Physique subatomique

Théorie quantique des champs

La QFT est une théorie très réductionniste. L'idée est de comprendre le monde à partir de l'échelle la plus petite possible.

Remarque (Historique/Paradigme)

Démocrite à la première théorie "réductionniste". Il pense que les atomes sont agencé de manière aléatoire (non divine). Il pense que tout les atomes sont différents. Un théorie qui s'y oppose est la théorie des élément qui viennent seulement en 4 types mais ou tout est continue.
Ces deux théorie on été "combinée" par Dalton qui parlait d'atome d'un nombre de type fini.
En théorie quantique des champs est très continue. Des champs émane les particules et non le contraire.

Il existe une correspondance en QFT entre les types de particules (ex. éléctrons). et les champs. Il y a deux grandes catégories de champs (particlues donc) : les fermions (qui ont un spin demi-entier) et les bosons (qui ont un spin entier). Les fermions sont beaucoup moins "classiques" que les bosons.

Familles

	Q	1	2	3
Leptons	0	ν_e	ν_μ	ν_τ
	-1	e	μ	τ
Quarks	$\frac{2}{3}$	u	c	t
	$\frac{-1}{3}$	d	s	b

Figure 1 – fermions

Il est impossible d'isoler un quark seul. On ne peut qu'observer des combinaisons de quarks.

Tout les fermions sont décris par l'équation de Dirac. Au contraire, les bosons sont décris par des théories de Gauge. Bien que ces transformation de Gauge soient présenté comme relativement peut importante dans le cadre de l'éléctromagnétiste, hot

spin 1

γ Photon [EM]

W^+, Z [faible]

g gluons [forte]

H Higgs sping 0

Graviton (Xd)

FIGURE 2 – bosons

c'est le fondement de la QFT.

Toutes les particules en QFT on une antiparticule qui leur est associé, bien que les bosons soient pour la plupart leur propre anti-particule (sauf $W^+ \leftrightarrow W^-$)

Les champ sont toujours dans leur état fondamentale, sauf lorsqu'il a des particules. L'exception à cette règle est le champ de Higgs qui a une valeur constante non-nulle.

Les masses

Remarque (unitées)

On n'utilise pas le système SI dans le cadre de la QFT. Les masses sont plutôt exprimées en MeV. On utilise également souvent les unités naturelles ($c = 1$ $\hbar = 1$). Le fait que $c = 1 \implies$ on ne fait pas de différente entre longeur et temps. $\hbar = 1 \implies E = \omega$. Comme tout peut finalement s'exprimer en énergie on prend une on peut prendre une unité d'énérgie : le MeV.

$(q, q, q) \leftrightarrow$ baryons (sont des fermions)

$$\text{proton} \to \text{uud} \sim 238\text{MeV} \sim 1\text{GeV}$$

$$\text{neutron} \to udd \sim 237MeV$$

mesons $\rightarrow q\bar{q}$ (sont des bosons)

$$\text{pions} \quad \pi^0 : u\bar{u} \quad \pi^+ : u\bar{d} \quad \pi^- : \bar{u}d$$

Les muons : on deux cents fois la masses de l'éléctron.

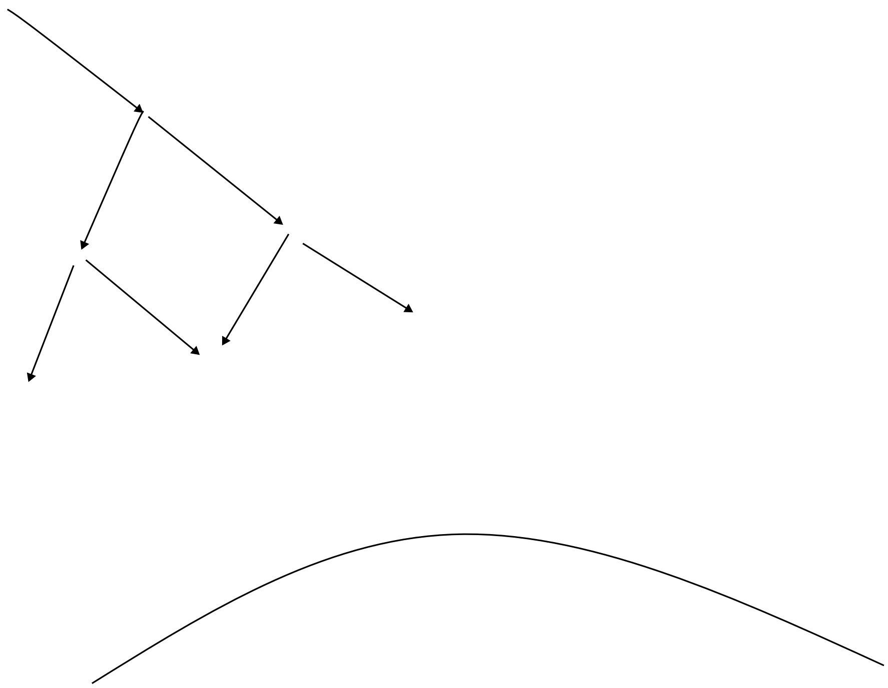


Figure 3 – pluie

Rappels sur la relativité

quadrivecteur :

$$x = (t, x, y, z)$$
$$x^\mu = [t, x, y, z]$$
$$p^\mu = [E, p]$$
$$k^\mu = [\omega, k] = \frac{1}{\hbar} p^\mu$$
$$j^\mu = [p, \vec{j}]$$
$$\partial_\mu = [\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}]$$

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu \text{Contravarient}$$
$$A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu \text{Covarient}$$

$$A_{mu} = g_{\nu\mu} A^{\nu} \qquad A^{\mu} = g^{\nu\mu} A_{\nu}$$

Où g est le tenseur métrique.

<u>Quadrivecteur :</u>

$$\partial_{mu} j^{\mu}(x) = \partial'_{\mu} j'^{\mu} \text{scalaire (donc invarient)}$$

Action je crois

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 (T) \quad \text{non-relativiste}$$

$$\to -m \int_A^V \mathrm{d}\tau = -m \int_A^B \mathrm{d}t \sqrt{1-\mathbf{v}^2} = -m \int_A^B \mathrm{d}t \{1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}^+ \frac{12}{\mathbf{v}^2} - \cdots\} = -m(t_B - T_a) + \frac{1}{2}\int_A^B \mathrm{d}\tau m \mathbf{v}^2 - \cdots$$

$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

$$H = \mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{v} - L = \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1-v^2}} + m\sqrt{1-v^2} = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

<u>4-impulsion</u>

$p^\mu = (E, \mathbf{p}) = m u^\mu$

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Invarient associé au quadri-vecteur

$$p^\mu p_{mu} = p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \cancelto{1}{u^2} = m^2$$
$$p^2 = m^2$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}$$

masse nulle $\to p^2 = 0 \to T = |\mathbf{p}|$

$$p_\pi = (m_\pi, \mathbf{0})$$
$$p_\pi = p_\mu + p_\nu$$

$p_\nu = p_\pi - p_\mu$

$$p_\nu^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi p_\mu$$

$$0 = m_\pi^2 + m_\mu^2 - 2m_\pi E_\mu$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

$$E_{nu} = m_\pi - E_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi} = |\mathbf{p}_\nu| = |\mathbf{p}_\nu|$$

$$|\mathbf{v}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}$$

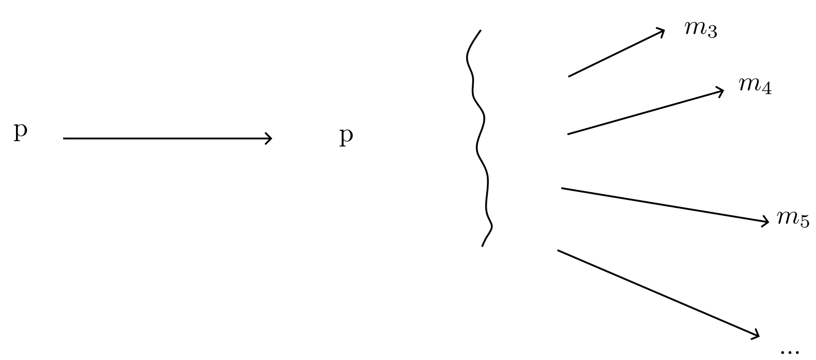


Figure 1 – proton incident

Énérgie de seuil ? (Plus d'Énérgie cinétique à la fin)

$$E = \sum_{i=3}^{N} m_i$$

$$p_1^\mu + p_2^\mu = \sum_{i=3}^{N} p_i^\mu$$

$$(p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = \left[\sum_{i=3}^{N} p_i^\mu\right]^2 = \left(\sum_{i=3}^{N} m_i\right)^2$$

au <u>seuil</u> $p_i = (m_i, \mathbf{0})$

$$E_p = \frac{M_{\text{tot}}^2 - 2m_p^2}{2m_p}$$

L'énérige requise va comme le carré des masses.

Unités naturelles

$$\hbar c = 197\text{MeV}\cdot\text{fm}$$

$$\frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{197\text{MeVfm}}{0,511\text{MeV}} = 400\text{fm} \quad \text{longueur d'onde de Compton}$$

Constante de structure fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

Heaviside-Lorentz

$$\epsilon_0 = 1 \qquad \mu_0 = 1$$

$$\frac{\alpha\hbar}{m_e c} = \frac{e^2}{4\pi m_e c^2} = \text{ rayon classique de l'éléctron}$$

$$\frac{\hbar}{m_e \alpha c} = \frac{4\pi\hbar c\hbar}{e^2 m_e c} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_e e^2} = \text{ rayon de bohr}$$

onde plane

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Condition au limite périodiques à l'univers (une boîte bien sûr)

$$e^{ip_x L_x} = 1$$

$$\mathbf{p} = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x}, \frac{n_y}{L_y}, \frac{n_z}{L_z} \right)$$

où $n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta p_x = \frac{2\pi}{L_x} \leftrightarrow \Delta n_x = 1$$

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{\nu}$$

$$\sum_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} = \nu \int \frac{\mathrm{d}P}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}}$$

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \& \sum_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = \mathbb{1}$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \to \frac{(2\pi)^3}{\nu} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

$$\text{Normalisation continue} \begin{cases} \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') \\ \int \frac{\mathrm{d}^3 P}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \mathbb{1} \end{cases}$$

On a le problème que $\mathrm{d}^3 P$ n'est pas invarient de Lorentz
$\mathrm{d}^3 p \mathrm{d} p^0$ en revanche l'est

$$\mathrm{d}^3 \gamma \mathrm{d}t = \mathrm{d}^4 x = \mathrm{d}^4 x'$$

Le Jacobien

$$J = 1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 P}{(2\pi)^3} \to \int \frac{\mathrm{d}^4}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m) \theta(p^0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 P}{(2\pi)^3} \delta\left((p^0 - E_{\mathbf{p}})(p^0 + E_{\mathbf{p}}) \right) \Theta(p^0)$$

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

$$\delta(\beta x) = \frac{1}{|\beta|} \delta(x)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 P}{(2\pi^3) 2 E_p} \delta(p^0 - \underset{4}{E_p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 P}{(2\pi)^3 2 E_p}$$

$$\text{Normalisation relativiste} \begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}^3 P}{(2\pi)^3 2 E_p} \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \mathbb{1} \\ \langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = 2 E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' (2\pi)^2) \end{cases}$$

2022-09-08

Exercice : Effet compton

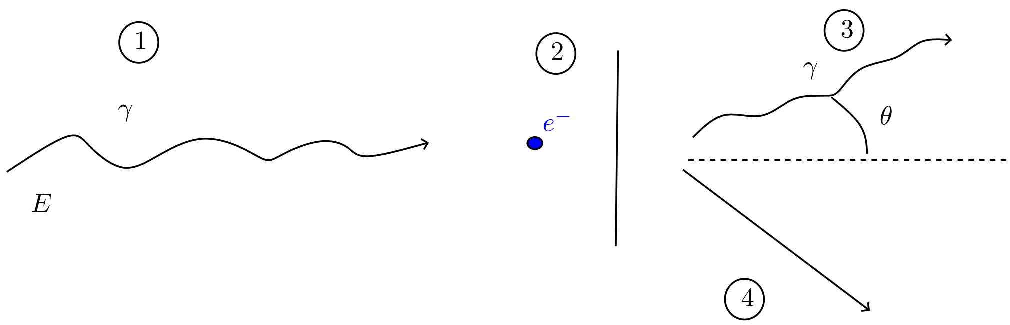


Figure 1 – effet compton

Formulation en termes de 4-vecteur :

