

Rappels

— Le plan hyperbolique

$$U = \{(u, v) | v > 0\}$$

muni de la métrique

$$M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

Courbure gaussienne : $\kappa_g \equiv 1$ Symbol de Chrsitoffel $\Gamma_{uu}^v = \frac{1}{v} \Gamma_{vv}^v = \Gamma_{uv}^u = -\frac{1}{v}$ Les autres sont nuls

Proposition : Les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont des demi-droites verticales et les demi-cercles centrées sur l'axe u .

Démonstration : x constant : good (demi-droite vecticale) Sinon :

$$\begin{cases} u'' - \frac{2}{v} u' v' = 0 \\ v'' + \frac{1}{v} (u'^2 v'^2) = 0 \end{cases}$$

On réécrit en termes de $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$

$$\frac{d}{du} (v(t(u))) = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{dv}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} \right) \\ &= \frac{dv}{du} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 + \frac{dv}{dt} \frac{d^2t}{du^2} \\ &= \frac{dv}{du} \left(\frac{du}{dt} \right)^{-2} + \frac{dv}{dt} = \dots = \frac{-(u'^2 + v'^2)}{v u'^2} \\ \frac{d^2v}{du^2} &= \frac{-(u'^2 + v'^2)}{v u'^2} = -\frac{1}{v} - \frac{1}{v} \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 = -\frac{1}{v} \left(1 + (dvvu)^2 \right) \end{aligned}$$

$$v \frac{d^2v}{dvdu} + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = -1$$

$$\frac{d}{du} \left(v \frac{dv}{du} \right) = -1$$

$$v \frac{dv}{du} = -u + C$$

$$\int v dv = \int -u du + C du$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{u^2}{2} + Cu + C'$$

$$v^2 + u^2 - 2Cu = 2C'$$

$$v^2 + (u - C)^2 = 2c' + c^2$$

Équation d'un cercle de rayon $\sqrt{2C' + C^2}$ et centré en $(C, 0)$



Maintenant qu'on connaît les lignes droite de notre nouvelles géométrie, on peut essayer de trouver des propriété analogues avec la géométries qui nous est familière, soit la géométrie Euclidienne.

Le plan hyperbolique satisfait aux axiômes d'Euclides saut le cinquième.

Celui-ci s'énonce :

Cinquieme postuat

Étant donné une droite ℓ et un point $p \notin \ell$ il existe une unique droite ℓ' par p parallèle à ℓ

Dans la géométrie Hyperbolique par contre, il existe une infinité de tels droites !

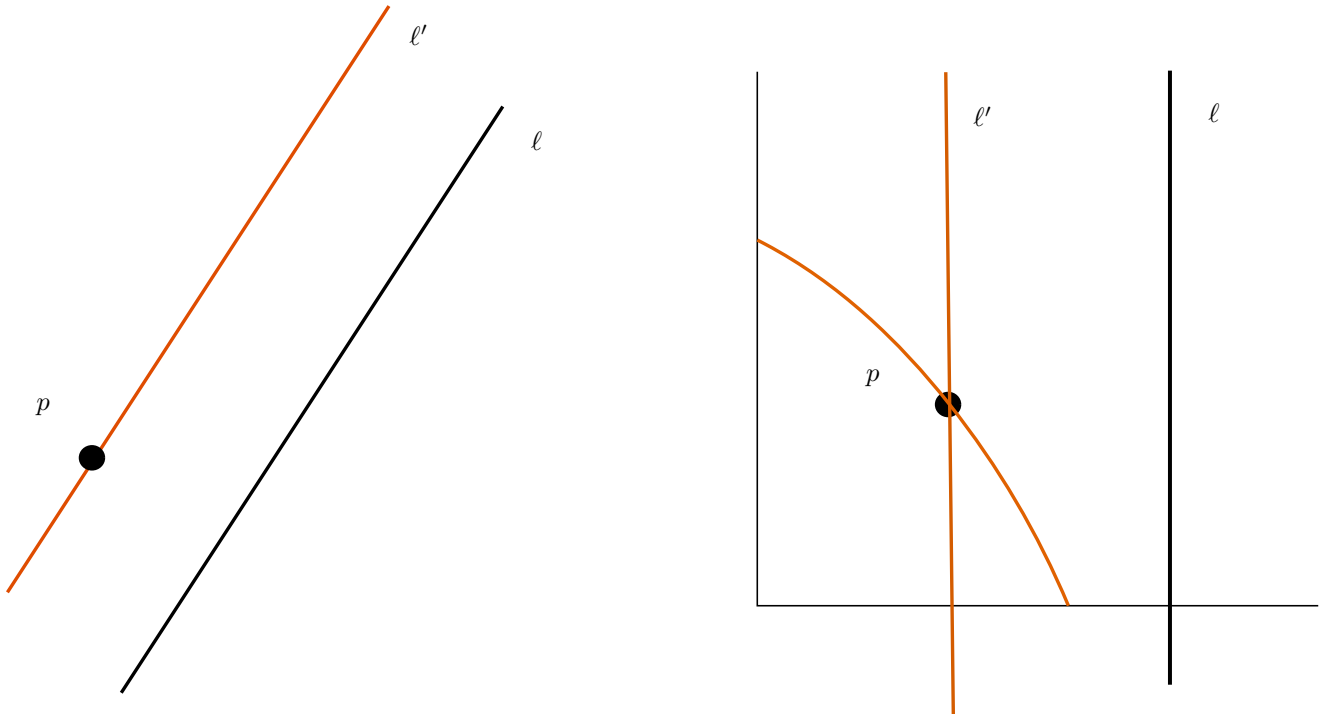


FIGURE 1 – Comparaison entre 5ieme postulat euclidien et hyperbolique

Tout les triangles hyperboliques on un aire inferieur à π

Gauss-Bonnet :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi - \text{Aire}(t)$$

:)