]$ a roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$

$$|M\rho| = \frac{|am_x + bm_y + cm_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (348)$$

18.1.2 Přímka a

Přímka může být vyjádřena pomocí parametrických rovnic:

$$x = x_0 + tu_x \quad (349)$$

$$y = y_0 + tu_y \quad (350)$$

$$z = z_0 + tu_z \quad (351)$$

Kde bod $A = [x_0, y_0, z_0]$ je nějaký bod, kterým přímka prochází. Konstanty u_x, u_y, u_z určují *směrnici* (tj. směrový vektor $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$) přímky. Parametr přímky je označen t .

Přímka je určena bodem A a směrovým vektorem \vec{u} , dá se také zapsat jako:

$$X = A + t\vec{u} \quad (352)$$

Přímka Jejich vzájemná poloha lze zjistit vytvořením soustavy rovnic obou předpisů. Případně porovnáním směrnic k odlišení mimoběžek a rovnoběžek.

- Mohou být *rovnoběžné*, to znamená, že každý bod A je součástí přímky p má stejnou vzdálenost od přímky q , tato vzdálenost je vzdáleností přímk. Vypočítáme jí jako vzdálenost bodu, který je součástí první přímky od přímky (druhé).
Speciálním případem rovnoběžnosti je, když jsou přímky identické (tj. jejich vzdálenost je nulová). Jedna vznikla posunutím druhé, z toho vyplývá, že mají stejnou směrnici. Odchylka je nulová.
- *Různoběžné* to znamená, že mají právě jeden společný bod. Jeho souřadnice zjistíme vyřešíme soustavy rovnic pro obě přímky. *Odchylka* je úhel, který mezi sebou přímky svírají. Pokud je úhel pravý, tak se jedná *kolmost* přímk.

- *Mimoběžnost* je možná jen ve 3D (a více rozměrech), tj. přímky nejdou umístit do jedné roviny. Přímky nemají žádný společný bod, ale nejsou rovnoběžné. Přímka protínající obě mimoběžky se nazývá *příčka mimoběžek*.

Příčka kolmá na obě mimoběžky se nazývá *osa mimoběžek*. Vzdálenost mimoběžek je úsečka, která je součástí osy mimoběžek a je ohraničena průniky s přímkami. Odchylka mimoběžek je odchylkou dvou různoběžek, které jsou rovnoběžkami původních přímek.

Odchylka 2 přímek je ω . \vec{u} a \vec{v} jsou směrové vektory přímek p a q . Poté platí:

$$\cos \omega = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (353)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti: $\vec{u} = k\vec{v}$ (kde $k \neq 0$)

A podmínka kolmosti: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Asi mimo SŠ, ale přeci jen jsem to našel:

Vzdálenost $|pq|$ dvou mimoběžných přímek.

$$p : X_p = A_p + t_p \vec{u}_p \quad (354)$$

$$q : X_q = A_q + t_q \vec{u}_q \quad (355)$$

$$|pq| = \left| \frac{\vec{u}_p \times \vec{u}_q}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} \cdot (A_q - A_p) \right| \quad (356)$$

Je vidět, že tato rovnice nefunguje, když $|\vec{u}_p \times \vec{u}_q| = 0$. To je případ, kdy jsou přímky rovnoběžné.

Rovina

- *Rovnoběžné* - nemají společný žádný bod. Jejich vzdálenost je úsečka kolmá na přímkou i rovinu, která začíná a končí v průsečících s nimi. Vypočítáme jako vzdálenost bodu od přímky, nebo jako vzdálenost bodu od roviny, přičemž bod je součástí druhého útvaru.
- *Přímka leží v rovině*. Mají společné všechny body přímky.
- *Různoběžné* - mají společný právě 1 bod. Mají (nenulovou) odchylku. Ta je 90° pokud jsou kolmé, jinak je rovna odchylce přímky a jejího pravouhlého průmětu do roviny. (Tj. vytvořím další rovinu, která je kolmá na původní rovinu a ve které leží přímka. Pak spočítám odchylku přímky a průniku (tj. průsečnice) rovin.)

Odchylka ω přímky p se směrovým vektorem \vec{u} a roviny ρ s normálovým vektorem \vec{n} :

$$\sin \omega = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}|} \quad (357)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

A podmínka kolmosti: $\vec{u} = k\vec{n}$ (kde $k \neq 0$)

18.1.3 Rovina

Parametrické vyjádření roviny:

$$x = x_0 + tu_x + sv_x \quad (358)$$

$$y = y_0 + tu_y + sv_y \quad (359)$$

$$z = z_0 + tu_z + sv_z \quad (360)$$

$$(361)$$

Kde $[x_0, y_0, z_0]$ je nějaký bod A ležící v rovině a vektory $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ a $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ jsou lineárně nezávislé. Parametry t a s jsou reálná čísla.

Rovinu lze taktéž vyjádřit pomocí obecné rovnice:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (362)$$

$$\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0} \quad (363)$$

Kde *normálový* vektor je nenulový a kolmý na rovinu.

Rovina

- Rovnoběžné - tj. vzdálenost všech bodů jedné roviny k druhé rovině je stejná. Vypočítáme jako vzdálenost bodu (náležícímu první rovině) od roviny (druhé).
- Různoběžné - mají vždy průnik v podobě přímky nazývané *průsečnice*. Její směrnice (směrový vektor) je určen vektorovým součinem *normálových vektorů* rovin. Parametrický předpis této přímky je možné také zjistit řešením soustavy rovnic obou rovin. Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Odchylku rovin ρ a σ píšeme: $|\angle \rho \sigma|$.

Odchylka ω roviny ρ_1 s normálovým vektorem \vec{n}_1 a roviny ρ_2 s normálovým vektorem \vec{n}_2 :

$$\cos \omega = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (364)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti: $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$ (kde $k \neq 0$)

A podmínka kolmosti: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

18.2 Průnik přímky tělesem

18.3 Řez tělesa rovinou

Strategie prodlužování přímek, o kterých víme, že jsou součástí roviny do rovin některé stěny/strany tělesa. Pak spojit tento bod, který je jejich průnikem, s nějakým dalším ve stejné rovině.

18.4 Meta

18.4.1 Zdroje

- moje hlava, tabulky, wiki...
- http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/ludmila_kadlecova/bezcabri/dveprimky.php
- https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka_geometrie/prostor.php?kapitola=parametrickeVyjadreniPrimky
- http://ucebnice.krynicky.cz/Matematika/05_Stereometrie/2_Metricke_vlastnosti/5201_Odchylka_primek_I.pdf
- <https://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=33717>
- <http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=131>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Skew_lines

18.4.2 Pojmy/Zadání

Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru. Kritéria rovnoběžnosti přímek a rovin. Průsečík přímky a roviny, průsečnice dvou rovin. Řez tělesa rovinou, průnik přímky s tělesem. Odchylka přímek, kolmost přímek, kolmost rovin, odchylka přímky a roviny, odchylka dvou rovin. Vzdálenost dvou bodů, bodu od přímky, bodu od roviny, vzdálenost dvou přímek, vzdálenost dvou rovin.

19 Vektorová algebra

19.1 Vzdálenost bodů a střed úsečky

Vzdálenost bodů je triviální, viz 18.1.1 Střed úsečky je aritmetickým průměrem souřadnic bodů v jednotlivých osách zvlášť viz 22.3.

