2024-01-29

Rappels

P projection, apli linéaire $P : V \to V$ t.q. $P^2 = P$

$$\mathrm{tr}(P) = \dim(\mathrm{ImP})$$

$$\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$$

$$P = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$$

est une projection avec $\mathrm{ImP} = \mathrm{V^G} = ?$

$$\mathrm{dimV^G} = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\chi_\rho(?)$$

Nombre de représentation triviales dans les décomposition de ρ
En particulier si ρ est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g\in G}\chi_\rho(g) = 0$$

$\rho_{1,}\, \rho_2$ deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\mathrm{Hom}(\rho_1,\, \rho_2) : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(Hom(U, V))}$$

Rappel

Si $U = \mathbb{C}^n$, $V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C}) \qquad \rho_{2(\mathrm{g})} \in \mathrm{GL_m}(\mathbb{C})$$

$$\mathrm{Hom(U, V)} = \mathrm{Mat_{n\times m}}(\mathbb{C})$$

$$\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)(\mathrm{g})(\mathrm{M}) = \rho_2(\mathrm{g})\cdot \mathrm{M}\cdot \rho_1(\mathrm{g})^{-1}$$

Proposition :

$$\mathrm{Hom(U, V)^G} = \{\varphi : \mathrm{u} \to \mathrm{v} | \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \mathrm{Hom(U, V)^G} \iff \rho_2\mathrm{M}\rho_1(\mathrm{g}) \in \mathrm{v} = \mathrm{M}\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G} \iff \rho_2(\mathrm{g})\mathrm{M} = \mathrm{M}\rho_1(\mathrm{g}) \iff \mathrm{M} \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si ρ_1, ρ_2 sont irréductibles, le lemme de Shor dit

$$\dim(\mathrm{Hom(U, V)^G}) = \begin{cases} 0 & \mathrm{si}\rho_1 \ncong \rho_2 \\ 1 & \mathrm{si}\rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \mathrm{tr\,P} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\mathrm{Hom}(\rho_1,\, \rho_2)(\mathrm{g})\right) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g\in G}}\mathrm{tr\,Hom}(\rho_1, \rho_2)(\mathrm{g})(\text{à démontrer})$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\bar{\rho}}(g)$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\bar{\rho}}(g) \chi_\rho(g) = \Big\{ \cdots$$

Les caractères de représentations irréductibles sont <u>orthonormés</u> par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace $f : G \to \mathbb{C}$

Exemple : S_3

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} \left(1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3\right) = 1 \qquad \cdots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \to \mathbb{C} | f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\mathrm{dim}(\mathbb{C}_\mathrm{C}(\mathrm{G})) = \# \text{ de classes de conj}$$

<u>Corrollaire</u>

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

<u>Démonstration</u> : (je vois pas lol)

<u>Corrollaire 2</u> : Toute représentation est derterminé (à iso près) par son caractère χ_ρ

<u>Démonstration</u> : On sait que $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus \rho_k^{m_k}$

De plus $\chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \cdots + m_k \chi_{\rho_k}$

On peut retrouver m_i avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

Exemple

Décomposons $R : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^6)$ (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6$, $\chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$ (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6+0+0)$

$$\langle\rangle = \frac{1}{6}(6+0+0)$$

$$\langle\rangle = \frac{1}{6}(6*2+0+0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi_? + 2\chi_?$$

Exemple

Décomposons $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{std} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 : ρ est irréductible ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho,\, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \cdots + m_k^2 = 1$$

puisque $m_i \in \mathbb{N}$, un des $m_i = 1$, tout les autres =0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} \text{ : irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décompostion de R avec multiplicité $\dim \rho_{\mathrm{i}}$ et $|G|(= \dim(\mathrm{R})) = \sum_{\rho_{\mathrm{i}} \mathrm{irre}} \dim(\rho_{\mathrm{i}})^2$