

## 0.1 Meta

### 0.1.1 Deníček

Tak jdeme na to! 24.03.20

25.03.20 dopsáno 23,24,25 ale ještě tam chce něco dopilovat

29.03.20 - dodělal jsem kuželosečky (21)

01.04.20 - jdu na tělesa (17), done

04.04.20 - otázka 15

05.04.20 - od rána (cca 9h) pokračuji na 15, už je skoro 12h a myslím, že bude hotová.

- 18:50 tak jdu zkusit ještě jednu MO dneska,

- 19:59 a 16 je asi dodělána, je nějaká EZ a část mám v 15

11.04.20 Začal jsem dělat 18, ~~ještě trocha chybí z geometrie~~ done -21:39 tak ještě jednu MO dneska, zkusím 22

- 23:23 Ideální čas na zakončení otázky 22

15.04.20 - otázka 19 začata, 20 hotovo(jsem jen odkázal na 18 a 22, protože tam je vše), 19 hotovo (zkusím dát ještě jednu), tak asi ne no

16.04.20 - zkusím MO ještě, 11 +- done (~~zpřehlednit pravidla~~ done a zjistit, ~~co je skupina v kombinatorice~~ je to  $k$ -tice) čas 13:27

- 20:00 zkusím udělat ještě 12 (pravděpodobnost), uhlazena 11(kombinatorika), 12 asi done v 22:40

20.04.20 - 10:06 jdu na 13(Statistika) a 14 (Posloupnosti a řady). No tak samozřejmě existuje znak  $x^*$  ~~akorát jsem nepřišel na to, jak tu hvězdičku vycentrovat, jako to mají v tabulkách~~. aha  $x_r^*$  vs  $\overset{*}{x}_r$  pořád ale nechápu, co tam má za <sup>hvězdička</sup> ~~vyznamen~~

- 10:50 To je způsobů, jak udělat 3 tečky ...vs ... vs ...vs...vs...vs... vs (...vs...vs...)

- 12:50 Debilní sloupcový graf on nezobrazuje poslední souřadnice, takže jsem pořád hledal chybu v nastavení os a pak zjistím, že tam stačí přidat další prázdný sloupec nakonec a ten nyní předposlední se zobrazí, to je pěkná blbost.

- 13:10 kruhový diagram má vlastní package a je ez. umí ale zobrazovat jen přes procenta. Neřeším ...

- 14:50 a co třeba  $\overset{*}{x}^2$  vs  $\overset{*}{x}^2$  vs  $\overset{*}{x}^2$  vs  $\overset{*}{x}^2$ . To první teda vypadá dost sexy oproti ostatním, ale předtím jsem používal overset, takže musím porovnat, jestli oko rozená rozdíl mezi  $\overset{*}{x}$  a  $\overset{*}{x}$  a  $\overset{*}{x}$  Za mě accentset vyhrál jakožto estetičtější, ale ty rovnice co už mám napsané kvůli tomu předělávat nebudu ...

*tak to je*  
-  $\overset{*}{x}^{\overset{*}{dost}}$   
*lol*

-15:55 Tak statistika(13) asi komplet (ještě přidám navíc korelaci)

-17:30 kolo opraveno, hmm  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$  vs  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ , no asi done

21.04.20 - jedu 14 (posloupnosti a řady)

- Jonáš schválil  $\exists d \in \mathbb{R}; (\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq d)$  takže jsem asi pochopil matematicko-logický zápis věcí, nice

Dále:  $\exists c \in \mathbb{R} | (\forall n \in \mathbb{N} | a_n \leq c)$  a  $(\exists d \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} = a_n + d)$  jsou taky validní způsoby zápisu

- 17:09 oh shit, ty zápisy jsou psycho viz limita posloupnosti (14.1.7 a 14.1.8), řekl bych, že v nich mám asi chybu ...

- 18:49 Tak jsem řešil s Jonášem ještě jak to správně psát, on mi něco poradil a pak prozradil, že není žádná pořádná konvence ...

- 20:43 celý den to dělám a ještě chybí finanční matematika, wtf

24.04.20 - Množiny (2), btw  $|vs|$  vs  $|a|b|$  vs  $|a|b|$  -> Hmm mezera.  $| | ||| |||$  asi začínám mít halucinace, mám pocit, že se mění, která z těch čar je šedivější ...

Prázdný se  $\emptyset$  vs  $\emptyset$  vs  $\emptyset$  (to poslední jsem si vymyslel, předposlední nefunguje a to druhý vypadá divně, takže naštěstí jasná volba)

Pokusy na doplňky  $A'$  vs jiný způsob:  $\complement$  vs  $c$  v praxi  $A^c$  vs  $A^\complement$ . A co velká písmena neexistuje vs  $\mathbb{C}$

Finální porovnání možností:  $A^c$  nebo  $A^C$  nebo  $A^\complement$  nebo  $A^c$  nebo  $A^\complement$  nebo  $A'$  nebo  $\complement_U A$ . Příkaz complement jasně vyhrává miss nejlepšího doplňku.

Jak na zobrazit zobrazení (a pěkné šipky):  $y = f(x)$  nebo  $y = F(x)$  nebo  $f : x \mapsto y$  nebo  $f : x \rightarrow y$  nebo  $f : x \rightarrow y$

Jak udělat kolečko  $(h g)$  vs  $(h \circ g)$ , 18:46 no nic množiny (2) asi done, měl bych dělat EuropuSecuru ..., ale moc se mi nechce

25.04.20 - obecná rovnice kuželoseček (21) a finanční matematika (14-posloupnosti a řady) dodělány, sakra měl bych dělat EuropuSecuru ...

01.05.20 - test buildu na nb, pokus 2. Funguje. 10:43 Jdu na MO-3. Notace  $\mathbb{N}$  vs  $N$  má jasného vítěze na krásu. Problém je spíš, že různí autoři využívají různé způsoby zápisu, zda-li tam patří nula. Jinak lepší způsob, jak psát [linky](#).

Vypadá to že standardem pro komplexní čísla je  $a+ib$  (lepší než  $a+bi$ ), žádné speciální fonty nebo příkazy asi nejsou. Moment co  $a+ib$  ? „( v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X existuje speciální symbol  $i$  , ale ?asi není moc konsensus, jak to psát?)“ Jonáš potvrdil neexistenci konsensu.

Nový command  $|a|$  vs  $|a|$ . Funguje mělo by být ekvivalentní  $|a|$  . Další možnosti:  $|a|$  nebo  $|a|$ , ale rozdílné  $|a|$  .

Jak na Eulerovo číslo?  $e$  vs  $e$  vs  $e$  vs ? ->vytvořil jsem si command aby to bylo konzistentní  $e$  až se rozhodnu ...Udělám asi to samé pro  $i$  (zatím jsem se u obojího rozhodl pro  $\mathrm{mathrm}$ )

Pauza, ale komplexní čísla done. Nevím co se myslí uzavřeností v pojmech, jako u intervalů? -> TODO-list. Jinak mě as nenapadá, co dál. Teoreticky bych mohl opsat víc vzorečků z tabulek, ale ony většinou tak nějak vyplývají z předchozích a obecně mi to přijde zbytečný, takže na to už asi kašlu. MO-3 done

### 0.1.2 TODO-list

- ~~21 Obecná rovnice u kuželoseček, dodělat~~ done (podle tabulek)
- nějaký konstrukce ?15-18?
- 18 vymyslet rychlý postup získání kolmé přímky (to asi vymyslím u vektorů) ~~na vzdálenosti~~ (vzdálenosti nalezeny v tabulkách a wiki)  
A asi něco s řezy/ průnikem přímky tělesy.
- 25 Asymptota a monotónnost.
- oh shit, terminologie směrnice a směrový vektor v 18
- zápisy posloupností pomocí logicko-matematických zápisů
- "Prakitcké" využití aritmetické a geometrické posloupnosti
- Finanční matematika (spadá pod 14 ~~posloupnost a řady~~) done, podle tabulek
- 2 (Množiny) nakreslit Vennovy diagramy
- Nakreslit Gaussovu rovinu (obrázek obdobný tomu z tabulek)
- Sub a subsubsectiony a paragraohy pořešit u komplexních čísel

- MO-3 pojem uzavřenost , možná přidat další příklady základních operací, ale je to asi jasný a nuda takže radši nic

### 0.1.3 Latex tipy

- jak na tři tečky, kdy jaké používat <https://tex.stackexchange.com/questions/122491/difference-of-the-dots>
- jak udělat jednostrannou složenou závorku <https://tex.stackexchange.com/questions/47170/how-to-write-conditional-equations-with-one-sided-curly-brackets>
- Lepší způsob, jak psát [linky](#)
- Jak dělat [vertikální čáru](#)

$$\begin{array}{l}
 \text{červená} \\
 \text{zelená}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 a+d? \\
 \text{chloroplast vznik primární endosymbiózou} \\
 a+b
 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{červená} \\
 \text{zelená}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{červená} \\
 \text{zelená}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 a+d? \\
 \text{chloroplast vznik primární endosymbiózou} \\
 a+b
 \end{array}$$

### 0.1.4 Informace pro čtenáře

1. Norma ČSN ISO 31-11 není závazná a má pouze charakter doporučení. TO by vysvětlovalo, proč jsem některý věci vůbec neviděl, protože prostě vypadají blbě a nikdo je nechce používat xD. Některý věci mi zase třeba přijdou v pohodě a asi se uchytlí, bo kopírují zahraniční styly zápisu.

# 1 Logická výstavba matematiky

## 1.1 Meta

### 1.1.1 Zdroje

### 1.1.2 Zadání/Pojmy

Pojem matematického výrazu, axiomy, definice, věty, výrok, pravdivostní hodnota výroku, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, kvantifikátory, negování složených výroků, výroková forma, číslo, číslice, číselné soustavy, dekadický poziční systém, prvočísla a čísla složená, základní věta aritmetiky, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel, čísla soudělná a nesoudělná, kriteria dělitelnosti, důkazy matematických vět, důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí, důkazové úlohy o dělitelnosti.

## 2 Množiny

### 2.1 Definice a značení

Je to nějaká skupina (/ soubor) prvků, těch může být konečně (včetně nuly) nebo nekonečně mnoho. Obvykle se značí velkým tiskacím písmenem.

#### Rigorózní definice:

Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišitelné a tvoří součást světa našich představ a myšlenek; tyto objekty nazýváme prvky množiny. - Georg Cantor

Množina je jednoznačně určena svými prvky ale nevšímá si jejich pořadí nebo jiné struktury. Prvkem množiny může být číslo, písmeno, (ne)uspořádaná k-tice, nějaká množina ...

### 2.2 Pojmy

- Určení množiny:

*Výčtem prvků*  $A = \{2, 4, 8, 16\}$

*Charakteristickou vlastností prvků*  $B = \{b \in \mathbb{N}; b \leq 15\}$

*Pomocí jiných množin*  $C = A \cap B$

- *Prvek* množiny značí se  $a \in A$  (čteme  $a$  je prvkem množiny  $A$ ), případně  $b \notin A$  ( $b$  není prvkem množiny  $A$ ).
- *Prázdná množina* je taková, která nemá žádný prvek, značí se  $\emptyset$  ( v  $\text{\TeX}$ u ještě možnost  $\varnothing$  ) nebo  $\{\}$
- *Počet prvků* konečné množiny  $A$  se značí  $|A|$
- *Podmnožina* (neboli část), značí se  $B \subset A$  (to říká, že množina  $B$  je podmnožinou množiny  $A$ ). Vztah být podmnožinou se nazývá *inkluze*. To znamená, že každý prvek množiny  $B$  je prvkem množiny  $A$ .

$$B \subset A \quad (\forall x)(x \in B \implies x \in A) \quad (1)$$

Nový zápis podle normy ISO 31-11:

$$B \subseteq A \quad \forall x \in B; x \in A \quad B \text{ je podmnožinou } A \quad (2)$$

$$B \subset A \quad B \subseteq A \wedge B \neq A \quad B \text{ je } \textit{vlastní} \text{ podmnožinou } A \quad (3)$$

U ostré inkluze hovoříme o vlastní podmnožině. U neostré inkluze hovoříme o nevlastní podmnožině.

- *Rovnost* množin  $A, B$  se značí  $A = B$ . O rovnosti platí:  $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$  Jiná definice :

$$A = B \quad (\forall x)(x \in A \iff x \in B) \quad (4)$$

- *Průnik* množin  $A, B$  se značí  $A \cap B$ . Průnikem jsou všechny prvky, které patří do obou množin.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad (5)$$

- *Průnik systému množin* - to je množina všech prvků, které patří do každé z množin  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Značení:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad (6)$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \quad (7)$$

- *Disjunktní* množiny nemají žádný společný prvek. Jejich průnik je tedy prázdná množina.  $A \cap B = \emptyset$

- *Sjednocení množin*  $A, B$  se zapisuje  $A \cup B$ . Říká že prvek je ve sjednocení množin vyskytuje-li se alespoň v jedné ze sjednocovaných množin.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (8)$$

- *Sjednocení systému množin* je množina všech prvků, které patří do alespoň jedné z množin  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Zápis:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (9)$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \quad (10)$$

- *Princip inkluze a exkluze* - platí pro konečné množiny, popisuje vztah mezi velikostmi sjednocení množin a velikostmi všech možných průniků:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (11)$$

Například: máme 10 anglicky mluvících, 7 bulharsky mluvících a 3 z nich mluví i anglicky. Kolik je ve skupině lidí?

Existuje obecný zápis tohoto pravidla, ale mimo SŠ:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad (12)$$

- *Rozdíl množin*  $A, B$  zapíšeme jako  $A \setminus B$  (nebo i jako  $A - B$ ) a to říká, že výsledná množina obsahuje všechny prvky  $A$ , které nejsou prvky  $B$ . Z toho jasně vyplývá, že to není operace komutativní. Zápis:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad (13)$$

- *Symetrický rozdíl* (také *symetrická difference*) je v rozdíl sjednocení a průniku 2 množin. Značí se  $A \Delta B$  (nebo  $A \div B$  nebo  $A \ominus B$  (v angličtině také  $A \oplus B$  pomocí symbolu pro XOR)) Platí:

$$A \Delta B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad (14)$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (15)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (16)$$

- *Doplňěk* (také *komplement*) množiny  $A$  v množině  $U$ , kde  $A \subset U$  se značí:

$A'$  nebo  $A'_U$  podle staré normy v tabulkách

$C_U A$  (přesněji  $\complement_U A$ ) - doplňěk množiny  $A$  v množině  $U$ , podle nové normy ISO 31-11, podle tabulek

$A^c$  (přesněji  $A^{\complement}$  (další T<sub>E</sub>Xmožnosti  $A^c$  nebo  $A^{\complement}$  nebo  $A^c$ )) značení podle wikipedie (i v ANJ verzi), ale česká uznává i značení  $A'$  Doplňěk označuje všechny prvky, které nejsou v  $A$ , ale jsou v nějaké předem dané množině (tady  $U$ ). Aby bylo možná doplňěk určit je třeba znát množinu, vzhledem ke které se doplňěk počítá. Je to množina, která doplňuje všechny prvky, které chybí množině  $A$  k tomu, aby byla ekvivalentní s  $B$  Je ekvivalentní s rozdílem.

$$A^{\complement} = U - A \quad (17)$$

$$A'_U = U \setminus A \quad (18)$$

$$A' = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} \quad (19)$$

Musí platit, že  $A \subseteq U$ . Potom  $A'$  obsahuje všechny prvky, které obsahuje  $U$  ale neobsahuje  $A$ .

- *de Morganovy vzorce*

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (20)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (21)$$

Nějaké další vlastnosti doplňků:

$$\begin{array}{llll} A \cup A^{\complement} = U & A \cap A^{\complement} & = \emptyset & (A^{\complement})^{\complement} = A \\ \emptyset^{\complement} = U & U^{\complement} & = \emptyset & A^{\complement} \setminus B^{\complement} = B \setminus A \end{array}$$

$$A \subseteq B \implies B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$$

- *Kartézský součin* se značí  $A \times B$  a je to množina všech uspořádaných dvojic (tj. 2 prvky u kterých záleží na pořadí, tzn.  $(a, b)$  je jiné než  $(b, a)$  pro  $a \neq b$ ), kde prvním členem je prvek množiny  $A$  a druhým členem prvek množiny  $B$ . Viz:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\} \quad (22)$$



Je možné rozšířit definici na libovolné  $n$  množin, kde výsledkem kartézského součinu je množina uspořádaných  $n$ -tic:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\} \quad (23)$$

- $n$ -tá Kartézská mocnina množiny  $A$  se značí  $A^n$  a výsledkem je množina uspořádaných  $n$ -tic:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge \dots \wedge a_n \in A\} \quad (24)$$

## 2.3 Grafické znázornění

Pomocí Vennových diagramů. Kruhy s průniky, nic extra na nich není.

## 2.4 Zobrazení

Zobrazení  $F$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  je předpis, který každému prvku  $x \in A$  přiřazuje nejvýše jeden prvek  $y \in B$ . Prvek s první množiny se nazývá *vzor* a jemu přiřazen vždy nejvýše jeden *obraz* z druhé množiny. (Mimo SŠ: je to typ binární relace, která splňuje podmínku existence a jednoznačnosti). Značení:

$$y = f(x) \quad y = F(x) \quad f : x \mapsto y \quad f : x \rightarrow y \quad (25)$$

- $y$  je *obraz* prvku  $x$  při zobrazení  $F$ , označení  $y = F(x)$
- $x$  je *vzor* prvku  $y$  při zobrazení  $F$
- $D_F$  je *definiční obor* zobrazení  $F$ , tj. množina vzorů všech prvků  $y \in B$
- $H_F$  je *obor hodnot* zobrazení  $F$ , tj. množina obrazů všech prvků  $x \in A$

### 2.4.1 Speciální případy

- Zobrazení z  $A$  do  $B$ . Nastává když  $D_F \subset A \wedge H_F \subset B$
- Zobrazení  $A$  do  $B$ . Nastává když  $D_F = A \wedge H_F \subset B$
- Zobrazení z  $A$  na  $B$ . Nastává když  $D_F \subset A \wedge H_F = B$ . Také se nazývá *surjektivní*.

- *Zobrazení  $A$  na  $B$ .* Nastává když  $D_F = A \wedge H_F = B$
- *Zobrazení v množině* je takové zobrazení, kde  $A = B$ , tedy výchozí a cílová množina jsou totožné.
- *Prosté zobrazení* (také *injektivní*) je typ, kdy každé dva různé prvky z  $A$  mají různé obrazy v  $B$

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A \wedge x_2 \neq x_1) : F(x_1) \neq F(x_2) \quad (26)$$

- *Vzájemně jednoznačné zobrazení* (také *bijektivní*) je prosté zobrazení  $A$  na  $B$ . Tzn. nastane právě tehdy, když mají množiny stejně prvků a každý vzor má právě 1 obraz (tj. každé 2 vzory mají různý obraz = prosté zobrazení). Z toho vyplývá, že každému obrazu náleží právě jeden vzor.

#### 2.4.2 Inverzní zobrazení

*Inverzní zobrazení* k prostému zobrazení  $F$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  je zobrazení  $F^{-1}$  z množiny  $B$  do množiny  $A$ , pro které platí:

$$D_{F^{-1}} = H_F \quad (27)$$

$$H_{F^{-1}} = D_F \quad (28)$$

$$F^{-1}(d) = c \iff F(c) = d \quad (29)$$

#### 2.4.3 Složené zobrazení

Máme: Zobrazení  $F$  z množiny  $A$  do množiny  $B$  a zobrazení  $G$  z množiny  $B$  do množiny  $C$ . *Složené zobrazení* ze zobrazení  $F, G$  (v tomto pořadí) je zobrazení  $H$  z množiny  $A$  do množiny  $C$ , pro které platí:

- $D_H$  je množina všech  $x \in D_F$ , pro která  $F(x) \in D_G$
- $\forall x \in D_H : H(x) = G(F(x))$

Značí se:

$$H = G \circ F \quad (30)$$

#### 2.4.4 Funkce

*Funkce* je speciálním případem zobrazení. Funkce reálné či komplexní proměnné je zobrazení v množině reálných či komplexních čísel. Pro standardní  $y = f(x)$  se proměnná  $x$  nazývá *argument funkce (nezávisle proměnná)* a proměnná  $y$  se označuje jako *funkční hodnota (závisle proměnná)*.

Má definiční obor a obor hodnot definované v podstatě stejně jako zobrazení. O prvcích zobrazované množiny, které nejsou v definičním oboru, říkáme, že pro ně funkce *není definována*.

### 2.5 Meta

Možná si pak dodělám obrázky Vennových diagramů, jen tak protože můžu.

#### 2.5.1 Zdroje

- Tabulky
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BEina>
- <https://matematika.cz/mnoziny>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie\\_mno%C5%BEin](https://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_mno%C5%BEin)
- <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/?page=inkl>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Princip\\_inkluze\\_a\\_exkluze](https://cs.wikipedia.org/wiki/Princip_inkluze_a_exkluze)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Symetrick%C3%A1\\_diference](https://cs.wikipedia.org/wiki/Symetrick%C3%A1_diference)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric\\_difference](https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_difference)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Dopl%C4%9Bk\\_mno%C5%BEiny](https://cs.wikipedia.org/wiki/Dopl%C4%9Bk_mno%C5%BEiny)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Complement\\_\(set\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Complement_(set_theory))
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Zobrazen%C3%AD\\_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Zobrazen%C3%AD_(matematika))
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce\\_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Funkce_(matematika))

## 2.5.2 Zadání/Pojmy

Pojem množiny, způsob zadání množiny, podmnožina, vztahy mezi množinami, rovnost množin, inkluze množin, operace s množinami a jejich vlastnosti, sjednocení, průnik, rozdíl, doplněk, disjunktní množiny, grafické znázornění množin, uspořádaná dvojice, kartézský součin, zobrazení, typy zobrazení, funkce, složené zobrazení.

