2024-02-22

Rappels

$\cdots$

<u>Proposition</u> : Soit $0 \neq V \in V_\beta$, alors $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2 v, \cdots\}$ engendre V

<u>Démonstration :</u> On montre que $U = \left\langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2 v, \cdots \right\rangle$ est stable pour $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1. $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m)\, \rho(Y)^m c \in U$
2. $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1} v \in U$
3. $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

   On va montrer par récurrence que $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}$

   pour $m = 0$ $\rho(x)v = 0$ pour $m = 1$ $\rho(x)\rho(y) = (\rho(H) + \rho(Y)\rho(x))\, v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1} v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho^m)$$
$$\cdots$$

$$[(m+1)\,(\beta - m)\,\rho(y)^m V]$$

$\implies U \subseteq$ est stable pour ρ comme ρ est irréductible, $U = V$

<u>Conséquences</u>

- $V_\alpha = 1$
- ρ est uniquement déterminé par $\beta = \max up(\rho(H))$

De plus, comme V est de dimension finie, il existe m t.q.$\rho(y)^m v = 0$ et $\rho(y)^{m-1} v = 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m+1} v$$

$$\implies m(\beta - m + 1) = 0$$
$$\implies \beta = m - 1 \qquad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimenention n et les espaces propres de $\rho(H)$ sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \cdots V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

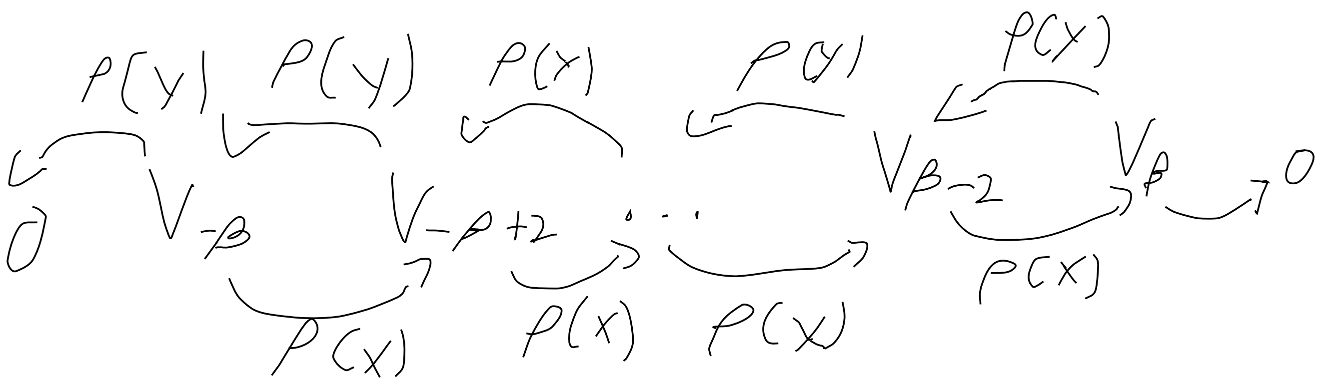

FIGURE 1 – ladder

Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

Rappel

$$\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i) i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par $\rho_1 \otimes \rho_2(g)\,(V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si G est un groupe de Lie $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie

Calculons $\mathrm{d}(\rho_1 \otimes \rho_2)\big|_I\, \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}V_1 \otimes V_2$

Soit $\gamma(t) \in G$, $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X \in G$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\rho_1 \otimes \rho_2)\,\gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \cdots = \left(\mathrm{d}\;\rho_1\Big|_I (x)V_1\right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\cdots)$$

Définition :

Si $\rho_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V_i)$ sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ est définie par $(\rho_1 \otimes \rho_2)\,X\,(V_1 \otimes V_2)$

On a également $sym^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$, $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ sous-représentation comme pour G un groupe On introduite la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n := Sym^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in Sym^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_1 \cdots = Alt(v_1 \cdots)$$

Revenons à $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation <u>?????</u> est $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus v_2$$

est la représentation irréductive de dimension 2

$$sym(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_{2,} e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(Sym(i)(H))\,(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_{1)} = 2e_1^2$$

sur $e_1 \otimes e_2$ c'est 0 sur $e_2 \otimes e_2$ c'est $-2e_2^2$

$$\implies sym(\mathbb{C}^2) = \left\langle e_1^{n-i}, e_2^i \right\rangle$$

Chacun est une vecteur propre de $sym(H)$ et

$$sym(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left(H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + \left(e_1 H e_1 \cdots e_2^i \right) + \cdots$$

$$= \cdots = (n - 2i) e_1^{n-i} e_2^i$$

Je vois pas

<u>Exemple</u> : Quelle est la d/composition de $sym^2(\mathbb{C}^2) \otimes sym^2(\mathbb{C}^2)$ en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de $\rho(H)$

pour $sym^2(\mathbb{C}^2 : -2, 02$ pour $sum^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)\, H\,(v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2)\,(v \otimes u)$$

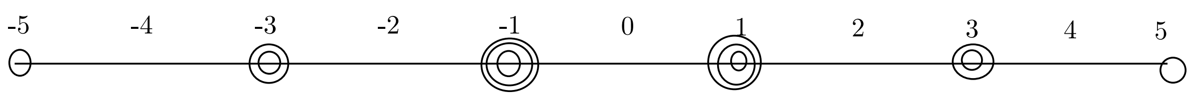

FIGURE 2 – valeurs propres