2024-01-11

# 1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, ou $G$ est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \to G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \cdots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \to E | f \text{ est inversible } \}$$

avec l'opération de composition $\circ$

On l'appel le groupe symétrique de $E$

$S_n = S_{\{1,2,\cdots,n\}}$

Est le groupe des permuations de $n$ éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes $(G, H)$ est une fonction $f : G \to H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$. Si $f$ est inversible alors $f^{-1}$ est aussi un morphisme et on dit alors que $f$ est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe $G$ sur un ensemble $X$ est une application

$$\bullet : G \times \to X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{X} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

Définition : Une action de $G$ sur $x$ est un homomorphisme $f : G \to S_x$

Les deux définition sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_{2)(x)} =& (g_1 * g_{2)} \bullet x \\ =& g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_{1)}(f(g_{2)(x))}) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)]\,(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si $X$ a plus de structure et qu'on a une action de de $G$ sur X qui preserve la structure lors on dit que $G$ agit par (homéomorphise, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur $X$

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

**ATTENTION** : $S_4$ n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permuations *brisent le triangle*) S. Par contre $S_4$ agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permuations paire

$A_5$ agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation $S_E$

Démonstration : On considère l'action de $G$ sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

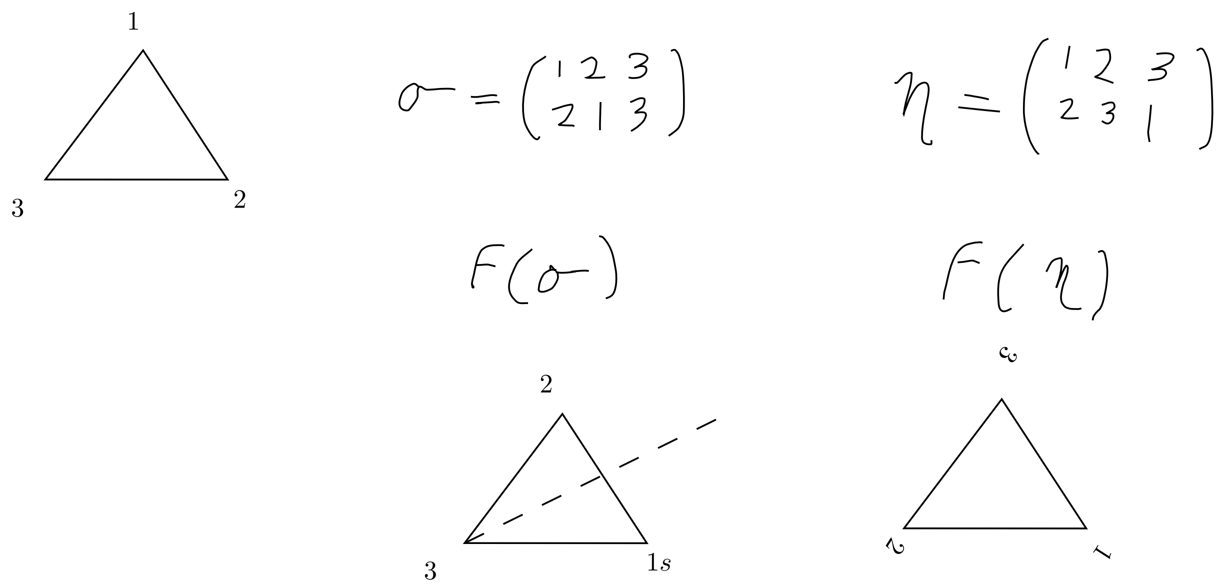
on obtiens $f : G \to S_G$ : homomorphisme injectif car si $f(g_{1)} = f(g_1)$ alors $f(g_{1)(e)} = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe a } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe $G$ est une actions linéaire de $G$ sur un espace vectoriel $V$. Autremenet dit, un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$. Le rang d<une représentation est dimV

exemples :

$$\rho\mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$




Réflextion du trianglae

FIGURE 1 – Triangles équilatérals

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

*Si*

2024-01-15

## retour sur le dernier cours

$$(G, \bullet) \quad \text{c'est un groupe}$$

$$S_E = \{\sigma : E \to E | \sigma \text{ inversible } \} \quad \text{est une groupe pour la composition}$$

Un cycle est un élément de $S_n$ de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1},\, \sigma(a_k) = a_{1,}\, i = 1, \cdots, k$$

