

1 Chapitre 0

On s'intéresse à qualifier des courbes sans étudier les propriétés des fonctions. Par exemple, on veut considérer $y = x^2$ et $y^2 = x$ comme identique à rotation près malgré le fait qu'elle soit définie comme deux équations assez différentes.

On va distinguer les propriétés intrinsèques et extrinsèques d'une surface.

Une propriété intrinsèque pourrait être détectée par quelqu'un vivant dans la surface.

La distance de longueur d'arc est une quantité intrinsèque à la sphère tandis que la *longueur cordale* est une quantité extrinsèque.

La courbure gaussienne est la plus importante quantité intrinsèque associée à une surface.

La courbure gaussienne ne change pas si on la déforme de manière rigide.

1.1 Courbure d'un polyèdre

Défaut d'angle :

$$c(s) = 2\pi - \sum_{T \text{ face}} \theta_T(s)$$

La caractéristique d'Euler d'un polytope P est la quantité

$$\chi(P) = V - E + F$$

1.2 Théorème de Gauss-Bonnet discret

$$\sum_{s \in P} c(s) = 2\pi\chi(P)$$

Dém On compte de deux manières différentes

- Défaut d'angle total $\sum_{s \in P} c(s)$
- Dans chaque face triangulaire de P , la somme des angles = π . Le défaut d'angle total : $2\pi V - \pi F$

Chaque arrête à 2 faces

Chaque face à 3 arrêtes

$$2E = 3F$$

On compte la cardinalité des $\{(a, f) | a \in f\}$

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(P) &= 2\pi(V - E + F) \\ &= 2\pi(V - \frac{3}{2}F + F) \\ &= 2\pi V - \pi F \end{aligned}$$

Ex : En utilisant le théorème démontré plus haut. et le fait que toute triangulation d'une sphère satisfait $\chi(P) = 2$ classifie les solides réguliers. (Les faces sont des polygones réguliers. Même nombre de faces à chaque sommet)

2 Chapitre 2

Définition : Une fonction vectorielle $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est C^k si f et ses k premières dérivées existent et sont continues sur (a, b) . On dit que f est lisse si c'est vrai pour tout $k > 0$

Une courbe paramétrée est une application C^3

$$\alpha I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ex :

- $p \neq q \in \mathbb{R}^3$, on définit $V = q - p$ et $\alpha(t) = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$

- $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$ $0 \leq t \leq 2\pi$ (le cercle de rayon a)
- Courbe cubique singulière : $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $\alpha'(t) = (2t, 3t^2) \implies \alpha'(0) = (0, 0)$ non-régulière en $t = 0$

Cours 2

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

Courbe du jour : Cycloïde : Trajectoire d'un point sur une roue qui tourne sans gilisser

Paramétrisation : $\alpha(t) = \underbrace{(tr, r)}_{\text{Centre du cercle}} + (-r \sin t, -r \cos t)$

Def : La longeur d'arc d'une courbe $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{M}}$ est $l(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)|| dt$
 $\tilde{\alpha} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ est une reparamétrisation de α

Cours 3

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

courbe régulière : $\alpha' \neq 0 \forall t$

longeur d'arc

$$\mathcal{L} = \int_a^b ||\alpha'(t)|| dt$$

Approximation avec une partition

$$P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$$

$$\mathcal{L}(\alpha, P) = \sum_{i=0}^n ||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})||$$

Prop

Si α est C^1 alors α est rectifiable et

$$\mathcal{L}(\alpha) = \sup_p \mathcal{L}(\alpha, P)$$

On a montré que pour toute partition P : $\mathcal{L}(\alpha, P) \leq \int_a^b ||\alpha(t)|| dt$

Lemme : $|| \int_a^b \alpha(t) dt || \leq \int_a^b ||\alpha(t)|| dt$

Reste à montrer que $\forall \epsilon > 0 \exists P$ t.q.

$$\mathcal{L}(\alpha, P) \geq \int_a^b |\alpha(t)| dt - \epsilon$$

Continuité uniforme de α'

$\exists \delta > 0$ t.q. si

Proposition : Une courbe paramétrée α admettant une reparamétrisation par longueur d'arc ssi elle est régulière

Dem (\implies)

Si α admet une reparamétrisation par longueur d'arc $\tilde{\alpha}$

et $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(\varphi(t)) \\
\tilde{\alpha}'(t) &= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\underbrace{\|\tilde{\alpha}'(t)\|}_1 &= \|\alpha'(\varphi(t))\| \|\varphi'(t)\| \\
\implies \|\alpha'(\varphi(t))\| &\neq 0
\end{aligned}$$

(\Leftarrow)

Trop long, trop loin

Exemple : Calculer la paramétrisation par longueur d'arc d'une hélice

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad (a, b > 0) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx \\
&= \int_0^t (-a \sin x, a \cos x, b) dx \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dx \\
&= t \sqrt{a^2 + b^2} \\
\implies \Psi^{-1}(s) &= \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
\implies \tilde{\alpha}(s) &= \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)
\end{aligned}$$

Courbe du jour : Caténoïde

Repère de Frenet

Un repère adapté à la courbe.

Le premier vecteur est le vecteur tangent.

Le second vecteur est le vecteur *accélération*. En effet, il est toujours perpendiculaire au déplacement dans le cas d'une courbe paramétrée par longueur d'arc (vitesse constante)

Le troisième est celui qui reste (\times)

Lemme : Soient $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si $f(t) \circ g(t)$ est constante alors $f'(t) \circ g(t) = -f(t) \circ g'(t)$

Dem $(f(t) \circ g(t))' = 0 \implies f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g'(t) = 0 \blacksquare$

Soit α paramétré par longueur d'arc

$$T(s) := \alpha(s)$$

$$k(s) := \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

est la courbure de α au point $\alpha(s)$

$$N(S) := \frac{T'(s)}{k(s)}$$

On dit que α est birégulière si $k(s) \neq 0 \forall s$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

T, N, B est le repère de Frenet de α

$$\|T(s)\| = 1 T(s) \cdot T(s) = 1 T(s) \cdot T'(s) = 0 \implies k(s) T(s) \cdot N(s) = 0$$

T, N, B sont \perp

$$\|B\| \|T \times N\| = \|T\| \|N\| \sin(\phi) = 1$$

Orthonormé !

On a, par définition que

$$T'(s) = k(s) N(s)$$

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) N'(s) \cdot N(s) = 0 N'(s) \cdot B(s) =: \tau(s)$$

τ : torsion

...

On obtiens les Équations de Frenet-Serra

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s) N(s) \\ N'(s) &= k(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ B'(s) &- \tau(s) N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Cours 4

Jean-Baptiste Bertrand

19 janvier 2022

Rappel

- Une courbe est régulière ($\alpha'(t) \neq 0 \iff$) elle peut être paramétrisé par longeur d'arc ($\|\tilde{\alpha}(s)\| \equiv 1$)
- Repère de Frenet de α paramétré par longeur d'arc

$$T = \alpha'(s), N = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} (\|T'(s)\| = k(s)), B = T \times N$$

- Courbe birégulière $\rightarrow k(s) \neq 0$
- Équations de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} T' &= & kN \\ N' &= & -kT & +\tau B \\ B' &= & -\tau N \end{aligned}$$

- $N'(s) \cdot B(s) = \tau(s)$

La torsion (τ) mesure à quel point on sort d'un plan. La courbure (k) mesure à quel point on dévie d'une droite.

Exemple : Hélice

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right)$$

où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

est paramétrisé par longueur d'arc

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{q}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right)$$

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \frac{a}{c^2}$$

$$N = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$B = T \times N = \left(\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right)$$

$$N'(s) = \left(\frac{1}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\tau(s) = N' \cdot B = \frac{b}{c^2} \sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b}{c^2} \cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + 0 = \frac{b}{c^2}$$

Remarque

La courbure d'une courbe de \mathbb{R}^3 est toujours positive (C'est une norme) mais la torsion a un signe. La torsion renseigne sur la chiralité.

$$T' = \kappa N \checkmark$$

...

Courbes non-paramétrées pas longueur d'arc

Soit α une courbe birégulière. On note $s(t)$ la reparamétrisation par longueur d'arc.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (*)$$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = 1 \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

la fonction $\frac{ds}{dt} = v(t)$ est la vitesse de α

$$\frac{d\alpha}{dt} = T(s(t))v(t)$$

Pour calculer N

$$\frac{dT(s(t))}{dt} = \frac{dT(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)$$

$$\implies N(s(t)) = \frac{1}{v(t)} \frac{dT(s(t))}{dt}$$

On peut ensuite calculer B et τ

Exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^3, 3t + t^3)$$

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \dots = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$T = \frac{\alpha'}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)}(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\kappa N(t) = \frac{1}{v(t)} T'(t) = \dots = \frac{1}{6} \left(\frac{-4t}{1 + t^2}, \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2} \right)$$

$$\kappa(t) = \|k(t)N(t)\| = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

On calcul B, pas le temps de retranscrire

Cours 5

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

La dernière fois, on s'interessait à ce qui se passe quand un courbe n'est pas paramétrisé par longueur d'arc. On suppose qu'il existe un paramétrisation par longueur d'arc : $\alpha(s(t))$ où s est la longeur d'arc

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha(s(x))\| dx$$

$$s'(t) = \|\alpha(s(t))'\| = v(t)$$

$$\begin{aligned}\alpha(s(t))' &= \alpha'(s(t))s'(t) = T(s(t))v(t) \\ \alpha(s(t))'' &= T'(s(t))v(t)^2 + T(s(T))v'(t) = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)^2 + v'(t)T(s(t))\end{aligned}$$

Pour calculer N et κ sans passer par la longueur d'arc, on utilise

$$\kappa(s(t))N(s(t)) = \frac{\alpha(s(t))'' - v'(t)T(s(t))}{v(t)^2}$$

Exercice : Finir l'exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$$

On devrait trouver

$$\kappa(s(t)) = \tau(s(t)) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

Proposition : La courbure d'une courbe α (non-paramétrée par longueur d'arc) est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|}$$

Démonstration

On a, par ce qu'on a fait ci-haut

$$\begin{aligned}\alpha(s(t)) &= vT \\ \alpha(s(t))'' &= v'T + \kappa v^2 N\end{aligned}$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3 \kappa (T \times N) = v^3 \kappa B$$

$$\begin{aligned}\implies \|\alpha' \times \alpha''\| &= v^3 \kappa \\ \implies \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} &= \kappa \quad \text{car } v = \|\alpha'\|\end{aligned}$$

Conséquence des formules de Frenet-Serret

Prop : Une courbe est un droite $\iff \kappa = 0$

Démonstration (\implies) Si α est une droite

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \rho_0 + sV \\ \alpha'(s) = v - T(s) &\implies T'(s) = 0 \implies \kappa = 0\end{aligned}$$

(\Leftarrow) si $\kappa(s) = 0 \forall s$

$$T'(s) = 0 \implies T(s) = T_0$$

$$\alpha(s) = \int_0^s T(x) dx = sT_0 + \rho_0$$

Exemple : Que peut-on dire d'une courve α dont toutes les tangeantes passent par un même point ?

Sans pertes de généralité, les tangeantes passent par $\vec{O} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\implies \alpha(s) + \lambda(s)T(s) &= 0 \\ \implies T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) &= 0 \\ \implies (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s) + \lambda(s)(\kappa(s)N(s)) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies 1 + \lambda'(s) &= 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0 \\ \lambda(s) &= -s + c \\ \lambda = 0 \text{ si } s = c &\implies \kappa = 0 \text{ sauf si } \dots\end{aligned}$$

Prop 1) Une courbe birégulière α est planaire $\iff \tau \equiv 0$. 2) Les courbes planaires de courbure constante sont des cercles.

Démonstration 1) \implies Si α est planaire, T et N engendrent le plan qui contient α . Cela signifie que $T \times N = B$ est constant. C'est le vecteur normal au plan qui contient la courbe α .

$$\implies B'(s) = 0 = -\tau N \implies \tau = 0$$

Donc la torsion est nulle ■

(\Leftarrow) Inversement, si $\tau \equiv 0$

$$\begin{aligned} B'(s) &= 0 \implies B(s) = B_0 \text{ (est constant)} \\ \implies (\alpha(s) \cdot B(s))' &= T(s) \cdot B(s) + \alpha(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha(s) \cdot B(s) = \alpha(s) \cdot B_0 = C$$

C'est l'équation d'un plan dans \mathbb{R} ■

2) \Leftarrow

Un cercle est paramétré par longueur d'arc avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ \alpha'(s) &= T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \end{aligned}$$

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right)$$

$$\implies \kappa = \|T'(s)\| = \frac{1}{r} \text{ est constante}$$

Cela donne une interprétation à la courbure qui est que en chaque point, il existe un cercle de rayon r qui est une meilleure approximation de la courbe.

\implies

Soit $\alpha(s)$ une courbe planaire avec

$$\kappa_s = \kappa_0$$

Comme on sait déjà que cela doit être un cercle, on s'aide en cherchant le centre du cercle.

On pose $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0} N(s)$

$$\beta'(s) = T(s) = \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa T + \tau B)$$

$$\|\alpha(s) - \beta(s)\| = \left\| \frac{1}{k_0} N(s) \right\| = \frac{1}{k_0}$$

$\implies \alpha(s)$ est sur le cercle de rayon $\frac{1}{k_0}$ centré en B_0

Courbe du jour : Tractrice UN chien enterre un os à $(0, 1)$, son maître à $(0, 0)$ la tire par une laisse en déplaçant vers $x > 0$. Comme le chien tire très fort, la laisse est toujours tangente à la trajectoire du chien.

Soit θ l'angle formé par la laisse et l'axe des x

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (t + \cos \theta(t), \sin \theta(t)) \\ \alpha'(t) &= 1 - (\sin \theta)\theta', \cos \theta\theta'\end{aligned}$$

La laisse est dans la direction $(\cos \theta, \sin \theta)$. Comme la trajectoire α est tangeante à la laisse.

$$\frac{\cos \theta \theta'}{1 - (\sin \theta)\theta'} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\begin{aligned}\cos \theta \theta' &= \sin \theta - (\sin^2 \theta)\theta' \\ \theta' &= \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sin \theta \\ -\ln(\csc \theta + \tan \theta) &= t + c \quad t = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow c = 0\end{aligned}$$

$$\alpha = (-\ln(\csc \theta + \tan \theta) + \cos(\theta), \sin \theta) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

En reparamétrisant

$$\alpha(t) = (t - t \sinh(t), \sinh(t))$$

Forme locale canonique d'une courbe

Proposition : Soit α une courbe birégulière paramétrée par longueur d'arc t.q. $\alpha(0) = 0$ alors

$$\alpha(s) = \left(s - \frac{k_0^2}{6}s^2 + o(s^2) \right) T(o) + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \right) \dots$$

C'est vraiment laid, c'est loin pis il y a du soleil, sorry.

Démonstration Le théorème de Taylor nous dit

$$\alpha(s) = sa'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^2}{6}\alpha'''(0) + O(s^4)$$

$$\alpha'(0) = T(0) \quad \alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa'(0)N(0) + \kappa_0\tau_0B(0)$$

$$\implies \alpha(s) = \left(s - \frac{s^2}{6}\kappa_0^2 + O(s^3) \right)T(0) + \left(k_0\frac{s^3}{2} + k'_0\frac{s^2}{6} + o(s^3) \right)N(0) + \left(\kappa_0\tau_0\frac{s^3}{6} + O(s^3) \right)B(0)$$

Le théorème fondamentale des courbes dans \mathbb{R}^3

Si j'ai deux courbes donc je connais la même courbure est la même torsion en tout point alors c'est la même courbe à une isométrie près.

Montrons d'abord que les isométries de \mathbb{R}^3 préservent la courbure et la torsion.

Rappel Une isométrie de \mathbb{R}^3 est de la forme $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ où $A \in O(3) \iff AA = \text{id}$, $b \in \mathbb{R}^3$

Une isométrie est directe où une transformation directe si $A \in SO(3) \iff \det A = 1$

Soit α une courbe paramétrée par longueur d'arc

On définit

$$\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$$

$$\alpha^{*\prime}(s) = A\alpha(s)$$

$$T'(s) = AT(S)$$

$$T^{*\prime}(s) = AT'(s)$$

$$\|\kappa^*N^*(s)\| = \|\kappa(s)AAN(s)\|$$

$$\kappa^* = \kappa$$

$$B^* = T^* \times N(AT) \times (AN) = A(T \times N) = AB$$

$$(B^*)' = -\tau^*N^*$$

$$(AB)' = AB' = - \implies \tau = \tau^*$$

Rappels

Formule de la courbure $\frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$\kappa(s) = - \iff$ segment de droite

$\tau = 0 \iff$ la courbe est planaire

$\tau(s) = 0$ et $\kappa(s) \equiv c \iff \alpha$ portion de cercle de rayon

Forme locale canonique (Taylor)

Isométrie $x \mapsto Ax + b$ $AA^t = 1$

La courbure et la torsion sont invariantes par isométries

Pour A une isométrie directe $A\vec{u} \times A\vec{v} = A(\vec{u}\vec{v})$ En général $A\vec{u} \times A\vec{v} = \det(A)A(\vec{u} \times \vec{v})$

Théorème fondamentale des courbes dans \mathbb{R}^3

Deux courbes C, C^* dans \mathbb{R}^3 de courbure non-nulle diffèrent par une isométrie directe \iff elles ont la même courbure et torsion ($\kappa = \kappa^*$ et $\tau = \tau^*$)

Dém Soit α, α^* des courbes paramétrées par longueurs d'arc de C, C^*

Prenons A , l'unique matrice orthogonale t.q.

$$AT(0) = T^*(0)$$

$$AN(0) = N^*(0)$$

$$AB(0) = B^*(0)$$

Rappel : si A envoie une base orthonormée vers une base orthonormée alors A est orthogonale.
Si A envoie une base positivement orientée à une base positivement orientée alors $\det\{A\} > 0$

Soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $A \cdot \alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Définissons $I(x) = Ax + \vec{b}$ et $\tilde{\alpha}(s) = I(\alpha(s)) = A\alpha(s) + \vec{b}$

reste à montrer que $\tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) \forall s$

On a $\tilde{\alpha}(0) = A\alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Et comme I est une isométrie

$$\tilde{T}(0) = AT(0) = T^*(0)\tilde{N}(0) = AN(0) = N^*(0)\tilde{B}(0) = AB(0) = B^*(0)$$

Comme κ, τ sont invariants par isométries directes

$$\kappa^*(s) = \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s), \tau^*(s) = \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$$

Définissons une fonction $f(s) = \tilde{T}(s) \cdot T^*(s) + \tilde{N} \cdot N^* + \tilde{B} \cdot B^*$

$f'(s) = C$ est vraiment long à écrire, fuck ça, règle de chaîne mdr = 0

$$\implies f(s) \equiv C \text{ mais } f(0) = 1 + 1 + 1 = 3 \implies f(s) = 3$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$)

$$\tilde{T}(s) \cdot T^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{N}(s) \cdot N^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{B}(s) \cdot B^*(s) \leq 1$$

On en conclut que les vecteurs du repère de Frenet tilde et étoile sont les mêmes

En particulier $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha'^*(s) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) + \vec{v}_0$ mais $\vec{v}_0 = 0$ car $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$

Question : Étant donné deux fonctions $\kappa(s), \tau(s)$, existe-t-il une courbe α ayant κ, τ comme courbure et torsion ?

Oui ! (avec suffisamment de régularité)

Pour trouver α , on résout le système

$$\begin{aligned} T' &= \kappa T \\ N' &= -\kappa T & \tau B \\ B' &= \tau B \end{aligned}$$

puis on intègre T . On sait qu'une solution existe grâce au théorème d'existence des solutions d'équations différentielles.

