

# Principe Physique des ordinateurs quantique

## intro

- Architectures d'ordinateurs quantiques
  - Qubit supraconducteurs
  - ions piégés
  - qubits de spin
  - qubits topologiques
  - qubits photoniques
- Défi d'un ordinateur quantique
  - Avoir un long temps de vie
  - Pouvoir faire des opération à un qubit
  - Pouvoir faire des opération à deux qubits
  - le long temp de vie et le contrôle ont des besoin contradictoire (beaucoup d'interaction vs le moins d'interaction possible)
- Circuit QED: Qubits supra (transmon) + cavité micro-onde

## Plan

- Notion de base de l'info Q
- oscillateur harmoniques et circuits supra
- qubit supra
- interaction lumière-matière
- Dissipation
- info quantique

## 1 Info quantique: notion de base

### 1.1 Bits et qubits

classique:  $0, 1$   $0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$       quantique:  $\{ |0\rangle, |1\rangle \}, 0 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les qubits peuvent être en superposition

$$|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$
$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Plusieurs qubits:

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \cdots \otimes |0\rangle = |010\cdots 0\rangle$$

## 1.2 Opérations logiques

### 1.2.1 Opérations à 1 bit

bit:  $\mathbb{1}$ , NOT

qubit: Une infinité d'opérations

Les opération sur des qubits sont des matrices unitaires

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

Les matrices de Pauli forment un base des opération unitaires.

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce sont les générateurs de rotation dans  $\mathbb{R}^3$ : isomorphisme entre SO3 et SU2.

$$R_z(\theta) = e^{\frac{-iZ\theta}{2}}$$

Plus généralement

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{\frac{i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}}$$

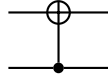
### 1.2.2 Opérations à 2 bits

NAND est une porte universelle! (On peut construire tout les portes à  $n > 2$  bits avec)

La *version quantique* de cette porte et le CNOT (Control not)

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

IN	OUT
00	00
01	01
10	11
11	10



### 1.3 Critère de D

*Critères minimal pour avoir un ordinateur quantique*

1. Un system avec des qubits bien définis pouvant être *mis à l'échelle* qubit: Système à deux niveau mise à l'échelle: requiert la correction d'erreur
2. Possibilité d'initialiser un état: Ôter l'entropie du system Un moyen de le faire dans un system suffisamment froid: attendre la relaxation:  $\langle 1|\psi \rangle \rightarrow 1$  pour  $t \ll 1$

### 1.3 Critère de DiVincinzo (suite)

3. Temps de cohérence plus long que les qubits logiques

$T_1 : |1\rangle \rightarrow |0\rangle$  (temps de relaxation)

$T_2 : |+\rangle \rightarrow |-\rangle$  (temps de déphasage)

4. Ensemble universel de portes logiques { rotation à 1 qubit (SU2), CNOT }

Ex: spin 1/2 dans  $B(t)$

$$H(t) \frac{\hbar\gamma}{2} (B_x(t)\sigma_x + B_y(t)\sigma_y + B_z(t)\sigma_z)$$

$$U(t) = T e^{-i \int_0^t dt' H(t')}$$

opérateurs à deux qubits

$$\text{CNOT} \rightarrow H(t) = J(t)\sigma_{21}\sigma_{x2}$$

5. Mesure des qubits

En ce moment la fidélité est de  $> 99\%$  pour  $T_{\text{mesure}}$

## 2 Circuit quantiques supraconducteurs

### 2.1 Oscillateurs LC

$$V_L = V_C \implies \phi_L = \phi_C \equiv \phi$$

$$I_L = \frac{\Phi}{L} = \frac{\phi}{L}$$

$$I_C = \dot{Q} = C\dot{V} = c\ddot{\phi}$$

$$I_1 + I_2 = c\ddot{\phi} + \frac{\phi}{l} = 0$$

$$\underbrace{\implies \ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0}_{\text{Eq. d'Euler-Lagrange}} \quad \text{avec } \omega_0 \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Le Lagrangien qui donne cette équation est

$$L = \frac{1}{2}C\dot{\phi}^2 - \frac{\phi^2}{2L} \leftrightarrow \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

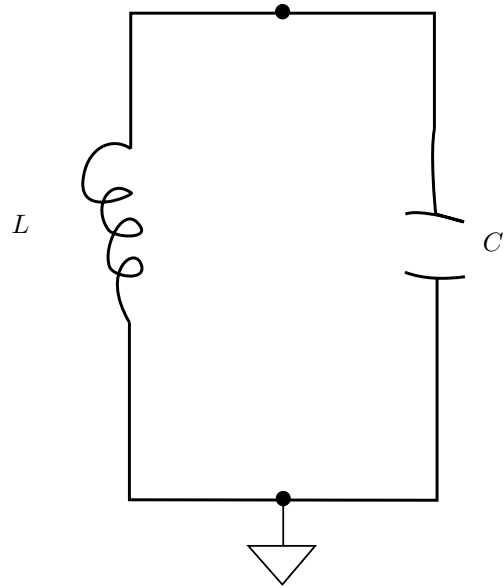


Figure 1: Circuit LC

L'Hamiltonien

$$H = \dot{\phi}q - L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{q^2}{2c} \frac{\phi^2}{2L}$$

avec  $q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = c\dot{\phi}$

Quantification:

$$q, \phi \rightarrow \hat{q}, \hat{\phi}$$

$$[A, B]_p \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]$$

$$[\phi, q]_p = 1 \rightarrow [\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar$$