19.2 Soustavy souřadnic

Osy souřadnic jsou na sebe navzájem kolmé, jednotky délky na osách jsou stejné. Body se značí často stylem $A[a_1, a_2, a_3]$, kde hodnoty odpovídají vzdálenosti v dané souřadnicové ose.

19.3 Orientované úsečky

Orientovaná úsečka je \overrightarrow{AB} uspořádaná dvojice bodů, kde A je počáteční bod a B je bod koncový. její velikost značíme $|AB|$. *Souhlasně rovnoběžné nenulové orientované úsečky* $AB \uparrow\uparrow CD$. Jsou rovnoběžné a souhlasně orientované - tj. posunutím jsme schopni je dát na polopřímku se stejným počátkem a směrem.

Nulová orientovaná úsečka má nulovou velikost (tj. délku), tzn. body A a B jsou jedním bodem. V opačném případě se jedná o *nenulovou orientovanou úsečku*.

19.4 Definice vektoru přes orientované úsečky

Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček, značí se $\vec{0}$. Naproti tomu *Nenulový vektor* \vec{u} je množina všech nenulových orientovaných

úseček, které mají stejnou velikost a jsou souhlasně rovnoběžné. Možnosti zápisu:

$$\overrightarrow{AB} \in \vec{u} \qquad \overrightarrow{AB} \text{ určuje vektor } \vec{u} \qquad (365)$$

$$\vec{u} = B - A \qquad \overrightarrow{AB} \text{ je umístěním vektoru } \vec{u} \text{ (do bodu } A) \qquad (366)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} \text{ je reprezentantem vektoru } \vec{u} \qquad (367)$$

Opačný vektor k vektoru $\vec{u} = B - A$ je $-\vec{u} = A - B$

19.5 Souřadnice vektoru

Souřadnice vektoru $\vec{u} = B - A$ v jednotlivých osách:

$$u_1 = b_1 - a_1 \qquad u_2 = b_2 - a_2 \qquad u_3 = b_3 - a_3 \qquad (368)$$

Zápis:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \text{V rovině} \qquad (369)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \text{V prostoru} \qquad (370)$$

19.6 Sčítání vektorů a násobení reálnými čísly

Vede-li \vec{u} z bodu A do bodu B a vektor \vec{v} z bodu B do bodu C . Pak vektor, který je jejich součet odpovídá orientované úsečce AC . Pokud je číslo $k \in \mathbb{R}$ menší než nula, tak se orientace vektoru otočí.

$$\text{V rovině} \qquad \text{V prostoru} \qquad (371)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \qquad (372)$$

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2) \qquad k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \qquad (373)$$

19.7 Lineární kombinace a závislost

Lineární kombinace vektorů je rovna $k_1\vec{u}_1 + \dots + k_n\vec{u}_n$ pro $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

Lineárně závislé jsou vektory, kde je nějaký vektor lineární kombinací ostatních.

V rovině:

- 2 vektory, které lze umístit na jednu přímku
- Každá skupina o 3 a více vektorech

V prostoru:

- 2 vektory, které lze umístit do jedné přímky
- 3 vektory, které lze umístit do jedné roviny
- Každá skupina o 4 a více vektorech

Lineárně nezávislé jsou takové vektory, kde žádný vektor není lineární kombinací ostatních

19.8 Velikost

Velikost se značí $|\vec{u}|$ a její hodnoty se získají následovně:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{V rovině} \quad (374)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad \text{V prostoru} \quad (375)$$

19.8.1 Jednotkový vektor

Jednotkový vektor je takový vektor, jehož norma (tj. délka) je rovna jedné.

Norma je funkce, která přiřazuje každému vektoru kladné reálné číslo (tzv. délka nebo velikost). Nulový vektor má jako jediný délku 0.

19.9 Skalární součin

Za podmínek $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ (v jiných případech platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$) platí následující rovnice:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi \quad (376)$$

A to je v prostoru a v rovině následující:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \text{V rovině} \quad (377)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{V prostoru} \quad (378)$$

19.10 Úhel vektorů

Také nazýván jako *odchylka*. Označíme si ho φ a poté platí:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (379)$$

Rovnoběžnost $\vec{u} \parallel \vec{v}$, musí platit, že jsou oba vektory nenulové a úhel vektorů je 0 nebo π

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v} \wedge (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (380)$$

Kolmost $\vec{u} \perp \vec{v}$ nastane, když jsou oba vektory nenulové a úhel mezi nimi je $\frac{1}{2}\pi$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \wedge (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}) \quad (381)$$

19.11 Vektorový součin v prostoru

Definice \vec{w} jako vektorového součinu \vec{u} a \vec{v} :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (382)$$

Lineárně závislé Pokud jsou vektory \vec{u} a \vec{v} lineárně závislé platí $\vec{w} = \vec{0}$

Lineárně nezávislé - vektor \vec{w} je kolmý na původní vektory. Jeho velikost $|\vec{w}|$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného původními vektory. φ je úhel mezi původními vektory. Uspořádaná trojice $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ je pravotočivá

$$\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v} \quad (383)$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi \quad (384)$$

V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (385)$$

V levotočivé kartézské soustavě souřadnic mají všechny souřadnice \vec{w} opačná znaménka. Zapsáno:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) \quad (386)$$

Další vlastnosti vyplývající z předchozího a platící pro libovolné vektory \vec{u} , \vec{v} a \vec{w} a číslo $k \in \mathbb{R}$

- $\vec{v} \times = -(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
- ... viz tabulky!

19.12 Pravotočivá a levotočivá báze

Máme-li dva vektory na sebe kolmé, tak existují 2 možnosti, jak umístit třetí vektor, tak aby byl kolmý na oba. Jednomu způsobu se říká pravotočivá a druhému levotočivá kartézská soustava souřadnic. Představme si, že položíme pravou ruku na dva vektory tak, aby prsty ruky značily směr otáčení od prvního vektoru k druhému. Potom palec pravé ruky směřuje ve směru třetího vektoru. V opačném případě se jedná o levotočivou bázi, kde když stejným způsobem přiložíme levou ruku bude palec směřovat ve směru třetího vektoru.

Báze je (v prostoru) uspořádaná trojice vektorů, které neleží v jedné rovině. Značí se (a, b, c) a záleží na jejich pořadí.

19.13 Smíšený součin vektorů v prostoru

Smíšený součin vektorů \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (v tomto pořadí) je reálné číslo: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Lineárně závislé vektory \vec{a} , \vec{b} , $\vec{c} \iff (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ dají jako výsledek smíšeného součinu vždy nulu.

Lineárně nezávislé vektory je absolutní hodnota smíšeného součinu rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory.

$$\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \quad (387)$$

19.14 Meta

19.14.1 Zdroje

- Tabulky!!
- http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/07_Analyticka_geometrie/2_Vektory/7211_Pravotociva_a_levotociva_baze.pdf
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotkov%C3%BD_vektor
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Norma_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematika))
- <https://matematika.cz/vektory>

19.14.2 Zadání/ pojmy

Soustava souřadnic na přímce, v rovině, v prostoru. Střed dvojice bodů, vzdálenost dvou bodů. Souřadnice vektoru, velikost vektoru, sčítání vektorů, násobení vektorů reálným číslem. Lineární kombinace vektorů, jednotkový vektor, skalární součin, odchylka vektorů. Pravotočivá a levotočivá báze. Vektorový součin, geometrická interpretace.

