Rappels

— Théorème de Clairaut : Pour une surface de révolution les géodésiques satisfont

$$r\cos\varphi = C \tag{*}$$

. Inversement, toutes courbes à vitesse constante qui n'est pas un parallèle et qui satisfait (*) est une géodésique

— courbue géodésique

$$\alpha' = T \quad \alpha'' = T' = \underbrace{\kappa_g}_{\text{Courbure géodésique}} T\times n + \underbrace{k_n}_{\text{courbure normale}} n$$

$k_g = 0 \implies \alpha$ est une géodésique

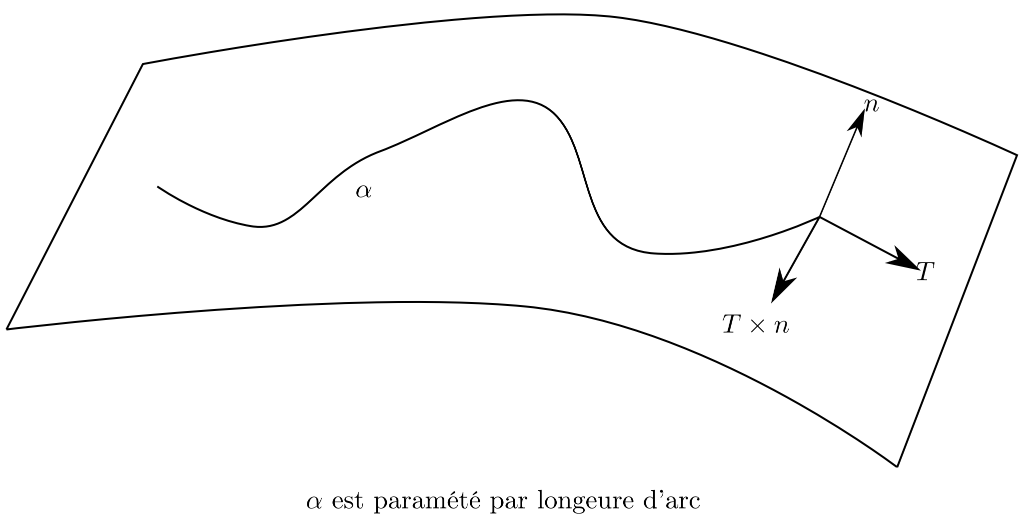

Figure 1 – Courbure géodésique

Exercice 1 : Calcul de courbure géodésique du parallèle $\varphi = \varphi_0$ sur la shpère

$$P(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \sin\varphi_0 \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

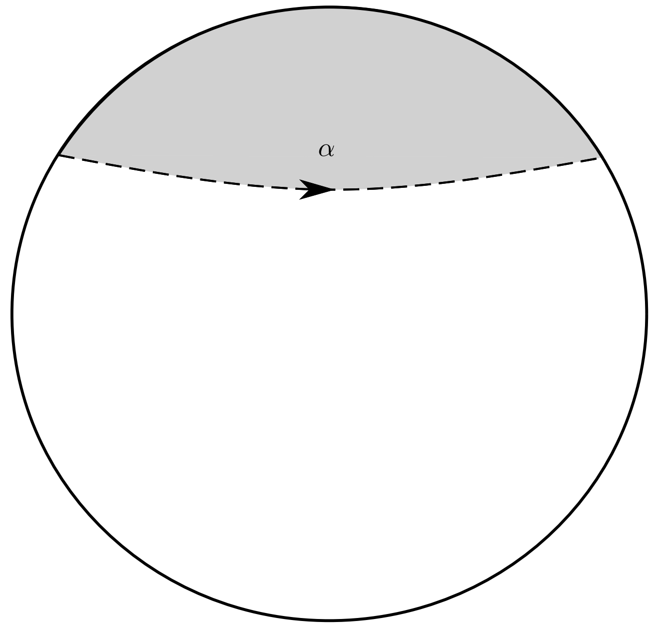

Figure 2 – parallèle sur la shpère

$$\alpha' = T = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \alpha(s) \to \text{on considère la sphère unité}$$

$$T \times n = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) - \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$T' = \frac{1}{\sin\varphi_0} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha''$$

$$k_g = T' \cdot (T \times n) = -\cos\varphi_0 (\cos^2\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right)\sin^2\left(\frac{s}{\varphi_0}\right)\frac{1}{\sin\varphi_0} = -\cot\varphi_0$$

Exercice 2 :

$$\kappa^2(s) = \kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s) \quad \text{où } \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \csc\varphi_0$$

$$\kappa(s)^2 = \|T'(s)\|^2 \quad \|T'(s)\|^2 = k_g^2(t \times n)\cdot(T \times n) + k_n^2 n \cdot n = k_g^2(s) + k_u^2(s)$$

Pour le parallèle $\varphi = \varphi_0$, $\quad \kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \csc\varphi_0$. Aussi $\kappa_n = T' \cdot n = -1$ et $\kappa^2(s) = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$

Exercice 3 : Montrer qu'un cercle de lattitude (parallèle) s constante sur une surface de révolution ssi $x'(s) = 0$