Courbes planaires

Théorème [inégalité isopérimétrique] :

Soit C une courbe plane simple fermée de longueur l et A est l'aire de la région bornée par C . Alors $l^2 - 4\pi A \leq 0$ Avec $\iff C$ est un cercle

Rappel

Théorème de Greene :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot}(\mathbf{F}) dA$$

En particulier, aire(R) = $\int_C = \frac{1}{2} \int_c (yx) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int xy' - yx' dt$

α paramétrée par longueur d'arc de C $\bar{\alpha}$ paramétré du cercle

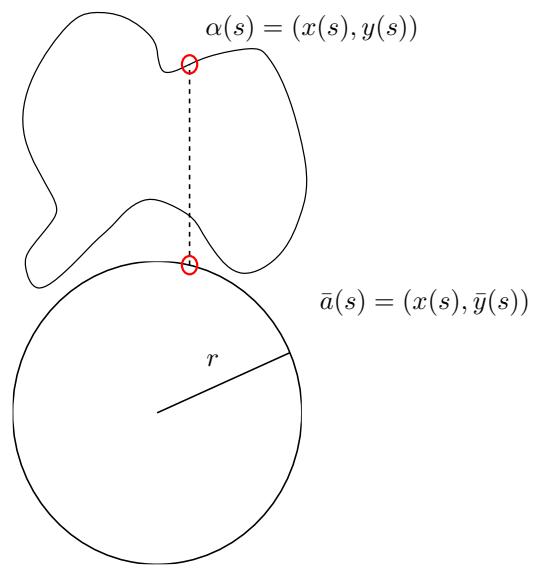


FIGURE 1 – paramétrisation isopérimétrique

Calculons

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s)ds + \int_0^l -\bar{y}(s)x'(s)dy$$

Fuck les notes ; dodo. Aussi, criss que mon shéma est laid, faut vraiment que j'aprène à utiliser inkscape

Indice de rotation et Umalfusatz

α une courbe planaire

On peut assigner un signe à la courbe.

On définit T comme d'habitude soit $T(s) \equiv \alpha'(s)$ mais $N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

Où $R_{\frac{\pi}{2}}$ est une rotation de $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$T(s) = (x(s), y(s)) \implies N(s) = (-y(s), x(s))$$

et

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s)$$

Fenet-Seret dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) \end{aligned}$$

autres interprétation de $\kappa(s)$: Dans \mathbb{R}^2 , on peut toujours écrire $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$

$$T'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s), \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \theta'(s)M(s)$$

On comprend donc que $\theta'(s) = \kappa(s)$

On peut donc définir $\theta(s)$ comme

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt + \theta(0) \implies \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \kappa(t)dt$$

Si α est une courbe fermée ($\alpha(s+L) = \alpha(s)$) alors on a que

$$\theta(L) = \theta(0) = 2k\pi$$

On appelle $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t)dt = R$ l'indice de rotaition

Rappels

Pour une courbe de \mathbb{R}^2 , la courbure à un signe

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$$

où $N(s) = R_{\frac{\pi}{2}} T(s)''$

L'indice de rotation d'une courbe fermée (periodique) est

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$$

où $R \in \mathbb{Z}$

Umlaufsatz (tangentes tournantes). Si α est simple (pas d'auto-intersection) $\mathcal{R}(\alpha) = 1$

Si on écrit $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$, alors $\kappa(s) = \theta'(s)$

Chapitre 2 : Surfaces dans \mathbb{R}^3

On va maintenant parler des surfaces dans \mathbb{R}^3

Rappels : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$Df \Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big|_p$$

La différentiel de f en p

$U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q. $B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq U$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$. UN sous-ensemble $U \subseteq S$ est ouvert dans S ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q. $B_\epsilon(\vec{x}) \cap S \subseteq U$

Exemple $S^2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

ON peut paramétriser une partie de S^2 à l'aide de coordonnées sphériques

$$(0, \cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Rotation autour de θ

$$R_\theta = \dots$$

Les pôles ne sont pas dans notre paramétrisation

Déf Une application $p : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (U Ouvert) est une carte de surface lisse si elle est lisse, bijective et Df est de plein range $\forall p \in U$

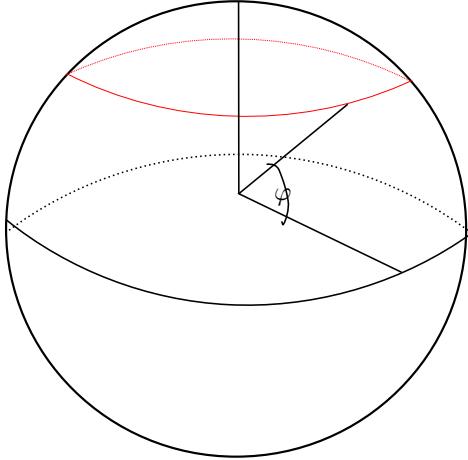


FIGURE 1 – paramétrisation sphérique

Déf Une surface lisse $S \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble t.q tout point $\vec{x} \in S$ est contenue dans l'image d'une carte de surface lisse $p : U \rightarrow S$ t.q. p est une homéomorphisme (application bijective continue d'inverse continu) entre U et une ouvert de S

UNE collection de paramétrisation $p_i : U_i \rightarrow S$ t.q. $p_i(U_i)$ recouvrent S s'appelle un atlas

Exemple Pour la sphère, on peut construire un atlas avec 2 cartes de surfaces lisses

On peut aussi construire un atlas de S^2 en utilisant des "projections inverses"

$$p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

On doit prendre un total de 6 demi-sphères pour couvrir toute la sphère de cette manière. Sinon il manque toujours de points sur l'équateur.

Exemple 2 le graph d'une fonction lisse $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une carte de surface lisse

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

toujours de premier rang

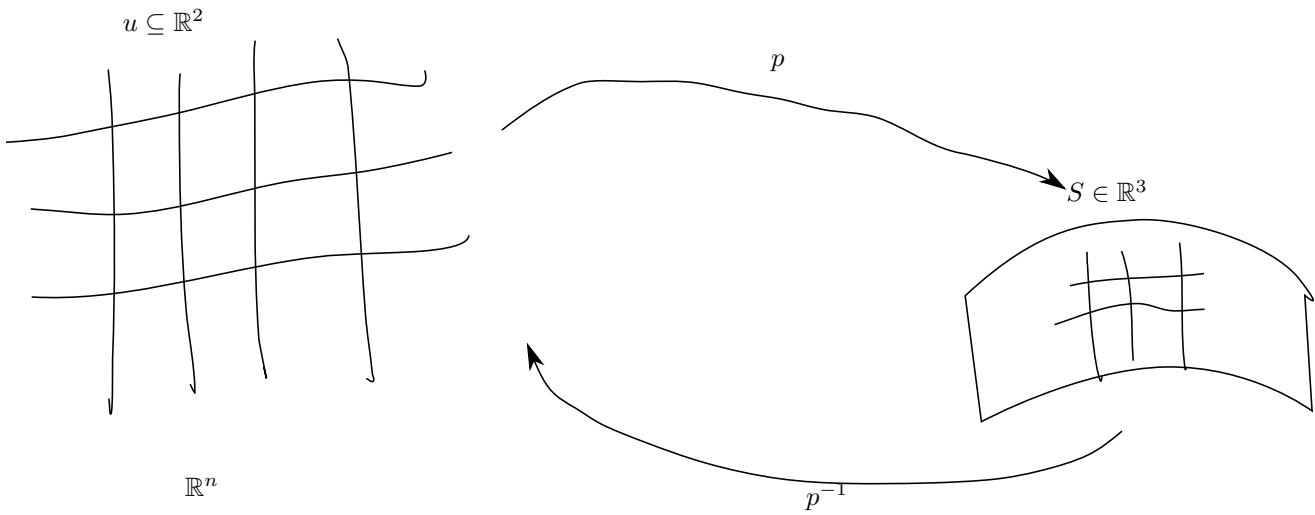


FIGURE 2 – mapping dune surface

Exemple 3 : l'hélicoïde est une hélice dans \mathbb{R}^3 à laquelle on ajouter des segments horizontaux

$$p(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), bv) \quad (b \geq 0)$$

Domaine $U \geq 0, v \text{ in } \mathbb{R}$

Une seule carte forme un atlas

$$Dp = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u \sin(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note les colonnes de Dp par p_u et p_v

Exemple 4 : Le tore

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos u) \cos v \\ (a + b \cos *u) \sin v \\ b \sin s \end{pmatrix}$$

Peut être couvert avec 4 cartes en changeant le domaine de p de $\pm\pi$

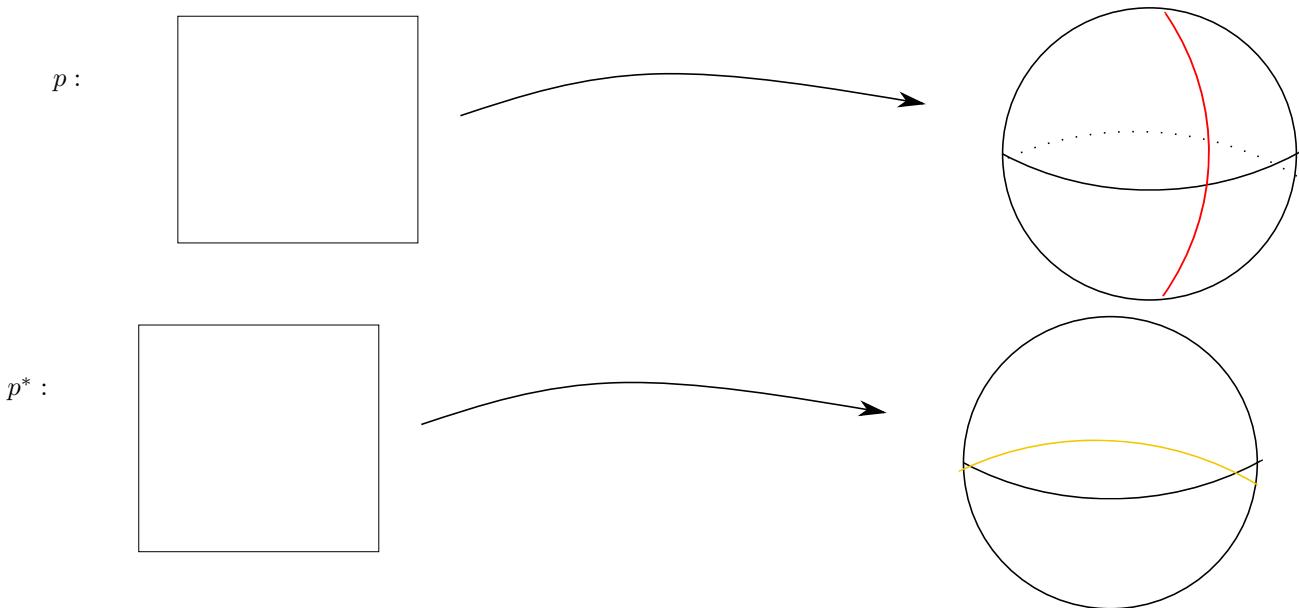


FIGURE 3 – mapping de la sphère

Plus généralement, si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe régulière dans le plan y, z avec $y \neq 0$. La surface de révolution associée est une surface lisse.

Si $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$

$$p(t, \theta) = \begin{pmatrix} f(t) \cos \theta \\ f(t) \sin \theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $Df|_{\vec{x}} = 0$ est un point critique et la valeur associée $a = f(\vec{x})$ est une valeur critique. Une valeur $a \in \mathbb{R}$ est régulière si elle n'est pas critique.

Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

le seul point critique est $(0, 0, 0)$. La seule valeur critique est $f(0, 0, 0) = 0$. Toutes les valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont des valeurs régulières.

On a $S^2 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)^T\} \text{ pas une surface lisse}$$

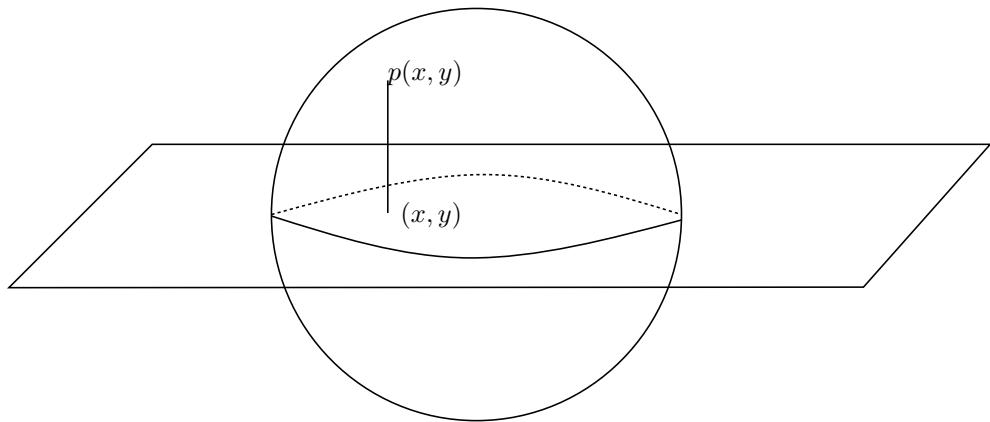


FIGURE 4 – projection inverses

Proposition Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse et $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f , alors $S = f^{-1}(a)$ est une surface lisse $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = a\}$ Rappel Théorème de la fonction inverse Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable \mathcal{C}^K et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Df|_{\vec{x}}$ est inversible. Alors il existe des ouverts $U \ni \vec{x}$ $V \ni F(\vec{x})$ t.q. $F : U \rightarrow V$ est inversible d' \leftarrow inverse de classe \mathcal{C}^k

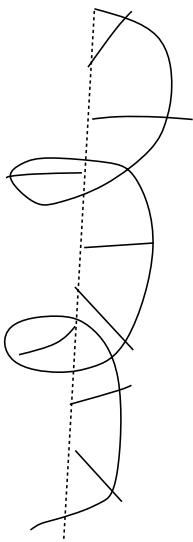


FIGURE 5 – helicoide

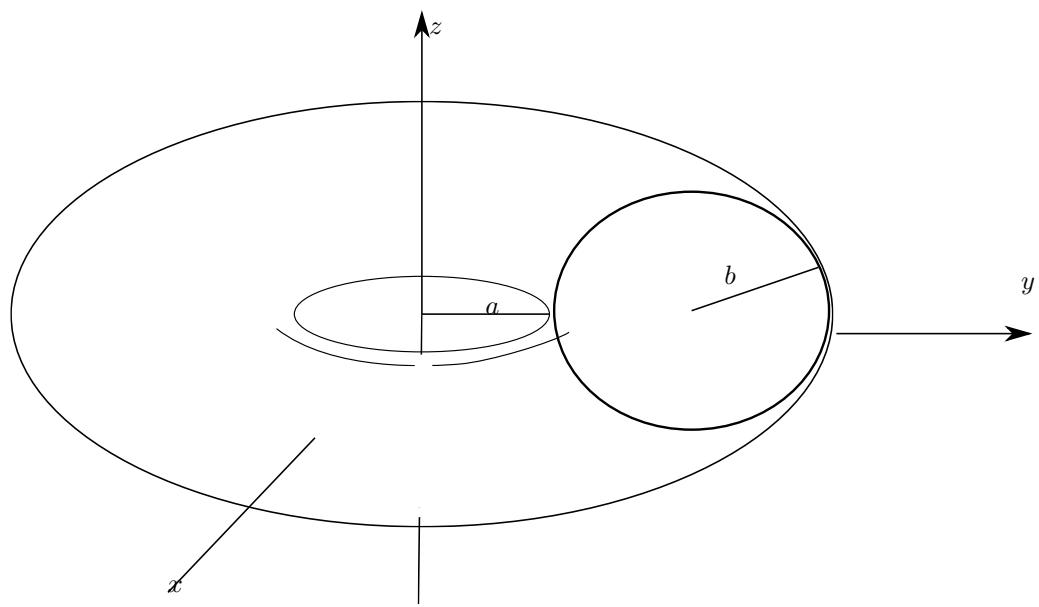


FIGURE 6 – parametrisation du tore

Rappels

- Carte de Surface : $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$
 - lisse
 - homéomorphisme entre U et $p(U)$
 - $Dp = (p_u|p_V)$ rang maximal
- Surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$
 - tout point est contenu dans la carte de surface
- Point régulier p de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $Df|_p \neq 0$
 - valeur régulière : $f(p)$
 - valeur critique \iff non-régulière

Proposition Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière. alors $f^{-1}(a)$ est une surface lisse

Dém : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $f(\vec{x}) = a$

Comme a est une valeur régulière, $df|_{\vec{x}} \neq 0$

\implies un des dérivé partiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$$\frac{df}{dz}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$$

Définissons $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)\Big|_{\vec{x}} = \frac{df}{dz}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut appliquer le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts}, U \ni \vec{x}, V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q. $F : U \rightarrow V$ est inversible et F^{-1} est lisse.

Soit W la projection de V sur le plan (x, y)

$$p : W \rightarrow S \quad (x, y, z)^T \rightarrow F^{-1}(x, y, z)^T \in f^{-1}(a)$$

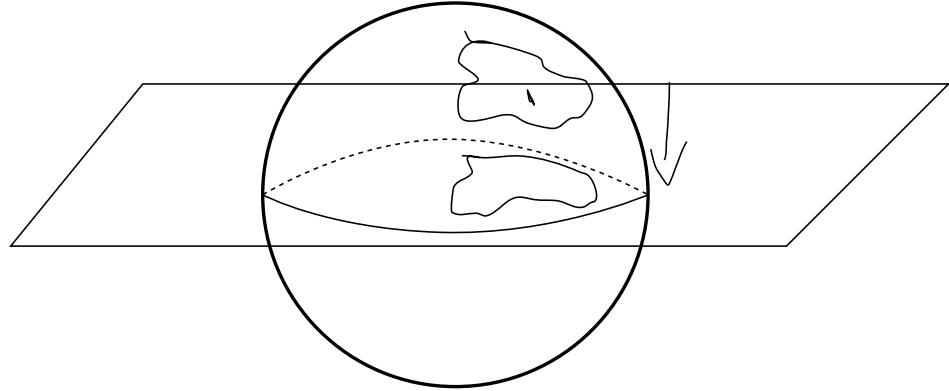


FIGURE 1 – bingobong

comme $DF^{-1} \big|_{F(\vec{x})} = (DF|_{\vec{x}})^{-1}$

Dp = deux premières colonnes de DF^{-1} est de rang maximal ■

Exemple

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est $(0, 0, 0)$

La seule valeur critique est $f(0, 0, 0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x, y, z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

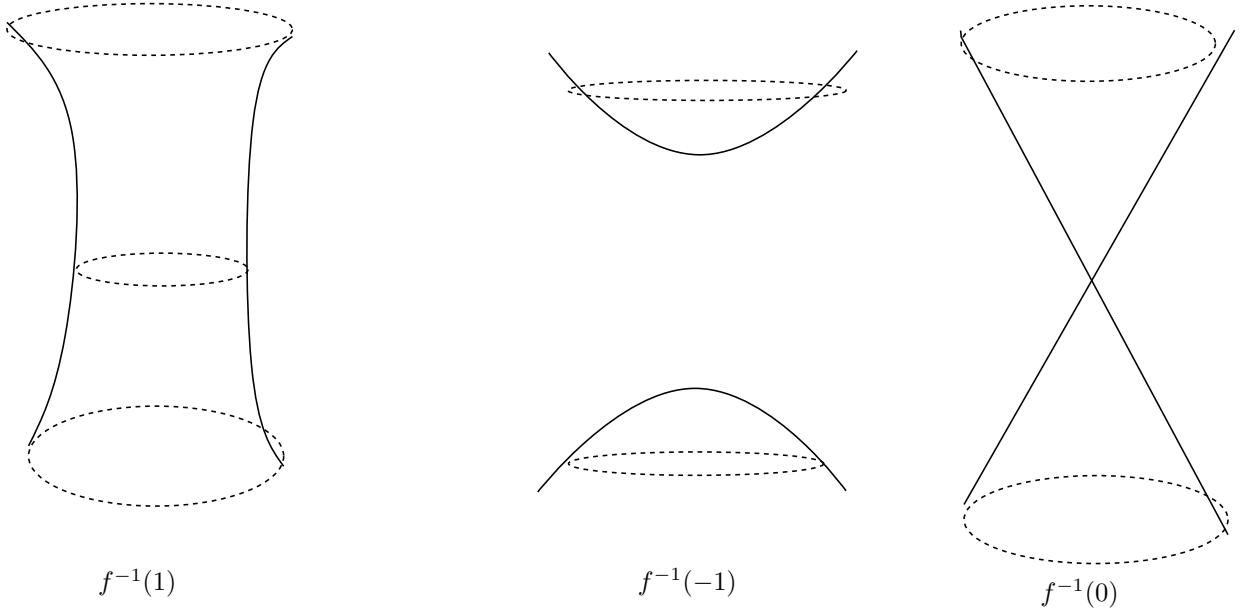


FIGURE 2 – Exemples de fonctions

première forme fondamentale

Définition Étant donnée une carte de surface lisse p , la première forme fondamentale ou métrique est

$$I_{u,v} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Définition : Deux surfaces S, S^* sont localement isométriques si il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et des paramétrisations p, p^* t.q. $I|_{(u,v)} = I^*|_{(u,v)}$

