

# 1 Chapitre 0

On s'intéresse à qualifier des courbes sans étudier les propriétés des fonctions. Par exemple, on veut considérer  $y = x^2$  et  $y^2 = x$  comme identiques à rotation près malgré le fait qu'elles soient définies comme deux équations assez différentes.

On va distinguer les propriétés intrinsèques et extrinsèques d'une surface.

Une propriété intrinsèque pourrait être détectée par quelqu'un vivant dans la surface.

La distance de longueur d'arc est une quantité intrinsèque à la sphère tandis que la *longueur cordale* est une quantité extrinsèque.

La courbure gaussienne est la plus importante quantité intrinsèque associée à une surface.

La courbure gaussienne ne change pas si on la déforme de manière rigide.

## 1.1 Courbure d'un polyèdre

Défaut d'angle :

$$c(s) = 2\pi - \sum_{T \text{ face}} \theta_T(s)$$

La caractéristique d'Euler d'un polytope  $P$  est la quantité

$$\chi(P) = V - E + F$$

## 1.2 Théorème de Gauss-Bonnet discret

$$\sum_{s \in P} c(s) = 2\pi\chi(P)$$

Dém On compte le défaut d'angle total de deux manières différentes

— Défaut d'angle total  $\sum_{s \in P} c(s)$

— Dans chaque face triangulaire de  $P$ , la somme des angles  $= \pi$ . Le défaut d'angle total :  $2\pi V - \pi F$

Chaque arête à 2 faces

Chaque face à 3 arêtes

$$2E = 3F$$

On compte la cardinalité des  $\{(a, f) | a \in f\}$

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(P) &= 2\pi(V - E + F) \\ &= 2\pi(V - \frac{3}{2}F + F) \\ &= 2\pi V - \pi F \end{aligned}$$

Ex : En utilisant le théorème démontré plus haut, et le fait que toute triangulation d'une sphère satisfait  $\chi(P) = 2$  classifie les solides réguliers. (Les faces sont des polygones réguliers. Même nombre de faces à chaque sommet)

# 2 Chapitre 2

Définition : Une fonction vectorielle  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $C^k$  si  $f$  et ses  $k$  premières dérivées existent et sont continues sur  $(a, b)$ . On dit que  $f$  est lisse si c'est vrai pour tout  $k > 0$

Une courbe paramétrée est une application  $C^3$

$$\alpha I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ex :

—  $p \neq q \in \mathbb{R}^3$ , on définit  $V = q - p$  et  $\alpha(t) = p + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$

- $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  (le cerclce de rayon  $a$ )
- Courbe cubique sigulière :  $\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad \alpha'(t) = (2t, 3t^2) \implies \alpha'(0) = (0, 0)$  non-régilère en  $t = 0$

# Cours 2

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

Courbe du jour : Cycloïde : Trajectoire d'un point sur une roue qui tourne sans glisser

Paramétrisation :  $\alpha(t) = \underbrace{(tr, r)}_{\text{Centre du cercle}} + (-r \sin t, -r \cos t)$

Def : La longueur d'arc d'une courbe  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\neq}$  est  $l(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)|| dt$

$\tilde{\alpha} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  est une reparamétrisation de  $\alpha$

# Cours 3

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

courbe régulière :  $\alpha' \neq 0 \forall t$

longueur d'arc

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Approximation avec une partition

$$P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$$

$$\mathcal{L}(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})\|$$

Prop

Si  $\alpha$  est  $C^1$  alors  $\alpha$  est rectifiable et

$$\mathcal{L}(\alpha) = \sup_P \mathcal{L}(\alpha, P)$$

On a montré que pour toute partition  $P$  :  $\mathcal{L}(\alpha, P) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Lemme :  $\|\int_a^b \alpha'(t) dt\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Reste à montrer que  $\forall \epsilon > 0 \exists P$  t.q.

$$\mathcal{L}(\alpha, P) \geq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \epsilon$$

Continuité uniforme de  $\alpha$

$\exists \delta > 0$  t.q. si

Proposition : Une courbe paramétrée  $\alpha$  admettant une reparamétrisation par longueur d'arc ssi elle est régulière

Dem (  $\implies$  )

Si  $\alpha$  admet une reparamétrisation par longueur d'arc  $\tilde{\alpha}$

et  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(\varphi(t)) \\
\tilde{\alpha}'(t) &= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\underbrace{\|\tilde{\alpha}'(t)\|}_1 &= \|\alpha'(\varphi(t))\|\|\varphi'(t)\| \\
&\implies \|\alpha'(\varphi(t))\| \neq 0
\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ )

Trop long, trop loin

Exemple : Calculer la paramétrisation par longueur d'arc d'une hélice

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad (a, b > 0)(t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx \\
&= \int_0^t (-a \sin x, a \cos x, b) dx \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dx \\
&= t\sqrt{a^2 + b^2} \\
\implies \Psi^{-1}(s) &= \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
\implies \tilde{\alpha}(s) &= (a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}})
\end{aligned}$$

Courbe du jour : Caténoïde

Repère de Frenst

Un repère adapté à la courbe.

Le premier vecteur est le vecteur tangeant.

Le second vecteur est le vecteur *accélération*. En effet, il est toujours perpendiculaire au déplacement dans le cas d'une courbe paramétré par longueur d'arc (vitesse constante)

Le troisième est celui qui reste ( $\times$ )

Lemme : Soient  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Si  $f(t) \circ g(t)$  est constante alors  $f'(t) \circ g(t) = -f(t) \circ g'(t)$

Dem  $(f(t) \circ g(t))' = 0 \implies f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g'(t) = 0 \blacksquare$

Soit  $\alpha$  paramétré par longueur d'arc

$$T(s) := \alpha'(s)$$

$$k(s) := \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

est la courbure de  $\alpha$  au point  $\alpha(s)$

$$N(s) := \frac{T'(s)}{k(s)}$$

On dit que  $\alpha$  est birégulière si  $k(s) \neq 0 \forall s$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

$T, N, B$  est le repère de Frenet de  $\alpha$

$$\|T(s)\| = 1 \implies T(s) \cdot T(s) = 1 \implies T(s) \cdot T'(s) = 0 \implies k(s)T(s) \cdot N(s) = 0$$

$T, N, B$  sont  $\perp$

$$\|B\| \|T \times N\| = \|T\| \|N\| \sin(\phi) = 1$$

Orthonormé!

