Rappels

- propriétés
  - $$\nabla_v(X+Y) = \nabla_v(X) + \nabla_v(Y)$$
  - $$\nabla_v(fX) - (D_v f)X + (f)\nabla_v X$$
  - $$\nabla_{v_1+v_2} X = a\nabla_{v_1} X + b\nabla_{v_2} X$$
- Coordonnées
  - $$\nabla_{p_u} p_u = \Gamma^u_{uu} p_u + \Gamma^v_{uu} p_u$$
  - $$\nabla_{p_u} p_v = \nabla_{pv} p_u = \Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uv} p_v$$
  - $$\nabla_{p_v} = \Gamma^u_{vv} p_u + \Gamma^v_{vv} p_v$$

  . Pour $X = fp_u g p_v$
$$\nabla_{p_u} X = (f_u + f\Gamma^u_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_i + \left(g_u + f\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{vv}\right) p_v$$
$$\nabla_{p_v} X = \left(f_v + f\Gamma^u_{uv} + g\Gamma^u_{vv}\right) p_u + \left(g_v + f\Gamma^v_{uv} + g\Gamma^v_{uv} + g\Gamma^v_{vv}\right) p_u$$

Proposotion : Soit α un chemin sur S avec $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(1) = x$. Soit $X_0 \in T_{x_0}S$. Alors il existe un unique champ de vecteurs sur α t.q. $\nabla_{alpha'} X \equiv 0$

Démonstration : On écrit $\alpha(t) = p(u(t), v(t)) \implies \alpha' = u'p_u + v'p_v$ et $X = f(t)p_u + g(t)p_v$

$$\nabla_{\alpha'} X = \pi^{\perp}_{T_{\alpha'(t)}}(D_{\alpha'}X)S = \pi_{T_{\alpha'(t)}S}\left(f'p_u f(p_{uu}u'p_{uv}v') + g'p_v + g(p_{uv}u'p_{vv}v')\right)$$
$$= \left(f' + f(\Gamma^u_{uu}u' + \Gamma^u_{uv}v') + g(\Gamma^u_{uv}u' + \Gamma^u_{vv}v)\right) p_u + \left(g' + f(\Gamma^v_{uu}u' + \Gamma^v_{uv}v') + g(\Gamma^v_{uv}u' + \Gamma^v_{vv}v'\right) p_v = 0$$

On réécrit :

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu}u' + \Gamma^u_{uv}v' & \Gamma^u_{uv}u' + \Gamma^u_{vv}v' \\ \Gamma_u u^v u' + \Gamma^v_{uv}v' & \Gamma^v_{uv}u' + \Gamma^v_{vv}v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{*}$$

C'est un système d'équation différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

$\implies \exists!$ solutions étant donné $f(0), g(0), g'(0), f'(0)$

Comme l'équation (*) dépend seulement de Γ^k_{ij}, le trasnport est parallèle est intrinsèque ■

Exemple : Calculons le trasnport parallèle d'un vecteur le long d'un cercle de latitude sur la sphère. Sur S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$I_{(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = -\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \cot\varphi$$

On prend le cercle de Lattitude φ_0 : $\theta(t) = t, \quad \varphi(t) = \varphi_0$avec $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot\varphi\varphi' & \cot\varphi\theta' \\ \sin\varphi\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$f' = \cot\varphi_0 g$$
$$g' = \sin\varphi_0\cos\varphi_0 f$$

$$\implies f" = -\cot\varphi_0 g' = -\cot\varphi_0(\sin\varphi_0\cos\varphi_0)f = \cos^2\varphi_0 f$$

$$\implies f(t) = c_1\cos((\cos\varphi)t) + c_2\sin((\cos\varphi_0)t)$$

$$1 = f(0) = c_1$$
$$0 = g(0) - \frac{f'(0)}{\cot\varphi_0} = \frac{c_2\cos\varphi_0}{-\cos\varphi_0} = -c_{2\sin\varphi_0} \implies c_2 = 0$$

$$\implies f(t) = \cos((\cos\varphi_0)t)$$
$$g(t) = \frac{-\cos(\varphi_0)\sin(\cos\varphi)t)}{-\cot\varphi} = \sin\varphi_0\sin(\cos(\varphi_0)t)$$

transport parallèle :

$$X(t) = \cos(kt)p_\theta + \sin\varphi_0\sin(kt)p_\varphi \qquad k = \cos\varphi_0$$

$$\|X(t)\|^2 = \cos^2(kt)p_\theta p_\theta + 2\sin\varphi_0\cos^2(kt)p_\theta p_\varphi + \sin^2\varphi_0\sin^2(kt)p_\varphi p_\varphi = \cos^2(kt)\sin^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0\sin^2(kt) = \sin^2(\varphi_0)$$

