

Rappels

- Groupe de Lie matriciel $G \ni I \rightarrow$ sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$
- G est une sous-variété
- Exemples $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$, $SO(n)$, $SO(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ Groupe des matrice triangulaire superieur $(S)O(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{R}) | M^t I_{pq} M = I_{pq}\}$ $(S)U(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}$
- G Connexe si $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G$ avec $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$ (composantes connexe de I) est un sous-groupe normal exemple :

$$O(1, 1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

On résous le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :
 $O(2)$

Étant donné $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$df \Big|_I : T_I G \rightarrow T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement f .

Un voisinage arbitrairement petit autour de I engendre G

Attention

Pas tout les applications linéaires $L : T_I G \rightarrow T_I H$ sont la dérivé d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = df \Big|_I$$

Étant donnée $g \in G$, on définit la multiplication à gauche $L_g : G \rightarrow G$ c'est une application lisse mais

$$dL_g \Big|_I : T_I G \rightarrow T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{Ad}(g) \Big|_I : T_I G &\rightarrow T_I G \\ X &\rightarrow gXg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X \\ \operatorname{Ad}(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1} \end{aligned}$$

$$d \operatorname{Ad}(G) \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obtenir une condition sur $T_I G$ uniquement, on dérive $\operatorname{Ad}(f)$ par rapport à g en fixant X

$$\begin{aligned} G &\rightarrow T_I G \\ g &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

pour dériver cette application on prend

$$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= I \\ \gamma'(0) &= U \in T_I G \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = [\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})']_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1} \\ &= YX - XY \in T_I G \end{aligned}$$

L'opération sur $T_I g$

$$[X, Y] = XY - YX$$

s'appelle le crochet

Comme le crochet est défini en termes de la multiplication dans G et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie $f : G \rightarrow H$ la dérivée $df|_I : T_I G \rightarrow T_I H$ satisfaisant $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$

En fait $L : T_I G \rightarrow T_I H$ est la dérivée d'un morphisme de groupe de Lie $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel \mathfrak{g} complexe muni d'une application sur \mathbb{C}

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Exemple : Si G est une groupe de lie matriciel, $g = T_I G$ muni de $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de lie

Si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$)

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \left. d \det(0) \right|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(n\mathbb{C}) \subseteq \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

En fait on a l'égalité