2024-02-29

$$\mathrm{sl}(3,\mathbb{C}) = h \oplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$$

$$h = \{\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} | a+b+c=0\}$$

où $\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, \forall H \in h$

$$\mathrm{ad}(H)X = [H,X] = \alpha(H)X$$

<u>exemple</u> :

$$X = E_{1,2}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & v \end{pmatrix}, E_{1,2}\right](a-b)E_{1,2}$$

$$X \in g_\alpha \quad \text{où} \quad \alpha\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = a-b$$

On définit $L_i\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = i$

$$L_1, L_2, L_3 \in h^*$$

$$\alpha = L_1 - L_2$$

les α dans la décomposition $(*)$ s'apellent des <u>racines</u> de

$$\mathrm{sl}(3\mathbb{C})$$

La liste des racines et

$$L_1 - L_2, L_1 - L_3, \cdots$$

> dans $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, une racine est un nombre complex car $\dim(h) = 1$. Les racines de
>
> $$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$$
>
> sont -2 et 2

Les vecteur propres associé à une racine s'apellent des vecteurs de racine

$$E_{i,j},\ i \neq j$$

est un vecteur de racine pour $L_i - L_j$

Supposons que $X \in g_\alpha$ et $Y \in g_\beta$ et $H \in h$

$$[H,[X,Y]] = [X,[H,Y]] + [Y,[X,H]] = [X,\beta(H)Y] - [Y,\alpha(H)X] = \beta(H)[X,Y] - \alpha(H)[Y,X] = (\alpha+\beta)(H)[X,Y]$$

Si X vecteur de racine α, Y vecteur de racine β alors $[X,Y]$ vecteur de racine $\alpha+\beta$

ad(X) agit *par translation* de la racine de Y

$$[,] : g_\alpha \times g_\beta \to g_{\alpha+\beta}$$

Revenons 'a une représentation irréductible V de sl$(3\mathbb{C})$

$$\rho : \mathrm{sl}(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(V)$$

On décompose $V = \oplus_\alpha V_\alpha$ où $\alpha \in h^*$ et $v \in V_\alpha$, $H \in h$

$$\implies H_v = \alpha(H)v$$

Les valeurs propres α s'apellent les racines de la représentation. Les vecteur prorpres sont des <u>vecteur de poids</u>

Une racine est donc un poids pour la représentation ad

soit $X \in g_\alpha$ et $v \in V_\beta$

$$H \cdot (Xv) = [H,X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) = \alpha(H)Xv + C(\beta(H)v) = (\alpha+\beta)(H)(Xv)$$

$X \in g_\alpha$ agit par translation de α sur le poids β de V

<u>Conséquence :</u> Pour V irréductible, tout les poids diffèrent d'une combination entière de racine de $L_i - L_j$

Le réseau Λ_R engendré par les racines est appelé réseaux des racines.

<u>Exemple</u> : $V \in \mathbb{C}^3$ et $\rho : \mathrm{sl}(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(\mathbb{C}^3)$ l'inclusion e_1, e_2, e_3 does des vecteurs propres de poids pour les poids l_1, L_2, L_3

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_1(\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet, $L_2, = L = 1 + (L_2 - L_1)$

$$L_3 = L_1 + (L_3 - L_1)$$

Exemple 2 :

$\Lambda^2(\mathbb{C}^3) = \langle e_1 \wedge e_{2,} e_1, \wedge e_2, e_2 \wedge e_3 \rangle$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} (e_1 \wedge e_2) = a e_1 \wedge e_2 + b e_1 \wedge e_2 = \cdots = -L_3 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

Pour imiter ce qu'on a fait dans $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ on cherche un poids *maximal*. On définit la maximalité. On fixe

$$H_0 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \in h$$

et on considère l'ordre partiel sur h^*

$$\alpha < \beta \iff \mathrm{Re}(\beta(H_0) - \alpha(H_0)) > 0$$

En choisissant $a > b > c$, les racines $L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3$ sont positives alors que les trois autres sont négatives

Lemme : Pour V une représentation irréductible de $\mathrm{sl}(3\mathbb{C})$, il existe un vecteur de poids$v \in V_\alpha$, $v \neq 0$ t.q. $E_{1,2}(v) = 0, E_{1,3}(v) = 0, E_{2,3}(v) = 0$

Démonstration : Soit α maximal parmis les poids t.q. $V_\alpha \neq \{0\}$ par l'ordre $< \alpha$ existe car V est de dimension finie. Soit $v \in V_\alpha$. Alors, $E_{1,2} \cdot V \in V_{\alpha + L_1 - L_2}$

Si $E_{1,2} v \neq 0$ alors $\alpha + L_1 + L_2 > \alpha$ et $v_\alpha \neq 0$ contredit la maximalité

De même $E_{1,3} v = 0, \quad E_{2,3} v = 0$

ON appelle v un vecteur de plus haut poids ou vecteur maximal

Proposition : V est engendré par v et toutes les images de v par toutes les combination possibles de $E_{2,1}$, $E_{3,2}$, $E_{3,1}$

Démonstration : Soit W le sous-espace engendré par V et toutes ses images par des combinaisons de E_{21}, $E_{3,2}$, $E_{3,1}$

Il suffit de montrer que W est stable par $\mathrm{sl}(3\mathbb{C})$

1. W est stable par h (W est engendré par des espaces de poids)
2. W est stable par $E_{2,1}$, $E_{3,2}$, $E_{3,1}$ par définition
3. Il reste à montrer que W est stable par $E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{3,2}$. Il suffit de le montrer pour $E_{1,2}$ et $E_{2,3}$ car $E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$

À suivre...