2024-02-01

typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1\, e_2 \rangle$$

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni \mathrm{e_i} \otimes \mathrm{e_2} + \mathrm{e_2} \otimes \mathrm{e_1}$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2 + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

Rappels

ρ_1, ρ_2 reps indestructibles de G
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

$$\ldots$$

Corollaire 5 : si $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{irred}} \mathrm{dim}(\rho_\mathrm{i}) \chi_{\rho_\mathrm{i}}(\mathrm{g}) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{irred}} \mathrm{dim}(\rho_\mathrm{i}) \chi_{\rho_\mathrm{i}}(\mathrm{g}) \quad (\mathrm{g} \neq \mathrm{e})$$

Permet de trouver une caractère manquant dnas le table si on connaît tout les autres

Plus d'algèbre linéaire

$e_1, \cdots e_n$ base de V $f_1, \cdots f_m$ base de W $e_i \otimes f_j$ base de $V \otimes W$

$$M \in \mathrm{GL(V)} \qquad \mathrm{N} \in \mathrm{GL(W)}$$

$$M \otimes N \in \mathrm{GL(V \otimes W)}$$

Proposition :

$$\mathrm{tr}(M \otimes N) = (\mathrm{tr}\, M)(\mathrm{tr}\, N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\operatorname{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left(\sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \operatorname{tr} M \operatorname{tr} N$$

Définition

L'espace dual de V est $\mathrm{Hom}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$ noté V^*

Si $M \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$

$M^* \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}^*)$

$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$

De même, si $\rho_i G \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est une repr. La repr dual est $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration : $g \in G$, $\rho(g) \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$$\implies \rho(g) \text{est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines de 1}$$

$$\chi_\rho(g) = \operatorname{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \cdots \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\operatorname{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \cdots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire ρ est irréductible $\iff$ ρ^* est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\mathrm{Hom(V, W)} \cong \mathrm{V^* W}$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom(V, W)}$$
$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \cdots, e_n^* \text{ base de V}$$
$$w_1, \cdots, w_m \text{ base de W}$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples : S_4 et A_4

Les classes de conjugaisons dans S_4 sont

$$\overbrace{(e)}^{1}, \overbrace{(12)}^{6}, \overbrace{(123)}^{8}, \overbrace{(1234)}^{6}, \overbrace{(12)(34)}^{3}$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés)

	1 e	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_0	1	1	1	1	1
χ_{sym}	1	-1	1	-1	1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym}\otimes\text{std}}$	3	-1	0	1	-1
χ_4	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de S_4

Regardons la representation $\rho_?$ de dim 4

$$\rho_? : S_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que $\rho_?$ se décompose en $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$

$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1)$$
$$= (3\,1\,0\,-1\,-1)$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24}\left(3^2 + 6^2 + \cdots\right) = 1$$

Pour trouver di(ρ_4)

on utilise $|G| = \sum_{\rho \text{irred}} \dim(\rho_i)^2$

$$23 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + d^2$$

$d = 2$

On trouve les autres coeffs avec

$$0 = \sum_{g \text{irred}} \dim(\rho_{\text{i}}) \chi_{\rho_{\text{i}}}(\text{g})$$

Calculons ρ_4

On a $\rho((12)(34)) = I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34))) = 2$$

M est conjugé à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyeau