

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

où $\forall X \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \forall H \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}(H)X = [H, X] = \alpha(H)X$$

exemple :

$$X = E_{1,2}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & v \end{pmatrix}, E_{1,2} \right] = (a - b)E_{1,2}$$

$$X \in \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \alpha \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = a - b$$

On définit $L_i \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = i$

$$L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{h}^*$$

$$\alpha = L_1 - L_2$$

les α dans la décomposition $(*)$ s'appellent des racines de

$$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$$

La liste des racines et

$$L_1 - L_2, L_1 - L_3, \dots$$

dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, une racine est un nombre complexe car $\dim(\mathfrak{h}) = 1$. Les racines de

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

sont -2 et 2

Les vecteurs propres associés à une racine s'appellent des vecteurs de racine

$$E_{i,j}, i \neq j$$

est un vecteur de racine pour $L_i - L_j$

Supposons que $X \in g_\alpha$ et $Y \in g_\beta$ et $H \in h$

$$[H, [X, Y]] = [X, [H, Y]] + [Y, [X, H]] = [X, \beta(H)Y] - [Y, \alpha(H)X] = \beta(H)[X, Y] - \alpha(H)[Y, X] = (\alpha + \beta)(H)[X, Y]$$

Si X vecteur de racine α , Y vecteur de racine β alors $[X, Y]$ vecteur de racine $\alpha + \beta$

$\text{ad}(X)$ agit *par translation* de la racine de Y

$$[,] : g_\alpha \times g_\beta \rightarrow g_{\alpha+\beta}$$

Revenons à une représentation irréductible V de $\text{sl}(3\mathbb{C})$

$$\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(V)$$

On décompose $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ où $\alpha \in h^*$ et $v \in V_\alpha$, $H \in h$

$$\implies H_v = \alpha(H)v$$

Les valeurs propres α s'appellent les racines de la représentation. Les vecteurs propres sont des vecteurs de poids

Une racine est donc un poids pour la représentation ad

soit $X \in g_\alpha$ et $v \in V_\beta$

$$H \cdot (Xv) = [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) = \alpha(H)Xv + C(\beta(H)v) = (\alpha + \beta)(H)(Xv)$$

$X \in g_\alpha$ agit par translation de α sur le poids β de V

Conséquence : Pour V irréductible, tous les poids diffèrent d'une combinaison entière de racine de $L_i - L_j$

Le réseau Λ_R engendré par les racines est appelé réseau des racines.

Exemple : $V \in \mathbb{C}^3$ et $\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(\mathbb{C}^3)$ l'inclusion e_1, e_2, e_3 des vecteurs propres de poids pour les poids l_1, L_2, L_3

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_1 \left(\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet, $L_2 = L = 1 + (L_2 - L_1)$

$$L_3 = L_1 + (L_3 - L_1)$$

Exemple 2 :

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^3) = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} (e_1 \wedge e_2) = ae_1 \wedge e_2 + be_1 \wedge e_3 + ce_2 \wedge e_3 = \dots = -L_3 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

...

Pour imiter ce qu'on a fait dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ on cherche un poids *maximal*. On définit la maximalité. On fixe

$$H_0 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

et on considère l'ordre partiel sur \mathfrak{h}^*

$$\alpha < \beta \iff \operatorname{Re}(\beta(H_0) - \alpha(H_0)) > 0$$

En choisissant $a > b > c$, les racines $L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3$ sont positives alors que les trois autres sont négatives

Lemme : Pour V une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$, il existe un vecteur de poids $v \in V_\alpha$, $v \neq 0$ t.q. $E_{1,2}(v) = 0, E_{1,3}(v) = 0, E_{2,3}(v) = 0$

Démonstration : Soit α maximal parmi les poids t.q. $V_\alpha \neq \{0\}$ par l'ordre $<$ α existe car V est de dimension finie. Soit $v \in V_\alpha$. Alors, $E_{1,2} \cdot v \in V_{\alpha+L_1-L_2}$

Si $E_{1,2}v \neq 0$ alors $\alpha + L_1 + L_2 > \alpha$ et $v_\alpha \neq 0$ contredit la maximalité

De même $E_{1,3}v = 0, E_{2,3}v = 0$

ON appelle v un vecteur de plus haut poids ou vecteur maximal

Proposition : V est engendré par v et toutes les images de v par toutes les combinaison possibles de $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration : Soit W le sous-espace engendré par V et toutes ses images par des combinaisons de $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Il suffit de montrer que W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$

1. W est stable par \mathfrak{h} (W est engendré par des espaces de poids)
2. W est stable par $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$ par définition
3. Il reste à montrer que W est stable par $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,2}$. Il suffit de le montrer pour $E_{1,2}$ et $E_{2,3}$ car $E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$

À suivre...