On a, par définition que

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) = -k(s)N(s) \cdot N(s) = 0 \implies N'(s) \cdot B(s) =: \tau(s)$$

$\tau$  : torsion

...

On obtiens les Équations de Frenet-Serra

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

# Cours 4

Jean-Baptiste Bertrand

19 janvier 2022

## Rappel

- Une courbe est régulière ( $\alpha'(t) \neq 0 \iff$ ) elle peut être paramétrisée par longueur d'arc ( $\|\tilde{\alpha}(s)\| \equiv 1$ )
- Repère de Frenet de  $\alpha$  paramétrisé par longueur d'arc

$$T = \alpha'(s), \quad N = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} (\|T'(s)\| = k(s)), \quad B = T \times N$$

- Courbe birrégulière  $\rightarrow k(s) \neq 0$
- Équations de Frenet-Serret

$$\begin{array}{rcl} T' & = & kN \\ N' & = & -kT + \tau B \\ B' & = & -\tau N \end{array}$$

- $N'(s) \cdot B(s) = \tau(s)$

La torsion ( $\tau$ ) mesure à quel point on sort d'un plan. La courbure ( $k$ ) mesure à quel point on dévie d'une droite.

Exemple : Hélice

$$\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right)$$

où  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

est paramétrisé par longueur d'arc

$$T(s) = \alpha'(s) = \left( -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right)$$

$$T'(s) = \left( -\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{c^2}$$

$$N = \left( -\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$B = T \times N = \left( \frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right)$$

$$N'(s) = \left( \frac{1}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\tau(s) = N' \cdot B = \frac{b}{c^2} \sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b}{c^2} \cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + 0 = \frac{b}{c^2}$$

#### Remarque

La courbure d'une courbe de  $\mathbb{R}^3$  est toujours positive (C'est une norme) mais la torsion a un signe. La torsion renseigne sur la chiralité.

$$T' = \kappa N \vee$$

...

#### Courbes non-paramétrées par longueur d'arc

Soit  $\alpha$  une courbe birrégulière. On note  $s(t)$  la reparamétrisation par longueur d'arc.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (*)$$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = 1 \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

la fonction  $\frac{ds}{dt} = v(t)$  est la vitesse de  $\alpha$

$$\frac{d\alpha}{dt} = T(s(t))v(t)$$

Pour calculer  $N$

$$\frac{dT(s(t))}{dt} = \frac{dT(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)$$

$$\implies N(s(t)) = \frac{1}{v(t)} \frac{dT(s(t))}{dt}$$

On peut ensuite calculer  $B$  et  $\tau$



Exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^3, 3t + t^3)$$

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \dots = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$T = \frac{\alpha'}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)}(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\kappa N(t) = \frac{1}{v(t)}T'(t) = \dots = \frac{1}{6}\left(\frac{-4t}{1 + t^2}, \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2}\right)$$

$$\kappa(t) = \|k(t)N(t)\| = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

On calcul B, pas le temps de retranscrire

# Cours 5

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

La dernière fois, on s'intéressait à ce qui se passe quand une courbe n'est pas paramétrisée par longueur d'arc. On suppose qu'il existe une paramétrisation par longueur d'arc :  $\alpha(s(t))$  où  $s$  est la longueur d'arc

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx$$

$$s'(t) = \|\alpha'(s(t))\| = v(t)$$

$$\begin{aligned}\alpha(s(t))' &= \alpha'(s(t))s'(t) = T(s(t))v(t) \\ \alpha(s(t))'' &= T'(s(t))v(t)^2 + T(s(t))v'(t) = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)^2 + v'(t)T(s(t))\end{aligned}$$

Pour calculer  $N$  et  $\kappa$  sans passer par la longueur d'arc, on utilise

$$\kappa(s(t))N(s(t)) = \frac{\alpha(s(t))'' - v'(t)T(s(t))}{v(t)^2}$$

Exercice : Finir l'exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$$

On devrait trouver

$$\kappa(s(t)) = \tau(s(t)) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

Proposition : La courbure d'une courbe  $\alpha$  (non-paramétrée par longueur d'arc) est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|^3}$$

Démonstration

On a, par ce qu'on a fait ci-haut

$$\begin{aligned}\alpha(s(t)) &= vT \\ \alpha(s(t))'' &= v'T + \kappa v^2 N\end{aligned}$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3 \kappa (T \times N) = v^3 \kappa B$$

$$\begin{aligned}\implies \|\alpha' \times \alpha''\| &= v^3 \kappa \\ \implies \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} &= \kappa \quad \text{car } v = \|\alpha'\|\end{aligned}$$

Conséquence des formules de Frenet-Serret

Prop : Une courbe est une droite  $\iff \kappa = 0$

Démonstration (  $\implies$  ) Si  $\alpha$  est une droite

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \rho_0 + sV \\ \alpha'(s) &= v - T(s) \implies T'(s) = 0 \implies \kappa = 0\end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) si  $\kappa(s) = 0 \forall s$

$$T'(s) = 0 \implies T(s) = T_0$$

$$\alpha(s) = \int_0^s T * (x) dx = sT_0 + \rho_0$$

Exemple : Que peut-on dire d'une courbe  $\alpha$  dont toutes les tangentes passent par un même point ?

