Épisode 4

Jean-Baptiste Bertrand

25 janvier 2022

Compostition du moment cinétique

Exemple simple : composition de spins $\frac{1}{2}$

$$\text{E.C.O.C} : \mathbf{S}_1^2 \; \mathbf{S}_2^2 \; S_{1z} \; S_{2z}$$

$$\left|\frac{1}{2}, \epsilon_1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2}, \epsilon_2\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \epsilon_1, \epsilon_2\right\rangle \rightarrow |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle \quad \text{Car les spins sont toujours 1/2 dans notre cas}$$

$$\mathbf{S}_1^2 \, |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\hbar^2 \, |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$$
$$\mathbf{S}_{1z} \, |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \frac{\epsilon}{2}\hbar \, |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$$

$$\text{nouvel E.C.O.C} : \mathbf{S}_1^2 \, , \mathbf{S}_2^2 \, , \mathbf{S}^2 \, , S_z$$

On peut vérifier qu'il commutent tous entre eux mais on le feras pas.

On peut également vérifier la complétion. On va le vérifier plus tard.

Cela induit nécessairement une nouvelle base

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, S, M\right\rangle \rightarrow |S, M\rangle$$

$$|S, M\rangle = \not{\mathbb{1}} \, |S, M\rangle$$
$$|SM\rangle = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle\langle\epsilon_1, \epsilon_2| \, |S, M\rangle$$

Les coefficient de cette expression sont appelées Clebsch-Gordan

$$\mathbf{S}^2 |S,M\rangle = S(S+1)\hbar^2 |S,M\rangle$$
$$S_z |S,M\rangle = M\hbar |SM\rangle$$

$$\boxed{S \geq M \geq -S}$$

$$\text{Contrainte } S_z |\epsilon_1,\epsilon_2\rangle = (S_{1z}+S_{2z}) |\epsilon_1,\epsilon_2\rangle = \underbrace{\left(\frac{\epsilon_1}{2}+\frac{\epsilon_2}{2}\right)\hbar}_{M\hbar} |\epsilon_1,\epsilon_2\rangle$$

$$\implies M_{\max} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$m\backslash S$	1 (triplet)	0 (singulet)
1	$\|1,1\rangle = \|+,+\rangle$	
0	$\|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\|+-\rangle + \|-+\rangle]$	$\|0,0\rangle = \|+,-\rangle - \|-+\rangle$
-1	$\|1,-1\rangle = \|--\rangle$	

Pour savoir comment les nouveau opérateur agissent sur les vecteur, on expirme les nouveaux vecteur et opérateurs en fonctions des anciens

$$\mathbf{S}^2 |1,1\rangle = (\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^2 |+,+\rangle = \left(\mathbf{S}_1^2+\mathbf{S}_2^2+2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\right) |+,+\rangle = \left(\mathbf{S}_1^2+\mathbf{S}_2^2+2(\underbrace{S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}}_{S_{1+}S_{2+}+S_{1-}S_{2+}}+S_{1z}S_{2z})\right) |+,+\rangle$$

On fait le produit scalaire et on retrouver $S_\pm$

$|0,0\rangle = \alpha |+,-\rangle + \beta |-+\rangle$

On a les contraintes $\alpha^2+\beta^2 = 1$ et $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0$ par orthogonalité.

Généralisation à des spins plus grands : spins J_1 et J_2 fixées

L'idée reste la même. On part d'un acien ECOC

$$\text{ECOC : } \mathbf{J}_1^2,\ J_2^2,\ J_{1z},\ J_{2z}$$

Base $|J_1,m_1\rangle \otimes |J_2,m_2\rangle \to |J_1,J_2;m_1,m_2\rangle$

$$\mathbf{J}_1^2 |J_1J_2m_1m_2\rangle = J_1(J_1+1)\hbar^2 |J_1J_2m_1m_2\rangle$$

$$\mathbf{J}_{1z} |J_1J_2m_1m_2\rangle = m_1\hbar |J_1J_2m_1m_2\rangle$$

nouvel ECOC $\mathbf{J}_1^2,\ \mathbf{J}_2^2,\ \mathbf{J}^2, J_z$

$$\boxed{-J \leq M \leq J}$$

On fait le même changement de base avec les coefficients de Clebsch-Gordan. Au lieu d'une somme sur epsilon on doit maintenant sommer sur tout les m_1 et m_2

On trouve, de manière similaire a précédement

$$\boxed{M = m_1 + m_2}$$

Encore une fois, on veut maintenant trouver les nouveau vecteurs prorpes.

$M\backslash J$	$J_1 + J_2$	$J_1 + J_s - 1$
$M_{\max} = J_1 + J_2$	$\|J_1 + J_2, J_1 + J_2\rangle$	
$J_1 + J_2 - 1$	$\|J_1 + J_2, J_1 + J_2 - 1\rangle$	$\|J_1 + J_2 - 1, J_1 + J_2 - 1\rangle$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$-J_1 - J_2$	$\|-J_1 - J_2, -J_1 - J_2\rangle$	

$$|J_1 + J_2, J_1 + J_2\rangle = |J_1, J_2; J_1, J_2\rangle$$

$$\underbrace{J_-}_{J_{1-}+J_{2-}} \underbrace{|J_1 + J_2, J_1 + J_2\rangle}_{J_1,J_2;J_1,J_2} = \hbar \underbrace{\sqrt{(J_1 + J_2)(J_1 + J_2 + 1) - (J_1 + J_2)(J_1 + J_2 - 1)}}_{2(J_1+J_2)} |J_1, J_2; J_1, J_2\rangle$$

$J_{1-}+J_{2-}$S'applique et donne aussi des longues racines, je suis pas trop sur de la conclusion... On verifié que ça marche je crois