2024-03-25

Rappel

Forme de Killing

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$$

$$(X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$$

Porpriétés : α, β avec $\beta \neq \alpha$ alors si $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, $B(X, Y) = 0$ (autrment dit, si $\beta \neq \alpha$ $\mathfrak{g}_\alpha \perp g_{-\alpha}$
cas spéciaux

1. si $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\beta$
2. si $\alpha = \beta \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha$ est isotrope ($\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\alpha$)

Si on restreint à $\mathfrak{h}$ $(X, Y \in \mathfrak{h})$
$B(X, Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X)\alpha(Y)$
$\implies$ sur $\mathbb{R}\langle H_\alpha \rangle$, B est défini positive (non-dégénéré)

Rappel d'algèbre linéaire

V espace vectoriel, b forme bilinéaire symétrique

$$\varphi_b : V \to V^*$$

$$v \mapsto b(v, -)$$

b est non dégénéré $\iff$ φ_b est un isomorphisme
On définit la forme bilinéaire duale de b, b^* donné parameters

$$b^*(\alpha, \beta) = b(\varphi_b^{-1}(\alpha), \varphi_b^{-1}(\beta)$$

Autrement dit, si $\alpha = \beta(u, -)$, $\beta = b(v, -)$ alors $b^*(\alpha, \beta) = b(u, v) = \alpha(v) = \beta(u)$

Proposition : Si $\alpha(H) = 0$ $(\alpha \in R)$ alors $B(H, H_\alpha) = 0$

Autrement dit $H_\alpha^\perp = \mathrm{Ker}(\alpha)$

Démonstration :

$$H_\alpha = [X_\alpha, , Y_\alpha]$$

Supposons $\alpha(H) = 0$

$B(H, H_\alpha) = B(H, [X_\alpha, Y_\alpha] = B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, Y_\alpha) = 0$

Corollaire :

Une racine $\alpha \in R$ est orhtogonale à l'hyperplan

$$\Omega_\alpha = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) = 0\}$$

Démonstration. Soit $\beta \in \Omega_\alpha$

$$\implies \beta(H_\alpha) = 0$$

$$\exists X, Y \in \mathfrak{h} \text{ t.q. } \alpha = B(X, -),\ \beta = B(Y, -)$$

$0 = \beta(H_\alpha) = B(Y, H_\alpha)$

$$Y \in H_\alpha^\perp$$
$$\alpha(Y) = 0 = B(X, Y) = B(\alpha, \beta)$$

$\square$

Proposition :

$$\varphi_B^{-1}(\alpha) = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha$$

$$\varphi_B(H_\alpha) = \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha$$

où $\varphi_\beta(H) = B(H, -)$

Démonstration : Par définition, si $\varphi_B^{-1}(\alpha) = T_\alpha$

$$B(T_\alpha, -) = \alpha(-)$$

n a $\forall H \in h$,

$$B(H_\alpha, H) = B([X_\alpha, Y_\alpha], H) = B(X_\alpha, [Y_\alpha, H] = B(X_\alpha, -[H, Y_\alpha] = B(X_\alpha, -(-\alpha(H))Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, Y_{\alpha)}$$

De plus, $B(H_\alpha, H_\alpha) = \alpha(H_\alpha)B(X_\alpha, Y_\alpha) = 2B(X_\alpha, Y_\alpha)$

$$\implies B(H_\alpha, H) = \alpha(H)\frac{B(H_\alpha, H_\alpha)}{2}$$

$$\implies B\left(\frac{2}{B(H, H_\alpha)} H_\alpha, H\right) = \alpha(H)$$

$$\implies T_\alpha = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)}$$

2) exercice !

ON peut donc réécrire les générateurs du groupe de Weyl

$$W_\alpha(\beta) = \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - 2\frac{B(\beta,\alpha)}{B(\alpha,\alpha)}\alpha$$

Réflexion dans l'hyperplan $\alpha^\perp$

Exemple :

Calculons B sur $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

$$\begin{gathered}
\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3) \\
H \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \\
X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered}$$

(dans la base H, X, Y)

$$B(H,H) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}^2\right) = 8$$

$$B(H,X) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0) \end{pmatrix} = 0$$

$$B(X,X) = B(Y,Y) = 0$$

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

B sur $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$

$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$$B(H_1, H_1) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 12$$

$$B(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)\alpha(H_2) = 2\left[2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 + -1 \cdot 2\right] = 2 \cdot -3 = -6$$

$$B(H_2, H_2) = 12$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définit positive

On peut alors vérifier que les racine sont orthogonale à leur plans de réflexion, $L_1 - L_2$ est la racine qui pointe vers le haut (comme on le dessine habituellement) . En se fiant au dessin habituelle, cette racine devrait être orthogonale à L_1.

Rappel d'algèbre linéaire

si b est donné par une matrice, $b(u, v) = u^t bv$

$$\varphi_b = V \mapsto V^*$$

$$V \mapsto kb$$

$$b(u, v) = u^t bv = b^*(\alpha^t b, v^t b) = u^t b(b^*)b^t v \implies b^t = (b^t)^{-1}$$

$B^{-1} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

La base duale de H_1, H_2 est $L_1, -L_3$ la matrice dans cette base est $\frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

On calcule $B(L_1, L_2 - L_3) = B(L_1, -L_1 + 2(-L_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

jazz hands

On a également

$$B(L_2 - L_3, L_2 - L_3) = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$$

$$\implies \|L_2 - L_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

<u>Corollaire de</u>

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}$$

Si α, β deux racines alors

$$\frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \in Z$$

Classification des algèbres de Lie simples complexes

soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ sous algèbre de Cartan.

Notons $\mathbb{E}$ le sous-espace euclidien de h^* engendré par R munie de B^* qui (dual de Killing) qu' on va noter (,)

$$B(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$$

On

— R est finie et engendre $\mathbb{E}$
— $\ldots$