On introduit les *opérateurs d'échelles*  $a$  et  $a^\dagger$

$$\phi = \sqrt{\frac{\hbar Z_0}{2}} (a^\dagger + a) \quad q = i\sqrt{\frac{\hbar}{2Z_0}} (a^\dagger - a)$$

$$H = \hbar\omega_0 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0 a^\dagger a$$

Valeur moyenne de  $\phi$  dans  $|0\rangle$ :  $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$

La variance est non-nulle  $\Delta\phi = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar Z_0}{2}}$

**Est-ce possible d'opérer un circuit LC dans le régime quantique?**

On veut  $\omega_0 \gg \kappa = \frac{\omega_0}{Q}$

$\kappa$  est le taux de perte d'énergie

$$\kappa = \frac{1}{RC} \quad Q = \omega_0 RC = \frac{R}{Z_0}$$

(pour une résistance en parallèle)

On veut que  $R$  (en parallèle)  $\rightarrow 0$  pour avoir  $Q \rightarrow \infty$

On veut aussi avoir  $\hbar\omega_0 \gg K_B T$  afin d'éviter les excitations harmoniques

À quoi correspondent les états  $|n\rangle$

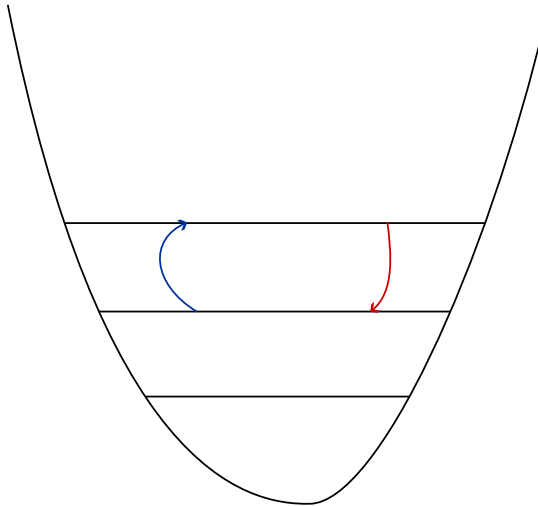


Figure 2: oscilleteur

Fluctuations quantiques du voltage

Opérateur voltage

$$q = CV \iff V = q/C$$

$$\Delta V = \sqrt{\langle 0|V^2|0\rangle - \langle 0|V|0\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c}} \sim 2.5\mu V$$

Des micro volts c'est gros!

## 2.2 Hamiltonien d'un circuit: méthode des noeuds

Flux de branche:  $\Phi_b(t) = \int_0^t dt' V(t')$

Charge de branche:  $Q_b(t) = \int_0^t dt' i_b(t')$

Énergie dans la branche  $b$

$$E_b = \int dt V_b(t) i_b(t)$$

branche capacitive

$$E_b = \dots = \frac{1}{2} c_b \dot{\Phi}_b^2$$

branche inductive:

$$E_b = \dots = \frac{\Phi_b^2}{2L_c}$$

$$\Phi_b = L_b i_b$$

2023-09-05



2023-09-06

## **2.4 Osillateur harmonique entreteu**

### 3 Qubits supraconducteurs

#### 3.1 Jonction Josephson

On a constaté que de piloter un circuit LC à sa fréquence de résonance génère un état cohérent (ce qui ne ressemble pas du tout à un système à deux niveau). Pour avoir un système à deux niveau on ajoute un élément non linéaire à notre circuit: la jonction Josephson

##### 3.1.1 Hamiltonien et relation de commutation

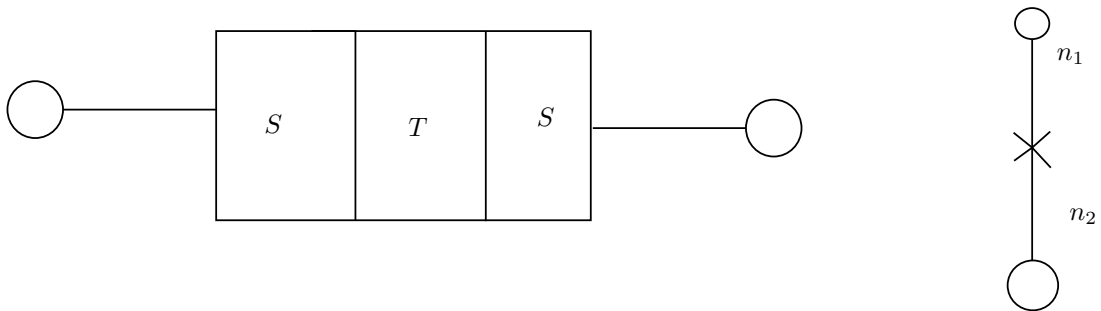


Figure 1: constitution de jj

$$n_1 + n_2 = \text{cte}$$

$n = n_1 - n_2$  peut changer par effet tunnel!

