ONdes guidées

On a un tube infini de métal parfait

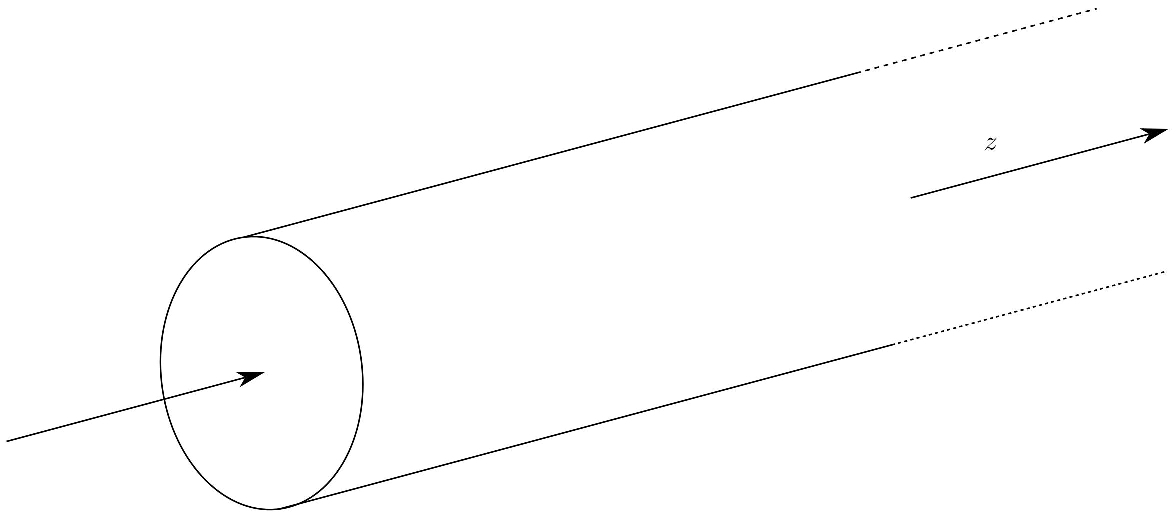

Figure 1 – Onde dans un CEP cynlindrique

On cherche une solution de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(x,y,z) = \mathbf{B}_0(x,y)e^{(kz-\omega t)} \end{cases}$$

l'onde ne peut pas être TEM

$E_z = B_z = 0$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y} = 0$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = i\omega B_z = 0$$

$$\implies dvE_yx = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}y} = 0$$

C'est donc identique à un problème d'éléctrostatiqueo

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse. On peut avoir des ondes

$$\begin{cases} TE & E_z = 0 \\ TM & B_z = 0 \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse dans un conducteur seul, il en faut au moins deux

<u>Cas d'une onde TE ($E_z = 0$)</u>

$$\nabla^2 B_z = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ à l'interieur}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}y^2} - k^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0$$

On cherche une solution sous la forme $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$ pour le cas d'un guide d'onde rectangulaire

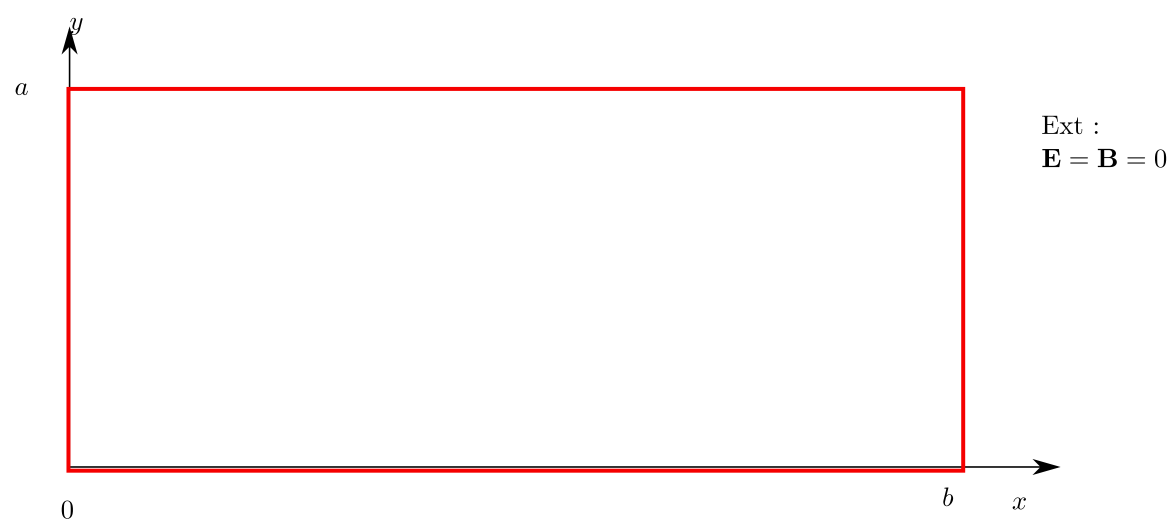

Figure 2 – guide d'onde rectangulaire

$$X"Y + XY" + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) XY = 0$$

$$\frac{X"}{X} + \frac{Y"}{Y} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0$$

$$\frac{X"}{X} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) - \frac{Y"}{Y} = -k_z^2 \text{ On le pose}$$

$$X = \alpha \sin k_z x + \beta \cos k_z x$$

de mmême

$$\frac{Y"}{Y} = -k_z^2$$

avec $-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

Conditions aux limites $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = 0$ à l'extérieur du cylindre

On a aussi que $E_\parallel$ et $B_\perp$ sont continus

Donc, en $y \in \{0, b\}$ $E_x = B_x = 0$ et en $X \in \{0, a\}$ $E_y = B_x = 0$

Il nous reste à relier $E_x, E_y B_x B_y$ à E_z, B_z

On veut donc se servir des autre équations de Maxwell. En particulier on veut se servir du rotationel car il mélange les composantes

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = i\omega \mathbf{B}$$

$$\implies i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ikE_y \\ ikE_x \\ \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_y, \quad B_y = \frac{k}{\omega} E_x$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} dv\mathbf{E}t = -\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\implies -\frac{i\omega}{c^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} - ikB_y \\ ikB_x - \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} = ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x = \left(-\frac{i\omega}{c^2}\right) \frac{\omega}{k} B_y$$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} = B_y \left[-i\frac{\omega^2}{kc^2} + ik\right] = ikB_y \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right]$$

$$-\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} + ikb_x - i\frac{omega^2}{kc^2}B_x = ikB_x\left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right]$$

$$B_y(x,0) = 0\forall x$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y} = 0 \qquad B_z = X(x)Y(y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$X(x)Y'(0) = 0\forall x \implies Y'(0) = 0$$

de même $B_z(x,b) = 0 \implies Y'(b) = 0$