2022-09-26

QFT : champ scalaires avec interaction

$$L = \frac{1}{2} < mu \sum_{r=1}^{N} \left\{ \dot{u}_r^2 - \Omega^2 u_r^2 - \Gamma^2 \left(u_r - u_{r+1}\right)^2 - \lambda u_t^3 \right\}$$

C'est un développement à l'ordre 3 et non un résultat exacte

$$H = H_0 + \underbrace{H_1}_{perturbation}$$

$$H_1 = \frac{g}{6} \int \mathrm{d}x \phi^3(x) \qquad \frac{g}{6} = \lambda \sqrt{\frac{a}{\mu}}$$

$$\boxed{3\mathrm{D} \to H_1 = \frac{g}{6} \int \mathrm{d}^3 r \phi^3(\mathbf{r})}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega p}} \left(a_p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}\right)$$

$$H_1 = \frac{g}{6} \frac{1}{\nu^3 2} \int \mathrm{d}^3 r \sum_{p,p',q} \frac{1}{\sqrt{8\omega_p \omega_{p'} \omega_q}} \left(a_p e^{i\mathbf{pr}} + a_p^\dagger e^{-i\mathbf{pr}}\right) \left(a_{p'} e^{i\mathbf{p'r}} + a_{p'}^\dagger e^{-i\mathbf{p'r}}\right) \left(a_q e^{i\mathbf{qr}} + a_q^\dagger e^{-i\mathbf{qr}}\right)$$

On intègre sur $\mathbf{r}$

$$H_1 = \frac{g}{6} = \frac{1}{2\sqrt{2\nu}} \sum_{p,q} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\omega_p \omega_{p-q} \omega_q}} \left(a_p a_{p-q} a_q + a_q^\dagger a_{p-q}^\dagger a_p^\dagger\right) + \cdots \right\}$$

Tout les termes qui sont une suite d'opérateur de création, créent au total un quantité de mouvement nulle.

Dans les différents termes, on fait des changmenents de varaibles du type $q \to q + p$

$$H_1 = \frac{g}{6} \frac{1}{2\sqrt{2\nu}} \sum_{p,q} \frac{1}{\sqrt{\omega_{p \omega_q \omega_{p+q}}}} \left[a_p a_{-p-q} a_q + a_p^\dagger + a_q a_p a_q + a_p a_{p+q}^\dagger a_q + \cdots \right]$$

Cette perturbation représente l'interaction entre différente excitation du champ. Des genres de *collisions*. On considère, puisqu'on fait de la théorie des perturbation, que ces collision sont assez peu fréquente et contribuent peu à l'énérgie totale.

$$\Gamma_{i \to f} = 2\pi |M_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$M_{fi} = \langle f|H_1|i\rangle + \cdots$$

$$\begin{aligned} |i\rangle &= a^\dagger_{p_1} a^\dagger_{p_2} |0\rangle = a^\dagger_1 a^\dagger_2 |0\rangle \\ |f\rangle &= a^\dagger_{p_3} a^\dagger_{p_4} |0\rangle = a^\dagger_3 a^\dagger_4 |0\rangle \end{aligned}$$

$\langle f|H_1|i\rangle = 0$ car les états qui n'ont pas le même nombre de particules sont orthogonaux. On doit donc aller au second ordre de perturbation. *L'état intermédiaire* $|n\rangle$ permet de créer des particules de manière seulement *temporaire*.

$$M_{fi} = \sum_n \frac{\langle f|H_1|n\rangle \; \langle n|H_1|i\rangle}{E_1 - E_n}$$