Description quantique

Base de charge :

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad n \in ]-\infty, \infty[$$

Dans cette base, l'hamiltonien qui décrit l'effet tunnels de paires de cooper est

$$H_J = -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|)$$

$E_J = \frac{\hbar \Delta}{8e^2 R_n}$  est l'énergie de Josephson

avec  $\Delta$  l'énergie de gap et  $R_n$  la résistance de l'état normal

### 3.1.2 Base de phase

$$|\psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} |n\rangle$$

avec  $\varphi \in [0, 2\pi[$

De la même façon

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-in\varphi} |\psi\rangle$$

Dans cette base le Hamiltonien s'écrit

$$\begin{aligned} H_J &= -\frac{E_J}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} d\varphi d\varphi' e^{-in\varphi} e^{i(n+1)\varphi'} |\varphi\rangle \langle \varphi'| + \text{H.C.} \right) \\ &= -\frac{E_J}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) |\varphi\rangle \langle \varphi| \end{aligned}$$

On introduit

$$e^{i\hat{\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi e^{i\varphi} |\varphi\rangle \langle \varphi|$$

qui agit sur  $|n\rangle$  comme

$$e^{\pm i\hat{\varphi}} |n\rangle = |n \mp 1\rangle$$

$$H_g = E_J \frac{e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}}{2} = -E_J \cos \varphi$$

la variable  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  s'interprète comme la différence de phase entre les deux côté de la jonction

### 3.1.3 Relation de commutation et relation constiutive

$$[e^{\pm i\hat{\varphi}}, \hat{n}] = e^{\pm i\hat{\varphi}}$$

C'est plus clair quand  $\hat{\varphi}$  est dans une fonction periodique

En utilisant la représentation de Heisenberg on peut trouver comment les opérateurs évoluent

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{2e}{\hbar} \hat{V} \quad (1)$$

$$\hat{I} = I_c \sin \hat{\varphi} \quad (2)$$

$$I_c = \frac{2eE_J}{\hbar}: \text{ le courant critique}$$

Le sinus est la non linéarité qu'on cherchait!

## 4 Transmons

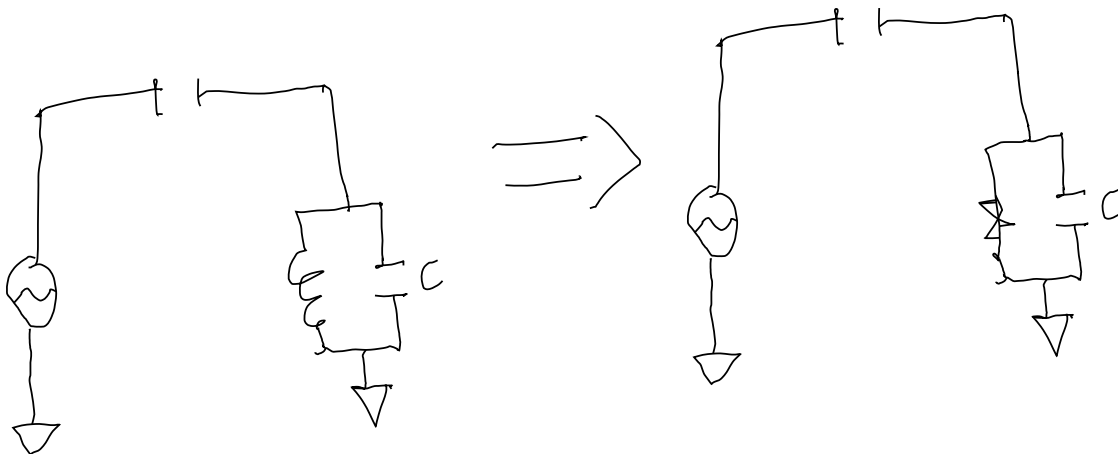


Figure 2: remplacement par une inductance non-lineaire

On remplace l'inductance par une jonction josephson qui agit dans un certain régime comme un inducteur linéaire