Sans pertes de généralité, les tangentes passent par  $\vec{O} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\implies \alpha(s) + \lambda(s)T(s) &= 0 \\ \implies T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) &= 0 \\ \implies (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s) + \lambda(s)(\kappa(s)N(s)) &= 0\end{aligned}$$

$$\implies 1 + \lambda'(s) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0$$

$$\lambda(s) = -s + c$$

$$\lambda = 0 \text{ si } s = c \implies \kappa = 0 \text{ sauf si } \dots$$

Prop 1) Une courbe birrégulière  $\alpha$  est planaire  $\iff \tau \equiv 0$ . 2) Les courbes planes de courbure constante sont des cercles.

Démonstration 1)  $\implies$  Si  $\alpha$  est plane,  $T$  et  $N$  engendrent le plan qui contient  $\alpha$ . Cela signifie que  $T \times N = B$  est constant. C'est le vecteur normal au plan qui contient la courbe  $\alpha$ .

$$\implies B'(s) = 0 = -\tau N \implies \tau = 0$$

Donc la torsion est nulle ■

( $\impliedby$ ) Inversement, si  $\tau \equiv 0$

$$\begin{aligned} B'(s) = 0 &\implies B(s) = B_0(\text{est constant}) \\ \implies (\alpha(s) \cdot B(s))' &= T(s) \cdot B(s) + \alpha(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha(s) \cdot B(s) = \alpha(s) \cdot B_0 = C$$

C'est l'équation d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$  ■

2)  $\impliedby$

Un cercle est paramétré par longueur d'arc avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left( r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ \alpha'(s) = T(s) &= \left( -\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ T'(s) &= \left( -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ \implies \kappa = \|T'(s)\| &= \frac{1}{r} \text{ est constante} \end{aligned}$$

Cela donne une interprétation à la courbure qui est que en chaque point, il existe un cercle de rayon  $r$  qui est une meilleure approximation de la courbe.

$$\implies$$

Soit  $\alpha(s)$  une courbe plane avec

$$\kappa_s = \kappa_0$$

Comme on sait déjà que cela doit être un cercle, on s'aide en cherchant le centre du cercle.

On pose  $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0} N(s)$

$$\beta'(s) = T(s) = \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa T + \tau B)$$

$$\|\alpha(s) - \beta(s)\| = \left\| \frac{1}{k_0} N(s) \right\| = \frac{1}{k_0}$$

$\implies \alpha(s)$  est sur le cercle de rayon  $\frac{1}{k_0}$  centré en  $B_0$

Courbe du jour : Tractrice UN chien enterre un os à  $(0, 1)$ , son maître à  $(0, 0)$  la tire par une laisse en le déplaçant vers  $x > 0$ . Comme le chien tire très fort, la laisse est toujours tangente à la trajectoire du chien.

Soit  $\theta$  l'angle formé par la laisse et l'axe des  $x$

$$\alpha(t) = (t + \cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

$$\alpha'(t) = (1 - (\sin \theta)\theta', \cos \theta\theta')$$

La laisse est dans la direction  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Comme la trajectoire  $\alpha$  est tangente à la laisse.

$$\frac{\cos \theta\theta'}{1 - (\sin \theta)\theta'} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\cos \theta\theta' = \sin \theta - (\sin^2 \theta)\theta'$$

$$\theta' = \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin \theta$$

$$-\ln(\csc \theta + \tan \theta) = t + c \quad t = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow c = 0$$

$$\alpha = (-\ln(\csc \theta + \tan \theta) + \cos(\theta), \sin \theta) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

En reparamétrisant

$$\alpha(t) = (t - t \sinh(t), \sinh(t))$$

Forme locale canonique d'une courbe

Proposition : Soit  $\alpha$  une courbe birrégulière paramétrée par longueur d'arc t.q.  $\alpha(0) = 0$  alors

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^2 + o(s^2))T(o) + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \dots\right) \dots$$

C'est vraiment laid, c'est loin pis il y a du soleil, sorry.

Démonstration Le théorème de Taylor nous dit

$$\alpha(s) = s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + O(s^4)$$

$$\alpha'(0) = T(0) \quad \alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa'(0)N(0) + \kappa_0\tau_0B(0)$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \left(s - \frac{s^2}{6}\kappa_0^2 + O(s^3)\right)T(0) + \left(k_0\frac{s^3}{2} + k_0'\frac{s^2}{6} + o(s^3)\right)N(0) + \left(\kappa_0\tau_0\frac{s^3}{6} + O(s^3)\right)B(0)$$

Le théorème fondamentale des courbes dans  $\mathbb{R}^3$

Si j'ai deux courbes donc je connais la même courbure est la même torsion en tout point alors c'est la même courbe à une isométrie près.

Montrons d'abord que les isométries de  $\mathbb{R}^3$  préservent la courbure est la torsion.

Rappel Une isométrie de  $\mathbb{R}^3$  est de la forme  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  où  $A \in O(3) \iff AA = \text{id}, b \in \mathbb{R}^3$

Une isométrie est directe où une transformation directe si  $A \in SO(3) \iff \det A = 1$

Soit  $\alpha$  une courbe paramétré par longueur d'arc

On définit

$$\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$$

$$\alpha^{*'}(s) = A\alpha'(s)$$

$$T'(s) = AT'(S)$$

$$T^{*'}(s) = AT'(s)$$

$$\|\kappa^*N^*(s)\| = \|\kappa(s)AAN(s)\|$$

$$\kappa^* = \kappa$$

$$B^* = T^* \times N(AT) \times (AN) = A(T \times N) = AB$$

$$(B^*)' = -\tau^*N^*$$

$$(AB)' = AB' = - \implies \tau = \tau^*$$

## Rappels

Formule de la courbure  $\frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$\kappa(s) = 0 \iff$  segment de droite

$\tau = 0 \iff$  la courbe est plane

$\tau(s) = 0$  et  $\kappa(s) \equiv c \iff \alpha$  portion de cercle de rayon

Forme locale canonique (Taylor)

Isométrie  $x \mapsto Ax + b$   $AA^t = 1$

La courbure et la torsion sont invariantes par isométries

Pour  $A$  une isométrie directe  $A\vec{u} \times A\vec{v} = A(\vec{u} \times \vec{v})$  En général  $A\vec{u} \times A\vec{v} = \det(A)A(\vec{u} \times \vec{v})$

## Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Deux courbes  $C, C^*$  dans  $\mathbb{R}^3$  de courbure non-nulle diffèrent par une isométrie directe  $\iff$  elles ont la même courbure et torsion ( $\kappa = \kappa^*$  et  $\tau = \tau^*$ )

Dém Soit  $\alpha, \alpha^*$  des courbes paramétrées par longueurs d'arc de  $C, C^*$

Prenons  $A$ , l'unique matrice orthogonale t.q.

$$AT(0) = T^*(0)$$

$$AN(0) = N^*(0)$$

$$AB(0) = B^*(0)$$

Rappel : si  $A$  envoie une base orthonormée vers une base orthonormée alors  $A$  est orthogonale.  
Si  $A$  envoie une base positivement orientée à une base positivement orientée alors  $\det\{A\} > 0$

Soit  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $A \cdot \alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Définissons  $I(x) = Ax + \vec{b}$  et  $\tilde{\alpha}(s) = I(\alpha(s)) = A\alpha(s) + \vec{b}$

reste à montrer que  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) \forall s$

On a  $\tilde{\alpha}(0) = A\alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Et comme  $I$  est une isométrie

$$\tilde{T}(0) = AT(0) = T^*(0)\tilde{N}(0) = AN(0) = N^*(0)\tilde{B}(0) = AB(0) = B^*(0)$$

Comme  $\kappa, \tau$  sont invariants par isométries directe

$$\kappa^*(s) = \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)\tau^*(s) = \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$$

Définissons une fonction  $f(s) = \tilde{T}(s) \cdot T^*(s) + \tilde{N} \cdot N^* + \tilde{B} \cdot b^*$

$f'(s) = 0$  C'est vraiment long à écrire, fuck ça, règle de chaîne mdr  $= 0$

$$\implies f(s) \equiv C \text{ mais } f(0) = 1 + 1 + 1 = 3 \implies f(s) = 3$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (  $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$  )

$$\tilde{T}(s) \cdot T^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{N}(s) \cdot N^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{B}(s) \cdot B^*(s) \leq 1$$

On en conclut que les vecteur du repère de Frenet tilde et étoile sont les mêmes

En particulier  $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha^*(s) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) + \vec{v}_0$  mais  $\vec{v}_0 = 0$  car  $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$

Question : Étant donné deux fonctions  $\kappa(s), \tau(s)$ , existe-t-il une courbe  $\alpha$  ayant  $\kappa, \tau$  comme courbure et torsion ?

Oui ! (avec suffisamment de régularité)

Pour trouver  $\alpha$ , on résout le système

$$\begin{array}{rcl} T' & = & \kappa T \\ N' & = & -\kappa T \quad \tau B \\ B' & = & \tau B \end{array}$$

puis on intègre  $T$ . On sait qu'une solution existe grâce au théorème d'existence des solutions d'équation différentielles.

## Courbes planes

Théorème [inégalité isopérimétrique] :

Soit  $C$  une courbe plane simple fermée de longueur  $l$  et  $A$  est l'aire de la région bornée par  $C$ . Alors  $l^2 - 4\pi A \leq 0$  Avec  $= \iff C$  est un cercle

Rappel

Théorème de Green :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot}(\mathbf{F}) dA$$

En particulier,  $\text{aire}(R) = \int_C = \frac{1}{2} \int_C (yx) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int xy' - yx' dt$

$\alpha$  paramétrée par longueur d'arc de  $C$   $\bar{\alpha}$  paramétré du cercle



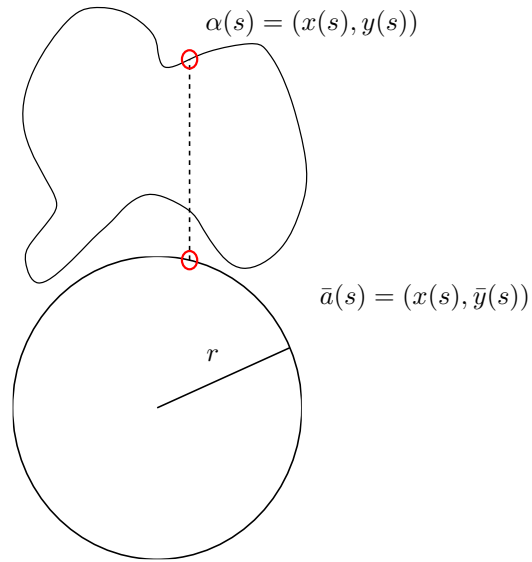


FIGURE 1 – paramétrisation isopérimétrique

Calculons

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s)ds + \int_0^l -\bar{y}(s)x'(s)dy$$

Fuck les notes ; dodo. Aussi, criss que mon schéma est laid, faut vraiment que j'apprenne à utiliser inkscape

## Indice de rotation et Umlaufsatz

$\alpha$  une courbe plane

On peut assigner un signe à la courbe.

On définit  $T$  comme d'habitude soit  $T(s) \equiv \alpha'(s)$  mais  $N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

Où  $R_{\frac{\pi}{2}}$  est une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ . ON a donc

$$T(s) = (x(s), y(s)) \implies N(s) = (-y(s), x(s))$$

et

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s)$$

Frenet-Serret dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s)$$

autres interprétation de  $\kappa(s)$  : Dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut toujours écrire  $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$

$$T'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s), \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \theta'(s)M(s)$$

On comprend donc que  $\theta'(s) = \kappa(s)$

On peut donc définir  $\theta(s)$  comme

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt + \theta(0) \implies \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \kappa(t)dt$$

Si  $\alpha$  est une courbe fermée (  $\alpha(s+L) = \alpha(s)$  ) alors on a que

$$\theta(L) - \theta(0) = 2k\pi$$

On appelle  $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t)dt = R$  l'indice de rotation