20 Analytická geometrie lineárních útvarů

viz 18 a 22

20.1 Meta

wtf to už mám všechno v jiné otázce.

20.1.1 Zdroje

20.1.2 Zadání/ pojmy

Parametrické vyjádření přímky, polopřímky, úsečky, obecná rovnice přímky, směrové a normálové vektory, směrnice a úsekový tvar rovnice přímky, směrnice přímky. Vzájemná poloha bodů a přímk v rovině, odchylka dvou přímk, vzdálenost bodů, bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímk. Parametrické vyjádření přímky v prostoru, parametrické vyjádření roviny, obecná rovnice roviny, normálový vektor roviny.

21 Analytická geometrie kuželoseček

Existují 3 typy: *paraboly*, *hyperboly* a *elipsy* (a speciální případ je kružnice). Můžeme je vytvořit průnikem roviny a rotační kuželovou plochou. Typ kuželosečky záleží na úhlu mezi rovinou a kuželovou plochou.

Rovina kolmo na osu symetrie rotační kuželové plochy nám dává kružnici.

Pokud je rovina rovnoběžná na nějakou povrchovou rovnoběžku pláště (?to jest: svírá s osou symetrie úhel velikosti přesně poloviny vrcholového úhlu), tak nám vzniká parabola.

Úhel, který je mezi těmito dvěma nám dává elipsu, která protíná všechny povrchové přímky a s žádnou tak není rovnoběžná.

A úhel menší než polovina vrcholového úhlu, dává hyperbolu. Přičemž platí, že rovina hyperboly je rovnoběžná právě se 2 přímkami.

21.1 Degenerované kuželosečky

Nebo také nazývané jako *nevlastní* či *singulární*. Vznikají když rovina prochází vrcholem kuželové plochy. Takováto kuželosečka může být (podle toho, jaký svírá úhel): bodem (z kružnice), přímkou (z paraboly) nebo 2 přímkami (z hyperboly).

21.2 Elipsa

Všechny body elipsy mají tu vlastnost, že součet vzdáleností od 2 bodů, nazývané *ohniska*, je stejná. Má následující věci:

- *Ohniska*
- *Střed* - v přímce s ohnisky, ve stejné vzdálenosti od každého
- *Hlavní osa* - někdy jako "průměr", nejdelší průměr elipsy -> prochází oběma ohnisky
- *Hlavní vrcholy* - průsečík elipsy s hlavní poloosou
- *Hlavní poloosa* - spojuje střed a hlavní vrcholy
- *Vedlejší osa* - nejkratší průměr, kolmá na hlavní osu
- *Vedlejší poloosa, vrcholy* - ...

- *Excentricita!!!* - výstřednost, vzdálenost ohniska a středu elipsy značí se e

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (388)$$

V rovnici (388) v kanonickém tvaru značí x_0 a y_0 střed elipsy, a je hlavní poloosa a b je vedlejší poloosa. Pro excentricitu potom platí $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad (389)$$

Ve vrcholové rovnici (389) je $p = \frac{b^2}{a}$ je tzv. *parametr elipsy*

21.2.1 Kružnice

Speciální případ elipsy. Všechny body kružnice mají stejnou vzdálenost od jednoho bodu a to středu kružnice.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (390)$$

Kde x_0 (nebo m) a y_0 (nebo n) odpovídají souřadnicím středu. Samozřejmě r je poloměr.

21.2.2 Vztah s přímkou

Přímka může být buď mimoběžná, nebo může být tečnou (tj. 1 společný bod přímky a elipsy/kružnice) nebo sečnou (tj. 2 společné body). Počet společných bodů zjistíme vyřešením soustavy rovnic elipsy (/kružnice) a přímky. Rovnice pro tečny s bodem dotyku $T = [t_x; t_y]$

Tečna v bodě(elipsa)

$$\frac{(t_x - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(t_y - n)(y - n)}{b^2} = 1 \quad (391)$$

Tečna v bodě(kružnice)

$$(t_x - m)(x - m) + (t_y - n)(y - n) = r^2 \quad (392)$$

21.3 Parabola

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (x - m)^2 = 2p(y - n) \quad (393)$$

Rovnice pro paraboly s osou rovnoběžnou s osou y . Pro $p > 0$ je parabola otevřená doprava, pro $p < 0$ je otevřená doleva. Rovnice pro paraboly s osou rovnoběžnou s osou x je v podstatě stejná jen se prohodí x a y (a taktéž m/x_0 a n/y_0). Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou x nebo osou y , tak je v tzv. *normální poloze*. Parabola je také grafem kvadratické funkce.

Parabola je množina bodů stejně vzdálených od *ohniska* (neboli *fokus*), značeno F , a od *řídící přímky* (?taktéž nazývané *direktix*?) označované d . Parabola je osově souměrná. Osa, označovaná o , prochází ohniskem a je kolmá na řídící přímku. Parametr p je roven nejkratší vzdálenosti ohniska a řídící přímky. Z toho vyplývá:

$$F = \left[x_0 + \frac{p}{2}; y_0 \right] \quad d : x = x_0 - \frac{p}{2} \quad (394)$$

Vrchol je $V = [m, n]$

21.3.1 Vztah s přímkou

Přímka může být mimoběžná. Může být tečnou (tj. jeden společný bod). Může být sečnou - ta má 2 nebo 1 společný bod. Počet společných bodů zjistíme jednoduše vyřešením soustavy rovnic paraboly a dané přímky. Pokud chceme rozlišit tečnu od tzv. *Asymptotické sečny*, která má taky 1 společný bod, je třeba se zjistit, jestli je přímka rovnoběžná s osou paraboly. Pokud ANO, tak je asymptotickou sečnou, pokud NE, tak je tečnou.

Platí to proto, že parabola je kvadratickou funkcí a přímka je funkcí lineární. Kvadratická stoupá rychleji, takže jestli existuje jeden průnik, kde se přímka dostane nad parabolu, tak musí existovat i druhý průnik, když parabola přímku přeroste. To nenastane jen v případě, kdy je přímka kolmá na řídící přímku, a to znamená, že je rovnoběžná s osou paraboly.