Exemple : Considérons S le plan x, y paramétrisé par $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre S^* paramétrisé par $p^*(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1, 0, 0), p_v = (0, 1, 0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0, 0, 1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

$\implies S$ est localement isométrique à S^*

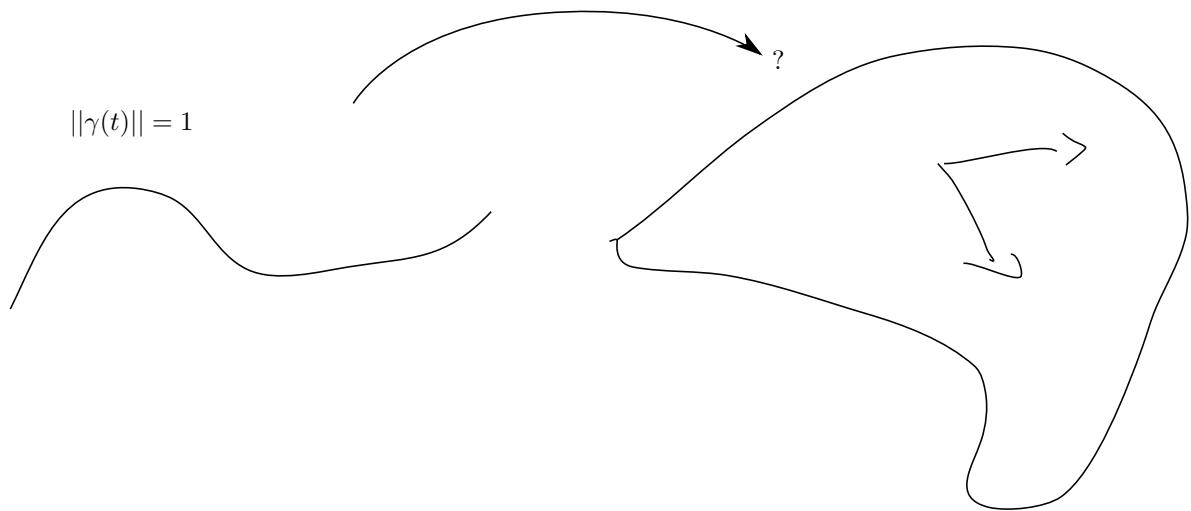


FIGURE 3 – forme fondamentale

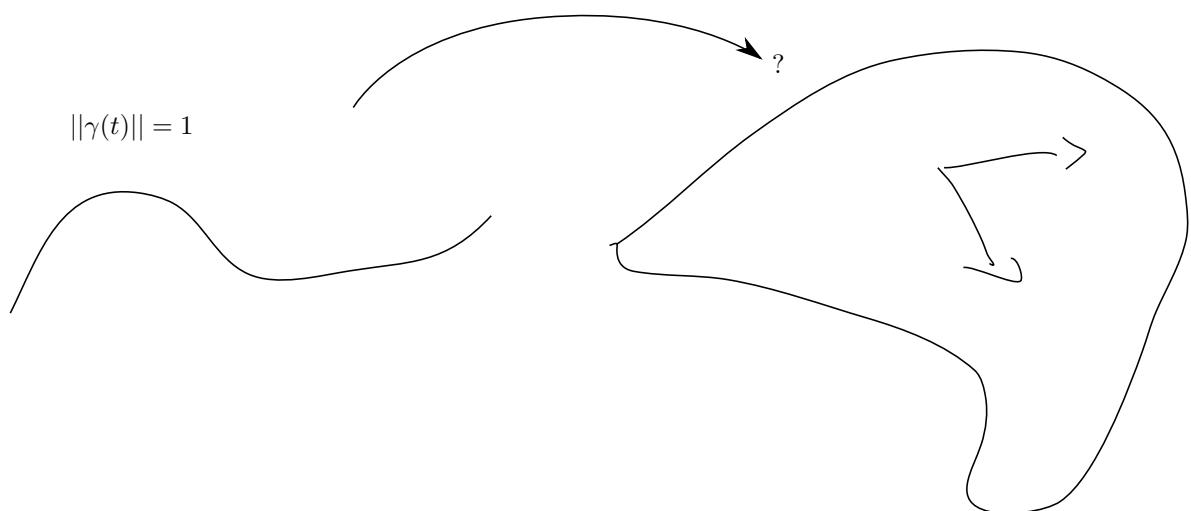


FIGURE 4 – forme fondamentale

Rappels

Première forme fondamentale

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale est une forme bilinéaire symétrique définie positive (produit scalaire) sur $T_x S$: l'espace tangent au point $x \in S$.

C'est $X, Y \in T_x S$

$$I_x(X, Y) = X \cdot Y$$

Dans la base p_u, p_v la matrice de I est

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si $X = ap_u + bp_v$ $Y = cp_u + dp_v$

$$I_x(X, Y) = (a \quad b) \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Rappels (encore)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$Df \Big|_x = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$$

$$D_v f \Big|_x = Df \Big|_x \cdot v$$

est la dérivée directionnelle de f dans la direction v .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Règle de chaîne :

$$D(g \circ f) \Big|_x = Dg \Big|_{f(x)} \cdot Df \Big|_x$$

Remarque

Soit un chemain $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.q. $\gamma(0) = x; \quad \gamma'(0) = v$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D(f \circ \gamma) \Big|_0 = Df \Big|_{\gamma(0)} \cdot D\gamma \Big|_0 = Df \Big|_{\gamma(0)} \gamma'(0) = Df \Big|_x \cdot v = D_v f \Big|_x$$

Dérivée directionnelle de f dans la direction v . Dépend uniquement de $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$

Si $p : U \rightarrow S$ est une carte locale de surface et que γ est un chemin dans U , alors $p \circ \gamma$ est un chemain dans S .

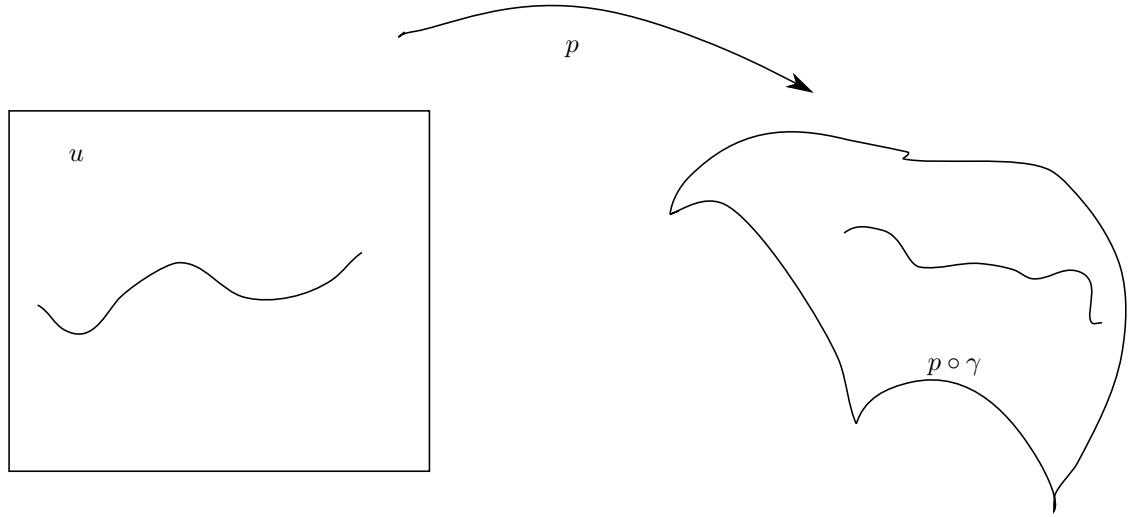


FIGURE 1 – chemin dans une surface

Définition

Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. ON dit que f est différentiable en $x \in S$ si pour une carte $p : U \rightarrow S$ t.q. $p(u?, v?) = x$, $f \circ p$ est différentiable en (u_0, v_0) Dans ce cas la dérivée de f est x_i notée $df \Big|_x$ est définie par

$$df \Big|_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R} \quad X \mapsto D_x f \Big|_x$$

La composition $F = f \circ p$, s'appelle l'expression de f en coordonnées locales

Sans la base p_u, p_v de $T_x S$ la dérivé $df \Big|_x$ a pour matrice :

$$Df\Big|_{u_0, v_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$\gamma(t) = (u_0 v_0 \circ t(a, b))$$

alors

$$D(p \circ \gamma)\Big|_? = D p\Big|_? \cdot D\gamma\Big|_? = Df\Big|_? \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (p_u | p_v) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Big|_{u_0, v_0}$$

Si $X = ap_u + bp_v$

$$Df\Big|_x = D(f \circ p \circ \gamma)\Big|_0 = D(F \circ \gamma)\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} D\gamma\Big|_0 = D F\Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice de $df|_x$ dans la base p_u, p_v est bien $DF|_x$.

Exemple

$$p(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x \cdot x = \|x\|^2 \end{aligned}$$

En coordonnées locales $f(x)$ est donnée par $F = f \circ p$

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$f(p(0, z)) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + z^2 = 1 + z^2$$

$$DF = \left(\frac{dF}{d\theta}, dvFz \right) = (0 \quad 2z)$$

est la matrice de df en coordonnées locales

Définition

Soit S, S^* deux surfaces et $f : S \rightarrow S^*$

On dit que f est dérivable/différentiable en $x \in S$ si, pour des cartes p de S , p^* de S^* , la composition

On appelle $F = p \circ g \circ p$, l'expression en coordonées locales de f

La dérivée de f est $df|_x : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S^*$ dont la matrice ?? les bases p_u, p_v de $T_x S$ et p^*, p^* de $T_{f(x)} S^*$ est $DF|_{f(x)}$??

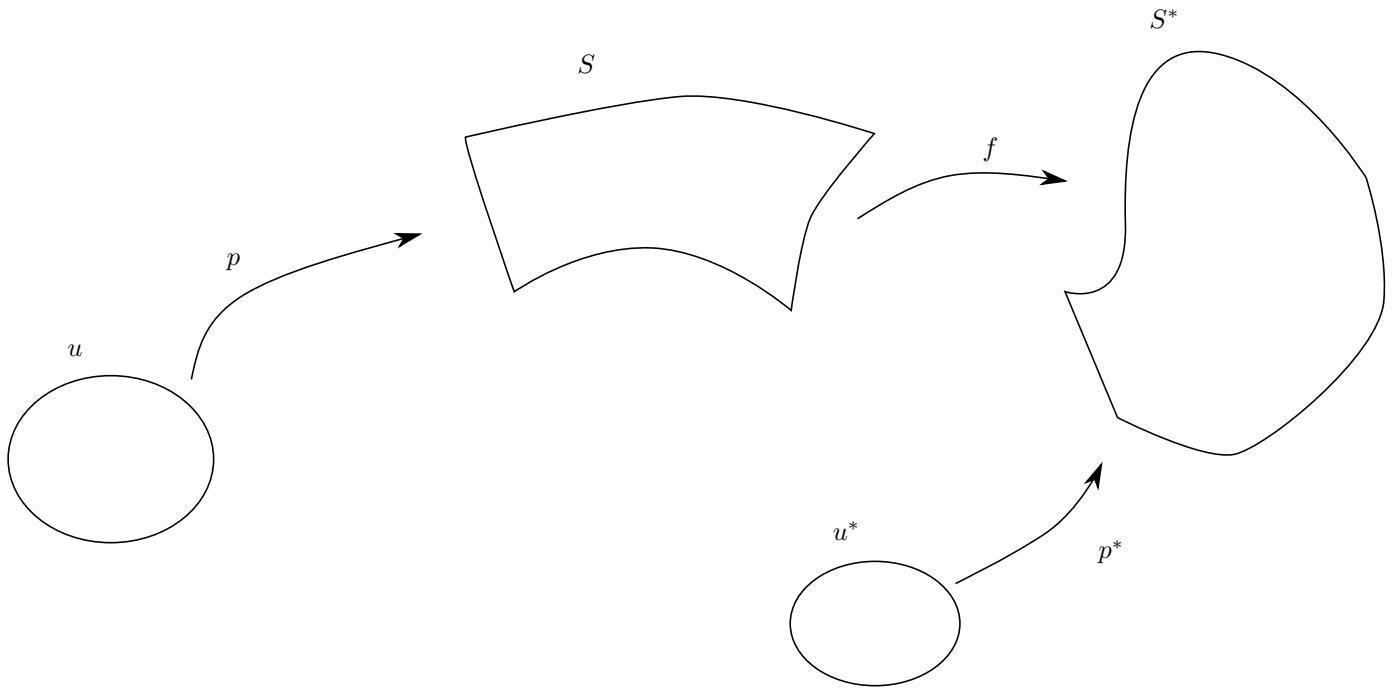


FIGURE 2 – Le même dessin que d'habitude

Application de Gauss

Étant donné une surface \$S\$ un choix ? de vecteurs unitaires normales s'appelle une orientation sur \$S\$

L'application de Gauss est la fonction

$$n : S \rightarrow S^2$$

qui associe à un point \$x \in S\$ le vecteur normal en \$x\$. (défini sur une surface orientée)

par exemple, si \$S = S^2\$, \$n : S^2 \rightarrow S^2\$ est l'identité.

Si \$S\$ est un plan \$n\$ est constant ?

Si \$S\$ est un cylindre, l'image de \$S\$ est un grand cercle

Si on a plutôt une scelle :

Définition L'opérateur de forme (shape operator) d'une surface \$S\$ est \$\mathcal{S}_x(s) = -dn(x)\$

$$\mathcal{S} : T_x S \rightarrow T_{n(x)} S$$

"Demonstarion"

Déf La seconde forme fondamentale de \$S\$ est

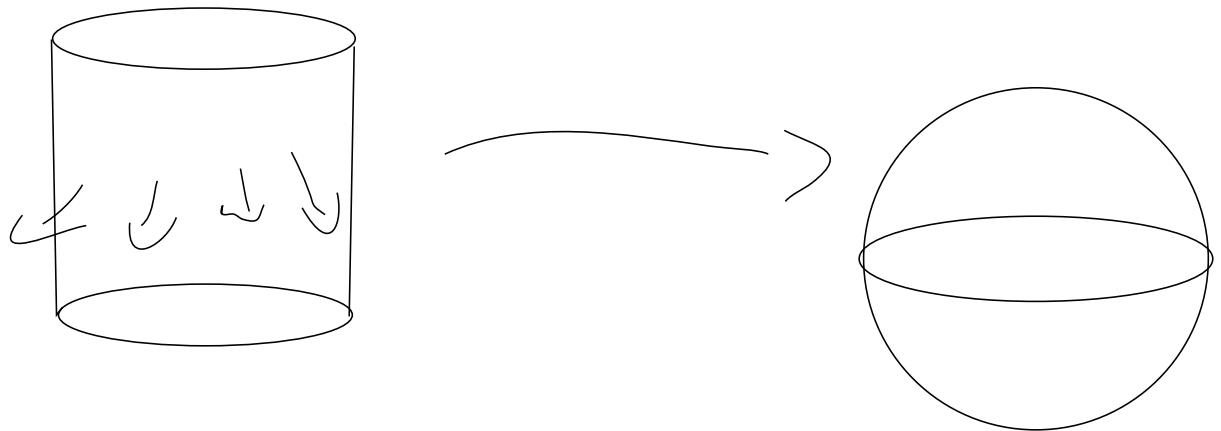


FIGURE 3 – grand cercle à sphère

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}(X) \cdot Y$$

$$(X < y \in T_x S)$$

Prop : II_x est une forme bilinéaire symétrique

Dém : II_x est bilinéaire car le produit scalaire est bilinéaire et $\mathcal{S} = -dn$ est linéaire

Calculons II_x sur p_u, p_v

ON sait que $p_u|_{u,v} = n(?) = 0$

On prend $\frac{d}{dv}$ de chaque côté

Fuck, je vais noter la conclusion quand on ferra le prochain rappel

Je vois pas assez bien :(

FIGURE 4 – Scelle vers shpère

Rappels

La dérivé d'une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application linéaire $df|_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R}$ de matrice $D(f \circ p)$ dans la base p_u, p_v

Par une application $f : S \rightarrow S^*$

$$df|_x : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S^*$$

est donné par la matrice $D \circ p^{-1} \circ f \circ p$ dans la base p_u, p_v de $T_x S$ et $p_u^* p_v^*$

Application de Gauss $n : S \rightarrow S^2$ vecteur normal uniraite pour p fixée, $n = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$

Opérateur de formce : $\mathcal{S}_x : T_x S \rightarrow T_x S$

$$\mathcal{S}_x(x) = -dn_x(X)$$

seconde forme fondamentale

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot Y = I(\mathcal{S}_x(X), Y)$$

Exemple :

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \quad p_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$p_u p_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|p_u \times p_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a montré, dans la démonstration que II est symétrique, que

$$II_x = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Résumé intra

I Coubrebes dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

- Longeur d'arc $\rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$
- Paramétrisation par longueur d'arc

$$\Psi(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$$

$$\gamma(s) = (\gamma \circ \psi^{-1})(s)$$

- Courbure, torsion, repère de Frenet
- Formules de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= \kappa T & \tau B \\ B'(s) &= -\tau N \end{aligned}$$

- Théorème fondamental des courbes dans \mathbb{R}^3 - isométrie de \mathbb{R}^3 + isométrie discrète
- courbures signées d'une coube dans \mathbb{R}^2
- Indice de rotation

$$R(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$$

- Umlaufsatz

II Surfaces dans \mathbb{R}^3

- Cartes de surfaces (paramétrisation)
- Surfaces lisses
- Plan tangent $T_{p(u,v)}S = \langle p_u, p_v \rangle$ (engendré par)
- Théorème des valeurs régulières

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = x$$

est une surface lisse si c est une valeur régulière \iff tout les points de $f^{-1}(c)$ sont réguliers ($df \neq 0$)

- Première forme fondamentale

$$X, Y \in T_x S$$

$$I_x(X, Y) = X \cdot Y$$

donné par la matrice

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

dans la base p_u, p_v

- Surfaces localement isométrique (même première forme fondamentale)

Rappels

Application de Gauss :

$$n : S \rightarrow S^2$$

- opérateur de forme $\mathcal{S}_x T_x S \rightarrow T_x S \quad \mathcal{S}(x)(X) == dn(X)$
- Seconde forme fondamentale $II_x T_x S???????$

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot \mathbf{Y}$$

En pratique, pour calculer II on utilise que sa matrice dans la base p_u, p_v est $M_{II} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{uv} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$

Comment trouve-t-on la matrice de \mathcal{S} maintenant ?

Proposition : Dans la base p_u, p_v

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_{II}$$

Si $M_{\mathcal{S}}$ est la matrice de \mathcal{S} et $\mathcal{S}(ap_u + bp_v) = cp_u + dp_v$ alors

$$M_{\mathcal{S}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

On sait que $II(X, Y) = \mathcal{S}(X) \cdot y = I(S(X), Y)$

$$(a \quad b) M_{II} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \left(M_{S?} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a \quad b) M_{\mathcal{S}}^t M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{II} &= M_{\mathcal{S}}^T M_I \\ M_{calS}^T &= M_{II} M_I^{-1} \\ M_{\mathcal{S}} &= M_I^{-1} M_{II} \end{aligned}$$

En général, on a que $M_{\mathcal{S}}$ n'est pas symétrique bien que les deux autres le sois

Interprétation de la seconde forme fondamentale

α : Courbe planaire d'intersection entre le plan engendré par $X \in T_x S$ et $n(x)$ et la surface S paramétrée par longeur d'arc et $\alpha(0) = x$

$$\begin{aligned} T(0) &= \alpha'(0) = X \\ N(0) &= \pm n(x) \end{aligned}$$

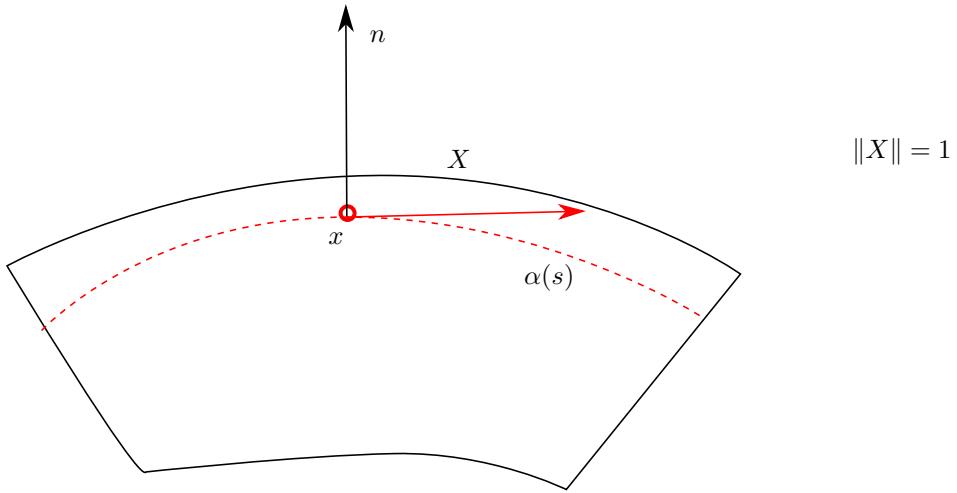


FIGURE 1 – Interprétation de la seconde forme fondamentale

$$N(s) = \pm n(\alpha(s))$$

$$\begin{aligned} N'(o) &= -\kappa(0)T(0) + \underbrace{\tau(0)B(0)}_0 = -\kappa(0)X \\ \kappa(0) = -N'(0) &= (n(\alpha(s)))' \Big|_0 \cdot X? = \pm dn(X) \cdot X = \pm \mathcal{S}(X) \cdot X = II(X, X) \end{aligned}$$

(Il y a des étapes rajoutées à posteriori que je vois mal... demander à quelqu'un peut-être...)