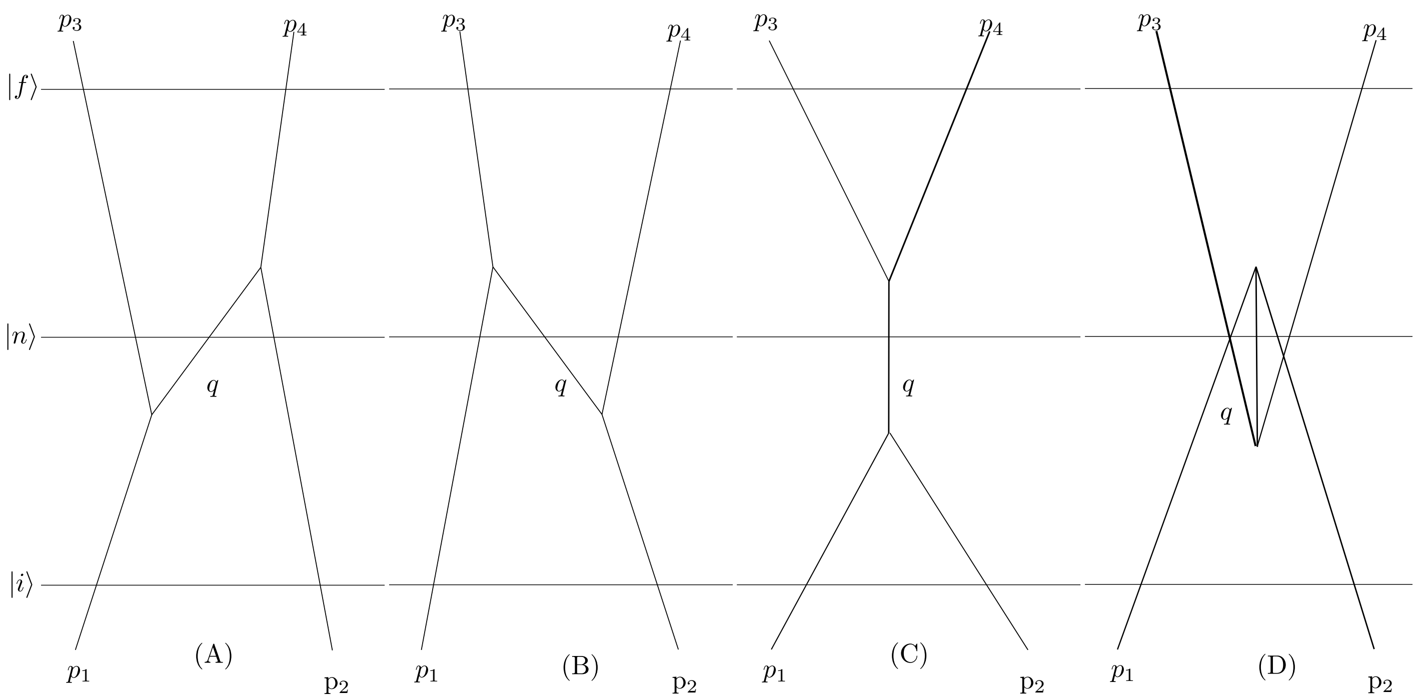

Figure 1 – diagramme pas de Feynmann

$$(A)\begin{cases} \langle n|H_1|i\rangle = \langle 0|\, a_3 a_2 a_q (a^\dagger_q a_1 a^\dagger_3) a^\dagger_1 a^\dagger_2 \,|0\rangle \\ \qquad \langle 0|\, a_p a^\dagger_p \,|0\rangle = 1 \\ \qquad \langle 0|\, [a_p, a^\dagger_p] + a^\dagger_p a_p \,|0\rangle \\ \qquad \cdot\, g \dfrac{1}{\sqrt{8\nu\omega_1\omega_2\omega_3}} \\ \langle f|H_1|n\rangle = \langle 0|\, a_3 a_4 (a^\dagger_4 a_2 a_{q)} a^\dagger_3 a^\dagger_2 a^\dagger_q \,|0\rangle \\ \qquad \cdot\, g \dfrac{1}{\sqrt{8\nu\omega_2\omega_q\omega_{1-3}}} \\ M^{(A)} = \frac{g^2}{8\nu\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}} \frac{1}{\omega_{1-3}} \frac{1}{\omega_1-\omega_3-\omega_{1-3}} \end{cases}$$

Les autres diagramme nous mène presqu'exactement à la même équation ex :

$\mathrm{M}^{(A)} = \frac{g^2}{8\nu\sqrt{\omega_{1\omega_2\omega_3\omega_4}}}\frac{1}{\omega_{1-3}}\frac{1}{\omega_1-\omega_3-\omega_{1-3}}$