Rappels

Fourmule de la courbure $\frac{\left\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\right\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$$\kappa(s) = - \iff \text{ segment de droite}$$

$$\tau = 0 \iff \text{ la courbe est planaire}$$

$$\tau(s) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa(s) \equiv c \iff \alpha \text{ portion de cercle de rayon}$$

Forme locale canonique (Taylor)

Isométrie $x \mapsto Ax + b \quad AA^t = 1$

La courbure et la torsion sont invarientes par isométries

Pour A une isométrie directe $A\vec{u} \times A\vec{v} = A(\vec{u}\vec{v})$ En général $A\vec{u} \times A\vec{v} = \det(A)A(\vec{u} \times \vec{v})$

Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Deux courbes C, C^* dans $\mathbb{R}^3$ de courbure non-nulle diffèrent par une isométrie directe $\iff$ ellse ont la même courbure et torsion ($\kappa = \kappa^*$ et $\tau = \tau^*$)

Dém Soit α, α^* des courbes paramétrées par longueures d'arc de C, C^*

Prenons A, l'unique matrice orthogonale t.q.

$$\begin{gathered} AT(0) = T^*(0) \\ AN(0) = N^*(0) \\ AB(0) = B^*(0) \end{gathered}$$

Rappel : si A enovie une base orhtonormée vers une base orthonormée alors A est orthogonale.
Si A envoie une base positiviement orienté à une base positiviment orientée alors $\det\{A\} > 0$

Soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $A \cdot \alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Définissons $I(x) = Ax + \vec{b}$ et $\tilde{\alpha}(s) = I(\alpha(s)) = A\alpha(s) + b$

reste à montrer que $\tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) \forall s$

On a $\tilde{\alpha}(0) = A\alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Et comme I est une isométrie

$$\tilde{T}(0) = AT(0) = T^*(0)\tilde{N}(0) = AN(0) = N^*(0)\tilde{B}(0) = AB(0) = B^*(0)$$

Comme κ, τ sont ivarients par isométries directe

$$\kappa^*(s) = \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)\tau^*(s) = \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$$

Définissons une fonction $f(s) = \tilde{T}(s) \cdot T^*(s) + \tilde{N} \cdot N^* + \tilde{B} \cdot b^*$

$f'(s) =$ C'est vraiment long à écrire, fuck ça, règle de chaine mdr $= 0$

$$\implies f(s) \equiv C \text{ mais } f(0) = 1 + 1 + 1 = 3 \implies f(s) = 3$$

Par l'inégalité de Chauchy-Swatzsdfjhh ($|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$)

$\tilde{T}(s) \cdot T^*(s) \leq 1$

$\tilde{N}(s) \cdot N^*(s) \leq 1$

$\tilde{B}(s) \cdot B^*(s) \leq 1$

On en conclut que les vecteur du repert de frenet tilde et étoile sont les mêmes

En particulier $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha^{*\prime}(s) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) + \vec{v}_0$ mais $\vec{v}_0 = 0$ car $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$

<u>Question :</u> Étant donné deux donctions $\kappa(s), \tau(s)$, existe-t-il une courbe α ayant κ, τ comme courbure et torsion ?

Oui ! (avec suffisement de régularité)

Pour trouver α, on résout le système

$$\begin{array}{rclcc} T' & = & & \kappa T & \\ N' & = & -\kappa T & & \tau B \\ B' & = & & \tau B & \end{array}$$

puis on intègre T. On sait qu'une solution existe grace au théorème d'exsitance des solutions d'éqiation différentielles.

Courbes planaires

<u>Théorème</u> [inégalité isopérimétrique] :

Soit C une courbe planaire <u>simple</u> fermée de longeure l et A est l'aire de la région bornée par C. Alors $l^2 - 4\pi A \leq 0$ Avec $= \iff C$ est un cercle

Rappel

Théroème de Greene :

$$\int_{\mathrm{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathrm{R}} rot(\mathbf{F}) \mathrm{d}A$$

En particulier, aire$(R) = \int_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2} \int_c (yx) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int xy' - yx' \mathrm{d}t$

α paramétrée par longeure d'arc de C $\bar{\alpha}$ paramétré du cercle

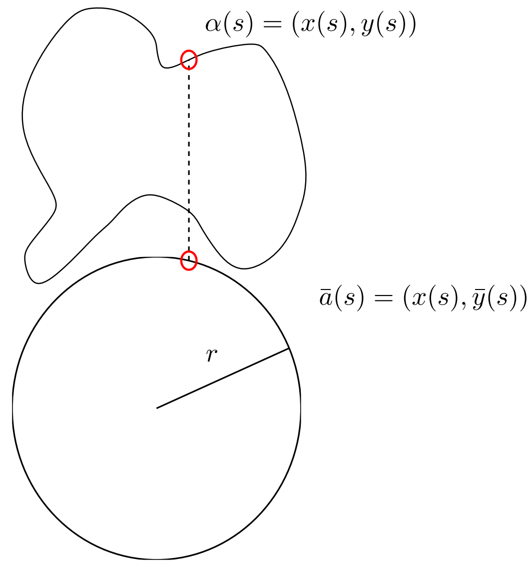

Figure 1 – parametrisation isoperimetrique

Calculons

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s)\mathrm{d}s + \int_0^l -\bar{y}(s)x'(s)\mathrm{d}y$$

Fuck les notes ; dodo. Aussi, criss que mon shéma est laid, faut vraiment que j'aprène à utiliser inkscape