$II(X, X)$ est la courbure sectionnelle de S dans la direction X

Parenthèse d'algèbre linéaire

La notion de matrice symétrique dépend de la base :

$$\text{matrice symétrique : } M^T = M$$

Si M est la matrice de l'application $T : V \mapsto V$ T est auto-adjoint si :

$$T(u) \cdot V = u \cdot T(v) \forall u, v \in V$$

Un opérateur est auto-adjoint pour un produit scalaire donné. C'est la généralisation de matrice symétrique sans base

L'application de \mathcal{S} est auto-adjointe par I :

$$I(\mathcal{S}(X), Y) = I(X, \mathcal{S}(Y))$$

Dans la base p_u, p_v la matrice de S n'est pas symétrique mais dans une base orthogonale, elle le serait.

Un opérateur auto-adjoint est toujours diagonalisable et ses valeur propres sont réels.

$\Rightarrow S$ est diagonalisable et a 2 valeurs propres réelles k_1, k_2 . On appelle k_1, k_2 les courbures principales de S en x . Les vecteur propres associés sont les directions principales. Elles s'interprètent comme les courbures sectionnelles max et min.

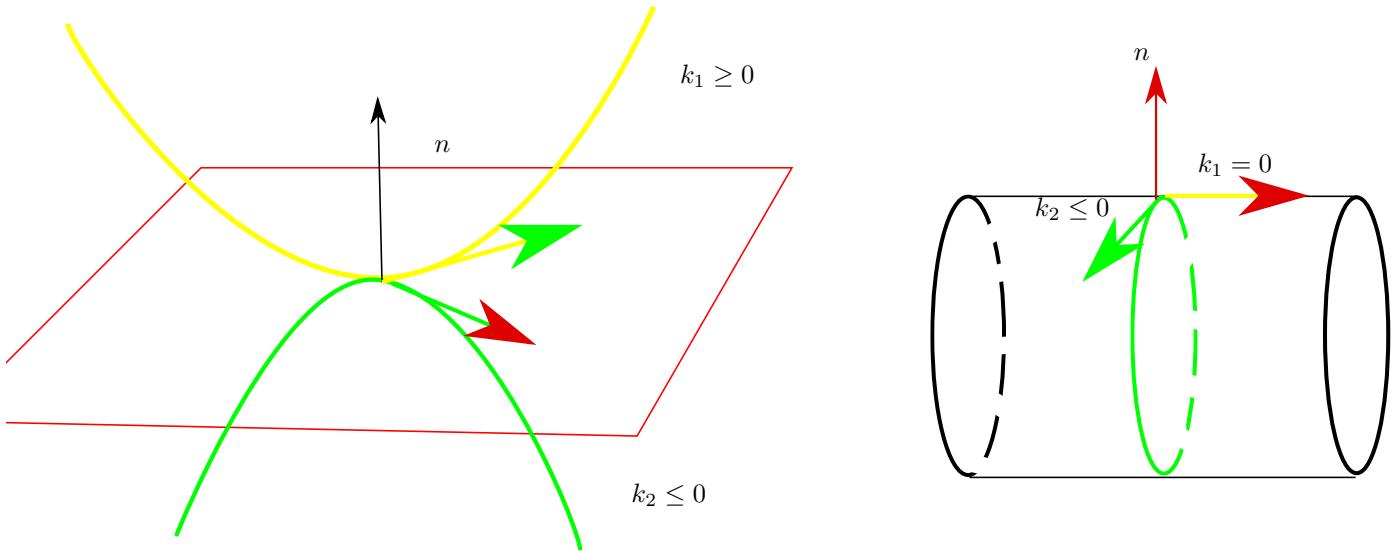


FIGURE 2 – Courbures principales

Le déterminant de $\mathcal{S} = k_1 k_2$ s'appelle la Courbure de Gauss et sa trace $= k_1 + k_2$ s'appelle la sourbure moyenne

Exemple : Surface avec un point de selle $p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$p_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_u \times p_v = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

$$n(p(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = m_I^{-1} M_{II} = \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2) - u^2 v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\dots}} \\ \frac{1}{\sqrt{\dots}} & 0 \end{pmatrix}$$

au point $u = v = 0$ $p(u, v) = (0, 0, 0)$

$$M_S \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ses vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec valeurs propres associées 1,-1. La courbure de Gausse est -1

Exercices :

— Si S est le graph d'une fonction f t.q. $f(0, 0) = 0$ $\nabla f|_{(0,0)} = 0$ Alors $M_S|_{(0,0)} = H_{(0,0)}$

$$p_{x,y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad H_{0,0} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} \\ \dots \end{pmatrix}$$

— Calculer la courbure de Gauss pour

1. S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

2. La pseudo-sphère (surface de révolution d'une tractrice)

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sech} \varphi \cos \theta \\ \operatorname{sech} \varphi \sin \theta \\ \varphi - \tanh \varphi \end{pmatrix}$$

Symbol de Christoffel et Théorema Egregium

Une quantité sur une surface est intrinsèque si elle est invariante par isométrie locale. \iff Dépendant uniquement de la première forme fondamentale (et ses dérivées).

L'opérateur de forme et II dépendent d'autre chose que seulement la première forme fondamentale. Par exemple un cylindre est à une isométrie près d'un plan mais ces deux surfaces n'ont clairement pas le même \mathcal{S} et II . C-à-d qu'en faisant des transformations localement rigides on préservait la première forme fondamentale mais on modifie les courbures/direction principales. La courbure de Gauss par contre, bien qu'elle ait été définie par une approche "extrinsèque", est intrinsèque !

Pour le démontrer on veut essayer de définir la courbure de Gauss en passant seulement par la première forme fondamentale. Pour ce faire, il va falloir définir les symbols de Christoffel

Symbols de Christoffel

En tout point de S , les vecteurs p_u, p_v, n forment une base de \mathbb{R}^3 . Les coefficients L, M, K de II donnent les coordonnées en n des dérivées secondes p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}

$$\begin{aligned} p_{uu} &= (\Gamma_{uu}^u)p_u + (\Gamma_{uu}^v)p_v + Ln \\ p_{uv} &= (\Gamma_{uv}^u)p_u + (\Gamma_{uv}^v)p_v + Mn \\ p_{vv} &= (\Gamma_{vv}^u)p_u + (\Gamma_{vv}^v)p_v + Nn \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \text{Coordonnées en } p_u \text{ de } p_{ij} \quad i, j, k \in \{u, v\}$$

Les Γ_{ij}^k s'appellent symbols de Christoffel

Exemple : Calculons Γ_{ij}^k pour S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$p_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$n(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi)$$

$$p_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$p_{\theta\theta} \cdot n = -\sin^2 \varphi$$

$$p_{\theta\varphi} \cdot n = 0$$

$$p_{\varphi\varphi} \cdot n = -1$$

$$\begin{aligned} p_{\theta\theta} &= 0p_\theta + \sin \varphi \cos \varphi p_\varphi - \sin^2 \varphi n \\ p_{\theta\varphi} &= {}_\theta+0p_\varphi + 0n \\ p_{\varphi\varphi} &= 0p_\theta + 0p_\varphi - n \end{aligned}$$

Rappels

- $M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ G & G \end{pmatrix}$
- $M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$
- $M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} \cdot M_{II}$
- \mathcal{S} est diagonalisable
- $k_1, k_2 \rightarrow \underline{\text{courbure principale}}$
- $\det(\mathcal{S}) \rightarrow \text{courbure gaussienne}$
- $\text{tr}(\mathcal{S}) \rightarrow \text{Courbure moyenne}$
- Symbol de Christoffel

Tentons d'exprimer Γ_{ij}^k en termes de E, F, G

$$\begin{aligned} p_{uu}p_u &= \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F = \frac{E_u}{2} \\ p_{uu}p_v &= {}_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G = F_u \frac{E_v}{2} \\ p_{uv}p_u &= \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F = \frac{E_v}{2} \\ p_{uv}p_v &= \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G = \frac{G_u}{2} \\ p_{vv}p_u \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F + F_v - \frac{G_u}{2} \\ p_{vv}p_v &= \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G = \frac{G_v}{2} \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations de Gauss-Codazzi, on compare p_{uuv} et p_{uvu}

$$p_{uuv} = (\Gamma_{uu}^u)_v p_u + \Gamma_{uu}^u p_{uv} + (\Gamma_{uu}^v)_v p_v + \Gamma_{uu}^v p_{vv} + L_v n + L n_v$$

$$= (\Gamma_{uu}^u)_v p_u + \Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + M_n) + (\Gamma_{uu}^v)_v p_v + \Gamma_{uu}^v (\Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + N_n)) + L_v n + L(b p_u + d p_v)$$

$$D_n = \begin{pmatrix} a & | & b \\ c & | & d \end{pmatrix} = -M_I^{-1} M_{II} \implies n_u = a p_u + c p_v n_v = b p_u + d p_v$$

$$= ((\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u + L b) p_u + ((\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^u + L d) p_v + (\Gamma_{uu}^u M + \Gamma_{uu}^v N + L_v) n$$

De la même manière

$$p_{uvu} = ((\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uu}^u + M a) p_u + ((\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u + M c) p_v + (\Gamma_{uv}^u + \Gamma_{iv}^v M + M_u) n$$

$$p_{uvv} = p_{vvu}$$

On compare les coefficients de p_v

$$Mc - Ld = (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u = \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v + \Gamma + uu^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v$$

$$Mc - Ld = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - MF & GM - F? \\ EM - FL & EN - ?? \end{pmatrix}$$

$$MC = Ld = M \left(\frac{FL - EM}{EF - G^2} \right) - L \left(\frac{FM - EN}{EF - G^2} \right) = \frac{E - M^2 + LN}{EF - G^2} = E \cdot k$$

$$E \cdot k = \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - (\Gamma_{uv}^v)^2 + (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u$$

k est intrinsèque (Peut être calculé avec E, F, G et leurs 2 premières dérivées)

On peut aussi obtenir des équation similaire avec

$$F \cdot k \quad F \cdot K \quad g \cdot k$$

Équations de Cedazzi

$$\begin{aligned} L_v = M_u &= L\Gamma_{uv}^u + M(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - N\Gamma_{uu}^v \\ M_v - N_u &= L\Gamma_{vv}^u + M(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - N\Gamma_{uv}^v \end{aligned}$$

Comme la courbure est une propriété intrinsèque, Si un surface possède un surface de Gauss nul (comme une pizza). On peut forcer sa courbure dans une direction à être nul en la faisant courber dans un autre direction. Si la courbe imposé est *vers le haut*. Il n'y aura aucune courbure vers le bas et la aliments ne tomberons pas.

Rappels

Les symbols de Christoffel sont intrinsèques

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_u/2 \\ F_u/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_v/2 \\ G_u/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - G_u/2 \\ G_v/2 \end{pmatrix}$$

$$M_S = M_I^{-1} \cdot M_{II}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (p_u | p_v)^t (p_u | p_v)$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$$

Les équations de Gauss-Cedazzi (que je ne réécrirais pas ici!)

Théorème fondamentale des surfaces dans \mathbb{R}^3

Soit $p, p^* : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux cartes de surfaces. Alors $I = I^*$ et $II = II^*$ ssi \exists une isométrie directe $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.q. $p^* = T \circ p$

(\Leftarrow)

Écrivons $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} p_u^* &= (T \circ p)_u = (Ap + b)_u \\ p_v^* &= Ap_v \end{aligned}$$

Comme A est orthogonale,

$$Ap_u \times Ap_v = A(p_u \times p_v)$$

$$n^* = \frac{p_u^* \times p_v^*}{\|p_u^* \times p_v^*\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|A(p_u \times p_v)\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|p_u \times p_v\|} = A \cdot n$$

$$E^* = p_u^* \cdot_u^* = Ap_u \cdot Ap_u = p_u \cdot p_u = E$$

même chose pour F et $G \implies I = I^*$

On a

$$\begin{aligned} p_{uu}^* &= (Ap_u)_u = Ap_u u \\ p_{uv}^* &= Ap_{uv} \\ p_{vv}^* &= Ap_v v \end{aligned}$$

$$\implies L^* = n^* \cdot p_{uu}^* = (An) \cdot (Ap_u u) = n \cdot p_{uu} = L, \text{ de même pour } M \text{ et } N$$

$$\implies II = II^*$$

(\implies)

Fixons $u_0 \in U$

Soit T l'isométrie $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ de \mathbb{R}^3 t.q. $T(p(u_0)) = p^*(u_0)$

$$\begin{aligned} A \cdot p_u \Big|_{u_0} &= p_u^* \Big|_{u_0} \\ A \cdot p_v \Big|_{u_0} &= p_v^* \Big|_{u_0} \\ A \cdot n \Big|_{u_0} &= n^* \Big|_{u_0} \end{aligned}$$

Si e, f, g, e^*, f^*, g^* sont deux bases de \mathbb{R}^3 avec les mêmes produits scalaires entre les vecteurs de base, alors $\exists A$ orthogonale t.q. $A : e \rightarrow e^*, \dots$

Définissons $\tilde{p} = T \circ p$ et montrons que $\tilde{p} = p^*$

Soint $\mathbf{u} \in U$ quelconque et : $[0, 1] \rightarrow U$ un chemin t.q. $\gamma(0) = \mathbf{u}_0$ et $\gamma(1) = \mathbf{u}$

Considérons la la famille de bases de \mathbb{R}^3 donné par

$$\begin{aligned} \tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} &\quad \tilde{p}_v \Big|_{\gamma(t)} & \tilde{n} \Big|_{\gamma(t)} \\ \tilde{E}(t) &= \left(\tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n} \Big|_{\gamma(t)} \right) \\ \tilde{E}(t)^t \tilde{E}(t) &= \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, si

$$\tilde{E}^*(t) = \left(\tilde{p}_u^* \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v^* \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}^* \Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^{t*} \tilde{E}(t)^* = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} \right) = \tilde{p}_{uv} \Big|_{\gamma(t)} \gamma'_1(t) + \tilde{p}_{uv} \Big|_{\gamma(t)} \gamma'_2(t) = (\Gamma_{uu}^u \tilde{p}_u + \Gamma_{uv}^v \tilde{p}_v + L\tilde{n})\gamma'_1(t) + (\gamma_{uv}^u \tilde{p}_u + \Gamma_{uv}^v \tilde{p}_v + M\tilde{n})\gamma'_2(t) = \dots$$

Nottons que les coefficients dépendent seulement de E, F, G, L, M, N

$$\implies \frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = \tilde{E}(t) \cdot M(t)$$

$$\frac{d}{dt} E^*(t) = E^*(t) M(t)$$

Lemme :

Soient $B(t) = (e_1 | e_2 | e_3)$ et $B^*(t) = (e_1^* | e_2^* | e_3^*)$ deux familles de bases dans \mathbb{R}^3 t.q.

$$B^t B = B^{*t} B^* \forall t \quad B'(t) = B(t)M(t) \quad B^{**}(t) = B^*(t)M(t)$$

$$B(0) = B^*(0) \quad B = B^*$$

Par le lemme appliquée à $\tilde{E}(t), E(t) \implies \tilde{E}(t) = E^*(t) \forall t$

$$\tilde{p}_{u/v} \Big|_{\gamma(t)} = p_{u/v}^* \Big|_{\gamma(t)}$$

... ■

Démonstration du lemme

(La matrice $G = B^* B$ s'appelle la matrice de Gram)

Comme $G \cdot G^{-1} = I$

$$\frac{d}{dt} G \cdot -1 + G \cdot \frac{d}{dt} (G^{-1}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (G^{-1}) = -G^{-1} \frac{d}{dt} GG^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} G = \frac{d}{dt} (B^* B)(B^t)' B + B^t B' = (B^{*t})' B + (B^* t) B^{**}$$

Calculons la dérivée de

$$(B^*)^t G^{-1} B$$

par rapport à t

$$(B^{*t} G^{-1} B)' = (B^* t G^{-1})' B + B \cdots$$

Fuck that, c'est le cambodge

Dérivées covariantes et parallélisme

Dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , on dit que 2 vecteurs sont parallèles. si, quand on translate au point de base ils sont multiples/égaux.

Sur une surface, les plans tangents à des points distincts sont différents.

Définition : Soit X un champ de vecteur sur une surface S ($X_p \in T_p S \forall p \in S$) et $V \in T_p S$. La dérivée covariante de X dans la direction V est $\nabla_V X := \pi_{T_p S}^\perp(D_V X)$

Rappels :

Théorème fondamentale des surfaces dans \mathbb{R}^3 :

$$I^* = I \wedge II = II^* \iff p^* = T \cdot p, T|T \text{ est une isométrie directe}$$

Champ de vecteurs sur S

$$x : S \rightarrow \mathbb{R}^3 | X(x) \in T_x S$$

x serait la vitesse d'un fluide sur la surface

Dérivé covariante

$$\nabla_v : X = \pi_{T_x S} D_v X = D_v X - (D_v x \cdot u)u$$

Rappels sur les dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ on peut définir sa dérivée directionnelle dans la direction du vecteur v

$$D_v f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

On peut l'évaluer en utilisant un chemin :

$$D_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \quad \text{avec } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$$

Si f est définie sur une surface s , on utilise un chemin de la forme $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$

Les vecteurs tangents à $\gamma(t)$ sont $\frac{d}{dt} \gamma(t) = u' p_u + v' p_v$

Si on connaît la fonction en coordonnées locales $(f(u, v))$, on a :

$$D(u' p_u + v' p_v)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u(t), v(t))$$

Un champ de vecteur sur S est intrinsèque. Si X est un champ de vecteurs sur S , on peut l'écrire comme

$$X = f(u, v)p_u + g(u, v)p_v$$

$$\begin{aligned} Du' p_u v' p_v X &= u'(f(u, v)p_u + g(u, v)p_v)_u + v'(f(u, v)p_u + g(u, v)p_v)_v \\ &= u'(f_u p_u + f_{pu} + g_u p_v + g_{pv}) + v'(f_v p_u + f_{pv} + g_u p_u g_{pu} u) \end{aligned}$$

Les termes p_{uu}, p_{uv} et p_{vv} ont des composantes en u . \implies La dérivée directionnelle n'est pas un champ de vecteur sur S mais la dérivée covariante oui !