# 3 Číselné obory

## 3.1 Množiny čísel

Máme několik množin čísel. Formální definice jsou náročnější, ale na ty asi kašlem.

- *Přirozená čísla* - kladná celá čísla nebo nezáporná celá čísla -> problém zda-li patří nula nebo ne -> existují různé způsoby značení, takže sranda, protože každý autor píše jinak. Vždy se ale značí  $N$  nebo  $\mathbb{N}$ . Aby se předešlo záměnám přidávají se indexy v podobě plus a nuly, které to mají jasněji určit:  
*Nezáporná celá čísla* (tj. včetně nuly) :  $N_0$ ,  $N^0$ ,  $\mathbb{N}_0$  nebo  $\mathbb{N}^0$  (taktéž je to ekvivalentní se zápisem pomocí celých čísel:  $Z_0^+$  nebo  $\mathbb{Z}_0^+$ ), (podle tabulek by to od normy ISO 31-11 mělo být jen  $\mathbb{N}$ , ale v celých tabulkách se to používá pro kladná celá čísla ...)  
*Kladná celá čísla* (tj. bez nuly):  $\mathbb{N}^+$  (pomocí celých čísel  $\mathbb{Z}^+$ ) (podle tabulek normy ISO 31-11 by to mělo být  $\mathbb{N}^*$ , ale to jsem v životě neviděl, takže asi tak)
- *Celá čísla* - značí se  $\mathbb{Z}$ . Přirozená čísla jsou speciální podmnožinou celých čísel. Vzájemným sčítáním, odečítáním a násobením celých čísel vždy získáme opět jen celé číslo. Výjimku tvoří dělení.
- *Racionální čísla* se značí  $\mathbb{Q}$ . Jsou to čísla která jde vyjádřit jako zlomek dvou celých čísel  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b \in Z$ . Celá čísla jsou jejich speciální podmnožinou, kde *základní tvar* zlomku má jako dělitele 1.
- *Reální čísla* značí se  $\mathbb{R}$ . Jsou všechna čísla i ta která nejdu vyjádřit zlomkem, ale jdou vyjádřit nějakým (i nekonečným) desetinným rozvojem. Lze si je představit jako množinu vzdáleností bodů přímky od jednoho konkrétního bodu přímky, který si označíme 0.

- *Iracionální čísla* jsou všechna desetinná čísla, která se nedají vyjádřit pomocí zlomku (např.  $\pi, \sqrt{2}, \dots$ ). Je to tedy množina  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- *Komplexní čísla* se značí  $\mathbb{C}$ . Zavedeny byly kvůli řešení rovnic styl  $x^2 + 1 = 0$ . Byla zavedena i imaginární jednotka  $i^2 = -1$  (respektive  $i^2 = -1$  nebo  $i^2 = -1$ ).

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad (31)$$

Pro  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  můžeme ještě vytvořit kladné (respektive záporné) podmnožiny pomocí plus (resp. mínus) v horním indexu a rozlišit přítomnost nuly pomocí dolního indexu s nulou, je-li součástí.

## 3.2 Číselná osa

Reálná čísla můžeme znázornit na číselné ose (nekonečná přímka, která má bod, který označujeme jako 0). To se může hodit třeba ke znázornění intervalů. Nebo k pochopení *absolutní hodnoty* jako vzdálenosti od nuly.

### 3.2.1 Absolutní hodnota

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases} \quad (32)$$

Absolutní hodnota rozdílu reálných čísel je rovna vzdálenosti těchto čísel na číselné ose. Pak jsou v tabulkách nějaké zajímavé příklady, ale mě moc zajímavé nepříjdou.

## 3.3 Operace s reálnými čísly a jejich vlastnosti

### 3.3.1 Neutrální prvky

Je takový prvek množiny (pro nás reálná čísla), pro který platí, že výsledkem operace neutrálního prvku a libovolného jiného prvku  $x$  z dané množiny je opět  $x$ . Pro násobení (a dělení) je neutrálním prvkem tzv. *jednotkový prvek* - je roven 1. Pro sčítání (a odečítání) je to tzv. *nulový prvek* - je roven 0. Občas se pro neutrální prvek používá označení *identita*.

### 3.3.2 Porovnávání

- $>$  a  $<$
- $\geq$  a  $\leq$
- $\gg$  a  $\ll$  je *mnohem (řádově) větší* (resp. *menší*) než

### 3.3.3 Základní operace

Můžeme sčítat, odečítat, násobit a dělit. To je novinka :/

### 3.3.4 Vlastnosti sčítání a násobení

**Komutativnost** říká že nezáleží na pořadí prvků:

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \qquad (33)$$

**Asociativita** říká, že nezáleží na pořadí v jakém provedeme operace (na upřednostnění se používají závorky):

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad (34)$$

**Distributivnost** říká, že můžeme jednu operaci distribuovat přes jinou. Pro nás násobení a sčítání.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (35)$$

### 3.3.5 Součet a součin většího množství čísel

### 3.3.6 Mocniny a odmocniny

Zápis  $a^k$  kde  $a$  se označuje jako *základ* a  $k$  jako *exponent*.

$$a^0 = 1 \quad \text{Platí pro} \quad (36)$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ činitelů}} \quad a \neq 0 \quad (37)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \quad (38)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N} \quad (39)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff (b^n = a \wedge b \geq 0) \quad a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (40)$$

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}, \sqrt{a^2} = |a| \quad (41)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a \neq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (42)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (43)$$

$$(44)$$

Definuje se i mocnina kladného celého čísla s iracionálním exponentem, ale mimo SŠ.

### Operace s mocninami a odmocninami

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (45)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (46)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (47)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (48)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (49)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} \quad (50)$$

## 3.4 Komplexní čísla

### 3.4.1 Zápis

#### Algebraický tvar

$$a = a_1 + a_2 i \quad a_1, a_2 \in R \quad i^2 = -1 \quad (51)$$

- $a_1$  - reálná část
- $a_2$  - imaginární část
- $i$  imaginární jednotka (také možné značení  $i$  nebo  $\imath$  v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X)

#### Goniometrický tvar

$$a = |a| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (52)$$

- $|a|$  - absolutní hodnota - tj. vzdálenost od středu  $0 + i0$
- $\alpha$  - argument je velikost orientovaného úhlu

**Exponenciální tvar** je asi mimo látku SŠ.

$$a = |a| \cdot e^{i\alpha} \quad , \text{ kde: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (53)$$

**Gaussova rovina** Je rovina komplexních čísel, kde je osa  $x$  osa reálných čísel (tj. *reálná osa*) a osa  $y$  je osa ryze imaginárních čísel (tj. *imaginární osa*).

#### Vlastnosti:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \sin \alpha = \frac{a_2}{|a|} \quad (54)$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^{4k+m} = i^m \quad , \text{ kde: } (k, m \in \mathbb{N}_0) \quad (55)$$



### 3.5 Zvláštní případy komplexních čísel

- číslo *reálné*:  $a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 = 0$
- číslo *imaginární*:  $a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \neq 0$
- číslo *ryze imaginární*:  $a_1 = 0 \wedge a_2 \neq 0$
- *komplexní jednotka*:  $|a| = 1$  (v goniometrickém tvaru  $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , v exponenciálním tvaru  $a = e^{i\alpha}$ ). Obrazy komplexních čísel leží na kružnici s poloměrem 1 a středem v počátku. Je to komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.
- *komplexní čísla sdružená* se zapisují  $a, \bar{a}$  (nebo také  $a^*$ ). Komplexní číslo sdružené má stejnou reálnou část a opačné znaménko u imaginární části. Geometricky se na to můžeme dívat, jako číslo osově souměrné podle reálné osy.

$$a = a_1 + a_2 i \qquad \bar{a} = a^* = a_1 - a_2 i \qquad (56)$$

Nějaké random zajímavé vlastnosti:

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{a})} &= a & \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} & |\bar{a}| &= |a| \end{aligned}$$

- *Komplexní čísla opačná* se značí  $a, -a$ . Opačné hodnoty reálné i imaginární části. (?Geometricky je to číslo, které je středově souměrné přes střed Gaussovy roviny?).

$$a = a_1 + a_2 i \qquad -a = -a_1 - a_2 i \qquad (57)$$

### 3.6 Operace s komplexními čísly

$$a = a_1 + a_2 i = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |a|e^{i\alpha} \qquad (58)$$

$$b = b_1 + b_2 i = |b|(\cos \beta + i \sin \beta) = |b|e^{i\beta} \qquad (59)$$

#### 3.6.1 Rovnost

$$a = b \iff (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2) \qquad (60)$$

### 3.6.2 Součet a rozdíl

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2)i \quad (61)$$

### Součet a rozdíl čísel sdružených

$$a + \bar{a} = 2a_1 \qquad a - \bar{a} = 2a_2i \quad (62)$$

### 3.6.3 Součin

$$a = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i = \quad (63)$$

$$= |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = \quad (64)$$

$$= |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\alpha + \beta)} \quad (65)$$

### Součin čísel sdružených

$$a \cdot \bar{a} = a_1^2 + a_2^2 = |a|^2 \quad (66)$$

### 3.6.4 Podíl

Pokud platí  $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \bar{b}}{b \cdot \bar{b}} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{b_1^2 + b_2^2} = \quad (67)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = \quad (68)$$

$$= \frac{|a|}{|b|} \cdot e^{i(\alpha - \beta)} \quad (69)$$

**Podíl podíl sdružených čísel** jsem spočítal sám tak opatrně s tím. Platí  $a \neq 0$ . Ze vzorců pro obecný podíl logicky vyplývá že podíl čísel sdružených

bude mít vždy velikost *komplexní jednotky*.

$$\frac{a}{\bar{a}} = \frac{a \cdot \overline{(\bar{a})}}{\bar{a} \cdot \overline{(\bar{a})}} = \frac{(a_1^2 - a_2^2) + 2a_1a_2i}{a_1^2 + a_2^2} \quad (70)$$

$$= \frac{|a|}{|\bar{a}|} \cdot [\cos(\alpha + \alpha) + i \sin(\alpha + \alpha)] = 1 \cdot [\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)] = \quad (71)$$

$$= \frac{|a|}{|\bar{a}|} \cdot e^{i(\alpha + \alpha)} = 1 \cdot e^{i2\alpha} \quad (72)$$

### 3.7 Mocnina komplexního čísla

Platí  $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = [|a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = |a|^n (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) \quad (73)$$

#### 3.7.1 Moivreova věta

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) \quad n \in \mathbb{N} \quad (74)$$

Tato Moivreova věta platí dokonce i pro  $n \in \mathbb{Z}$

### 3.8 „Odmocnina“ komplexního čísla

Máme rovnici:

$$x^n = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad |a| \neq 0 \quad (75)$$

Ta má v oboru komplexních čísel právě  $n$  různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \quad (76)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (77)$$

Obrazy čísel  $x_k$  jsou vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a s poloměrem  $\sqrt[n]{|a|}$

### 3.9 Meta

Můžu pro všechny obory čísel psát  $X$  nebo  $\mathbb{X}$  ale jsem líný, takže budu používat jen to druhé, bo je to víc sexy.

### 3.9.1 Zdroje

- Tabulky
- [wiki: Přirozená čísla](#)
- [wiki: Celá čísla](#)
- [wiki: Racionální čísla](#)
- [wiki: Iracionální čísla](#)
- [wiki: komplexně sdružené číslo](#)
- [wiki: Neutrální prvky](#)

### 3.9.2 Zadání/Pojmy

Obor čísel přirozených, celých, racionálních, reálných, čísla iracionální, znázornění čísel na číselné ose, základní operace v číselných oborech a jejich vlastnosti, uzavřenost, asociativnost, neutrální prvky, komutativnost, distributivnost, mocniny, odmocniny a operace s nimi, vztahy mezi reálnými čísly, absolutní hodnota reálného čísla, její geometrická interpretace, zavedení komplexních čísel, množina uspořádaných dvojic reálných čísel, operace sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel, vztah rovnosti, imaginární jednotka, čísla komplexně sdružená, absolutní hodnota a její geometrický význam, Gaussova rovina, algebraický a goniometrický tvar, Moivreova věta, násobení, dělení, umocňování a odmocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

## 4 Algebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy

4

## 5 Vlastnosti algebraických funkcí a posloupností

5

## **6 Grafy elementárních algebraických funkcí**

6

## **7 Limita a spojitost funkce**

7

### **7.1 Meta**

#### **7.1.1 Zdroje**

#### **7.1.2 Zadání/Pojmy**

Okolí bodu, přírůstek argumentu, přírůstek funkce, funkce spojitá v bodě, funkce spojitá v uzavřeném intervalu. Limita funkce, pravidla pro počítání limit, nevlastní limity a limity v nevlastních bodech, důležité limity. Asymptoty grafu funkce.

## **8 Nealgebraické funkce**

8

## **9 Goniometrie a trigonometrie**

9

## **10 Nealgebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy**

10

## 11 Kombinatorika

### 11.1 Faktoriály

Zapisuje se jako  $n!$  (čte se jako  $n$  faktoriál a je definován jen pro celá nezáporná čísla  $n \in \mathbb{N}_0$  a je definován jako:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad n \in \mathbb{N} \quad (78)$$

$$0! = 1 \quad n = 0 \quad (79)$$

### 11.2 Kombinační čísla

Čte se jako  $n$  nad  $k$ . Platí pro celá kladná čísla, kde  $n$  je větší nebo rovno  $k$ . Definováno jako

$$n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \leq n \quad (80)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (81)$$

**Pár zajímavých vlastností**

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= 1 & \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n}{n} &= 1 & \binom{n}{1} &= 1 \\ \binom{n}{n-k} &= \binom{n}{k} & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Kombinační čísla lze uspořádat do *Pascalova trojúhelníku*, tak že  $n$  se zvětšuje s řádkem a  $k$  jsou jednotlivé sloupce. Viz tabulky.

### 11.2.1 Binomická věta

Kombinační čísla  $\binom{n}{k}$  se někdy nazývají jako *binomické koeficienty*, např. v L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu se kombinatorická čísla vytváří pomocí příkazu *binom*.

$$a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \quad (82)$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \quad (83)$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \quad (84)$$

### 11.3 Množinový pohled

Kombinatorika řeší, jak vybrat  $k$ -tici z  $n$ -prvkové množiny. Nebo vybírání  $k$ -prvkovou podmnožinu  $n$ -prvkové množiny. Lacicky řečeno vybíráme  $k$  z  $n$  věcí.

Můžeme je dále dělit podle toho, jestli záleží na pořadí vybraných prvků (tj. je to *uspořádaná*  $k$ -tice) nebo ne (tj. *neuspořádaná*). Nebo podle toho, jestli se prvky mohou vybrat vícekrát, respektive pouze jednou (tj. *s opakováním*, respektive *bez opakování*).

Základním pojmem je pojem ( $k$ -prvková) *skupina*, nazývaná je také *k-tice*.

### 11.4 Variace

Uspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků.

#### 11.4.1 Variace bez opakování

Uspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Platí-li  $k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$  je počet těchto variací:

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (85)$$

### 11.4.2 Variace s opakováním

Uspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše  $k$ -krát. Platí-li  $k, n \in \mathbb{N}$  je počet těchto variací:

$$V'(k, n) = n^k \quad (86)$$

## 11.5 Permutace

U permutací, je vždy využit každý prvek z  $n$ -prvkové množiny.

### 11.5.1 Permutace bez opakování

Uspořádaná  $n$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. (To znamená, že je to vlastně speciální případ variace bez opakování, kde  $k = n$ ). Platí-li  $n \in \mathbb{N}$  je počet těchto permutací:

$$P(n) = n! \quad (87)$$

### 11.5.2 Permutace s opakováním

Uspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní alespoň jednou. To znamená, že  $k > n$ . Vyskytuje-li se tam  $i$ -tý prvek  $k_i$ -krát a platí-li:  $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N} \wedge k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n = k \wedge n \in \mathbb{N}$ , poté je počet permutací s opakováním:

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \quad (88)$$

## 11.6 Kombinace

Neuspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků.

### 11.6.1 Kombinace bez opakování

Neuspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. (tj.  $k$ -prvková podmnožina  $n$ -prvkové množiny). Platí-li  $k, n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$  je počet těchto kombinací:

$$K(k, n) = \binom{n}{k} \quad (89)$$



### 11.6.2 Kombinace s opakováním

Neuspořádaná  $k$ -tice sestavená z  $n$ -prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše  $k$ -krát. Platí-li  $k, n \in \mathbb{N}$  je počet těchto kombinací:

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k} \quad (90)$$

## 11.7 Pravidla

### 11.7.1 Součtu

Říká, že máme-li  $a$  způsobů, jak něco udělat. A  $b$  způsobů, jak udělat něco jiného. A není možné provést  $a$  i  $b$ , takže je nutné si jeden z nich vybrat. Poté je počet možných věcí, které můžeme provést roven  $a + b$ .

**Příklad:** Chceme-li vybrat 1 míček z množiny 5 červených míčků máme 5 možností. Chceme-li vybrat jeden míček z množiny 7 modrých míčků máme 7 možností. Spojíme-li tyto množiny je počet možností, jak vybrat jeden míček  $12 = 5 + 7$ .

### 11.7.2 Součinu

Existují-li 2 nezávislé jevy (př. hod mincí a hod kostkou). Každý má nějaký počet možných výsledků. Můžeme provést oba děje. Pak počet možných výsledků (tj. kombinací 2 původních) je roven počtu možností prvního jevu krát počet možností druhého jevu.

**Příklad 1:** Máme-li například červenou a modrou kostku a vrhneme je. Je počet možností, které mohou padnout, roven počtu možností na jedné kostce krát počtu možností na druhé kostce. Je to proto, že ke každé možnosti na modré kostce můžeme přiřadit každou možnost na druhé kostce. Je-li jedna kostka 6-stěnná a druhá 20-stěnná je počet možných kombinací  $120 = 6 \cdot 20$

**Příklad 2:** Vybíráme 1 muže ze skupiny 8 mužů. Vybíráme 1 ženu ze skupiny 4 žen. Nyní chceme zjistit počet možných dvojic muž žena. Každému muži můžeme jakoby přiřadit každou dívku, výsledek je tedy:  $32 = 8 \cdot 4$

## 11.8 Meta

### 11.8.1 Zdroje

- Tabulky!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinatorika>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Variace\\_\(kombinatorika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Variace_(kombinatorika))
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kombinace>
- <https://matematika.cz/kombinatorika>
- <http://www.gymklob.info/matematika/kombinatorika/uvod.htm>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo\\_sou%C4%8Dtu](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo_sou%C4%8Dtu)

### 11.8.2 Zadání/ pojmy

Základní kombinatorická pravidla (součtu a součinu), pojem faktoriálu čísla, skupiny v kombinatorice, variace, permutace, variace s opakováním, kombinace, kombinační čísla a jejich vlastnosti, binomická věta.

## 12 Pravděpodobnost

Pravděpodobnost nějakého jevu je číslo, které je mírou (poměrem) očekávatelnosti výskytu tohoto jevu. Tj. jako moc můžeme daný jev očekávat. v průběhu času, ke znázornění využívám příklad 6-stěnné kostky, ve které je každá stěna označena různým číslem od 1 do 6. A která vždy spadne na nějakou stěnu.

### 12.1 Náhodné pokusy

*Náhodný pokus* je pokus, který může mít za stejných podmínek různé výsledky ovlivněné náhodou.

**Množina všech možných výsledků pokusu** označuje se  $\Omega$ , tyto výsledky se navzájem vylučují a jeden z nich vždy nastane. Příklad: padne číslo od 1 do 6

**Počet možných výsledků pokusu** se značí  $m$ . Př.: počet stěn kostky, tedy 6.

**Jednotlivé výsledky pokusu** se značí  $\omega_i$ , kde  $\omega_i \in \Omega$  a  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$   
Př.: Padne 5, nebo padne 3.

**Pravděpodobnost výsledku** se pro  $\omega_i$  značí  $p(\omega_i)$ . Platí:

$$0 \leq p(\omega_i) \leq 1 \quad (91)$$

$$\sum_{i=1}^m p(\omega_i) = 1 \quad (92)$$

$p(\omega_i)$  se často zapisuje ve tvaru procenta. Jsou-li pravděpodobnosti všech výsledků stejné, pak platí:

$$p(\omega_i) = \frac{1}{m} \quad (93)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (94)$$

Př.: V případě necinknuté kostky předpokládáme stejné pravděpodobnosti, tedy pravděpodobnost, že padne 5 je  $\frac{1}{6}$  a pravděpodobnost, že padne 4 je také  $\frac{1}{6}$ .

Kdyby byla kostka cinknutá, aby padala 6 více platí např:  $p(6) = \frac{1}{4}$ .

## 12.2 Jevy a jejich pravděpodobnost

**Jev** - značí se  $A, B \dots$  je to nějaké podmnožina množina  $\Omega$ . Př.: padne 6, nebo také jev padne číslo sudé, nebo jev padne číslo menší než 4...

**Výsledek příznivý jevu** - značí se  $\omega \in A$  (čte se výsledek  $\omega$  příznivý jevu  $A$ ). Př.: pro jev padne sudé číslo jsou příznivými výsledky padne 2, padne 4 nebo padne 6.

**Počet výsledků příznivých jevu** - značí se  $m(A)$ . Př.: pro jev padne liché číslo je počet výsledků příznivých jevu 3.

