Introduction à la théorie des groupes et applications à la supracondicivité

Concept Généraux

Définition : Groupe

Un **groupe est une ensemble** $\{a, b, c\}$ **muni d'une** *multiplication* **respectant les règles suivantes**

— **Si** $a, b \in G$**, alors** $a * b \in G$

— $(a * b) * c = a * (b * c)$

Un ensemble de matrice peut définir un groupe, car la multiplication matriciel repecte les bonne propriétés. Les matrices doivent êtres non-nuls pour respecter la condition d'existence d'un inverse.

$$GL(N) \quad \det(A) \neq 0 \quad \textbf{corp : } \mathbb{R}$$

est le groupe le plus grand qui existe

Groupes ponctuelles communs

Il y a deux notation principales pour différentier les groupes Schönfhes et l'autre

il y a $C_n, D_n, C_{nv}, C_{nh}, D_{nh}...$

a **et** b **sont conjugés** $(a \sim b)$ **s'il existe** $c \in G | b = c^{-1}ac$ a **et** b **décrivent alors le** *même genre* **de transformation car relié par un changement de base**

La relation de conjugasion est une relation d'équivalence :

(reflexive : $a \sim a$**, symétrique** $a \sim b \to b \sim a$**, transitive :** $a \sim bb \sim c \implies a \sim c$**)**

Représentation

$$\mathcal{R} : G \to GL(d) \qquad a \to R(a) \qquad R(ab) = R(a)R(b)$$

L'espace vectoriel sur lequel agit $R(a)$ **: module V de la représentation**

Deux représentation sont équivalent si elle ne diffèrent que par un changement de base

Représentation unitaire

$$\implies R^{-1}(a) = R^{\dagger}(a) \forall a \in G$$

Toute représentation d'un groupe fini est équivalente à une représentation unitaire

Représentation réductible : $\exists$ **base** $|R(A) = R^{(1)}(a) \oplus R^{(2)}(a), \forall a \in G$

On s'interresse au représentations irréductible car elle sont plus *fondamentale*

Exemple : C_4 **et base des vecteurs x**

$$g : C_4 \quad R(g) : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

Les fonction de degré m **forment une repreésentation**

Lemme 1 : Si R, R' **sont deux représentation irréductibles (R.I.) inéquivalentes, alors il n'y a pas de matrice** H **non-nulle telle que que** $HR'(a) = R(a)H \forall a \in G$

Lemme 2 : Si R **est une R.I et** H **une matrice non-nulle telle que** $HR(A) = R(a)H\forall a \in G$ **alors** H **est un multiple de l'identité :** $H = \lambda I$

Conséquence : soit une représentation réductible $R = R_1 R_2 \cdots$

Caractères

Relation d'orthogonalité

$$\frac{n_\nu}{g} \sum_{a \in G} R_{ik}^{(\nu)*}(a) R_{jl}^{(\mu)}(a) = \delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

corollaire : $\sum_\mu^r n_\mu^2 \leq g$ **où** r **est le nimbre de représentation distincte. En fait** $=$

Def : caractère d'une classe dans une représentation

$\chi(a) = \operatorname{tr} R(a)$

les vecteurs de caractères sont orthogonauxé..

$$\sum_i^K \frac{g_i}{g} \chi_i^{(\nu)*} \chi_i^{(\mu)} = \delta_{\mu\nu} \sum_\mu^K \frac{g_i}{g} \chi_i^{(\mu)*} \chi_i^{(\mu)} = \delta_{ij}$$