Lien avec les symbols de cristoffel : p_u et p_v sont des champs de vecteurs sur S

Exemple :

Sur chaque point on peut calculer la dérivé covariante de p_u par rapport à p_v

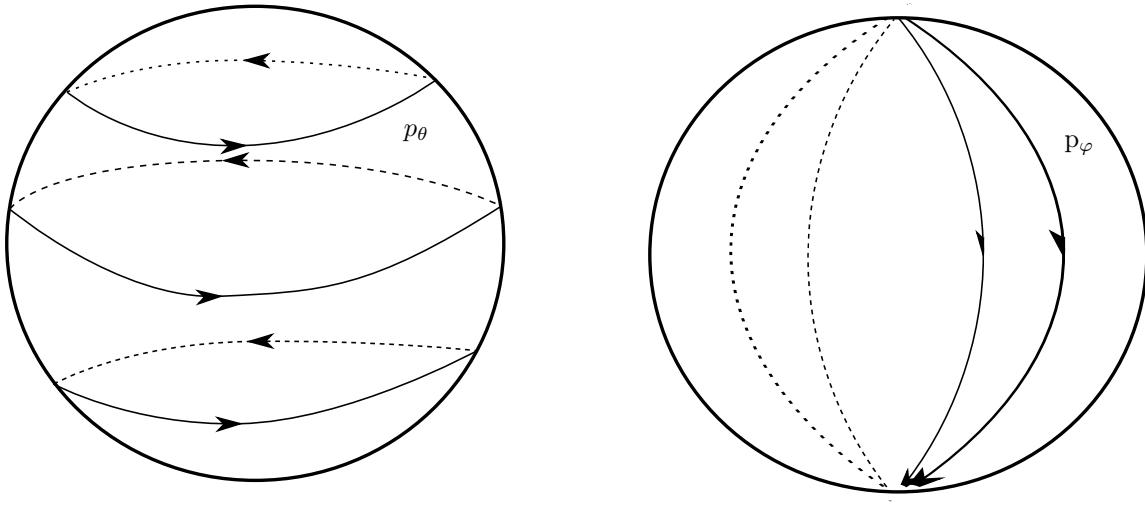


FIGURE 1 – Champ de vecteur

$$\nabla p_u p_u = \pi_{T_x S}^\perp (D p_u p_u) = \pi_{T_x S}^\perp (\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + L u = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v$$

On peut alors trouver les quantités intrinsèques (ignorment les isométries locales)

$$\nabla p_u p_v = \Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v \quad \nabla p_v p_u = \Gamma_{uv}^u p_v + \Gamma_{uv}^u p_u \quad \nabla p_v p_v = \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v$$

Propriétés de la dérivé couvariante

1. Linéarité 1 :

$$\nabla_v(x_1 + x_2) = \nabla_v X_1 + \nabla_v x_1 + \nabla_v x_2$$

2. Règles de Leibnitz :

$$\nabla_v(fX) = (D_v f)X + f \nabla_v X \quad f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

3. linéarité 2 :

$$\nabla_{av_1+bv_2} X = a \nabla_{v_1} X + b \nabla_{v_2} X$$

Démonstration de la deuxième propriété :

$$\begin{aligned}
\nabla_v(fx) &= D_v(fx) - (D_v(fx) \cdot u)n \\
&= (D_vf)x + f(D_vx) - ((D_vf)\underbrace{x \cdot n}_0) + f(D_ux) \cdot n)n \\
&= D_vfx + f(D_vx) = [(D_vx) \cdot n]n \\
&= D_vfx + f\nabla_vx
\end{aligned}$$

En utilisant les trois propriétés on calcule :

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_u}(fp_u + gp_v) &= \nabla_{p_u}(fp_u) + \nabla_{p_u}(gp_v) \\
&= (Dp_u f)p_u + (DP_u g)p_v + f\nabla_{p_u}p_u + g\nabla_{p_u}p_v \\
&= (f_u + f\Gamma_{uu}^u + g\Gamma_{uv}^u)p_u + (g_u + \Gamma_{uu}^v + g\Gamma_{uv}^u)p_v
\end{aligned}$$

On fait la même chose pour ∇_{p_v} et avec la propriété 3 on peut calculer ∇_vx pour n'importe que v, x .

Rappels

— propriétés

$$\nabla_v(X + Y) = \nabla_v(X) + \nabla_v(Y)$$

$$\nabla_v(fX) - (D_v f)X + (f)\nabla_v X$$

$$\nabla_{v_1+v_2}X = a\nabla_{v_1}X + b\nabla_{v_2}X$$

— Coordonnées

$$\nabla_{p_u} p_u = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_u$$

$$\nabla_{p_u} p_v = \nabla_{p_v} p_u = \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uv}^v p_v$$

$$\nabla_{p_v} p_v = \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v$$

. Pour $X = fp_u gp_v$

$$\nabla_{p_u} X = (f_u + f\Gamma_{uu}^u + g\Gamma_{uv}^u)p_i + (g_u + f\Gamma_{uv}^v + \Gamma_{vv}^v)p_v$$

$$\nabla_{p_v} X = (f_v + f\Gamma_{uv}^u + g\Gamma_{vv}^v)p_u + (g_v + f\Gamma_{uv}^v + g\Gamma_{vv}^v + g\Gamma_{vv}^v)p_u$$

Proposition : Soit α un chemin sur S avec $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(1) = x$. Soit $X_0 \in T_{x_0}S$. Alors il existe un unique champ de vecteurs sur α t.q. $\nabla_{alpha'} X \equiv 0$

Démonstration : On écrit $\alpha(t) = p(u(t), v(t)) \implies \alpha' = u'p_u + v'p_v$ et $X = f(t)p_u + g(t)p_v$

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'} X &= \pi_{T_{\alpha'(t)}}^\perp(D_{\alpha'} X)S = \pi_{T_{\alpha'(t)} S}(f'p_u f(p_{uu}u'p_{uv}v') + g'p_v + g(p_{uv}u'p_{vv}v')) \\ &= (f' + f(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + g(\Gamma_{uv}^u u' + \Gamma_{vv}^u v'))p_u + (g' + f(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + g(\Gamma_{uv}^v u' + \Gamma_{vv}^v v'))p_v = 0 \end{aligned}$$

On réécrit :

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v' & \Gamma_{uv}^u u' + \Gamma_{vv}^u v' \\ \Gamma_{u}^v u' + \Gamma_{uv}^v v' & \Gamma_{uv}^v u' + \Gamma_{vv}^v v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (*)$$

C'est un système d'équation différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

$\implies \exists!$ solutions étant donné $f(0), g(0), g'(0), f'(0)$

Comme l'équation (*) dépend seulement de Γ_{ij}^k , le transport est parallèle est intrinsèque ■

Exemple : Calculons le transport parallèle d'un vecteur le long d'un cercle de latitude sur la sphère. Sur S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$I_{(\theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= -\sin \varphi \cos \varphi \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\theta &= \cot \varphi\end{aligned}$$

On prend le cercle de Latitude $\varphi_0 : \theta(t) = t, \quad \varphi(t) = \varphi_0$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot \varphi \varphi' & \cot \varphi \theta' \\ \sin \varphi \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}f' &= \cot \varphi_0 g \\ g' &= \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 f\end{aligned}$$

$$\implies f'' = -\cot \varphi_0 g' = -\cot \varphi_0 (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0) f = \cos^2 \varphi_0 f$$

$$\implies f(t) = c_1 \cos((\cos \varphi_0)t) + c_2 \sin((\cos \varphi_0)t)$$

$$\begin{aligned}1 &= f(0) = c_1 \\ 0 = g(0) - \frac{f'(0)}{\cot \varphi_0} &= \frac{c_2 \cos \varphi_0}{-\cos \varphi_0} = -c_2 \sin \varphi_0 \implies c_2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies f(t) &= \cos((\cos \varphi_0)t) \\ g(t) &= \frac{-\cos(\varphi_0) \sin(\cos \varphi_0)t}{-\cot \varphi} = \sin \varphi_0 \sin(\cos(\varphi_0)t)\end{aligned}$$

transport parallèle :

$$X(t) = \cos(kt)p_\theta + \sin \varphi_0 \sin(kt)p_\varphi \quad k = \cos \varphi_0$$

$$\|X(t)\|^2 = \cos^2(kt)p_\theta p_\theta + 2 \sin \varphi_0 \cos^2(kt)p_\theta p_\varphi + \sin^2 \varphi_0 \sin^2(kt)p_\varphi p_\varphi = \cos^2(kt) \sin^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \sin^2(kt) = \sin^2(\varphi_0)$$

On remarque que la norme ne dépend pas de t

Proposition : Le transport parallèle préserve les longueurs et les angles

Démonstration : Soit $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ et $X(t), Y(t)$ deux champs de vecteurs parallèles le long de α .

$$\nabla_{\alpha'} X = \nabla_{\alpha'} Y = 0$$

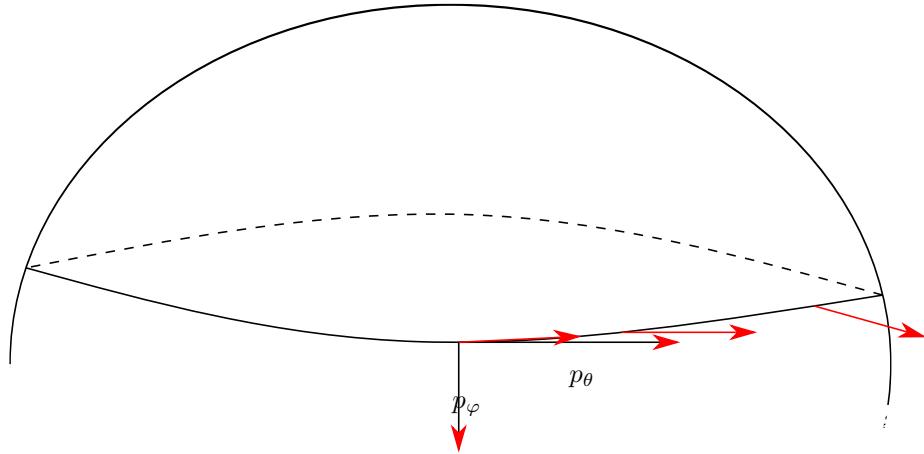


FIGURE 1 – Transport parallèle sur une sphère

Posons $f(t) = X(T) \cdot Y(t)$

$$f'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t) = D_{\alpha'}(X) \cdot Y + X D_{\alpha'}(Y) = \nabla_{\alpha'}(X) \cdot Y + X \cdot \nabla_{\alpha}(Y) = 0$$

$\implies f(t)$ est une constante \implies longueurs et angles constants ■

Définition : UNe chemin $\alpha(t)$ sur une surface S est une géodésique si $\nabla_{\alpha'(t)}\alpha' = 0 \forall t$

En coordonnées, pour $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ l'équation géodésique s'écrit

$$\alpha; (u' p_u + v' p_v) = u'' p_u + u' \nabla_{u'} p_u + v'' p_v + v' \nabla_{v'} p_v$$

$$= u'' p_u + u' (u' (\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v) + v' (\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v)) + v'' p_v + v' (u (\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v) + v' (\Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v)) = 0$$

$$\iff u'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^u + 2u' v' \Gamma_{uv}^u + (v')^2 \Gamma_{vv}^u = 0$$

$$v'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^v + 2u' v' \Gamma_{uv}^v + (v')^2 \Gamma_{vv}^v = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} u'' & u' v' \\ v'' & u' v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} u'' & u' v' \\ v'' & u' v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{vu}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

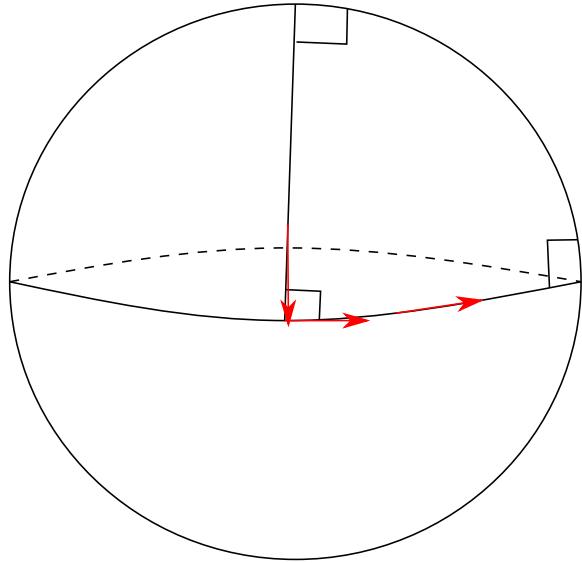


FIGURE 2 – Trois angles de 90

Les géodésiques sont uniques étant donné un point et vecteur tangent initiaux

Exercice : Trouvez les géodésiques du plan en coordonées polaires

$$p(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fun fact

On ne sait pas si

$$\pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$$

est un entier ou non !

Rappels

- Transport parallèle : X est parallèle le long de α si $\nabla_{\alpha'} X \equiv 0$
- Étant donné $X_0 \in T_{\alpha(0)} S$! X défini sur α et parallèle
- Géodésique : α géodésique si $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$ (α' est parallèle le long de α)
- Vitesse constante car parallèle implique longueur constante
- En coordonnées

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= p(u(t), v(t)) \\ u'' + (u' &\quad v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= 0 \\ v'' + (u' &\quad v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{vu}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

Théorème de Clairaut : Si α est une géodésique sur une surface de révolution alors $\exists C$ constante t.q. pour tout point de α ,

$$r \cos \varphi = C \quad (**)$$

Où r est la distance à l'axe et φ est l'angle entre $\alpha'(t)$ et le parallèle par $\alpha(t)$. Inversement, tout courbe α à vitesse constante qui satisfait $(**)$ et n'est pas parallèle est une géodésique.

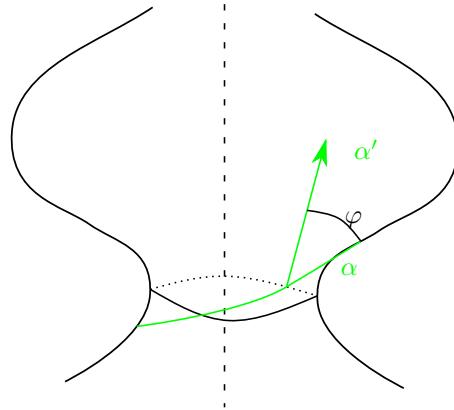


FIGURE 1 – Surface de révolution

$$p(s\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta x(s) \\ \sin \theta x(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

$$I_{s\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Les seuls symbols de Chritoffel non-nuls sont

$$\Gamma_s^\theta = \frac{x'(s)}{x(s)} \quad \Gamma_{\theta\theta}^s = -x(s)x'(s)$$

Les équations géodésiques sont

$$S'' + (-x(s)x'(s))\theta'^2 = 0 \quad (1)$$

$$\theta'' + 2\frac{x'(s)}{x(s)}s'\theta' = 0 \quad (2)$$

$$(2) \iff \frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{x'(s)}{x(s)}s' \implies \ln \theta' = -2\ln(x(s)) + C \implies \theta' = \frac{C}{x^2} \implies x^2\theta' = C$$

Si $\alpha(t) = p(s(t), \theta(t))$ est une géodésique, alors $x^2\theta' = c$. α à une vitesse constante

$$\cos \varphi = \frac{\alpha' \cdot p_\theta}{\sqrt{\alpha' \cdot \alpha'} \sqrt{p_\theta \cdot p_\theta}} = \frac{(s' p_s + \theta' p_\theta) \cdot p_\theta}{v \cdot x} - \frac{\theta' x}{v'}$$

$$\cos \varphi = \frac{\theta' x}{v} = \frac{c}{xv} x \cos \varphi = \frac{c}{v} = c'$$

Pour l'autre directions, supposons que α est à vitesse constante v est que $r \cos \varphi = c$

$$r \cos \varphi = x \left(\frac{\theta' x^2}{v \cdot x} \right) = \frac{\text{theta}' x^2}{v} = C \implies \theta' x^2 = Cv \implies \text{textl'quation2est satisfait}$$

Il ne reste qu'à montrer que (1) est satisfait

$$v^2 = \alpha' \cdot \alpha' = s'^2 + x(s)^2\theta'^2 \implies - = 2s's'' + 2s(s)x'(s)s'\theta'^2 + x(s)^2(2\theta'\theta'')$$

$$0 = s's'' + xx's'\theta'^2 + x^2\theta' \left(-2\frac{x'}{x}s'\theta' \right) = s'(s'' - xx'\theta'^2)$$

Si α n'est pas parallèle $s' \neq 0$ alors $s''xx'\theta'^2 = 0 \implies$ (1) est satisfait donc α est une géodésique ■

Application :

$$r \cos \varphi = \text{const}$$

Initiallement $\cos \varphi = 1$

$$\implies \text{const} = r_0 \forall t > 0 \text{ or } r > r_0 \text{ car } \cos \varphi < 1$$

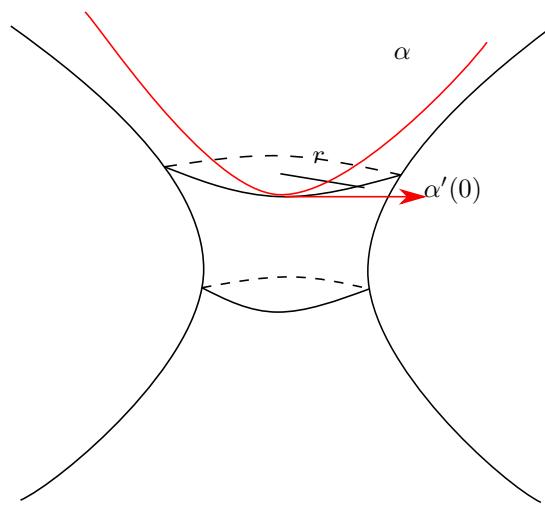


FIGURE 2 – Exemple d'application

Courbure géodésique & et courbures normales

α paramétré par longueur d'arc sur une surface S

$$T = \alpha'$$

...

(Il a effacé le tableau :()

Rappels

- Théorème de Clairaut : Pour une surface de révolution les géodésiques satisfont

$$r \cos \varphi = C \quad (*)$$

- . Inversement, toutes courbes à vitesse constante qui n'est pas un parallèle et qui satisfait (*) est une géodésique
- courbe géodésique

$$\alpha' = T \quad \alpha'' = T' = \underbrace{\kappa_g}_{\text{Courbure géodésique}} T + \underbrace{k_n}_{\text{courbure normale}} n$$

$k_g = 0 \implies \alpha$ est une géodésique

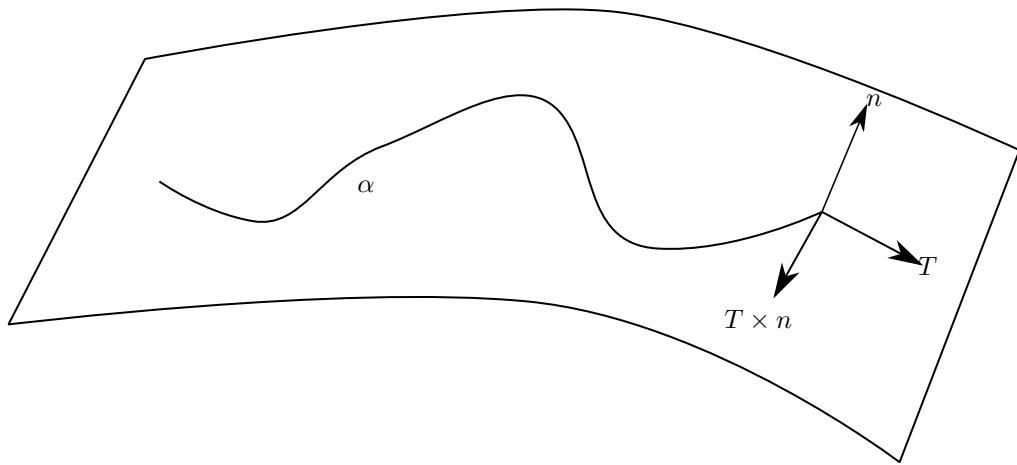


FIGURE 1 – Courbure géodésique

Exercice 1 : Calcul de courbure géodésique du parallèle $\varphi = \varphi_0$ sur la sphère

$$P(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 \cos \left(\frac{s}{\sin \varphi_0} \right) \\ \sin \varphi_0 \sin \left(\frac{s}{\sin \varphi_0} \right) \\ \cos \varphi_0 \end{pmatrix}$$

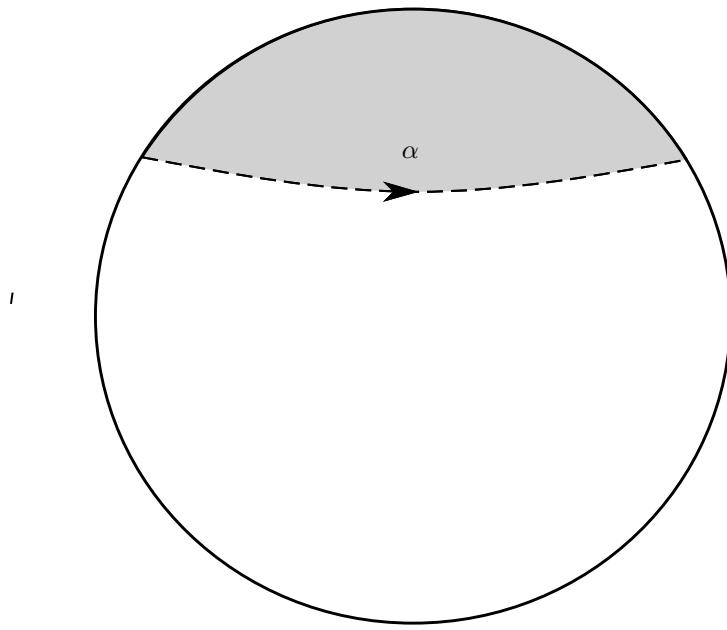


FIGURE 2 – parallèle sur la sphère

$$\alpha' = T = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$n = \alpha(s) \rightarrow$ on considère la sphère unité

$$T \times n = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \cos\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) - \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$T' = \frac{1}{\sin \varphi_0} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha''$$

$$k_g = T' \cdot (T \times n) = -\cos \varphi_0 (\cos^2\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \sin^2\left(\frac{s}{\sin \varphi_0}\right) \frac{1}{\sin \varphi_0}) = -\cot \varphi_0$$