On le note $(a_1\, a_2\, a_3\, \cdots\, a_k)$

**Fait important**

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2) \circ (3\,5) = (3\,5) \circ (1\,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\,7\,5\,6\,2\,3\,4)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longeur $\ell$ est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est imparire} \end{cases}$$

On a la relation $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1)\text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de $G$ sur $X$ : deux définitions

1. $\bullet : G \times X \to X$
2. homomorphisme $f : G \to S_x$

Représentation de $G$ : action linéaire de $G$ sur un espace vectoriel $V$

Exemple : La Représentation vectoriel sur $V$

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G,\, v \in V$$

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour $G$ fixé, on a la représentation régulière ($R$) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \cdots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \cdots, g_n\}$$

On définit $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$
$$V = \langle e_0\, e_1\, e_2 \rangle$$
$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe $\mathbb{Z}_3$ sont ici representé par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement , si $G$ agit sur $E$ (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur $\langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle \quad E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ par $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_1 \quad$ (action de $G$ sur $E$)

exemple : $V = \mathbb{C}$ Ou on prend $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$
$$\rho : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$
$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentaation de

$$\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$$

est la restriction de $\rho$ à un sous-espace $U \subset V$ invariant par $\rho$. c-à-d, si $u \in U$, alors $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ Le sous-espace $\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z \in \mathbb{C}\}$ est une sous représentation triviale

Le sous-espace $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 0 \right\}$ est aussi une sous-représentation de $R$ de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ($\neq 0, \neq V$)

Exemple : $S_3$ :

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(3, \to \mathbb{C})$ la représentation de permutation induite par l'action ? ? ? de $S_3$ sur $\{1, 2, 3\}$ $\rho(12) = \cdots 3x3$, $\rho(123) = \cdots 3x3$

$\rho$ est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | z \in \mathbb{C}\}$$

est invariant est irréductible

Également, $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} | z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ est invariant

Es-ce que $U_0$ est irréducibleÉ

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots$$

Conculsion : $U_0$ est une représentation irréductible. On l'appelle repreésentation standard de $S_3$

Ex : $S_3$

$$\mathrm{sgn} : \mathrm{S}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Si $\rho_{1:}G \to \mathrm{GL(u)}, \quad \rho_{2:}\mathrm{G} \to \mathrm{GL(v)}$ sont 2 représentation de $G$, leurs <u>somme directe</u> est la représentation $\rho_1 \oplus \rho_{2:}G\mathrm{GL(u\oplus v)}$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

<u>Exemple :</u> si $U = \mathbb{R}^n \;\; V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$ contient $u \oplus 0$ et $0 \oplus v$ comme sous représentation

<u>Proposition</u> : Soit $U \subset V$ une sous-repr/sentation de $\rho : G \to \mathrm{Gl(V)}$. Alors, il existe une sous-représentation $W \subset V$ telle que $V = U \oplus W$

**Attention !**

Faux en général pour les groupes infinis

<u>Exemple :</u> $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de $\mathbb{Z}$, $\langle e_1 \rangle$ est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe par d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration :</u>

Soit $V_0 \subset V$ n'importe quel complément de $U$ $(V = U \oplus W_0)$

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_o \quad \text{pour} \quad w \in W_0$$

Soit $\pi : V \to U$ la projection complémentaire à $W_0$

Définissons $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$ si $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g)\pi\left[\rho(g')u\right]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cancel{\rho(g)\rho(g^{-1})}u$$

$$\frac{1}{|G|}|G|u = u$$

$$\implies \pi' : V \to U \quad \text{est surjectif et indentité sur}$$

$$W = Ker(\pi') \quad \text{est notre candidat de sous-représentation}$$

Vérifions que $W$ est $\rho(G)$ invariant

$$h \in G \quad V \in \mathrm{Ker}\pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}^{\infty} \rho(g)\pi\rho(g')\rho(h)v = \cdots = 0$$

comme $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup ,,,,,,$$

2024-01-18

# Rappels

- représentation de $G$ $\rho \to \mathrm{GL(V)}$
- somme direct $\rho_1 : G \to \mathrm{GL(V)}$, $\rho_2 : G \to \mathrm{GL(U)}$, $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to (V \otimes U)$
- Sous-représentation $U \subset V$ $G$ invarientL $\forall g \in G$, $\rho(g)u \in U$
- $\rho$ est irréductible si les seul sous-représentation sont $\{0\}$ et $V$
- Théorème : Si $U \subset V$ est une sous représentation de $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ alors $\exists W \subset V$ sous-espace t.q. $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ : représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x + y + z = 0 \}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre $\rho_1 : G\mathrm{GL(U)}$, $\rho_2 : \rho_2 : \mathrm{GL(U)}$ est une application linéaire $\varphi V \to U$ telle que $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_{1(g)} = \rho_{2(g)} \circ \varphi$$

