2024-02-08

<u>Groupe de Lie (matriciel)</u>

$G \subset \mathrm{GL(n,\mathbb{C})}$ un sous-groupe <u>fermé</u>

(La topologie sur $\mathrm{GL(n,\mathbb{C})} \subseteq \mathrm{M_n\mathbb{C}}$

SI $M_n \in G$ et $M_n \to M \in \mathrm{GL(n,\mathbb{C})}$ alors $M \in G$

> En fait, tout sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{C})$ est une <u>sous-variété lisse</u> (G a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur G)

<u>(contre)Exemple :</u>

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$ n'est pas fermé.

Exemples

$$\mathrm{GL(n,\mathbb{C})}, \mathrm{GL(n,\mathbb{R})}, \mathrm{SL(n,\mathbb{C})}$$
$$\dots$$

<u>Définition</u> On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin $\gamma : [0:1] \to G$ avec $\gamma(0) = A$ $\gamma(1) = B$ $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer $A = I$)

<u>Exemple :</u> O(n) n'est <u>pas</u> connexe

$$A = I \in \mathrm{O(n)B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O(n)}$$

S'il existait un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathrm{O(n)}$ t.q. $\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = B$

alors $\det \circ \gamma : [0,1] \to \{-1,1\} \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $\det \circ \gamma(0) = 1$, $\det \circ \gamma(1) = -1$

G Groupe de Lie matriciel

G^0 Compostantes connexe de l'identité

<u>Proposition</u> :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

<u>Démonstration</u>

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$ des chemins , $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit, $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que G^0 est normal, il faut montrer que $\forall C \in G$, $A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = CIC^{-1} = I$$
$$\gamma(1) = CAC^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est $f : G \to H$ qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple : $\det : \mathrm{GL(n,\mathbb{C})} \to \mathbb{C}^*$ est une homomorphisme de groupe de Lie car

1. $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

Rappel

Pour $S \subset \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n$ une sous-variété. l'espace tangent en $p \in S$ est

$$T_pS = \{\gamma'(0)|^{\gamma : [-1,1] \to S}_{\gamma(0) = p}\}$$

Si $f : S_1 \to S_2$ est une application lisse, la dérivé de f en p est une application linéaire

$$\mathrm{d}f_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$$

définie par :

$$\mathrm{d}f|_p(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$$

pour γ chemin dans S_1 avec $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour det : $\mathrm{GL}(2\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ La dérivé au point $p = I \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$

$$\mathrm{d}(\det)\,|_I : T_I\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{T}_1\mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix}(0) = X$$

$$T_I\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

$$(\det \circ \gamma)(t) = (1+ta)(1+td) - t^2bc$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,((\det \circ \gamma)(t)) = a + d = \mathrm{tr}(X) \in T_1(\mathbb{C}^*)$$

Conclusion

$$\mathrm{d}(\det)\Big|_I (X) = \mathrm{tr}(X)$$

<u>Exemple</u> :

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C}^* | z\bar{z} = 1\}$$

On veut déterminer $T_1(u_1)$

$$\gamma(t) = e^{itx} \qquad \gamma'(t) = ixe^{itx} \qquad \gamma'(0) = ix$$

$$T_{1(S')} = T_1(U_{1)} = i\mathbb{R}$$