**Pravděpodobnost jevu** - značí se  $P(A)$  pro jev  $A$ . Je to součet pravděpodobností všech výsledků příznivých jevu  $A$ . Platí, že  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Jsou-li všechny výsledky pokusu stejně pravděpodobné, pak:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} \quad (95)$$

Př.: pravděpodobnost, že padne sudé číslo na necinknuté kostce je  $\frac{1}{2}$ , protože:

$$P(sude) = \frac{m(sude)}{m} = \frac{3}{6}$$

**Nemožný jev** - značí se  $\emptyset$  a platí  $P(\emptyset) = 0$ . Př.: jev, že padne 7.

**Jistý jev** - značí se  $\Omega$  a platí  $P(\Omega) = 1$ . Př.: jev, že padne kladné celé číslo.

**Podjev** značí se  $B \subset A$  a říká, že jev  $B$  je podjevem jevu  $A$ . Platí  $P(B) \leq P(A)$ . Př.: jev padne číslo větší než 4, je podjevem jevu padne číslo větší než 2.

**Opačný jev**  $A'$  je opačný k jevu  $A$ . Př.: jev padne sudé číslo je opačný k jevu padne liché číslo (platí i obráceně).

$$A' = \Omega \setminus A \quad (96)$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad (97)$$

**Průnik jevů** - značí se  $A \cap B$  a označuje množinu jevů, které jsou podmnožinou jak množiny  $A$ , tak množiny  $B$ . O pravděpodobnostech platí:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \wedge P(A \cap B) \leq P(B)$$

Př.: jev  $A$  padne číslo větší než 3, jev  $B$  padne sudé číslo.  $C = A \cap B$ , pak jev  $C$  obsahuje možné výsledky 4 a 6.

**Navzájem se vylučující jevy** taktéž *Neslučitelné jevy*. Platí pro ně  $A \cap B = \emptyset$ . Př.: padne číslo menší než 2 a padne číslo sudé.

**Sjednocení jevů** se značí  $A \cup B$ . O pravděpodobnosti platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (98)$$

Jsou-li jevy  $A, B$  navzájem nezávislé, pak (vyplývá z definice vylučujících se jevů):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (99)$$

Př.: padne sudé číslo a jev padne číslo větší než 2. Máme 3 sudá čísla a 4 čísla větší než 2. Čísla 4 a 6 se tam ale vyskytují dvakrát (protože jsou v průniku jevů).

Př. vylučující se: Padne číslo větší než 5 a padne číslo menší než 3.

**Nezávislé jevy** jsou jevy, které se vzájemně neovlivňují. (Je to obdobné pravidlu součinu v kombinatorice, viz [11.7.2](#))

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (100)$$

Př.: Jev  $A$ : hodím v prvním hodě na kostce 5. Jev  $B$ : hodím v druhém hodě sudé číslo. To, co hodím na první hod, nemá vliv na hod druhý, takže celková pravděpodobnost, že nastane obojí je:  $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$ .

## 12.3 Opakování náhodného pokusu

Náhodný pokus je  $n$ -krát zopakován, jednotlivá opakování jsou na sobě nezávislá. Pravděpodobnost, že přitom  $k$ -krát nastane jev  $A$ , který má pravděpodobnost  $P(A) = p$  zjistíme vzorcem (pro nezáporné celé  $k$ , menší než  $n$ :  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ )

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (101)$$

Vyplývá z definice nezávislých jevů a z kombinace nezávislých jevů (viz [11.6.1](#)). Nebo přímo z binomické věty (viz [11.2.1](#))

### 12.3.1 Bernoulliho schéma

Nazývané také *binomické rozdělení*. Popisuje četnost výskytu náhodného jevu v pokusech, ve kterých má vždy stejnou pravděpodobnost. Značení, kde  $n$  je počet pokusů a  $p$  je pravděpodobnost jevu:

$$B(n, p) \qquad Bi(n, p) \quad (102)$$

Rovnice pro výpočet pravděpodobnosti, že jev s pravděpodobností  $p$  nastane  $k$ -krát v  $n$  pokusech (101)

## 12.4 Meta

### 12.4.1 Zdroje

- Tabulky!!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravd%C4%9Bpodobnost>
- <https://matematika.cz/pravdepodobnost>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/N%C3%A1hodn%C3%BD\\_jev](https://cs.wikipedia.org/wiki/N%C3%A1hodn%C3%BD_jev)
- [https://sk.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho\\_sch%C3%A9ma](https://sk.wikipedia.org/wiki/Bernoulliho_sch%C3%A9ma)

### 12.4.2 Pojmy/ zadání

Náhodné pokusy, množina všech možných výsledků pokusu, jevy v množinovém pojetí a operace s jevy, jistý jev, nemožný jev, klasická definice pravděpodobnosti, základní vlastnosti pravděpodobnosti jevů, pravděpodobnost opačných jevů, pravděpodobnost sjednocení jevů pro jevy neslučitelné i slučitelné, nezávislé jevy, pravděpodobnost průniku nezávislých jevů, opakované nezávislé pokusy, binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma ) a jeho užití.

## 13 Statistika

- *Statistický soubor* - konečná neprázdná množina objektů nazývaných *statistické jednotky*
- *Statistická jednotka* = prvek statistického souboru. Předpokládáme očíslování  $1, 2, \dots, n$
- *Rozsah souboru* - počet statistických jednotek ve statistickém souboru, označení  $n$
- *Znak* - vyšetřovaná vlastnost statistických jednotek, značení  $x$ , např.: pohlaví, měsíční plat ...

- *Hodnota znaku* - znak  $x$  nabývá hodnot:  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ , kde  $r \leq n$   
- tyto hodnoty jsou navzájem neslučitelné a pro každou statistickou jednotku musí jedna z těchto hodnot nastat, např.: muž/žena, 20 000Kč ...  
Označení hodnoty znaku  $x$  pro statistickou jednotku  $i$ :  $x_i$
- *Kvantitativní znak* - jeho hodnoty se liší velikostí, např.: výška v cm, nebo měsíční plat zaměstnance ...
- *Kvalitativní znak* - jeho hodnoty se liší kvalitou, např.: pohlaví, barva vlasů ...
- *Četnost hodnoty znaku  $x_j^*$*  - počet statistických jednotek pro, které znak  $x$  nabývá hodnoty  $x_j^*$  se značí  $n_j$ . Specifikuje se také jako absolutní. Platí:

$$\sum_{j=1}^r n_j = n \quad (103)$$

- *Relativní četnost znaku  $x_j^*$*  - může se udávat jako desetinné číslo, nebo častěji v procentuálním tvaru. Udává podíl četnosti tohoto znaku a rozsah souboru (tj. součet četností všech hodnot znaku (tj. počet všech prvků = rozsah souboru)). Značí se pomocí  $\nu$  (v češtině se čte jako 'ný') s indexem odpovídajícím indexu absolutní četnosti.

$$\nu_j = \frac{n_j}{n} \quad \sum_{j=1}^t \nu_j = 1 \quad (104)$$

- *Kumulativní četnost* - jen tak pro zajímavost. Může být relativní nebo absolutní. Seřadíme nějak hodnoty znaku, a při výpisu do tabulky, vždy sečteme s předchozími, tak aby u posledního vyšlo 1 pro relativní respektive  $n$  pro absolutní.

### 13.1 Rozdělení četnosti

Také nazývané jako *rozložení četnosti*. Zobrazujeme ve formě tabulky nebo grafu. Například známky žáků ve škole. Příklad viz tabulku 1.

Známka	Počet žáků
1	5
2	10
3	5
4	4
5	1

Tabulka 1: Tabulka známek žáků

### 13.1.1 Skupinové rozložení četností

Rozdělíme soubor na nějaké podskupiny na základě jiného znaku. Například na kluky a dívky nebo podle ročníků, podle předmětů ...Příklad viz tabulku 2.

Známka	chlapci	dívky
1	4	1
2	3	7
3	2	3
4	2	2
5	1	0

Tabulka 2: Tabulka známek chlapců a dívek

## 13.2 Grafické znázornění četností

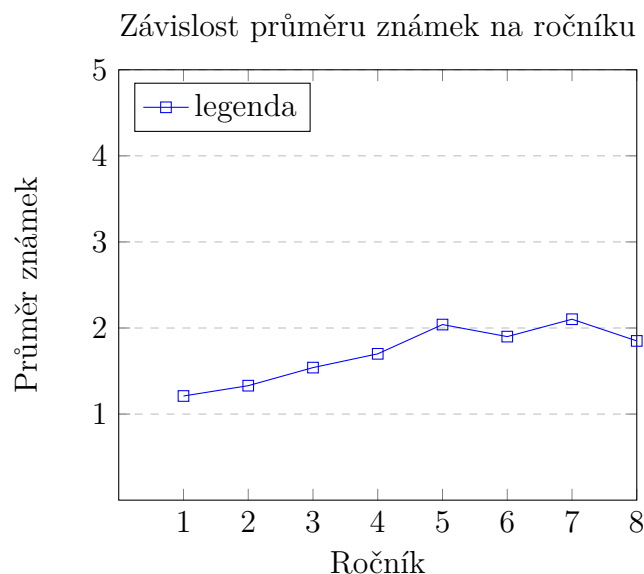
### 13.2.1 Tabulka

V prvním řádku jsou hodnoty znaku  $x$  a v druhém odpovídající četnosti. Příklady tabulek 1 a 2. (U nich je to ale položené obráceně, místo řádků jsou to sloupce, tj. první sloupec je hodnota znaku a druhý je jeho četnost.)

### 13.2.2 Spojnicový diagram

Nazýván také *polygon četností*. Je to lomená čára spojující body, jejichž první souřadnice jsou hodnoty znaku  $x$  a druhé souřadnice jsou odpovídající četnosti. Pouze pro kvantitativní znaky. Viz obrázek 1





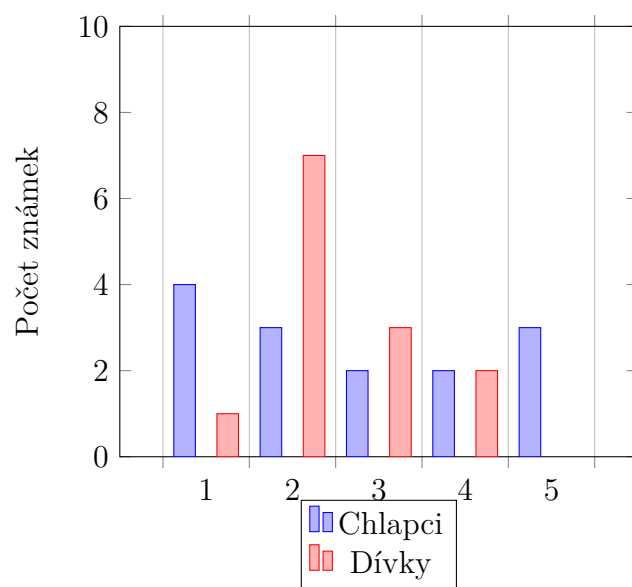
Obrázek 1: Příklad spojnicového grafu

### 13.2.3 Sloupkový diagram

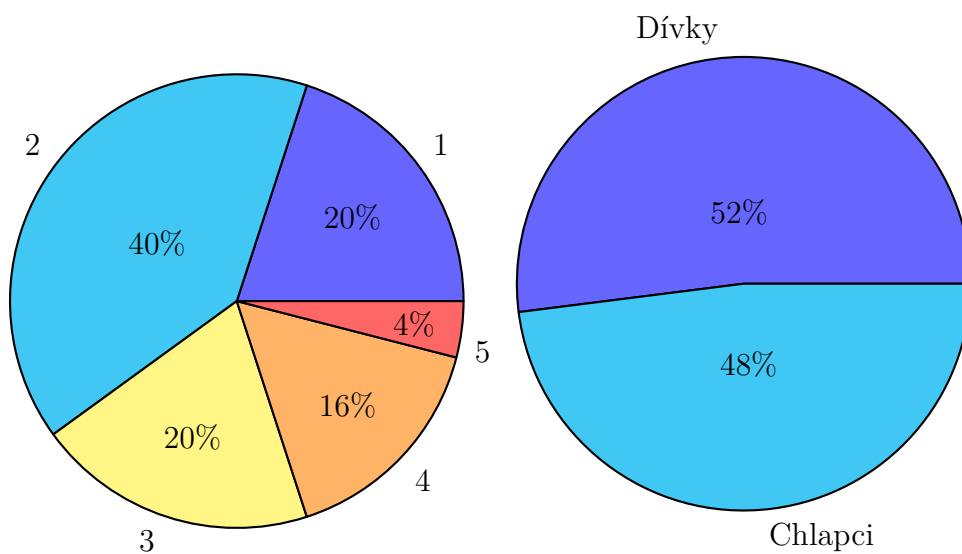
Nazývaný také *histogram*. Základny sloupků znázorňují jednotlivé hodnoty znaku  $x$  a (u kvantitativního znaku popř. intervaly, do nichž jsou tyto hodnoty sdruženy), výšky sloupců znázorňují četnosti odpovídající danému znaku. (zejména pro kvantitativní znaky). Viz obrázek 2 (využívá hodnoty z předchozích tabulek 1 a 2).

### 13.2.4 Kruhový diagram

Jednotlivé hodnoty znaku  $x$  jsou znázorněny kruhovými výsečemi, jejichž obsahy (středové úhly) jsou přímo úměrné odpovídajícím četnostem. (Zejména pro kvalitativní znaky) Viz obrázek 3 (využívá hodnoty z předchozích tabulek 1 a 2).



Obrázek 2: Příklad sloupkového diagramu



Obrázek 3: Kruhový diagram

### 13.3 Charakteristiky polohy kvantitativního znaku

- *Aritmetický průměr* značí se  $\bar{x}$  (v  $\text{\TeX}$ u druhá možnost  $\overline{x}$ ) nebo také  $p_a$ . Sečteme všechny naměřené hodnoty a vydělíme jejich počtem.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r x_j^* n_j \quad (105)$$

- *Vážený aritmetický průměr* - jednoduchá obdoba aritmetického průměru, kdy mají různé prvky různou váhu. Hodnotu znaku prvně vynásobíme váhou a poté všechny sečteme a vydělíme celkovou váhou. Př.: Počítání průměru známek, kde mají různé písemky (/ testy / zkoušení) různou váhu.
- *Geometrický průměr* - všechny hodnoty znaku vynásobíme a poté odmocníme počtem prvků souboru. Je vždy menší nebo roven aritmetickému průměru. Značí se  $p_g$  nebo  $\bar{x}_G$  nebo:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad (106)$$

- *Harmonický průměr* - je definován jako podíl počtu (rozsah souboru) a součtu jejich převrácených hodnot. To znamená totéž, co převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot. Je vždy menší nebo roven geometrickému průměru. Zapisuje  $\bar{x}_H$ :

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (107)$$

- *Kvadratický průměr* - je to odmocnina aritmetického průměru druhých mocnin. Asi mimo SŠ, ale využívá se např. při výpočtu rozptylu viz rovnice (110).

$$K = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \quad (108)$$

- *Modus* - hodnota znaku s nejvyšší četností, značí se  $Mod(x)$

- *Medián* - značí se  $Med(x)$  prostřední z hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$  znaku  $x$  uspořádaných podle velikosti (pro liché  $n$ )  
- pro sudé  $n$  je to aritmetický průměr dvou prostředních hodnot (znaku  $x$  uspořádaných podle velikosti)
- *První kvartil* - značí se  $Q_1$ , medián první poloviny hodnot (pro liché  $n$  je poslední hodnotou  $Med(x)$ ) seřazených dle velikosti
- *Třetí kvartil* - značí se  $Q_2$ , medián druhé poloviny hodnot (pro liché  $n$  je první hodnotou  $Med(x)$ ) seřazených dle velikosti

### 13.3.1 Vztahy mezi průměry

Označíme-li si  $A$  jako aritmetický,  $G$  jako geometrický,  $H$  jako harmonický a  $K$  jako kvadratický, pak platí (pokud jsou to průměry stejného souboru):

$$K \geq A \geq G \geq H \quad (109)$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Nejdůležitější je *AG nerovnost* mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

## 13.4 Charakteristiky variability kvantitativního znaku

- *Rozptyl* - také nazýván *střední kvadratická odchylka* a *variance*. Pro všechny naměřené hodnoty se spočítá jejich vzdálenost od aritmetického průměru. Ta se stane stranou čtverce. Variace je průměrem obsahu těchto čtverců. Čím větší je rozptyl naměřených hodnot, tím je hodnota variace větší. Značí se  $\sigma^2$ ,  $s_x^2$  nebo  $var(x)$ .

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r \left( x_j^* - \bar{x} \right)^2 \cdot n_j = \quad (110)$$

$$= \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right) - \bar{x}^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r x_j^{*2} n_j \right) - \bar{x}^2 \quad (111)$$

- *Směrodatná odchylka* - značí se  $s_x$  nebo  $\sigma$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \quad (112)$$

- *Variační koeficient* - má smysl jen tehdy jsou li všechny hodnoty znaku nezáporné.

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (113)$$

- *Mezikvartilová odchylka*

$$Q(x) = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1) \quad (114)$$

## 13.5 Korelace

Ve statistickém souboru vyšetřujeme uspořádanou dvojici kvantitativních znaků  $(x, y)$ . Koeficient korelace  $r_{xy}$  se potom vypočítá:

$$\text{Výsledek šetření: } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n) \quad (115)$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x \cdot s_y} = \frac{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} \quad (116)$$

Koeficient korelace je vždy číslo z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ . Mezní hodnoty  $r_{xy} = 1$  (respektive  $r_{xy} = -1$ ) nabývá tehdy, když s rostoucí hodnotou znaku  $x$  roste (respektive klesá) hodnota znaku  $y$ . A to podle vzorce  $y_i = a + bx_i$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $b > 0$  (respektive  $b < 0$ ).

## 13.6 Meta

### 13.6.1 Zdroje

- Tabulky!!
- <https://matematika.cz/rozlozeni-cetnosti>
- <https://matematika.cz/zaklady-statistiky>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Sm%C4%9Brodavn%C3%A1\\_odchylka](https://cs.wikipedia.org/wiki/Sm%C4%9Brodavn%C3%A1_odchylka)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%BD\\_pr%C5%AFm%C4%9Br](https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%BD\\_pr%C5%AFm%C4%9Br](https://cs.wikipedia.org/wiki/Harmonick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br)

- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadratick%C3%BD\\_pr%C5%AFm%C4%9Br](https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadratick%C3%BD_pr%C5%AFm%C4%9Br)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti\\_mezi\\_pr%C5%AFm%C4%9Br](https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti_mezi_pr%C5%AFm%C4%9Br)

### 13.6.2 Pojmy/ zadání

Statistický soubor, statistické jednotky, statistické znaky, četnost a relativní četnost, rozdělení četností a skupinové rozdělení četností, grafické znázornění rozdělení četností ( spojnicový diagram, histogram, kruhový diagram ). Charakteristiky znaku statistického souboru. Charakteristiky polohy, aritmetický průměr, vážený aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, modus, medián. Charakteristiky variability, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient.

## 14 Posloupnosti a řady

### 14.1 Posloupnosti

Posloupnost je konečná nebo nekonečná řada objektů, které se mohou opakovat. Záleží v ní na pořadí, takže na konečnou posloupnost lze nahlížet jako na uspořádanou k-tici. Můžeme se setkat s následujícími značeními, v případě, že nemůže dojít k záměně s něčím jiným, může se značit i pouze jako  $a_n$ . Čteme je jako 'posloupnost  $a_n$  pro  $n$  jdoucí od jedné do nekonečna':

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad [a_n]_{n=1}^{\infty} \quad (a_n) \quad (117)$$

Posloupnost je funkce, která má jako definiční obor množinu přirozených čísel  $\mathbb{N}$  (nebo podmnožinu přirozených čísel, pokud je posloupnost konečná). Oborem hodnot je libovolná množina (v SŠ předpokládáme reálná čísla  $\mathbb{R}$ )

**Nekonečná posloupnost** je zobrazením  $\mathbb{N}$  do  $\mathbb{R}$ . Značí se:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad a_1, a_2, \dots, a_k \quad (118)$$

**Konečná posloupnost** - zobrazení množiny  $\{n, k \in \mathbb{N}; n \leq k\} = \{1, 2, \dots, k\}$  do  $\mathbb{R}$ . Zapisuje se:

$$(a_n)_{n=1}^k \qquad a_1, a_2, \dots, a_k \qquad (119)$$

Obraz čísla  $n \in \mathbb{N}$  se značí  $a_n$  (respektive  $b_n, c_n, \dots$ ).  $N$ -tý člen posloupnosti se značí  $a_n$ .

### 14.1.1 Určení posloupnosti

**Vzorcem pro n-tý člen** - Dosazením  $n$  získáme hodnotu členu posloupnosti

$$a_n = -2n \qquad (120)$$

**Rekurentně** - člen je určen podle předchozího (popřípadě předchozích) členů.

$$b_{n+1} = b_n + 10 \qquad d_{n+2} = d_n + d_{n+1} \qquad (121)$$

**Výčtem** - napíšeme všechny členy (nejsem si jistej, jaká přesně je konvence)

$$(c_k) = (2, 4, 6, 8, \dots, 2048) \qquad (c_n) = (3, 6, 9, 12, \dots) \qquad (122)$$

### 14.1.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je

- *Rostoucí* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r < a_s \qquad (123)$$

- *Klesající* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r > a_s \qquad (124)$$

- *Neklesající* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r \leq a_s \qquad (125)$$

- *Nerostoucí* právě tehdy, když:

$$r, s \in \mathbb{R}, r < s \Rightarrow a_r \geq a_s \quad (126)$$

- *Monotónní* právě tehdy, když je neklesající nebo nerostoucí
- *Zdola omezená* existuje-li  $d \in \mathbb{R}$  tak, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n \geq d$ .  
Matematický zápis:

$$\exists d \in \mathbb{R}; (\forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq d) \quad (127)$$

- *Shora omezená* existuje-li  $c \in \mathbb{R}$  tak, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n \leq c$ .  
Matematický zápis:

$$\exists c \in \mathbb{R} | (\forall n \in \mathbb{N} | a_n \leq c) \quad (128)$$

- *Omezená* právě tehdy, když je zároveň omezená ze shora i ze zdola.