## Rappels

Pour une courbe de  $\mathbb{R}^2$ , la courbure à un signe

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$$

où  $N(s) = R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

L'indice de rotation d'une courbe fermée (periodique) est

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$$

où  $R \in \mathbb{Z}$

Umlaufsatz (tangententes tournantes). Si  $\alpha$  est simple (pas d'auto-intersection)  $\mathcal{R}(\alpha) = 1$

Si on écrit  $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ , alors  $\kappa(s) = \theta'(s)$

## Chapitre 2 : Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On va maintenant parler des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$

Rappels :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$Df \Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \Big|_p$$

La différentiel de  $f$  en  $p$

$U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert ssi  $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$  t.q.  $B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq U$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ . UN sous-ensemble  $U \subseteq S$  est ouvert dans  $S$  ssi  $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$  t.q  $B_\epsilon(\vec{x}) \cap S \subseteq U$

Exemple  $S^2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

ON peut paramétriser une partie de  $S^2$  à l'aide de coordonn.es sphériques

$$(0, \cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Rotation autour de  $\theta$

$$R_\theta = \dots$$

Les pôles ne sont pas dans notre paramétrisation

Déf Une application  $p : I \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  ( $U$  Ouvert) est une carte de surface lisse si elle est lisse, bijective et  $Df$  est de plein range  $\forall p \in U$

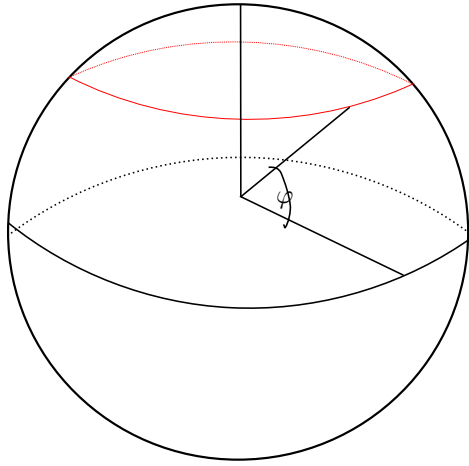


FIGURE 1 – paramétrisation sphérique

Déf Une surface lisse  $S \subset \mathbb{R}^3$  est un sous-ensemble t.q tout point  $\vec{x} \in S$  est contenue dans l'image d'une carte de surface lisse  $p : U \rightarrow S$  t.q.  $p$  est une homéomorphisme (application bijective continue d'inverse continu) entre  $U$  et un ouvert de  $S$

Une collection de paramétrisation  $p_i : U_i \rightarrow S$  t.q.  $p_i(U_i)$  recouvrent  $S$  s'appelle un atlas

Exemple Pour la sphère, on peut construire un atlas avec 2 cartes de surfaces lisses

On peut aussi construire un atlas de  $S^2$  en utilisant des "projections inverses"

$$p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

On doit prendre un total de 6 hémisphères pour couvrir toute la sphère de cette manière. Sinon il manque toujours des points sur l'équateur.

Exemple 2 le graph d'une fonction lisse  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une carte de surface lisse

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \end{pmatrix}$$

toujours de premier rang

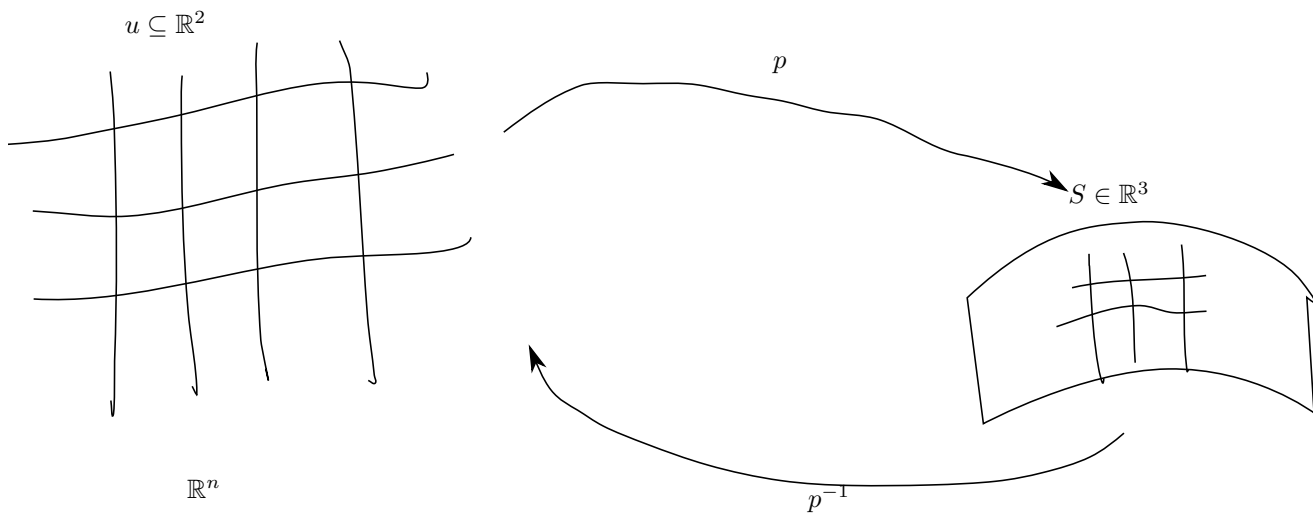


FIGURE 2 – mapping dune surface

Exemple 3 : l'hélicoïde est une hélice dans  $\mathbb{R}^3$  à laquelle on ajoute des segments horizontaux

$$p(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), bv) \quad (b \geq 0)$$

Domaine  $U \geq 0, v \in \mathbb{R}$

Une seule carte forme un atlas

$$Dp = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u \sin(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note les colonnes de  $Dp$  par  $p_u$  et  $p_v$

Exemple 4 : Le tore

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos u) \cos v \\ (a + b \cos u) \sin v \\ b \sin u \end{pmatrix}$$