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$(p_1 + p_2 - p_3)^2 = p_4^2 = m^2$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_2p_3 = m^2$$

$$\boxed{p_1p_2 = p_1^0p_2^0 - \cancelto{0}{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2} = Em}$$

$$\boxed{p_1p_3 = EE' = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 = EE' - EE'\cos\theta = EE'(1 - \cos\theta)}$$

$$0 + m^2 + 0 + 2Em - 2EE'(1 - \cos\theta) - 2E'm = m^2$$
$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{m}(1 - \cos\theta) - \frac{1}{E} = 0$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{m}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} = \lambda\!\!\bar{} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\implies \lambda\!\!\bar{}' = \lambda\!\!\bar{} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{\lambda\!\!\bar{}_c}(1 - \cos\theta)$$

Désintégration

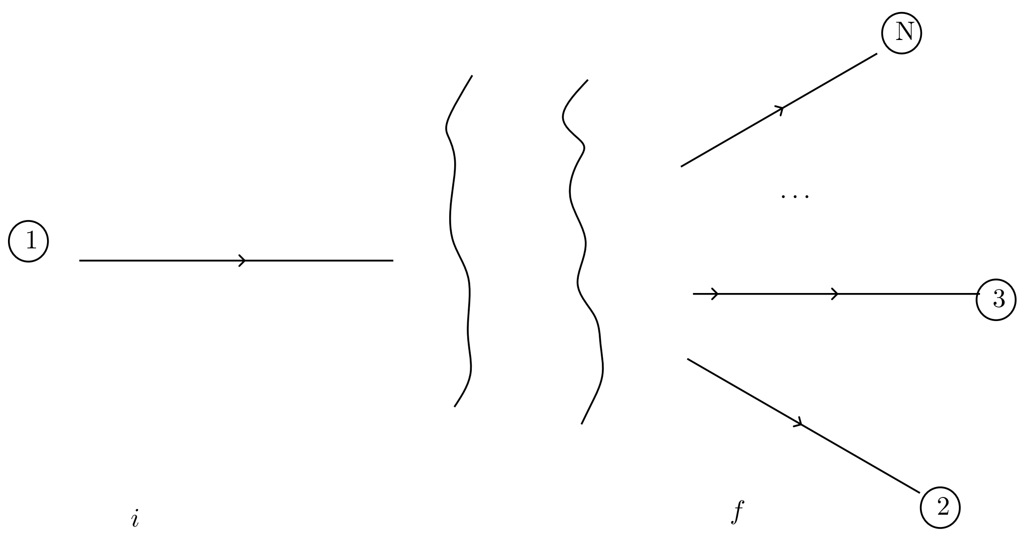


Figure 2 – Désintégration

Règle d'or de Fermi

$$\Gamma_{i\to f} = 2\pi |M_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f)$$

$$M_{fi} = \langle f|\, V \,|i\rangle + \sum_n \frac{\langle f|\, V \,|n\rangle \langle n|\, V \,|i\rangle}{E_i - E_n + i0^+} + \sum_{n,m} \frac{\bar{f} V \,|n\rangle \langle n|\, V \,|m\rangle \langle m|\, V \,|i\rangle}{(E_i - E_0 + i0^+)\,(E - E_m + i0^+)} + \cdots$$

La désintégration est un processus irréversible car il y a beaucoup plus d'état désintégré qu'autrement $\implies \Delta S > 0$

$$\mathrm{d}\Gamma = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{\mathrm{d}^3 P_2}{(2\pi^3)} \frac{\mathrm{d}^3 P_3}{(2\pi^3)} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 P_N}{(2\pi^3)} \delta(E_1 - E_2 - E_3 - \cdots - E_N)$$

$$M_{fi} = \mathcal{M} \delta_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots}$$

$$\implies \mathrm{d}\Gamma = 2\pi |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^2 \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots - \mathbf{p}_N) \delta(E_1 - E_2 - \cdots - E_n) \frac{\mathrm{d}^3 P_2}{(2\pi^3)} \frac{\mathrm{d}^3 P_3}{(2\pi^3)} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 P_N}{(2\pi^3)}$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - p_2 - p_3 - \cdots - p_N) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{\mathrm{d}^3 P_2}{2E_2 (2\pi)^3} \frac{\mathrm{d}^3 P_n}{2E_n (2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \qquad \text{N.C. N.R.}$$

La normalisation relativiste implique que le taux de transition est un invariant relativiste.

Désintégration à deux corps

$$\mathrm{d}\Gamma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{2E_1} \frac{\mathrm{d}p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{\mathrm{d}^3 P_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - p_2 - p_3)$$

Référentielle de la particule 1

$$E_1 = m_1$$

intègre sur $\mathrm{d}^3 p_3 \to \delta(\cancelto{0}{\mathbf{p}_1} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$

$$\mathbf{p}_3 \to -\mathbf{p}_2$$

$$\mathrm{d}^3 p = p^2 \mathrm{d}p \mathrm{d}\Omega$$

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi m_1} \int p^2 \mathrm{d}p |M_{fi}|^2 \frac{\delta(m_1 - \sqrt{p^2 + m_?^2} - \sqrt{p^2 - m_?^2})}{\sqrt{}\sqrt{}}$$

Nouvelle variable d'intégration $E = \sqrt{p^2 + m_2^2} \sqrt{p^2 + m_3^2}$

$$\Gamma = \frac{1}{8\pi m_1} \int_{m_2 + m_3}^{\infty} \mathrm{d}E \frac{p}{E} \delta(m_1 - E) |M_{fi}|^2 = \frac{1}{8\pi m_1^2} \left. |M_{fi}|^2 \right|_{E = m_1} |\mathbf{p}_2|$$

$(m_1 > m_2 + m_3)$

Loi exponentielle

$N(t)$: Nombre de particules

$$N(t + \mathrm{d}t) = N(t) - N\Gamma \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\Gamma N \to N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

vie moyenne : $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$

demi-vie : $t_{1/2} = \tau \ln 2$

$$\tau \Delta E \sim 1$$

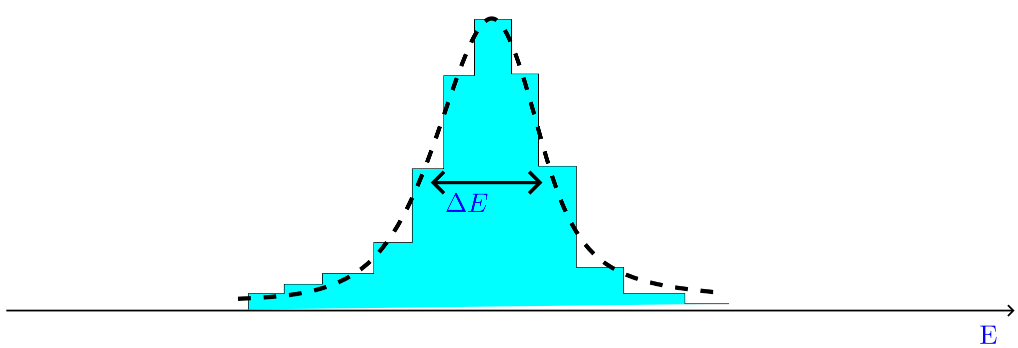


Figure 3 – histogramme avec pic

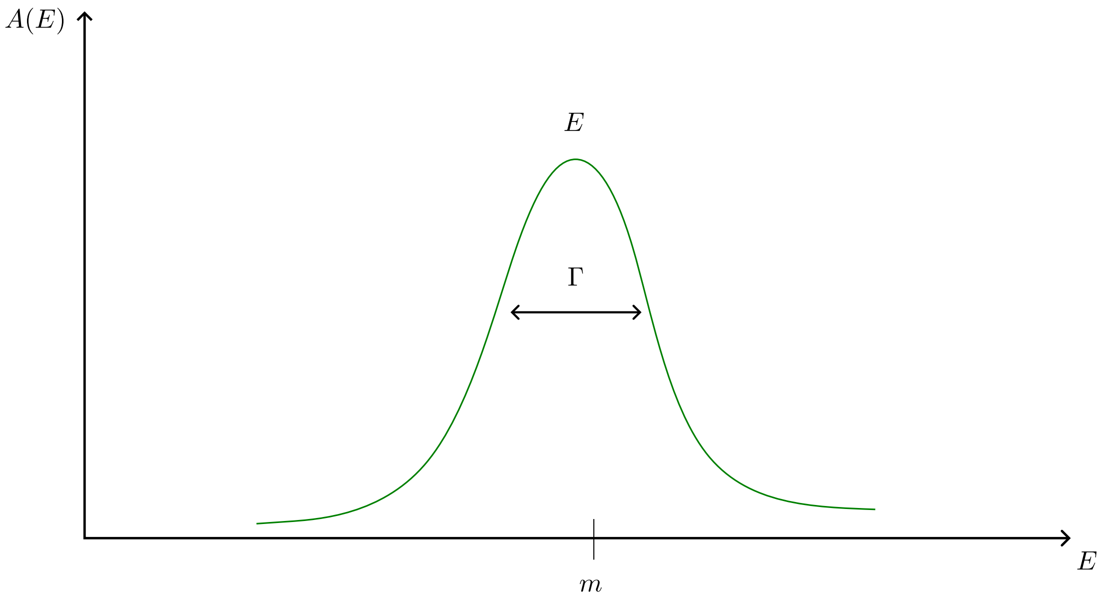


FIGURE 4 – blip bloup

$$A(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\left(E - m^2\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Section Efficace : Brève révision

$$\Phi : \text{ Flux } \quad \frac{\#\text{ de particules}}{\text{surface} \cdot \text{temps}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \text{ Section différentiable}$$

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \text{ Section efficace}$$

2022-09-12

Section différentielle de diffusion

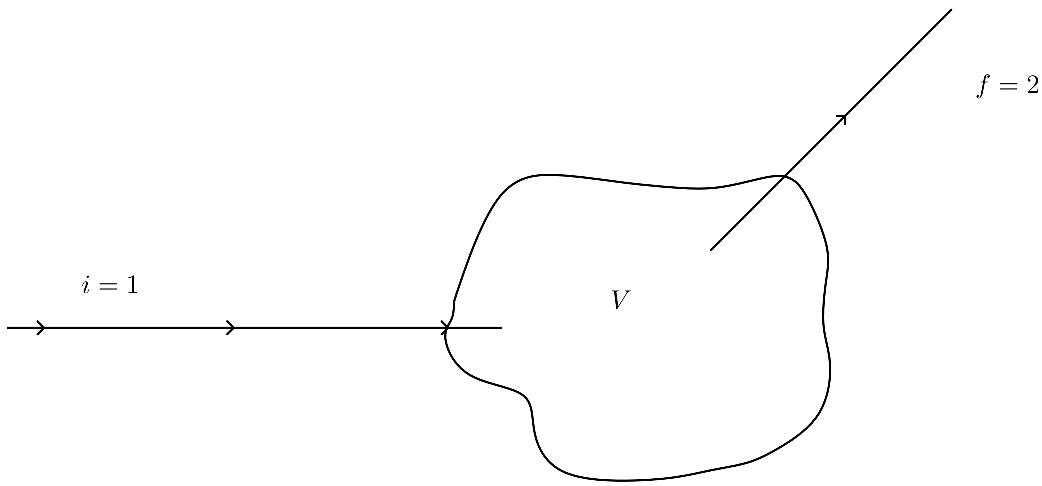


FIGURE 1 – diffusion par un potentiel fixe

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega}$$

$$\Gamma = 2\pi\frac{1}{\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3P_?}{(2\pi)^3}|M_{fi}|^2\delta(E_2 - E_1)$$

L'intégrale deviens, en coord sphérique :

$$\frac{1}{\nu}\int\frac{p_2^2\mathrm{d}p_2\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3}$$

Non relativiste : $E_2 = \frac{p_2^2}{2m}$

$$\mathrm{d}E_2 = \frac{p_2}{m}\mathrm{d}p_2$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^3}\nu\int|M_f i|^2 p_2 m\mathrm{d}E_3\delta(E_{2-E_1}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\nu|M_f i|^2|\mathbf{p}|m$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \nu^2 |M_{fi}|^2$$

$$\text{Flux : } \rho \underbrace{v}_{\text{vitesse} = \frac{|\mathbf{p}|}{m}}$$

$$M_{fi} = \langle f| V |i\rangle = \langle \mathbf{p}_2| V |\mathbf{p}_1\rangle = d^3r \langle \mathbf{p}_2|\mathbf{r}\rangle V(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}_1\rangle$$

$$= \frac{1}{\nu} \int \mathrm{d}^3 r e^{-i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\cdot \mathbf{r}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \tilde{V}(\underbrace{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}_{\mathbf{q} = \text{tansfert de } p})$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left|\tilde{V}(\mathbf{q})\right|^2}$$

Exemple : Loi de Coulomb

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{4\pi r}$$

$$\nabla^2 \phi = -\delta(\mathbf{r}) \qquad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$-\mathbf{q}^2 \tilde{\phi}(\mathbf{q}) = -1 \rightarrow \tilde{\phi}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|q|^2}$$

$$\mathbf{q}^2 = \cdots 4 = \mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{m e_1 e_2}{8\pi p^2}\right)^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega} \rightarrow \infty$$

<u>distribution de charge</u>

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \rightarrow \frac{e_1 e_2}{4\pi r} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

c'est une convolution !

