Relativité générale

Rappels sur la relativité restrainte (vecteurs et tenseurs)

* On prend comme exemple une espace euclidien de dimension 2 mais la théorie est générale

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_2 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 = A^i\mathbf{e}_i$$

les A^i sont les composantes *contravariantes*

Changement de base : $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_i = \Lambda_i^j\mathbf{e}'_j = \Lambda_i^1\mathbf{e}'_1 + A_i^2\mathbf{e}'_2 + A_i^3\mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}'_i = (\Lambda^{-1})_i^j\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A} = A^j\mathbf{e}_j = \underbrace{A^j\Lambda_j^i}_{A^{i\prime}} e'_i$$

$$\boxed{A'i = \Lambda_j^i A^j}$$

Base duale

ayant une base B On peut définir une base duale $\tilde{B} = \left\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\right\} | \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_j^i$

$$\mathbf{A} = \underbrace{A^i}_{contravariante} \mathbf{e}_i = \underbrace{A_j}_{covariantes} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i = A^i$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_i$$

On veut démontrer que $\mathbf{e}'^i = A_j^i\mathbf{e}^j$

<u>Tenseurs :</u>

base : $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

Il y a des représentation covarientes contravarites et mixtes au tenseurs.

$$T'^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l T^{kl}$$
$$T'^i_j = \Lambda^i_k (\Lambda^{-1})^l_j T^k_l$$

$$T^i_i = tr(T) = \cdot = tr(T')$$

Tenseur Métrique

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j \iff \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j}_{\delta^k_j} = g_i j$$

de même :

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij}\mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{AB} = A^i \mathbf{e}_i B^j \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^i$$

$$A^i = \mathbf{A}\mathbf{e}^i = \mathbf{A} \cdot (g^{ij}\mathbf{e}_j) = g^{ij} A_j$$

$$A^i = g^{ij} A_j$$
$$A_i = g_{iij} A^j$$
$$g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i$$

Espace-Temps (1908)

Un concept définis par Minkowski après avoir lu les papier de Einstein de 1905. Ce dernier n'aimait pas du tout ce concept.

Quadrivecteur

$$x^i = (ct, x, y, z)$$

Transformation de Lorentz

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j$$

Intervalle

$$S^2 = \cancelto{1}{c^2} t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

unitées Géométriques

$$G = 1 \qquad c = 1$$

Transformation de Lorentz

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

On a 16 variables dans une matrice 4x4. On a une contrainte sur 10 d'entres elles. Il reste donc 6 degrés de libertés. Celles ci représente l'alignement des axes et la vitesse.

<u>Rapidité</u>

$$\tanh \psi = v$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -x \sinh \psi & t \cosh \psi & 0 & 0 \\ x \cosh \psi & -t \sinh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Quadrigradient</u>

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\boxed{\partial_{i'} = (\Lambda^{-1})^j_i \partial_j : q}$$

2022-09-02

Espace-temps

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\tau^2$$

Temps propre

Temps qui s'écoule dans le référentielle de l'objet

$$\implies x(\tau)$$

Si on connais $x^i(t)$, alors que vaut le temps propre ?

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} \\ &= \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} \end{aligned}$$

Action

$$\begin{aligned} S = -m\int_A^B \mathrm{d}\tau &= -m\int_A^B \mathrm{d}t\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ &\approx -m\int_A^B \mathrm{d}t\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) \\ &= -m\int_A^B \mathrm{d}t\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

Lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

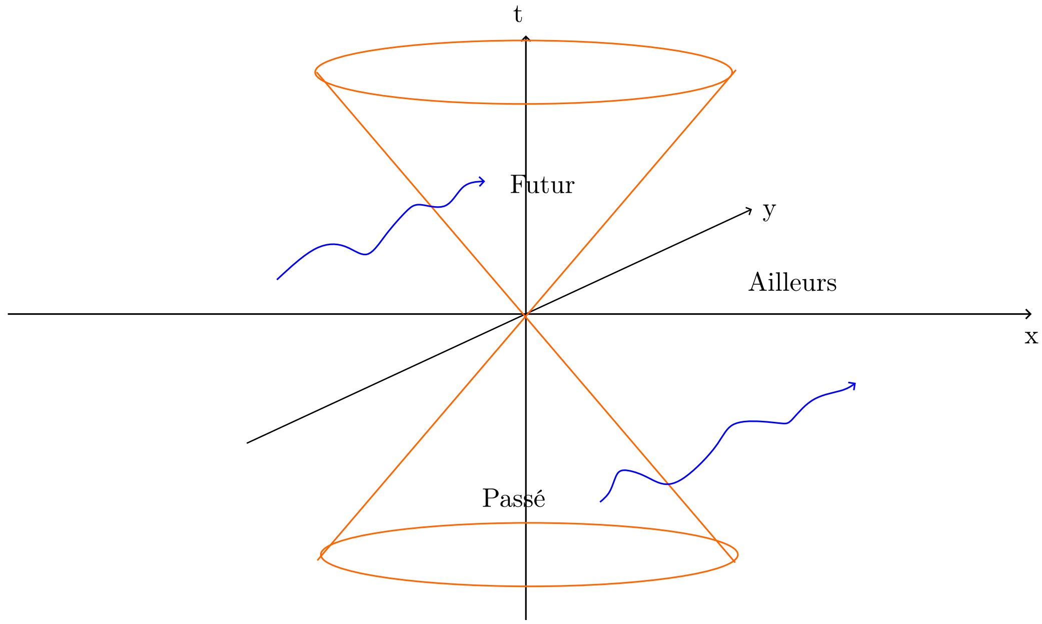

Figure 1 – Espace-temps

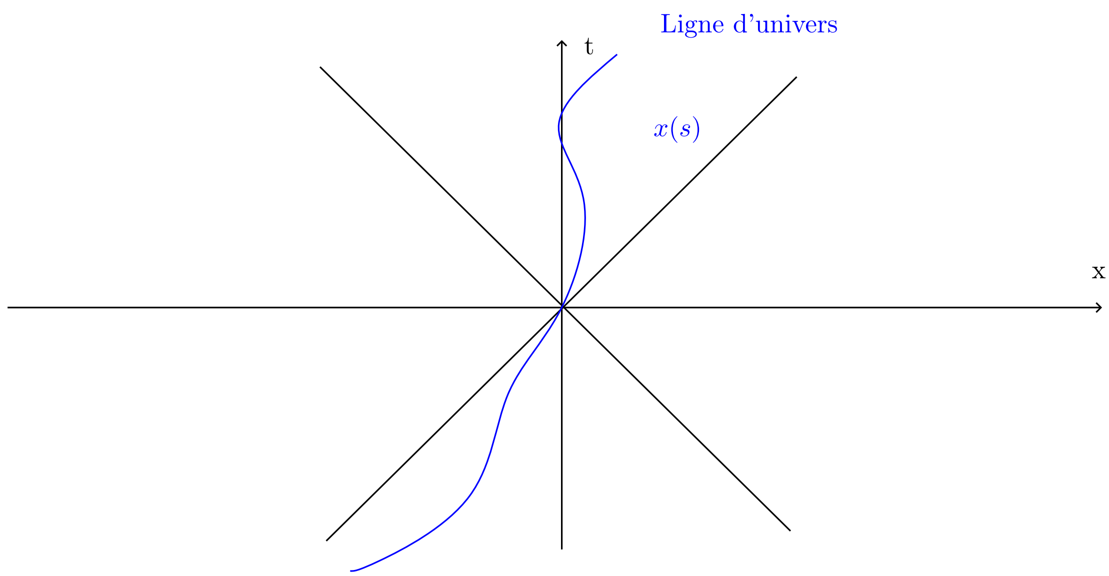

Figure 2 – Minkowski 2D

Hamiltonien

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = L = H$$

Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \left\{ \mathbf{v}^2 + 1 - \mathbf{v}^2 \right\} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

$$H^2 = \frac{m^2}{1-\mathbf{v}^2} \quad \mathbf{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1-\mathbf{v}^2}$$

