Rappels

- Carte de Surface : $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$
  lisse
  homéomorphisme entre U et $p(U)$
  $Dp = (p_u | p_V)$ rang maximal

- Surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$
  tout point est contenu dans la carte de surface
- Point régulier p de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $Df\big|_p \neq 0$
  valeur régulière : $f(p)$
  valeur critique $\iff$ non-régulière

Proposition Si $\alpha \in \mathbb{R} estunevaleurrgulire.alors$f$^{-1}(a)$ est une surface lisse

Dém : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $f(\vec{x}) = a$

Comme a est une valeur régulière, $df\big|_{\vec{x}} \neq 0$

$\implies$ un des dérivé partitiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$

Définissons $F : \mathbb{R}^3 < to \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)\Big|_{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut applique le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts }, U \ni \vec{x}, \quad V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q. $F : U \to V$ est inversible et F^{-1} est lisse.

Soit W la projection de V sir le plan (x, y)

$$p : W \to S \quad (x,y,z)^T \to F^{-1}(x,y,z)^T \in f^{-1}(a)$$

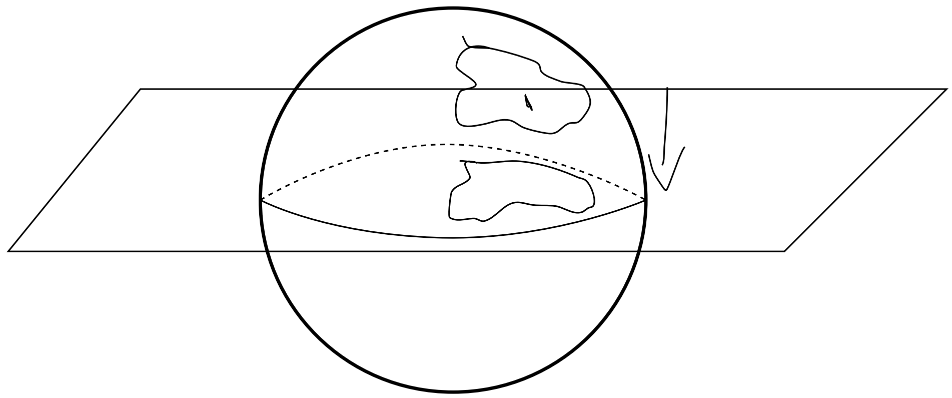


FIGURE 1 – bingobong

comme $DF^{-1}\big|_{F(\vec{x})} = (DF\big|_{\vec{x}})^{-1}$

$Dp =$ deux premires colonnes de DF^{-1} est de range maxmial ∎

<u>Exemple</u>

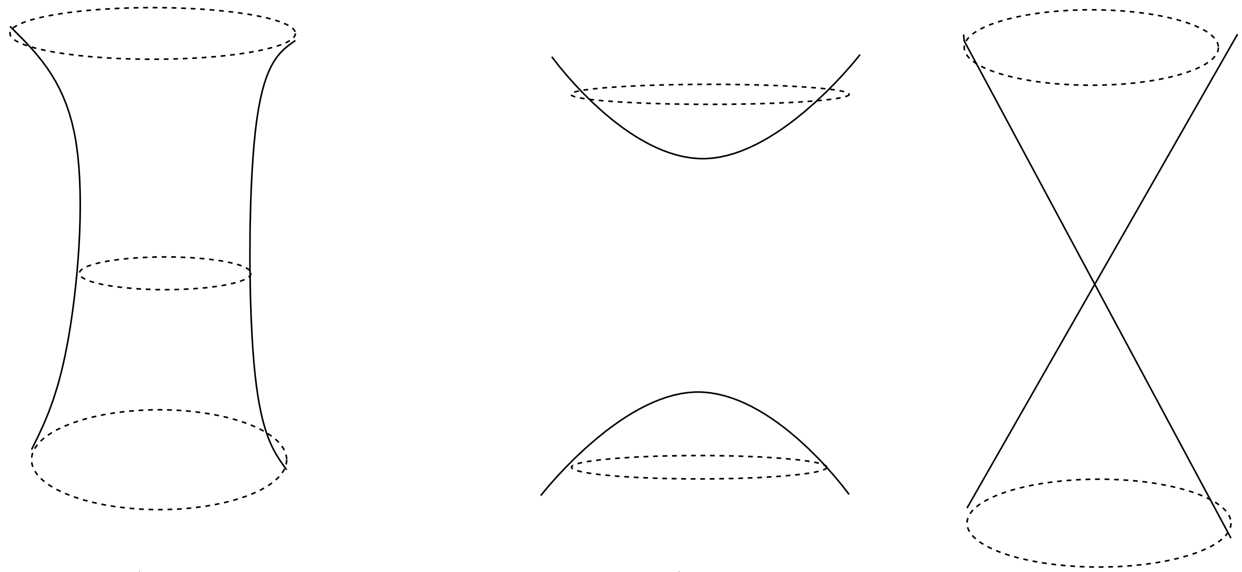
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est $(0,0,0)$

