2024-01-22

Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire $\varphi : V \to U$ (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_2(g)$$

φ est appelée une application équivariante

Lemme de Shur

1. Si ρ_1, ρ_2 sont irréductible φ morphisme $\implies$ $\varphi = 0$ ou isomorphe
2. Si $V = U$ alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ? ? ? de S_3 (à iso près) sont $\rho_?, \rho_? \quad$ et $\quad \rho_?$

Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$$

χ_ρ est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d $\forall h \in Ga$, $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans S_n permutation de n éléments la conjugasion correspond à un "changement d'étiquette"

La tables des caractères d'un groupe fini G est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les calsses de conjugaison dans G. Les entrées sont $\chi_\rho(g)$

Exemple : S_3

	1 e	3 (12)	2 (123)
$\chi_?$	1	1	1
$\chi_?$	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\mathrm{std}}}$	2	0	-1

Table 1 – tables des caractères de S_3

Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme $|G|$

Exemple : $\mathbb{Z}_4$

	1 0	1 1	1 2	1 3
$\chi_?$	1	1	1	1
$\chi_?$	1	i	-1	-i
$\chi_?$	1	-1	i	-1
$\chi_?$	1	-i	-1	i

Table 2 – Table des caractères de $\mathbb{Z}_4$

Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

V un (k)espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V < toV$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (u \cdot \mathbf{v})$
2. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu) = \lambda v + \mu v$

Soit U, V deux k-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom(U,\ V) := \{L : U \to V | Lapplication\ linéaire\}}$$

est un k-espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_{2)}(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\mathrm{dim(Hom(u, v)) = dim(u)dim(v)}$$

Le produit Tensoriel de U et V est un k-espace vectoriel $U \otimes V$ muni d'une application bilinéaire

$U \times V \to U \otimes V$

$(u, v) \mapsto u \otimes v$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour tout application bilinéaire $b : U \times V \to W$

Je vois pas ...

En pratique : Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de U, $f_1, \cdots, f_m$ est une base de V alors $\{e_i \otimes f_g\}$ est une base de $U \times V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = \cdots ace_1 \otimes f_1 + \cdots$$

Exemple : produit scalaire standard dans $\mathbb{C}^2$ est bilinéaire $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc)$

Quelle est $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc$

Attention

Il est des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ qui n'écrivent pas comme des états factorisables