Éléctromagnétisme

4-vecteur potentiel :

$$A^i = (\Phi, \mathbf{A}), \quad A_i = (\Phi, -\mathbf{A})$$

$$S = \underbrace{S_0}_{-m\int \mathrm{d}\tau} - e \int_A^B \underbrace{A_i \mathrm{d}x^i}_{\text{invarient}} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

Tensuer de Faraday

$$F_{ij} =_i A_j - \partial_j A_i$$

$$F^i_i = 0 \quad F_{ij}F^{ij} \text{ : invarient}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

→ principe de moindre action :

$$\boxed{m\ddot{x}^i = eF^i_j \dot{x}^2}$$

$$\boxed{m\dot{u}^i = eF^i_j u^j}$$

Chapitre 2 : géométrie différentielle

Théorème du plongement

Nash
Ne vaut que pour des espace euclidien (pas pour l'espace-temps donc) mais le théorème se généralise
On définit un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme un point de la surface. Où $\mathbb{R}^3$ est *l'espace hôte*

$$\mathbf{X}(x^i) \quad i \in \{1, \cdots, d\}$$

Par exemple, la sphère :

$$\mathbf{X} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$x^1 = \theta \quad x^2 = \phi$$

Il n'existe pas de vecteur position
Il est impossible en général de représenter un variété différentiel avec une seule carte

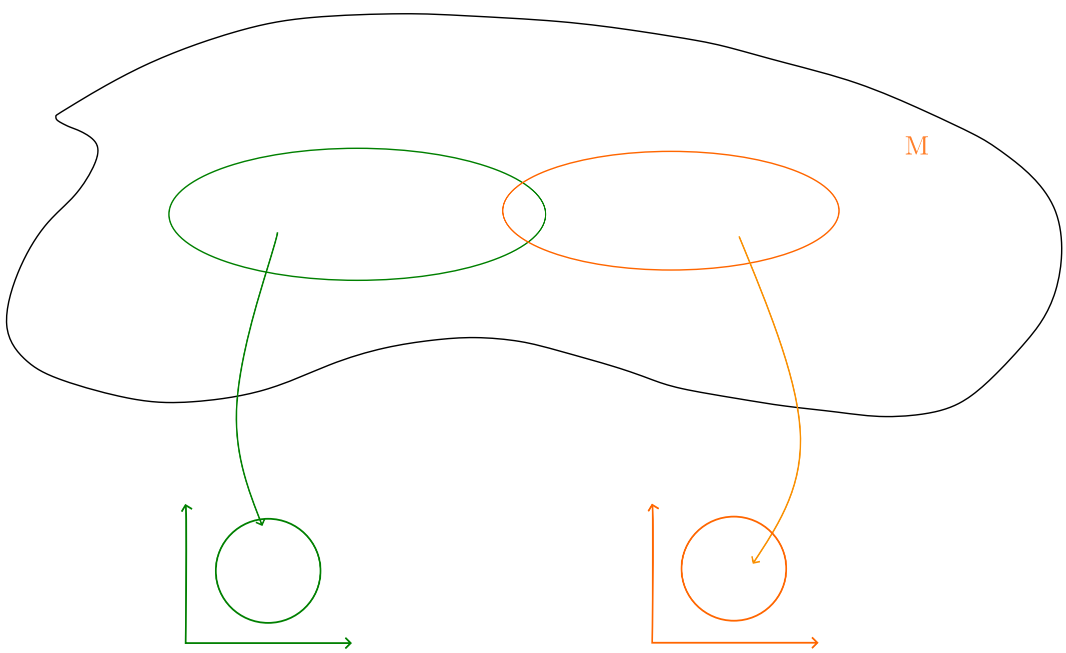

Figure 3 – Atlas

Espace tangeant

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}'_j \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\Lambda^j}$$

Truc mémotechnique

Quand on divise par un indice inferieur il deviens suppérieur et inversement

tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \left(\partial_i \mathbf{X} \mathrm{d}x^i\right) \cdot \left(\partial_j \mathbf{X} \mathrm{d}x^j\right) = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x_j = g_{ij}(x) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2$$

fonction : $\phi(x)$

$$\partial_{i\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\partial'_i = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \cdots$$

$$\partial_i \phi = \partial'_j \phi \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

(vecteur covarient)

2022-09-07

Transport parallèle

Le concept de transport parallèle permet de comparer des vecteurs qui sont définis à des points différents (qui viennent de différents espaces tangents).

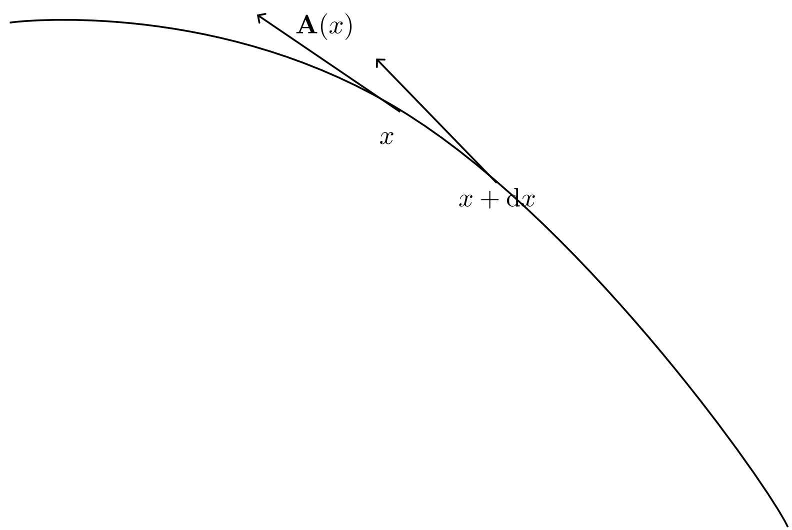

FIGURE 1 – transport parallèle

$$A_i(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x)$$

$$\begin{aligned} A_i + \partial A_i &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x + \mathrm{d}x) \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \big(\mathbf{e}_i(x) + \partial_j \mathbf{e}_i(x) \mathrm{d}x^j\big) \\ &= A_i(x) + A_k \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \partial_j \mathbf{e}_i(x)}_{\Gamma^k_{ij}(x)} \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta A_i = \Gamma^k_{ij} A_k \mathrm{d}x^i}$$

$$\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{X} \quad \mathbf{e}^k = \partial^k \mathbf{X} = g^{kj} \partial_j \mathbf{X}$$

