2024-03-14

2eme heure

$$sym^n(\mathbb{C}^3 = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k | i+j+k=n \right\rangle$$

les poids sonts $H \cdot \left(e_1^i e_2^j e_3^k\right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H) e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est nL

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

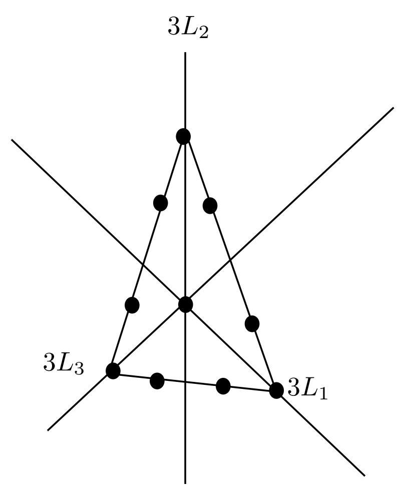

Figure 1 – triangle

$\mathrm{Sym}^{\mathrm{n}}(\mathbb{C}^3)$ par le même argument a pour plus haut poids nL_3 est est irréductible

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$ est un vecteur de plus haut poids.

Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\begin{gathered}\varphi : \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (uv) \otimes \alpha \mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u\end{gathered}$$

$$\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) = \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha))$$

$$= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x)$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha)$$

$\mathrm{Her}(\varphi) \subseteq \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$ est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \mathrm{Ker}\varphi(\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_{1)}e_1$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_{2)} = 2L_1 - L{-}_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans $\mathrm{Ker}(\varphi), \dim(V_{L_1)} = 2$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que V_{L_1} est engendré par $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$ et $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*$

$$\begin{aligned}E_{32}E_{21}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right) &= E_{32}\left((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)\right) \\ &= E_{32}\left(2e_1e_2 \otimes e_3^*\right)\end{aligned}$$

$$= 2(e_1e_3 \otimes e_3^* + e_1e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right)$$

$$= E_{21}le0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21}\left(e_1^2 \otimes e_2^*\right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b\mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids $aL_1 - bL_3$ On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphimse

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \to \mathrm{Sym}^{a-1}\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$