Tečna v bodě Viz tabulky! Záleží na otočení paraboly: Je-li kvadratická y nebo x část a hodnota p . Pozor ale na označení viz Meta [21.7](#).

$$\text{Parabola :} \quad \text{Tečna v bode } t_x, t_y : \quad (395)$$

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \quad (t_y - n)(y - n) = p(t_x - m) + p(x - m) \quad (396)$$

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \quad (t_x - m)(x - m) = -p(t_y - n) - p(y - n) \quad (397)$$

21.4 Hyperbola

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (398)$$

Nemyslíme-li nadsázku, je hyperbola množina bodů, pro které platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů (ohnisek) je vždy stejný. Věci:

- $S[m, n]$ - střed hyperboly os souřadnicích m, n . Na přímce s ohnisky, stejně vzdálený od obou.
- F_1, F_2 - ohniska
- o_1 - hlavní osa, přímka procházející oběma ohnisky
- o_2 - vedlejší osa, kolmá na hlavní
- A, B - vrcholy - průsečíky hyperboly a hlavní osy
- a - délka hlavní poloosy, $|AS| = |SB| = a$
- e - excentricita, vzdálenost ohniska F od středu S , platí $e = \sqrt{a^2 + b^2}$
- b - délka vedlejší poloosy, z rovnice o excentricitě, vytvoříme pravoúhlý trojúhelník, s vrcholy v bodech A, S a D , tak bod D leží na asymptotě. b je tak rovno vzdálenosti vrcholu A a bodu, který je průnikem asymptoty a kružnice se středem v S a poloměrem e .
- p_1, p_2 asymptoty, viz 21.4.1

21.4.1 Asymptoty

Asymptota je přímka, které se graf funkce přibližuje, ale nikdy se k ní doopravdy nepřiblíží(? , nebo limitně já nevím?). Vzdálenost mezi přímkou a grafem funkce se zmenšuje s rostoucími hodnotami. Pro paraboly je bod přiblížení v nekonečnu. Rovnice asymptot (jsou právě 2) vypadá následovně:

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m) \quad (399)$$

21.5 Vztah s přímkou

Můžeme určit z toho na co vede soustava rovnic přímky a hyperboly.

- *Tečna*: kvadratická rovnice s jedním reálným kořenem
- *Sečna*: kvadratická rovnice se 2 reálnými kořeny
- *Nesečna*(mimoběžka): kvadratická rovnice bez reálných kořenů
- *Asymptotická sečna*: lineární rovnice (=>1 řešení)
- *Asymptota*: soustava rovnic vede na nepravdivé tvrzení

Tečna v bodě viz tabulky! Ale pozor na značení! Více v Meta [21.7](#)

$$\frac{(t_x - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(t_y - n)(y - n)}{b^2} = 1 \quad (400)$$

21.6 Obecná rovnice kuželoseček

21.6.1 Kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0 \quad , \text{ kde } m^2 + n^2 - p > 0 \quad (401)$$

$$S[m, n] \quad \sqrt{m^2 + n^2 - p} = r \quad (402)$$

21.6.2 Elipsy

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (403)$$

$$, \text{ kde: } q > p > 0 \quad qr^2 + ps^2 - pqt > 0 \quad (404)$$

21.6.3 Hyperboly

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (405)$$

$$, \text{ kde: } pq < 0 \quad qr^2 + ps^2 - pqt \neq 0 \quad (406)$$

21.6.4 Paraboly

$$y^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad , \text{ kde: } r \neq 0 \quad (407)$$

$$x^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad , \text{ kde: } s \neq 0 \quad (408)$$

21.7 Meta

!!

Někde používají m a n , jinde x_0 a y_0 . Původně jsem to chtěl psát v obou tvarech, ale vykašlal jsem se na to, takže to někde není. To neznamena, že se v tom případě nepoužívají oba zápisy!!

Tak teď jsem zjistil, že v tabulkách používají x_0 a y_0 jako souřadnice označující bod dotyku v rovnici tečny.... Takže jsem je prostě převedl na t_x a t_y , aby v tom nebyl bordel... Bacha na to při využívání tabulek!!!! nechápu, jak je to napadlo použít zrovna tadyto označení, když se všude jinde používá místo m a n

!!

21.7.1 Zdroje

- <https://matematika.cz/kuzelosecky>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BEllose%C4%8Dka>
- http://www.bossof105.cz/soubory/poster_kuzelosecky.pdf
- http://www.bossof105.cz/soubory/AG_03-2.pdf
- <https://matematika.cz/parabola>

21.7.2 Pojmy/zadání

Definice a analytické vyjádření kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky, rovnice tečny.

22 Polohové a metrické úlohy řešené metodou analytické geometrie

22.1 Co je již jinde

Vzájemná poloha bodu, přímky a roviny ve 3D a jejich odchylky či vzdálenosti [18.1](#), ale chybí tam polopřímka, úsečka a zjednodušení pro 2D.

Vzájemná poloha přímky/bodu a kuželosečky, tečna kuželosečky v bodě je v [21](#), ale chybí tečna rovnoběžná/kolmá s/na jinou přímku.

22.2 Polopřímka a úsečka v prostoru

Polopřímka \overrightarrow{AB} je :

$$X = A + t(B - A) \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (409)$$

Úsečka $|AB|$ je:

$$X = A + t(B - A) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (410)$$

Stejný zápis se používá i v rovině, akorát body nejsou určeny třemi souřadnicemi, ale dvěmi.

22.3 Střed a délka úsečky

Délka úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů, takže je již popsáno v [18.1.1](#), přesněji rovnice [346](#). Ta ale může být pro 2D zjednodušena:

$$|AB| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2} \quad (411)$$

Střed úsečky $S_{AB} = [S_x, S_y]$ (případně $S_{AB} = [S_x, S_y, S_z]$) zapíšeme jako aritmetický průměr souřadnic bodů:

$$S_{AB} = \frac{A + B}{2} \quad (412)$$

$$S_x = \frac{A_x + B_x}{2} \quad (413)$$

$$S_y = \frac{A_y + B_y}{2} \quad (414)$$

$$S_z = \frac{A_z + B_z}{2} \quad (415)$$

Takto to funguje obecně v n -rozměrném prostoru. Pokud pracujeme pouze na v rovině (nebo jen na přímce), tak vyšší rozměry zůstávají nezměněny, protože sečteme dvě stejná čísla a vydělíme je dvěma.

22.4 Přímka v rovině

- *Směrový vektor* je nenulový vektor, který lze umístit na přímku. $\vec{o} \neq \vec{u} = (u_x, u_y)$
- *normálový vektor* je kolmý na směrový vektor. $\vec{n} \perp \vec{u}$. Zapisujeme $\vec{n} = (n_x, n_y)$
- *Směrnice* je tangens úhlu, který svírá přímka s osou x . $k = \tan \phi$ (pouze když $\phi \neq \frac{1}{2}\pi$)

Směrový ani normálový vektor nejsou určeny jednoznačně, můžeme zvolit libovolný z rovnoběžných vektorů.

22.4.1 Vyjádření a rovnice

Parametrické vyjádření je stejné jako 18.1.2, polopřímka a úsečka je pomocí nich jako v 22.2.

Obecná rovnice

$$ax + by + c = 0 \quad (416)$$

$$\vec{n} = (a, b) \neq \vec{o} \quad (417)$$

Směrnice dokáže vyjádřit jen přímky, které nejsou rovnoběžné s osou y

$$y = kx + q \quad (418)$$

$$k = \tan \phi \text{ je směrnice} \quad (419)$$

Přímka zadaná bodem $A[A_x, A_y]$ a směrnici k :

$$y - a_y = k(x - a_x) \quad (420)$$

Normálový tvar nic mi neříká, asi jsme ho nebrali.

$$x \cos \psi + y \sin \psi - n = 0 \quad (421)$$

Kde n je délka normálového vektoru přímky, který končí v počátku. A úhel ψ je mezi tímto normálovým vektorem a osou x .