$$H = 4E_c (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \hat{\phi}$$

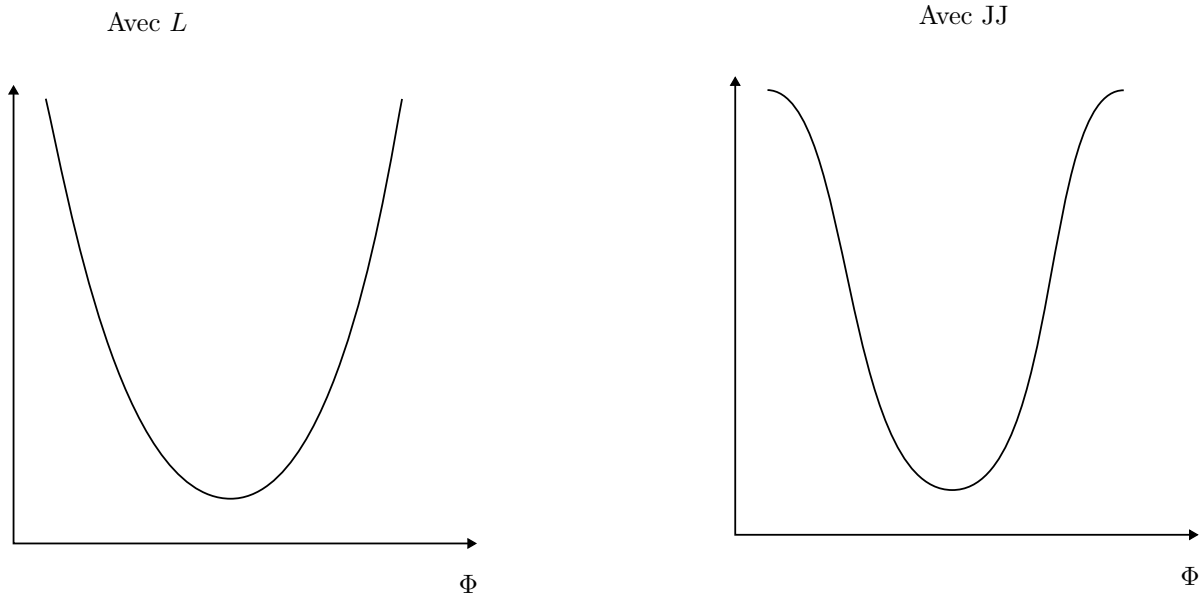


Figure 3: Energie en fonction du flux

$H$  est contrôlé par un seul paramètre soit le ratio  $\frac{E_J}{E_C}$ . Quel ratio donne le meilleur qubit? On veut une bonne anharmonicité et un bon temps de cohérence. L'anharmonicité est  $\alpha = E_{12} - E_{01}$

anharmonicité relative:

$$\alpha_r = \frac{\alpha}{E_{01}}$$

Temps de cohérence  $T_2$ :

2023-09-13

Régime transmon  $\frac{E_J}{E_c}$  grand:

La dissipation de charge va comme  $e^{\frac{E_J}{E_c}}$

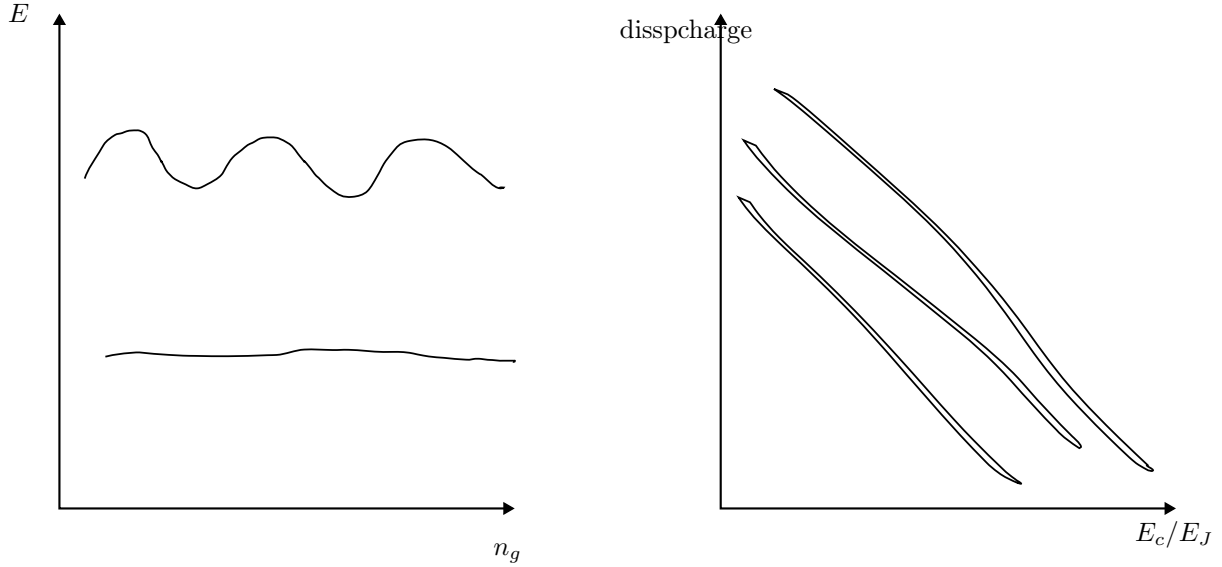


Figure 1: graphiques

Pour atteindre ce régime :  $C_s \gg C_J$

### 3.2.1 Approximation Keir du Transmon

Approx: On laisse tomber  $n_g$

$$\hat{H} = 4E_c \hat{n}^2 - E_j \cos \hat{\varphi} = 4E_c \hat{n}^2 + \frac{\hat{\varphi}^2}{2L_j} - E_j (\cos(?) - ?) = \hat{H}_l + \hat{H}_{nl} = [(\dots)]$$