Si $\varphi$ est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{V}$
2. $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{U}$ sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si $v < in\mathrm{Kerr}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$
$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0$$
$$\implies \rho_1(g)v \in \mathrm{kerr}(\varphi)$$

2. $\rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$

Lemme de Shur

1. $\varphi : V \to U$ est un morphisme entre représentation irréductible alors $\varphi = 0$ ou $\varphi$ est un iso
2. $\varphi : V \to V$ Morphisme de $V$ représentation irréductible alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration : $\varphi : V \to U$

1. 

$$\cdots$$

2. $\varphi V \to V$ $\varphi$ admet une valeur propre $\lambda$

$$\implies \text{Kerr}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Kerr}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = \text{V}$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \cdots V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit $G$ une goupe fini abélien

$$G \tilde{=} \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \cdots$$

et supposons $\rho : G \to \text{GL(V)}$irréductible. Fixons $g \in G$

$\rho(g) : V \to V$ alors $\rho(g)$ est une morphisme de représentation car $\rho(h)(\rho(h)v) = \rho(gh)b = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$ tout les $\rho(g)$ sont$\lambda_g$ I

$\implies$ tout sous-espace de $V$ est stable par $\rho(g) \forall g \in G$

donc dimV = 1

Conclusion : tout représentaiton irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple : $G = \mathbb{Z}_4$

$$\cdots$$

Exemple : $G = S_3 = \{e, (12), (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de $G$ que est abélien

Remarque : G est engendré par (123) et (12)

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit $\rho : S_3 \to \mathrm{GL(V)}$ une représentation irréductible

on a $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$ car $\tau^3 = e$

$\implies$ $\rho(\tau)$ est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit $v \in V$ vecteurs propres de $\rho(\tau)$ $\implies$ $\rho(\tau)v = \omega^k v$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0,1,2\}$

on a

$$\begin{aligned}\rho(\tau)\left(\rho(\sigma)v\right) =& \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^{2)}v \\ =& \rho(\sigma)\rho(\tau)^2 v \\ =& \rho(\sigma)\omega^{2k} v \\ =& \omega^{2k}(\rho(\sigma)v)\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> si $v$ est une vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre $\omega^k$ alors $\rho(\tau)v$ est vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre $\omega^2 k$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1. $k = 1$ ou $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

   $$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

   sont linéairement indépendants $U = \langle v_1 \rho(\sigma)v \rangle$, $U$ est stable par $G$ : $V$ et $\rho(\sigma)V$ sont vecteur propres de $\rho(\tau)$ <u>et</u> $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$, $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

   $$\implies U = V$$

   et dans la base $v, \rho(\sigma)v$ on alors

   $$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix}$$

   $$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. k = 0

   $$\rho(\tau)v = v$$
   $$\rho(\tau)(\rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v$$

   (a)
   $$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

   et $\lambda \in \{1, -1\}$ $\quad (\sigma^2 = 1)$ si $\lambda = 1$ $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{trivial}}$ si $\lambda = -1$, $\langle v \rangle = V$ et $\rho - \rho_{\text{sign}}$

(b) $v$ et $\rho(\sigma)v$ sont linéairement indépendants

Considérons $V + \rho(\sigma)v$, $V - \rho(\sigma)v$

$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v$ et $\rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$

$\implies v + \rho(\sigma)v$ est stable par $G$.

idem pour $-$. C'est donc une contradiction au fait que $V$ soit irréductible.

## Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \to \mathrm{GL(v)}$$

une représentation

Alors sont <u>caractère</u> est la fonction

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{g}))$$

2024-01-22

## Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire $\varphi : V \to U$ (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_2(g)$$

$\varphi$ est appelée une application équivariante

Lemme de Shur

1. Si $\rho_1$, $\rho_2$ sont irréductible $\varphi$ morphisme $\implies$ $\varphi = 0$ ou isomorphe
2. Si $V = U$ alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ? ? ? de $S_3$ (à iso près) sont $\rho_?, \rho_?$ et $\rho_?$

## Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$$

$\chi_\rho$ est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d $\forall h \in Ga$, $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans $S_n$ permutation de $n$ éléments la conjugasion correspond à un "changement d'étiquette"

La tables des caractères d'un groupe fini $G$ est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les calsses de conjugaison dans $G$. Les entrées sont $\chi_\rho(g)$

Exemple : $S_3$

| | 1<br>e | 3<br>(12) | 2<br>(123) |
|---|---|---|---|
| $\chi_?$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_?$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_{\rho_{\text{std}}}$ | 2 | 0 | -1 |

TABLE 1 – tables des caractères de $S_3$

Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme $|G|$

Exemple : $\mathbb{Z}_4$

| | 1<br>0 | 1<br>1 | 1<br>2 | 1<br>3 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_?$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_?$ | 1 | i | -1 | -i |
| $\chi_?$ | 1 | -1 | i | -1 |
| $\chi_?$ | 1 | -i | -1 | i |

TABLE 2 – Table des caractères de $\mathbb{Z}_4$

## Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

$V$ un $(k)$espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V < toV$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (u \cdot \mathbf{v})$
2. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu) = \lambda v + \mu v$

Soit $U, V$ deux k-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom(U,\ V)} := \{\mathrm{L : U \to V|Lapplication\ linéaire}\}$$

est un k-espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_{2)}(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\mathrm{dim(Hom(u, v)) = dim(u)dim(v)}$$

Le produit Tensoriel de $U$ et $V$ est un $k$-espace vectoriel $U \otimes V$ muni d'une application bilinéaire

$U \times V \to U \otimes V$

$(u, v) \mapsto u \otimes v$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour tout application bilinéaire $b : U \times V \to W$

Je vois pas ...

En pratique : Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de $U$, $f_1, \cdots, f_m$ est une base de $V$ alors $\{e_i \otimes f_g\}$ est une base de $U \times V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = \cdots ace_1 \otimes f_1 + \cdots$$

Exemple : produit scalaire standard dans $\mathbb{C}^2$ est bilinéaire $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc)$

Quelle est $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc$

**Attention**

Il est des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2. $Q_8$ : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1,\, -1,\, i,\, j,\, k\, -i,\, -j,\, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \qquad -ji = ij = -k$$

   (a) Calculer les classes de conjugasion dans $Q_8$
   (b) Déterminer les représentations irréductible (il y en a 5, dimension 1 et 2)
   (c) Dresser la tables des caractère de $Q_8$
3. Décomposer $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ en irréductibles
4. Calculer $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

abélien $\implies$ toute représentation irréductible est de dim 1 On a $(0,1) + (0,1) = (0,0)$

$$\rho(0,1)\rho(0,1) = 1 = \rho(0,1)^2 \implies \rho(0,1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1^m) \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$
$$\cdots$$

Pareil pour tout les éléments

(b) Si $\rho : Q_8 \to \mathbb{C}^*$ est de rang 1. Comme $i^4 = 1$, $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$ (de même pour $j$ et $k$)

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$ Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prennant $\rho(i) = i$ ou $\rho(i) = -1$ (même chose pour $j$ et $k$ évidemment) On doit donc prendre $\rho(i) \in \{1, -1\}$, $\rho(j) \in \{1, -1\}$, $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le $c$) tout de suite pour s'aider (voir 2b)

| | $e$ | $i$ | $j$ | $k$ | -1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_{\text{triv}}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\rho_1$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\rho_2$ | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| $\rho_3$ | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| $\rho_4$ | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 |

TABLE 1 – Tableau de char de $C_8$

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

$V$ espace vectoriel

$P : V \to V$L application linéaire t.q. $P^2 = P$ est appelé une projection (sur le sous-espace Im(P))

Ex : $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si $P$ est une projection, $\mathrm{tr}(P) = \dim(\mathrm{ImP})$