Équations géodésiques

$$s' + \theta'^2(s)(-x(s)x'(s)) = 0 \tag{*}$$

$$\theta'' + 2\frac{x'(s)}{x(s)}\theta' s' = 0 \tag{**}$$

Cercles de lattitude $\implies s = \text{cste} \implies$ s$' = 0$ donc

$$(*) \implies \theta'^2(-x(s)x'(s)) = 0 \tag{A}$$

$$(**) \implies \theta'' = 0 \tag{B}$$

$$(B)\ \theta'' = 0 \implies \theta' = c$$

donc

$$(A) \implies -c^2(x(s)x's) = 0$$

donc

$$x'(s) = 0$$

Relativité Générale

Considérons la première forme fondamenetale (métrique)

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+g^2u^2 & gu \\ gu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} \\ \Gamma^v_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{Eu}{2} \\ \frac{Fu}{2} - \frac{E}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma^u_{vv} \\ \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies \quad u'' = 0 \quad u = at + b$$

$$v'' + \begin{pmatrix} u'v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{uv} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies v'' + (u')^2 g = 0 \quad v'' + a^2 g = 0 \quad u(t) = at + b \quad v)t) = -\frac{a^2 g}{2}t^2 + ct$$

Ce sont des équation cinématiques !

$$u'(t) = 1 = a$$

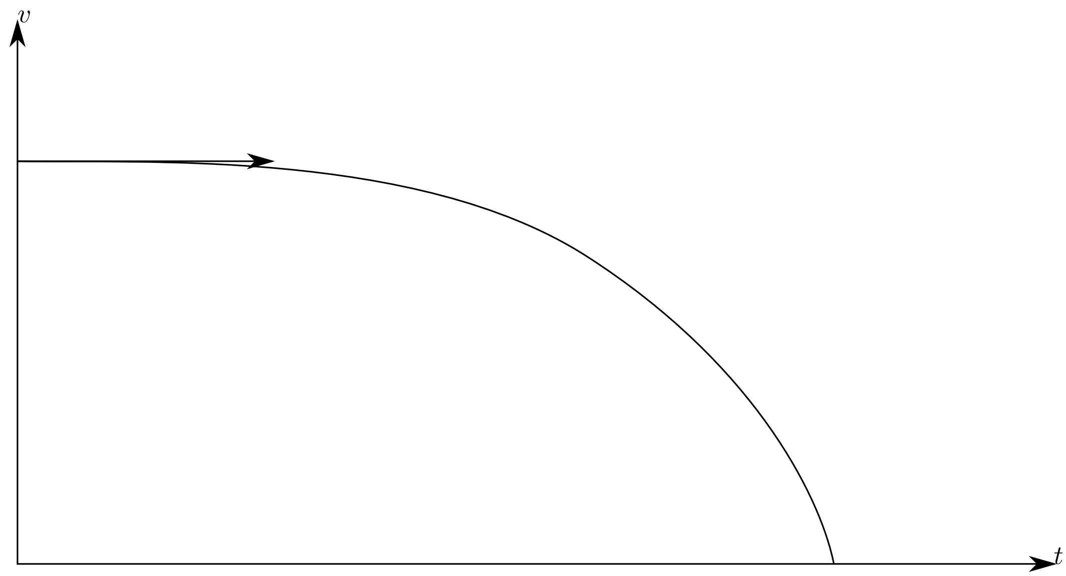

Figure 3 – Graphique de la vitesse en fonction du temps

Théorème de Gauss Bonet

Rappel : Gauss Bonet discret

Pour tout polyèdre p trinagulé dans $\mathbb{R}^3$

$$\sum_{\text{sommets de } p} c(s) = 2\pi\chi(p)$$

où

$$c(s) = 2\pi - \sum \theta \quad \chi(p) = V - E + F$$

Rappel : L'intégrale d'une fonction sur une surface S avec $f : s \to \mathbb{R}$

$$\int_{p(u)} f \cdot \mathrm{d}s = \int_u (f \circ p)\|p_u \times p_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Proposition : L'aire d'une surface est intrinsèque

$$\|p_u \times p_v\| = \left(EG - F^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration : Dans la base p_u p_v n, la matrice du produit scalaire est

$$\begin{pmatrix} p_u & | & p_v & | & n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} p_u & | & p_v & | & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le volume d'un parallépipède est donné par

$$\det(p_u|p_v|n)^2 = EG - F^2$$

$$\implies |\det(p_u|p_v|n)| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ce volume est également égal à l'aire de la base fois la hauteur

$$= \|p_u \times p_v\| \cdot 1 = \|p_u \times p_v\|$$

$$\int_u \|p_u \wedge p_v\| \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_{p(u)} \mathrm{d}S$$

Lemme : Si $F = 0$, la courbure de Gauss s'écrit

$$h = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right);$$

Proposition : Au voisinage de tout point d'une sruface avec $k_1 \neq k_2 \exists$ une paramétrisation orthogonale ($F = 0$). Dans la suite, on suppose $F = 0$.

Étant donnée une base de $T_{p(u,v)}$, $e_1(u,v)$, $e_2(u,v)$ à chaque point de la sruface l'holonomie d'une courbe est $(\nabla_{\alpha'} e_1) \cdot e_2$

Propostition : Dans un paramétrisation $\perp$ pour

$$e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G},} (\nabla_a \cdot e_1) \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot (-u' E_v + v' G u)$$