2022-31-03

Au dernier cous, on a *développé* le champ de Dirac en modes.

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1}^{4} c_{\mathbf{p},s} u_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{pr}}$$

$$\{c_{\mathbf{p},s}, c^\dagger_{\mathbf{p}',s'}\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$$
$$\{c_{\mathbf{p},s}, c_{\mathbf{p}',s'}\} = 0$$

Mer de Dirac

$$|F\rangle = \prod_{\mathbf{p}} \prod_{s=3,4} c^\dagger_{\mathbf{p},s} |0\rangle$$

$$E_0 = -2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}$$

On suppose que $\|\mathbf{p}\|$ est borné bien qu'on ne connaisse pas vraiment la borne supérieur

On définit les opérateur de création et de destruction de *trou* dans la mer de Dirac

$$d_{\mathbf{p}1} = c^\dagger_{-\mathbf{p}4} \qquad d_{\mathbf{p}2} = c^\dagger_{-\mathbf{p}3}$$

Le Hamiltonien se réexprime alors comme

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} E_{\mathbf{p}} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} - d_{-ps} d^\dagger_{-ps} \right) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=12} E_{\mathbf{p}} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} d^\dagger_{ps} d_{ps} - 1 \right)$$

trou

La quantité de mouvement est donnée par

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p},s=1,2,3,4} \mathbf{p} c^\dagger_{ps} c_{ps} = \sum_{ps=1,2} \mathbf{p} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} + d_{-ps} + d^\dagger_{-ps} \right) = \cdots = \sum_{p,s=1,2} \mathbf{p} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} + d^\dagger_{pas} d_{ps} \right)$$

Le 4-courrant est donné par

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

L'équation de la conservation de la charge est respecté par l'équation de Dirac :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{si} \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

La densité de charge électrique est donné par

$$j^0 = \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi$$

$$Q = e\int \mathrm{d}^3\tau\rho = \int \mathrm{d}^3 r\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = e\sum_{p,s,s'} c^\dagger_{ps}c_{ps}\underbrace{u^\dagger_{ps}u_{ps}}_{\delta_{ss'}} = e\sum_{\mathbf{p},s=1,2}\left(c^\dagger_{ps}c_{ps} + d_{-ps}d^\dagger_{-ps}\right) = e\sum_{\mathbf{p},s=1,2}\left(c^\dagger_{ps}c_{ps} - d^\dagger_{ps}d_{ps}\right) + Q_0$$

Q_0 est alors la charge de la mer de Dirac

Jauge

Ex :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \xi \implies F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$$

En mécanique la substitution de Peierls s'écrit

$$\boldsymbol{\nabla} \to \boldsymbol{\nabla} - ie\mathbf{A} \qquad \partial_t \to \partial_t + ie\Phi$$

C'est le *couplage minimal*

$$\boxed{\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu}$$

Avec cette substitution $\psi \to e^{-ie\xi(r,t)}\psi$

On aimerait que l'équation de Shrodinger soit invariant à une phase près *localement* contrairement à globalement

<u>Dérivée covariente :</u>

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$
$$\psi' = e^{-ie\xi}\psi$$

On peut montrer que :

$$\mathcal{D}'_\mu\psi' = e^{-ie\xi}\left(\mathcal{D}_\mu\psi\right)$$

On a alors la *nouvelle* équation de Schrodinger

$$i\mathcal{D}_t\psi = -\frac{1}{2m}\vec{}$$

D $^2\psi$

On construit l'action électromagnétique comme

$$S_{em} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x \; \underbrace{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{-2(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)} - e\int \mathrm{d}x^\mu A_\mu - m\int \mathrm{d}s$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial vA}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})^2\right]$$

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}}$$