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{X} = \partial_i \mathbf{e}_j$$
$$\Gamma^k_{ij} = \partial^k \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{X} = \Gamma^k_{ji}$$

$$\boxed{\partial A^i = -\Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j}$$

$$\delta(A^i B_i) = 0 = \delta^i B_i + A^i \delta B_i = \left(\delta A^i + \Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j\right) B_i = 0$$

Dérivé covariante

$$\begin{aligned} DA^i &= \text{changement "réel" du vecteur} \\ &= \mathrm{d}A^i - \partial A^i \\ &= \partial_j A^i \mathrm{d}x^j + \Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j \\ &= \underbrace{\nabla_j A^i}_{\partial_j A^i + \Gamma^i_{kj} A^k} \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

$$\underbrace{\boxed{\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ij} A_k}}_{\text{tenseur de rang 2}}$$

$$\nabla_i \mathbf{A} = \text{proj} \partial_i \mathbf{A}$$

Les symbols de Christoffel semblent requérir $\mathbf{X}$ et donc de travailler dans l'espace hôte. Ce n'est pas de cas. On peut tout ré-exprimer en fonction du tenseur métrique.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{kij} = g_{kl} \Gamma^l_{ij} = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_j \mathbf{X}$$

$$\partial_k g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$
$$\partial_i g_{jk} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \partial_j \mathbf{X} \cdot \partial_k \mathbf{X}$$
$$\partial_j g_{ki} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \mathbf{X}$$

On addition les deux derniers et on isole $\partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_i \mathbf{X}$

pour avoir

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right)}$$

Exemple : S^2(rayon a)

Coordonnées sphériques θ, φ

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_i g_{jk}\right)$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \partial_1 g22 = 2a^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

Dérivée covariante

$$\nabla_\theta A_\theta = \partial_\theta A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} A^\varphi = \partial_\theta A^\theta$$

$$_\varphi A^\theta = \partial_\varphi A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} A^\varphi = \partial_\varphi A^\theta - \sin\theta\cos\theta A^\varphi$$

$$\ldots$$

Les géodésique

La géodésique est une courbe (trajectoire sur un variété) $x^i(\lambda)$

vecteur tangenant $\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \mathbf{X}(x(\lambda)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \mathbf{e}_i \dot{x}^i = \mathbf{e}_i u^i$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j} = \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}dx^j}{\mathrm{d}\lambda}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\lambda^2}} = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}\right|$$

$$\boldsymbol{\nabla}_\lambda \phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \partial_i \varphi \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} = u^i \partial_i \phi$$

$$\nabla_\lambda A^j = u^i_i A^j = u^i \partial_i A^j + \Gamma^j_{ki} A^k u^i$$

Géodésique

1) Minimise (rend stationaire) la distance entre deux points.

$$S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s \quad \mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$$

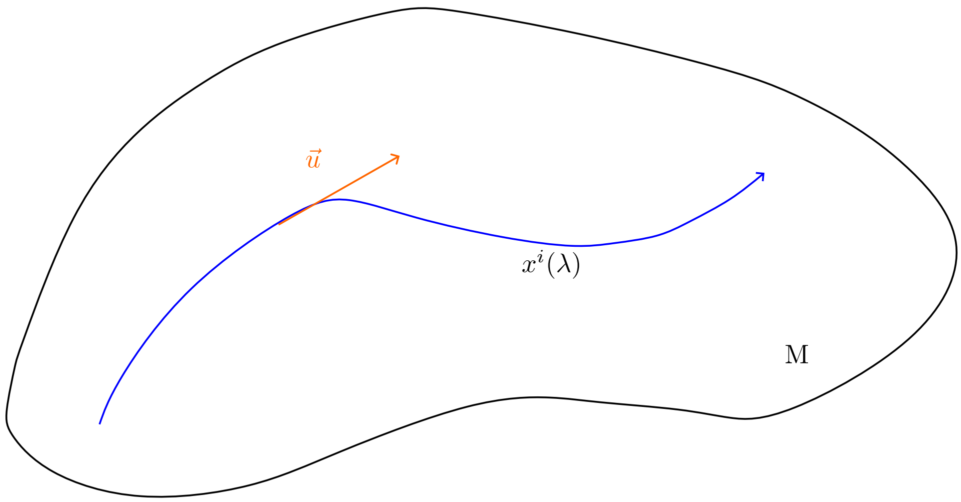

Figure 2 – géodésique

$$\delta S_{AB} = 0 \quad x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

2) courbe telle que **u** est transporté parallèlement

$$Du^i = du^i - \delta^i = du^i + \Gamma^i_{kj} u^k \mathrm{d}x^k \mathrm{d}x^j \propto u^i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(u_i u^i\right) = 2u_i \dot{u}^i$$

où $\dot{} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}$

$$= 2u_i u^i f(\lambda) - \Gamma^i_{jk} u^k u^j u_i$$

$$\boxed{\Gamma^{k\prime}_{ij} = \frac{\partial x^{k\prime}}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i\prime}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{j\prime}}\Gamma^l_{mn} - \cdots}$$

On va demander que $f(\lambda) = 0 \implies |\mathbf{u}| = \text{cst}$

$$\dot{u}^i + \Gamma^i_{kj} u^k u^i = 0$$

2022-09-09

À l'épisode précédent :

$$\partial_i A_j,\, \partial_i A^j$$

$$\nabla_i A_j = \partial_i A_j - \Gamma^k_{ji} A_k$$
$$\nabla_i A^j = \partial_i A^j + \Gamma^j_{kj} A^k$$

Γ est la connection affine ou symbole de Chritoffel

$$\Gamma^k_{ik}(x) = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$$

> $\Gamma_i j^k$ **n'est pas un tenseur**
> ${}_i A^j$ en est un !

Il est toujours possible de choisir un référentiel tel que $\Gamma^k_{ij} = 0\ \forall i, j, k$!

Théorème du quotient

si $B^{ij} A_j$ est un vecteur $\forall A_j$ qui est un vecteur alors B^{ij} est un tenseur.

