

Rappels

...

Proposition : Soit $0 \neq V \in V_\beta$, alors $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2v, \dots\}$ engendre V

Démonstration : On montre que $U = \langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2v, \dots \rangle$ est stable pour $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1. $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m) \rho(Y)^m v \in U$
2. $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1}v \in U$
3. $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

On va montrer par récurrence que $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$

pour $m = 0$ $\rho(x)v = 0$ pour $m = 1$ $\rho(x)\rho(y)v = (\rho(H) + \rho(Y))\rho(y)v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1}v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho(y)^m v$$

...

$$[(m+1)(\beta - m)\rho(y)^m v]$$

$\Rightarrow U \subseteq V$ est stable pour ρ comme ρ est irréductible, $U = V$

Conséquences

- $V_\alpha = 1$
- ρ est uniquement déterminé par $\beta = \max_{\alpha} \rho(H)$

De plus, comme V est de dimension finie, il existe m t.q. $\rho(y)^m v = 0$ et $\rho(y)^{m-1}v \neq 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$$

$$\Rightarrow m(\beta - m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = m - 1 \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimension n et les espaces propres de $\rho(H)$ sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

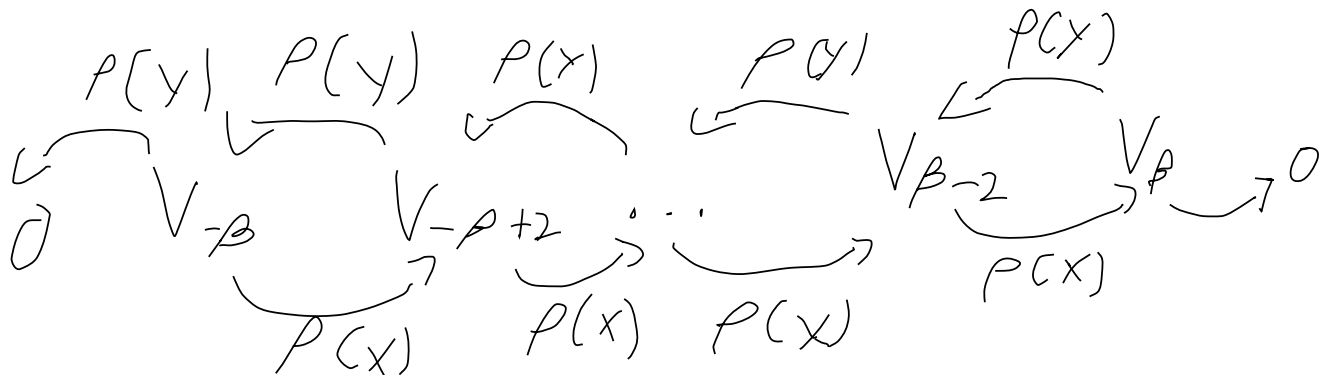


FIGURE 1 – ladder

Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

Rappel

$$\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i) i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par $\rho_1 \otimes \rho_2(g) (V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si G est un groupe de Lie \mathfrak{g} son algèbre de Lie

Calculons $d(\rho_1 \otimes \rho_2) \big|_I \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}V_1 \otimes V_2$

Soit $\gamma(t) \in G$, $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \otimes \rho_2) \gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \dots = \left(d \rho_1 \big|_I (X) V_1 \right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\dots)$$

Définition :

Si $\rho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V_i)$ sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ est définie par $(\rho_1 \otimes \rho_2) X (V_1 \otimes V_2)$

On a également $\text{sym}^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$, $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ sous-représentation comme pour G un groupe On introduit la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdots v_n := \text{Sym}^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in \text{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_1 \cdots = \text{Alt}(v_1 \cdots)$$

Revenons à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation ???? est $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus V_2$$

est la représentation irréductible de dimension 2

$$\text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(\text{Sym}(i)(H))(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_1) = 2e_1^2$$

sur $e_1 \otimes e_2$ c'est 0 sur $e_2 \otimes e_2$ c'est $-2e_2^2$

$$\implies \text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^{n-i}, e_2^i \rangle$$

Chacun est un vecteur propre de $\text{sym}(H)$ et

$$\text{sym}(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left(H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + (e_1 H e_1 \cdots e_2^i) + \cdots$$

$$= \cdots = (n-2i)e_1^{n-i}e_2^i$$

Je vois pas

Exemple : Quelle est la d/composition de $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes \text{sym}^2(\mathbb{C}^2)$ en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de $\rho(H)$

pour $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) : -2, 0, 2$ pour $\text{sum}^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) H (v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2) (v \otimes u)$$

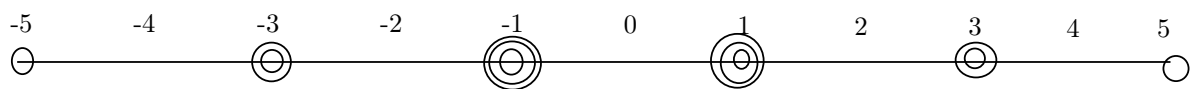


FIGURE 2 – valeurs propres