Exercice 2 :

$$\kappa^2(s) = \kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s) \quad \text{où } \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin \varphi_0} = \csc \varphi_0$$

$$\kappa(s)^2 = \|T'(s)\|^2 \quad \|T'(s)\|^2 = k_g^2(t \times n) \cdot (T \times n) + k_n^2 n \cdot n = k_g^2(s) + k_n^2(s)$$

Pour le parallèle $\varphi = \varphi_0$, $\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin \varphi_0} = \csc \varphi_0$. Aussi $\kappa_n = T' \cdot n = -1$ et $\kappa^2(s) = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$

Exercice 3 : Montrer qu'un cercle de latitude (parallèle) s constante sur une surface de révolution ssi $x'(s) = 0$

Équations géodésiques

$$s' + \theta'^2(s)(-x(s)x'(s)) = 0 \quad (*)$$

$$\theta'' + 2\frac{x'(s)}{x(s)}\theta' s' = 0 \quad (**)$$

Cercles de latitude $\implies s = \text{cste} \implies s' = 0$ donc

$$(*) \implies \theta'^2(-x(s)x'(s)) = 0 \quad (\text{A})$$

$$(**) \implies \theta'' = 0 \quad (\text{B})$$

$$(\text{B}) \theta'' = 0 \implies \theta' = c$$

donc

$$(A) \implies -c^2(x(s)x's) = 0$$

donc

$$x'(s) = 0$$

Relativité Générale

Considérons la première forme fondamentale (métrique)

$$M_I = \begin{pmatrix} 1 + g^2 u^2 & gu \\ gu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{Eu}{2} \\ \frac{Fu}{2} - \frac{E}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u'' + (u' \quad v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies u'' = 0 \quad u = at + b$$

$$v'' + (u' v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies v'' + (u')^2 g = 0 \quad v'' + a^2 g = 0 \quad u(t) = at + b \quad v(t) = -\frac{a^2 g}{2} t^2 + ct$$

Ce sont des équation cinématiques !

$$u'(t) = 1 = a$$

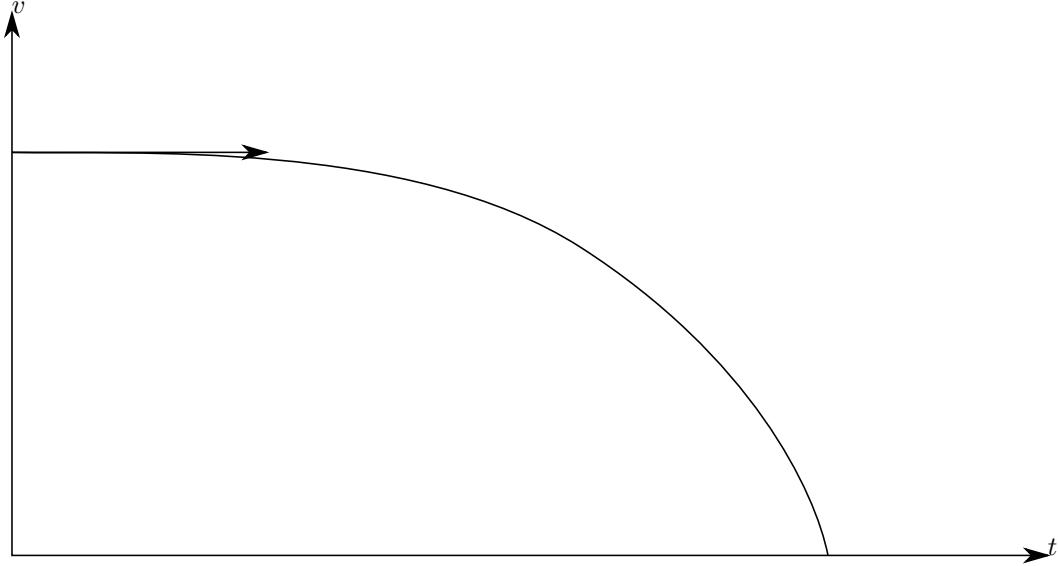


FIGURE 3 – Graphique de la vitesse en fonction du temps

Théorème de Gauss Bonet

Rappel : Gauss Bonet discret

Pour tout polyèdre p trinagulé dans \mathbb{R}^3

$$\sum_{\text{sommets de } p} c(s) = 2\pi\chi(p)$$

où

$$c(s) = 2\pi - \sum \theta \quad \chi(p) = V - E + F$$

Rappel : L'intégrale d'une fonction sur une surface S avec $f : s \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{p(u)} f \cdot ds = \int_u (f \circ p) \|p_u \times p_v\| du dv$$

Proposition : L'aire d'une surface est intrinsèque

$$\|p_u \times p_v\| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration : Dans la base $p_u \ p_v \ n$, la matrice du produit scalaire est

$$(p_u \ | \ p_v \ | \ n)^t \cdot (p_u \ | \ p_v \ | \ n) = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le volume d'un parallépipède est donné par

$$\det(p_u | p_v | n)^2 = EG - F^2$$

$$\implies |\det(p_u | p_v | n)| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ce volume est également égal à l'aire de la base fois la hauteur

$$= \|p_u \times p_v\| \cdot 1 = \|p_u \times p_v\|$$

$$\int_u \|p_u \wedge p_v\| \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_{p(u)} \mathrm{d}S$$

Lemme : Si $F = 0$, la courbure de Gauss s'écrit

$$h = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right);$$

Proposition : Au voisinage de tout point d'une surface avec $k_1 \neq k_2 \exists$ une paramétrisation orthogonale ($F = 0$). Dans la suite, on suppose $F = 0$.

Étant donnée une base de $T_{p(u,v)}$, $e_1(u,v)$, $e_2(u,v)$ à chaque point de la surface l'holonomie d'une courbe est $(\nabla_{\alpha'} e_1) \cdot e_2$

Proposition : Dans un paramétrisation \perp pour

$$e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G}} (\nabla_a \cdot e_1) \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot (-u'E_v + v'Gu)$$

Rappels :

- Paramétrisation orthogonale $F = 0 \quad (p_u \perp p_v)$
- $e_1 = \frac{p_v}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_u}{\sqrt{G}}$. $e_1(u, v)$ et $e_2(u, v)$ forment une base orthonormée de $T_{p(u,v)}$

Étant donnée une courbe α dans S , on définit

$$\varphi_{12} = (\nabla_\alpha \cdot e_1) \cdot e_2 \text{ (mesure de la rotation du repère le long de } \alpha)$$

Remarque

$$\varphi_{21} = (\nabla_\alpha e_2) \cdot e_1 = -\varphi_{12}$$

car

$$\begin{aligned} 0 &= D_{\alpha'}(e_1 \cdot e_2) \\ &= D_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + D_{\alpha'}(e_2) \cdot e_2 \\ \nabla_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + \nabla_{\alpha'}(e_2) \cdot e_1 &= \varphi_{12} + \varphi_{21} \end{aligned}$$

Car la composante en n disparait avec le produit scalaire

De manière semblable, on montre que $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$

Proposition : Pour un chemin $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$,

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + VG_u)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= (\nabla_{\alpha'} \cdot e_1) \cdot e_2 = \left(\nabla_{\alpha'} \frac{p_u}{\sqrt{E}} \right) \cdot \frac{p_v}{\sqrt{G}} \\ &= \left(p_u \cdot D_\alpha \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E} \nabla_{alpha'} \cdot p_u} \right) \cdot \frac{p_v}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (\nabla_{\alpha'} \cdot p_u) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (u \cdot \nabla_{p_u} p_u + v' \nabla_{p_v} p_v) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (u' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v) \end{aligned}$$

parallélisme

$$\begin{aligned} p_{uu} \cdot p_v : \quad 0 &= F_u = (p_u \cdot p_v)_u = p_{uu} \cdot p_v + p_v \cdot p_{vv} \iff p_{uu} \cdot p_v = -p_u \cdot p_{vv} = -\frac{E_v}{2} \\ P_{vu} \cdot p_v : \quad " " &\iff p_{uv} \cdot p_v = \frac{G_u}{2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \varphi_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}} (u' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} = (-u'E_v + v'G_u)$$

Proposition :

Si $\alpha(s)$ est une courbe fermée qui entoure la région R (à gauche selon règle de la main droite) alors

$$\int_0^L \varphi_{12} dS = - \iint_R \kappa(u, v) dS$$

Rappel : Théorème de G ??

$$\int_{dR} \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} du dv$$

R paramétré par $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$

$$\int_o^L \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} dS = \iint_R (g_u - f_u) du dv$$

Démonstration de la propriété

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-u'E_v + v'G_u) dS \\ &= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} dS \\ &= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \iint_R \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) du dv \\ &= \iint_R \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) \underbrace{\sqrt{EG} du dv}_{dS} \\ &= - \iint_R \kappa(u, v) dS \end{aligned}$$

Proposition :

$$\int_o^L \varphi_{12} dS = - \iint_R \kappa(u, v) dS$$

On veut exprimer le terme de gauche différemment.

$k_g = \varphi_{12} + \theta'$ pour une courbe $\alpha'(s) = p(u(s), v(s))$ paramétré par longeur d'arc et où θ est défini par $\alpha'(s) = T(s) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. α est une géodésique

Démonstration :

$$k_g = T' \cdot (m \times T)$$

comme $T = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ $n \times T = -\sin \theta e_1 \cos \theta e_2$

$$k_g = (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \cdot (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) = [-\sin \theta \theta' e_1 + \cos \theta \nabla_{alpha'} e_1 + \cos \theta \theta' e_2 + \sin \theta \nabla_{alpha'} e_2] \cdot (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2)$$

$$= \sin^2 \theta \theta' + \cos^2 \theta \theta' + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \varphi_{21} = \theta' + \varphi_{12}$$

Rappels

- Paramétrisation orthogonale : $p_u p_v = 0 = F$
- Intégrale de surface $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_{p(u)} f(x) dS := \iint_U f(u, v) \|p_u \times p_v\| du dv = \iint_U f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

—

$$\varphi_{12} := (\nabla_{\alpha'} e_1) \cdot e_2$$

où $e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G}}$ "Rotation de e_1 e_2 le long de α "

- α courbe fermée borant R

$$\implies \int_{\alpha} \varphi_{12} ds = - \iint_R \kappa dS$$

- Si $\alpha'(s) = T(s) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ alors

$$\underbrace{k_g}_{\text{Courbure de } \alpha \text{ intrinsèque à la surface}} = \underbrace{\varphi_{12}}_{\text{Rotation du repère } e_1, e_2} + \underbrace{\theta'}_{\text{rotation de } \alpha' \text{ dans le repère } e_1, e_2}$$

"Umlaufsatz" sur une surface : Si α est une courbe simple fermée contractile sur S alors

$$\int_0^L \theta' ds = 2\pi$$

ContractibleP qui peut être "remplie" par/borne un disque

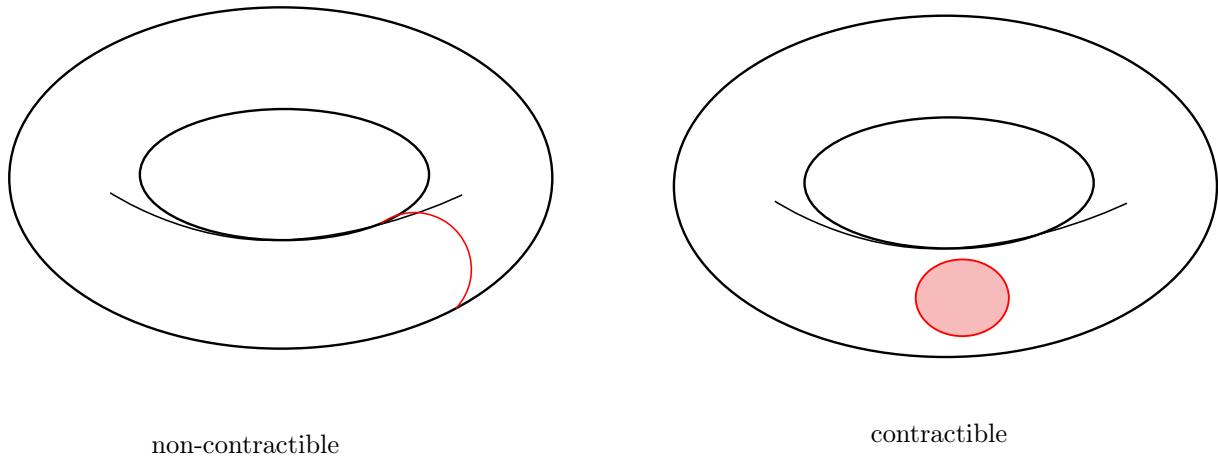


FIGURE 1 – Contractible vs non-contractible

"Dém" : La quantité \int_0^L est toujours une multiple de 2π (On commence et finit par le même vecteur). C'est une fonction continue de la courbe α

Version "avec des coins"

Si α est lisse par morceaux

$$\int_0^L = 2\pi = \sum \epsilon_k$$

avec ϵ_k les angles extérieurs de α

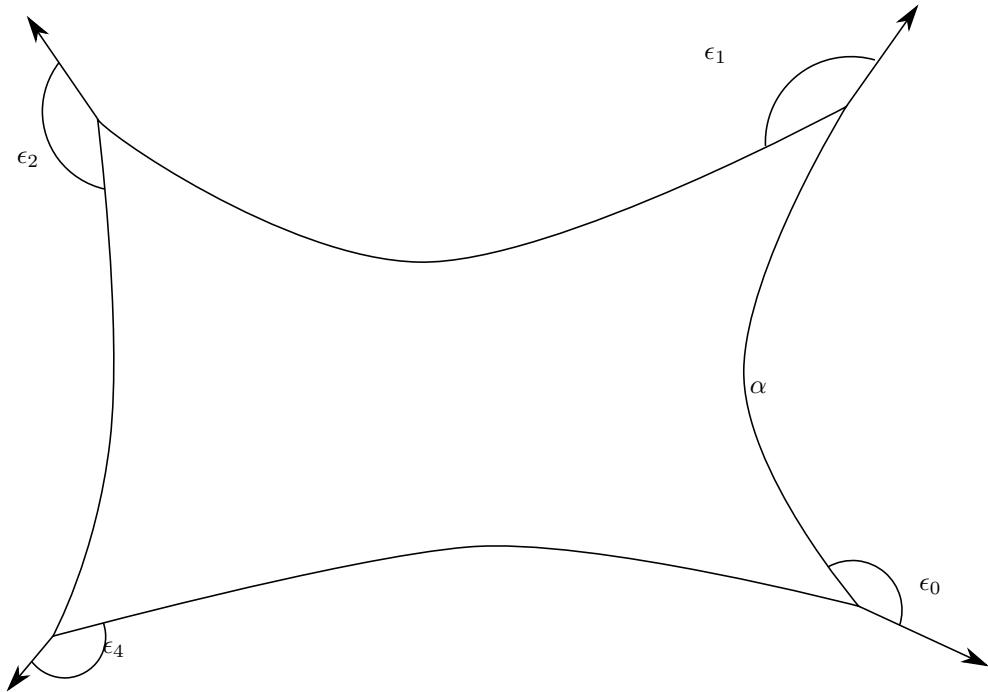


FIGURE 2 – Umlaufsatz sur une surface avec des coins

ϵ_k : l'angle entre le vecteur tangent entrant et le vecteur sortant au sommet de k

Théorème de Gauss-Bonnet local : Soit α une courbe lisse par morceaux fermées, simples ???, contractible, bornant R dans la surface S . Alors

$$\iint_R \kappa dS + \int_{\alpha} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Démonstration : On a montré

$$\iint_R \kappa dS = -S_{\alpha} \varphi_{12} ds = - \int_{\alpha} \kappa_g - \theta' ds = - \int_{\alpha} \kappa_g + \int \theta' ds = -\kappa_g ds + 2\pi - \sum \epsilon_k \quad \blacksquare$$

Exemple : Dans le plan ou sur un cylindre :

$$\implies \int_{\alpha} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Si

$\kappa_g = 0$ (cotées sont des géodésiques)

$$\sum \epsilon_f = 2\pi$$

Si α est lisse

$$\int_{\alpha} \kappa_g ds = 2\pi$$

: Umlasfstax

Exemple 2 : Sur S^2 $\kappa = 1$

Cercle de latitude φ_0

$$k_g = \cot \varphi_0$$

$$\iint_R \kappa dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi_0} \cos \varphi d\varphi d\theta = \dots = 2\pi$$

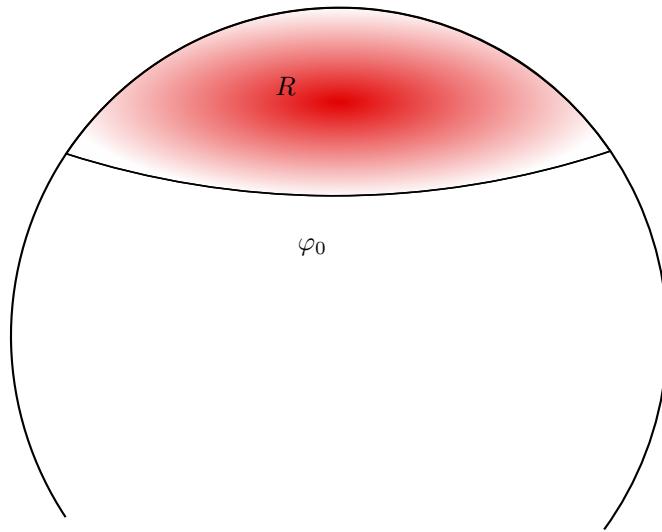


FIGURE 3 – Théorème de Gauss-Bonnet sur la sphère unitée

Cela doit être vrai pour n'importe quel surface qu'on a déformé continuement. (α reste contractible)

$$\iint \kappa dS + \int_{\alpha} \kappa_g ds = 2\pi$$

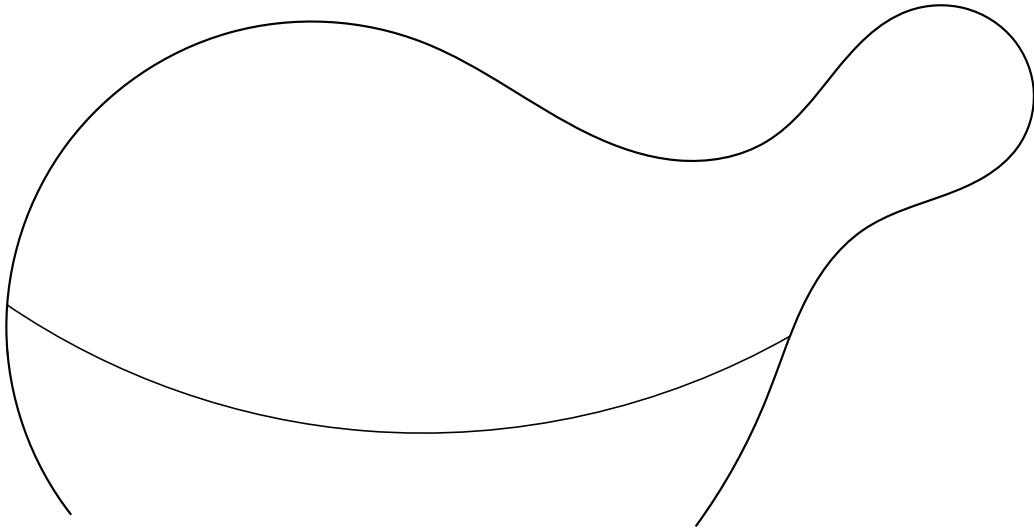


FIGURE 4 – sphère avec un pustule

Corrolaire : si $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les angles intérieurs d'un triangle géodésique T dans S_1 alors

$$\int_T \kappa ds = -\pi + \sum_i^3 \theta_i$$

Démonstration :

Comme les côtés sont géodésiques $k_g = 0$ sur les côtées.

$$\Rightarrow \iint_T \kappa dS + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 2\pi$$

$$\Rightarrow \iint_T \kappa dS + 3\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 2\pi$$