Équation géodésique

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Cette équation est équivalente à

$$\dot{u}^i \Gamma^i_{jk} u^j u^k$$

$$Du^i = \mathrm{d}u^i + \Gamma^i_{jk} u^i \mathrm{d}x^k = 0$$

$$Du_i = \mathrm{d}u_i - \Gamma^k_{ij} u_k \mathrm{d}x^j = 0$$

On divise par $\mathrm{d}\lambda$

$$\begin{aligned} \implies \dot{u}_i - \Gamma^k_{ij} u_k u^i = 0 \\ = \dot{u}_i - \Gamma_{kij} u^k u^j \\ = \dot{u}_i - \frac{1}{2} \left(\partial_i g_{ki} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) u^k u^i \end{aligned}$$

$$A_{kj} = -A_{jk} \qquad S^{kj} = -S^{jk}$$
$$A_{ki}S^{kj} = A_{jk}S^{jk} = -A_{kj}S_{kj} = 0$$

comme les deux derniers termes forment ensemble un tenseur anitsymétrique et qu'ils mutilplient un tenseur symétrique la contribution de ces termes s'annulent

$$0 = \dot{u}_{ii} g_{kj} u^k u^j$$

Si $g_k j$ ne dépend pas de x^i alors $u_i = \text{cst}$

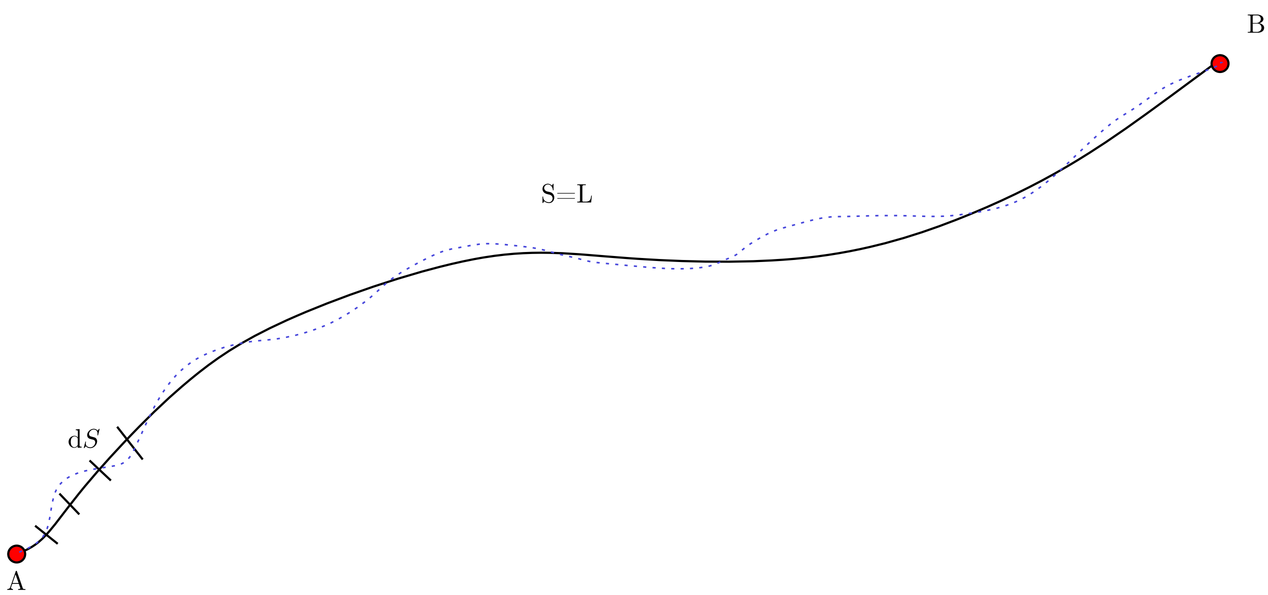

Figure 1 – Géodésique 2

$$S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}\lambda L(x, \dot{x}) = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \underbrace{\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i x^j}}_{|\mathbf{u}|} = \int_A^B \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^j} = \int_A^B \mathrm{d}s$$

$$x^i(\lambda) \to x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

$$\delta S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \frac{1}{2L}\delta(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \left\{ \frac{1}{2}\partial_k g_i j \dot{x}^i j \delta x^k + \dot{g}_{ij}\dot{x}^i \delta\dot{x}^i \right\}$$

$$g_{ij}\dot{x}^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} x^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_i j \dot{x}^i \delta x^j\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{ik}\dot{x}^k\right)\delta x^l$$

$$\ldots$$

$$0 = \frac{1}{2}\partial_k g_{ij} u^i u^j - \left(\frac{1}{2}\partial_j g_{ik} + \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\right) u^j u^i - g_{ki}\dot{u}^j$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}\right)}_{-\Gamma_{kij}} u^i u^j - g_{kj}\dot{u}^i = 0$$

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} u^i u^j + \dot{u}^k = 0}$$

Vaisseau en accélération constante

$\boxed{\text{A}}$ $v(t), x(t)$ avec t le temps terrestre

4-accélération

$$a^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{(1-v^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-\mathbf{v}^2} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{(1-v^2)^2}\right)$$

$$a_i a^i = -\gamma^4\left(\mathbf{a}^2 + \gamma^2\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-v^2)^{3/2}}\left(-2\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{(1-v^2)^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)$$

$$= -\gamma^6 a^2$$

$$\gamma^3 a = g$$

$$\frac{1}{\left(1-v^2\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$$

$$g\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\,v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

Rapidité :

$$\gamma = \cosh\eta$$

$$v\gamma = \sinh\eta$$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\cosh^2\eta}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\gamma^2}\mathrm{d}\eta$$

$$\int g\mathrm{d}t = \int \gamma\mathrm{d} = \int \cosh\eta\mathrm{d}\eta$$

$$gt + \cancel{cst} = \sinh\eta$$

$$v(t) = \tanh\eta = \cdots = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}$$

Comment restaurer les *vrai unités* ?

$$\frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$$

$$\boxed{gt = \sinh\eta \implies g\mathrm{d}t = \cosh\eta\mathrm{d}\eta}$$

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{g}\int \tanh\eta\cosh\eta\mathrm{d}\eta = \frac{1}{g}\int \sinh\eta = \frac{1}{g}\cosh\eta + \cancelto{0}{cst} = \frac{1}{g}(\cosh\eta - 1)$$

$\boxed{\text{B}}$

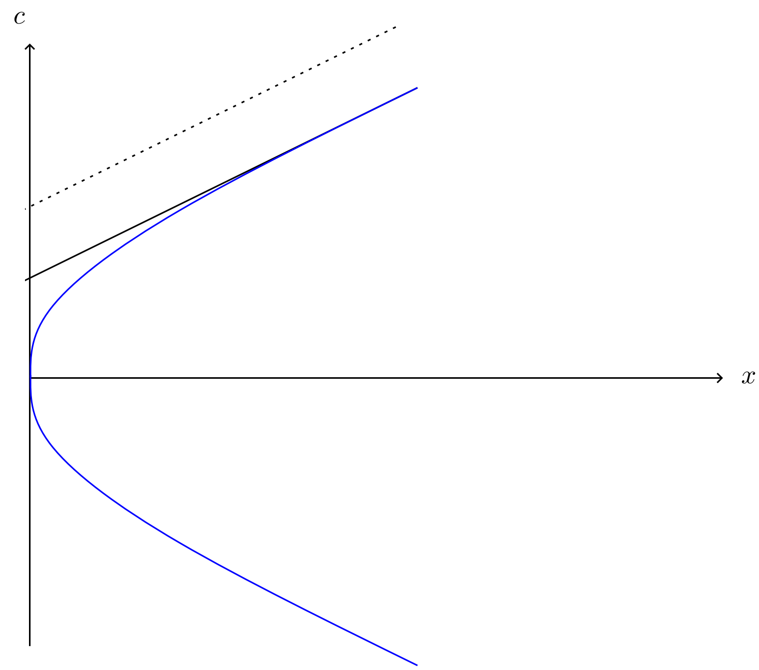

FIGURE 2 – Milles mots

$\boxed{\text{C}}$

2022-09-14

Courbure

Tenseur de Riemann R^i_{jkl}

$$R^l_{kji} = \partial_i \Gamma^l_{ki} - \partial^l_{i\Gamma_{kj}} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi}$$