Úsekový tvar který mi nic neříká. Navíc funguje, když přímka neprochází počátkem a není rovnoběžná ani s jednou osou.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad (422)$$

Průsečík s osou x je $[p, 0]$ a s osou y $[0, q]$

22.4.2 Vzdálenost bodu

Máme bod $M[m_x, m_y]$ a přímku $p : ax + by + c = 0$

$$|Mp| = \frac{|am_x + bm_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (423)$$

22.4.3 Odchylka dvou přímek

Směrové vektory \vec{u} a \vec{v} připadají přímkám p, q , které svírají úhle ϕ

$$\cos \phi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x v_x + u_y v_y|}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2} \cdot \sqrt{u_y^2 + v_y^2}} \quad (424)$$

Podmínka rovnoběžnosti: $\vec{u} = k\vec{v}$ (když $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Podmínka kolmosti: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Směrnice k_1 a k_2 přímek p, q svírající úhel ϕ

$$\tan \phi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad \text{jestliže } k_1 k_2 \neq -1 \quad (425)$$

$$\phi = \frac{1}{2}\pi \quad \text{jestliže } k_1 k_2 = -1 \quad (426)$$

Podmínka rovnoběžnosti: $k_1 = k_2$

Podmínka kolmosti: $k_1 k_2 = -1$

22.5 Meta

Jak psát ϕ vs φ ?

22.5.1 Zdroje

22.5.2 Zadání/pojmy

Střed úsečky a délka úsečky, vzájemná poloha bodu a přímky, vzdálenost bodu od přímky, vzájemná poloha přímek, polopřímek a úseček v rovině, odchylka dvou přímek v rovině, vzájemná poloha bodu a roviny, vzájemná poloha dvou přímek v prostoru, vzájemná poloha přímky a roviny, vzájemná poloha kuželosečky a bodu, vzájemná poloha přímky a kuželosečky, tečna kuželosečky v bodě dotyku, rovnoběžná s danou přímkou, kolmá k dané přímce.

23 Diferenciální počet

Diferenciální počet zkoumá změnu funkčních hodnot v závislosti na proměnné. Derivace je poměr změny funkčních hodnot a změny argumentu (nebo i argumentů, ale to je mimo SŠ matematiku viz. https://www.youtube.com/results?search_query=multivariable+calculus). Ve fyzice se využívá k definici rychlosti (změna dráhy za čas) a zrychlení (změna rychlosti za čas). Vlastnosti:

- Každý bod funkce má buď právě jednu derivaci nebo žádnou. Nemůže nastat, že by měl jeden bod více derivací.
- Pokud pro bod existuje derivace potom platí, že je tam funkce spojitá.
- Derivace funkce v bodě je rovna *směrnici tečny* tohoto grafu v tomto bodě. (Graf funkce musí být 2-rozměrný).

Směrnice tečny:

- Tečna má s křivkou společný právě jeden bod.
- Směrnice přímky je tangens úhlu, který svírá daná přímka s osou x .

Platí to, protože poměr změny funkční hodnoty a změny argumentu odpovídá odvěsnám pravoúhlého trojúhelníku.

23.1 Zápis

23.1.1 Leibnizova notace

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}f(x) \qquad \frac{df}{dx} \qquad (427)$$

Aneb ta jediná, která je potřeba. Leibniz asi věděl, co dělá vzhledem k tomu, že nezávisle na Newtonovi vymyslel calculus. Přesně vyjadřuje, podle které proměnné se derivuje (jmenovatel). Umožňuje zápis pro n-té derivace i pro derivaci v bodě. Navíc v této notaci lze krásně vidět, proč platí *řetízkové pravidlo*

$$\frac{d^n y}{dx^n} \qquad \frac{d^n(f(x))}{(dx)^n} \qquad \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) \qquad , \text{ protože: } \frac{d\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx} \qquad (428)$$

$$\frac{dy}{dx}(a) \qquad \text{hodnota derivace v bodě } a \qquad (429)$$

23.1.2 Lagrange

$$f'(x) \qquad f''(x) \qquad f^{iv}(x) = f^{(4)}(x) \qquad (430)$$

Lagrangeova notace, podle mě dost na nic. Navíc pro vyšší čísla než 3 se místo apostrofu má využít římská číslice (nebo arabská číslice v závorkách, aby se rozlišilo od mocniny). lol

23.1.3 Euler

$$D_x f \qquad (431)$$

Další je *Eulerova notace*, kde případný dolní index D určuje podle, které proměnné se derivuje. Případně horní index indikuje kolikátá to má být derivace. Vypadá funkčně, ale nikdy jsem neviděl.

23.1.4 Newton

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (432)$$

Tak toto to je peak fyzikální notace přinesená samotným Newtonem. Také nazývaná tečková notace. Proč asi? Potřebuji znázornit změnu dráhy podle času, tak tam prostě mrsknu tečku. Co když budu chtít zrychlení, bum! 2 tečky. Absolutně nezobecnitelný. Proč by někdo mohl chtít využít stejnou zákonitost na něco jiného? ... To jsem ještě neviděl XD.

23.2 Definice

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (433)$$

První zápis je v podstatě zápisem poměru změn (znak delta Δ) funkční hodnoty a argumentu. Druhý naznačuje poměr dvou *infinitesimálních hodnot*. Vnímán jako jeden symbol (v některých odvětvích matematiky i jako zlomek, ale to se opět SŠ netýká), který označuje derivování y podle x . Poslední se u nás nevyužívá, ale můžeme se s ním setkat v anglofonních zemích. se využívá při parciálních derivacích (mimo SŠ).

Představa jako podíl nekonečně malých hodnot se ukázala jako nepřesná, a tak byla nahrazena definicí pomocí limit:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (434)$$

23.3 Vzorce a pravidla

23.3.1 Derivace součtu

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (435)$$

23.3.2 Derivace součinu

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x) \qquad , \text{ kde } a \text{ je nějaká konstanta} \qquad (436)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad (437)$$

23.3.3 Derivace podílu

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (438)$$

23.3.4 Derivace složené funkce

$$\text{Pokud: } f(x) = h(g(x)) \quad , \text{pak: } f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (439)$$

Jedná se o takzvané *řetízkové pravidlo* (angl. *Chain rule*). Lepší pochopitelnost, ale získáme požitím Leibnizovy notace:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (440)$$

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dg}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \quad (441)$$

$$(442)$$

Příklad použití pro derivování $f(x) = (3x + 1)^2$:

$$\frac{d((3x + 1)^2)}{dx} = \frac{d((3x + 1)^2)}{d(3x + 1)} \cdot \frac{d(3x + 1)}{dx} = 2(3x + 1) \cdot 3$$

23.4 Derivace elementárních funkcí

Viz tabulky... nebo https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace_element%C3%A1rn%C3%ADch_funkc%C3%AD

23.5 L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (443)$$

Říká, že limita podílu 2 funkcí je (za nějakých předpokladů) rovna limitě podílu derivací těchto 2 funkcí. Předpoklady (nějaké):

- Reálná čísla (definiční obory i funkční hodnoty)
- $g(x)$ a $g'(x)$ jsou nenulové ?na nějakém okolí čísla a

- Limity (blížící se stejnému číslu a jako v podílu) jednotlivých funkcí musí být buď obě nulové nebo obě nekonečné (se stejným znaménkem)
- Existuje limita podílu derivací. (Tato podmínka je protože nemůžeme z neexistence limity podílu derivací funkcí vyvodit neexistenci limity podílu funkcí)

23.5.1 Využití

Při hledání limit podílů výrazů s jednou proměnou může ušetřit namáhavé výpočty.