Peut être couvert avec 4 cartes en changeant le domaine de  $p$  de  $\pm\pi$

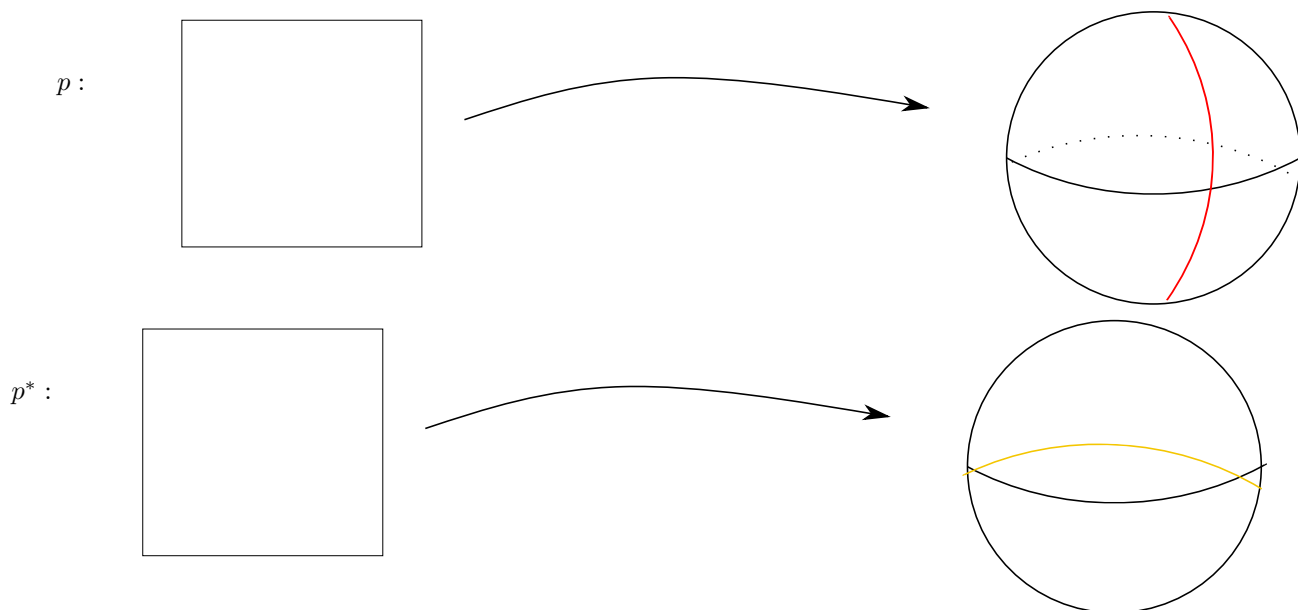


FIGURE 3 – mapping de la sphère

Plus généralement, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe régulière dans le plan  $y, z$  avec  $y(0) = 0$ . La surface de révolution associée est une surface lisse.

Si  $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$

$$p(t, \theta) = \begin{pmatrix} f(t) \cos \theta \\ f(t) \sin \theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Déf : Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Un point  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $Df|_{\vec{x}} = 0$  est un point critique et la valeur associée  $a = f(\vec{x})$  est une valeur critique. Une valeur  $a \in \mathbb{R}$  est régulière si elle n'est pas critique.

Exemple :  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

le seul point critique est  $(0, 0, 0)$ . La seule valeur critique est  $f(0, 0, 0) = 0$ . Toutes les valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sont des valeurs régulières.

On a  $S^2 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)^T\} \quad \text{pas une surface lisse}$$

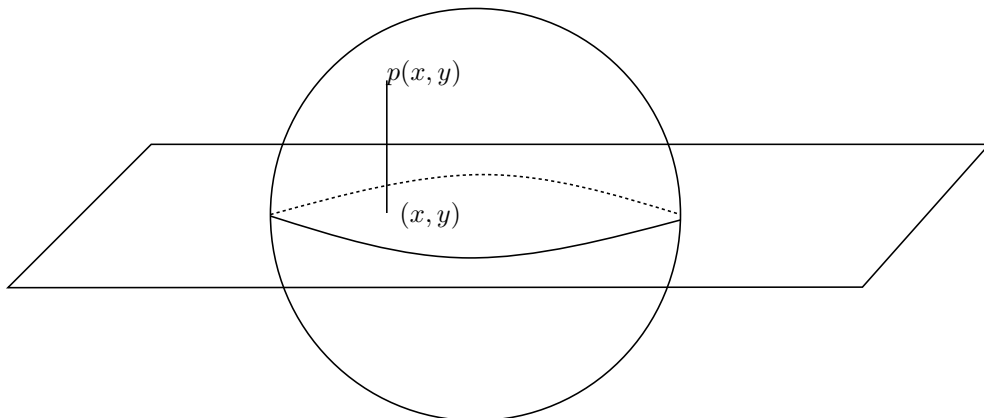


FIGURE 4 – projection inverses

Proposition Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse et  $a \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $S = f^{-1}(a)$  est une surface lisse  $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = a\}$  Rappel Théorème de la fonction inverse Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable  $\mathcal{C}^K$  et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  t.q.  $Df|_{\vec{x}}$  est inversible. Alors il existe des ouverts  $U \ni \vec{x}$   $V \ni F(\vec{x})$  t.q.  $F : U \rightarrow V$  est inversible d'inverse de classe  $\mathcal{C}^k$