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \tilde{\rho}(\mathbf{q})$$

On obtiens donc un simple facteur de correction

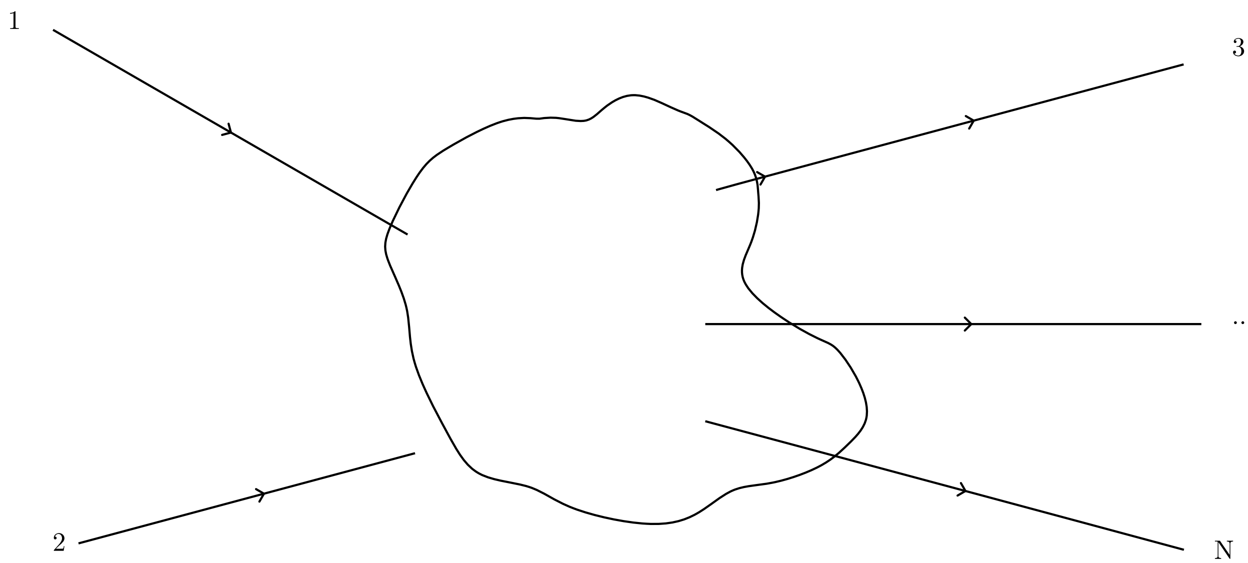


Figure 2 – diffusions à plusieurs particules

Diffusion à plusieurs particules

$$\mathrm{d}\Gamma = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{\mathrm{d}^3 P}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \, \delta^4 \left(p_{1+p_2} - p_3 - p_4 - \cdots - p_N\right) \qquad \text{[N.C.]}$$

$$\boxed{\mathrm{NC} \to \mathrm{NR} \qquad |\mathbf{p}\rangle_{\mathrm{NC}} = \frac{1}{\sqrt{2E}} |\mathbf{p}\rangle_{\mathrm{NR}}}$$

$$\mathrm{d}\sigma = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{E_1}{|\mathbf{p}|} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3} \cdots$$

On veut trouver une quanité qui est egale à $\mathbf{p}_1$ dans le référentiel du laboratoire mais est aussi un invariant

$$(\underbrace{\mathbf{p}_1}_{(E_1, \mathbf{p}_1)} \underbrace{\mathbf{p}_2}_{(m_2, \mathbf{0})})^2 - (m_1 m_2)^2$$

$$E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2 = (E_1^2 - m_1^2) m_2^2 = \mathbf{p}_1^2 m_1^2 (m_2, \mathbf{0})$$

$$\mathrm{d} = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{2E_3 (2\pi)^3} \cdots (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - \cdots - p_N)$$

Résonances & masse invariante

Masse invariente de N particules

$$M^2 = \underbrace{(p_1 + p_2 + \cdots + p_N)}_{p_{\text{tot}}}^{2} = (E_1 + \cdots + E_n) - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N)^2$$

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - M)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

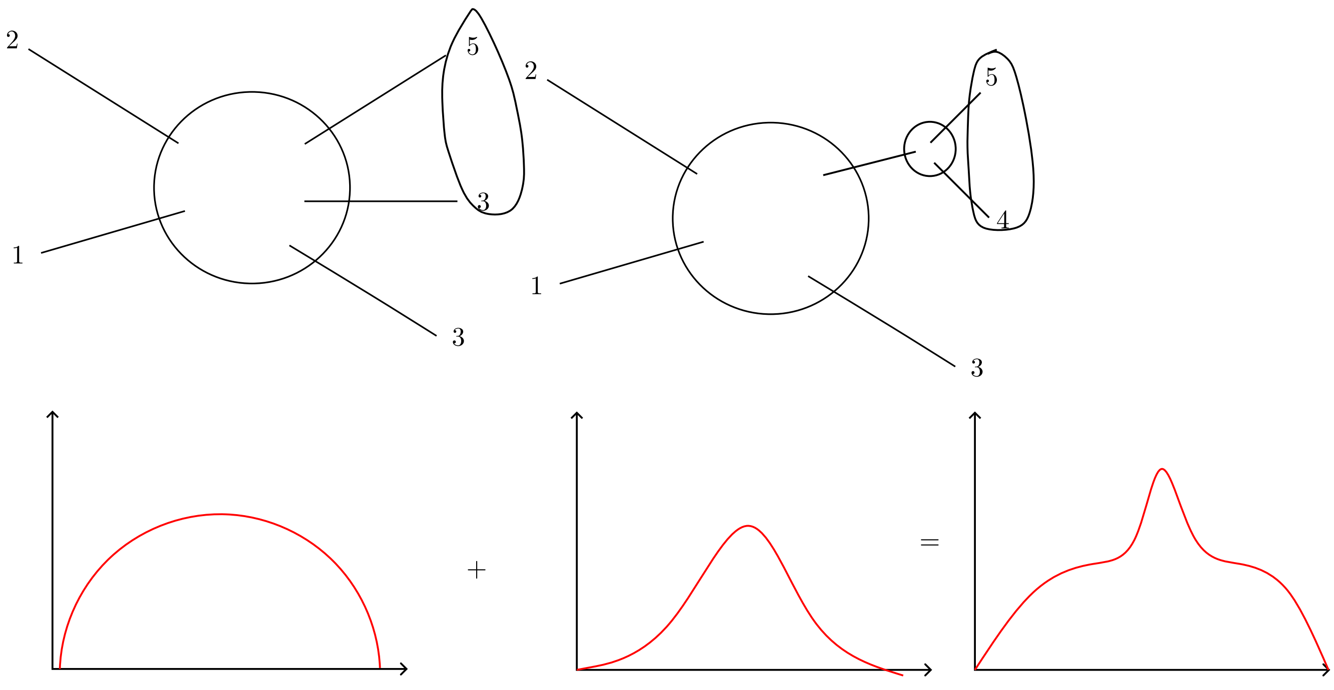


Figure 3 – Désintégration 2

Chaîne de masse μ

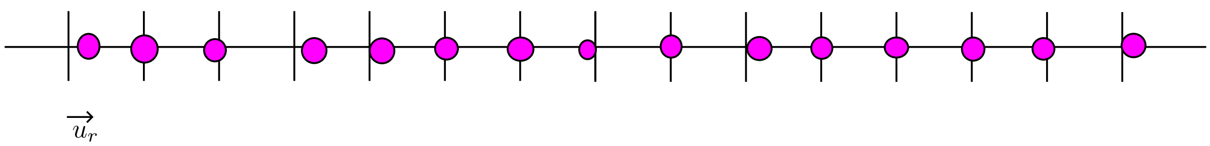


Figure 4 – Chaîne de masse

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu \sum_{r=1}^{N} \left\{ \dot{u}_r^2 - \Omega^2 u_r^2 - \Gamma^2 \left(u_r - u_{r+1}\right)^2 \right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_r} = 0$$

On tourne la manivelle :

$$\omega_q = \sqrt{\Omega^2 + 2\Gamma^2(1-\cos q)}$$

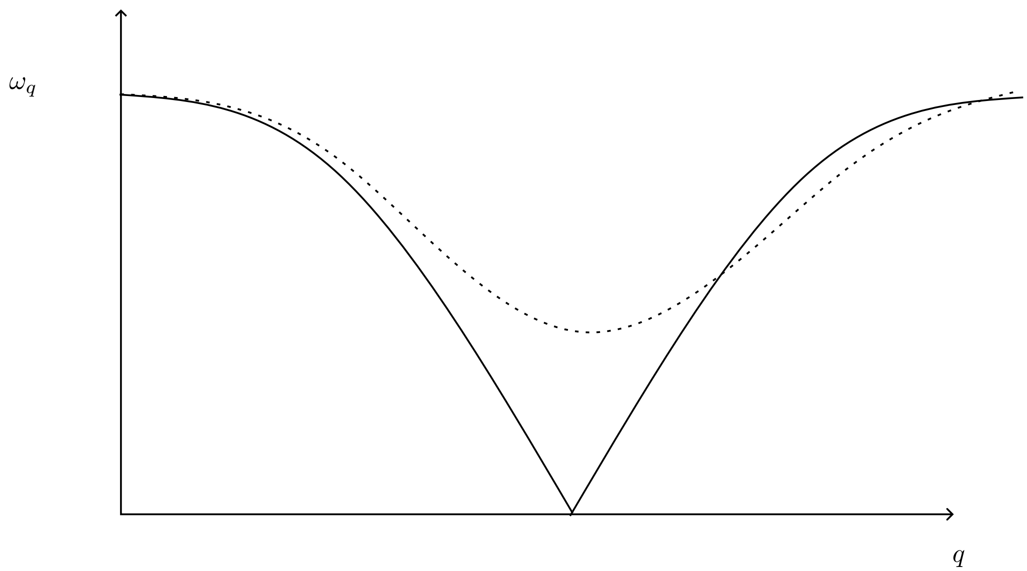


FIGURE 5 – relation de dispersion

2022-09-15

Accél érateur et detecteur de particules

Sources naturelles

Avant les collisionuers,on utilisait des sources naturelles de paticules

- rayons α, β, γ
  - noyaux instables
- $\sim 100 - 200 keV.(Max de quelques MeV)$
- rayons cosmiques
  - énergie jusqu'à 10^{19} eV mais incontrolables
  - surtout des protons
  - pas de concensus sur les origine

Générateur de Cockroft-Walton

- AC $\rightarrow$ DC
- Initiallement utilisé comme accélérateur
- Encore utilsié comme premier stage
- max 1 MeV
- Courrant dans les appareil à rayons x

Générateur van de Graaf

10-20 MeV avec pression de Gaz inerte

Accélérateur tandem

(Accélérer en attirant puis en repoussant) 30 à 40 MeV

Accélérateurs linéaires (LINAC)

- Utilisé dans tout les complexes comme injecteurs
- Peu de perte radiatives
- SLAC (Stanford) $\sim$ 50 GeV (e^-)