23.6 Využití derivací

Určení chování funkce a extrémů - viz tabulka 6

$f'(x)$	$f''(x)$	Vlastnost
+		Rostoucí
-		Klesající
0		Stacionární bod
0	+	Lokální maximum
0	-	Lokální minimum
	+	Konvexní
	-	Konkávní
	0	Inflexní bod

Tabulka 6: Vlastnosti zjistitelné derivací

23.7 Meta

23.7.1 Zadání/pojmy

Derivace funkce v bodě, základní geometrická a fyzikální interpretace derivace funkce v bodě, derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí, derivace složené funkce, derivace elementárních funkcí, odvození na základě definice, l'Hospitalovo pravidlo a jeho užití. Využití diferenciálního počtu při hledání extrémních hodnot funkcí jedné reálné proměnné.

23.7.2 Zdroje

- https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1pis_derivace
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD_po%C4%8Det
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace>
- <https://matematika.cz/derivace>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/L%27Hospitalovo_pravidlo
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_calculus
- <https://matematika.cz/derivace-vzorce>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98et%C3%ADzkov%C3%A9_pravidlo
- <http://tutorial.math.lamar.edu/problems/calci/chainrule.aspx>
- <https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/LaTeXPrimer/Calculus.html>
- https://www.overleaf.com/learn/latex/Mathematical_expressions
- https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable_calculus

A super série od 3Blue1Brown: <https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMY03t5Yr&index=1>

24 Integrální počet

Integrální počet tvoří společně s diferenciálním počtem tzv. *infinitesimální počet* (angl. *Calculus*). Integrace je inverzní operace k derivaci. V procesu *integrace* hledáme k integrované funkci tzv. *Primitivní funkci*, jejíž derivací dosáhneme původní funkci, kterou chceme integrovat. Primitivní se často zapisuje jako velké F (viz 444) pro funkci f . Množina primitivních funkcí se označuje jako neurčitý integrál. Jedná se o množinu, protože primitivních

funkcí je nekonečně mnoho a liší se od sebe jen absolutním členem, z kterého je po derivaci vždy nula (viz 445). Tato konstanta se označuje C .

$$F = \int f(x) dx \quad (444)$$

$$\int 2x dx = x^2 + C \quad (445)$$

Integrál odpovídá ploše pod grafem. Pojmeme *určitý integrál* se rozumí obsah plochy pod křivkou grafu (a nad osou x), kde x je mezi hodnotami a a b . Viz (446)

$$\int_a^b f(x) dx \quad (446)$$

Vztah mezi určitým a neurčitým integrálem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (447)$$

24.1 Vzorce

Viz tabulky nebo <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/bakalarka/integraly/sec/1.html>

Platí inverzně k pravidlům o derivování (viz 23.4), takže si stačí v některých případech zapamatovat proces jen jedním směrem.

24.2 Metoda per partes

Založena na větě o derivaci součinu (viz 23.3.2). Získáme tak vzorce:

$$\int (uv)' dx = \int (u'v) dx + \int (uv') dx \quad (448)$$

Upravením druhé rovnice získáme postup označovaný jako metoda per partes:

$$\int (uv') dx = uv - \int (u'v) dx \quad (449)$$

24.3 Využití

Integrál se dá využít k výpočtu plochy 2D obrazců. Stačí jen vhodně zapsat jednotlivé přímky jako funkce. K nim vypočítat určitý integrál. To pak sečíst a odečíst. Lze tuto metodu využít k výpočtu obecného vzorce pro obsah určitého typu 2D obrazců.

24.3.1 Objem rotačních těles

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (450)$$

Funkce $f(x)$ musí být nezáporná. Potom objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x je dán tímto vzorcem.

24.3.2 Délka křivky funkce

Asi mimo SŠ. Funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ musí být na $\langle a, b \rangle$ spojitě. Pak je délka grafu l podle vzorce:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (451)$$

Další vzorce už nebudu do TeX přepisovat. Odakzuji na https://cs.wikipedia.org/wiki/Per_partes

24.4 Meta

24.4.1 Zdroje

- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>
- <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/bakalarka/integraly/index.html>
- <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html#textpart2.1>
- https://cs.wikipedia.org/wiki/Per_partes

24.4.2 Zadání/Pojmy

Definice primitivní funkce k dané funkci, primitivní funkce k elementárním funkcím. Integrační metody, přímá integrace, metoda per partes, metoda substituční. Pojem určitého integrálu, vlastnosti určitých integrálů, substituce a metoda per partes v určitém integrálu. Výpočet obsahu rovinného obrazce a výpočet objemu rotačního tělesa užitím určitého integrálu.

25 Aplikace diferenciálního a integrálního počtu

Viz 23.6 o derivace. Viz 24.3 pro integrály.

25.1 Meta

25.1.1 Zdroje

- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Asymptota>

25.1.2 Zadání/pojmy

Vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce, monotónnost a derivace, lokální extrémů funkce a derivace, funkce konvexní a konkávní, inflexní body, asymptoty. Slovní úlohy na extrémů. Výpočty obsahů rovinných útvarů, výpočet objemu rotačního tělesa.

Obsah

Úvodní část	1
0.0.1 Verze	1
0.0.2 Kde stáhnout?	1
0.1 O díle	1
 Jednotlivé maturitní otázky	 3
1 Logická výstavba matematiky	3
1.0.1 Výrok	3
1.1 Logické operace	3
1.1.1 Negace	3
1.1.2 Konjunkce	3
1.1.3 Disjunkce	3
1.1.4 Úplná disjunkce	3
1.1.5 Implikace	4
1.1.6 Ekvivalence	4
1.1.7 Tabulky pravdivostních hodnot	4
1.1.8 Další pojmy	5
1.1.9 Kvantifikované výroky	5
1.2 Základní pojmy	6
1.2.1 Matematické výrazy	6
1.2.2 Výroková forma	6
1.2.3 Axiom a soustava axiomů	6
1.2.4 Definice	6
1.2.5 Matematická věta	6
1.2.6 Důkaz	6
1.3 Čísla	8
1.3.1 Číslice	8
1.3.2 Číselná soustava	8
1.4 Dělitelnost	8
1.4.1 Prvočíslo	8
1.4.2 Čísla složená	9

1.4.3	Základní věta aritmetiky	9
1.4.4	Kritéria dělitelnosti	9
1.4.5	Nejmenší společný násobek	9
1.4.6	Největší společný dělitel	10
1.4.7	Soudelěná a nesoudělná čísla	10
1.5	Meta	10
1.5.1	Zdroje	10
1.5.2	Zadání/Pojmy	11
2	Množiny	12
2.1	Definice a značení	12
2.2	Pojmy	12
2.3	Grafické znázornění	15
2.4	Zobrazení	16
2.4.1	Speciální případy	16
2.4.2	Inverzní zobrazení	17
2.4.3	Složené zobrazení	17
2.4.4	Funkce	17
2.5	Meta	17
2.5.1	Zdroje	17
2.5.2	Zadání/Pojmy	18
3	Číselné obory	18
3.1	Množiny čísel	18
3.2	Číselná osa	19
3.2.1	Absolutní hodnota	20
3.3	Operace s reálnými čísly a jejich vlastnosti	20
3.3.1	Neutrální prvky	20
3.3.2	Porovnávání	20
3.3.3	Základní operace	20
3.3.4	Vlastnosti sčítání a násobení	20
3.3.5	Součet a součin většího množství čísel	21
3.3.6	Mocniny a odmocniny	21
3.4	Komplexní čísla	22
3.4.1	Zápis	22
3.5	Zvláštní případy komplexních čísel	23
3.6	Operace s komplexními čísly	23
3.6.1	Rovnost	23