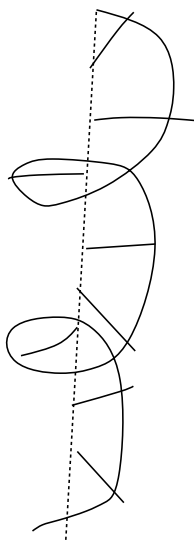


FIGURE 5 – helicoïde

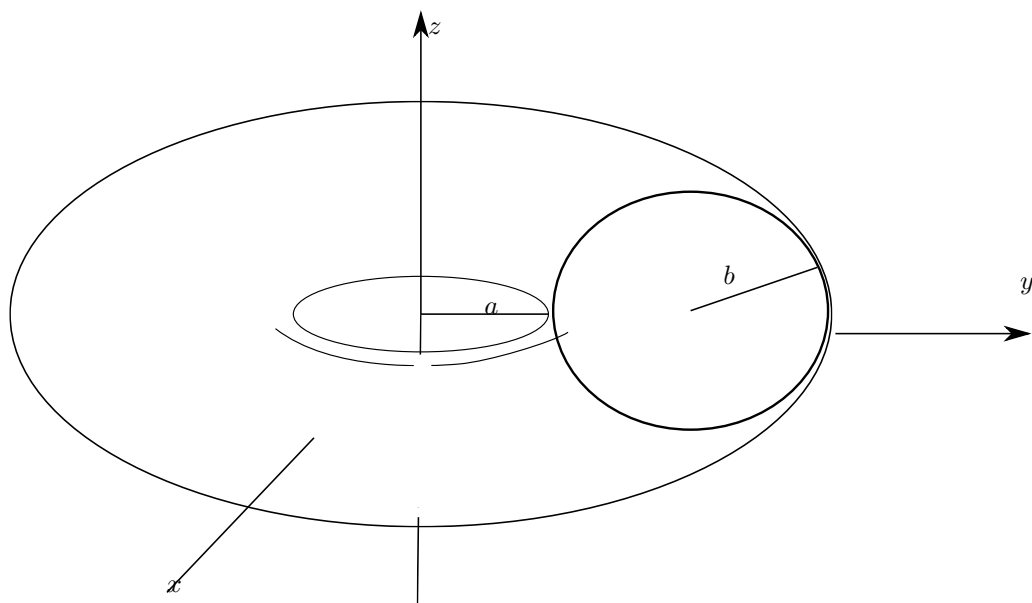


FIGURE 6 – paramétrisation du tore



## Rappels

- Carte de Surface :  $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ 
  - lisse
  - homéomorphisme entre  $U$  et  $p(U)$
  - $Dp = (p_u | p_v)$  rang maximal
- Surface  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 
  - tout point est contenu dans la carte de surface
- Point régulier  $p$  de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : Df|_p \neq 0$ 
  - valeur régulière :  $f(p)$
  - valeur critique  $\iff$  non-régulière

Proposition Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière. alors  $f^{-1}(\alpha)$  est une surface lisse

Dém : Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $f(\vec{x}) = \alpha$

Comme  $\alpha$  est une valeur régulière,  $df|_{\vec{x}} \neq 0$

$\implies$  un des dérivé partiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\vec{x}} \neq 0$$

Définissons  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)|_{\vec{x}} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut applique le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts, } U \ni \vec{x}, \quad V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q.  $F : U \rightarrow V$  est inversible et  $F^{-1}$  est lisse.

Soit  $W$  la projection de  $V$  sur le plan  $(x, y)$

$$p : W \rightarrow S \quad (x, y, z)^T \rightarrow F^{-1}(x, y, z)^T \in f^{-1}(\alpha)$$

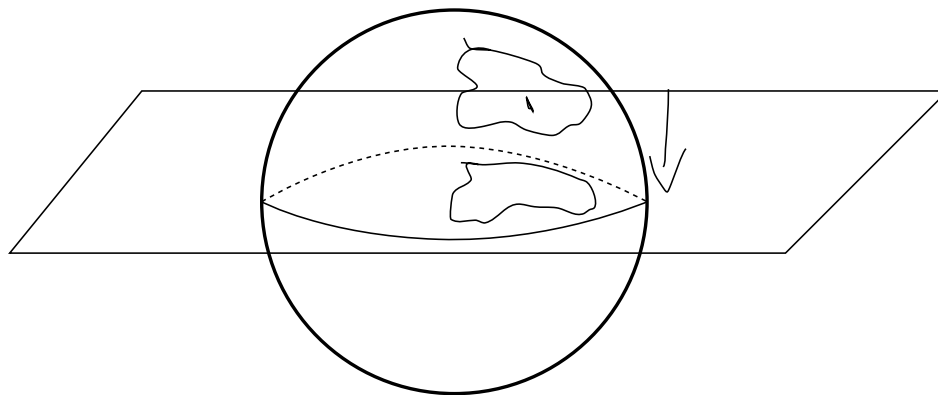


FIGURE 1 – bingobong

comme  $DF^{-1} \big|_{F(\vec{x})} = (DF \big|_{\vec{x}})^{-1}$

$Dp$  = deux premières colonnes de  $DF^{-1}$  est de range maximal ■

Exemple

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est  $(0, 0, 0)$

La seule valeur critique est  $f(0, 0, 0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x, y, z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