Démonstration On a $V = \mathrm{KerP} \oplus \mathrm{ImP}$

1. car $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{KerP}) + \dim(\mathrm{Im(P)})$
2. et si $v \in (\mathrm{KerP}) \cap (\mathrm{ImP})$ $P(v) = 0$ mais aussi $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$

$$\implies v = 0$$

Si $v \in \mathrm{Im(P)}$ $P(V) = V$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\mathrm{Im(P)}} = \mathbb{1}_{\mathrm{Im(P)}} \\ &\text{et} \quad P|_{\mathrm{KerP}} = 0_{\mathrm{KerP}} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathrm{ImP}} & 0 \\ 0 & 0_{\mathrm{ImP}} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(\mathbb{1}_{\mathrm{ImP}}) = \mathrm{dimImP} \end{aligned}$$

? ? ? d'irréducitbilité est relations d'orthogonalité

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$

définissons $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ le sous-espace des invariants

**Exercice**

Montrer que $V^G$ est un sous-espace vectoriel de $V$

et $P : V \to V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G?} \rho(g) v$$

<u>Prop :</u> $P$ est une projection sur $V^G$

<u>Démonstration :</u> ON veut montrer

1. $\mathrm{ImP} = \mathrm{V^G}$ et
2. $P^2 = P$

1. Supposons $v \in \mathrm{ImP}$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) u$$

alors

$$\rho(h) v = \rho(h) \cdots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter :(

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) h = P(u) = v$$

$$\implies \mathrm{ImP} \subset \mathrm{V^G}$$

Inversement, si $v \in V^G$

alors $P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) v$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\mathrm{dim(V^{G)} = tr(P) = tr} \left( \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g \in G}} \rho(\mathrm{g}) \right) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g \in G}} \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{G})) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g \in G}} \chi_\rho(\mathrm{g})$$

En particulier, si $\rho$ est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

<u>Ex :</u> $S_3$

$$\cdots$$

2024-01-29

**Rappels**

$P$ projection, apli linéaire $P : V \to V$ t.q. $P^2 = P$

$$\mathrm{tr}(P) = \dim(\mathrm{ImP})$$

$$\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$$

$$P = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$$

est une projection avec $\mathrm{ImP} = \mathrm{V^G} =?$

$$\dim \mathrm{V^G} = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\chi_\rho(?)$$

Nombre de représentation triviales dans les décomposition de $\rho$
En particulier si $\rho$ est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g\in G}\chi_\rho(g) = 0$$

$\rho_{1,}\,\rho_2$ deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\mathrm{Hom}(\rho_1,\ \rho_2) : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(Hom(U, V))}$$

**Rappel**

Si $U = \mathbb{C}^n$, $V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) \qquad \rho_{2(\mathrm{g})} \in \mathrm{GL_m}(\mathbb{C})$$

$$\mathrm{Hom(U, V)} = \mathrm{Mat_{n\times m}}(\mathbb{C})$$

$$\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)(\mathrm{g})(\mathrm{M}) = \rho_2(\mathrm{g})\cdot \mathrm{M}\cdot \rho_1(\mathrm{g})^{-1}$$

<u>Proposition</u> :

$$\mathrm{Hom(U, V)^G} = \{\varphi : \mathrm{u} \to \mathrm{v} | \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

<u>Démonstration</u> :

$$M \in \mathrm{Hom(U, V)^G} \iff \rho_2 \mathrm{M}\rho_1(\mathrm{g}) \in \mathrm{v} = \mathrm{M}\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G} \iff \rho_2(\mathrm{g})\mathrm{M} = \mathrm{M}\rho_1(\mathrm{g}) \iff \text{M est une morphisme de représentations}$$

Si $\rho_1$, $\rho_2$ sont irréductibles, le lemme de Shor dit

$$\dim(\mathrm{Hom(U, V)^G}) = \begin{cases} 0 & \mathrm{si}\rho_1 \ncong \rho_2 \\ 1 & \mathrm{si}\rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \mathrm{tr\,P} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\mathrm{Hom}(\rho_1,\ \rho_2)(\mathrm{g})\right) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\mathrm{tr\,Hom}(\rho_1, \rho_2)(\mathrm{g})(\text{à démontrer})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\bar{\rho}}(g)$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\bar{\rho}}(g) \chi_{\rho}(g) = \Big\{ \cdots$$

Les caractères de représentations irréductibles sont <u>orthonormés</u> par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace $f : G \to \mathbb{C}$

**Exemple : $S_3$**

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} \left(1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3\right) = 1 \qquad \cdots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{ f : G \to \mathbb{C} | f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G \}$$

$$\dim(\mathbb{C}_{\mathrm{C}}(\mathrm{G})) = \# \text{ de classes de conj}$$

<u>Corrollaire</u>

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

<u>Démonstration</u> : (je vois pas lol)