On remaque que la norme ne dépend pas de t

Proposition : Le trasnport parallelèle présèrve les longeurs et les angles

Démonstration : Soit $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ et $X(t), Y(t)$ deux champs de vecteurs parallèles le long de α.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}X = \boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}Y = 0$$

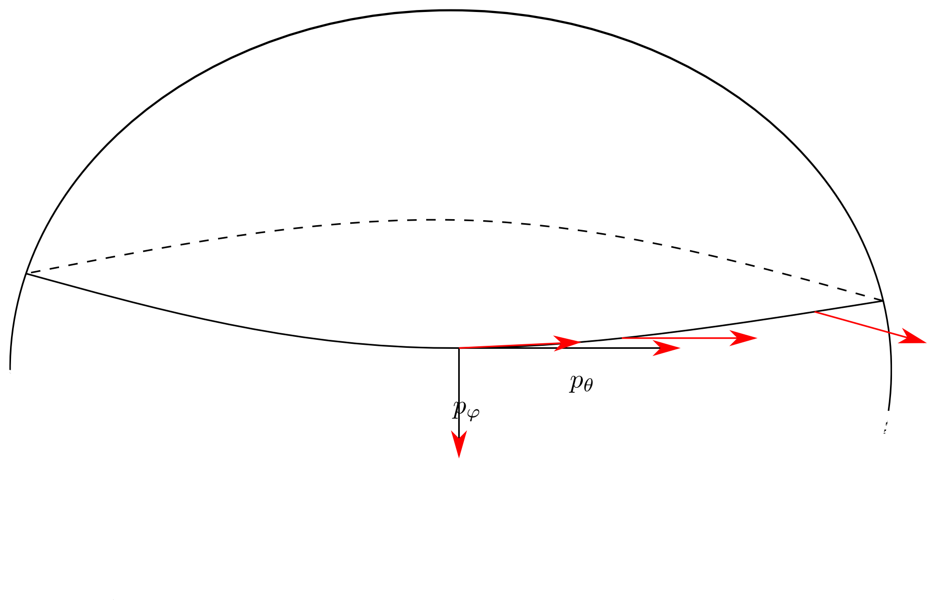

FIGURE 1 – Transport parallèle sur une shpère

Posons $f(t) = X(T) \cdot Y(t)$

$$f'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t) = D_{\alpha'}(X) \cdot Y + XD_{\alpha'}(Y) = \boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}(X) \cdot Y + X \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\alpha}(Y) = 0$$

$\implies$ $f(t)$ est une constante $\implies$ longeures et angles constants ■

Définition : UNe chemin $\alpha(t)$ sur une surface S est une géodésique si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'(t)}\alpha' = 0 \forall t$

En coordonnées, pour $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ l'équation géodésique s'écrit

$$_{\alpha}; (u'p_u + v'p_v) = u"p_u + u'\boldsymbol{\nabla}_{u'}p_u + v"p_v + v\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}p_v$$

$$= u"p_u + u'(u'(\Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}) + v'(\Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v)) + v"p_v + v'(u(\Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v) + v'(\Gamma^u_{vv}p_u\Gamma^u_{vv})p_u) = 0$$

$$\iff \begin{array}{l} u" + (u')^2\Gamma^u_{uu} + 2u'v'\Gamma^u_{uv} + (v')^2\Gamma^u_{vv} = 0 \\ v" + (u')^2\Gamma^v_{uu} + 2u'v'\Gamma^v_{uv} + (v')^2\Gamma^v_{vv} = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{c} u" + (u'v') \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v" + (u'v') \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{vu} & Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{array}$$

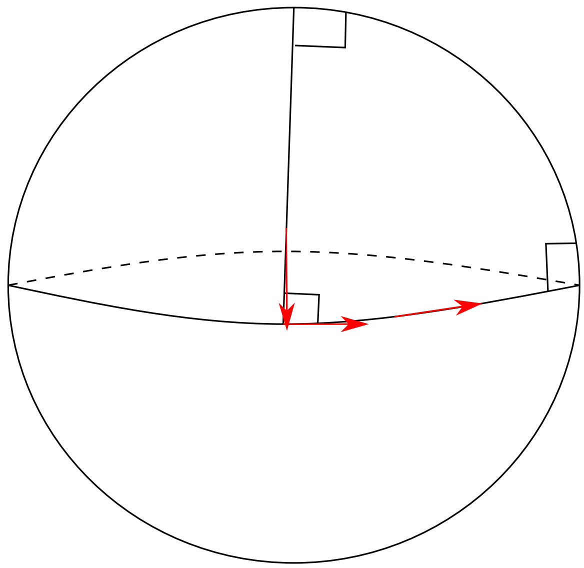

Figure 2 – Trois angles de 90

Les géodésiques sont uniques étant donné un point et vecteur tangeant initiaux

Exercice : Trouvez les géodésiques du plan en coordonées polaires

$$p(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fun fact

On ne sait pas si

$$\pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$$

est un entier ou non !