Cavité accélératrice

Cavité en Mode TM

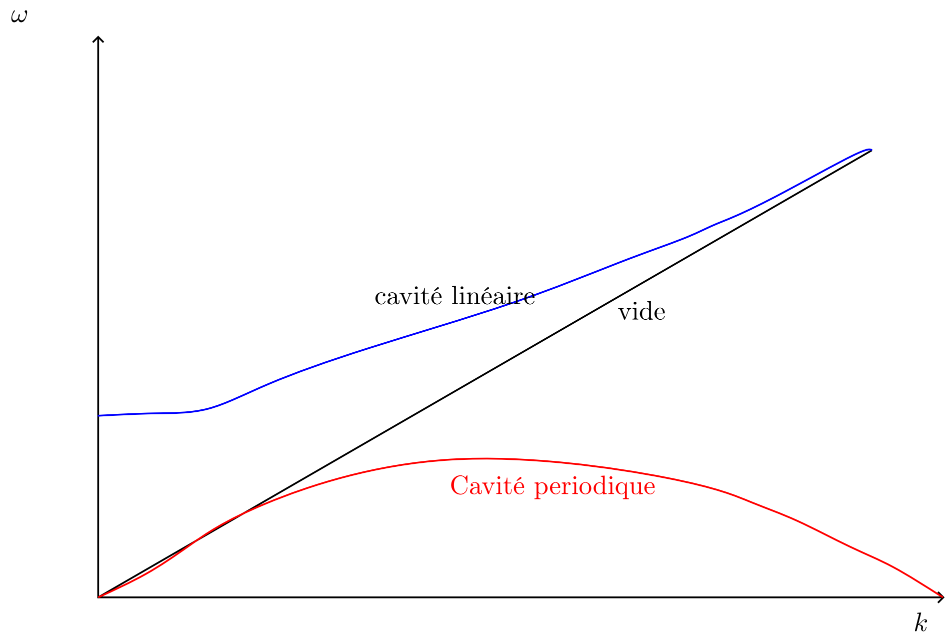


FIGURE 1 – relations de dispertion

Pertes radiatives

100 MeV par tours

Cyclotron

Principe de l'indépendce de la fréquence vs Énérgie

Ne marche plus dans le domaine relativiste

$$\gamma \sim 1.5$$

Syncotrons

Éléments discrets

— aiment dipolaire
— aiment quadripolaire
— cavité EM.

Champ B et fréquence sont ajustés.

Focalisaton Magnétique

On peut focuser un flux de particules avec des quatrupoles magnétiques alternants.

Collisionneurs

Deux faisceaux de sens opposées.

Maximise l'énérgie disponible lors de la création de particules

Pertes par ionisation des particules chargées

Formule de Bethe

Absorption des rayons gamma

- Compton
- Photoéléctrique
- Pair

Chambre à fils

Scintillateur

Détécteurs à été solide

Laboratoires

Diffusion de Neutron de basse énérgie (1KeV)

Le neutron est incident sur un noyeau de rayon de 5fm

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}\left|\tilde{V}(\mathbf{q})\right|^2$$

$$\boxed{\mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

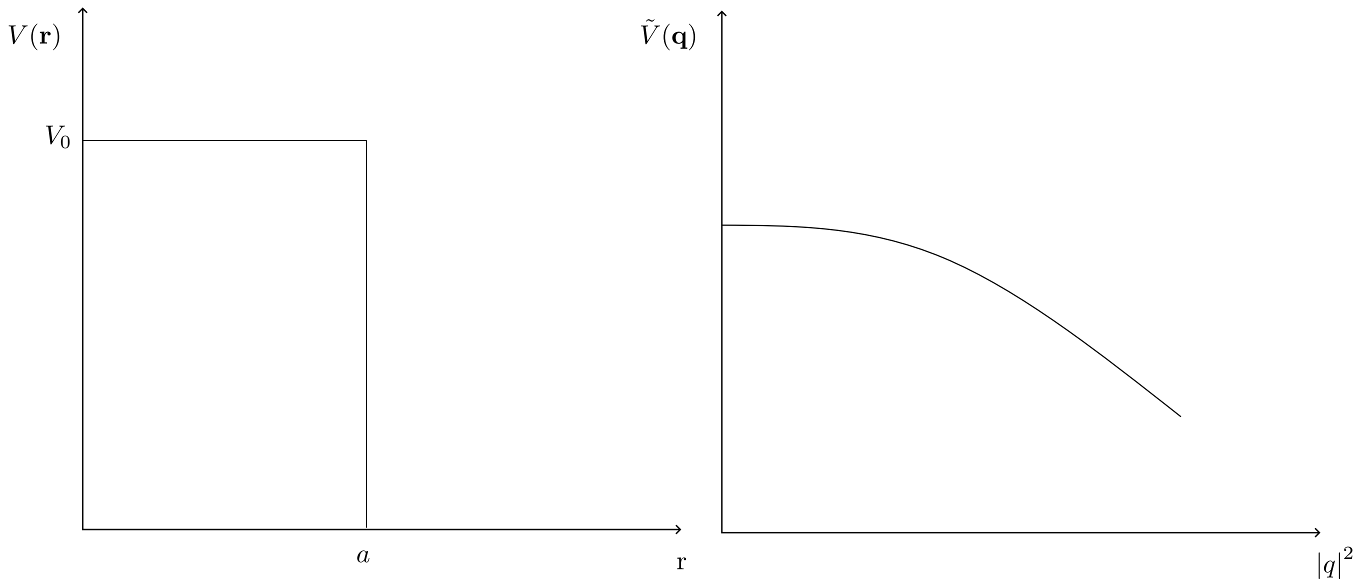


Figure 2 – potentiel

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^3 r v(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \propto a^3 f(x)$$

$$x = |\mathbf{q}|a \quad \text{sans unités}$$

le maximum de q est de $2pa$? vraiment pas sur

$$2a\sqrt{2m_n T_n} = 2 \cdot 5\text{fm}\sqrt{2 \cdot 939\text{MeV} * 0.001\text{MeV}}/(197\text{MeV} \cdot \text{Fm}) \approx 0.07$$

Puisque a est petit, $V(\mathbf{r})$ est *piqué* et donc $\tilde{V}$ est presque constant .

2022-09-19

Retour

Chaîne de masse

$$L = \frac{1}{2}\mu \sum_{r=1}^{N} \left\{ \dot{u}_r^2 - \Omega^2 u_r^2 - \Gamma^2 \left(u_r - u_{r+1}\right)^2 \right\}$$

$$U_i = Ae^{i(qr-\omega t)}$$

$$\omega_q = \sqrt{\Omega^2 + 2\Gamma^2 \left(1 - \cos q\right)} = \sqrt{\Omega^2 + 4\Gamma^2 \sin^2 \frac{q}{2}}$$

Limite continue

$$ra \to x,\ u_r \to u(x),\ u_{r+1} - u_r \to a\partial_x u,\ \sum_r \to \int \mathrm{d}x/a,\ \phi(x) = \sqrt{\frac{mu}{\omega}} u(x)$$

On a donc

$$L = \frac{1}{2}\mu \int_0^\ell \mathrm{d}x \frac{1}{a} \left[\dot{u}^2 - \Omega^2 u^2 - \Gamma^2 a^2 \left(\partial_x u\right)^2\right]$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{d}x \left[\dot{\phi}^2 - \Omega^2 \phi^2 - c^2 (\partial_x \phi)^2\right]$$

On définir la densité lagrangienne telle que

$$L = \int \mathrm{d}x \mathscr{L}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \Omega^2 \phi^2 - c^2 ({}_x\phi)^2\right)$$

Équations de Lagrange :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Omega^2 u - a^2 \Gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\implies \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \quad p := \frac{q}{a} \quad m := \frac{\Omega}{c^2}$$

Hamiltonien

$$H = \sum_r p_r \dot{u}_r - L$$

Dans le cas quasi-continu on a

$$L = \sum_r a\mathscr{L}(\phi(x_r), \dot{\phi}(x_r))$$

Le moment conjugé est alors

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = a\pi(x_r) \quad \text{où} \quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_r}$$

$$[\phi(x_r), \pi(x_s)]_p = \frac{1}{a}\delta_{rs}$$

donc, pour un système continue

$$[(x), \pi(x')]_p = \delta(x - x')$$

donc

$$H = \sum_r a\pi(x_r)\dot{\phi}(x_r) - L = \int \mathrm{d}c \left(\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}\right)$$

On peut donc le représenter comme

$$H = \int \mathrm{d}x\mathscr{H} \quad \text{où} \quad \mathscr{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}$$

Généralisation à trois dimensions

$$L = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r \left\{\dot{\phi}^2 - \Omega^2\phi^2 - c^2(\nabla\phi)^2\right\}$$

L'équation de Lagrange deviens alors

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \Omega^2\phi - c^2\nabla^2\phi = 0$$

$$H = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}$$

$$H = \pi(\mathbf{r})\dot{\phi}(\mathbf{r}) - \mathscr{L}$$

$$\boxed{[\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r}')]_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

Action

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_\mu \phi \partial^u \phi - m^2 \phi^2\right)$$

Équation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0}$$

shro

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}^2 \psi$$

$P = |\psi|^2$

$\mathbf{J} = \frac{1}{2m} \left(\psi * \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*\right)$

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi$

$\boldsymbol{\nabla} \mathbf{J} = \frac{1}{2m} \left\{ \cdots \right\}$

$\frac{1}{2} \psi^* (0) + (0) \psi$

L'équation de Klein-Gordon n'as pas cette propriété

Cette dernière conserve bien le quadri-courrant mais $J^2 = p \ngtr 0$

2022-09-22

Théorie des champs quantique

$$\text{Classique} \rightarrow \text{Quantique}$$
$$[A, B]_p \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]$$

$$L = \int \mathrm{d}\mathscr{L} = \int \mathrm{d}^3 r \left\{ \dot{\phi}^2 - m^2\phi^2 - (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \right\}$$

$$H = \int \mathrm{d}^3 \tau \left\{ \pi(\mathbf{r}) + m^2\phi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \right\} \quad \text{où} \quad \pi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}\dot{\phi}$$
$$[\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r'})]_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'}) \xrightarrow{M.Q.} [\phi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r'})] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'}) \qquad \hbar = 1$$

On introduit un transformé de Fourrier pour profiter de la symétrie de translation :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\nu}\sum_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad \phi_{\mathbf{p}} = \int \mathrm{d}^3 r \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

L'opérateur, une fois passé dans la TF, n'est plus hermitien. Sa conjugason hermitien préserve quand même une expression simple :

$$\phi^\dagger(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) \qquad \phi_{\mathbf{p}^\dagger = \phi_{-\mathbf{p}}}$$

Pareil pour π

$$\pi^\dagger(\mathbf{r}) = \pi(\mathbf{r}) \qquad \pi_{\mathbf{p}^\dagger = \pi_{-\mathbf{p}}}$$

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \frac{1}{\nu^2}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p'}} \left\{ \pi_{\mathbf{p}}\pi_{\mathbf{p'}} e^{i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p'}\right)} + \cdots \right\}$$

L'intégrale sur les exponentielles donne des $\delta(p - p')$

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\nu}\sum_{p} \left\{ \pi_{\mathbf{p}}\pi_{-\mathbf{p}} + \left(m^2 - \mathbf{p}^2\right)\phi_{\mathbf{p}}\phi_{-\mathbf{p}} \right\}$$
$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\nu}\sum_{p} \left\{ \pi^\dagger_{\mathbf{p}}\pi_{\mathbf{p}} + \omega_p^2 \phi^\dagger_{\mathbf{p}}\phi_{\mathbf{p}} \right\}$$

$$[\phi_{\mathbf{p}}, \pi_{\mathbf{p'}}] = \int \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' e^{-i\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{p'}\cdot\mathbf{r'}\right)}[\phi(r), \pi(r')] = \cdots = i\nu\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{p'}}$$

$$[\phi_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}'}] = 0 \qquad [\pi_{\mathbf{p}}, \pi_{\mathbf{p}'}] = 0$$

On introduit alors

$$a_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2\nu}} \left(\phi_{\mathbf{p}} + i \frac{\pi_{\mathbf{p}}}{\omega_{\mathbf{p}}} \right) \qquad a_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2\nu}} \left(\phi_{\mathbf{p}}^{\dagger} - i \frac{\pi_{\mathbf{p}}^{\dagger}}{\omega_{\mathbf{p}}} \right)$$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = \cdots = \delta_{p,q}$$

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right)$$

2022-09-26

QFT : champ scalaires avec interaction

$$L = \frac{1}{2} < mu \sum_{r=1}^{N} \left\{ \dot{u}_r^2 - \Omega^2 u_r^2 - \Gamma^2 \left(u_r - u_{r+1}\right)^2 - \lambda u_t^3 \right\}$$

C'est un développement à l'ordre 3 et non un résultat exacte

$$H = H_0 + \underbrace{H_1}_{perturbation}$$

$$H_1 = \frac{g}{6} \int \mathrm{d}x \phi^3(x) \qquad \frac{g}{6} = \lambda \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

$$\boxed{3\mathrm{D} \rightarrow H_1 = \frac{g}{6} \int \mathrm{d}^3 r \phi^3(\mathbf{r})}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega p}} \left(a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}\right)$$

$$H_1 = \frac{g}{6} \frac{1}{\nu^3 2} \int \mathrm{d}^3 r \sum_{p,p',q} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p \omega_{p'} \omega_q}} \left(a_p e^{i\mathbf{pr}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{pr}}\right) \left(a_{p'} e^{i\mathbf{p'r}} + a_{p'}^\dagger e^{-i\mathbf{p'r}}\right) \left(a_q e^{i\mathbf{qr}} + a_q^\dagger e^{-i\mathbf{qr}}\right)$$

On intègre sur $\mathbf{r}$

$$H_1 = \frac{g}{6} = \frac{1}{2\sqrt{2\nu}} \sum_{p,q} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{p-q} \omega_q}} \left(a_p a_{p-q} a_q + a_q^\dagger a_{p-q}^\dagger a_p^\dagger\right) + \cdots \right\}$$

Tout les termes qui sont une suite d'opérateur de création, créent au total un quantité de mouvement nulle.