**Graf** je nespojitý, protože definiční obor jsou jen přirozená čísla. Je to množina bodů, kde souřadnice  $x$  je rovna  $n$  a souřadnice  $y$  je rovna příslušnému  $a_n$ .

### 14.1.3 Aritmetická posloupnost

Je jednoduchá posloupnost, kde je mezi 2 následujícími členy vždy stejný rozdíl. Ten se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti a značí se  $d$ . Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je *aritmetická*, když:

$$(\exists d \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} = a_n + d) \quad (129)$$

Pro aritmetickou posloupnost platí, že každý člen kromě prvního je aritmetickým průměrem obou sousedních členů. Vzorec pro  $n$ -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (130)$$

Součet prvních  $n$  členů:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad (131)$$

Vztah mezi dvěma členy:

$$a_s = a_r + (s - r) \cdot d \quad r, s \in \mathbb{N} \quad (132)$$



#### 14.1.4 Geometrická posloupnost

Člen je vždy nalezen vynásobením předchozího stále stejným číslem  $q$ , které se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti. Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je *geometrická*, když:

$$(\exists q \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) (a_{n+1} = a_n \cdot q) \quad (133)$$

Vzorec pro  $n$ -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (134)$$

Součet prvních  $n$  členů:

$$s_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \Leftarrow q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \Leftarrow q = 1 \end{cases} \quad (135)$$

Vztah mezi dvěma členy:

$$(\forall r, s \in \mathbb{N}) (a_s = a_r \cdot q^{s-r}) \quad (136)$$

#### 14.1.5 Vztah aritmetické a geometrické posloupnosti

Je-li  $a_n$  aritmetická posloupnost, tak je posloupnost  $b^{a_n}$  posloupnost geometrická, platí pro libovolný základ  $b \geq 0$ .

Je-li  $g_n$  geometrická posloupnost s kladnými členy, tak je posloupnost  $\log_b g_n$  aritmetická, platí pro libovolný základ  $b > 0, b \neq 1$ .

#### 14.1.6 Využití aritmetické a geometrické posloupnosti

#### 14.1.7 Limita posloupnosti (vlastní)

Číslo  $a \in \mathbb{R}$  se nazývá *limita* (popř. *vlastní limita*) posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , jestliže ke každému reálnému číslu  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna přirozená čísla  $n \geq n_0$  platí  $|a_n - a| < \varepsilon$ . To jest, když (matematicky):

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0) (\forall |a_n - a| < \varepsilon) \quad (137)$$

Lidskými slovy: limita posloupnosti představuje číslo, ke kterému se daná posloupnost v nekonečnu přibližuje. Zápis limity (čteme: 'limita  $a_n$  pro  $n$  jdoucí k nekonečnu je  $a$ '):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (138)$$

- *Konvergentní posloupnost* je posloupnost, která má vlastní limitu.
- *Divergentní posloupnost* je posloupnost, která nemá vlastní limitu.

Příklady limit:

$$\forall q \in (-1, 1); \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (139)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2,718282 \quad (\text{Eulerovo číslo}) \quad (140)$$

#### 14.1.8 Nevlastní limita posloupnosti

Říkáme, že posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  má *nevlastní limitu plus nekonečno* (tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ), jestliže ke každému  $K \in \mathbb{R}$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna přirozená čísla  $n \geq n_0$  platí  $a_n > K$ .

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0)(\forall a_n > K) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \right) \quad (141)$$

Říkáme, že posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  má *nevlastní limitu minus nekonečno* (tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ), jestliže ke každému  $L \in \mathbb{R}$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna přirozená čísla  $n \geq n_0$  platí  $a_n < L$ .

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq n_0)(\forall a_n < L) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \right) \quad (142)$$

#### 14.1.9 Věty o limitách posloupností

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Každá konvergentní posloupnost je omezená.
3. Každá omezená monotónní posloupnost je konvergentní.  
Každá shora omezená neklesající posloupnost je konvergentní.  
Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost je konvergentní.
- 4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (143)$$

$$(\forall r > 0) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \right) \quad (144)$$

5. Necht  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou konvergentní posloupnosti, jejichž limity jsou  $\lim a_n = A$ , respektive  $\lim b_n = B$  a  $c \in \mathbb{R}$  je reálné číslo. Potom jsou konvergentní i posloupnosti:  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$ ,  $(a_n \cdot b_n)$ ,  $(c \cdot a_n)$  (a navíc pro nenulová  $B$  a  $b_n$  je konvergentní i posloupnost  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ) a platí o nich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B \quad (145)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B \quad (146)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B \quad (147)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot A \quad (148)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B} \quad (149)$$

## 14.2 Nekonečné řady

- *Nekonečná řada* - je součet členů nějaké posloupnosti, například pro posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  by byla řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (150)$$

- *n-tý člen řady* se značí  $a_n$
- *n-tý částečný součet* se vypočítá:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (151)$$

- *Součet řady* se vypočítá přes limitu, pokud existuje:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (152)$$

Má-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  součet  $s$ , píšeme:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (153)$$

- *Konvergentní řada* je řada, která má konečný součet. Název vyplývá z toho, že posloupnost musí být konvergentní, aby toto platilo.
- *Divergentní řada* je řada, která nemá konečný součet. Název vyplývá z toho, že posloupnost musí být divergentní, aby toto platilo.

### 14.2.1 Geometrická řada

Nekonečná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  je geometrická, jestliže posloupnost  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  je geometrická. Řada vypadá následovně, označíme-li si *kvocient* geometrické řady  $q$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ kde } a_1, q \in \mathbb{R} \quad (154)$$

Geometrická řada (s  $a \neq 0$ ) je konvergentní právě tehdy, když  $|q| < 1$ . Její součet potom vypočítáme:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} \quad (155)$$

**Uplatnění** najde vzorec v převodu periodického desetinného rozvoje do tvaru zlomku. Příklad:

$$\begin{aligned} 0,278\overline{175} &= \frac{278}{1000} + \frac{175}{1000\,000} + \frac{175}{100\,000\,000} + \dots \\ &\quad x = 0,275 \\ &\quad a_1 = \frac{175}{1000\,000} \\ &\quad q = \frac{1}{1000} \\ s &= \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{175}{1000\,000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{\frac{175}{1000}}{999} = \frac{175}{999\,000} \\ &\quad 0,278\overline{175} = x + s \end{aligned}$$

### Ambryho kompletní systém součtu nekonečné geometrické řady

$$(\forall a_1, q \in \mathbb{R}) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 = 0)(s = 0) \\ (\forall a_1 \neq 0) \left\{ \begin{array}{l} (\forall |q| < 1)(s = \frac{a_1}{1-q}) \\ (\forall q < -1)(\text{nekonverguje (osciluje)}) \\ (\forall q \geq 1) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 > 0)(s = +\infty) \\ (\forall a_1 < 0)(s = -\infty) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (156)$$

**Ambryho kompletní systém součtu nekonečné aritmetické řady**  
jen tak pro test těch závorek, je to asi trochu mimo.

$$(\forall a_1, d \in \mathbb{R}) \left\{ \begin{array}{l} (\forall d > 0)(s = +\infty) \\ (\forall d < 0)(s = -\infty) \\ (\forall d = 0) \left\{ \begin{array}{l} (\forall a_1 > 0)(s = +\infty) \\ (\forall a_1 < 0)(s = -\infty) \\ (\forall a_1 = 0)(s = 0) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (157)$$

## 14.3 Finanční matematika

- $K_0$  je počáteční kapitál také vklad, úvěr
- $n$  je počet let
- $K_n$  označuje kapitál po  $n$  letech (po připsání úroku za  $n$ -tý rok)
- $U_n$  je úrok za  $n$  let
- $i$  je úroková míra (roční) vyjádřená desetinným číslem, jestliže je úroková míra  $p\%$ , potom  $i = \frac{p}{100}$
- $k$  je zdaňovací koeficient, jestliže daň z úroku je  $d\%$ , potom  $k = 1 - \frac{d}{100}$

### 14.3.1 Jednoduché úročení

Z vloženého kapitálu získáváme pravidelně určitý výnos, tj. roční úrok. Tyto peníze už ale nejsou dále úročeny.

$$K_n = K_0 \cdot (1 + nki) \quad U_n = nki \cdot K_0 \quad (158)$$

Kapitál  $K$  a úrok  $U$  po  $t$  dnech (úročí se v den splatnosti):

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right) \quad U_n = \frac{t}{360} \cdot ki \cdot K_0 \quad (159)$$

### 14.3.2 Složené úročení

Úročí se i kapitál získaný z úroků. Pro úrokovací období jeden rok:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + ki)^n \quad U_n = K_0 [(1 + ki)^2 - 1] \quad (160)$$

Úrokovací období  $t$  dní. Kapitál  $K_m$  a úrok  $U_m$  po  $m$  úrokovacích obdobích (po připsání úroku za  $m$ -té období):

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right)^m \quad U_m = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right)^m - 1\right] \quad (161)$$

### 14.3.3 Pravidelné spoření při složeném úročení

- $S_m$  značí *naspořený kapitál* po  $m$  úrokovacích obdobích (po připsání úroku za  $m$ -té období)

Úrokovací období  $t$  dní. Při pravidelném ukládání částky  $a$  na začátku každého úrokovacího období:

$$S_m = a \cdot q \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \quad , \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot ki \quad (162)$$

Úrokovací období  $t$  dní. Při pravidelném ukládání vždy stejné částky. První částka je uložena na začátku prvního úrokovacího období a časový interval mezi dvěma po sobě jdoucími vklady je  $\frac{1}{j}$  délky úrokovacího období, kde  $j \in \mathbb{N}$ :

$$S_m = K \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1} \quad , \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot ki \quad (163)$$

A  $K$  je naspořený kapitál po připsání úroku za první úrokovací období.

### 14.3.4 Pravidelné splácení dluhu

Když je úrokovací období  $t$  dní.

- $D$  je počáteční výše *dluhu*
- $s$  je výše *splátky* placené vždy na konci úrokovacího období
- $m$  je počet splátek

$$s = D \cdot q^m \cdot \frac{q - 1}{q^m - 1}, \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot i \quad (164)$$

## 14.4 Meta

Matematický zápis omezenosti posloupností jsem stvořil sám, ale Jonáš mi to schválil, tak snad dobré.

### 14.4.1 Zdroje

- Tabulky!
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Posloupnost>
- <https://matematika.cz/posloupnosti>
- Z tohoto jdou možná pochopit limity <http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/posloupnosti/limita/limita.htm>
- <https://matematika.cz/limita-posloupnosti>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Aritmetick%C3%A1\\_posloupnost](https://cs.wikipedia.org/wiki/Aritmetick%C3%A1_posloupnost)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A1\\_posloupnost](https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A1_posloupnost)

### 14.4.2 Pojmy/ zadání

Pojem posloupnosti, způsoby zadání (určení) posloupností, vzorec pro  $n$ -tý člen, rekurentní zadání, graf posloupnosti, vlastnosti posloupností, monotónnost, omezenost. Aritmetická a geometrická posloupnost, důležité věty pro aritmetickou a geometrickou posloupnost, praktické užití aritmetické a geometrické posloupnosti. Limita posloupnosti, konvergentní a divergentní

posloupnosti, věty o limitách posloupností, výpočty limit. Nekonečná řada, součet nekonečné řady, nekonečná geometrická řada a její součet, převod daného racionálního čísla daného periodickým desetinným rozvojem na tvar zlomku, úlohy na aplikace vzorce pro součet konvergentní nekonečné řady.

## 15 Základy planimetrie a konstrukční úlohy

### 15.1 Základní pojmy a definice

#### 15.1.1 Bod

**Ambryho definice** Dále nadělitelný, minimální (nebo nulová) výška, šířka a plocha.

Je tzv. *bezrozměrný*. Bod může určen například průnikem 2 různoběžných přímk nebo  $n$  souřadnicemi v  $n$ -rozměrném prostoru. Zapisují jako velká písmena, začínající od A.

#### 15.1.2 Přímka

**Ambryho definice** Množina bodů pro něž platí, že mezi každými 2 body  $(A, B)$  je nekonečně mnoho bodů  $C$ , které leží na jejich spojnici. Zároveň platí, že pro každé body  $A$  a  $C$  je možné najít nekonečné množství bodů  $B$ , které mohou být v libovolné vzdálenosti (až nekonečné).

Přímka je určena 2 body. Nemá počátek a konec. Zapisují se malými písmeny, jako  $p$  nebo  $q$ ...

#### 15.1.3 Rovina

Určená 3 body neležícími v 1 přímce, nebo přímkou a bodem jí nenáležící. Rovina je nekonečné ve všech směrech. Většinou se k jejímu označení používají řecké písmena, standardně začínající  $\rho$ .

#### 15.1.4 Polorovina

Určena přímkou, která dělí rovinu na 2 poloviny, a bodem, který jednu z nich určuje. Značí se jako rovina.



název	úhel
nulový	$\alpha = 0^\circ$
ostrý	$\alpha < 90^\circ$
pravý	$\alpha = 90^\circ$
tupý	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
dutý	$\alpha < 180^\circ$
konvexní	$\alpha \leq 180^\circ$
přímý	$\alpha = 180^\circ$
konkávní	
(=vypuklý,	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$
=nekonvexní)	
plný	$\alpha = 360^\circ$

### 15.1.5 Polopřímka

Má *počátek* (tj. bod), ale nemá konce. Určená dvěma body a informací, který z nich je počátkem a druhý je *pomocným bodem*. Nebo přímkou a jedním jejím bodem, který ji rozdělí a stane se počátkem. 2 takhle vzniklé polopřímky jsou *opačné*. Značí se jako přímka.

### 15.1.6 Úsečka

Nejkratší možná spojnice 2 bodů. Je podmnožinou přímky. Označuje se 2 body v "absolutní hodnotě" (značení pro vzdálenost):  $|AB|$

### 15.1.7 Obrazce

Část roviny ohraničená spojitou čarou. Patří jsem mnohoúhelníky (jako čtverec, trojúhelník, kosodélník ...), kružnice, elipsy ale i mnoho dalších.

## 15.2 Úhly

V rovině může být definován, pomocí 2 polopřímek se stejným počátkem. Nebo ekvivalentně pomocí přímek a bodů.

### 15.2.1 Pravidla pro dvojice úhlů

Dvě různoběžné přímky se protnou v bodě  $V$ , úhly které takto vzniknou mají dohromady  $360^\circ$ .

- Úhly které jsou naproti sobě (tj. nemají společnou ani jednu polopřímku) mají se nazývají *vrcholové* a mají stejnou velikost.
- Úhly, které mají společné právě jednu polopřímku se nazývají *vedlejší* a společně mají  $180^\circ$ .
- *Souhlasné* úhly jsou stejně veliké. Označují dvojici, kde jeden označuje úhel, který svírají dvě přímky  $(p, q)$ , a druhý označuje úhel mezi  $p$  a nějakou rovnoběžku  $q$  (nebo  $q$  a rovnoběžkou  $p$ ).
- *Střídavé* úhly jsou stejně veliké. Pravidlo je jen kombinací pravidle o souhlasných a vrcholových úhlech.

### 15.3 Mnohoúhelníky

Mnohoúhelník (nebo také *polygon*) je část roviny vymezená úsečkami, které spojují  $n$  bodů (kde  $n \geq 3$ ) a žádné 4 body neleží na jedné přímce.

- Body určující mnohoúhelník se nazývají *vrcholy*
- úsečky spojující sousední vrcholy se nazývají *strany*
- *úhlopříčky* - úsečky spojující nesousední vrcholy
- *vnitřní úhly* - jsou svírány sousedními stranami
- *vnější úhly* - doplňkový úhel do  $180^\circ$  k vnitřnímu úhlu
- počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů je stejný, označíme-li ho  $n$ , tak se podle něj vytváří název  $n$ -úhelník (trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník....)

Zapisuje se pomocí velkých písmen označujících body za sebou bez mezer, před něj se vloží symbol pro tento útvar. Vlastnosti

- *Obvod* je součet délek všech stran.
- součet vnitřních úhlů je roven  $\pi(n - 2)$  rad
- počet úhlopříček je roven  $\frac{1}{2}n(n - 3)$
- Jestliže existuje kružnice na které leží všechny vrcholy, říkáme, že je *opsaná* mnohoúhelníku. Mnohoúhelník, kterému jde kružnice opsat je *tětivový* (jeho strany jsou tětivami opsané kružnice)

- $n$ -úhelník jde vždy rozdělit na  $n - 2$  trojúhelníků

Dají různě dělit na druhy. Jednoduché vs *degenerované* - alespoň 2 strany se protínají. *Konvexní* (vnitřní úhly jsou menší než  $180^\circ$ ) a *nekonvexní* (minimálně jeden vnitřní úhel větší než  $180^\circ$ ). *Pravouhelníky* (všechny vnitřní úhly jsou  $90^\circ$  nebo  $270^\circ$ ) a nepravouhelníky. *Pravidelné* (všechny strany a vnitřní úhly jsou shodné) a nepravidelné.

### 15.3.1 Pravidelné mnohoúhelníky

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \qquad \alpha = \frac{n-2}{n} \pi \text{ rad} \qquad (165)$$

Označíme vnitřní úhel  $\alpha$ , tak je jeho velikost podle vzorce nahoře, kde  $n$  je počet vrcholů. součet všech vnitřních úhlů je potom logicky  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

$$\beta = \frac{2\pi}{n} \text{ rad} \qquad (166)$$

Velikost středového úhlu (popřípadě vnějšího) je podle 166.

*Eukleidovská konstrukce* je možná jsou-li liché dělitele  $n$  různá Fermatova čísla. Lol tak to je info jak brno. Obsah se počítá rozdělením na vhodné nepřekrývající se trojúhelníky a obdélníky a sečtením jednotlivých obsahů.

Pravidelné mnohoúhelníky jsou symetrické. Počet os souměrnosti je roven počtu vrcholů. Je-li počet vrcholů sudý má i střed souměrnosti.

Má kružnici opsanou (o poloměru  $r$ ) i kružnici vepsanou (o poloměru  $\rho$ ). Jejich středy jsou ve stejném bodě. Vzorce pro jejich výpočet  $n$ -úhelníku s délkou strany  $s$ :

$$r = \frac{s}{2 \sin\left(\frac{180}{n}\right)} \qquad \rho = \frac{s}{2 \tan\left(\frac{180}{n}\right)} \qquad (167)$$

## 15.4 Trojúhelníky

Značí se  $\triangle ABC$ . Kde velká tiskací písmena mohou být nahrazena jinými, pokud jsou to body určující vrchol trojúhelníku. Úhly u vrcholů se zpravidla označují  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  nebo jiným řeckým písmenem. Strany se označují malými písmeny, podle protilehlého vrcholu. Vlastnosti:

- Nemá úhlopříčky
- Součet délek dvou stran je vždy větší než zbylá strana.
- Součet vnitřních úhlů je  $180^\circ$

Zavedeme-li veličinu  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , pak můžeme vypočítat úhly následovně:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad (168)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad (169)$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{ba}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ba}} \quad (170)$$

#### 15.4.1 Konstrukce

Trojúhelník je jednoznačně určen:

- $(sss)$  - délkou všech 3 stran
- $(sus)$  - délkou 2 stran a úhlem, který svírají
- $(usu)$  - délkou jedné strany a velikostí úhlů, které k ní přiléhají
- $(Ssu)$  - délkou 2 stran a úhlu proti větší z nich

#### 15.4.2 Druhy

Podle stran:

- *obecný* - žádné 2 strany nejsou shodné
- *Rovnoramenný* - 2 strany jsou shodné, ale ne s třetí stranou
- *Rovnostranný* - všechny strany jsou shodné (-> všechny úhly shodné ->  $60^\circ$ )

Tak to je divná definice z wiki, já bych to dělal tak, že obecné  $\ni$  rovnoramenné  $\ni$  rovnostranné.

Podle úhlů:

- *ostroúhlý* - všechny úhly ostré
- *Pravoúhlý* - jeden úhel pravý, zbylé ostré
- *Tupoúhlý* - jeden tupý úhel, zbylé ostré

### 15.4.3 cool Věci

**Výška** je úsečka kolmá na stranu a protínající protilehlý vrchol. Průnik všech 3 výšek se nazývá *ortocentrum* (pro ostroúhlý uvnitř trojúhelníku, pro pravoúhlý ve vrcholu a pro tupouhlý vně). Bod, kde protíná stranu se nazývá *pata výšky*

**Těžnice** je úsečka spojující střed strany a protilehlý vrchol, označuje se  $t_a$ ,  $t_b$  a  $t_c$  (nebo jinak podle stran/vrcholů). Všechny 3 se protínají v jednom bodě, který se nazývá *těžiště*. To rozděluje každou těžnici v poměru 2:1. Každá těžnice rozděluje trojúhelník na dva se stejným obsahem.

$$t_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \quad (171)$$

V analytické geometrii se dá určit těžiště trojúhelníku v rovině výpočtem  $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$

$$t_x = \frac{1}{3}(a_x + b_x + c_x) \quad (172)$$

$$t_y = \frac{1}{3}(a_y + b_y + c_y) \quad (173)$$

**Střední příčka** je spojnice středů stran (tj. *pat těžnic*). Je rovnoběžná s protilehlou stranou a má poloviční délku. Rozděluje trojúhelník na 4 shodné - *příčkový* (těžiště má ve stejném bodě jako původní trojúhelník) a 3 při vrcholech.

