

# Relativité générale

## Rappels sur la relativité restreinte (vecteurs et tenseurs)

\* On prend comme exemple une espace euclidien de dimension 2 mais la théorie est générale

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = A^i \mathbf{e}_i$$

les  $A^i$  sont les composantes *contravariantes*

Changement de base :  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_i = \Lambda_i^j \mathbf{e}'_j = \Lambda_i^1 \mathbf{e}'_1 + \Lambda_i^2 \mathbf{e}'_2 + \Lambda_i^3 \mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}'_i = (\Lambda^{-1})^j_i \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A} = A^j \mathbf{e}_j = \underbrace{A^j \Lambda_j^i}_{A^{i'}} \mathbf{e}'_i$$

$$A^{i'} = \Lambda_j^i A^j$$

## Base duale

ayant une base  $B$  On peut définir une base duale  $\tilde{B} = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} | \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta^i_j$

$$\mathbf{A} = \underbrace{A^i}_{\text{contravariante}} \quad \mathbf{e}_i = \underbrace{A_j}_{\text{covariantes}} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i = A^i$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_i$$

On veut démontrer que  $\mathbf{e}^{i'} = A^{i'}_j \mathbf{e}^j$

Tenseurs :

base :  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

Il y a des représentation covariantes contravariantes et mixtes au tenseurs.

$$T'^{ij} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j T^{kl}$$

$$T_j'^i = \Lambda_k^i (\Lambda^{-1})_j^l T_l^k$$

$$T_i^i = \text{tr}(T) = \cdot = \text{tr}(T')$$

## Tenseur Métrique

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \iff \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j}_{\delta_j^k} = g_{ij}$$

de même :

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = A^i \mathbf{e}_i B^j \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^j$$

$$A^i = \mathbf{A} \mathbf{e}^i = \mathbf{A} \cdot (g^{ij} \mathbf{e}_j) = g^{ij} A_j$$

$$A^i = g^{ij} A_j$$

$$A_i = g_{ij} A^j$$

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

## Espace-Temps (1908)

Un concept définis par Minkowski après avoir lu le papier de Einstein de 1905. Ce dernier n'aimait pas du tout ce concept.

Quadrivecteur

$$x^i = (ct, x, y, z)$$

Transformation de Lorentz

$$x'^i = \Lambda_j^i x^j$$

Intervalle

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

unités Géométriques

$$G = 1 \quad c = 1$$

Transformation de Lorentz

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

On a 16 variables dans une matrice 4x4. On a une contrainte sur 10 d'entre elles. Il reste donc 6 degrés de libertés. Celles ci représente l'alignement des axes et la vitesse.

Rapacité

$$\tanh \psi = v$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -x \sinh \psi & t \cosh \psi & 0 & 0 \\ x \cosh \psi & -t \sinh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quadrigradient

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\partial_{i'} = (\Lambda^{-1})^j_i \partial_j : q$$