Dans les différents termes, on fait des changmenents de varaibles du type $q \rightarrow q + p$

$$H_1 = \frac{g}{6} \frac{1}{2\sqrt{2\nu}} \sum_{p,q} \frac{1}{\sqrt{\omega_{p\omega_q \omega_{p+q}}}} \left[a_p a_{-p-q} a_q + a_p^\dagger + a_q a_p a_q + a_p a_{p+q}^\dagger a_q + \cdots\right]$$

Cette perturbation représente l'interaction entre différente excitation du champ. Des genres de *collisions*. On considère, puisqu'on fait de la théorie des perturbation, que ces collision sont assez peu fréquente et contribuent peu à l'énérgie totale.

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = 2\pi |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$M_{fi} = \langle f|H_1|i\rangle + \cdots$$

$$|i\rangle = a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger |0\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$$
$$|f\rangle = a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger |0\rangle = a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle$$

$\langle f|H_1|i\rangle = 0$ car les états qui n'ont pas le même nombre de particules sont orthogonaux. On doit donc aller au second ordre de perturbation. *L'état intermédiaire* $|n\rangle$ permet de créer des particules de manière seulement *temporaire*.

$$M_{fi} = \sum_n \frac{\langle f|H_1|n\rangle \, \langle n|H_1|i\rangle}{E_1 - E_n}$$

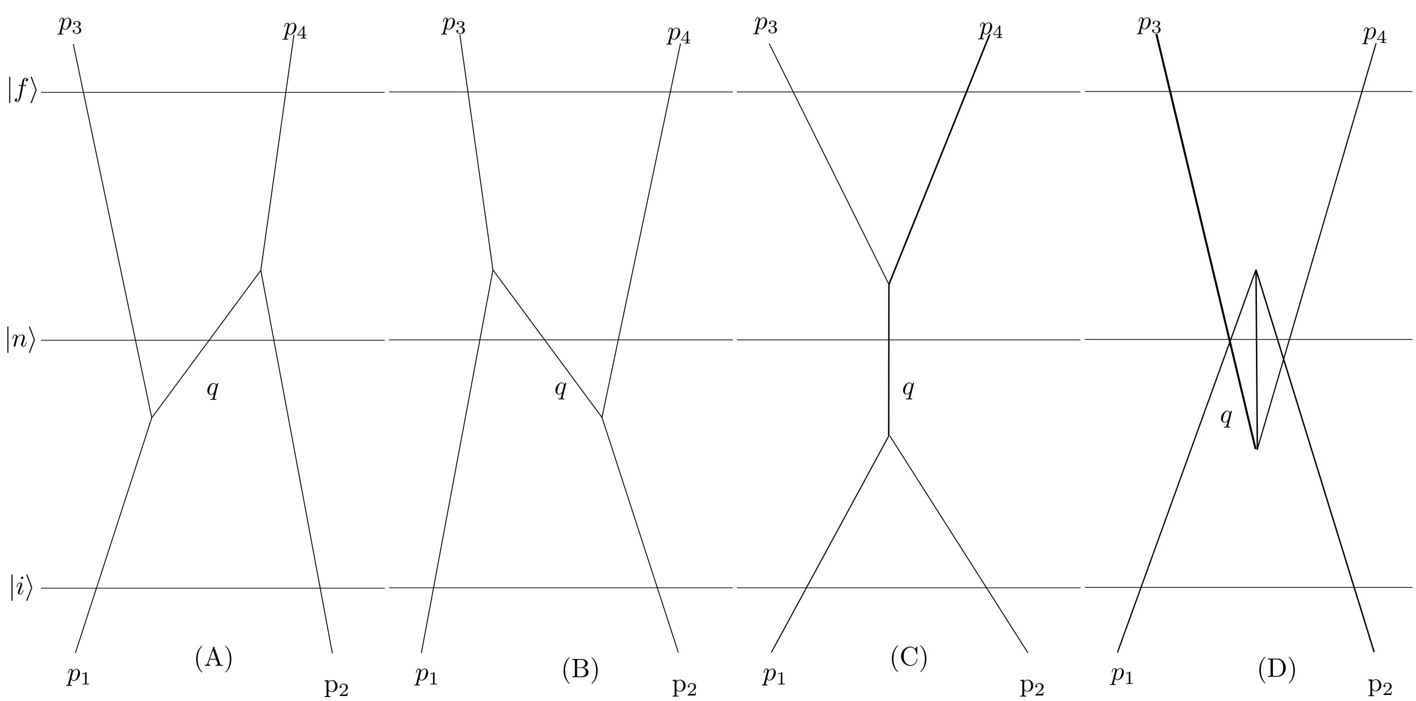


FIGURE 1 – diagramme pas de Feynmann

$$(A) \begin{cases} \langle n|H_1|i\rangle = \langle 0|\, a_3 a_2 a_q (a_q^\dagger a_1 a_3^\dagger) a_1^\dagger a_2^\dagger \,|0\rangle \\ \qquad \langle 0|\, a_p a_p^\dagger \,|0\rangle = 1 \\ \qquad \langle 0|\, [a_p, a_p^\dagger] + a_p^\dagger a_p \,|0\rangle \\ \qquad \cdot\, g \dfrac{1}{\sqrt{8\nu\omega_1\omega_2\omega_3}} \\ \langle f|H_1|n\rangle = \langle 0|\, a_3 a_4 (a_4^\dagger a_2 a_{q)} a_3^\dagger a_2^\dagger a_q^\dagger \,|0\rangle \\ \qquad \cdot\, g \dfrac{1}{\sqrt{8\nu\omega_2\omega_q\omega_{1-3}}} \\ M^{(A)} = \frac{g^2}{8\nu\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} \frac{1}{\omega_{1-3}} \frac{1}{\omega_1-\omega_3-\omega_{1-3}} \end{cases}$$

Les autres diagramme nous mène presqu'exactement à la même équation ex :

$\mathrm{M}^{(A)} = \frac{g^2}{8\nu\sqrt{\omega_{1\omega_2\omega_3\omega_4}}}\frac{1}{\omega_{1-3}}\frac{1}{\omega_1-\omega_3-\omega_{1-3}}$

2022-09-28

Section efficasse avec des diagrammes de Feynman

$$\mathcal{M} = g^2 \left\{ \frac{1}{(p_1 - p_3)^2 - m_2} + \frac{1}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \right\}$$

Puisque les particules en question sont indiscernables on rajoute un facteur $\frac{1}{2}$ pour enlever les états comptés en trop

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \frac{1}{E^2}$$

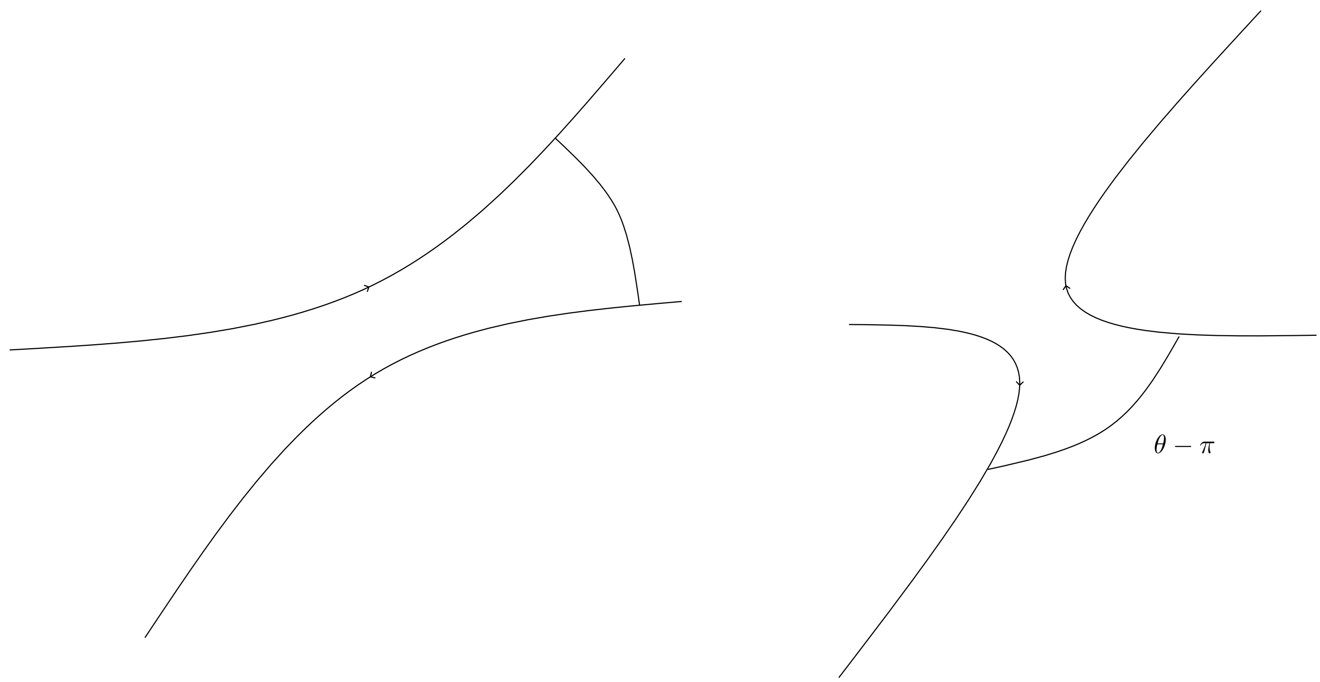


Figure 1 – collsion

$$\mathbf{p}_1 = p\hat{x}$$
$$\mathbf{p}_2 = -p\hat{x}$$
$$\mathbf{p}_3 = p\hat{n}$$
$$\mathbf{p}_4 = -p\hat{n}$$

$$\ldots$$

$$(p_1 + p_4)^2 = (2E)^2 = 4E^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{128\pi^2} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{4(\gamma^2-1)\sin^2\frac{\theta}{2}+1} + \frac{1}{4(\gamma^2-1)\cos^2\frac{\theta}{2}+1} + \frac{1}{4\gamma^2-1} \right)$$

limite non relativiste ($\gamma \to 1$) :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \to \frac{g^4}{128\pi^2 m^4} \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Limite ultra relativiste ($\gamma \gg 1$) :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \to \frac{g^4}{128\pi^2 m^2} \frac{1}{\gamma ?} \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{4} \right)^2$$

On remarque que la probabilité de collision dans la limite ultra relativiste est beaucoup plus faible que dans la limite classique.

Feynman rules !