(1) Non commutativité des dérivées covarientes

$$\partial_i \partial_i Y = \partial_j \partial_i Y$$
$$\nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_j \nabla_i A_k = R^l_{kji} A_l$$

(2) holonomie

$$\Delta A^i = R^i_{kjl} A^k \mathrm{d}x^l \mathrm{d}x'^j$$

(voir figure 1)

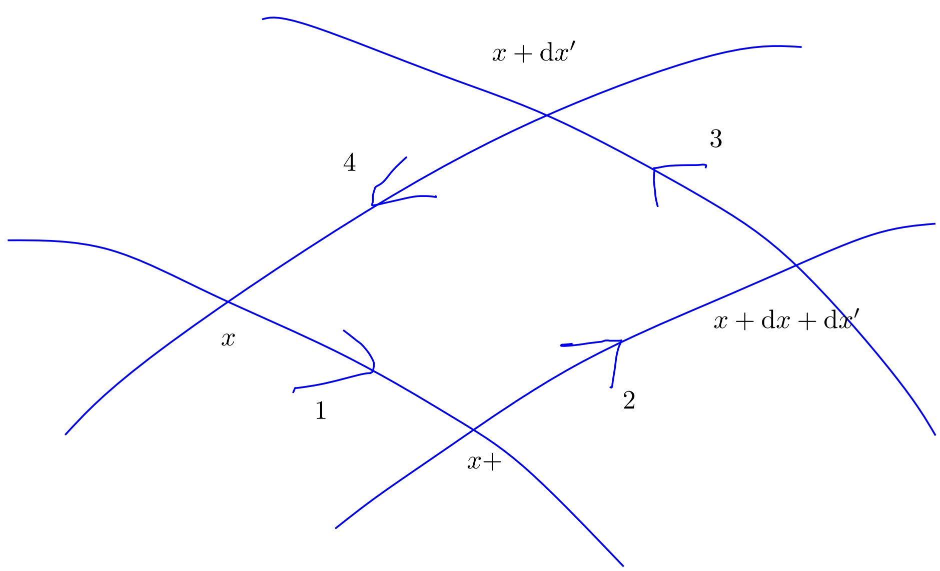

Figure 1 – holonomie

(3) déviation géodésique

dérivé intrinsèque

$$\mathbf{A}() = A^i(lambda)\mathbf{e}_i(\lambda)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i + A^i\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}\lambda} = \dot{A}^i\mathbf{e}_i + A^i\partial_j\mathbf{e}_i\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\dot{A}^k + \Gamma)ji^k A^i\dot{x}^j\right)\mathbf{e}_k$$

$$\nabla_k A^k = \dot{A}^k + \Gamma^k_{ji}A^i\dot{x}^j$$

$$\boxed{\nabla^2_{lamda}\xi^i = R^i_{jkm}\xi^m\dot{x}^j\dot{x}^k}$$

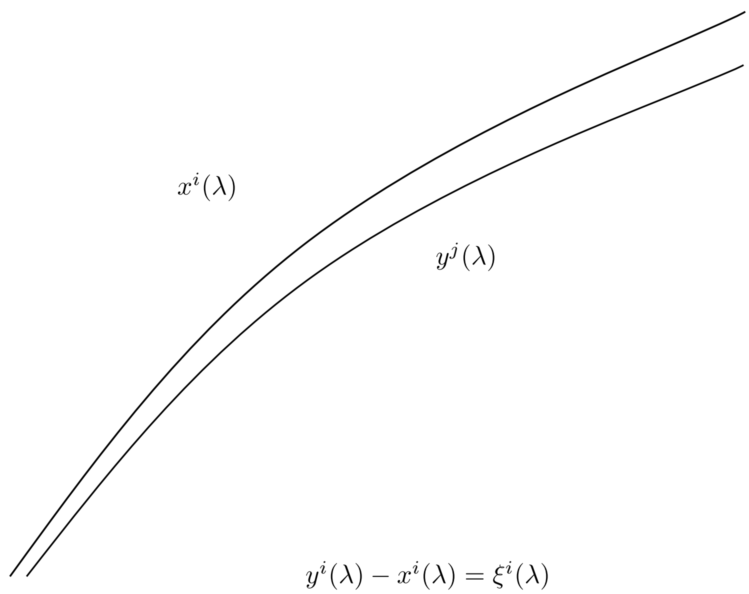

Figure 2 – déviation géodésique

<u>Tenseur de Rixxi</u>

$$R_{ik} = R^j_{ijk}$$

<u>Tenseur scalaire</u>

$$R = r^i_i = g^{ik}R_{ik}$$

$$\nabla_j A_k = \partial_j A_k - \Gamma^m_{jk}A_m$$

$$\nabla_i \nabla_j A_k = \nabla_i \left[\partial_j A_k - \Gamma^m_{jk} A_m\right] = \partial_i \partial_j A_k - \partial_j \left(\Gamma^m_{jk} A_m\right) - \Gamma^l_{ij} \left(\partial_l A_k - \Gamma^m_{lk} A_m\right) - \Gamma^l_{ik} \left({}_i A_l - \Gamma^m_{jl} A_m\right)$$

$$= \partial_i \partial_j A_k - \Gamma^m_{jk} \partial_i A_m - \partial_i \Gamma^m_{jk} A_m - \Gamma^l_{ij} \partial_l A_k - \Gamma^l_{ij} \partial_j A_l + \Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} A_m + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{jl} A_m$$

$${}_j \nabla_i A_k = \cdots (j \leftrightarrow i)$$

$$\left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\right) A_k = \left(-\partial_i \Gamma^m_{jk} + \partial_j \Gamma^m_{ik}\right) A_m + \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^m_{il}\right) A_m$$

$$= (\partial_i \Gamma^l_{ki} - \partial^l_{i\Gamma_k j} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi}) A_l$$

<u>Propriétés</u>

A)

$$R_{lkji} = \frac{1}{2} \left({}_i \partial_j g_{ki} + del_k \partial_j g_{li} - \partial_l \partial_j g_{ki} - \partial_k \partial_i g_{lj}\right) + g^{mn} \left(\Gamma_{mil} \Gamma_{nkj} - \Gamma_{mjl} \Gamma_{nki}\right)$$

$$R_{lkji} = R_{klji}$$
$$R_{lkji} = R_{lkij}$$
$$R_{lkji} = R_{jilk}$$
$$R_{lkji} + R_{ljik} + R_{likj} = 0$$

En d dimensions il y a $\frac{1}{12} d^2(d^2-1)$ (20 pour $d=4$)

B) Indentité de Bianchi

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$$

Exemple 1 : sphère de rayon a

$$\mathrm{d}s = a^2 \mathrm{d}\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2$$

$$[g_{ij}] = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$[g^{ij}] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$$

$$R_{1212} = a^2 \sin\theta$$

$$R_{22} = \sin\theta$$

$$R_{11} = 1$$

$$R = g^{ij} R_{ij} = \frac{2}{a^2}$$

Exemple 2 : le cylindre de rayon a

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}z^2 + a^2 \mathrm{d}\varphi^2$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Le cylindre est plat !