3.6.2	Součet a rozdíl	24
3.6.3	Součin	24
3.6.4	Podíl	24
3.7	Mocnina komplexního čísla	25
3.7.1	Moivreova věta	25
3.8	„Odmocnina“ komplexního čísla	25
3.9	Meta	25
3.9.1	Zdroje	26
3.9.2	Zadání/Pojmy	26
4	Algebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy	26
4.1	Povolené úpravy rovnic a nerovnic	26
4.1.1	Definiční obor rovnice	27
4.1.2	Množina kořenů rovnice	27
4.1.3	Zkouška	27
4.2	Polynom	28
4.2.1	Hornerovo schéma	28
4.3	Algebraická rovnice	28
4.3.1	Lineární rovnice	29
4.3.2	Kvadratická rovnice	29
4.3.3	Kubická a kvartická rovnice	30
4.4	Viètovy vzorce	30
4.5	Rovnice s parametry	31
4.6	Iracionální rovnice	31
4.7	Rovnice s absolutní hodnotou	31
4.8	Rovnice jako funkce a grafické řešení	31
4.9	Soustavy	32
4.9.1	Řešení	32
4.9.2	Soustavy lineárních rovnic	32
4.10	Meta	32
4.10.1	Zdroje	32
4.10.2	Pojmy/Zadání	33
5	Vlastnosti algebraických funkcí a posloupností	33
5.1	Základní pojmy	33
5.1.1	Funkce reálné proměnné	33
5.1.2	Definiční obor	34
5.1.3	Obor hodnot	34

5.1.4	Graf funkce	34
5.1.5	Prostá funkce	34
5.1.6	Složená funkce	34
5.2	Omezenost	35
5.3	Sudá a lichá funkce	35
5.4	Maximum a minimum	35
5.5	Monotónnost	36
5.6	Periodická funkce	37
5.7	Inverzní funkce	37
5.8	Meta	37
5.8.1	Zdroje	37
5.8.2	Zadání/Pojmy	38
6	Grafy elementárních algebraických funkcí	38
6.1	Lineární funkce	38
6.2	Kvadratická funkce	38
6.3	Mocninné funkce	39
6.4	Lineární lomená funkce	39
6.5	Absolutní hodnota	39
6.6	Odmocninné grafy	40
6.7	Meta	40
6.7.1	Zdroje	40
6.7.2	Pojmy/zadání	40
7	Limita a spojitost funkce	40
7.0.1	Okolí bodu	40
7.0.2	Hromadný bod	41
7.0.3	Přírůstek argumentu	41
7.0.4	Přírůstek funkce	41
7.1	Spojitost	41
7.1.1	Spojitost funkce v bodě	41
7.1.2	Spojitá funkce	42
7.1.3	Funkce spojitá na intervalu	42
7.2	Limita funkce	42
7.2.1	Vlastní limita ve vlastním bodě	42
7.2.2	Nevlastní limita ve vlastním bodě	43
7.2.3	Vlastní limita v nevlastním bodě	43
7.2.4	Nevlastní limita v nevlastním bodě	44

7.2.5	Limity zprava a zleva	44
7.2.6	Pravidla počítání s limitami	45
7.2.7	Důležité limity	45
7.2.8	Asymptota	46
7.3	Meta	46
7.3.1	Zdroje	46
7.3.2	Zadání/Pojmy	47
8	Nealgebraické funkce	47
8.1	Exponenciální funkce	47
8.2	Logaritmus	48
8.2.1	Počítání s logaritmy	48
8.3	Meta	49
8.3.1	Zdroje	49
8.3.2	Pojmy/zadání	49
9	Goniometrie a trigonometrie	50
9.1	Goniometrické funkce	50
9.1.1	Zavedení	50
9.1.2	Tabulka vlastností	50
9.1.3	Nějaké vzorce	51
9.2	Řešení trojúhelníku	51
9.2.1	Sinová věta	51
9.2.2	Kosinová věta	51
9.3	Goniometrické funkce složeného argumentu	51
9.4	Cyklometrické funkce	52
9.5	Hyperbolické funkce	52
9.6	Meta	52
9.6.1	Zdroje	52
9.6.2	Pojmy/Zadání	52
10	Nealgebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy	52
10.1	Meta	53
10.1.1	Zdroje	53
10.1.2	Pojmy/Zadání	53

11 Kombinatorika	53
11.1 Faktoriály	53
11.2 Kombinační čísla	53
11.2.1 Binomická věta	54
11.3 Množinový pohled	54
11.4 Variace	54
11.4.1 Variace bez opakování	55
11.4.2 Variace s opakováním	55
11.5 Permutace	55
11.5.1 Permutace bez opakování	55
11.5.2 Permutace s opakováním	55
11.6 Kombinace	55
11.6.1 Kombinace bez opakování	56
11.6.2 Kombinace s opakováním	56
11.7 Pravidla	56
11.7.1 Součtu	56
11.7.2 Součinu	56
11.8 Meta	57
11.8.1 Zdroje	57
11.8.2 Zadání/ pojmy	57
12 Pravděpodobnost	57
12.1 Náhodné pokusy	58
12.2 Jevy a jejich pravděpodobnost	58
12.3 Opakování náhodného pokusu	60
12.3.1 Bernoulliho schéma	61
12.4 Meta	61
12.4.1 Zdroje	61
12.4.2 Pojmy/ zadání	61
13 Statistika	61
13.1 Rozdělení četnosti	63
13.1.1 Skupinové rozložení četností	63
13.2 Grafické znázornění četností	63
13.2.1 Tabulka	63
13.2.2 Spojnicový diagram	64
13.2.3 Sloupkový diagram	64
13.2.4 Kruhový diagram	64

13.3	Charakteristiky polohy kvantitativního znaku	66
13.3.1	Vztahy mezi průměry	67
13.4	Charakteristiky variability kvantitativního znaku	67
13.5	Korelace	68
13.6	Meta	68
13.6.1	Zdroje	68
13.6.2	Pojmy/ zadání	69
14	Posloupnosti a řady	69
14.1	Posloupnosti	69
14.1.1	Určení posloupnosti	70
14.1.2	Vlastnosti posloupností	70
14.1.3	Aritmetická posloupnost	71
14.1.4	Geometrická posloupnost	72
14.1.5	Vztah aritmetické a geometrické posloupnosti	72
14.1.6	Využití aritmetické a geometrické posloupnosti	72
14.1.7	Limita posloupnosti (vlastní)	72
14.1.8	Nevlastní limita posloupnosti	73
14.1.9	Věty o limitách posloupností	73
14.2	Nekonečné řady	74
14.2.1	Geometrická řada	75
14.3	Finanční matematika	76
14.3.1	Jednoduché úročení	76
14.3.2	Složené úročení	77
14.3.3	Pravidelné spoření při složeném úročením	77
14.3.4	Pravidelné splácení dluhu	78
14.4	Meta	78
14.4.1	Zdroje	78
14.4.2	Pojmy/ zadání	78
15	Základy planimetrie a konstrukční úlohy	79
15.1	Základní pojmy a definice	79
15.1.1	Bod	79
15.1.2	Přímka	79
15.1.3	Rovina	79
15.1.4	Polovina	79
15.1.5	Polopřímka	80
15.1.6	Úsečka	80