La seule valeur critique est $f(0,0,0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x,y,z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$



$f^{-1}(1)$ $f^{-1}(-1)$ $f^{-1}(0)$

FIGURE 2 – Exesmples de fonctions

première forme fondamentale

<u>Définition</u> Étant donnée une carte de surface lisse p, la <u>première forme fondamentale</u> ou <u>métrique</u> est

$$I_{u,v} =$$

$${}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

<u>Définition</u> : Deux surfaces S, S^* sont localement isométrique s'il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et des paramétristion p, p^* t.q. $I\big|_{(u,v)} = I^*\big|_{(u,v)}$

<u>Exemple</u> : Considérons S Le plan x, y paramétrisé par $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre S^* paramétrisé par $p^*(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1,0,0), p_v = (0,1,0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0,0,1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

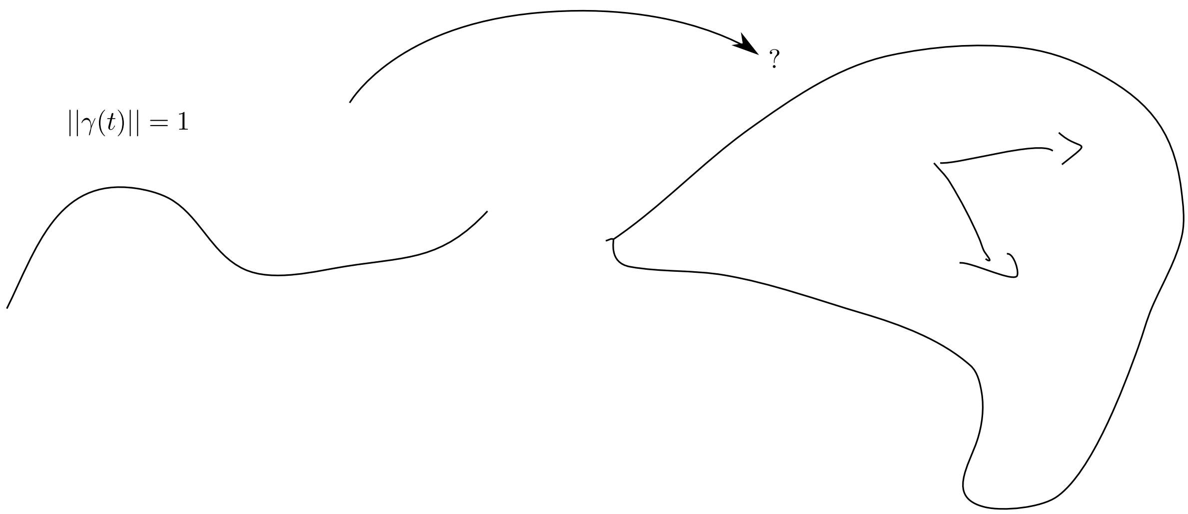


FIGURE 3 – forme fondamentale

$\Longrightarrow$ S est localement isométrique à S^*

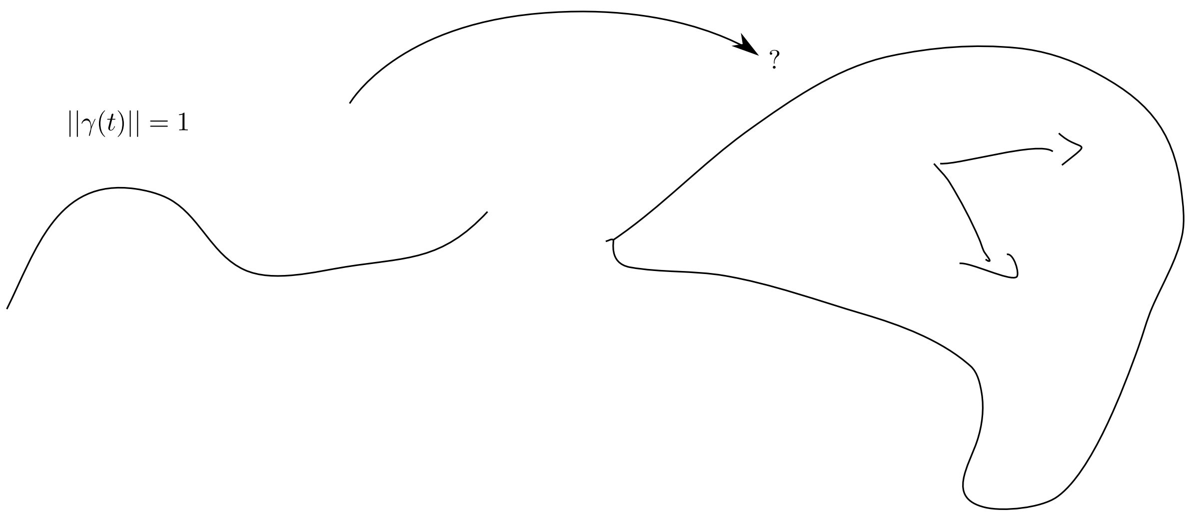


FIGURE 4 – forme fondamentale