Exemple 3 : le cône

Le cône est plat **sauf** à l'apex, qui possède un courbure infini

Exemple 4 : tore plongé dans $\mathbb{R}^3$

$$\ldots$$

2022-09-16

Exemple : Hyperboloïde de révolution

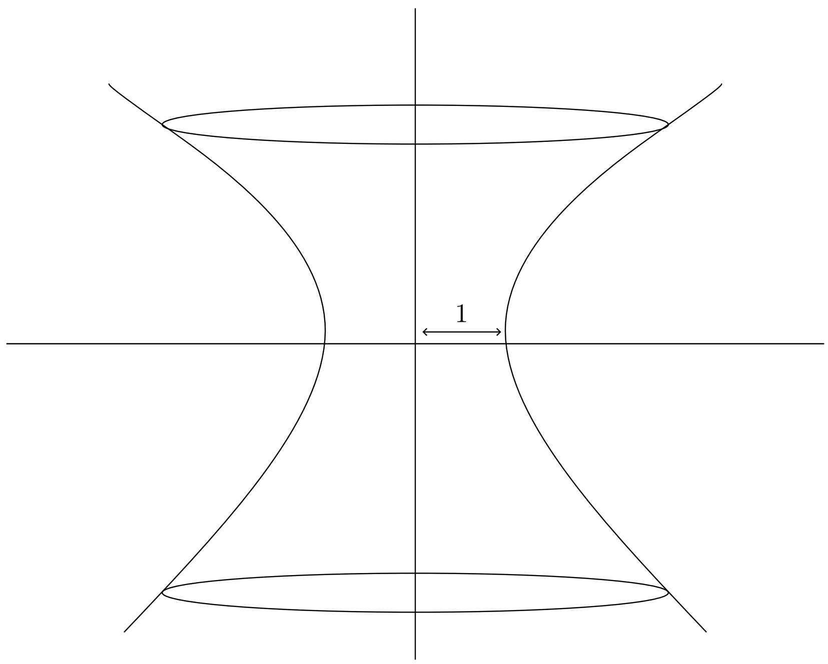

Figure 1 – Hyperboloïde de révolution

$$r^2 - z^2 = 1$$

$$2r\mathrm{d}r - 2z - 2z\mathrm{d}z = 0 \ \& \ z = \sqrt{r^2 - 1}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 = \left(1 + \frac{r^2}{r^2 - 1}\right)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi$$

$$\implies [g_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2r^2-1}{r^2-1} & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{r}{\left(r^2 - 1\right)\left(2r^2 - 1\right)}$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{r\left(r^2 - 1\right)}{2r^2 - 1}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{r}$$

$$R_{1212} = \frac{-r^2}{(r^2-1)(2r^2-1)}$$

$$R = \frac{-2}{\left(2r^2-1\right)^2}$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2}\partial_i g_{jk} u^i u^k$$

$$i = 2 \implies \quad \dot{u}_\varphi = 0 \implies u_{\varphi = cst} = r^2\dot{\varphi} = h$$

Coordonnées hyperboliques

$$r = \cosh\theta \quad z = \sinh\theta \quad \theta \in [-\infty, \infty]$$

$$r^2 - z^2 = 1$$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\cosh^2\theta + \sinh^2\theta\right)\mathrm{d}\theta^2 + \cosh^2\theta \mathrm{d}\varphi = \cosh 2\theta \mathrm{d}\theta^2 + \cosh^2\theta \mathrm{d}\varphi^2$$

$$\Gamma^1_{11} = -2\Gamma^1_{22} = \tanh 2\theta$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \tanh\theta$$

$$R_{1212} = -\frac{\cosh^2\theta}{\cosh^2 2\theta}$$

$$R = -\frac{2}{\cosh 2\theta}$$

Sphère

$$x^1 = \theta = \mathrm{cst} \quad x^2 = \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\nabla_{lambda} A^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} A^i + \Gamma^i_{jk} A^k i^j$$

$$\nabla_\varphi A^i = \frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}\varphi} + \Gamma^i_{k\varphi} A^k = 0$$

$$\begin{cases} \nabla_\varphi A^\varphi = \frac{\mathrm{d}A^\varphi \varphi}{\mathrm{d}+} \Gamma^2_{12} A^\theta = 0 \\ {}_\varphi A^\theta = \frac{\mathrm{d}A^\theta}{\mathrm{d}\varphi} + \Gamma^1_{22} A^\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A^\varphi}{\mathrm{d}\varphi} + A^\theta \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}A^\theta}{\mathrm{d}\varphi} - A^\varphi \sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 A^\varphi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \cos^2 A^\varphi = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2 A^\theta}{\mathrm{d}\varphi^2} + \cos\theta A^\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^\varphi(\varphi) = \frac{1}{\sin\theta}\cos(\varphi|\cos\theta|) \\ A^\theta(\varphi) = \mathrm{sign}(\cos\theta)\sin(\varphi|\cos\theta|) \end{cases}$$

$$A^\varphi(\varphi) = \frac{1}{\epsilon}\cos\varphi$$

$$A^\theta(\varphi) = \sin\theta$$

Coordonées polaires planes

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\varphi^2$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2}\partial_i g_{kj} i^k u^j$$

$$u^r = u_r = \dot{r}$$
$$i = 1 \implies \dot{u}_r = r\dot{\varphi}^2 = \ddot{r}$$

$$i = 2 \implies \dot{u}_\varphi = 0 \implies u_\varphi = \mathrm{cst}$$
$$U_\varphi = g_{\varphi\varphi} u^\varphi = r^2 \dot{\varphi} = h$$

:

$$\implies |\mathbf{u}|^2 = 1 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + fracr^2h^2r^4$$

2022-09-21

3 Principes fondamentaux de la relativité générale

3.1 Théorie newtonienne de la gravitation

Newton ne cherche pas à expliquer le mécanisme de la gravité : il donne simplement une formule.

Le concept de champ gravitationnel nait naturellement de le relativité restraint car la force ne peut pas être instantanée. On a besoin d'un champ pour *contenir* la quantité de mouvement et l'énergie pendant un certain temps.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{r})}_{\text{champ gravitationnel}}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \underbrace{\rho(\mathbf{r})}_{\text{densité de masse}}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

$$\Phi = 4\pi G\rho$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Unitées

$$E = [\mathrm{G}]\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{L}}$$

$$E = \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2}\mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{c=1}} \mathrm{M}$$

$$c = 1 \rightarrow \mathrm{L} = \mathrm{T}$$

On distingue les masses *inertiel* et *gravitationnel*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m_{\text{grav}}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = m_{\text{inert}}\mathbf{a}$$

Si $m_{\text{grav}} = m_{\text{inert}} \therefore \mathbf{a} = \mathbf{g}$

Ce qui nous interesse est réellement le rapport $m_{\text{inert}}/m_{\text{grav}}$

L'expérience de Potvis vise a vérifier si cette masse est identique pour toutes substance.