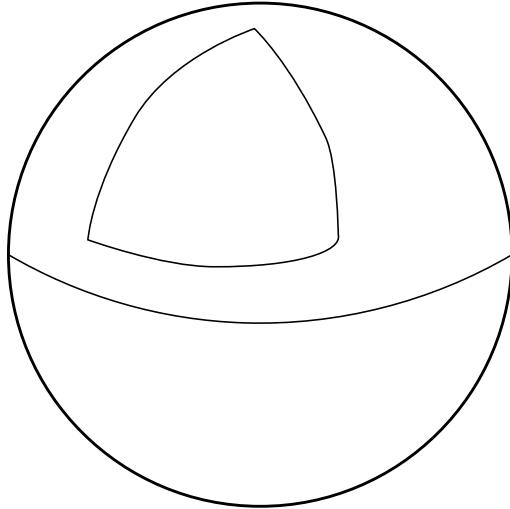
$$\Rightarrow \iint_T \kappa dS = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi \quad \blacksquare$$

Courbure positive :

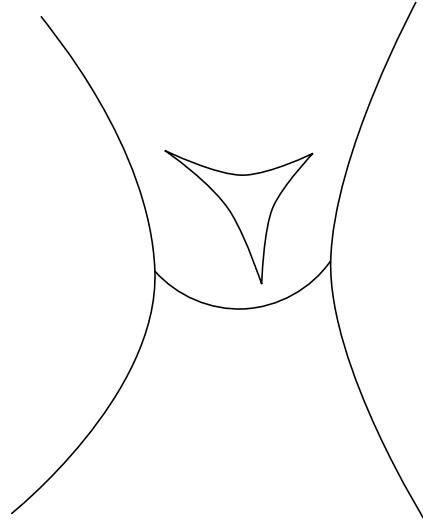
$$\sum_i^3 \theta_i = \pi \iint_T \kappa dS > \pi$$

Courbure négative

$$\sum_i^3 \theta_i = \pi \iint_T \kappa dS - \pi$$



courbure positive



courbure négative

FIGURE 5 – Trinagle sur surface courbées

Caractéristique d'Euler d'une surface :

Une trinangulation d'une surface est formée par une collection de triangles (image d'un triangle dans le plan par p)

- 2 triangles se rencontrent en un coté ou rien
- Les trinagles recouvrent la surface
- Chaque triangle a au plus 1 côté sur le bord de la surface

La caractéristique d'Euler d'une triangulation T d'une surface S est $\chi(s, \tau) = V - E + F$

Par exemple, la caractéristique d'Euler d'un triangle est $\chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1$

Théorème de Gauss-Bonnet (Global)

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(s)$$

Corollaire : Pour une surface sans bord ($\partial S = \emptyset$)

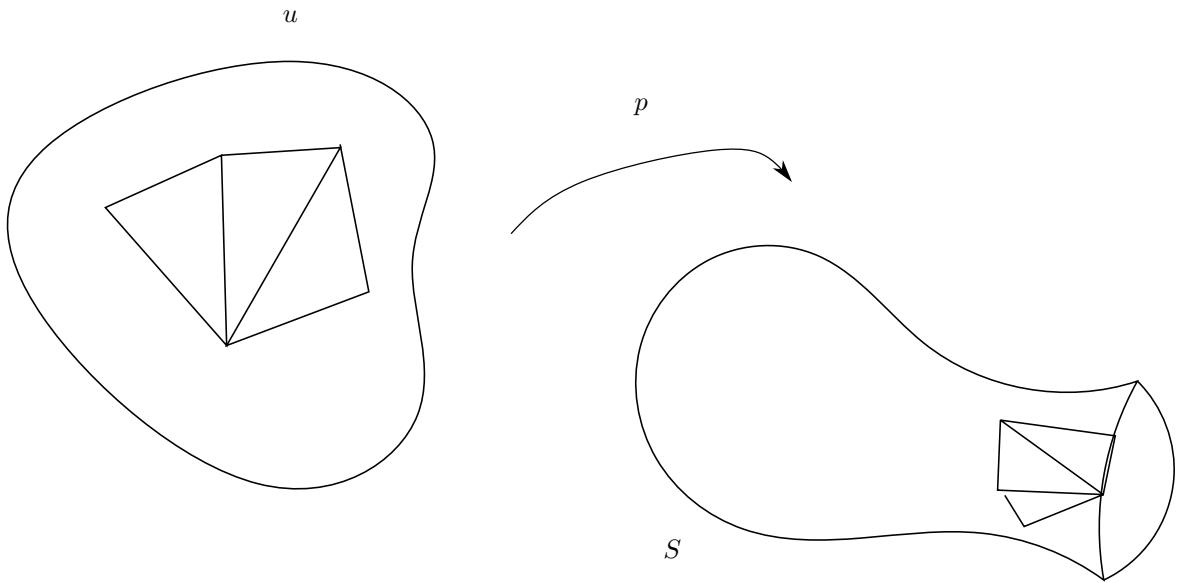


FIGURE 6 – Triangulation d'une surface

$$\iint_S \kappa dS = 2\pi\chi(s)$$

Démonstration : Pour chaque triangle Δ de la triangulation τ , on applique le théorème local

$$\iint_{\Delta} \kappa dS = \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k^{\Delta} = 2\pi$$

et on fait la somme sur les F triangles

$$\iint_S \kappa dS + \underbrace{\sum_{\Delta \in \tau} \int_{\partial\Delta} \kappa_g ds}_{\text{S'annulent en paires}} + \sum_{\Delta \in \tau} \sum_k^3 \epsilon_k^{\Delta} = 2\pi F$$

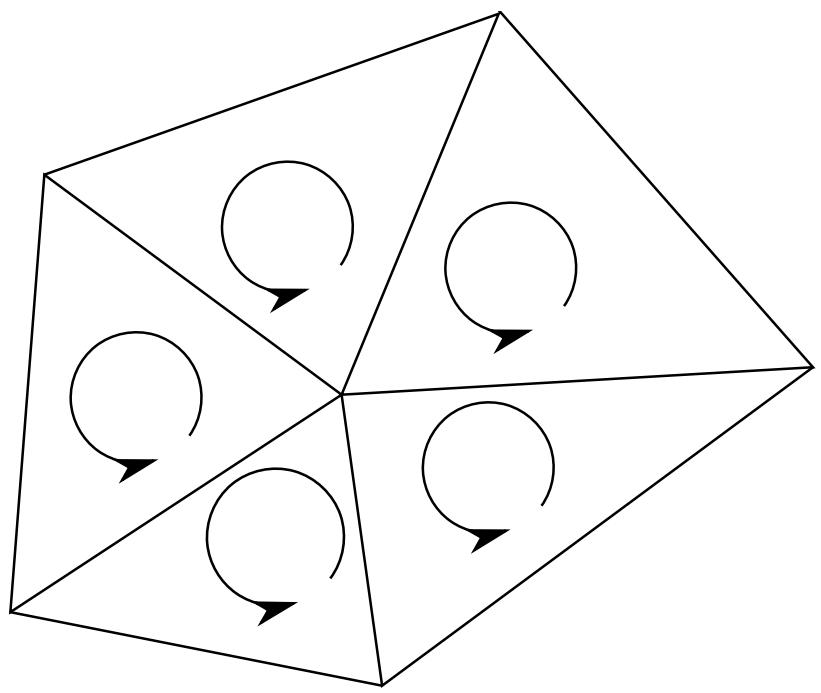


FIGURE 7 – Circulation des triangles

Rappels

- Angle extérieur ϵ_k
- Umlanfsatz : Si α est une courbe dans une surface, $\alpha' \dots$
- Gauss-Bonnet local

$$\iint_R \kappa dA + \int_{\partial R} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k 2\pi$$

- Gauss-Bonnet Global

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa ds + \sum \epsilon_k = 2\pi \chi(S)$$

- Caractéristique d'Euler

$$\chi(S, \tau) = V - E + F$$

Démonstration : τ est une triangulation de S . On applique Gauss-Bonnet à tous les triangle $\Delta \in \tau$ et on fait la somme

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum_{\Delta \in \tau} \sum_{j=1}^3 \epsilon_j^\Delta = 2\pi$$

$$\sum_{\Delta \in \tau} \sum_{j=1}^3 \epsilon_j^\Delta = \sum_{\Delta \in \tau} \sum_{j=1}^3 (\pi - i_j^\Delta) = 3\pi F - \sum_{\Delta \in \tau} \sum_{j=1}^3 i_j^\Delta = 3 - (3\pi V - \sum \epsilon_k)$$

Donc,

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + 3\pi F - 2\pi V + \sum \epsilon_k = 2\pi F$$

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k = - + 2$$

Chaque face a 3 arrêtes, chaque arrête est adjacente à deux faces

$$\begin{aligned} &\implies 3F = 2E \\ &\implies \chi(S, \tau) = V - E + F \\ &= V - \frac{3}{2}F + F \\ &= V - \frac{1}{2}F \end{aligned}$$

$$= 2\pi(V - \frac{1}{2}F) = 2\pi\chi(S, \tau)$$

Conséquence La caractéristique d'Euler ne dépend pas de choix de triangulation τ .

Dans un cours de topologie, on démontre que $\chi(S)$ est une invariant topologique (ne change pas pour une déformation continue de la surface)

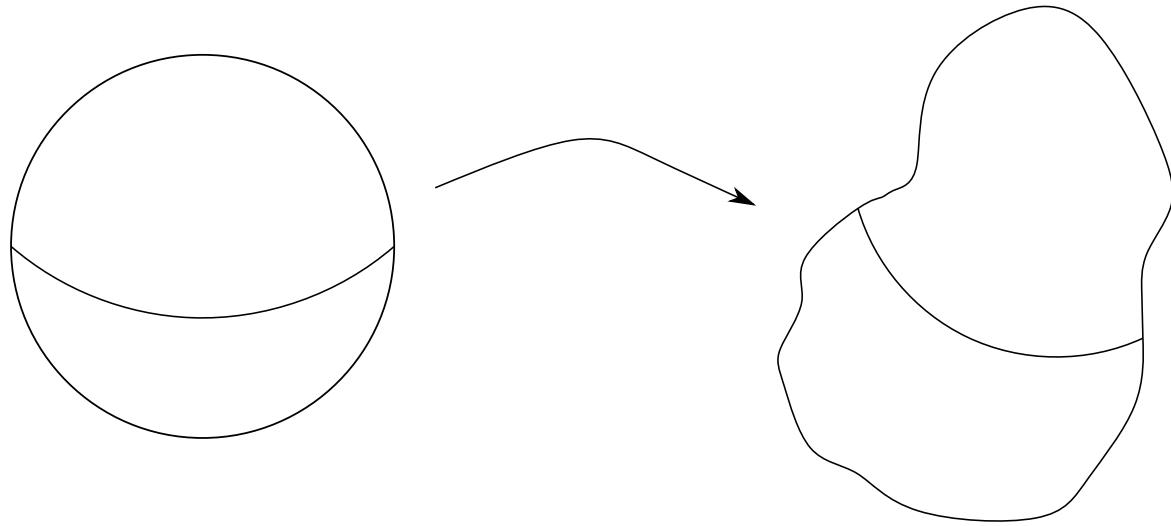


FIGURE 1 – Déformation continue

La quantité

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum \epsilon_f$$

est invariante sous déformations continues de la surface S .

Exemple : $\chi(S^2) = 2$

$$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\Pi^2) = 0 \text{ (exercice)}$$

Exemple : Une surface de courbure $\kappa \leq 0$ ne contient pas de bigone géodésique.

Gauss-Bonnet

$$\Rightarrow \iint_R \kappa dS + \int_{\alpha_1} \kappa_g ds \int_{\alpha_2} \kappa_g ds + \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\pi$$

mais

$$\iint \kappa dS + \epsilon_1 \epsilon_2 \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \pi \pi = 2\pi \quad \nless$$

Donc un bigone ne peut pas exister si $\kappa \leq 0$

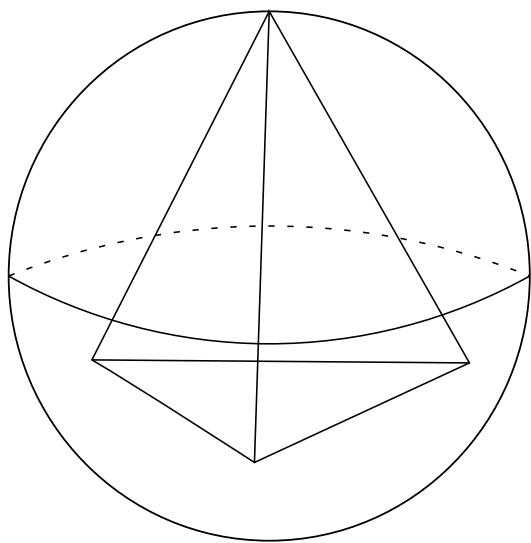


FIGURE 2 – Triangulation d'une sphère

Exemple : Si une surface topologiquement équivalente à une cylindre à $k < 0$ alors elle a au plus une géodésique fermée.

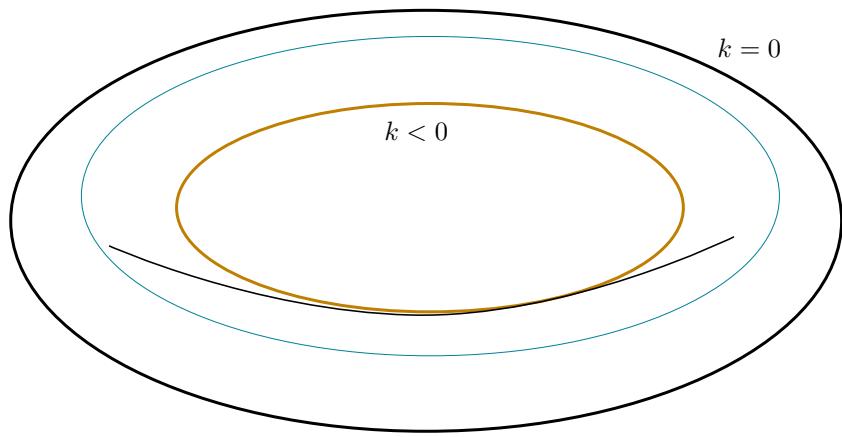


FIGURE 3 – tore

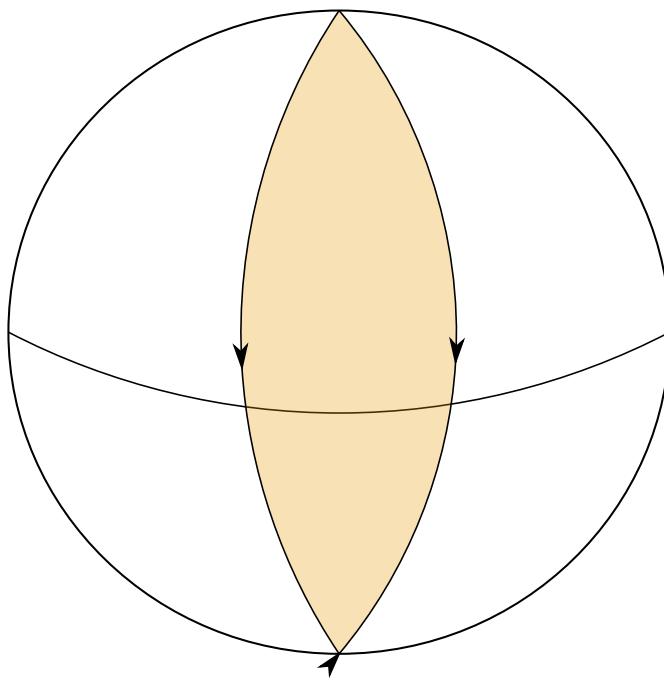


FIGURE 4 – bigone géodésique sur une sphère

Rappels

— Gauss-Bonnet :

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} \kappa_g ds + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(S)$$

$$\chi(S) = V - E + F$$

Ex :

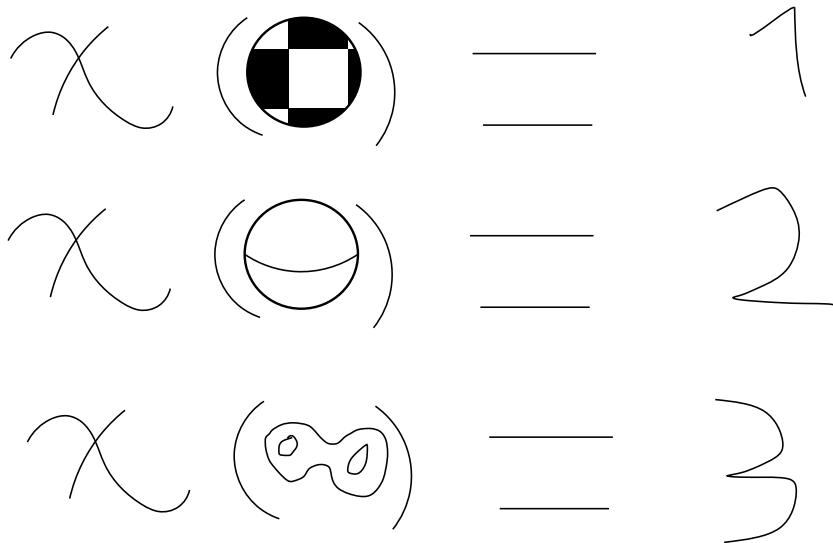


FIGURE 1 – Exemple de chi

Pour calculer

$$\iint_S \kappa dS = \iint_u \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \right) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Exemple : Dans une surface avec $\kappa \leq 0$, il n'y a pas de bigones géodésiques.

Dans une surface topologiquement équivalente à un cylindre avec $\kappa < 0$, il y a au plus une géodésique simple fermée

Démonstration Supposons qu'il y a deux tels géodésiques sur la surface appellées α_1 et α_2 .

Pour chacune, il y a deux possibilité. Soit une géodésique simple fermée borne un dique (1), soit elle sépare le cylindre en deux (2).

(1) est impossible car

$$\iint_R \kappa dS + \int_{\underbrace{\kappa_g}_{0}} ds = 2\pi\chi(R) \implies 0 > 2\pi\chi(r) = 2\pi \frac{1}{2}$$

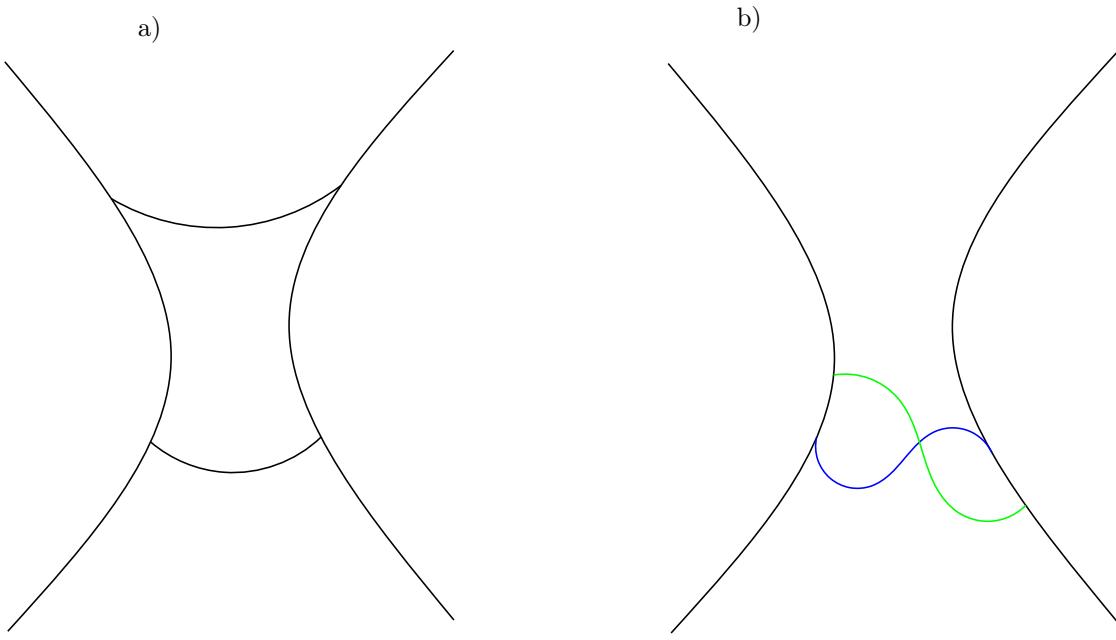


FIGURE 2 – cas (2)

(2) est la seule possibilité. Si α_{12} sont deux coubes distinques.

