Rappels

Application de Gauss :

—

$$n : S \to S^2$$

— opérateur de forme $\mathcal{S}_x T_x S \to T_x S \quad \mathcal{S}_(x)(X) == dn(X)$
— Seconde forme fondamentale $II_x T_x S??????$

$$II_x(X,Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot \mathbf{Y}$$

En pratique, pour calculer II on utilise que sa matrice dans la base p_u, p_v est $M_{II} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{uv} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$

Comment trouve-t-on la matrice de $\mathcal{S}$ maintenant ?

Proposition : Dans la base p_u, p_v

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_{II}$$

Si $M_{\mathcal{S}}$ est la matrice de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}(ap_u + bp_v) = cp_u + dp_v$ alors

$$M_{\mathcal{S}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

.

On sait que $II(X,Y) = \mathcal{S}(X) \cdot y = I(S(X), Y)$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{II} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \left(M_{S?} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{\mathcal{S}}^t M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = M_{\mathcal{S}}^T M_I$$
$$M_{calS}^T = M_{II} M_I^{-1}$$
$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_I I$$

En général, on a que $M_{\mathcal{S}}$ n'est pas symétrique bien que les deux autres le sois

Interprétation de la seconde forme fondamentale

α : Courbe planaire d'intersection entre le plan engedré par $X \in T_x S$ et $n(x)$ et la surface S paramétré par longeur d'arc et $\alpha(0) = x$

$$T(0) = \alpha'(0) = X$$
$$N(0) = \pm n(x)$$

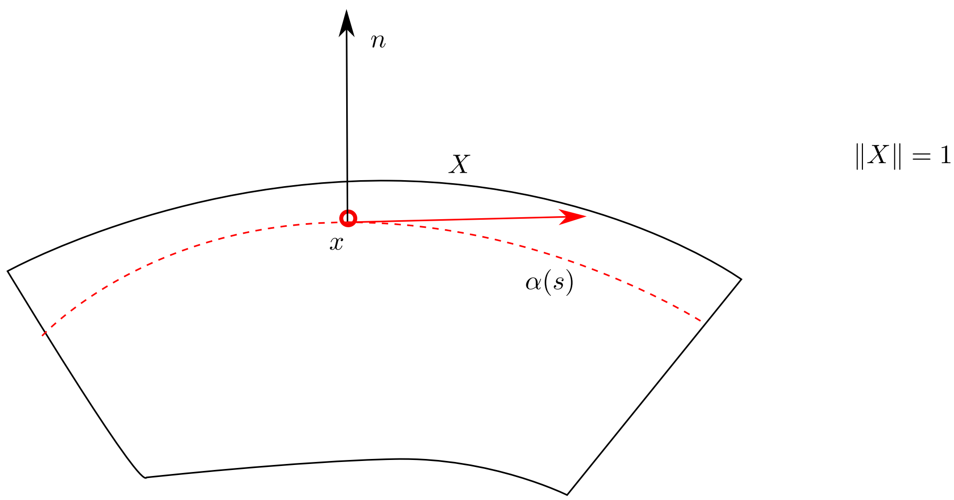

Figure 1 – Interprétation de la seconde forme fondamentale

$$N(s) = \pm n(\alpha(s))$$

$$N'(o) = -\kappa(0)T(0) + \underbrace{\tau(0)B(0)}_{0} = -\kappa(0)X$$

$$\kappa(0) = -N'(0) = \left.(n(\alpha(s)))'\right|_{0} \cdot X? = \pm dn(X) \cdot X = \pm \mathcal{S}(X) \cdot X = II(X, X)$$

(Il y a des étapes rajoutées à posteriori que je vois mal... demander à quelqu'un peut-être...)

$II(X, X)$ est la courbure sectionnelle de S dans la direction X

Parenthèse d'algèbre linéaire

La nortion de matrice symétique dépend de la base :

$$\text{matrice symétrique : } M^T = M$$

Si M est la matrice de l'application $T : V \mapsto V$ T est auto-adjoint si :

$$T(u) \cdot V = u \cdot T(v) \forall u, v \in V$$

Un opérateur est auto-adjoint pour un produit scalaire donné. C'est la généralisation de matrice symétrique sans base

L'application de $\mathcal{S}$ est auto-adjointe par I :

$$I(\mathcal{S}(X), Y) = I(X, \mathcal{S}(Y))$$

Dans la base p_u,p_v la matrice de S n'est pas symétrique mais dans une base orthogonale, elle le serait.

Un opérateur auto-adjoint est toujours diagonalisable et ses valeur propres sont réels.

$\Longrightarrow$ S est diagonalisable et a 2 valeurs propres réelles k_1, k_2. On appelle k_1, k_2 les courbures principales de S en x. Les vecteur propres associés sont les directions principales. Elles s'interprètent comme les courbures sectionneles max et min.