$$\hat{\varphi} = \left( \frac{2E_c}{E_j} \right)^{\frac{1}{4}} (b^\dagger + b) \quad \hat{n} = \frac{i}{2} \left( \frac{E_j}{2E_c} \right)^{\frac{1}{4}} (b^\dagger - b)$$

donc  $H_l = \hbar \omega_p b^\dagger b$  avec  $\omega_p = \sqrt{8E_J E_c} / \hbar$

Puisque la *particule* est massive, elle n'explore que le bas du puit. On peut donc faire une expansion en série de  $H_{nl}$

$$\hat{H}_{nl} - \frac{1}{4!} E_J \hat{\varphi}^4 = -\frac{1}{4!} E_c^{\frac{1}{4}} (b^\dagger + b)^4 \approx -E_c b^\dagger b - \frac{E_c}{2} b^\dagger b a^\dagger b b$$

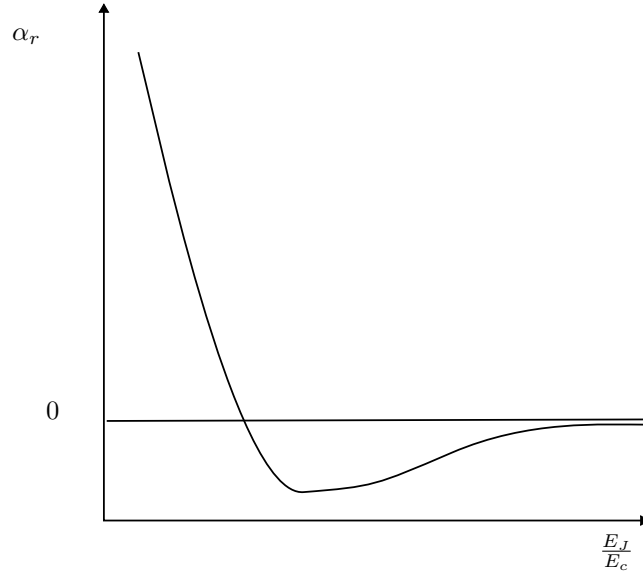


Figure 2: anharmonicité

On ne garde que les termes ayant le même nombre de  $b$  et  $b^\dagger$  (Ce qui revient   l'approximation séculaire)

Pour s'en convaincre, on passe   un référentiel tournant    $\omega_p$

$$H' \sim -\frac{E_c}{12} (b^\dagger e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t})^4 = \dots \text{expansion} \dots$$

Le terme qui tourne le moins vite,  $b^{\dagger 3}b$  apparait 6 fois

$$2\omega_p \gg \frac{6E_c}{12} \rightarrow \sqrt{\frac{E_J}{E_c}} \gg 1: \text{satisfait par le régime transmon}$$

De retour dans le référentiel du labo

$$H \approx \hbar\omega_p b^\dagger b - E_c b^\dagger b - E_c b^\dagger b - \frac{E_c}{J} b^\dagger b^\dagger b b = \hbar\omega_q b^\dagger b - \frac{E_c}{2} b^\dagger b^\dagger b b$$

On peut le réécrire le hamiltonien pour mieux comprendre l'effet de la non-lin airit 

$$H = \left( \hbar\omega'_q - \frac{E_c}{2} b^\dagger b \right) b^\dagger b$$

Chaque niveau d'énergie dépend négativement du nombre de niveau, on voit donc que l'énergie entre chaque niveau diminue.

#### Remarque sur $\hat{\phi}$

$\phi$  à seulement vraiment un sens lorsque dans une fonction périodique. En prenant une série de Taylor on perd la périodicité de la fonction. On perd une partie de la physique, donc.

Anharmonicit :

$$\frac{E_c}{\hbar\omega_q} \sim \frac{E_c}{\sqrt{8E_J E_c}} : \text{petit dans le régime transmon}$$