Il utilise la force centrifuge, qui est une force inertiel pour comparer les rapport de masse. Il a été démontré que les deux sont pareils jusqu'à 10^{-9}

Récemment, un sonde français a démontré que c'est la même chose jusqu'à 10^{-15}.

Cette égalité est le **principe d'équivalence faible**

Il suggère qu'un force inertiel est in différentiable d'une force gravitationnelle qui est le **principe d'équivalence faible**

coordonnées de Rindler

$$x = \xi \cosh\theta \qquad t = \xi \sinh\theta$$

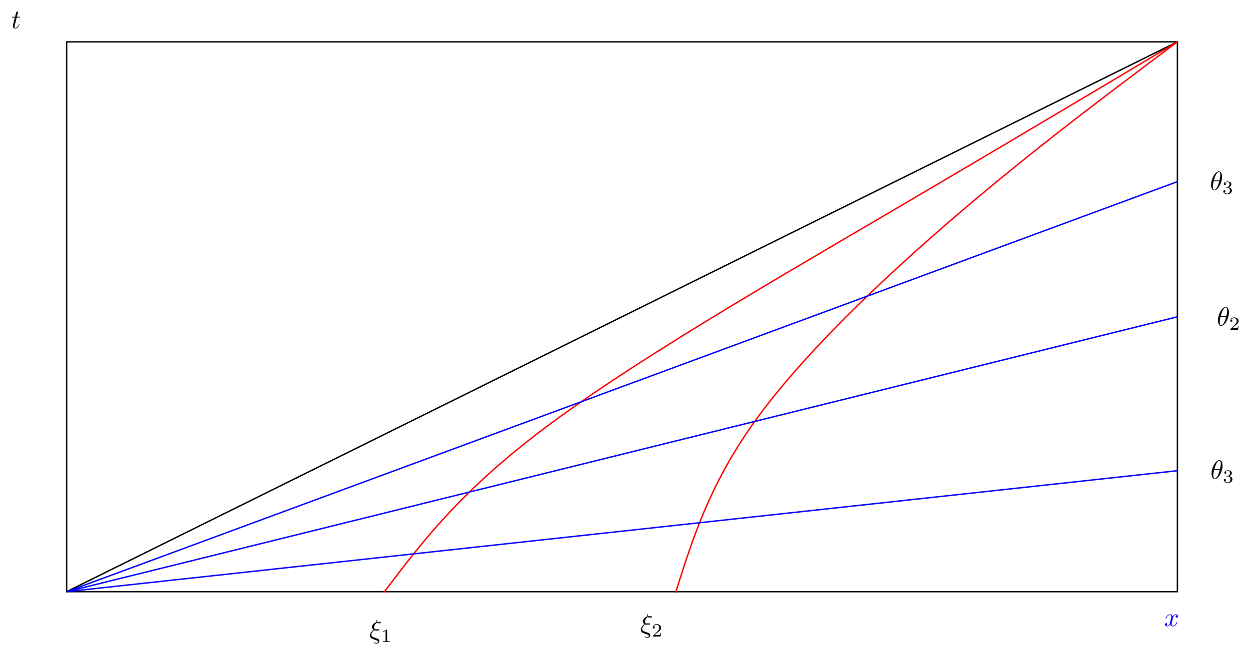

FIGURE 1 – Coordonnées de Rindler

Observateur à $\xi = \text{cst}$

$$u^i = \xi\dot{\theta}\left(\cosh\theta, \sinh\theta\right)$$

$$u^i u_i = 1 = \xi^2\dot{\theta}^2 \underbrace{\left(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta\right)}_{1}$$

$$\implies 1 = \xi\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \mathrm{cst}$$
$$\theta = \xi\tau$$

$$a^i = \dot{\theta}\,(\sinh\theta, \cosh\theta)$$

$$a^i a_i = \frac{1}{\xi^2}\left(\sinh^2 - \cosh^2\right) = -\frac{1}{\xi^2}$$

accélération propre $\frac{1}{\xi}$

> Les coordonnées ne sont pas nécessaire en relativité générales et les problèmes peuvent être formulées comme des observateurs s'échangeant des signaux lumineux.

Tétrade

On peut toujours définir un base locale respectant le produit scalaire de Minkowski. qui différent de celle imposé par *le* système de coordonnées.

Coordonnées localement cartésiennes

On définit

$$x'^p = \left(x^i - x^i_p\right) + \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(p)(x^i - x^j_p)\left(x^k - x^k_p\right)$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta^j_i + \Gamma^i_{jk}(p)\left(x^k - k^k_p\right)$$

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^i \partial x^k} = \Gamma^i_{jk}(P)$$

$$\Gamma'_{jk}{}^i(p) = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} o \frac{\mathrm{d}x'^m}{\mathrm{d}x^i}\frac{\partial x'^n}{\partial x^j}\Gamma^l_{mn}(P) - \frac{\partial x',}{\partial x^i}\frac{\partial x'^n}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^m \partial x^n}$$

$$= \cdots = 0$$

L'équation de la géodésique au point P est donc simplement donnée par $\ddot{x}^i = 0$

2022-33-28

$$S_m = -\sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \sqrt{g_{ij}(x_\alpha)\dot{x}_\alpha^i \dot{x}_\alpha^j}$$

$$S_g = \kappa \int \underbrace{\mathrm{d}\Omega \sqrt{|g|}}_{\text{invarien de Lorentz}} R$$

$$S = S_m + S_g$$

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} = 0o$$

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \frac{1}{\cancelto{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}_\alpha^i \dot{x}_\alpha^j}}} \dot{x}_\alpha^k \dot{x}_\alpha^l \delta g_{ki}(x_\alpha)$$

On définit le <u>tenseur énergie-impulsion</u>

$$T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \dot{x}_\alpha^i \dot{x}_\alpha^j \delta^2(x - x_\alpha(\tau_\alpha))$$

Limite non-relativiste : les particules ne vont pas très vite et toutes les particules ont approximativement le même temps qu'on prend être le temps coordonnée.

$$T^{ij}_{\text{classique}} = \delta^i_0 \delta^j_0 \frac{1}{|g|} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t))}_{\text{densité de masse } (\rho(\mathbf{r}))}$$

$$\delta\sqrt{|g|} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{|g|} g^{ij} \delta g_i j$$

$$\ln \det M = \operatorname{tr} \ln M$$

$$\operatorname{tr} \ln g = \operatorname{tr} \delta(\ln g) \cdots$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$\delta R$$