1. $i\mathcal{M}$
2. identifier les particles entrantes et sortantes
3. construire les diagrammes $\to N$ vertex (ordre N en théorie des perturbation)
4. chaque ligne $\to$ 4-impulsion
5. vertex $\to -ig\,(2\pi)^4\,\delta(k_1 + k_2 - k_3)$
6. ligne interne $\to$ $\frac{-i}{q^2-m^2}$
7. intégrer sur les 4-impulsion internes $\int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}$
8. Amputer le facteur global $(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 \cdots - p_n)$

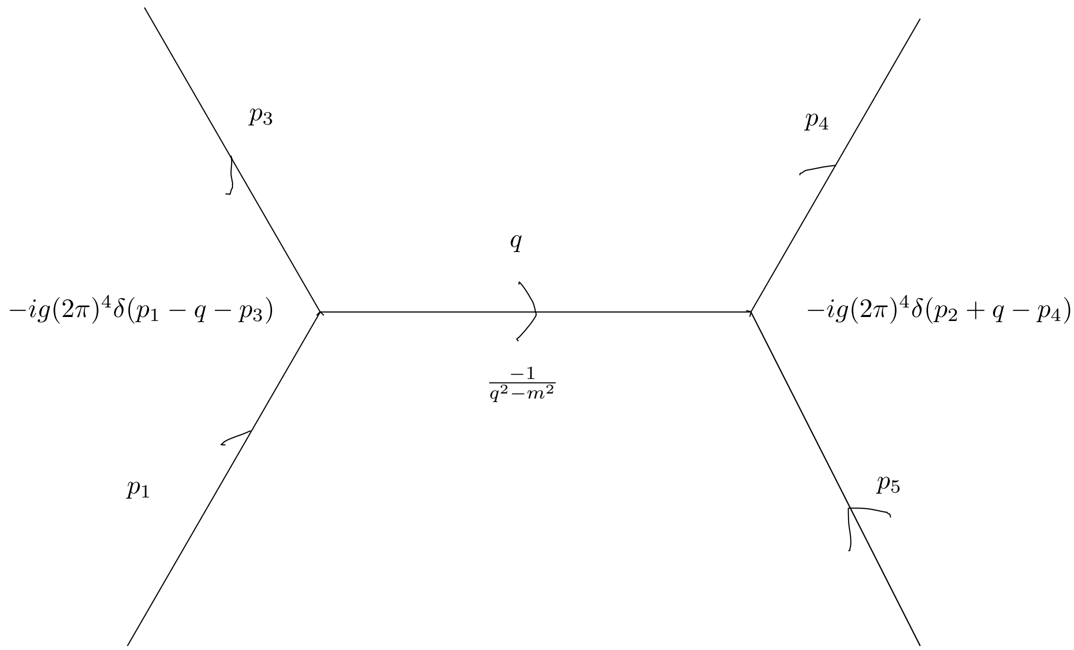


Figure 2 – Diagramme

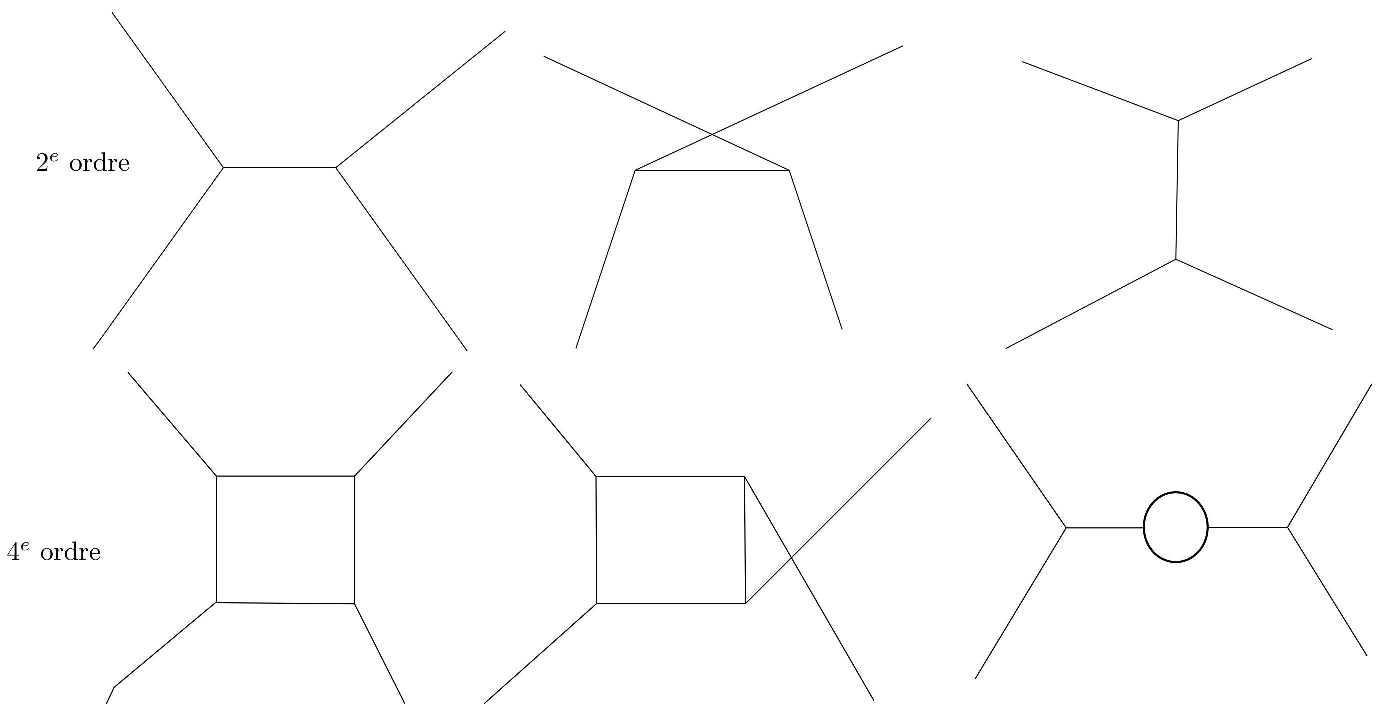


Figure 3 – diagrammes

Potentiel de Yukawa

Le potentiel de Yukawa donne le potentiel généré par des particules virtuelles. Il décroit exponentiellement en fonction de la masse. Cela explique la porté limités des forces qui utilise des bosons massifs. La force électromagnétique a une portée infinie car la photon est sans masse.

$$U(r) = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r}$$

$$\nabla^2\Phi \cancel{-\partial^?_?\Phi} = -e\delta(r) \quad \text{Potentiel retardé}$$

$$\nabla^2\Phi = -e\delta(\mathbf{r}) \to \Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi r}$$

<u>spineur</u>

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$$

rotation :

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathscr{R}(\mathbf{r}, \theta)\mathbf{r}$$

$$\psi(\mathbf{r}) \to R(\hat{n}, \theta)\psi(\mathbf{r})$$

$$R(\hat{n}, \theta) = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\sigma\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\hat{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2} \qquad \sigma = \begin{pmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z\end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger x \to \text{scalaire}$$
$$\psi^\dagger\sigma x \to \text{vecteur}$$

2022-34-29

Retour sur les spineurs

On peut montrer que $\psi^\dagger \vec{\sigma} X$ est un vecteur.

Pour se faire on va transformer que la quantité $\psi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{A}$, qui devrait être un scalaire, par une rotation.

$$\rightarrow \psi^\dagger R^\dagger \vec{\sigma} \vec{\sigma} R X \cdot \mathcal{R} \vec{A}$$

$$\psi_i^\dagger X A_i = \psi^\dagger R^\dagger \sigma_i R X \mathcal{R}_{ij} A_j = \psi^\dagger R^\dagger \sigma_j R X \mathcal{R}_{ji} A_i$$

$$\psi^\dagger \sigma_i X = \psi^\dagger R^\dagger \sigma_j R X \mathcal{R}_{ji}$$

$$R \sigma_i R^\dagger = \mathcal{R}_{ji} \sigma_j$$

$$\boxed{R^\dagger \sigma_i R = \mathcal{R}_{ijj}}$$

On représente un vecteur à trois composante par un matrice

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

$$X = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} X = 0 \qquad \det X = -\mathbf{r}^2$$

alors

$$X' = R \sigma_i R^\dagger x_i = R X R^\dagger$$

On fait maintenant la même chose pour des 4-vecteurs.

$$X(x) = \begin{bmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{bmatrix} = x^0 \mathbb{1} - x^3 \sigma_3 - x^1 \sigma_1 -^2 \sigma^3 = x_\mu \sigma^\mu$$

$$\det X = x_\mu x^\mu$$

$$\det X = \det X' \qquad X = N^\dagger X' N \qquad \det N = 1$$

$$\det X = \det X'$$

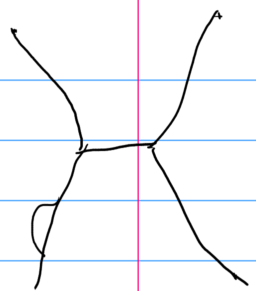
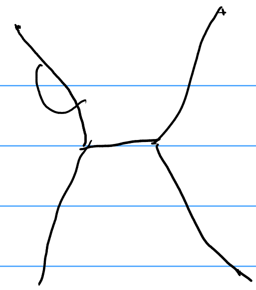
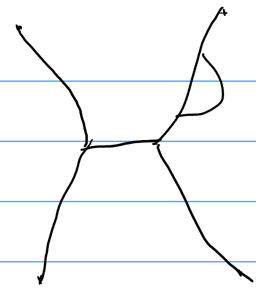
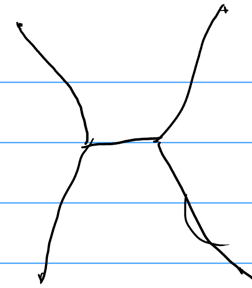
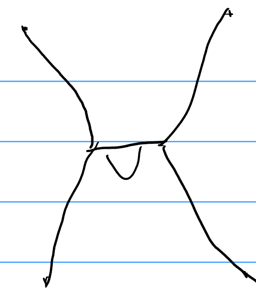
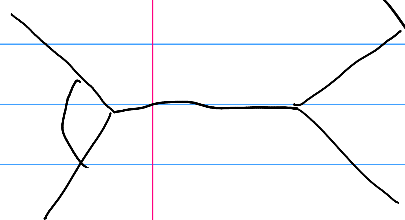
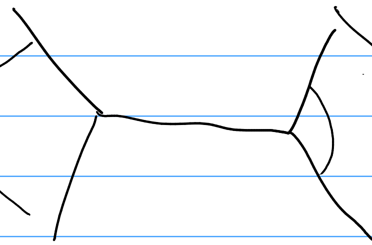
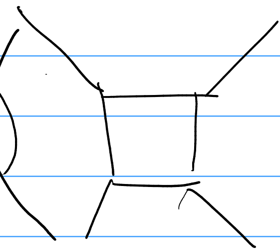
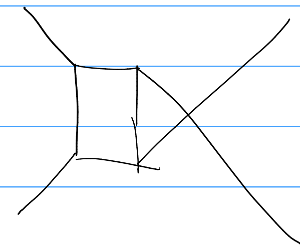
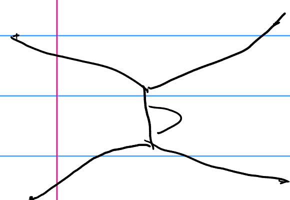
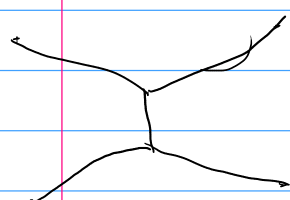
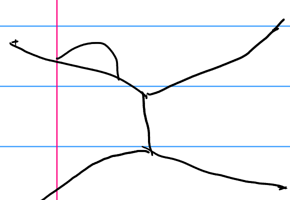
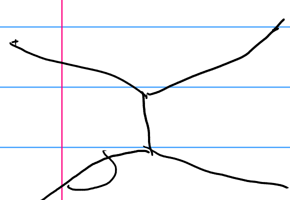
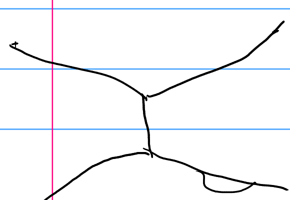
On a deux contraintes sur 8 degrés de liberté (4 degrés complex) et on impose deux contraintes sur les determinant. On a donc 6 degrés de liberté qui correspondent à ceux des trasformation de Lorentz.

$$\begin{aligned} x'^{\nu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ x'_{\mu} &= \Lambda^{\nu}_{\mu} x_{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x_{\nu} \\ X' = x'_{\mu}\sigma^{\mu} &= \Lambda^{\nu}_{\mu} x_{\nu}\sigma_{\mu} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\boxed{N^\dagger \sigma^\mu N = \Lambda^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}}$$

C'est vrai pour un définiton de type 1, pour le type 2 (avec les $+$) on aurait

$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M = \Lambda^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}$$