En pratique  $\frac{E_c}{\hbar} \sim 100 - 400 \text{ MHz}$

### 3.2.2 Transmons ajustable par le flux

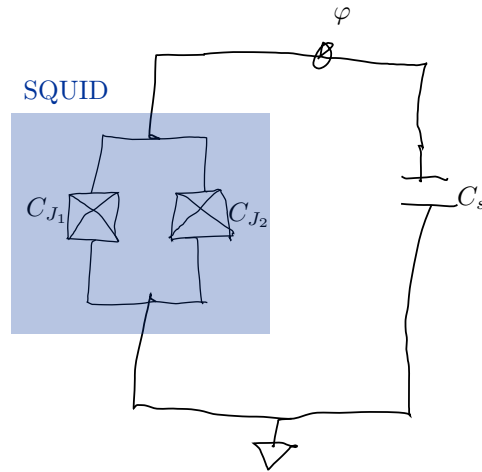


Figure 3: Double jj

$$L = \frac{1}{2}C_3\ddot{\phi} + \frac{1}{2}C_{J_1}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}C_{J_2}\left(\dot{\phi}\Phi_{\text{ext}}\right)^2 + E_{J_1}\cos\phi + E_{J_2}\cos(\phi + \varphi_{\text{ext}})$$

$$H = 4E_x\hat{n}^2 - 2e\frac{C_J}{C_s}\dot{\phi}_{\text{ext}}\hat{n} - E_{J_1}\cos\hat{\phi} - E_J\cos(\hat{\phi} + \varphi_{\text{ext}})$$

avec  $c_g = c_s + c_{J_1} + c_{J_2}$



Dans le cas  $E_{J_1} = E_{J_2} \equiv \frac{E_J}{2}$  alors

$$H = \dots$$

Dans le régime transmon

$$\hbar\omega_q = \sqrt{8E_c|E_g(\Phi_{\text{ext}})|} - E_C$$

2023-09-20

$$H \approx \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar\omega_c b^\dagger b - \frac{E_c}{2} b^\dagger b^\dagger b b + \hbar g (a^\dagger b + a b^\dagger)$$

En supposant que seul les niveau  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  sont les seul niveau du trasmons auquel on accède on peut réécrire le Hamiltonien comme le Hamiltonien de Jaynes-Cumming qui est:

$$H = \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar \frac{\omega_q}{2} \sigma_z + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+)$$

C'est l'hamiltonien décrivant l'échange d'une quanta entre un atome et un champ électromagnétique

---

## Charge de cours avec Othomane

### Relation Constitutive de la JJ

On considère une la JJ réel comme ayant un capacitance parasite en parallèles

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= [\hat{\rho}, H] \\ &= [\hat{\rho}, 4E_c \hat{n}^2 - E_J \cos \rho] \\ &= [\hat{\rho}, 4E_c \hat{n}^2] \\ &= 4E_c \left[ \underbrace{[\hat{\rho}, n]}_i + n \underbrace{[\hat{\rho}, n]}_i \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 4 \frac{E_c}{\hbar} b = \frac{2\pi}{\Phi_0} \hat{V}$$

$$[n, H] = -E_J [n, \cos \rho]$$

$$\implies \frac{dn}{dt} = E_J [n, \rho] \sin(\rho) = -\frac{E_j}{\hbar} \sin \rho$$

## Circuit QED

### 4.2 Hamiltonien de Jaynes-Cummings

$$H_{JC} = \hbar a^\dagger a + \hbar \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+)$$

Le couplage est:

$$g = dE_0$$

On peut faire la diagonalisation par block pour trouver les énergies propres et les états propres. Les dress states:

$$E_{\bar{\sigma}n, |\bar{\sigma}n\rangle}$$

Exception: l'état fondamentale

$$E_{\bar{g}0} = E_{go} = -\hbar\omega_q/2$$

dans le sous espace à n quanta:

$$E_{\bar{g}n} = \hbar n \omega_r - \sqrt{\Delta^2 + 4gn} \quad E_{\bar{g}n} = \hbar n \omega_r + \sqrt{\Delta^2 + 4gn}$$

$$|\bar{g}n\rangle = \cos \theta_n |gn\rangle - \sin \theta_n |en-1\rangle \quad |en-1\rangle = \sin \theta_n |gn\rangle + \cos \theta_n |en-1\rangle$$

avec  $\theta_n = \arctan(2g\sqrt{n}/\Delta)$  l'angle de mélange

2 premier états excités à  $\Delta = 0$

$$|\bar{g}1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g1\rangle - |e0\rangle) \quad |e0\rangle = |g1\rangle + |\bar{e}0\rangle$$

### 4.3 Régime dispersif

à  $\Delta = 0$ , le qubit est maximalement intriqué avec les photon: le qubit est essentiellement dans un état aléatoire si on a pas accès au photon

