2024-04-04

Rappels

B^* forme bilinéaire sur h^* non dégénéré B^* est défini-positif sur $\mathbb{R}\langle\alpha\rangle_{\alpha\in R} \implies \mathbb{R}\langle\alpha\rangle$ est une espace euclidien sous ensemble de R ensemble de racines

$$R = R^+ \cup R^-$$

pour $h \in \mathbb{E}$ t.q. $(h,\alpha) \neq 0$

$$R^+ = \{\alpha | (h,\alpha) > 0\} = -R^-$$

Racines simples : $S \in R$ racines qui ne se décompose pas en une somme de racines positives

$$\{\frac{\alpha}{\|\alpha\|}_{\alpha\in S}\}$$

est configuration admissible ; ensemble de vecteurs tel quel $\angle(u, v \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\frac{5\pi}{6}\}$
Diagramme de conxeter
Nombre de lien entre les points est (0,1,2,3) et correpond à l'idince de la liste d'angles
Est

1. Acylcique
2. degré de chaque sommet ≤ 3

On va essayer de reistreindre les Diagramme de Coxeter encore plus

<u>Lemme</u> :

Si $v_1, \cdots, v_n$ est une configuration admissible et $V_i - V_j$ dans le Diagramme de Coxeter alors alors

$V_1, \cdots \hat{V}_i, \cdots \hat{v}_j, \cdots v_j, v_i + v_j$

est une configuration admissible dont le Diagramme est identique sont que les sommets v_i et v_j

<u>Démonstration</u> : Si v_k n'est pas relié à v_i, v_j $(v_k, v_j + v_i) = 0$

si $(v_k - v_i - v_j)$, $(v_k, v_i + v_j) = (v_k, v_i) + (v_k + v_j) = (v_k, v_i)$

idem pour $(v_k = v_i - v_j)$

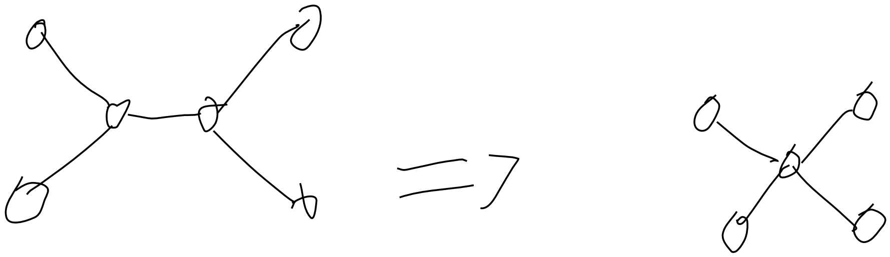
de plus $(v_i + v_j, v_i + v_j) = \cdots = 1$

On déduit que que le Diagramme de Coxeter d'une configuration admissible irréductible fait partie de la liste

$$A_n : 1 - 2 - \cdots - n-1 - n$$
$$BCF_n : 1 - 2 - \cdots - i = i+1 - \cdots - n-1 - n$$
$$DE_n : . - . - \cdots - . \perp . - \cdots - . - .$$
$$G_2 : . \equiv .$$

<u>Lemme</u> : Le Diagramme d<une configuration admissible ne peut par contenir comme sous graphe

1. $\circ - \circ = \circ - \circ - \circ$



admissible

admissible

$\lightning$

Figure 1 – exemple lemme

2. $\circ - \circ \perp^2 \circ - \circ$
3. $\underbrace{\circ - \circ}_{2} \perp^1 \underbrace{\circ - \circ}_{5}$
4. $\underbrace{\circ - \circ}_{3} \perp^1 \underbrace{\circ - \circ}_{3}$

<u>Démonstration</u> :

2) On 7 vecteurs

la matrice (v_i, v_j) est (voir figure) dégénéré

Finalement, on a les cas

$$A_n : 1 - 2 - \cdots - n - 1 - n$$

$$BC_n : 1 = 2 - \cdots - n - 1 - n$$

$$F_4 = . - . = . - .$$

$$D_n : 1 \perp^1 -. - \cdots - . - .$$

$$E_6 : . - .- \perp^2 -. - .$$

$$E_7 : . - .- \perp^2 -. - . - .$$

$$E_8 : . - .- \perp^2 -. - . - . - .$$

$$G_2 : . \equiv .$$

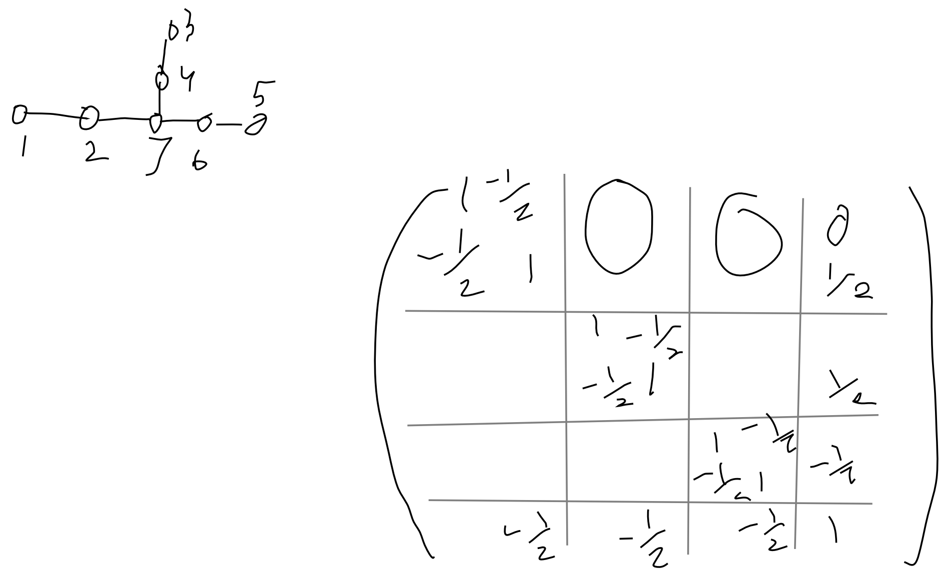


Figure 2 – matrice

Rappel

Dans un sytème de racine, si $\angle \alpha, \beta = \frac{2\pi}{3}$ alors $\|\alpha\| = \|\beta\|$ si $\angle \alpha, \beta = \frac{3}{\pi}4$ alors $\|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|$

$\dots$

Conséquence de ce rappel :

Dans les cas A_n, D_n, E_n toutes les racines sont de la même longeure

On garde une flèche sur $=$ et$\equiv$ qui pointe vers la racine la plus courte. On obtiens les Diagrammes de Dynkin

$$B_n : 1 =<= 2 - \cdots - n - 1 - n$$
$$C_n : 1 =>= 2 - \cdots - n - 1 - n$$
$$F_4 : . - . =>= . - .$$
$$G_2 : . \equiv>\equiv .$$

Exemples Les Diagrammes A_n est le Diagramme de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$

$$h = \{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} | \sum_{\alpha_i} = 0 \}$$

$$h^* = \langle L_1, \cdots, L_{n+1} \rangle$$
$$R = \{L_i - L_j | i \neq j\}$$
$$S = \{L_1 - L_2, L_2 - L_3, \cdots, L_n - L_{n+1}\}$$

Le diagramme de B_n est le diagramme de $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$. Les C_n c'est pour $\mathfrak{sp}(2n\mathbb{C})$

$$B_2 = C_2 \implies \mathfrak{so}(?) = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$$

Construction de $\mathfrak{g}_2$