Théorie en ϕ^4

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}_{mu}\phi^{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4$$

Le premier ordre en énérgie ne s'annule pas, c'est donc plus simple

$$H_1 = \frac{g}{4!}\int \mathrm{d}^3 vr \phi^4 \left(a + a^\dagger\right)\left(a + a^\dagger\right)\left(a + a^\dagger\right)\left(a + a^\dagger\right)$$

$$M_{fi} = \langle f|H|i\rangle = g$$

2022-31-06

spineurs

$$x = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x_i^1 x^3 \\ -x^1 - ix^2 & x_x^{0\,3} \end{pmatrix} = x_\mu^\mu \qquad \sigma^\mu = (\mathbb{1},\, \sigma_1,\, \sigma_2,\, \sigma)3$$

$$N^\dagger X' N = X \qquad \det N = 1$$

On peut aussi écrire X comme

$$X = x_\mu \tilde{\sigma}^\mu \qquad \tilde{\sigma}^\mu = (\mathbb{1},\, -\vec{\sigma})$$

$$R(\mathbf{n}, \theta) = \cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\theta}{2}$$
$$P(\hat{v}, \eta) = \cosh\frac{\eta}{2} + \sinh\frac{\eta}{2}$$
$$N = PR$$
$$M = P^{-1}R$$

$$N^\dagger \sigma^\mu N = \Lambda_\nu^\mu \sigma^\nu$$
$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M = \Lambda_\nu^\mu \tilde{\sigma}^\nu$$

$$\psi_R' = N\Psi_R$$
$$\psi_L' = M\psi_L$$

Champs spinoriels

$$\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_u \psi_L \to \cdots$$

On essaie de construire une action à partir des ces nouveau champs

$$i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L \qquad i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R$$

$$S = i\int \mathrm{d}^4 x \psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_L$$

$$S^* = -i\int \mathrm{d}^4x \left(\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L\right)^\dagger = -i\int \mathrm{d}^4x \partial_\mu \psi^\dagger \sigma^\mu \psi_L = -i\int \mathrm{d}^x \left\{\partial_\mu \left(\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \psi_L\right) - \psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L\right\} = -i\oint_\infty \mathrm{d}^3a \cdots + i\int \mathrm{d}^4x \psi_L^\dagger \sigma \partial_\mu \psi_L$$

On ne s'intéresse pas au premier terme car il s'annule si on intègre sur tout l'espace. On peut donc considérer cette action comme réel. Si on intègre pas sur toute l'espace, on peut toujours argumenter que la variation de l'action est réel et c'est tout ce qui nous interesse.

$$S_R = i\int \mathrm{d}^4x \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R$$

$$\delta S_R = i\int \mathrm{d}^4x \partial\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + \cdots = \cdots + \cdots = 0$$

$$\implies \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0 \qquad \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \quad \text{Équation de Weyl}$$

On pose comme solution

$$\psi_{L(x)} = u_L e^{-ip_\mu x^\mu}$$

On va supposer que la quadri-impulsion est donnée par :

$$p^\mu = (E, 0, 0, p)$$
$$p_\mu = (E, 0, 0, -p)$$

$$\sigma^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} E-p & 0 \\ 0 & E+p \end{pmatrix}$$
$$\tilde{\sigma}^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} E+p & 0 \\ 0 & E-p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E-p & 0 \\ 0 & E+p \end{pmatrix} u_R = 0$$
$$\begin{pmatrix} E+p & 0 \\ 0 & E-p \end{pmatrix} u_L = 0$$

$$u_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = p > 0$$
$$u_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = p > 0$$

Lagrangien de Dirac

$$\mathscr{L}_D = i\psi_L^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\left({}_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L\right)$$

$$u_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = p > 0$$

Les unités de l'action sont celles de $\hbar$, dans notre système d'unité donc $[S] = 1$

$[\mathscr{L}] = L^{-4}$

Nouvelle notation : le spineur de dirac

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{bmatrix}$$

$$L_D = i\psi^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{bmatrix} \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \psi$$

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{bmatrix}$$

$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1 \qquad \left(\gamma^k\right) = \begin{bmatrix} -\sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & -\sigma_k^2 \end{bmatrix} = -\mathbb{1}$$

$$\gamma^0 \gamma^k + \gamma^k \gamma^0 = 0$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu}$$

$$\boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0}$$

$$\gamma^\mu A_\mu = \not{A}$$
$$\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$$

$$\mathscr{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

On passe dans la machine de la variation nulle de l'action pour obtenir

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad \text{L'équation de Dirac !}$$

$$\boxed{(i\not{\partial} - m)\psi = 0}$$

2022-33-13

Révision

Spineur de Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} R$$

Le lagrangien de Dirac,

$$\mathscr{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

mène à l'équation de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2q^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger$$

$$\gamma^\mu \to U\gamma^\mu U^\dagger$$

$$\psi \to U\psi\$$$

Représentation de Dirac

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \psi_L + \psi_R \\ -\psi_L + \psi_R \end{bmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}$$

Ondes plannes

$$\psi = \psi_{\mathbf{p}} e^{-ip_\mu x^\mu}$$

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)\, \psi_{\mathbf{p}} = 0$$

$$\left(E\gamma^0 - \sum_i \gamma^i p^i - m \right) \psi_{\mathbf{p}} = 0$$

En multipliant par γ^0 de la gauche, on obtiens ($(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$)

$$\left(E - \sum_i \gamma^0 \gamma^i p^i - m \right) \psi_{\mathbf{p}} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & \mathbf{p}\cdot\sigma \\ \mathbf{p}\cdot\sigma & -m \end{bmatrix}}_{"H"} \psi_p = E\psi_p \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} m & -i\sigma\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -i\sigma\cdot\boldsymbol{\nabla} & -m \end{bmatrix}}_{"\mathscr{H}"} \psi_p = i\frac{\partial \psi}{\partial t}\psi_p$$

Au repos ($\mathbf{p} = 0$), on a

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \psi_0 = E\psi_0$$

$$E = m \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = -m \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(o_\mu \gamma^\mu + m)\,(p_\mu \gamma^\nu - m) = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2 = p_\mu p_\mu \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu\right) - m^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2$$

$$(p_\nu \gamma^\nu + m) \boxed{(p_\mu \gamma^\mu - m)\, \psi_p} = 0$$

$$\left(p^2 - m^2\right) \psi_{\mathbf{p}} = 0$$

$$p^2 = m^2 \qquad E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

m se comporte donc bel et bien comme une masse

$$(p_\nu \gamma^\nu + m) = \begin{bmatrix} p^0 + k & 0 & -p_z & -p_x + ip_y \\ 0 & p^0 + m & -p_x - ip_y & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -p^0 + m & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -p^0 + m \end{bmatrix}$$

Les quatres colonnes sont les vecteurs $u_{\mathbf{p}_i}$ si on les normalise par $\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}(E_p+m)}}$

2022-31-31

Remise de l'intra

Quantification du champ de Dirac

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1}^{4} u_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Retour sur le champ scalaire

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + a^\dagger_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \int \mathrm{d}3r \left(u_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right)^\dagger \left(u_{\mathbf{p},s} e^{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

$$c_{\mathbf{p},s} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int \mathrm{d}^3 r u^*_{\mathbf{p},s,\alpha} \psi_\alpha(\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}})$$

$$\mathscr{L}_D = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = i\psi^\dagger \partial_\mu \psi_\alpha + i \sum_{k=1}^{3} \bar{\psi}^k_\alpha \gamma^?_{?,?} \partial_? \psi_? - m\bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha$$

$$\psi_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi^*_\alpha$$

$$\mathscr{H} = \sum_\alpha \psi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathscr{L} = \cdots = -i \sum_{k=1}^{3} \bar{\psi}_\alpha \gamma^k_{\alpha,\beta} \partial_k \psi_\beta + \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha$$

$$[\psi_\alpha(\mathbf{r}), \pi_\beta(\mathbf{r}')]_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\text{commutateur}} i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$[\psi_{\alpha(\mathbf{r})}, \psi^\dagger_\beta(\mathbf{r})]$$

$$c_{p,s} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \int \mathrm{d}^3 r u^*_{\mathbf{p},s,\alpha} \psi^\dagger_\alpha(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$
$$c^*_{p,s} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \int \mathrm{d}^3 r u_{\mathbf{p},s,\alpha} \psi^\dagger_\alpha(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

$$[c_{ps},, c^\dagger_{p's'}] = \frac{1}{\mathscr{V}} \int \dot{3} r d^3 r' \sum_{\alpha,\beta} u^*_{ps\alpha} U_{ps\alpha} e^{-i\mathbf{pr}+i\mathbf{pr}} [\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'})]$$

$$= \frac{1}{\mathscr{V}} \int d^3 r \sum_{\alpha} e^{-i\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right)\cdot \mathbf{r}} u^*_{psa} u_{p's'\alpha'}$$

$$= \delta_{\mathbf{pp}'} \delta_{ss'}$$

La relation qu'on obtiens n'est pas tout à fait vrai, le résultat qu'on obtiens ne donne pas ce qu'on voudrait pour des fermions. C'est normal puisque le résultat qu'on obtiens à entièrement été dérivé de la mécanique classique. Comme la mécanique quantique ne peut être entièrement dérivé depuis la mécanique classique, il manque quelque chose. (Le théorème de spin statistique par exemple ?)

1928 → Jordan ; Wigner

Le problème est reglé en prennant l'**anti-commutateur** au lieu du commutateur

$$\{c_{ps}, c^\dagger_{p's'}\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta_{s,s'}$$

$$H = sum_{\mathbf{p}} \underbrace{E_{\mathbf{p}}}_{\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}} \left(c^\dagger_{\mathbf{p}1} c_{\mathbf{p}1} + c^\dagger_{\mathbf{p}2} c_{\mathbf{p}2} - c^\dagger_{\mathbf{p}3} c_{\mathbf{p}3} c^\dagger_{\mathbf{p}4} c_{\mathbf{p}4} \right)$$

2022-31-03

Au dernier cous, on a *développé* le champ de Dirac en modes.

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1}^{4} c_{\mathbf{p},s} u_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{pr}}$$

$$\{c_{\mathbf{p},s}, c^\dagger_{\mathbf{p}',s'}\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$$
$$\{c_{\mathbf{p},s}, c_{\mathbf{p}',s'}\} = 0$$

Mer de Dirac

$$|F\rangle = \prod_{\mathbf{p}} \prod_{s=3,4} c^\dagger_{\mathbf{p},s} |0\rangle$$

$$E_0 = -2 \sum_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}$$

On suppose que $\|\mathbf{p}\|$ est borné bien qu'on ne connaisse pas vraiment la borne supérieur

On définit les opérateur de création et de destruction de *trou* dans la mer de Dirac

$$d_{\mathbf{p}1} = c^\dagger_{-\mathbf{p}4} \qquad d_{\mathbf{p}2} = c^\dagger_{-\mathbf{p}3}$$

Le Hamiltonien se réexprime alors comme

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=1,2} E_{\mathbf{p}} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} - d_{-ps} d^\dagger_{-ps} \right) = \sum_{\mathbf{p}} \sum_{s=12} E_{\mathbf{p}} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} d^\dagger_{ps} d_{ps} - 1 \right)$$

trou

La quantité de mouvement est donnée par

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p},s=1,2,3,4} \mathbf{p} c^\dagger_{ps} c_{ps} = \sum_{ps=1,2} \mathbf{p} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} + d_{-ps} + d^\dagger_{-ps} \right) = \cdots = \sum_{p,s=1,2} \mathbf{p} \left(c^\dagger_{ps} c_{ps} + d^\dagger_{pas} d_{ps} \right)$$

Le 4-courrant est donné par

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

L'équation de la conservation de la charge est respecté par l'équation de Dirac :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{si} \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

La densité de charge électrique est donné par

$$j^0 = \rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi$$

$$Q = e\int \mathrm{d}^3\tau\rho = \int \mathrm{d}^3 r\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = e\sum_{p,s,s'} c^\dagger_{ps}c_{ps}\underbrace{u^\dagger_{ps}u_{ps}}_{\delta_{ss'}} = e\sum_{\mathbf{p},s=1,2}\left(c^\dagger_{ps}c_{ps} + d_{-ps}d^\dagger_{-ps}\right) = e\sum_{\mathbf{p},s=1,2}\left(c^\dagger_{ps}c_{ps} - d^\dagger_{ps}d_{ps}\right) + Q_0$$