**Osy úhlů** dělí úhel na polovinu a protilehlou stranu v poměru délek přilehlých stran. Jejich průsečík je středem *kružnice vepsané*, která se dotýká všech stran zevnitř.

$$\rho = \frac{1}{2}(a + b + c) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{S}{s} \quad (174)$$

**Osy stran** jsou kolmice vedené ze středů stran. Jejich průsečík je středem *kružnice opsané*, která prochází všemi vrcholy.

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad (175)$$

**Kružnice připsaná** - dotýká se jedné strany a 2 přímek, které jsou prodloužením zbylých stran.

**Eulerova přímka** - prochází těžištěm, ortocentrem, středem kružnice opsané. To je náhodička, co? Plus na ní leží střed *kružnice devíti bodů*, což vypadá taky jako shoda náhod.

#### 15.4.4 Obvod a obsah

Obvod:

$$o = a + b + c \quad (176)$$

Obsah:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2} \quad (177)$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad s = o/2 \quad (178)$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad (179)$$

#### 15.4.5 Věty

**Sinová věta**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (180)$$

**tangentová věta** - vypadá divně, asi nedůležitá, už se mi to nechce přepisovat....

**Cosinová věta** - platí ve všech podobách po *cyklické zaměně*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \quad (181)$$

**Pythagorova věta** - je zjednodušením kosinové věty pro pravoúhlý trojúhelník

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (182)$$

**Euklidova věta o výšce** - obsah čtverce sestrojeného na odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b \quad (183)$$

**Euklidova věta o odvěsně** - Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé.

$$a^2 = c \cdot c_a \qquad b^2 = c \cdot c_b \qquad (184)$$

**Podobnost trojúhelníků** - když mají 2 úhly shodně jsou trojúhelníky podobné (věta uu). Zapisujeme  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . Nebo když jsou poměry délek všech odpovídajících si stran stejné (věta sss), nebo když poměry dvou odpovídajících si stran jsou stejné a shodují se v úhlu jimi sevřeném (věta sus). Nebo poměr 2 stran a shodný úhel, proti větší z nich (věta Ssu).

#### 15.4.6 Rovnoramenný

Osově souměrné podél osy procházející kolmo středem *základny* (tj. strana, již jsou přilehlé strany, které jsou shodné) a *hlavním vrcholem* (tj. vrchol protilehlý základně). Tato osa je zároveň výškou a těžnicí základny. Z toho vyplývají další vlastnosti: *Ramena* (tj. stejně dlouhé strany) mají shodné těžnice, výšky.

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin \gamma \qquad \text{kde } a = b \qquad (185)$$

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad \text{kde } a = b \qquad (186)$$

#### 15.4.7 Rovnostranný

Speciální případ rovnoramenného trojúhelníka. Je osově souměrný podle 3 os. Shodné výšky a těžnice. Výšky a těžnice jedné strany jsou totožné. Všechny vnitřní úhly  $60^\circ$ . Střed kružnice opsané, kružnice vepsané, těžiště a ortocentrum v jednom bodě.

### 15.5 Čtyřúhelníky

Součet velikostí vnitřních úhlů je  $360^\circ$ .

### 15.5.1 Obvod a obsah

Obvod je roven součtu všech stran. Obsah  $S$  se dá vypočítat pomocí délek úhlopříček  $e$ ,  $f$  a úhlu  $\theta$ , který svírají (libovolný).

$$S = \frac{1}{2}ef \sin \theta \quad (187)$$

Ve vzorcích se také používá  $s$ , které je polovinou obvodu.

$$o = a + b + c + d = 2s \quad (188)$$

Alternativní výpočty obsahu pro konvexní čtyřúhelník, Bretschneiderův vzorec (asi mimo SŠ):

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left( \frac{\alpha + \gamma}{2} \right)} \quad (189)$$

Přes rozdělení na 2 trojúhelníky:

$$S = \frac{1}{2} (ab \sin \alpha + cd \sin \gamma) \quad (190)$$

### 15.5.2 Rozdělení

Základní dělení je na nekonvexní konvexní. Konvexní se dále dělí:

**Různoběžník** - žádné protilehlé strany nejsou rovnoběžné, nijak zajímavý.

**Deltoid** - dvě dvojice vzájemně přilehlých stran mají stejnou velikost.  $S = \frac{1}{2}ef$ . Tvar létajícího draka. Je osově souměrný podle právě jedné úhlopříčky, která se nazývá *hlavní* (ta druhá je nečekaně *vedlejší*). Úhlopříčky jsou na sebe kolmé a vedlejší je půlena hlavní. Je to různoběžník. Je vždy tečnový. Když je úhel vrcholů u vedlejší úhlopříčky pravý, tak je tětivový.

**Dvojtředový čtyřúhelník** - lze mu opsat i vepsat kružnici. Je zároveň tětivový i tečnový. Z Brahmaguptova vzorce:  $S = \sqrt{abcd}$ . Může to být čtverec, lichoběžník nebo deltoid.

**Tečnový** - lze mu opsat tečnu.  $S = \rho s$ , kde  $\rho$  je poloměr vepsané kružnice. Je jím každý čtverec, kosočtverec a deltoid.



**Tětivový** - lze mu opsat kružnici. Ptolemaiova věta:  $ef = ac + bd$ . Brahmaguptův vzorec:  $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ . Např.: čtverec, obdélník a rovnoramenný lichoběžník.

**Lichoběžník** Má právě jednu dvojici rovnoběžných stran - nazývají se *základny*, jejich spojnice jsou potom *ramena*. Úhlopříčky se (u obecného) vzájemně nepůlí a neprotínají se na střední příčce. Velikost střední příčky  $m$ , která je spojnici středů ramen je aritmetický průměr základů  $m = \frac{a+c}{2}$ . Obsah je  $S = m \cdot v = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$ . Výška se dá vypočítat prapodivným vzorcem, který je asi mimo SŠ.

$$v = \frac{2}{|a-c|} \sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)} \quad (191)$$

Kromě *obecného* ještě existuje *pravoúhlý lichoběžník* (tj. jedno rameno svírá pravý úhel se základnami) nebo *rovnoramenný* (tj. ramena mají stejné délky), který má kružnici opsanou a je tak tětivovým trojúhelníkem.

**Rovnoběžník (kosodélník)** - má obě dvojice protilehlých stran rovnoběžné. Z toho plyne, že protilehlé strany mají stejnou délku. Z toho plyne, že protilehlé úhly mají stejnou velikost.

$$S = ah_a = bh_b = ab \sin \alpha \quad (192)$$

Kde  $h_a$  je výška ke straně  $a$  a  $\alpha$  je úhel přilehlých stran. Úhlopříčky se vzájemně půlí, jejich délka se spočítá podle kosinové věty:

$$e = |AC| = \sqrt{a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha} = \sqrt{(a + h_a \cot \alpha)^2 + h_a^2} \quad (193)$$

**Kosočtverec** - typ kosodélníku, který má všechny strany stejně dlouhé. Úhlopříčky jsou na sebe kolmé. má 2 osy souměrnosti a jeden střed souměrnosti = průsečík úhlopříček. Lze mu vepsat kružnici, která má střed v průsečíku úhlopříček.

$$S = \frac{u_1 u_2}{2} = av_a = a^2 \cdot \sin \alpha \quad o = 4a = 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (194)$$

**obdélník** - typ rovnoběžníku, který má všechny vnitřní úhly  $90^\circ$ . Úhlopříčky obdélníka jsou stejně dlouhé a dělí se na půl. Má kružnici opsanou s poloměrem rovným polovině délky úhlopříčky. Osově souměrný podle 2 os - rovnoběžky se stranami procházející průsečíkem úhlopříček. Středově souměrný podle průsečíku úhlopříček.

$$S = ab \quad (195)$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (196)$$

$$r = \frac{u}{2} \quad r \text{ je poloměr kružnice opsané} \quad (197)$$

$$o = 2a + 2b \quad (198)$$

**Čtverec** - typ rovnoběžníku, který má vnitřní úhly  $90^\circ$  a zároveň má všechny strany stejně dlouhé. Dědí vlastnosti obdélníku a kosočtverce: Úhlopříčky jsou shodné, na sebe kolmé a v průsečíku se půlí. Průsečík je středem souměrnosti, kružnice opsané i vepsané. Ze všech obdélníků s daným obvodem má největší obsah a ze všech obdélníků s daným obsahem má nejmenší obvod.

$$o = 4a \quad (199)$$

$$S = a^2 \quad (200)$$

$$u = a\sqrt{2} \quad (201)$$

$$r_1 = \frac{u}{2} \quad \text{poloměr kružnice opsané} \quad (202)$$

$$r_2 = \frac{a}{2} \quad \text{poloměr kružnice vepsané} \quad (203)$$

$$(204)$$

## 15.6 Kruh a kružnice

Kružnice (viz [21.2.1](#)) je množina bodů stejně vzdálená od středu. Plocha kružnicí vymezená je kruh.

$$o = 2\pi r \quad S = \pi r^2 \quad (205)$$

Pokud chceme místo poloměru  $r$  použít průměr  $d$ ?

$$o = \pi d \quad S = \pi \frac{d^2}{4} \quad (206)$$

### 15.6.1 Vzájemná poloha 2 kružnic

Pokud mají střed ve stejném bodě nazývají se *soustředné* a plocha vymezená těmito kružnicemi je *mezikružší*. Nebo se mohou protínat (tj. 2 společné body). Mohou mít dotyk (tj. 1 společný bod) a to buď vnější nebo vnitřní. Nemají-li společný bod kružnice buď leží vně, nebo menší leží uvnitř větší.

### 15.6.2 Vzájemná poloha s přímkou

Žádný společný bod značí vnější přímkou, neboli *nesečnu*. 1 bod dotyku je *tečna* - ta je vždy kolmá na poloměr ze středu do bodu dotyku. 2 body, průsečíky -> *sečna*. Úsečka, která spojuje průsečíky sečny a kružnice se nazývá *tětiva* (podle toho tětivové mnohoúhelníky/čtyřúhelníky).

### 15.6.3 Vyjádření pomocí rovnic

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{Středová rovnice} \quad (207)$$

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad \text{Vrcholová rovnice} \quad (208)$$

$$x = x_0 + r \cos \phi \quad \text{parametrické vyjádření} \quad (209)$$

$$y = y_0 + r \sin \phi \quad (210)$$

### 15.6.4 Úhly v kružnici

**Středový úhel** - jeho vrcholem je střed kružnice  $S$  a ramena procházejí body  $A, B$  na kružnici. Platí, že středový úhel je dvojnásobkem obvodového. (zároveň je taky dvojnásobkem úsekového)

**Obvodový úhel** - ramena prochází body  $A, B$  a vrchol leží na jejich oblouku této kružnice.

**Úsekový úhel** - úhel svíraný tětivou a s tečnou v bodě  $A$ .

### 15.6.5 Kruhová výseč

Část kruhu, která je "vyseknut" jako dort/pizza. Je určena kružnicí a úhlem. Obvod je roven součtu délky kruhového oblouku a dvojnásobku poloměru.

Středový úhel je  $\alpha$  nebo  $\theta$ .

$$S = \frac{\theta r^2}{2} \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \quad \alpha \text{ ve stupních} \quad s = (\theta + 2)r \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (211)$$

**Kružnicový oblouk** Délka části kružnice vymezené úhlem  $\alpha$  nebo  $\theta$ .

$$l = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \quad \alpha \text{ ve stupních} \quad l = r \cdot \theta \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (212)$$

### 15.6.6 Kruhová výseč

$$S = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) \quad \text{je-li } \theta \text{ v radiánech} \quad (213)$$

Obvod se spočítá jako součet kružnicového oblouku a tětivy.

### 15.6.7 Mezikruží

Obsah je roven rozdílu obsahů jednotlivých kružnic. Obvod je roven součtu obvodů jednotlivých kruhů.

### 15.6.8 Thaletova kružnice/věta

”Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.” Vyplývá to ze znalostí o středovém a obvodovém úhlu.

## 15.7 Obvody a obsahy ostatních rovinných útvarů

Musíme si je vhodně rozložit na útvar (nebo jejich části), u kterých to zvládneme vypočítat. A pak správně sečíst.

## 15.8 Konstrukce

Vyplývá z vlastností obrazců.

## 15.9 Meta

U trojúhelníků platí cyklická záměna! Někde jsem ji dokonce napsal, někde ale ne...

Chybí konstrukce čtyřúhelníků, tak se to nějak odvodí podle vlastností.

Konstrukce - je to geometrie.. asi na to kašlu.

### 15.9.1 Zdroje

- moje hlava se špatnou pamětí, tak opatrně s důvěrou
- tabulky
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Obrazec>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Bod>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Polop%C5%99%C3%ADmka>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%9Ahel>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Mnoho%C3%BAhel%C3%ADk>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Troj%C3%BAhel%C3%ADk>
- další wiki, tady v tom je docela obsáhlá

### 15.9.2 Pojmy/Zadání

Základní planimetrické pojmy a vztahy mezi nimi: bod, přímka, rovina, polopřímka, polorovina, úsečka, úhel. Dvojice úhlů vrcholových, vedlejších, střídavých, souhlasných. Trojúhelník, shodnost trojúhelníků, konstrukce trojúhelníků. Čtyřúhelník, lichoběžník, rovnoběžník, strany, úhly a úhlopříčky ve čtyřúhelníku, tečnový a tětiový čtyřúhelník, konstrukce čtyřúhelníků. Mnohoúhelník, konvexní a nekonvexní n-úhelník, pravidelný n-úhelník, strany, úhly, úhlopříčky, obsahy a obvody. Kružnice, úhly v kružnici, obvodový, středový a úsekový úhel, Thaletova kružnice, vzájemná poloha přímky a kružnice, vzájemná poloha kružnic, konstrukce kružnice, konstrukce tečny ke kružnici, délka kružnice, délka kružnicového oblouku, kruh, kruhová výseč, úseč, obvod a obsah kruhu, kruhové výseče a úseče. Obvody a obsahy dalších roviných útvarů. Pojem konstrukční úlohy, základní geometrické konstrukce,

konstrukce na základě výpočtu, konstrukce na základě geometrických míst bodů.

## 16 Zobrazení v rovině

Zobrazení přiřazuje každému bodu  $A$  útvaru  $U$  právě jeden bod  $A'$  útvaru  $U'$ . Bod  $A$  je označován jako *vzor* a bod  $A'$  jako *obraz*.

**Samodružnost** - bod je samodružný (nebo také *invariantní*) zobrazí-li se sám do sebe (tj.  $A = A'$ ). Samodružný (/invariantní) útvar je takový útvar, který se zobrazí sám do sebe, tj. platí  $U = U'$ .

### 16.1 Afinní zobrazení

Asi mimo SŠ(, ikdyž v tabulkách je pravoúhlá afinita \*emotikona-pokrceni-ramen\*). Zachovává rovnoběžnost přímek. Každé 3 body na přímce se zobrazí buď do jednoho bodu nebo do 3 bodů se stejným dělicím poměrem. Příklad zkosení.

### 16.2 Podobná zobrazení

Útvary jsou si podobné je-li jeden získán z druhého pomocí zvětšení (/zmenšení), posunutí, rotace a zrcadlení. Podobnost zachovává velikost úhlů a poměr délek. Zachovává tvar. Je speciálním případem afinního zobrazení. Existuje takové kladné číslo  $k$  (*poměr podobnosti*), že platí  $|XZ| = |X'Y'|$ .

**Stejnolehlost (homotetie)** - má jediný samodružný bod (*střed stejnoolehlosti*). Všechny přímky spojující vzorový bod a jeho obraz procházejí středem souměrnosti  $S$ . Koeficient  $\kappa$ . Všechna podobná zobrazení se dají složit ze stejnolehlosti a shodnosti.

$$\frac{|SX'|}{|SX|} = |\kappa| \qquad |X'Y'| = |\kappa| \cdot |XZ| \qquad (214)$$

## 16.3 Shodné zobrazení

Speciálním případem podobnosti. Zachovává velikost i tvar. Patří sem *posunutí* (*translace*), *otočení* (*rotace*) a *zrcadlení*. Patří sem také osová (tj. zrcadlení) a středová (tj. rotace o  $180^\circ$ ) souměrnost.

**Nepřímá shodnost** - obraz lze získat posunutím, rotací a zrcadlením vzoru.

**Přímá shodnost** - obraz lze získat pouze posunutím a rotací vzoru.

**Identita** - typ přímé shodnosti, kdy je obrazem každého bodu  $X$  sám bod  $X$ .

## 16.4 Využití v konstrukčních úlohách

Podobnost (15.4.5) a shodnost (15.4.1) trojúhelníků, Pythagorova a Euklidovy věty (15.4.5) jsou v kapitole o trojúhelnících 15.4. O kružnicích: Každé 2 existující kružnice v rovině jsou si nejen podobné, ale jsou i stejnohlé a pokud nejsou soustředné nebo stejně velké nebo stejně velké, tak právě 2 způsoby.

## 16.5 Meta

### 16.5.1 Zdroje

- Tabulky ftw
- [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom\\_zobr/?page=vz4](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/geom_zobr/?page=vz4)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A9\\_zobrazen%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/Geometrick%C3%A9_zobrazen%C3%AD)
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Stejnolehlost>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/St%C5%99edov%C3%A1\\_soum%C4%9Brnost](https://cs.wikipedia.org/wiki/St%C5%99edov%C3%A1_soum%C4%9Brnost)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Podobnost\\_\(geometrie\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Podobnost_(geometrie))
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Shodn%C3%A9\\_zobrazen%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/Shodn%C3%A9_zobrazen%C3%AD)

### 16.5.2 Pojmy/Zadání

Shodná zobrazení v rovině, vzor, obraz, samodružný útvar, samodružný bod, identita, osová souměrnost, středová souměrnost, otočení, posunutí. Řešení konstrukčních úloh s využitím shodných zobrazení. Podobnost a stejnoolehlost, podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta, Euklidovy věty, stejnoolehlost kružnic, řešení konstrukčních úloh pomocí stejnoolehlosti.

## 17 Tělesa

Tělesa jsou typem geometrického útvaru v (minimálně 3-dimenzionálního) prostoru. Mají nějaký objem a povrch. Je to omezená část prostoru ohraničená plochami. *Konvexní* v geometrii znamená, že obsahuje-li útvar (2D nebo 3D či N-rozměrný) 2 body, musí obsahovat i všechny body ležící na přímce je spojující. *Nekonvexní* jednoduše znamená opak: existují aspoň dva body, které když spojíme přímkou, tak část přímky leží mimo těleso.

*Stěnová úhlopříčka* je normálně úhlopříčka daného mnohoúhelníku, tj. spojuje sousední vrcholy.<sup>1</sup>

*Tělesová úhlopříčka* spojuje nesousední vrcholy mnohostěnu a zároveň prochází vnitřkem tělesa. Některé tělesa je nemají např. jehlany a tetraedr.

### 17.1 Cavalieriův princip

Říká, že tělesa mají stejný objem, jestliže existuje roviny, pro všechny roviny ji rovnoběžné platí, že jejich průnik s tělesy má stejnou plochu.

### 17.2 Mnohostěny

Jeho povrch se skládá z konečně mnoha stěn, které jsou mnohoúhelníky. Pro konvexní mnohostěny platí *Eulerova věta*:

$$v - h + s = 2 \quad (215)$$

Kde  $v$  je počet vrcholů,  $h$  je počet hran a  $s$  je počet stěn.

Mezi mnohostěny patří mnoho různých typů, některé z nich jsou pravidelné a mají speciální jména - jehlany, hranoly (pro ně speciální případ kvádr (a pro

---

<sup>1</sup>Pomocí úhlopříček lze určit konvexitu mnohoúhelníku. Náleží-li všechny úhlopříčky mnohoúhelníku, je konvexní.



název		stěn	vrcholů	hran	typ stěny
čtyřstěn (trojboký jehlan)	tetraedr	4	4	6	trojúhelník
šestistěn (krychle)	hexaedr	6	8	12	čtverec
osmistěn	oktaedr	8	6	12	trojúhelník
dvanáctistěn	dodekaedr	12	20	30	pětiúhelník
dvacetistěn	ikosaedr	20	12	30	trojúhelník

něj speciální případ krychle)). Obvykle se pojmenovávají podle počtu stěn.

### 17.2.1 Platónská tělesa

Byly objeveny už v antice. Je to skupina pravidelných konvexních mnohostěnů. Z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky. V trojrozměrném prostoru existuje 5 takových těles.

**Dualita** Když se podíváme na tabulku, všimneme si, že barevně vyznačené mají stejné čísla, jako k nim duální těleso, akorát prohozené vrcholy a stěny. A to je asi princip duality [fakt nevíím].

## 17.3 Hranoly

$$S = 2S_p + S_{pl} \qquad V = S_p v \qquad (216)$$

Je to typ mnohostěnů, který má 2 podstavy tvaru stejných mnohoúhelníků (jejichž strany jsou rovnoběžné) o obsahu  $S_p$  leží v rovnoběžných rovinách vzdálených  $v$ .  $S_{pl}$  je obsah pláště. Jestli je hranol *kolmý* nebo *kosý*, nemá vliv na objem, pokud je výška stejná. *Pravidelný n-boký* označuje hranol, jehož podstavou jsou pravidelné mnohostěny.