Dans le cas b), les coubres ne peuvent s'intersecter en un nombre impaires de points par unicité des géodésiques. Si elle s'intersectent en un nombre impaires de points, on a des bigones géodésiques, ce qui est impossible sur une telle surface ($\kappa < 0$).

Cas a)

$$\iint_R \kappa dS + \int_{\partial S} \underbrace{\kappa_g}_0 ds = 2\pi\chi(R)$$

$$0 > 2\pi\chi(R) = 0 \text{ (impossible)}$$

Rappel

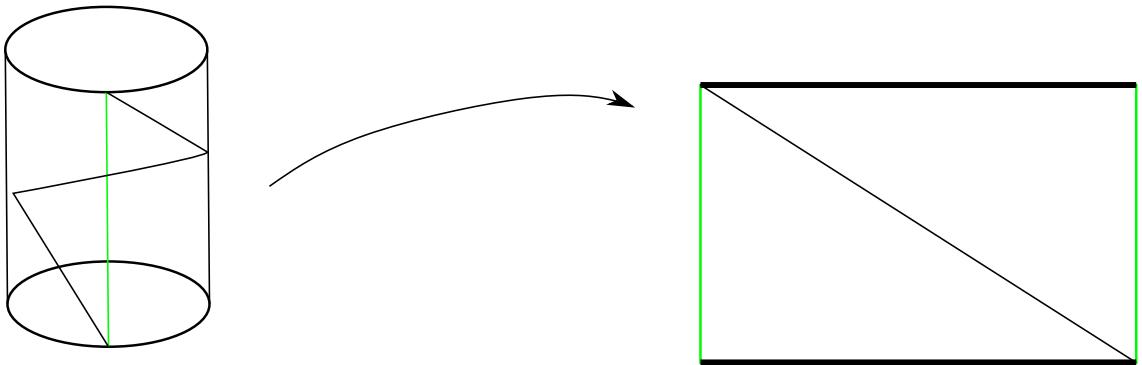
Si T est un triangle géodésique,

$$\iint \kappa dS = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

Sur la sphère de rayon 1, $\equiv 1$ Proposition : Pour une triangle géodésique de la sphère, $\text{Aire}(T) = \sum \theta_i - \pi$ Ex :

$$\text{Aire}(R) = \frac{4\pi}{8} = \pi^2$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$



$$V - E + F = 2 - 4 + 2 = 0$$

FIGURE 3 – Triangulation d'un cylindre

Introduction à la géométrie hyperbolique

Ceci ce veux être une introduction *historique* à la géométrie non-euclidienne

Peut-on contruire un surface de courbure constante négative ?

Ou! : la pseudosphère (Surface de révolution de la tractrice.

Cette propriété n'as pas toute les propriétés qu'on aimerait que la surface universelle de coubure négative ait. Elle à des désavantage par rapport au plan ou à la sphère. En effet la surface n'est pas complète. Par là, on entend qu'il existe des géodésiques de longueurs fini qui ne se prolongent pas. (On peut tomber en bas de la surface)

La sphère à l'avantage d'être homogène. On aimerait avoir une surface de courbure négative constante qui est homogène également. On ne veut pas qu'il y ait un bord. Ce problème ne peut pas être réglé à moins de changer notre définition d'une surface.

Un théorème de Hilbert dit qu'il n'existe aucune surface complète dans \mathbb{R}^3 de courbure constante négative. On aimerait quand même avoir une telle surface. Un des raison qui nous pousse à la vouloir et que par exemple, sur sphère la somme des angle des triangle est toujours égale à π . On voudrait avoir une surface sur laquelle l'aire des triangle est toujours inférieur à π .

Imaginons une surface de paramétrisation P avec le domaine $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ et t.q. la première forme fondamentale est $M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$. Calculons Γ_{ij}^k pour cette surface

$$\Gamma_{xx}^x = M_i^{-1} \begin{pmatrix} E_x/2 \\ F_x - E_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{xy}^x \\ \Gamma_{xy}^y \end{pmatrix} = M_I^{-1} \begin{pmatrix} E_y/2 \\ G_x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{yy}^x \\ \Gamma_{yy}^y \end{pmatrix} = M_I^{-1} \begin{pmatrix} F_y - G_x/2 \\ G_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \Gamma_{xx}^y = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{xy}^x = \Gamma_{yy}^y = -\frac{1}{y} \quad \text{les autres termes sont tous nuls}$$

Selon la première équation de Gauss

$$E \cdot \kappa = \dots$$

$$\implies \frac{1}{y^2} \cdot \kappa = -\frac{1}{y^2} \implies \kappa = -1$$

Pour calculer les distances de cette surface, on utilise I

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{y^2} x'^2 + \frac{1}{y^2} y'^2} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y} dt$$

$$p(\gamma(t))' = x' p_x + y' p_y$$

Comme on divise par y , les chemins à petit y deviennent long rapidement.

Calculons les géodésiques de cette surface

$$x'' + (x' \quad y') \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}^x & \Gamma_{xy}^x \\ \Gamma_{xy}^x & \Gamma_{yy}^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$y'' + (x' \quad y') \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}^y & \Gamma_{xy}^y \\ \Gamma_{xy}^y & \Gamma_{yy}^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies x'' + 2x'y' \left(-\frac{1}{y} \right) = 0$$

$$y'' + x'^2 \left(\frac{1}{y} \right) - y'^2 \left(\frac{1}{y} \right) = 0$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \frac{1}{y}(x'^2 - y'^2) = 0 \end{cases} \quad (1, 2)$$

Proposition : Les géodésique de cette surface sont les demi-droite verticales et les demi-cercles centré sur l'axe x .

Démonstration :

On va commencer par régler le cas des demis-droite verticale

Si $x(t)$ est constant $x' = 0$ et $x'' = 0$ (1) est satisfait!. (2)

$$\begin{aligned} y'' + \frac{1}{y}(-y'^2) &= 0 \\ y'' &= \frac{y'^2}{y} \\ \frac{y''}{y'} &= \frac{y'}{y} \\ \ln y' &= \ln y + C \\ y' &= C_1 y \\ y &= C_2 e^{C_1 t} \end{aligned}$$

Donne une demi-droite verticale $\gamma(t) = (x_0 C_2 e^{C_2 t}, C_2 e^{C_2 t})$

Exercice : Vérifier que cette demi-droite est paramétré à vitesse constante.

Si $x(t)$ n'est pas constante, on utilise x comme paramètre : on écrit $t = t(x)$ $y = y(t(x))$

...

Rappels

- Le plan hyperbolique

$$U = \{(u, v) | v > 0\}$$

muni de la métrique

$$M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

Courbure gaussienne : $\kappa_g \equiv 1$ Symbol de Chrsitoffel $\Gamma_{uu}^v = \frac{1}{v} \Gamma_{vv}^v = \Gamma_{uv}^u = -\frac{1}{v}$ Les autres sont nuls

Proposition : Les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont des demis-droites verticales et les demi-cercles centrées sur l'axe u .

Démonstration : x constant : good (demi-droite vecticale) Sinon :

$$\begin{cases} u'' - \frac{2}{v} u' v' = 0 \\ v'' + \frac{1}{v} (u'^2 v'^2) = 0 \end{cases}$$

On réécrit en termes de $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$

$$\frac{d}{du} (v(t(u))) = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{dv}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} \right) \\ &= \frac{dv}{du} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 + \frac{dv}{dt} \frac{d^2t}{du^2} \\ &= \frac{dv}{du} \left(\frac{du}{dt} \right)^{-2} + \frac{dv}{dt} = \dots = \frac{-(u'^2 + v'^2)}{vu'^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{-(u'^2 + v'^2)}{vu'^2} = -\frac{1}{v} - \frac{1}{v} \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 = -\frac{1}{v} \left(1 + (dvvu)^2 \right)$$

$$v \frac{d^2}{du^2} + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = -1$$

$$\frac{d}{du} \left(v \frac{dv}{du} \right) = -1$$

$$v \frac{dv}{du} = -u + C$$

$$\int v dv = \int -udu + C du$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{u^2}{2} + Cu + C'$$

$$v^2 + u^2 - 2Cu = 2C'$$

$$v^2 + (u - C)^2 = 2c' + c^2$$

Équation d'un cercle de rayon $\sqrt{2C' + C^2}$ et centré en $(C, 0)$

■

Maintenant qu'on connaît les lignes droite de notre nouvelles géométrie, on peut essayer de trouver des propriété analogues avec la géométries qui nous est familière, soit la géométrie Euclidienne.

Le plan hyperbolique satisfait aux axiômes d'Euclides saut le cinquième.

Celui-ci s'énonce :

Cinquieme postulat

Étant donné une droite ℓ et un point $p \notin \ell$ il existe une unique droite ℓ' par p parallèle à ℓ

Dans la géométrie Hyperbolique par contre, il existe une infinité de tels droites !

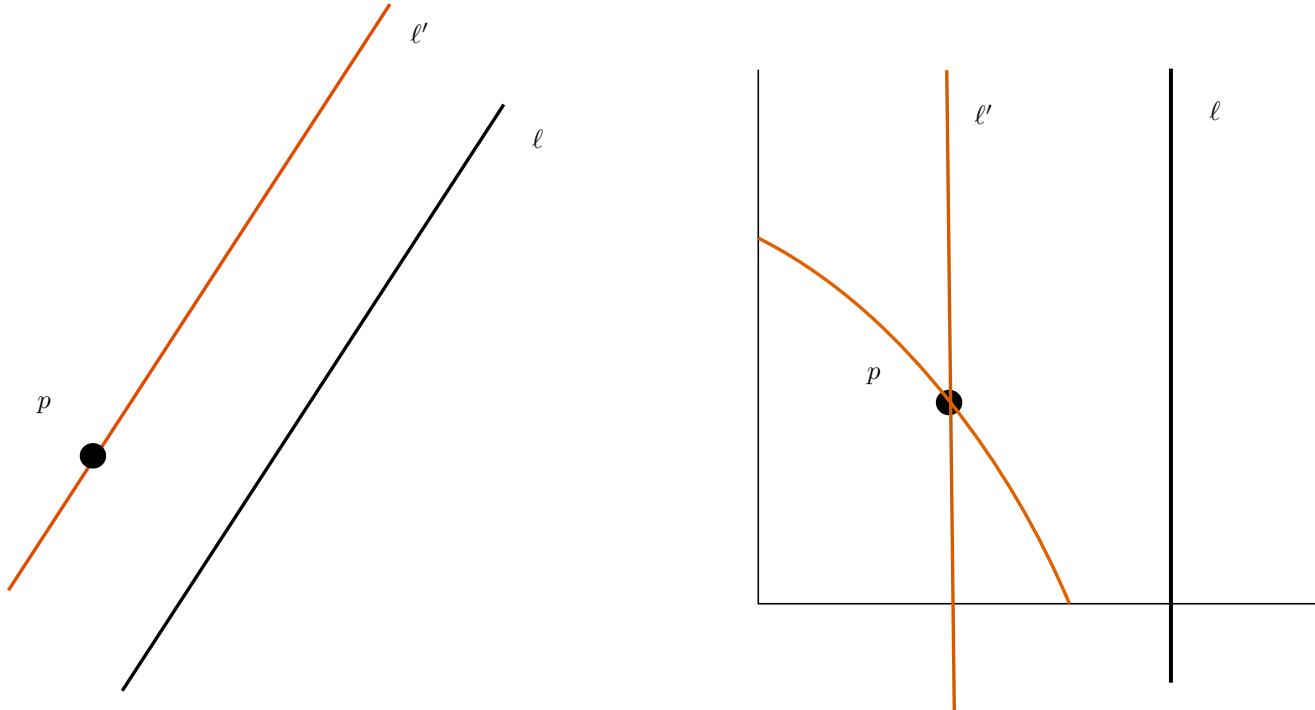


FIGURE 1 – Comparaison entre 5ieme postulat euclidien et hyperbolique

Tout les triangles hyperboliques ont un aire inférieur à π

Gauss-Bonnet :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi - \text{Aire}(t)$$

:)

2.4.7 :

Calculer le transport parallèle d'un vecteur autour du cercle $u = u_0$ sur le cône $p(u, v) = (u \cos v, u \sin v, cu)$

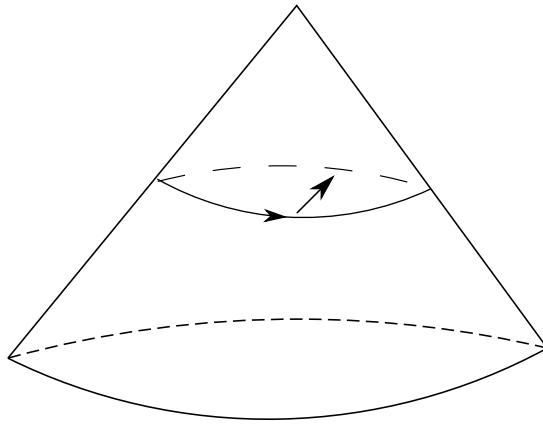


FIGURE 1 – Cône

Rappel

$f(t)p_u + g(t)p_v$ est \parallel le long de $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ ssi

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u'\Gamma_{uu}^u + v'\Gamma_{uv}^u & u'\Gamma_{uv}^u + v'\Gamma_{vv}^u \\ u'\Gamma_{au}^v + v'\Gamma_{av}^v & u'\Gamma_{av}^v + v'\Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$(\nabla_{\alpha^1} e_1) e_2$$

$$\text{Si } e_1, e_2 = p_u, p_v$$

$$D_p = \begin{pmatrix} \cos v & v \sin v \\ \sin v & -v \cos v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = (v_0 \cos(v), v_0 \sin(v), 0)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} p_u + \frac{\partial \alpha}{\partial v} p_v$$

$$n = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \begin{pmatrix} -c \cos v \\ -c \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uv}^u = 0$$

$$p_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \quad p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \cos v \\ -v \sin v \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{uv}^v = 0$$

$$p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \cos v \\ -v \sin v \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{vv}^v = 0$$

$$P_{vv} = \frac{P_{vv} \cdot P_v}{P_v \cdot P_v} P_v + \frac{P_{vv} \cdot P_v}{P_v \cdot P_v} P_v$$

$$+ P_{vv} \cdot n \\ \approx \frac{-v}{1+c^2} P_v + O_{pv}$$

$$\Gamma_{vv}^v = \frac{-v}{1+c^2}$$

$$\Gamma_{vw}^v = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f^{-1} \\ g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v^1 \left(\frac{-v}{1+c^2} \right) \\ v^1 \left(\frac{1}{v} \right) & 0 + \frac{1}{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Cherminard:

$$v(t) = V_0$$

$$v(t) = t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{pmatrix} f^{-1} \\ g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V_0}{1+c^2} \\ -\frac{1}{V_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = \frac{V_0}{1+c^2} g, \quad g^{-1} = \left(\frac{-1}{V_0} \right) f = \dots$$

$$\Rightarrow f(t) = A \cos\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} t\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} t\right)$$

$$g(t) = \frac{1+c^2}{c} \left[\frac{-A}{\sqrt{1+c^2}} \sin(t) + \frac{B}{\sqrt{1+c^2}} \cos(t) \right]$$

À la fin du chemin α : $t = 2\pi$

$$f(2\pi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}\right) + B \dots$$

Angle de rotation!

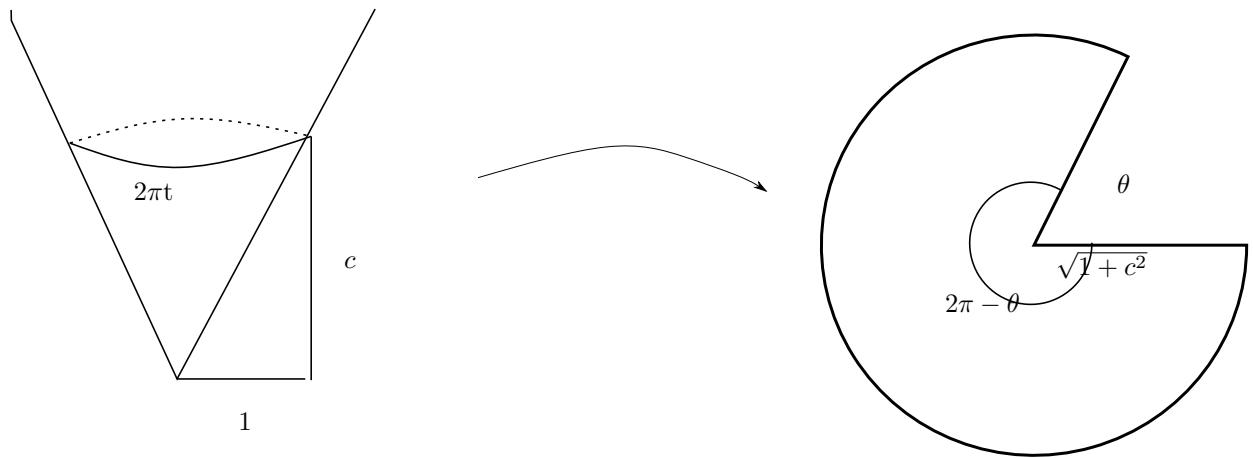


FIGURE 2 – Isomorphisme Euclidien

Exer

Révision

Différentes dérivée

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Dérivé directionnelle de f au point x dans la direction \mathbf{v} : $D_x f(\mathbf{v})$

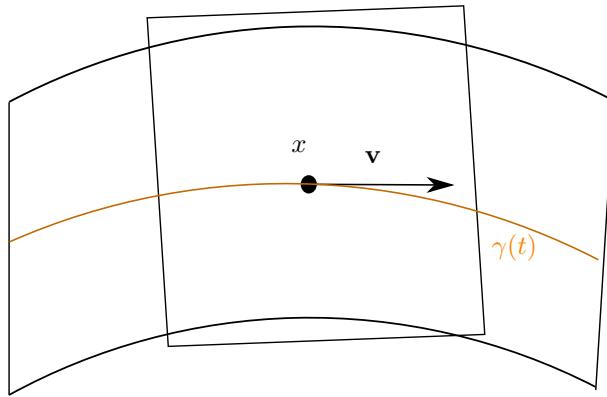


FIGURE 1 – Dérivée directionnelle

$$D_x f(\mathbf{v}) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Indépendant du choix de γ

Raccourcit de notation

Si le chemin $\gamma(t)$ est fixé au départ, on note souvent $f(\gamma(t)) = f(t)$. Dans ce cas

$$D_x f(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(t) = f'(t)$$

Si on écrit

$$f(p(u, v)) = f(u, v)$$

La matrice de $D_x f$ dans la base p_u, p_v est

$$\begin{pmatrix} \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{df_n}{du} & \frac{df_n}{dv} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$D_x f(ap_u + bp_v) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{df_n}{du} & \frac{df_n}{dv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exemple

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$f(\theta, \varphi) = 5\theta - \theta^2 + 8\varphi - \varphi^2$$

Pour trouver le max/min de f sur

$$S^2$$

,

$$Df = (5 - 2\theta, 4 - 2\varphi) = 0 \implies \theta = \frac{5}{2}, \varphi = \frac{4}{2} = 2$$

Projection de Mercader

$$M : C \rightarrow S^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}x \\ \sqrt{1-z^2}y \\ z \end{pmatrix}$$

$$C : \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$M(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos \theta \\ \sqrt{1-z^2} \\ z \end{pmatrix} = p(\theta, \arccos(z))$$

Champs de vecteur

Champ de vecteur F sur S

$$F : S \rightarrow \mathbb{R}^3 | F(x) \in T_x S$$

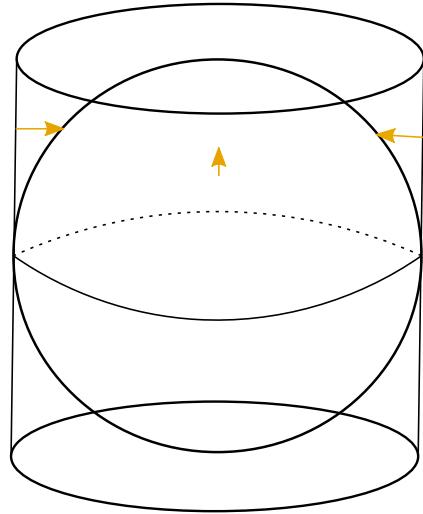


FIGURE 2 – Projection de Mercator

Dérivé directionnelle : Comme pour une fonction quelconque

$$D_x F(\mathbf{v})$$

Dérivée covariante

$$\nabla_{\mathbf{v}} F = D_x F(\mathbf{v}) - (D_x F(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

(Projection orthogonale sur $T_x S$)