Q_0 est alors la charge de la mer de Dirac

Jauge

Ex :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\xi \implies F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$$

En mécanique la substitution de Peierls s'écrit

$$\boldsymbol{\nabla} \to \boldsymbol{\nabla} - ie\mathbf{A} \qquad \partial_t \to \partial_t + ie\Phi$$

C'est le *couplage minimal*

$$\boxed{\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu}$$

Avec cette substitution $\psi \to e^{-ie\xi(r,t)}\psi$

On aimerait que l'équation de Shrodinger soit invariant à une phase près *localement* contrairement à globalement

Dérivée covariente :

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$
$$\psi' = e^{-ie\xi}\psi$$

On peut montrer que :

$$\mathcal{D}'_\mu\psi' = e^{-ie\xi}\left(\mathcal{D}_\mu\psi\right)$$

On a alors la *nouvelle* équation de Schrodinger

$$i\mathcal{D}_t\psi = -\frac{1}{2m}\vec{}$$

D $^2\psi$

On construit l'action électromagnétique comme

$$S_{em} = \frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4 x \underbrace{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{-2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)} - e \int \mathrm{d}x^{\mu} A_{\mu} - m \int \mathrm{d}s$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial vA}{\partial t}\right)^2 - (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})^2\right]$$

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}}$$

2022-24-03

2022-32-07

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right)$$

Comme on étudie le champ électromagnétique seul (sans source), on a

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0 \qquad \Phi = 0$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\wedge\mathbf{A}$$

$$L = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\tau \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \left\{\dot{\mathbf{A}}^2 - (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{A})^2\right\}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}}\sum_q \mathbf{A}_q e^{i\mathbf{qr}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\wedge\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-i}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_q \mathbf{A}_q\wedge\mathbf{q}e^{i\mathbf{qr}}$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\mathcal{V}}\int \mathrm{d}^3 r \sum_{q,q'}\left\{\dot{A}_q\dot{A}'_q + (\mathbf{q}\wedge\mathbf{A}_q)\cdot(\mathbf{q}\wedge\mathbf{A}_q)\right\}e^{-i\mathbf{r}\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}'\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{q,q'}\dot{A}^*_q\cdot\dot{A}_{q'} - \left(q^2\mathbf{A}^*_q\cdot\mathbf{A}_q - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}_q)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}_q)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_q\left\{\dot{\mathbf{A}}_q\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{q}-\mathbf{q}^2 A_{\mathbf{q}^*\cdot\mathbf{A_q}}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{q,j=1,2}\left\{\dot{A}^*_{jq}\dot{A}_{jq} - \omega_q^2 A^*_{jq}A_{jq}\right\}
\end{aligned}$$

Comme avec la champ scalaire, on va pouvoir définir des opérateurs de création et d'annihilation

flashback du champ scalaire

$$L = \frac{1}{2}\sum_q\left\{\dot{\phi}^*_q\dot{\phi}_q - \omega_q^2\phi^*_q\phi_q\right\}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_p\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(e_{\mathbf{p}}e^{i\mathbf{pr}} + a^\dagger_p e^{-i\mathbf{pr}}\right)$$

$$[a_{jq}, a^\dagger_{j'q'}] = \delta_{jj'}\delta_{qq'}$$

$$A(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \sum_{p,j} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_{jq}\epsilon_{jq} e^{i\mathbf{qr}+i\omega t} + a^\dagger_{jq}\epsilon^*_{jq} e^{-i\mathbf{qr}+i\omega t} \right)$$

on a ici utilisé la *jauge transverse* ou $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_q = 0$

$$H = \sum_{q,j} \omega_q \left(a^\dagger_{jq} a_{jq} + 12 \right)$$

$$\omega_q = |q| \implies \text{masse nulle}$$

vecteur de Poynting

$$\mathbf{P} = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \sum_{jq} q a^\dagger_{jq} a_{jq}$$

à partir de la densité de quantité de mouvement $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ on construit la densité que momement cinétique $\mathbf{r} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$

$$\mathbf{S} = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{r} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{S}_{\text{orb}} + \sum_{pj} a^\dagger_{jq} a_{jq} \left(\epsilon^*_{jq} \wedge \epsilon_{jq} \right)$$

Électrodynamique quantique (QED)

$$S = \int \mathrm{d}^4 x i \bar{\psi} \gamma^\mu \underbrace{\partial_\mu}_{\to \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu} \psi - m\bar{\psi}\psi = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$S = S_0 + S_{\text{int}}$$
$$S_{\text{int}} = -e \int \mathrm{d}^4 x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

$$L_{\text{int}} - e \int \mathrm{d}^3 r \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

$$H_{\text{int}} = e \int \mathrm{d}^3 r \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \cdot \vec{A}$$

$$H = -\frac{e}{\mathscr{V}} \int \mathrm{d}^3 r \sum_{j,\mathbf{k}} \sum_{s,s',\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k \mathscr{V}}} \left(a_{j\mathbf{k}} \varepsilon_{j\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a^\dagger_{j\mathbf{k}} \varepsilon^*_{j\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right)$$
$$\left(c^\dagger_{\mathbf{p},s} \bar{u}_{\mathbf{p},s} \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + d_{\mathbf{p},s} \bar{v}_{\mathbf{p},s} \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \right) \gamma \left(c_{\mathbf{p}',s'} u_{\mathbf{p}',s'} \mathrm{e}^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} + d^\dagger_{\mathbf{p}',s'} v_{\mathbf{p}',s'} \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}} \right)$$

$$i\mathcal{M} = u_\alpha(p_1 s_1) u_\gamma(p_2, s_2) \bar{u}_\beta \bar{u}_{delta} \left(-ie\gamma^\mu_{\beta\alpha} \right) \left(-ie\gamma^\nu_{\delta\gamma} \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_2)^2}$$

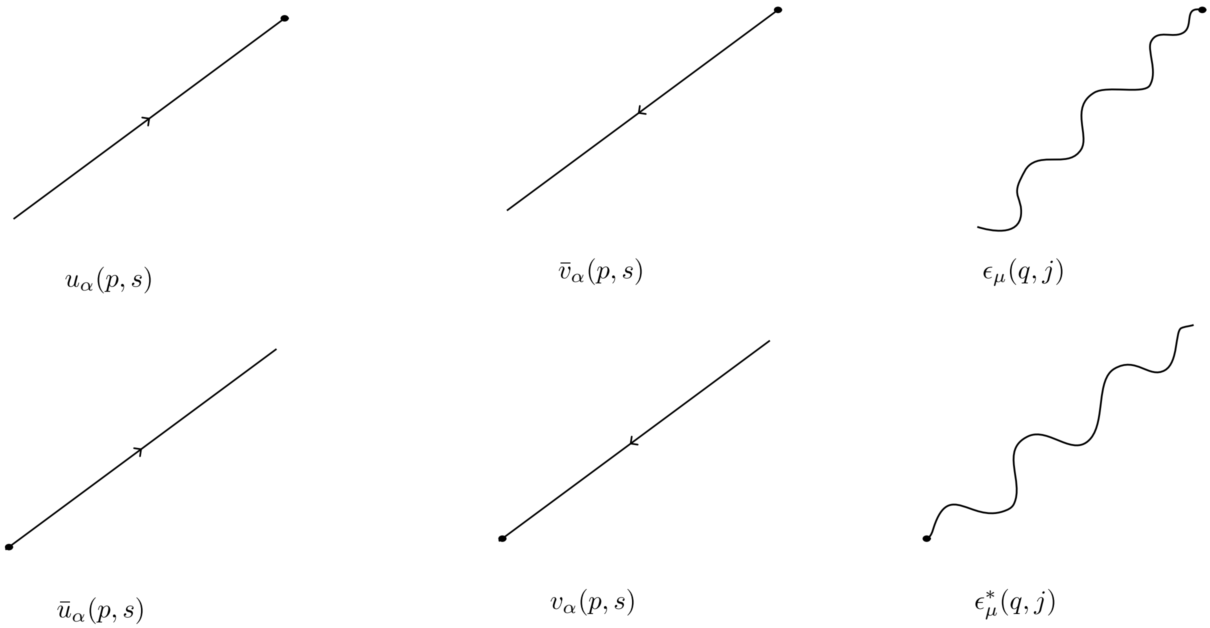


Figure 1 – Diagramme de Feynman : ligne externes

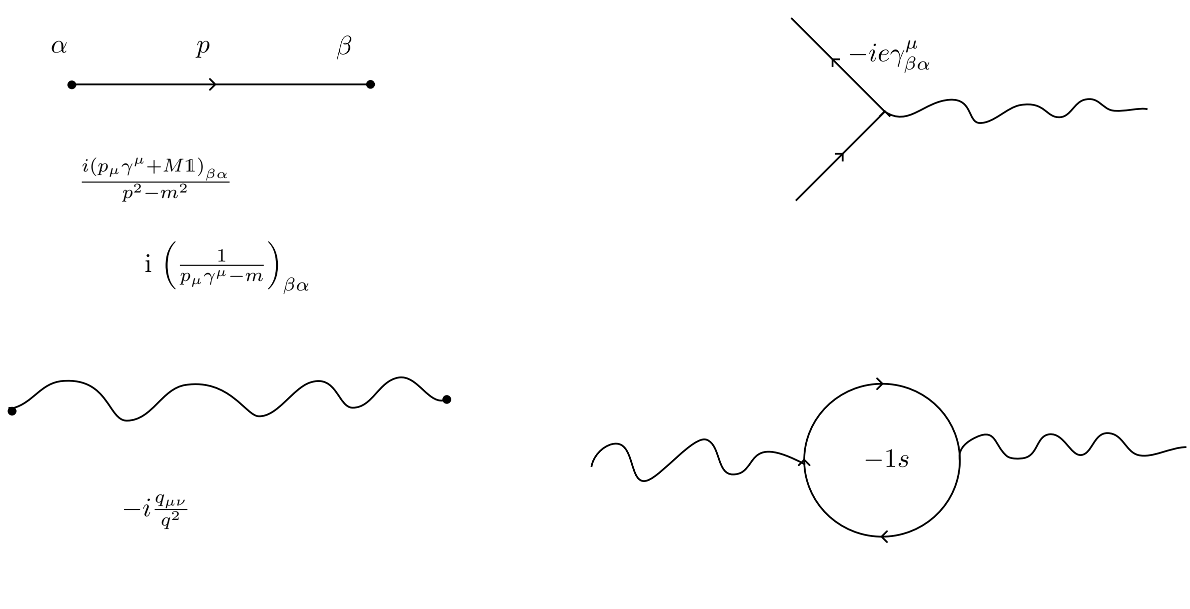


Figure 2 – lignes internes

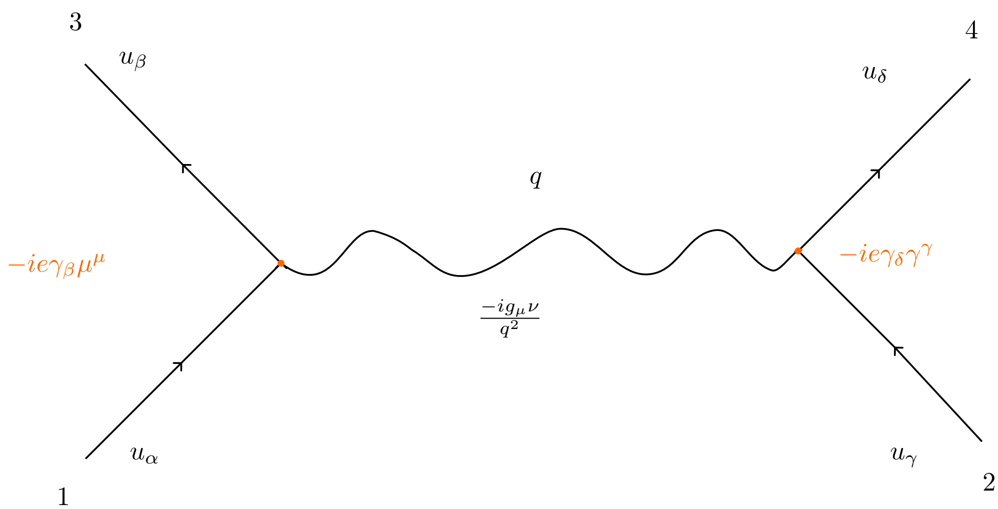


FIGURE 3 – Diffusion électron muon