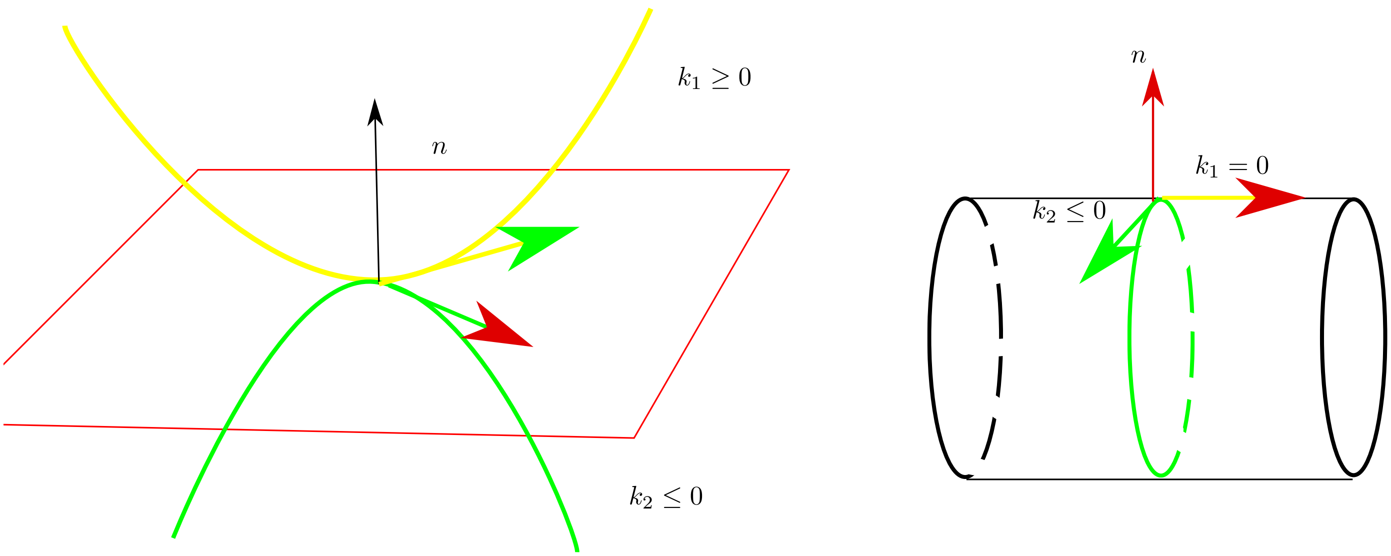

Figure 2 – Courbures principales

Le déterminant de $\mathcal{S} = k_1 k_2$ s'apelle la Courbure de Gauss et sa trace $= k_1 + k_2$ s'appelle la sourbure moyenne

Exemple : Surface avec un point de selle $p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$p_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_u \times p_v = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

$$n(p(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}} = m_I^{-1} M_{II} = \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2) - u^2v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \\ \frac{1}{\sqrt{\cdots}} & 0 \end{pmatrix}$$

au poiny $u = v = 0 \quad p(u,v) = (0,0,0)$

$$M_{\mathcal{S}}\Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ses vecteur propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec valeurs propres associées 1,-1. La courbure de Gausse est -1

Exercices :

— Si S est le graph d'une fonction f t.q. $f(0,0) = 0 \quad \nabla f\big|_{(0,0)} = 0$ Alors $M_{\mathcal{S}}\big|_{(0,0)} = H_{(0,0)}$

$$p_{x,y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad H_{0,0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \\ \cdots \end{pmatrix}$$

— Calculer la courbure de Gauss pour

1. S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\theta \sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2. La pseudo-sphère (surface de révolution d'une tractrice)

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}\varphi \cos\theta \\ \operatorname{sech}\varphi \sin\theta \\ \varphi - \tanh\varphi \end{pmatrix}$$

Symbole de Chistoffel et Théorema Egregium

Une quantité sur une surface est intrinsèque si elle est invariente par isométrie locale. $\Longleftrightarrow$ Dépendent uniquement de la première forme fondamentale (et ses dérivées).

L'opérateur de forme et II dépendent d'autre chose que seulement la première forme fondamentale. Par exemple un cylindre est à une isométrie près d'un plan mais ces deux surface n'ont clairement pas le même $\mathcal{S}$ et II. C-à-d qu'en faisant des tranformations localement rigique on présèrve la première forme fondamentale mais on modifie les courbures/direction principales. La courbures de Gauss par contre, bien qu'elle ai été définie par une approche "extrinsèque", est intrinsèque !

Pour le démontrer on veut essayer de définir la courbure de Gauss en passant seulement par la première forme fondamentale. Pour se faire, il va falloir définir les symbols de Christoffel

Symbols de Christoffel

En tout point de S, les vecteurs $p_u p_v, n$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Les coefficients L, M, K de II donnet les coordonnées en n des dériviées secondes p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}

$$\begin{aligned}
p_{uu} &= (\Gamma^u_{uu})p_u + (\Gamma^v_{uu})p_v + Ln \\
p_{uv} &= (\Gamma^u_{uv})p_u + (\Gamma^v_{uv})p_v + Mn \\
p_{vv} &= (\Gamma^u_{vv})p_u(\Gamma^v_{vv})p_v + Nn
\end{aligned}$$

Γ^k_{ij} = Coordonnées en p_u de p_{ij} $\quad i, j, k \in \{u, v\}$

Les Γ^k_{ij} s'appellent symbols de Christofel

Exemple : Calculons Γ^k_{ij} pour S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$p_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$n(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi)$$

$$p_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{p}_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi, -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$p_{\theta\theta}.n = -\sin^2\varphi$$

$$p_{\theta\varphi}.n = 0$$

$$p_{\varphi\varphi} \cdot n = -1$$

$$p_{\theta\theta} = 0p_\theta + \sin\varphi\cos\varphi p_\varphi - \sin^2\varphi n$$
$$p_{\theta\varphi} =_\theta +0p_\varphi + 0n$$
$$p_{\varphi\varphi} = 0p_\theta + 0p_\varphi - n$$