15.1.7	Obrazce	80
15.2	Úhly	80
15.2.1	Pravidla pro dvojice úhlů	80
15.3	Mnohoúhelníky	81
15.3.1	Pravidelné mnohoúhelníky	82
15.4	Trojúhelníky	82
15.4.1	Konstrukce	83
15.4.2	Druhy	83
15.4.3	cool Věci	84
15.4.4	Obvod a obsah	85
15.4.5	Věty	85
15.4.6	Rovnoramenný	86
15.4.7	Rovnostranný	86
15.5	Čtyřúhelníky	86
15.5.1	Obvod a obsah	87
15.5.2	Rozdělení	87
15.6	Kruh a kružnice	89
15.6.1	Vzájemná poloha 2 kružnic	90
15.6.2	Vzájemná poloha s přímkou	90
15.6.3	Vyjádření pomocí rovnic	90
15.6.4	Úhly v kružnici	90
15.6.5	Kruhov ^á výseč	90
15.6.6	Kruhov ^á výseč	91
15.6.7	Mezikruž ^í	91
15.6.8	Thaletova kružnice/věta	91
15.7	Obvody a obsahy ostatních rovinných útvarů	91
15.8	Konstrukce	91
15.9	Meta	92
15.9.1	Zdroje	92
15.9.2	Pojmy/Zadání	92
16	Zobrazení v rovině	93
16.1	Afinní zobrazení	93
16.2	Podobná zobrazení	93
16.3	Shodné zobrazení	94
16.4	Využití v konstrukčních úlohách	94
16.5	Meta	94
16.5.1	Zdroje	94

16.5.2	Pojmy/Zadání	95
17	Tělesa	95
17.1	Cavalieriův princip	95
17.2	Mnohostěny	95
17.2.1	Platónská tělesa	96
17.3	Hranoly	96
17.3.1	Kvádr	96
17.3.2	Krychle	97
17.4	Jehlany	97
17.4.1	Komolé jehlany	97
17.5	Rotační tělesa	97
17.5.1	Rotační válec	97
17.5.2	Rotační kužel	97
17.5.3	Komolý rotační kužel	98
17.5.4	Koule	98
17.5.5	Kulová úseč a kulový vrchlík	98
17.5.6	Kulová vrstva a kulový pás	98
17.6	Meta	98
17.6.1	Zdroje	99
17.6.2	Zadání/pojmy	99
18	Polohové a metrické úlohy ve stereometrii	99
18.1	Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru	99
18.1.1	Bod a	99
18.1.2	Přímka a	100
18.1.3	Rovina	102
18.2	Průnik přímky tělesem	103
18.3	Řez tělesa rovinou	103
18.4	Meta	103
18.4.1	Zdroje	103
18.4.2	Pojmy/Zadání	104
19	Vektorová algebra	104
19.1	Vzdálenost bodů a střed úsečky	104
19.2	Soustavy souřadnic	104
19.3	Orientované úsečky	104
19.4	Definice vektoru přes orientované úsečky	104

19.5	Souřadnice vektoru	105
19.6	Sčítání vektorů a násobení reálnými čísly	105
19.7	Lineární kombinace a závislost	105
19.8	Velikost	106
19.8.1	Jednotkový vektor	106
19.9	Skalární součin	106
19.10	Úhel vektorů	107
19.11	Vektorový součin v prostoru	107
19.12	Pravotočivá a levotočivá báze	108
19.13	Smíšený součin vektorů v prostoru	108
19.14	Meta	109
19.14.1	Zdroje	109
19.14.2	Zadání/ pojmy	109
20	Analytická geometrie lineárních útvarů	109
20.1	Meta	109
20.1.1	Zdroje	109
20.1.2	Zadání/ pojmy	109
21	Analytická geometrie kuželoseček	110
21.1	Degenerované kuželosečky	110
21.2	Elipsa	110
21.2.1	Kružnice	111
21.2.2	Vztah s přímkou	111
21.3	Parabola	112
21.3.1	Vztah s přímkou	112
21.4	Hyperbola	113
21.4.1	Asymptoty	113
21.5	Vztah s přímkou	114
21.6	Obecná rovnice kuželoseček	114
21.6.1	Kružnice	114
21.6.2	Elipsy	114
21.6.3	Hyperboly	114
21.6.4	Paraboly	115
21.7	Meta	115
21.7.1	Zdroje	115
21.7.2	Pojmy/zadání	115

22 Polohové a metrické úlohy řešené metodou analytické geometrie	116
22.1 Co je již jinde	116
22.2 Polopřímka a úsečka v prostoru	116
22.3 Střed a délka úsečky	116
22.4 Přímka v rovině	117
22.4.1 Vyjádření a rovnice	117
22.4.2 Vzdálenost bodu	118
22.4.3 Odchylka dvou přímek	118
22.5 Meta	119
22.5.1 Zdroje	119
22.5.2 Zadání/pojmy	119
23 Diferenciální počet	119
23.1 Zápis	120
23.1.1 Leibnizova notace	120
23.1.2 Lagrange	120
23.1.3 Euler	120
23.1.4 Newton	121
23.2 Definice	121
23.3 Vzorce a pravidla	121
23.3.1 Derivace součtu	121
23.3.2 Derivace součinu	121
23.3.3 Derivace podílu	122
23.3.4 Derivace složené funkce	122
23.4 Derivace elementárních funkcí	122
23.5 L'Hospitalovo pravidlo	122
23.5.1 Využití	123
23.6 Využití derivací	123
23.7 Meta	123
23.7.1 Zadání/pojmy	123
23.7.2 Zdroje	124
24 Integrální počet	124
24.1 Vzorce	125
24.2 Metoda per partes	125
24.3 Využití	126
24.3.1 Objem rotačních těles	126

24.3.2	Délka křivky funkce	126
24.4	Meta	126
24.4.1	Zdroje	126
24.4.2	Zadání/Pojmy	127
25	Aplikace diferenciálního a integrálního počtu	127
25.1	Meta	127
25.1.1	Zdroje	127
25.1.2	Zadání/pojmy	127
Apendix		139
.1	L ^A T _E X	139
.1.1	Latex tipy	139

.1 L^AT_EX

.1.1 Latex tipy

- jak na tři tečky, kdy jaké používat <https://tex.stackexchange.com/questions/122491/difference-of-the-dots>
- jak udělat jednostrannou složenou závorku <https://tex.stackexchange.com/questions/47170/how-to-write-conditional-equations-with-one-sided-curly-brackets>
- Lepší způsob, jak psát [linky](#)
- Jak dělat [vertikální čáru](#)