### 17.3.1 Kvádr

Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravoúhelníky.

$$S = 2(ab + ac + bc) \qquad V = abc \qquad u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (217)$$

Kde  $a, b, c$  jsou hranami kváдру.  $u_t$  je tělesová úhlopříčka.

### 17.3.2 Krychle

Speciální případ kvádru, jehož stěny jsou shodné čtverce.  $a$  je délka hrany krychle.

$$S = 6a^2 \qquad V = a^3 \qquad u_t = a\sqrt{3} \qquad (218)$$

## 17.4 Jehlany

$$S = S_p + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3}S_p v \qquad (219)$$

Vznikne spojením vrcholů podstavy a *hlavního vrcholu*. Výška  $v$  je vzdálenost hlavního vrcholu od podstavy.

### 17.4.1 Komolé jehlany

Je to jehlan, kterému byla "useknutá" špička rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3} \left( S_{p1} + \sqrt{S_{p1}S_{p2}} + S_{p2} \right) \qquad (220)$$

## 17.5 Rotační tělesa

### 17.5.1 Rotační válec

Vznikne například rotací obdélníku kolem své strany.

$$S = 2S_p + S_{pl} \qquad V = S_p v \qquad (221)$$

$$S = 2\pi r(r + v) \qquad V = \pi r^2 v \qquad (222)$$

### 17.5.2 Rotační kužel

$$S = S_p + S_{pl} \qquad V = \frac{1}{3}S_p v \qquad (223)$$

$$S = \pi r(r + s) \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 v \qquad (224)$$

Kde délka strany  $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ .

### 17.5.3 Komolý rotační kužel

$$S = \pi (r_1^2 + r_2^2) + \pi s (r_1 + r_2) \quad V = \frac{1}{3} \pi v (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \quad (225)$$

Kde strana  $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2}$ . Podstavy jsou rovnoběžné.

### 17.5.4 Koule

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad S = 4 \pi r^2 \quad (226)$$

Povrch koule  $S$  se také nazývá obsah kulové plochy.

### 17.5.5 Kulová úseč a kulový vrchlík

*Kulová úseč* je průnik koule a poloprostoru hraničícího s rovinou, která je od  $S_0$  středu koule vzdálená méně než poloměr  $r$ . To jest část koule "odsekne". *Kulový vrchlík* je průnik kulové plochy a poloprostoru. Takže podstava (To jest plocha získaná "odseknutím") se tam nepočítá.

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3r_1^2 + v^2) \quad , \text{ kde } r_1 \text{ je poloměr podstavy} \quad (227)$$

$$S = 2 \pi r v \quad (228)$$

### 17.5.6 Kulová vrstva a kulový pás

*Kulová vrstva* průnik koule a vrstvy, jejíž poloviny mají s koulí nějaký průnik (jejich vzdálenost od středu je menší než poloměr  $r$ ) *Kulový pás* průnik kulové plochy a vrstvy, jako výše. Takže opět podstavy se nezapočítávají.

$$V = \frac{1}{6} \pi v (3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) \quad , \text{ kde } r_1 \text{ a } r_2 \text{ jsou poloměry podstav} \quad (229)$$

$$S = 2 \pi r v \quad (230)$$

## 17.6 Meta

dualita je jen v ANJ, tak nevím terminologii.  
~~Konvexnost nemá nikde dobrou definici~~

### 17.6.1 Zdroje

Tabulky a wikipedie

### 17.6.2 Zadání/pojmy

Pojem tělesa, konvexní a nekonvexní tělesa, mnohostěny, hranol, kvádr, krychle, vrcholy, hrany, stěny, stěnové úhlopříčky, tělesové úhlopříčky. Jehlan, komolý jehlan. Pravidelné mnohostěny ( tzv. platónská tělesa ) princip duality, Eulerova věta o mnohostěnech. Rotační tělesa, válec, kužel, komolý kužel, koule, kulová plocha. Polokoule, kulová úseč, kulový vrchlík ( plášť kulové úseče ), kulová výseč. Povrchy a objemy těles. Cavalieriho princip.

## 18 Polohové a metrické úlohy ve stereometrii

### 18.1 Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru

#### 18.1.1 Bod a

Bod je v  $n$ -rozměrném prostoru určen  $n$  souřadnicemi v jednotlivých osách.

**Bod** - Pokud mají všechny hodnoty souřadnic stejná jedná se o jeden bod, v opačném případě se jedná o dva různé body  $A$ ,  $B$  se vzdáleností určenou vzorcem (podobný těžnici kvádrů):

$$|AB| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \quad (231)$$

**Přímka** - Bod buď leží na přímce nebo na ní neleží. Dosadíme souřadnice bodu do rovnice přímky, a pokud dojdeme ke sporu, tak bod není součástí přímky. Vzdálenost bodu a přímky je úsečka, která je částí *kolmice* na přímku procházející bodem v úseku od *paty kolmice* po bod. Vzdálenost bodu  $M$  a přímky  $p : X = A + t\vec{u}$

$$|Mp| = \frac{|(M - A) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (232)$$

**Rovina** - Dosadíme, li souřadnice bodu do rovnice roviny a dostaneme se do sporu, pak bod neleží v rovině. Vzdálenost bodu a přímky se vypočítá jako délka úsečky kolmé na rovinu a končící v bodě. Vzdálenost bodu  $M = [m_x, m_y, m_z]$  a roviny  $\rho : ax + by + cz + d = 0$

$$|M\rho| = \frac{|am_x + bm_y + cm_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (233)$$

### 18.1.2 Přímka a

Přímka může být vyjádřena pomocí parametrických rovnic:

$$x = x_0 + tu_x \quad (234)$$

$$y = y_0 + tu_y \quad (235)$$

$$z = z_0 + tu_z \quad (236)$$

Kde bod  $A = [x_0, y_0, z_0]$  je nějaký bod, kterým přímka prochází. Konstanty  $u_x, u_y, u_z$  určují *směrnici* (tj. směrový vektor  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ) přímky. Parametr přímky je označen  $t$ .

Přímka je určena bodem  $A$  a směrovým vektorem  $\vec{u}$ , dá se také zapsat jako:

$$X = A + t\vec{u} \quad (237)$$

**Přímka** Jejich vzájemná poloha lze zjistit vytvořením soustavy rovnic obou předpisů. Případně porovnáním směrnic k odlišení mimoběžek a rovnoběžek.

- Mohou být *rovnoběžné*, to znamená, že každý bod  $A$  je součástí přímky  $p$  má stejnou vzdálenost od přímky  $q$ , tato vzdálenost je vzdáleností přímk. Vypočítáme jí jako vzdálenost bodu, který je součástí první přímky od přímky (druhé).  
Speciálním případem rovnoběžnosti je, když jsou přímky identické (tj. jejich vzdálenost je nulová). Jedna vznikla posunutím druhé, z toho vyplývá, že mají stejnou směrnici. Odchylka je nulová.
- *Různoběžné* to znamená, že mají právě jeden společný bod. Jeho souřadnice zjistíme vyřešíme soustavy rovnic pro obě přímky. *Odchylka* je úhel, který mezi sebou přímky svírají. Pokud je úhel pravý, tak se jedná *kolmost* přímk.

- *Mimoběžnost* je možná jen ve 3D (a více rozměrech), tj. přímky nejdou umístit do jedné roviny. Přímky nemají žádný společný bod, ale nejsou rovnoběžné. Přímka protínající obě mimoběžky se nazývá *příčka mimoběžek*.

Příčka kolmá na obě mimoběžky se nazývá *osa mimoběžek*. Vzdálenost mimoběžek je úsečka, která je součástí osy mimoběžek a je ohraničena průniky s přímkami. Odchylka mimoběžek je odchylkou dvou různoběžek, které jsou rovnoběžkami původních přímek.

Odchylka 2 přímek je  $\omega$ .  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  jsou směrové vektory přímek  $p$  a  $q$ . Poté platí:

$$\cos \omega = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z|}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (238)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti:  $\vec{u} = k\vec{v}$  (kde  $k \neq 0$ )

A podmínka kolmosti:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Asi mimo SŠ, ale přeci jen jsem to našel:

Vzdálenost  $|pq|$  dvou mimoběžných přímek.

$$p : X_p = A_p + t_p \vec{u}_p \quad (239)$$

$$q : X_q = A_q + t_q \vec{u}_q \quad (240)$$

$$|pq| = \left| \frac{\vec{u}_p \times \vec{u}_q}{|\vec{u}_p \times \vec{u}_q|} \cdot (A_q - A_p) \right| \quad (241)$$

Je vidět, že tato rovnice nefunguje, když  $|\vec{u}_p \times \vec{u}_q| = 0$ . To je případ, kdy jsou přímky rovnoběžné.

## Rovina

- *Rovnoběžné* - nemají společný žádný bod. Jejich vzdálenost je úsečka kolmá na přímkou i rovinu, která začíná a končí v průsečících s nimi. Vypočítáme jako vzdálenost bodu od přímky, nebo jako vzdálenost bodu od roviny, přičemž bod je součástí druhého útvaru.
- *Přímka leží v rovině*. Mají společné všechny body přímky.
- *Různoběžné* - mají společný právě 1 bod. Mají (nenulovou) odchylku. Ta je  $90^\circ$  pokud jsou kolmé, jinak je rovna odchylce přímky a jejího pravouhlého průmětu do roviny. (Tj. vytvořím další rovinu, která je kolmá na původní rovinu a ve které leží přímka. Pak spočítám odchylku přímky a průniku (tj. průsečnice) rovin.)

Odchylka  $\omega$  přímky  $p$  se směrovým vektorem  $\vec{u}$  a roviny  $\rho$  s normálovým vektorem  $\vec{n}$ :

$$\sin \omega = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}|} \quad (242)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti:  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

A podmínka kolmosti:  $\vec{u} = k\vec{n}$  (kde  $k \neq 0$ )

### 18.1.3 Rovina

Parametrické vyjádření roviny:

$$x = x_0 + tu_x + sv_x \quad (243)$$

$$y = y_0 + tu_y + sv_y \quad (244)$$

$$z = z_0 + tu_z + sv_z \quad (245)$$

$$(246)$$

Kde  $[x_0, y_0, z_0]$  je nějaký bod  $A$  ležící v rovině a vektory  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  a  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  jsou lineárně nezávislé. Parametry  $t$  a  $s$  jsou reálná čísla.

Rovinu lze taktéž vyjádřit pomocí obecné rovnice:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (247)$$

$$\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0} \quad (248)$$

Kde *normálový* vektor je nenulový a kolmý na rovinu.

### Rovina

- Rovnoběžné - tj. vzdálenost všech bodů jedné roviny k druhé rovině je stejná. Vypočítáme jako vzdálenost bodu (náležícímu první rovině) od roviny (druhé).
- Různoběžné - mají vždy průnik v podobě přímky nazývané *průsečnice*. Její směrnice (směrový vektor) je určen vektorovým součinem *normálových vektorů* rovin. Parametrický předpis této přímky je možné také zjistit řešením soustavy rovnic obou rovin. Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Odchylku rovin  $\rho$  a  $\sigma$  píšeme:  $|\angle \rho \sigma|$ .

Odchylka  $\omega$  roviny  $\rho_1$  s normálovým vektorem  $\vec{n}_1$  a roviny  $\rho_2$  s normálovým vektorem  $\vec{n}_2$ :

$$\cos \omega = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (249)$$

Z toho vyplývá podmínka rovnoběžnosti:  $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$  (kde  $k \neq 0$ )

A podmínka kolmosti:  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

## 18.2 Průnik přímky tělesem

## 18.3 Řez tělesa rovinou

Strategie prodlužování přímek, o kterých víme, že jsou součástí roviny do rovin některé stěny/strany tělesa. Pak spojit tento bod, který je jejich průnikem, s nějakým dalším ve stejné rovině.

## 18.4 Meta

### 18.4.1 Zdroje

- moje hlava, tabulky, wiki...
- [http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/ludmila\\_kadlecova/bezcabri/dveprimky.php](http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/ludmila_kadlecova/bezcabri/dveprimky.php)
- [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka\\_geometrie/prostor.php?kapitola=parametrickeVyjadreniPrimky](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/analyticka_geometrie/prostor.php?kapitola=parametrickeVyjadreniPrimky)
- [http://ucebnice.krynicky.cz/Matematika/05\\_Stereometrie/2\\_Metricke\\_vlastnosti/5201\\_Odchylka\\_primek\\_I.pdf](http://ucebnice.krynicky.cz/Matematika/05_Stereometrie/2_Metricke_vlastnosti/5201_Odchylka_primek_I.pdf)
- <https://forum.matematika.cz/viewtopic.php?id=33717>
- <http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=131>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Skew\\_lines](https://en.wikipedia.org/wiki/Skew_lines)



### 18.4.2 Pojmy/Zadání

Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru. Kritéria rovnoběžnosti přímek a rovin. Průsečík přímky a roviny, průsečnice dvou rovin. Řez tělesa rovinou, průnik přímky s tělesem. Odchylka přímek, kolmost přímek, kolmost rovin, odchylka přímky a roviny, odchylka dvou rovin. Vzdálenost dvou bodů, bodu od přímky, bodu od roviny, vzdálenost dvou přímek, vzdálenost dvou rovin.

## 19 Vektorová algebra

### 19.1 Vzdálenost bodů a střed úsečky

Vzdálenost bodů je triviální, viz 18.1.1 Střed úsečky je aritmetickým průměrem souřadnic bodů v jednotlivých osách zvlášť viz 22.3.

### 19.2 Soustavy souřadnic

Osy souřadnic jsou na sebe navzájem kolmé, jednotky délky na osách jsou stejné. Body se značí často stylem  $A[a_1, a_2, a_3]$ , kde hodnoty odpovídají vzdálenosti v dané souřadnicové ose.

### 19.3 Orientované úsečky

*Orientovaná úsečka* je  $\overrightarrow{AB}$  uspořádaná dvojice bodů, kde  $A$  je počáteční bod a  $B$  je bod koncový. její velikost značíme  $|AB|$ . *Souhlasně rovnoběžné nenulové orientované úsečky*  $AB \uparrow\uparrow CD$ . Jsou rovnoběžné a souhlasně orientované - tj. posunutím jsme schopni je dát na polopřímku se stejným počátkem a směrem.

*Nulová orientovaná úsečka* má nulovou velikost (tj. délku), tzn. body  $A$  a  $B$  jsou jedním bodem. V opačném případě se jedná o *nenulovou orientovanou úsečku*.

### 19.4 Definice vektoru přes orientované úsečky

*Nulový vektor* je množina všech nulových orientovaných úseček, značí se  $\vec{0}$ . Naproti tomu *Nenulový vektor*  $\vec{u}$  je množina všech nenulových orientovaných

úseček, které mají stejnou velikost a jsou souhlasně rovnoběžné. Možnosti zápisu:

$$\overrightarrow{AB} \in \vec{u} \qquad \overrightarrow{AB} \text{ určuje vektor } \vec{u} \quad (250)$$

$$\vec{u} = B - A \qquad \overrightarrow{AB} \text{ je umístěním vektoru } \vec{u} \text{ (do bodu } A) \quad (251)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} \text{ je reprezentantem vektoru } \vec{u} \quad (252)$$

Opačný vektor k vektoru  $\vec{u} = B - A$  je  $-\vec{u} = A - B$

## 19.5 Souřadnice vektoru

Souřadnice vektoru  $\vec{u} = B - A$  v jednotlivých osách:

$$u_1 = b_1 - a_1 \qquad u_2 = b_2 - a_2 \qquad u_3 = b_3 - a_3 \quad (253)$$

Zápis:

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \qquad \text{V rovině} \quad (254)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \text{V prostoru} \quad (255)$$

## 19.6 Sčítání vektorů a násobení reálnými čísly

Vede-li  $\vec{u}$  z bodu  $A$  do bodu  $B$  a vektor  $\vec{v}$  z bodu  $B$  do bodu  $C$ . Pak vektor, který je jejich součet odpovídá orientované úsečce  $AC$ . Pokud je číslo  $k \in \mathbb{R}$  menší než nula, tak se orientace vektoru otočí.

$$\text{V rovině} \qquad \text{V prostoru} \quad (256)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \quad (257)$$

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2) \qquad k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \quad (258)$$

## 19.7 Lineární kombinace a závislost

**Lineární kombinace** vektorů je rovna  $k_1\vec{u}_1 + \dots + k_n\vec{u}_n$  pro  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

**Lineárně závislé** jsou vektory, kde je nějaký vektor lineární kombinací ostatních.

V rovině:

- 2 vektory, které lze umístit na jednu přímku
- Každá skupina o 3 a více vektorech

V prostoru:

- 2 vektory, které lze umístit do jedné přímky
- 3 vektory, které lze umístit do jedné roviny
- Každá skupina o 4 a více vektorech

**Lineárně nezávislé** jsou takové vektory, kde žádný vektor není lineární kombinací ostatních

## 19.8 Velikost

Velikost se značí  $|\vec{u}|$  a její hodnoty se získají následovně:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad \text{V rovině} \quad (259)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad \text{V prostoru} \quad (260)$$

### 19.8.1 Jednotkový vektor

*Jednotkový vektor* je takový vektor, jehož norma (tj. délka) je rovna jedné.

**Norma** je funkce, která přiřazuje každému vektoru kladné reálné číslo (tzv. délka nebo velikost). Nulový vektor má jako jediný délku 0.

## 19.9 Skalární součin

Za podmínek  $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$  (v jiných případech platí  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ) platí následující rovnice:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi \quad (261)$$

A to je v prostoru a v rovině následující:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \text{V rovině} \quad (262)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \text{V prostoru} \quad (263)$$

## 19.10 Úhel vektorů

Také nazýván jako *odchylka*. Označíme si ho  $\varphi$  a poté platí:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (264)$$

**Rovnoběžnost**  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , musí platit, že jsou oba vektory nenulové a úhel vektorů je 0 nebo  $\pi$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = k\vec{v} \wedge (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (265)$$

**Kolmost**  $\vec{u} \perp \vec{v}$  nastane, když jsou oba vektory nenulové a úhel mezi nimi je  $\frac{1}{2}\pi$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \wedge (\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}) \quad (266)$$

## 19.11 Vektorový součin v prostoru

Definice  $\vec{w}$  jako vektorového součinu  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (267)$$

**Lineárně závislé** Pokud jsou vektory  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  lineárně závislé platí  $\vec{w} = \vec{0}$

**Lineárně nezávislé** - vektor  $\vec{w}$  je kolmý na původní vektory. Jeho velikost  $|\vec{w}|$  je rovna obsahu rovnoběžníku určeného původními vektory.  $\varphi$  je úhel mezi původními vektory. Uspořádaná trojice  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  je pravotočivá

$$\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{w} \perp \vec{v} \quad (268)$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi \quad (269)$$

V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (270)$$

V levotočivé kartézské soustavě souřadnic mají všechny souřadnice  $\vec{w}$  opačná znaménka. Zapsáno:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_2v_1 - u_1v_2) \quad (271)$$

**Další vlastnosti** vyplývající z předchozího a platící pro libovolné vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  a  $\vec{w}$  a číslo  $k \in \mathbb{R}$

- $\vec{v} \times = -(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
- ... viz tabulky!

## 19.12 Pravotočivá a levotočivá báze

Máme-li dva vektory na sebe kolmé, tak existují 2 možnosti, jak umístit třetí vektor, tak aby byl kolmý na oba. Jednomu způsobu se říká pravotočivá a druhému levotočivá kartézská soustava souřadnic. Představme si, že položíme pravou ruku na dva vektory tak, aby prsty ruky značily směr otáčení od prvního vektoru k druhému. Potom palec pravé ruky směřuje ve směru třetího vektoru. V opačném případě se jedná o levotočivou bázi, kde když stejným způsobem přiložíme levou ruku bude palec směřovat ve směru třetího vektoru.

**Báze** je (v prostoru) uspořádaná trojice vektorů, které neleží v jedné rovině. Značí se  $(a, b, c)$  a záleží na jejich pořadí.

## 19.13 Smíšený součin vektorů v prostoru

*Smíšený součin* vektorů  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  (v tomto pořadí) je reálné číslo:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

**Lineárně závislé** vektory  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c} \iff (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$  dají jako výsledek smíšeného součinu vždy nulu.

**Lineárně nezávislé** vektory je absolutní hodnota smíšeného součinu rovna objemu rovnoběžnostěnu určeného těmito vektory.

$$\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right| \quad (272)$$

## 19.14 Meta

### 19.14.1 Zdroje

- Tabulky!!
- [http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/07\\_Analyticka\\_geometrie/2\\_Vektory/7211\\_Pravotociva\\_a\\_levotociva\\_baze.pdf](http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/07_Analyticka_geometrie/2_Vektory/7211_Pravotociva_a_levotociva_baze.pdf)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotkov%C3%BD\\_vektor](https://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotkov%C3%BD_vektor)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Norma\\_\(matematika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematika))
- <https://matematika.cz/vektory>

### 19.14.2 Zadání/ pojmy

Soustava souřadnic na přímce, v rovině, v prostoru. Střed dvojice bodů, vzdálenost dvou bodů. Souřadnice vektoru, velikost vektoru, sčítání vektorů, násobení vektorů reálným číslem. Lineární kombinace vektorů, jednotkový vektor, skalární součin, odchylka vektorů. Pravotočivá a levotočivá báze. Vektorový součin, geometrická interpretace.

## 20 Analytická geometrie lineárních útvarů

viz 18 a 22

### 20.1 Meta

wtf to už mám všechno v jiné otázce.