<u>Corrollaire 2</u> : Toute représentation est derterminé (à iso près) par son caractère $\chi_\rho$

<u>Démonstration</u> : On sait que $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_k^{m_k}$

De plus $\chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \cdots + m_k \chi_{\rho_k}$

On peut retrouver $m_i$ avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

**Exemple**

Décomposons $R : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^6)$ (la repr régulière) en irréductible

— $\chi_R(e) = 6,\ \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$ (les générateurs n'ont pas de points fixes)

— $\langle \chi_R, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle\rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle\rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\mathrm{triv}} + \chi_? + 2\chi_?$$

**Exemple**

Décomposons $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\mathrm{triv}} + \chi_{\mathrm{std}}$$

$$\rho = \rho_{std} \oplus \rho_{\mathrm{triv}}$$

Calculons $\rho_{\mathrm{std}} \otimes \rho_{\mathrm{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

<u>Corollaire 3</u> : $\rho$ est irréductible ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

<u>Démonstration</u> :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \cdots + m_k^2 = 1$$

puisque $m_i \in \mathbb{N}$, un des $m_i = 1$, tout les autres =0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} \text{ : irréductible}$$

<u>Corollaire 4</u> :

Tout représentation irréductible apparait dans les décompostion de $R$ avec multiplicité $\dim \rho_{\mathrm{i}}$ et $|G| (= \dim(\mathrm{R})) = \sum_{\rho_{\mathrm{i}} \mathrm{irre}} \dim(\rho_{\mathrm{i}})^2$

2024-02-01

**typo devoir 1**

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1\, e_2 \rangle$$

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni \mathrm{e_i \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1}$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2 + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

**Rappels**

$\rho_1, \rho_2$ reps indestructibles de $G$
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

$$\ldots$$

Corollaire 5 : si $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \,\mathrm{irred}} \mathrm{dim(\rho_i)\chi_{\rho_i}(g) = 0}$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \,\mathrm{irred}} \mathrm{dim(\rho_i)\chi_{\rho_i}(g)} \quad \mathrm{(g \neq e)}$$

Permet de trouver une caractère manquant dnas le table si on connaît tout les autres

**Plus d'algèbre linéaire**

$e_1, \cdots e_n$ base de $V$ $f_1, \cdots f_m$ base de $W$ $e_i \otimes f_j$ base de $V \otimes W$

$$M \in \mathrm{GL(V)} \qquad \mathrm{N \in GL(W)}$$

$$M \otimes N \in \mathrm{GL(V \otimes W)}$$

Proposition :

$$\mathrm{tr}(M \otimes N) = (\mathrm{tr}\, M)(\mathrm{tr}\, N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\operatorname{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left(\sum_i M_{ii}\right) \sum_j (M_{jj}) = \operatorname{tr} M \operatorname{tr} N$$

<u>Définition</u>

L'espace dual de $V$ est $\mathrm{Hom(V,\mathbb{C})}$ noté $V^*$

Si $M \in \mathrm{GL(V)}$

$M^* \in \mathrm{GL(V^*)}$

$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$

De même, si $\rho_i G \to \mathrm{GL(V)}$ est une repr. La repr <u>dual</u> est $\rho^* : G \to \mathrm{GL(V^*)}$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

<u>Proposition</u> :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

<u>Démonstration</u> : $g \in G$, $\rho(g) \in \mathrm{GL(V)}$ est une matrice d'ordre <u>finie</u>

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$$\implies \rho(g)\text{est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines de 1}$$

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \cdots \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\operatorname{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \cdots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

<u>Corrolaire</u> $\rho$ est irréductible $\iff$ $\rho^*$ est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\mathrm{Hom(V,W)} \cong \mathrm{V^*W}$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom(V,W)}$$
$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \cdots, e_n^* \text{ base de V}$$
$$w_1, \cdots, w_m \text{ base de W}$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples : $S_4$ et $A_4$

Les classes de conjugaisons dans $S_4$ sont

$$\overbrace{(e)}^{1}, \overbrace{(12)}^{6}, \overbrace{(123)}^{8}, \overbrace{(1234)}^{6}, \overbrace{(12)(34)}^{3}$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés )

| | 1<br>$e$ | 6<br>(12) | 8<br>(123) | 6<br>(1234) | 3<br>(12)(34) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{\text{sym}}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_{\text{std}}$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\chi_{\text{sym}\otimes\text{std}}$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |
| $\chi_4$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |

Table 1 – char de $S_4$

Regardons la representation $\rho_?$ de dim 4

$$\rho_? : S_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que $\rho_?$ se décompose en $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$

$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1)$$
$$= (3\,1\,0\,-1\,-1)$$

$$\langle \chi_{\mathrm{std}} \chi_{\mathrm{std}} \rangle = \frac{1}{24}\left(3^2 + 6^2 + \cdots\right) = 1$$

Pour trouver di($\rho_4$)

on utilise $|G| = \sum_{\rho \mathrm{irred}} \dim(\rho_i)^2$

$$23 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + d^2$$

$d = 2$

On trouve les autres coeffs avec

$$0 = \sum_{g \mathrm{irred}} \dim(\rho_{\mathrm{i}}) \chi_{\rho_{\mathrm{i}}}(\mathrm{g})$$

Calculons $\rho_4$

On a $\rho((12)(34)) = I$

$$\mathrm{tr}(\rho((12)(34))) = 2$$

$M$ est conjugé à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyeau

2024-02-08

Groupe de Lie (matriciel)

$G \subset \mathrm{GL(n, \mathbb{C})}$ un sous-groupe fermé

(La topologie sur $\mathrm{GL(n, \mathbb{C})} \subseteq \mathrm{M_n\mathbb{C}}$

SI $M_n \in G$ et $M_n \to M \in \mathrm{GL(n, \mathbb{C})}$ alors $M \in G$

En fait, tout sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$ est une sous-variété lisse ($G$ a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur $G$)

(contre)Exemple :

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$ n'est pas fermé.

Exemples

$$\mathrm{GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})}$$
$$\dots$$

Définition On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin $\gamma : [0:1] \to G$ avec $\gamma(0) = A$ $\gamma(1) = B$ $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer $A = I$)

Exemple : O(n) n'est pas connexe

$$A = I \in \mathrm{O(n)B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O(n)}$$

S'il existait un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{O(n)}$ t.q. $\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = B$

alors $\det \circ \gamma : [0, 1] \to \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $\det \circ \gamma(0) = 1$, $\det \circ \gamma(1) = -1$

$G$ Groupe de Lie matriciel

$G^0$ Compostantes connexe de l'identité

Proposition :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

Démonstration

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$ des chemins , $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit, $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que $G^0$ est normal, il faut montrer que $\forall C \in G$, $A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = CIC^{-1} = I$$
$$\gamma(1) = CAC^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est $f : G \to H$ qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple : $\det : \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ est une homomorphisme de groupe de Lie car

1. $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

**Rappel**

Pour $S \subset \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n$ une sous-variété. l'espace tangent en $p \in S$ est

$$T_pS = \{\gamma'(0)|^{\gamma : [-1,1] \to S}_{\gamma(0) = p}\}$$

Si $f : S_1 \to S_2$ est une application lisse, la dérivé de $f$ en $p$ est une application linéaire

$$\mathrm{d}f_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$$

définie par :

$$\mathrm{d}f|_p(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$$

pour $\gamma$ chemin dans $S_1$ avec $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour det : $\mathrm{GL}(2\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ La dérivé au point $p = I \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$

$$\mathrm{d}(\det)\,|_I : T_I \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{T}_1\mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix}(0) = X$$

$$T$$

2024-02-12

**Rappels**

- Groupe de Lie matriciel $G \ni I \to$ sous-groupe fermé de $\mathrm{GL(n\mathbb{C})}$
- G est une sous-variété
- Exemples $\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}$ $\mathrm{Sl(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{O(n), O(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{SO(n), SO(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{U(n), SU(j)}$ $\mathrm{Sp(2n,\mathbb{R})}$ $\mathrm{Sp(2n,\mathbb{C})}$ Groupe des matrice triangulaire superieur $\mathrm{(S)O(p,q) = \{M \in GL(p+q,\mathbb{R}) | M^t I_{pq} M^t = I_{pq}\}}$ $\mathrm{(S)U(p,q) = \{M \in GL(p+q,\mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}}$
- G Connexe si $\exists \gamma : [0,1] \to G$ avec $\gamma(0) = I, \quad \gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$ (composantes connexe de $I$) est un sous-groupe normal exemple :

$$\mathrm{O(1,1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}}$$

  On résous le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :
O(2)

Étant donné $f : G \to H$ un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$\mathrm{d}f\Big|_I : T_I G \to T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement $f$.

