2024-01-11

1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, ou G est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \to G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \cdots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \to E | f \text{ est inversible } \}$$

avec l'opération de composition $\circ$

On l'appel le groupe symétrique de E

$S_n = S_{\{1,2,\cdots,n\}}$

Est le groupe des permuations de n éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

<u>Définition :</u> Un <u>morphisme/homomorphisme</u> de groupes (G, H) est une fonction $f : G \to H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$. Si f est inversible alors f^{-1} est aussi un morphisme et on dit alors que f est un <u>isomorphisme</u>

<u>Exemples :</u>

- $\det : \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

<u>Définition :</u> Une <u>action</u> d'une groupe G sur un ensemble X est une application

$$\bullet : G \times \to X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{X} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

Définition : Une action de G sur x est un homomorphisme $f : G \to S_x$

Les deux définition sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned}
f(g_1 * g_{2)(x)} =& (g_1 * g_{2)} \bullet x \\
=& g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\
&= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\
&= f(g_{1)}(f(g_{2)(x))} \\
&= [f(g_1) \circ f(g_2)]\,(x) \quad \forall x \in X
\end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si X a plus de structure et qu'on a une action de de G sur X qui preserve la structure lors on dit que G agit par (homéomorphise, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur X

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

ATTENTION : S_4 n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permuations *brisent le triangle*) S. Par contre S_4 agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permuations paire

A_5 agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation S_E

Démonstration : On considère l'action de G sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

on obtiens $f : G \to S_G$: homomorphisme injectif car si $f(g_{1)} = f(g_1)$ alors $f(g_{1)(e)} = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe a } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe G est une actions linéaire de G sur un espace vectoriel V. Autremenet dit, un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$. Le rang d<une représentation est dimV

exemples :

$$\rho\mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

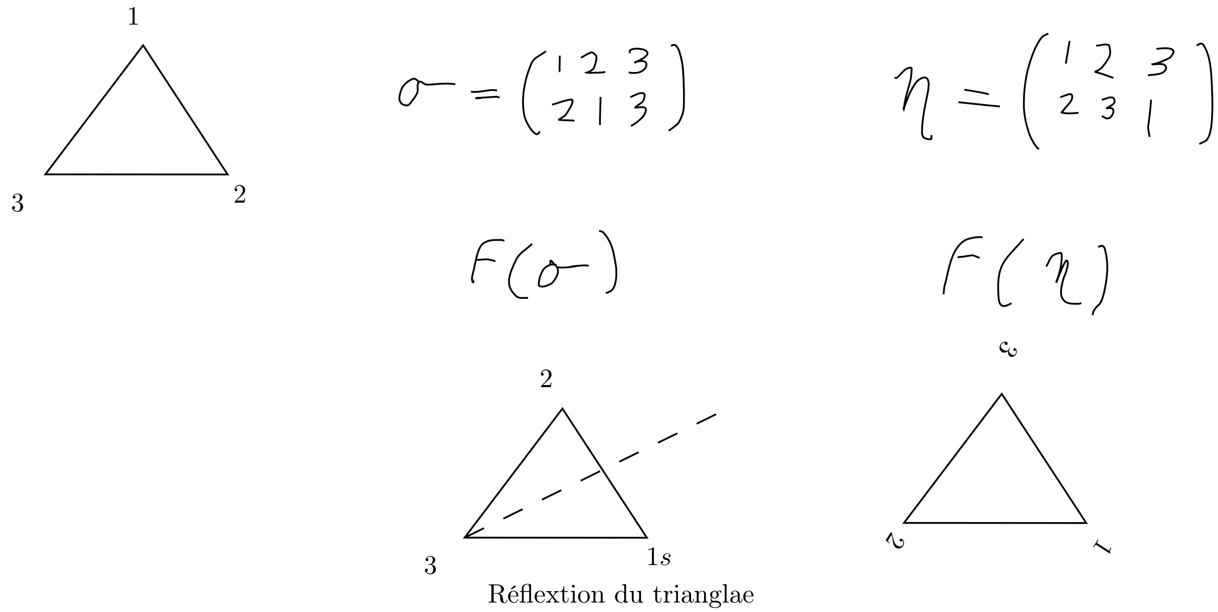

FIGURE 1 – Triangles équilatérals

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si