#### 20.1.1 Zdroje

#### 20.1.2 Zadání/ pojmy

Parametrické vyjádření přímky, polopřímky, úsečky, obecná rovnice přímky, směrové a normálové vektory, směrnice a úsekový tvar rovnice přímky, směrnice přímky. Vzájemná poloha bodů a přímk v rovině, odchylka dvou přímk, vzdálenost bodů, bodu od přímky, vzdálenost dvou rovnoběžných přímk. Parametrické vyjádření přímky v prostoru, parametrické vyjádření roviny, obecná rovnice roviny, normálový vektor roviny.

## 21 Analytická geometrie kuželoseček

Existují 3 typy: *paraboly*, *hyperboly* a *elipsy* (a speciální případ je kružnice). Můžeme je vytvořit průnikem roviny a rotační kuželovou plochou. Typ kuželosečky záleží na úhlu mezi rovinou a kuželovou plochou.

Rovina kolmo na osu symetrie rotační kuželové plochy nám dává kružnici.

Pokud je rovina rovnoběžná na nějakou povrchovou rovnoběžku pláště (?to jest: svírá s osou symetrie úhel velikosti přesně poloviny vrcholového úhlu), tak nám vzniká parabola.

Úhel, který je mezi těmito dvěma nám dává elipsu, která protíná všechny povrchové přímky a s žádnou tak není rovnoběžná.

A úhel menší než polovina vrcholového úhlu, dává hyperbolu. Přičemž platí, že rovina hyperboly je rovnoběžná právě se 2 přímkami.

### 21.1 Degenerované kuželosečky

Nebo také nazývané jako *nevlastní* či *singulární*. Vznikají když rovina prochází vrcholem kuželové plochy. Takováto kuželosečka může být (podle toho, jaký svírá úhel): bodem (z kružnice), přímkou (z paraboly) nebo 2 přímkami (z hyperboly).

### 21.2 Elipsa

Všechny body elipsy mají tu vlastnost, že součet vzdáleností od 2 bodů, nazývané *ohniska*, je stejná. Má následující věci:

- *Ohniska*
- *Střed* - v přímce s ohnisky, ve stejné vzdálenosti od každého
- *Hlavní osa* - někdy jako "průměr", nejdelší průměr elipsy -> prochází oběma ohnisky
- *Hlavní vrcholy* - průsečík elipsy s hlavní poloosou
- *Hlavní poloosa* - spojuje střed a hlavní vrcholy
- *Vedlejší osa* - nejkratší průměr, kolmá na hlavní osu
- *Vedlejší poloosa, vrcholy* - ...

- *Excentricita!!!* - výstřednost, vzdálenost ohniska a středu elipsy značí se  $e$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (273)$$

V rovnici (273) v kanonickém tvaru značí  $x_0$  a  $y_0$  střed elipsy,  $a$  je hlavní poloosa a  $b$  je vedlejší poloosa. Pro excentricitu potom platí  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad (274)$$

Ve vrcholové rovnici (274) je  $p = \frac{b^2}{a}$  je tzv. *parametr elipsy*

### 21.2.1 Kružnice

Speciální případ elipsy. Všechny body kružnice mají stejnou vzdálenost od jednoho bodu a to středu kružnice.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (275)$$

Kde  $x_0$  (nebo  $m$ ) a  $y_0$  (nebo  $n$ ) odpovídají souřadnicím středu. Samozřejmě  $r$  je poloměr.

### 21.2.2 Vztah s přímkou

Přímka může být buď mimoběžná, nebo může být tečnou (tj. 1 společný bod přímky a elipsy/kružnice) nebo sečnou (tj. 2 společné body). Počet společných bodů zjistíme vyřešením soustavy rovnic elipsy (/kružnice) a přímky. Rovnice pro tečny s bodem dotyku  $T = [t_x; t_y]$

#### Tečna v bodě(elipsa)

$$\frac{(t_x - m)(x - m)}{a^2} + \frac{(t_y - n)(y - n)}{b^2} = 1 \quad (276)$$

#### Tečna v bodě(kružnice)

$$(t_x - m)(x - m) + (t_y - n)(y - n) = r^2 \quad (277)$$



## 21.3 Parabola

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad (x - m)^2 = 2p(y - n) \quad (278)$$

Rovnice pro paraboly s osou rovnoběžnou s osou  $y$ . Pro  $p > 0$  je parabola otevřená doprava, pro  $p < 0$  je otevřená doleva. Rovnice pro paraboly s osou rovnoběžnou s osou  $x$  je v podstatě stejná jen se prohodí  $x$  a  $y$  (a taktéž  $m/x_0$  a  $n/y_0$ ). Je-li osa paraboly rovnoběžná s osou  $x$  nebo osou  $y$ , tak je v tzv. *normální poloze*. Parabola je také grafem kvadratické funkce.

Parabola je množina bodů stejně vzdálených od *ohniska* (neboli *fokus*), značeno  $F$ , a od *řídící přímky* (?taktéž nazývané *direktix*?) označované  $d$ . Parabola je osově souměrná. Osa, označovaná  $o$ , prochází ohniskem a je kolmá na řídící přímku. Parametr  $p$  je roven nejkratší vzdálenosti ohniska a řídící přímky. Z toho vyplývá:

$$F = \left[ x_0 + \frac{p}{2}; y_0 \right] \quad d : x = x_0 - \frac{p}{2} \quad (279)$$

Vrchol je  $V = [m, n]$

### 21.3.1 Vztah s přímkou

Přímka může být mimoběžná. Může být tečnou (tj. jeden společný bod). Může být sečnou - ta má 2 nebo 1 společný bod. Počet společných bodů zjistíme jednoduše vyřešením soustavy rovnic paraboly a dané přímky. Pokud chceme rozlišit tečnu od tzv. *Asymptotické sečny*, která má taky 1 společný bod, je třeba se zjistit, jestli je přímka rovnoběžná s osou paraboly. Pokud ANO, tak je asymptotickou sečnou, pokud NE, tak je tečnou.

Platí to proto, že parabola je kvadratickou funkcí a přímka je funkcí lineární. Kvadratická stoupá rychleji, takže jestli existuje jeden průnik, kde se přímka dostane nad parabolu, tak musí existovat i druhý průnik, když parabola přímku přeroste. To nenastane jen v případě, kdy je přímka kolmá na řídící přímku, a to znamená, že je rovnoběžná s osou paraboly.

**Tečna v bodě** Viz tabulky! Záleží na otočení paraboly: Je-li kvadratická  $y$  nebo  $x$  část a hodnota  $p$ . Pozor ale na označení viz Meta [21.7](#).

$$\text{Parabola :} \quad \text{Tecna v bode } t_x, t_y : \quad (280)$$

$$(y - n)^2 = 2p(x - m) \quad (t_y - n)(y - n) = p(t_x - m) + p(x - m) \quad (281)$$

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \quad (t_x - m)(x - m) = -p(t_y - n) - p(y - n) \quad (282)$$

## 21.4 Hyperbola

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (283)$$

Nemyslíme-li nadsázku, je hyperbola množina bodů, pro které platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů (ohnisek) je vždy stejný. Věci:

- $S[m, n]$  - střed hyperboly os souřadnicích  $m, n$ . Na přímce s ohnisky, stejně vzdálený od obou.
- $F_1, F_2$  - ohniska
- $o_1$  - hlavní osa, přímka procházející oběma ohnisky
- $o_2$  - vedlejší osa, kolmá na hlavní
- $A, B$  - vrcholy - průsečíky hyperboly a hlavní osy
- $a$  - délka hlavní poloosy,  $|AS| = |SB| = a$
- $e$  - excentricita, vzdálenost ohniska  $F$  od středu  $S$ , platí  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $b$  - délka vedlejší poloosy, z rovnice o excentritě, vytvoříme pravoúhlý trojúhelník, s vrcholy v bodech  $A, S$  a  $D$ , tak bod  $D$  leží na asymptotě.  $b$  je tak rovno vzdálenosti vrcholu  $A$  a bodu, který je průnikem asymptoty a kružnice se středem v  $S$  a poloměrem  $e$ .
- $p_1, p_2$  asymptoty, viz 21.4.1

### 21.4.1 Asymptoty

Asymptota je přímka, které se graf funkce přibližuje, ale nikdy se k ní doopravdy nepřiblíží(? , nebo limitně já nevím?). Vzdálenost mezi přímkou a grafem funkce se zmenšuje s rostoucími hodnotami. Pro paraboly je bod přiblížení v nekonečnu. Rovnice asymptot (jsou právě 2) vypadá následovně:

$$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m) \quad (284)$$

## 21.5 Vztah s přímkou

Můžeme určit z toho na co vede soustava rovnic přímky a hyperboly.

- *Tečna*: kvadratická rovnice s jedním reálným kořenem
- *Sečna*: kvadratická rovnice se 2 reálnými kořeny
- *Nesečna*(mimoběžka): kvadratická rovnice bez reálných kořenů
- *Asymptotická sečna*: lineární rovnice ( =>1 řešení)
- *Asymptota*: soustava rovnic vede na nepravdivé tvrzení

**Tečna v bodě** viz tabulky! Ale pozor na značení! Více v Meta [21.7](#)

$$\frac{(t_x - m)(x - m)}{a^2} - \frac{(t_y - n)(y - n)}{b^2} = 1 \quad (285)$$

## 21.6 Obecná rovnice kuželoseček

### 21.6.1 Kružnice

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0 \quad , \text{ kde } m^2 + n^2 - p > 0 \quad (286)$$

$$S[m, n] \quad \sqrt{m^2 + n^2 - p} = r \quad (287)$$

### 21.6.2 Elipsy

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (288)$$

$$, \text{ kde: } q > p > 0 \quad qr^2 + ps^2 - pqt > 0 \quad (289)$$

### 21.6.3 Hyperboly

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad (290)$$

$$, \text{ kde: } pq < 0 \quad qr^2 + ps^2 - pqt \neq 0 \quad (291)$$

#### 21.6.4 Paraboly

$$y^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad , \text{ kde: } r \neq 0 \quad (292)$$

$$x^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad , \text{ kde: } s \neq 0 \quad (293)$$

### 21.7 Meta

!!

Někde používají  $m$  a  $n$ , jinde  $x_0$  a  $y_0$ . Původně jsem to chtěl psát v obou tvarech, ale vykašlal jsem se na to, takže to někde není. To neznamena, že se v tom případě nepoužívají oba zápisy!!

Tak teď jsem zjistil, že v tabulkách používají  $x_0$  a  $y_0$  jako souřadnice označující bod dotyku v rovnici tečny.... Takže jsem je prostě převedl na  $t_x$  a  $t_y$ , aby v tom nebyl bordel... Bacha na to při využívání tabulek!!!! nechápu, jak je to napadlo použít zrovna tadyto označení, když se všude jinde používá místo  $m$  a  $n$ ....

!!

#### 21.7.1 Zdroje

- <https://matematika.cz/kuzelosecky>
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ku%C5%BEllose%C4%8Dka>
- [http://www.bossof105.cz/soubory/poster\\_kuzelosecky.pdf](http://www.bossof105.cz/soubory/poster_kuzelosecky.pdf)
- [http://www.bossof105.cz/soubory/AG\\_03-2.pdf](http://www.bossof105.cz/soubory/AG_03-2.pdf)
- <https://matematika.cz/parabola>

#### 21.7.2 Pojmy/zadání

Definice a analytické vyjádření kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly. Vzájemná poloha přímky a kuželosečky, rovnice tečny.

## 22 Polohové a metrické úlohy řešené metodou analytické geometrie

### 22.1 Co je již jinde

Vzájemná poloha bodu, přímky a roviny ve 3D a jejich odchylky či vzdálenosti [18.1](#), ale chybí tam polopřímka, úsečka a zjednodušení pro 2D.

Vzájemná poloha přímky/bodu a kuželosečky, tečna kuželosečky v bodě je v [21](#), ale chybí tečna rovnoběžná/kolmá s/na jinou přímku.

### 22.2 Polopřímka a úsečka v prostoru

Polopřímka  $\overrightarrow{AB}$  je :

$$X = A + t(B - A) \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle \quad (294)$$

Úsečka  $|AB|$  je:

$$X = A + t(B - A) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (295)$$

Stejný zápis se používá i v rovině, akorát body nejsou určeny třemi souřadnicemi, ale dvěmi.

### 22.3 Střed a délka úsečky

Délka úsečky je vzdálenost jejích krajních bodů, takže je již popsáno v [18.1.1](#), přesněji rovnice [231](#). Ta ale může být pro 2D zjednodušena:

$$|AB| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2} \quad (296)$$

Střed úsečky  $S_{AB} = [S_x, S_y]$  (případně  $S_{AB} = [S_x, S_y, S_z]$  ) zapíšeme jako aritmetický průměr souřadnic bodů:

$$S_{AB} = \frac{A + B}{2} \quad (297)$$

$$S_x = \frac{A_x + B_x}{2} \quad (298)$$

$$S_y = \frac{A_y + B_y}{2} \quad (299)$$

$$S_z = \frac{A_z + B_z}{2} \quad (300)$$

Takto to funguje obecně v  $n$ -rozměrném prostoru. Pokud pracujeme pouze na v rovině (nebo jen na přímce), tak vyšší rozměry zůstávají nezměněny, protože sečteme dvě stejná čísla a vydělíme je dvěma.

## 22.4 Přímka v rovině

- *Směrový vektor* je nenulový vektor, který lze umístit na přímku.  $\vec{o} \neq \vec{u} = (u_x, u_y)$
- *normálový vektor* je kolmý na směrový vektor.  $\vec{n} \perp \vec{u}$ . Zapisujeme  $\vec{n} = (n_x, n_y)$
- *Směrnice* je tangens úhlu, který svírá přímka s osou  $x$ .  $k = \tan \phi$  (pouze když  $\phi \neq \frac{1}{2}\pi$ )

Směrový ani normálový vektor nejsou určeny jednoznačně, můžeme zvolit libovolný z rovnoběžných vektorů.

### 22.4.1 Vyjádření a rovnice

**Parametrické vyjádření** je stejné jako 18.1.2, polopřímka a úsečka je pomocí nich jako v 22.2.

#### Obecná rovnice

$$ax + by + c = 0 \quad (301)$$

$$\vec{n} = (a, b) \neq \vec{o} \quad (302)$$

**Směrnice** dokáže vyjádřit jen přímky, které nejsou rovnoběžné s osou  $y$

$$y = kx + q \quad (303)$$

$$k = \tan \phi \text{ je směrnice} \quad (304)$$

Přímka zadaná bodem  $A[A_x, A_y]$  a směrnici  $k$ :

$$y - a_y = k(x - a_x) \quad (305)$$

**Normálový tvar** nic mi neříká, asi jsme ho nebrali.

$$x \cos \psi + y \sin \psi - n = 0 \quad (306)$$

Kde  $n$  je délka normálového vektoru přímky, který končí v počátku. A úhel  $\psi$  je mezi tímto normálovým vektorem a osou  $x$ .

**Úsekový tvar** který mi nic neříká. Navíc funguje, když přímka neprochází počátkem a není rovnoběžná ani s jednou osou.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad (307)$$

Průsečík s osou  $x$  je  $[p, 0]$  a s osou  $y$   $[0, q]$

#### 22.4.2 Vzdálenost bodu

Máme bod  $M[m_x, m_y]$  a přímku  $p : ax + by + c = 0$

$$|Mp| = \frac{|am_x + bm_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (308)$$

#### 22.4.3 Odchylka dvou přímek

**Směrové vektory**  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$  připadají přímkám  $p, q$ , které svírají úhle  $\phi$

$$\cos \phi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|u_x v_x + u_y v_y|}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2} \cdot \sqrt{u_y^2 + v_y^2}} \quad (309)$$

Podmínka rovnoběžnosti:  $\vec{u} = k\vec{v}$  (když  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )

Podmínka kolmosti:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Směrnice**  $k_1$  a  $k_2$  přímek  $p, q$  svírající úhel  $\phi$

$$\tan \phi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \quad \text{jestliže } k_1 k_2 \neq -1 \quad (310)$$

$$\phi = \frac{1}{2}\pi \quad \text{jestliže } k_1 k_2 = -1 \quad (311)$$

Podmínka rovnoběžnosti:  $k_1 = k_2$

Podmínka kolmosti:  $k_1 k_2 = -1$

## 22.5 Meta

Jak psát  $\phi$  vs  $\varphi$  ?

### 22.5.1 Zdroje

### 22.5.2 Zadání/pojmy

Střed úsečky a délka úsečky, vzájemná poloha bodu a přímky, vzdálenost bodu od přímky, vzájemná poloha přímek, polopřímek a úseček v rovině, odchylka dvou přímek v rovině, vzájemná poloha bodu a roviny, vzájemná poloha dvou přímek v prostoru, vzájemná poloha přímky a roviny, vzájemná poloha kuželosečky a bodu, vzájemná poloha přímky a kuželosečky, tečna kuželosečky v bodě dotyku, rovnoběžná s danou přímkou, kolmá k dané přímce.

## 23 Diferenciální počet

Diferenciální počet zkoumá změnu funkčních hodnot v závislosti na proměnné. Derivace je poměr změny funkčních hodnot a změny argumentu (nebo i argumentů, ale to je mimo SŠ matematiku viz. [https://www.youtube.com/results?search\\_query=multivariable+calculus](https://www.youtube.com/results?search_query=multivariable+calculus)). Ve fyzice se využívá k definici rychlosti (změna dráhy za čas) a zrychlení (změna rychlosti za čas). Vlastnosti:

- Každý bod funkce má buď právě jednu derivaci nebo žádnou. Nemůže nastat, že by měl jeden bod více derivací.
- Pokud pro bod existuje derivace potom platí, že je tam funkce spojitá.
- Derivace funkce v bodě je rovna *směrnici tečny* tohoto grafu v tomto bodě. (Graf funkce musí být 2-rozměrný).

Směrnice tečny:

- Tečna má s křivkou společný právě jeden bod.
- Směrnice přímky je tangens úhlu, který svírá daná přímka s osou  $x$ .

Platí to, protože poměr změny funkční hodnoty a změny argumentu odpovídá odvěsnám pravoúhlého trojúhelníku.



## 23.1 Zápis

### 23.1.1 Leibnizova notace

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{d}{dx}f(x) \qquad \frac{df}{dx} \qquad (312)$$

Aneb ta jediná, která je potřeba. Leibniz asi věděl, co dělá vzhledem k tomu, že nezávisle na Newtonovi vymyslel calculus. Přesně vyjadřuje, podle které proměnné se derivuje (jmenovatel). Umožňuje zápis pro n-té derivace i pro derivaci v bodě. Navíc v této notaci lze krásně vidět, proč platí *řetězkové pravidlo*

$$\frac{d^n y}{dx^n} \qquad \frac{d^n(f(x))}{(dx)^n} \qquad \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) \qquad , \text{ protože: } \frac{d\left(\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}\right)}{dx} \qquad (313)$$

$$\frac{dy}{dx}(a) \qquad \text{hodnota derivace v bodě } a \qquad (314)$$

### 23.1.2 Lagrange

$$f'(x) \qquad f''(x) \qquad f^{iv}(x) = f^{(4)}(x) \qquad (315)$$

*Lagrangeova notace*, podle mě dost na nic. Navíc pro vyšší čísla než 3 se místo apostrofu má využít římská číslice (nebo arabská číslice v závorkách, aby se rozlišilo od mocniny). lol

### 23.1.3 Euler

$$D_x f \qquad (316)$$

Další je *Eulerova notace*, kde případný dolní index  $D$  určuje podle, které proměnné se derivuje. Případně horní index indikuje kolikátá to má být derivace. Vypadá funkčně, ale nikdy jsem neviděl.

### 23.1.4 Newton

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (317)$$

Tak toto to je peak fyzikální notace přinesená samotným Newtonem. Také nazývaná tečková notace. Proč asi? Potřebuji znázornit změnu dráhy podle času, tak tam prostě mrsknu tečku. Co když budu chtít zrychlení, bum! 2 tečky. Absolutně nezobecnitelný. Proč by někdo mohl chtít využít stejnou zákonitost na něco jiného? ... To jsem ještě neviděl XD.

## 23.2 Definice

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (318)$$

První zápis je v podstatě zápisem poměru změn (znak delta  $\Delta$ ) funkční hodnoty a argumentu. Druhý naznačuje poměr dvou *infinitesimálních hodnot*. Vnímán jako jeden symbol (v některých odvětvích matematiky i jako zlomek, ale to se opět SŠ netýká), který označuje derivování  $y$  podle  $x$ . Poslední se u nás nevyužívá, ale můžeme se s ním setkat v anglofonních zemích. se využívá při parciálních derivacích (mimo SŠ).

Představa jako podíl nekonečně malých hodnot se ukázala jako nepřesná, a tak byla nahrazena definicí pomocí limit:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (319)$$

## 23.3 Vzorce a pravidla

### 23.3.1 Derivace součtu

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (320)$$

### 23.3.2 Derivace součinu

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x) \qquad , \text{ kde } a \text{ je nějaká konstanta} \qquad (321)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad (322)$$

### 23.3.3 Derivace podílu

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (323)$$

### 23.3.4 Derivace složené funkce

$$\text{Pokud: } f(x) = h(g(x)) \quad , \text{pak: } f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (324)$$

Jedná se o takzvané *řetízkové pravidlo* (angl. *Chain rule*). Lepší pochopitelnost, ale získáme požitím Leibnizovy notace:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad (325)$$

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dg}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \quad (326)$$

$$(327)$$

Příklad použití pro derivování  $f(x) = (3x + 1)^2$ :

$$\frac{d((3x + 1)^2)}{dx} = \frac{d((3x + 1)^2)}{d(3x + 1)} \cdot \frac{d(3x + 1)}{dx} = 2(3x + 1) \cdot 3$$

## 23.4 Derivace elementárních funkcí

Viz tabulky... nebo [https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace\\_element%C3%A1rn%C3%ADch\\_funkc%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace_element%C3%A1rn%C3%ADch_funkc%C3%AD)

## 23.5 L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (328)$$

Říká, že limita podílu 2 funkcí je (za nějakých předpokladů) rovna limitě podílu derivací těchto 2 funkcí. Předpoklady (nějaké):

- Reálná čísla (definiční obory i funkční hodnoty)
- $g(x)$  a  $g'(x)$  jsou nenulové ?na nějakém okolí čísla  $a$

- Limity (blížící se stejnému číslu  $a$  jako v podílu) jednotlivých funkcí musí být buď obě nulové nebo obě nekonečné (se stejným znaménkem)
- Existuje limita podílu derivací. (Tato podmínka je protože nemůžeme z neexistence limity podílu derivací funkcí vyvodit neexistenci limity podílu funkcí)

### 23.5.1 Využití

Při hledání limit podílů výrazů s jednou proměnou může ušetřit namáhavé výpočty.