$\boxed{\text{Un voisinage arbitrairement petit autour de } I \text{ engendre } G}$

**Attention**

Pas tout les applications linéaires $L : T_I G \to T_I H$ sont la dérivé d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = \mathrm{d}f\Big|_I$$

Étant donnée $g \in G$, on définit la multiplication à gauche $L_g :\to G$ c'est une application lisse mais

$$\mathrm{d}\ L_g\Big|_I : T_I G \to T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par $g \in G$

$$\mathrm{Ad(g) : G \to G}$$
$$h \to ghg^{-1}$$

$$\mathrm{d\ Ad(g)}\Big|_I : T_I G \to T_I G$$
$$X \to gXg^{-1}$$

$$\gamma(t) \in G|\gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X$$
$$\mathrm{Ad(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1}}$$

$$\mathrm{d\ Ad(G)}\Big|_I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obenir une condition sur $T_I G$ uniquement, on dérive Ad(f) par rapport à $g$ en fixant $X$

$$G \to T_I G$$
$$g \mapsto gXg^{-1}$$

pour dériver cette appilcation on prend

$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \to G$

$$\gamma(0) = I$$
$$\gamma'(0) = U \in T_I G$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = \left[\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})'\right]_{t=0}$$

$$= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1}$$
$$= YX - XY \in T_I G$$

L'opération sur $T_I g$
$$[X, Y] = XY - YX$$
s'appelle le crochet

Comme le crocher est définit en termes de la multiplication dans $G$ et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie $f : G \to H$ la dérivé $\mathrm{d}f\ \big|_I : T_I G \to T_I H$ satisfaisant $\mathrm{d}f\ \big|_I [X, Y] = [\mathrm{d}f\ \big|_I X, \mathrm{d}f\ \big|_I Y]$

En fait $L : T_I G \to T_I H$ est la dérivé d'un morphisme de groupe de Lie $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ complexe muni d'une application sur $\mathbb{C}$

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

Exemple : Si $G$ est une groupe de lie matriciel, $g = T_I G$ muni de $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de lie

Si $f : G \to H$ est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et $\mathrm{d}f\big|_I [X, Y] = [\mathrm{d}\, f\big|_I X, \mathrm{d}\, f\big|_I Y]$)

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M_n}(\mathbb{C})$$

$G = \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \mathrm{d}\det(0)\bigg|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(\mathrm{n}\mathbb{C}) \subseteq \{\mathrm{X} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C}) | \,\mathrm{tr}\, \mathrm{X} = 0\}$$

En fait on a l'égalité

2024-02-15

**Rappels**

$G$ groupe de liea
$\mathfrak{g} = T_I G$ algèbre de Lie pour $[X, Y] = XY - YX$
En général, une algèbre de LIe est un espace vectoriel muni d'un crochet $[.,.] : V \times V \to V$ satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

**Exercice**

1. Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel $\times$ est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre $\left(\mathbb{R}^3, x\right)$ et $(\square(3), [.,.])$

**tentative**

1. On doit montrer que $\times$ respecte les trois conditions
   (a) $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}$$

## L'application exponentielle

$G$ groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_I G$ sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{G} \to G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1. $\exp(0) = I$
2. $\mathrm{d}\exp\big|_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est l'application identité
3. $\forall X \in g$ l'application $t \to \exp(tx)$ est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t + s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour $G = \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}, \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^X$

Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \to H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g} & \to \mathrm{d}f\big|_I \to & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \to f \to & H \end{pmatrix}$$

commute, c-à-d, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathrm{d}f\big|_I$

Conséquence :

Si $G \subseteq \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

$\implies i \circ \cdots$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

$$\ldots$$

# Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de $G$ est un morphisme $G \to \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}$

Une représentation de $\mathfrak{g}$ est une morphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\mathrm{l}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

Exemeple : Représentation adjointe

$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}$

$$g \mapsto \mathrm{Ad(g)}$$

où $\mathrm{Ad(g)(X) = gX^{-1}g}$

on peut vérifier la linéairité et $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Adg})\,(\mathrm{Adh})$