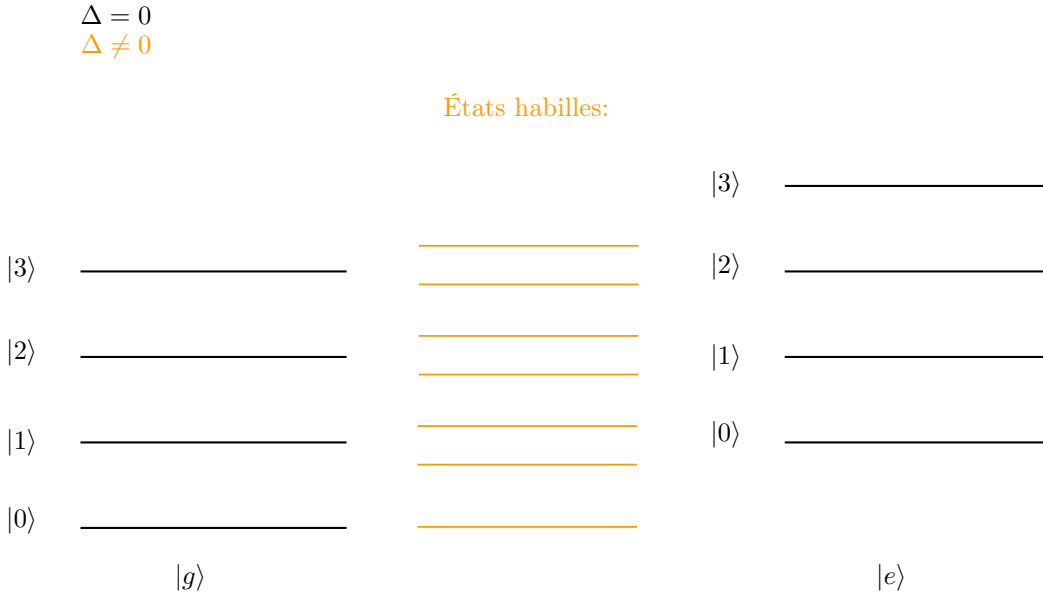


Figure 1: niveaux d'énergies

#### 4.3.1 Transformation de Shrieffer-Wolff

En quantique, L'approche usuelle pour solutionner un problème est de diagonaliser l'hamiltonien

$$H_D = U H U^\dagger$$

Malheureusement, ce n'est pas toujours possible, on représente alors notre hamiltonien comme

$$H = H_D + V$$

Ou  $V$  est un *petit* terme qui *perturbe* note Hamiltonien

La perturbation couple faiblement les sous=espaces  $\mu$

On prend un trasformation unitaire qui diagonalise approximetivement le Halitonien

$$H' = e^{-S} H e^S \quad \text{avec } S^\dagger = S \text{ pour que } e^S \text{ soit unitaire}$$

Figure 2: circuit avec drive

$$\begin{aligned}
 H' &= \left( \mathbb{1} - s + \frac{s^2}{2!} + \cdots \right) H \left( \mathbb{1} + s + \frac{s^2}{2} + \cdots \right) \\
 &= H + [H, S] + \frac{1}{2!} [[H, S], S] + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [H, S]^{(k)}
 \end{aligned}$$