## 23.6 Využití derivací

Určení chování funkce a extrémů - viz tabulka 3

$f'(x)$	$f''(x)$	Vlastnost
+		Rostoucí
-		Klesající
0		Stacionární bod
0	+	Lokální maximum
0	-	Lokální minimum
	+	Konvexní
	-	Konkávní
	0	Inflexní bod

Tabulka 3: Vlastnosti zjistitelné derivací

## 23.7 Meta

### 23.7.1 Zadání/pojmy

Derivace funkce v bodě, základní geometrická a fyzikální interpretace derivace funkce v bodě, derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí, derivace složené funkce, derivace elementárních funkcí, odvození na základě definice, l'Hospitalovo pravidlo a jeho užití. Využití diferenciálního počtu při hledání extrémních hodnot funkcí jedné reálné proměnné.

### 23.7.2 Zdroje

- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1pis\\_derivace](https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1pis_derivace)
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD\\_po%C4%8Det](https://cs.wikipedia.org/wiki/Diferenci%C3%A1ln%C3%AD_po%C4%8Det)
- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Derivace>
- <https://matematika.cz/derivace>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/L%27Hospitalovo\\_pravidlo](https://cs.wikipedia.org/wiki/L%27Hospitalovo_pravidlo)
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_calculus](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_calculus)
- <https://matematika.cz/derivace-vzorce>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98et%C3%ADzkov%C3%A9\\_pravidlo](https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%98et%C3%ADzkov%C3%A9_pravidlo)
- <http://tutorial.math.lamar.edu/problems/calci/chainrule.aspx>
- <https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/LaTeXPrimer/Calculus.html>
- [https://www.overleaf.com/learn/latex/Mathematical\\_expressions](https://www.overleaf.com/learn/latex/Mathematical_expressions)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable\\_calculus](https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable_calculus)

A super série od 3Blue1Brown: <https://www.youtube.com/watch?v=WUvTyaaNkzM&list=PLZHQObOWTQDMsr9K-rj53DwVRMY03t5Yr&index=1>

## 24 Integrální počet

Integrální počet tvoří společně s diferenciálním počtem tzv. *infinitesimální počet* (angl. *Calculus*). Integrace je inverzní operace k derivaci. V procesu *integrace* hledáme k integrované funkci tzv. *Primitivní funkci*, jejíž derivací dosáhneme původní funkci, kterou chceme integrovat. Primitivní se často zapisuje jako velké  $F$  (viz 329) pro funkci  $f$ . Množina primitivních funkcí se označuje jako neurčitý integrál. Jedná se o množinu, protože primitivních

funkcí je nekonečně mnoho a liší se od sebe jen absolutním členem, z kterého je po derivaci vždy nula (viz 330). Tato konstanta se označuje  $C$ .

$$F = \int f(x) dx \quad (329)$$

$$\int 2x dx = x^2 + C \quad (330)$$

Integrál odpovídá ploše pod grafem. Pojmeme *určitý integrál* se rozumí obsah plochy pod křivkou grafu (a nad osou  $x$ ), kde  $x$  je mezi hodnotami  $a$  a  $b$ . Viz (331)

$$\int_a^b f(x) dx \quad (331)$$

Vztah mezi určitým a neurčitým integrálem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (332)$$

## 24.1 Vzorce

Viz tabulky nebo <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/bakalarka/integraly/sec/1.html>

Platí inverzně k pravidlům o derivování (viz 23.4), takže si stačí v některých případech zapamatovat proces jen jedním směrem.

## 24.2 Metoda per partes

Založena na větě o derivaci součinu (viz 23.3.2). Získáme tak vzorce:

$$\int (uv)' dx = \int (u'v) dx + \int (uv') dx = \int (u'v) dx + \int (uv') dx \quad (333)$$

Upravením druhé rovnice získáme postup označovaný jako metoda per partes:

$$\int (uv') dx = uv - \int (u'v) dx \quad (334)$$

## 24.3 Využití

Integrál se dá využít k výpočtu plochy 2D obrazců. Stačí jen vhodně zapsat jednotlivé přímky jako funkce. K nim vypočítat určitý integrál. To pak sečíst a odečíst. Lze tuto metodu využít k výpočtu obecného vzorce pro obsah určitého typu 2D obrazců.

### 24.3.1 Objem rotačních těles

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (335)$$

Funkce  $f(x)$  musí být nezáporná. Potom objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy  $x$  je dán tímto vzorcem.

### 24.3.2 Délka křivky funkce

Asi mimo SŠ. Funkce  $f(x)$  a její derivace  $f'(x)$  musí být na  $\langle a, b \rangle$  spojitě. Pak je délka grafu  $l$  podle vzorce:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (336)$$

Další vzorce už nebudu do TeX přepisovat. Odakzuji na [https://cs.wikipedia.org/wiki/Per\\_partes](https://cs.wikipedia.org/wiki/Per_partes)

## 24.4 Meta

### 24.4.1 Zdroje

- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>
- <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/bakalarka/integraly/index.html>
- <https://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/web/i21.html#textpart2.1>
- [https://cs.wikipedia.org/wiki/Per\\_partes](https://cs.wikipedia.org/wiki/Per_partes)

### 24.4.2 Zadání/Pojmy

Definice primitivní funkce k dané funkci, primitivní funkce k elementárním funkcím. Integrační metody, přímá integrace, metoda per partes, metoda substituční. Pojem určitého integrálu, vlastnosti určitých integrálů, substituce a metoda per partes v určitém integrálu. Výpočet obsahu rovinného obrazce a výpočet objemu rotačního tělesa užitím určitého integrálu.

## 25 Aplikace diferenciálního a integrálního počtu

Viz 23.6 o derivace. Viz 24.3 pro integrály.

### 25.1 Meta

#### 25.1.1 Zdroje

- <https://cs.wikipedia.org/wiki/Asymptota>

#### 25.1.2 Zadání/pojmy

Vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce, monotónnost a derivace, lokální extrémů funkce a derivace, funkce konvexní a konkávní, inflexní body, asymptoty. Slovní úlohy na extrémů. Výpočty obsahů rovinných útvarů, výpočet objemu rotačního tělesa.

## Obsah

0.1	Meta	1
0.1.1	Deníček	1
0.1.2	TODO-list	3
0.1.3	Latex tipy	4
0.1.4	Informace pro čtenáře	4
1	Logická výstavba matematiky	5
1.1	Meta	5
1.1.1	Zdroje	5



1.1.2	Zadání/Pojmy . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Množiny</b>	<b>5</b>
2.1	Definice a značení . . . . .	5
2.2	Pojmy . . . . .	5
2.3	Grafické znázornění . . . . .	9
2.4	Zobrazení . . . . .	9
2.4.1	Speciální případy . . . . .	9
2.4.2	Inverzní zobrazení . . . . .	10
2.4.3	Složené zobrazení . . . . .	10
2.4.4	Funkce . . . . .	11
2.5	Meta . . . . .	11
2.5.1	Zdroje . . . . .	11
2.5.2	Zadání/Pojmy . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Číselné obory</b>	<b>12</b>
3.1	Množiny čísel . . . . .	12
3.2	Číselná osa . . . . .	13
3.2.1	Absolutní hodnota . . . . .	13
3.3	Operace s reálnými čísly a jejich vlastnosti . . . . .	13
3.3.1	Neutrální prvky . . . . .	13
3.3.2	Porovnávání . . . . .	14
3.3.3	Základní operace . . . . .	14
3.3.4	Vlastnosti sčítání a násobení . . . . .	14
3.3.5	Součet a součin většího množství čísel . . . . .	15
3.3.6	Mocniny a odmocniny . . . . .	15
3.4	Komplexní čísla . . . . .	16
3.4.1	Zápis . . . . .	16
3.5	Zvláštní případy komplexních čísel . . . . .	17
3.6	Operace s komplexními čísly . . . . .	17
3.6.1	Rovnost . . . . .	17
3.6.2	Součet a rozdíl . . . . .	18
3.6.3	Součin . . . . .	18
3.6.4	Podíl . . . . .	18
3.7	Mocnina komplexního čísla . . . . .	19
3.7.1	Moivreova věta . . . . .	19
3.8	„Odmocnina“ komplexního čísla . . . . .	19
3.9	Meta . . . . .	19

3.9.1	Zdroje . . . . .	20
3.9.2	Zadání/Pojmy . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Algebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Vlastnosti algebraických funkcí a posloupností</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Grafy elementárních algebraických funkcí</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Limita a spojitost funkce</b>	<b>21</b>
7.1	Meta . . . . .	21
7.1.1	Zdroje . . . . .	21
7.1.2	Zadání/Pojmy . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Nealgebraické funkce</b>	<b>21</b>
<b>9</b>	<b>Goniometrie a trigonometrie</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	<b>Nealgebraické rovnice, nerovnice a jejich soustavy</b>	<b>21</b>
<b>11</b>	<b>Kombinatorika</b>	<b>22</b>
11.1	Faktoriály . . . . .	22
11.2	Kombinační čísla . . . . .	22
11.2.1	Binomická věta . . . . .	23
11.3	Množinový pohled . . . . .	23
11.4	Variace . . . . .	23
11.4.1	Variace bez opakování . . . . .	23
11.4.2	Variace s opakováním . . . . .	24
11.5	Permutace . . . . .	24
11.5.1	Permutace bez opakování . . . . .	24
11.5.2	Permutace s opakováním . . . . .	24
11.6	Kombinace . . . . .	24
11.6.1	Kombinace bez opakování . . . . .	24
11.6.2	Kombinace s opakováním . . . . .	25
11.7	Pravidla . . . . .	25
11.7.1	Součtu . . . . .	25
11.7.2	Součinu . . . . .	25
11.8	Meta . . . . .	26
11.8.1	Zdroje . . . . .	26

11.8.2	Zadání/ pojmy . . . . .	26
<b>12</b>	<b>Pravděpodobnost</b>	<b>26</b>
12.1	Náhodné pokusy . . . . .	26
12.2	Jevy a jejich pravděpodobnost . . . . .	27
12.3	Opakování náhodného pokusu . . . . .	29
12.3.1	Bernoulliho schéma . . . . .	29
12.4	Meta . . . . .	30
12.4.1	Zdroje . . . . .	30
12.4.2	Pojmy/ zadání . . . . .	30
<b>13</b>	<b>Statistika</b>	<b>30</b>
13.1	Rozdělení četnosti . . . . .	31
13.1.1	Skupinové rozložení četností . . . . .	32
13.2	Grafické znázornění četností . . . . .	32
13.2.1	Tabulka . . . . .	32
13.2.2	Spojnicový diagram . . . . .	32
13.2.3	Sloupkový diagram . . . . .	33
13.2.4	Kruhový diagram . . . . .	33
13.3	Charakteristiky polohy kvantitativního znaku . . . . .	35
13.3.1	Vztahy mezi průměry . . . . .	36
13.4	Charakteristiky variability kvantitativního znaku . . . . .	36
13.5	Korelace . . . . .	37
13.6	Meta . . . . .	37
13.6.1	Zdroje . . . . .	37
13.6.2	Pojmy/ zadání . . . . .	38
<b>14</b>	<b>Posloupnosti a řady</b>	<b>38</b>
14.1	Posloupnosti . . . . .	38
14.1.1	Určení posloupnosti . . . . .	39
14.1.2	Vlastnosti posloupností . . . . .	39
14.1.3	Aritmetická posloupnost . . . . .	40
14.1.4	Geometrická posloupnost . . . . .	41
14.1.5	Vztah aritmetické a geometrické posloupnosti . . . . .	41
14.1.6	Využití aritmetické a geometrické posloupnosti . . . . .	41
14.1.7	Limita posloupnosti (vlastní) . . . . .	41
14.1.8	Nevlastní limita posloupnosti . . . . .	42
14.1.9	Věty o limitách posloupností . . . . .	42

14.2	Nekonečné řady . . . . .	43
14.2.1	Geometrická řada . . . . .	44
14.3	Finanční matematika . . . . .	45
14.3.1	Jednoduché úročení . . . . .	45
14.3.2	Složené úročení . . . . .	46
14.3.3	Pravidelné spoření při složeném úročení . . . . .	46
14.3.4	Pravidelné splácení dluhu . . . . .	47
14.4	Meta . . . . .	47
14.4.1	Zdroje . . . . .	47
14.4.2	Pojmy/ zadání . . . . .	47
<b>15</b>	<b>Základy planimetrie a konstrukční úlohy</b>	<b>48</b>
15.1	Základní pojmy a definice . . . . .	48
15.1.1	Bod . . . . .	48
15.1.2	Přímka . . . . .	48
15.1.3	Rovina . . . . .	48
15.1.4	Polorovina . . . . .	48
15.1.5	Polopřímka . . . . .	49
15.1.6	Úsečka . . . . .	49
15.1.7	Obrazce . . . . .	49
15.2	Úhly . . . . .	49
15.2.1	Pravidla pro dvojice úhlů . . . . .	49
15.3	Mnohoúhelníky . . . . .	50
15.3.1	Pravidelné mnohoúhelníky . . . . .	51
15.4	Trojúhelníky . . . . .	51
15.4.1	Konstrukce . . . . .	52
15.4.2	Druhy . . . . .	52
15.4.3	cool Věci . . . . .	53
15.4.4	Obvod a obsah . . . . .	54
15.4.5	Věty . . . . .	54
15.4.6	Rovnoramenný . . . . .	55
15.4.7	Rovnostranný . . . . .	55
15.5	Čtyřúhelníky . . . . .	55
15.5.1	Obvod a obsah . . . . .	56
15.5.2	Rozdělení . . . . .	56
15.6	Kruh a kružnice . . . . .	58
15.6.1	Vzájemná poloha 2 kružnic . . . . .	59
15.6.2	Vzájemná poloha s přímkou . . . . .	59

15.6.3	Vyjádření pomocí rovnic . . . . .	59
15.6.4	Úhly v kružnici . . . . .	59
15.6.5	Kruhová výseč . . . . .	59
15.6.6	Kruhová výseč . . . . .	60
15.6.7	Mezikruží . . . . .	60
15.6.8	Thaletova kružnice/věta . . . . .	60
15.7	Obvody a obsahy ostatních rovinných útvarů . . . . .	60
15.8	Konstrukce . . . . .	60
15.9	Meta . . . . .	61
15.9.1	Zdroje . . . . .	61
15.9.2	Pojmy/Zadání . . . . .	61
<b>16</b>	<b>Zobrazení v rovině</b>	<b>62</b>
16.1	Afinní zobrazení . . . . .	62
16.2	Podobná zobrazení . . . . .	62
16.3	Shodné zobrazení . . . . .	63
16.4	Využití v konstrukčních úlohách . . . . .	63
16.5	Meta . . . . .	63
16.5.1	Zdroje . . . . .	63
16.5.2	Pojmy/Zadání . . . . .	64
<b>17</b>	<b>Tělesa</b>	<b>64</b>
17.1	Cavalieriův princip . . . . .	64
17.2	Mnohostěny . . . . .	64
17.2.1	Platónská tělesa . . . . .	65
17.3	Hranoly . . . . .	65
17.3.1	Kvádr . . . . .	65
17.3.2	Krychle . . . . .	66
17.4	Jehlany . . . . .	66
17.4.1	Komolé jehlany . . . . .	66
17.5	Rotační tělesa . . . . .	66
17.5.1	Rotační válec . . . . .	66
17.5.2	Rotační kužel . . . . .	66
17.5.3	Komolý rotační kužel . . . . .	67
17.5.4	Koule . . . . .	67
17.5.5	Kulová úseč a kulový vrchlík . . . . .	67
17.5.6	Kulová vrstva a kulový pás . . . . .	67
17.6	Meta . . . . .	67

17.6.1	Zdroje . . . . .	68
17.6.2	Zadání/pojmy . . . . .	68
<b>18</b>	<b>Polohové a metrické úlohy ve stereometrii</b>	<b>68</b>
18.1	Vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v prostoru . . . . .	68
18.1.1	Bod a . . . . .	68
18.1.2	Přímka a . . . . .	69
18.1.3	Rovina . . . . .	71
18.2	Průnik přímky tělesem . . . . .	72
18.3	Řez tělesa rovinou . . . . .	72
18.4	Meta . . . . .	72
18.4.1	Zdroje . . . . .	72
18.4.2	Pojmy/Zadání . . . . .	73
<b>19</b>	<b>Vektorová algebra</b>	<b>73</b>
19.1	Vzdálenost bodů a střed úsečky . . . . .	73
19.2	Soustavy souřadnic . . . . .	73
19.3	Orientované úsečky . . . . .	73
19.4	Definice vektoru přes orientované úsečky . . . . .	73
19.5	Souřadnice vektoru . . . . .	74
19.6	Sčítání vektorů a násobení reálnými čísly . . . . .	74
19.7	Lineární kombinace a závislost . . . . .	74
19.8	Velikost . . . . .	75
19.8.1	Jednotkový vektor . . . . .	75
19.9	Skalární součin . . . . .	75
19.10	Úhel vektorů . . . . .	76
19.11	Vektorový součin v prostoru . . . . .	76
19.12	Pravotočivá a levotočivá báze . . . . .	77
19.13	Smíšený součin vektorů v prostoru . . . . .	77
19.14	Meta . . . . .	78
19.14.1	Zdroje . . . . .	78
19.14.2	Zadání/ pojmy . . . . .	78
<b>20</b>	<b>Analytická geometrie lineárních útvarů</b>	<b>78</b>
20.1	Meta . . . . .	78
20.1.1	Zdroje . . . . .	78
20.1.2	Zadání/ pojmy . . . . .	78

<b>21 Analytická geometrie kuželoseček</b>	<b>79</b>
21.1 Degenerované kuželosečky . . . . .	79
21.2 Elipsa . . . . .	79
21.2.1 Kružnice . . . . .	80
21.2.2 Vztah s přímkou . . . . .	80
21.3 Parabola . . . . .	81
21.3.1 Vztah s přímkou . . . . .	81
21.4 Hyperbola . . . . .	82
21.4.1 Asymptoty . . . . .	82
21.5 Vztah s přímkou . . . . .	83
21.6 Obecná rovnice kuželoseček . . . . .	83
21.6.1 Kružnice . . . . .	83
21.6.2 Elipsy . . . . .	83
21.6.3 Hyperboly . . . . .	83
21.6.4 Paraboly . . . . .	84
21.7 Meta . . . . .	84
21.7.1 Zdroje . . . . .	84
21.7.2 Pojmy/zadání . . . . .	84
<b>22 Polohové a metrické úlohy řešené metodou analytické geometrie</b>	<b>85</b>
22.1 Co je již jinde . . . . .	85
22.2 Polopřímka a úsečka v prostoru . . . . .	85
22.3 Střed a délka úsečky . . . . .	85
22.4 Přímka v rovině . . . . .	86
22.4.1 Vyjádření a rovnice . . . . .	86
22.4.2 Vzdálenost bodu . . . . .	87
22.4.3 Odchylka dvou přímek . . . . .	87
22.5 Meta . . . . .	88
22.5.1 Zdroje . . . . .	88
22.5.2 Zadání/pojmy . . . . .	88
<b>23 Diferenciální počet</b>	<b>88</b>
23.1 Zápis . . . . .	89
23.1.1 Leibnizova notace . . . . .	89
23.1.2 Lagrange . . . . .	89
23.1.3 Euler . . . . .	89
23.1.4 Newton . . . . .	90

23.2	Definice . . . . .	90
23.3	Vzorce a pravidla . . . . .	90
23.3.1	Derivace součtu . . . . .	90
23.3.2	Derivace součinu . . . . .	90
23.3.3	Derivace podílu . . . . .	91
23.3.4	Derivace složené funkce . . . . .	91
23.4	Derivace elementárních funkcí . . . . .	91
23.5	L'Hospitalovo pravidlo . . . . .	91
23.5.1	Využití . . . . .	92
23.6	Využití derivací . . . . .	92
23.7	Meta . . . . .	92
23.7.1	Zadání/pojmy . . . . .	92
23.7.2	Zdroje . . . . .	93
<b>24</b>	<b>Integrální počet</b>	<b>93</b>
24.1	Vzorce . . . . .	94
24.2	Metoda per partes . . . . .	94
24.3	Využití . . . . .	95
24.3.1	Objem rotačních těles . . . . .	95
24.3.2	Délka křivky funkce . . . . .	95
24.4	Meta . . . . .	95
24.4.1	Zdroje . . . . .	95
24.4.2	Zadání/Pojmy . . . . .	96
<b>25</b>	<b>Aplikace diferenciálního a integrálního počtu</b>	<b>96</b>
25.1	Meta . . . . .	96
25.2	Zdroje . . . . .	96
25.2.1	Zadání/pojmy . . . . .	96