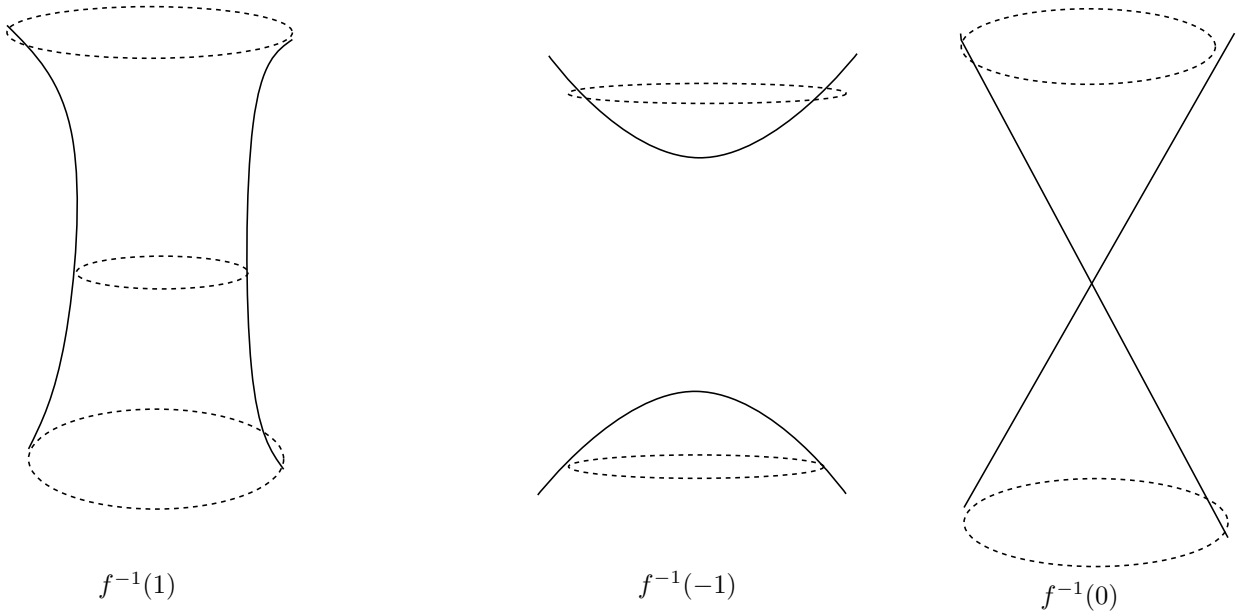


FIGURE 2 – Exemples de fonctions

## première forme fondamentale

Définition Étant donnée une carte de surface lisse  $p$ , la première forme fondamentale ou métrique est

$$I_{u,v} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Définition : Deux surfaces  $S, S^*$  sont localement isométrique s'il existe un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  et des paramétrisation  $p, p^*$  t.q.  
 $I|_{(u,v)} = I^*|_{(u,v)}$

Exemple : Considérons  $S$  Le plan  $x, y$  paramétrisé par  $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre  $S^*$  paramétrisé par  $p^*(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1, 0, 0), p_v = (0, 1, 0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0, 0, 1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

$\implies S$  est localement isométrique à  $S^*$

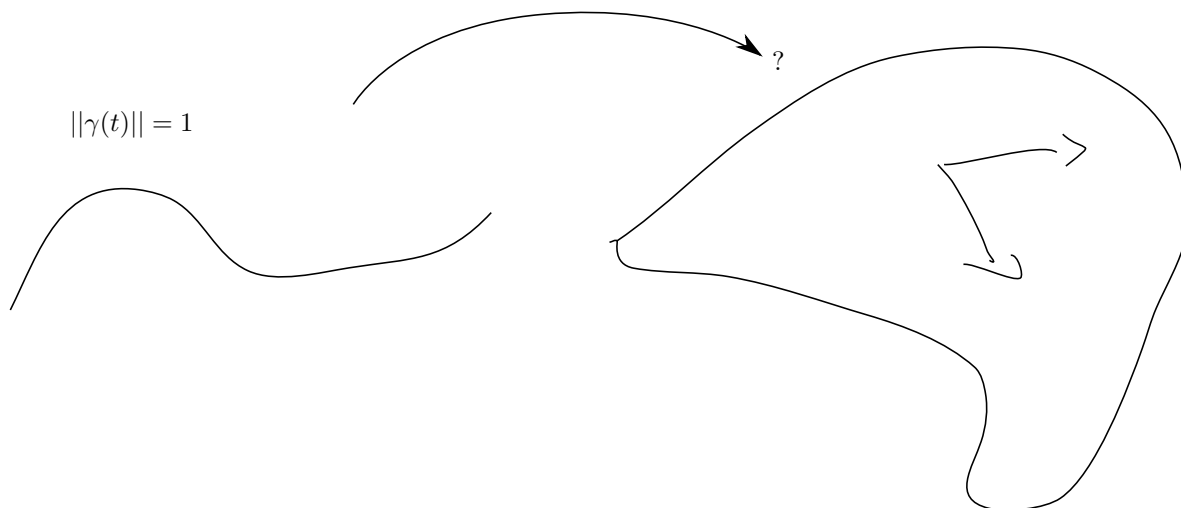


FIGURE 3 – forme fondamentale

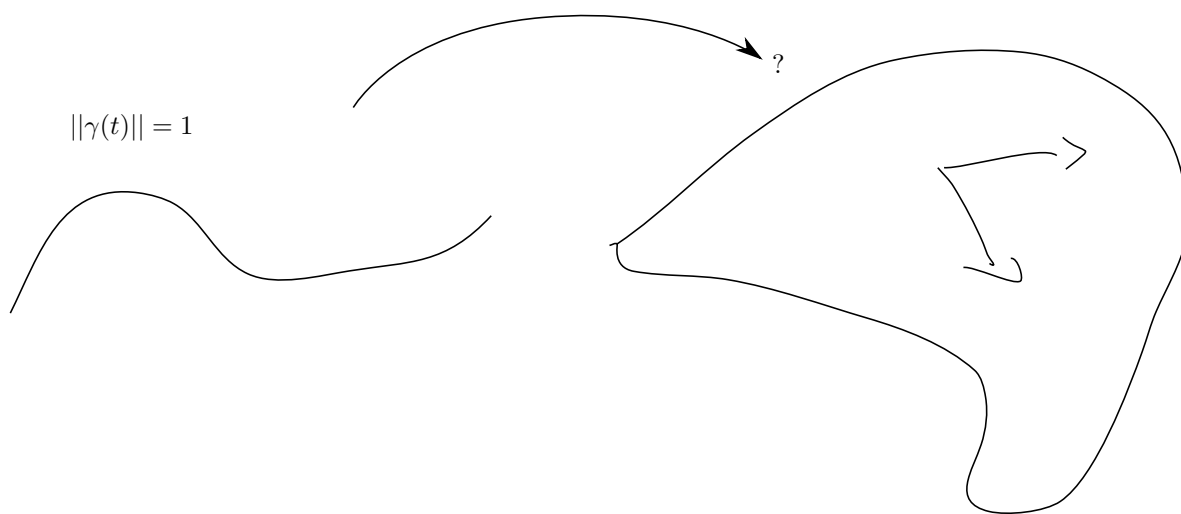


FIGURE 4 – forme fondamentale