2022-32-28

$$R = g_{ij} R_{ij}$$

$$\delta R = \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}$$

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = \partial \cdots$$

$$\delta R_{ij} = \partial_l \delta \Gamma^l_{ji} - \partial_i \delta \Gamma^k_{jl} \quad \text{(Référentiel en chute libre en un points)}$$

$$\delta R_{ij} = \nabla \delta \Gamma^l_{ji} - \nabla_i \delta \Gamma^l_{jl}$$

On note la partie spatiale des coordonnées $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3,)$

2022-36-05

Métrique de Schwarzschild

Solution des équation de Einstein à symétrie sphérique. Solution découverte par Schwarzschild un peu avant sa mort.

$$\mathrm{d}\tau = A(r)\mathrm{d}t^2 B(r)\mathrm{d}r^2 - r^2\left({}^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}\theta^2\right) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}t^2\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

Cette métrique présente une singularité à $r = r_s$. Cependant c'est une artéfact du système de coordonné et non un singularité *physique*. On peut s'en rendre compte en étudiant des valeurs qui ne dépende pas des coordonnés comme le tenseur de Riemann. En faisant cela, on se rend compte qu'il y a un *vraie* singularité en $r = 0$

$$R^{ijkl}R_{ijkl} = 12\frac{r_s^2}{r^6} \quad \text{singularité géométrique!}$$

> On note la partie spatiale des coordonnées $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$

On peut alors noter la métrique de manière générale (avec des fonction arbitraire de toute les quantité qui sont invariantes par rotation)

$$\mathrm{d}\tau^2 = A(r,t)\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\mathrm{d}t(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}) - C(r,t)(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})^2 - D(r,t)\mathrm{d}\mathbf{r}^2$$

On peut faire le changement de variable :

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3 = r\sin\theta \end{cases}$$

Notre métrique est alors

$$\mathrm{d}\tau^2 = A\mathrm{d}t^2 - Vr\cdots - D\left(\sin^{2\theta}\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

On peut alors toujours faire un changement de coordonné ou $\sqrt{D} = r$. On trouve alors

$$\mathrm{d}\tau^2 = A\mathrm{d}t^2 + B\mathrm{d}t\mathrm{d}r - C\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\mathrm{d}\theta^2\right)$$

Si on impose également un symétrie d'inversion du temps (qui exclus les rotation), B doit être nul car ce terme n'as pas cette symétrie. Ce n'est pas nécessaire de requérir cette symétrie. Plutôt, on peut posser

$$\mathrm{d}\bar{t}^2 = \left[A\mathrm{d}t - \frac{1}{2}B\mathrm{d}r\right]$$

Cela permet de se débarrasser de ce B

On a donc

$$\mathrm{d}\tau^2 = A(r,t)\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2 \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} A(r) & & & \\ & -B(r) & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{ij} = 0$$

$$\begin{cases} R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rB} \\ R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB} \\ R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \\ R_{33} = R_{32}\sin\theta \end{cases}$$

$$R_{00} + \frac{A}{B}R_{11} = 0$$

$$\frac{A'}{rB} + \frac{B'A}{rB^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(A'B + B'A\right) = 0$$

$$\implies (AB)' = 0 \implies AB = \mathrm{CST} = \alpha$$

$$\ldots$$

$$\boxed{\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2}$$

Loi de conservation

$$\boxed{\dot{u}_i = \frac{1}{2}\partial_i g_{mk} u^m u^k}$$

$$\dot{u}_0 = 0 \quad u_0 = \mathrm{cst} = k = g_{00}\dot{u}^0 = g_{00}\dot{t} = \underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = k}}_{\substack{\text{conservation de l'énergie} \\ \text{cinétique par unité de masse}}}$$

$$\dot{u}_3 = \text{cst} \implies u_3 = g_{33}u^3 = -r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = -h$$

$$\underbrace{\boxed{r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = h}}_{\text{moment cinétique par masse}}$$

2022-31-06

On fait un changement de géométrie

$$g_{ij} \to \alpha g_i j$$

Comment les autres quantité se transforment elles ?

$$\begin{gathered} g^{ij} = \alpha^{-1} g_{ij} \\ \Gamma^i_{jk} \to \Gamma^i_{jk} \\ R^i_{jkl} \to R^i_{jkl} \\ R_{ik} \to R_{ik} \\ R \to \alpha^{-1} R \end{gathered}$$

Si on fait plutôt un changement de coordonnées

$$x^i \to \sqrt{\alpha} x^i$$

On obtiens

$$\begin{gathered} g^{ij} \to \alpha^{-1} g^{ij} \\ \Gamma^i_{jk} \to \alpha^{\frac{1}{2}} \Gamma^i_{jk} \\ R^i_{jkl} \to \alpha R^i_{jkl} \\ R_{ik} \to \alpha R_{ik} \\ R \to R \end{gathered}$$

Si on fait le changement de coordonnées

isométrie (même métrique)$\begin{cases} x \to x'(x) \\ g'_{ij}(x) = g_{ij}(x) \end{cases}$

transformation infinitésimale

$$x'^i(x) = x^i + \epsilon \xi^i(x)$$

sous cette transfromation là, on a un isométrie ssi

$$g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{jk} \partial_i \xi^k + \xi^k \partial_k g_{ij} = 0$$

$$\nabla \xi_k + \nabla_{ji} = 0$$

$$\nabla_i \xi_j = \partial_i \xi_j - \Gamma_{jk}{}^k \xi_k$$

2022-32-07

Métrique de Schwarzschild

Équation géodésique

$$\rightarrow \dot{u}_i = \frac{1}{2}\partial_i g_{mk} u^m u^k$$
$$u_t = \text{cst} = k$$
$$u_\varphi = \text{cst} = -h$$

---

1 Coordonnées de Kottler-Møller

$$\begin{cases} t = \left(x' + \frac{1}{\alpha}\right)\sinh \alpha t \\ x = \left(x' + \frac{1}{\alpha}\right)\cosh \alpha t' - \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

A

$$g'_{ij} = \begin{bmatrix} (1+\alpha x')^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}t - \mathrm{d}x' \sinh \alpha t' + (\alpha x' + 1)\cosh \alpha t' \mathrm{d}t'$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x' \cosh \alpha t' + (\alpha x' + 1)\sinh \alpha t' \mathrm{d}t'$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = \cdots$$

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right] = \begin{bmatrix} (\alpha x' + 1)\cosh \alpha t' & \sinh \alpha t' \\ (\alpha x' + 1)\sinh \alpha t' & \cosh \alpha t' \end{bmatrix}$$

B

$$\mathrm{d}\tau = (1 + \alpha x')\,\mathrm{d}t'$$

$$[u^i] = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}\right)\Bigg|_{x'=\text{cst}}$$

$$= \frac{1}{1+\alpha x'}\left((1+\alpha x')\cosh \alpha t',\, (1+\alpha x')\sinh \alpha t'\right) = (\cosh \alpha t', \sinh \alpha t')$$

$$[a^i] = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\cosh\alpha t',\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\sinh\alpha t'\right) = \frac{\alpha}{1+\alpha x'}\left(\sinh\alpha t', \cosh\alpha t'\right)$$

raccouris je crois

$$a^i = e/f??$$

si

v=0→ $a^i = (0,\, \vec{a}) a_i a^i = -\vec{a}^2 s$