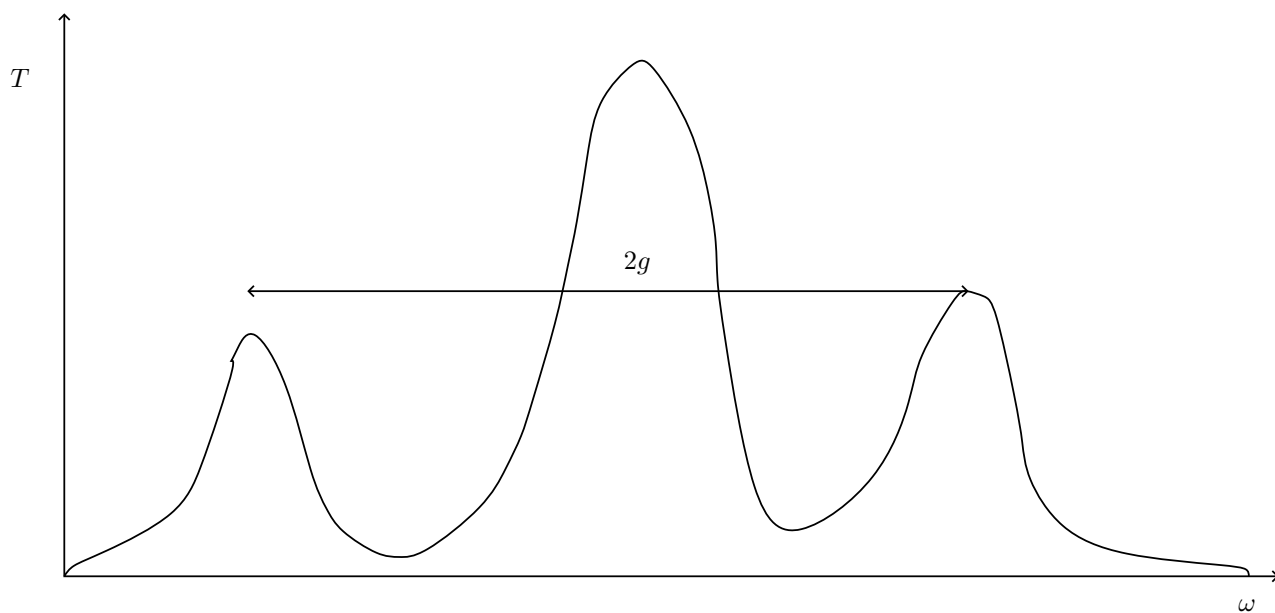


Figure 3: transmission en fonction de la fréquence

$$\Delta = 0$$

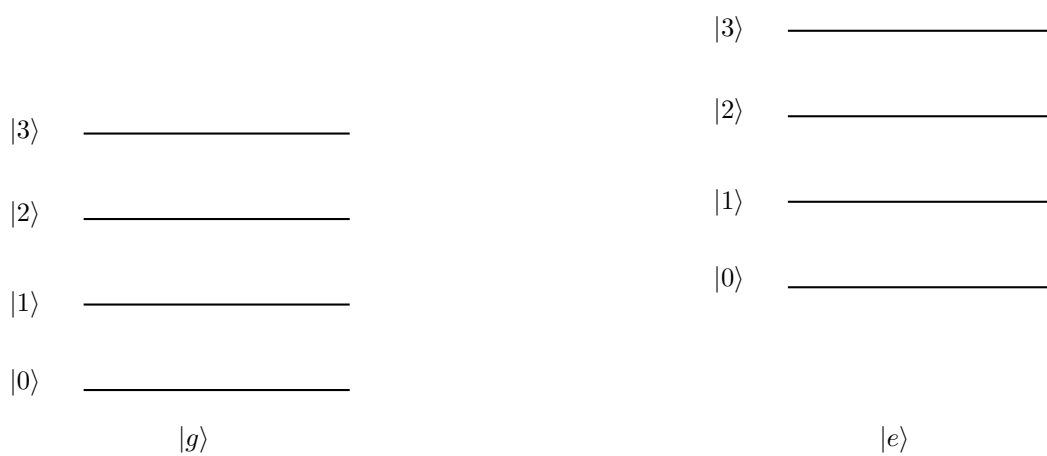


Figure 4: delta pas zero

## Théorie des perturbation (suite)

Avec Baker-Campbell-Husdorf: On obtiens

$$H' = e^{-S} H e^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [H_0 + \epsilon H_1]^{(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\epsilon H_2, S]^{(n)}$$

$S$  à la même forme que  $H_2$

On sépare le Hamiltonien en une partie diagonale par bloc et une partie non diagonale par bloc.

$$H' = H'_{d.p.b.} + H_{p.d.p.b.}$$

$$H'_{d.p.b.} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} [H_0 + \epsilon H_1, S]^{(2k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} [2H_2, S]^{(2k+1)}$$

$$H'_{p.d.p.b.} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} [H_0 + \epsilon H_1, S]^{(2k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} [2H_2, S]^{(2k)}$$

2023-10-03

$$H' = H_0 + [H_2, S_1] + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{[H_2, S_1]}_{-H_2}, S_1 \right]$$

$$= H_0 + \frac{1}{2}[H_1, S_1] \quad \text{à l'ordre 2}$$

$$\begin{aligned} H' &= H_x = \hbar\omega_r a^\dagger a + \hbar \left( \frac{\omega_q}{2} + \chi \right) + \hbar\chi a^\dagger a \sigma_z \\ &= \hbar(\omega_r + \sigma_z) a^\dagger a + \hbar \left( \frac{\omega_r}{2} + \chi \right) \sigma_z \end{aligned}$$

Le qubit déplace la fréquence de résonance du résonateur de  $\pm\chi$

Critère plus précis pour que la transformation de SW doit valide.

$$\|V\| = \max_{|\psi\rangle} \|V|\psi\rangle\| = \max_{|\psi\rangle} \left| \langle\psi| \tilde{V}^\dagger V |\psi\rangle \right| < \frac{\Delta_{\min}}{2}$$

$$\Delta_{\min} = \Delta \quad |\psi\rangle = |n\sigma\rangle$$

$$\|V\| = g(n + \sigma)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\Delta}{2}$$

$$\|V\| = g(n + \sigma)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{\Delta}{2}$$

On veut donc

$$n \ll n_{\text{crit}}^\sigma \equiv \left( \frac{\Delta}{2g} \right)^2 - \sigma$$

Nombre de petit photons:  $n_{\text{crit}}$

vrai petit paramètre  $\frac{n}{n_{\text{crit}}}$

### 4.3.3 Régime dispersif transmon

$$H = \frac{q_r^2}{2c} + \frac{\phi_r}{2L} + \underbrace{4Z_c n_q - E_J \cos \varphi_q}_{H_q} + 2\beta \frac{q_r}{c} n_q$$

avec  $\beta = \frac{c_q}{c_I}$



$$H_g = \hbar \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k |k\rangle\langle k|$$

$$H = \hbar \omega_r a^\dagger a + \hbar \sum_k \omega_k |k\rangle\langle k| + i\hbar \sum_{k,k'} g_{k,k'} (a^\dagger - a) |k\rangle\langle k'|$$

avec

$$g_{k,k'} = \frac{2e\beta}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c}} n_{k,k'}$$

$$\text{où } n_{k,k'} = \langle k | n_q | k \rangle \quad g_{k,k'} = g_{k,k'}^* = g_{k',k}$$