Rappels

- $M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ G & G \end{pmatrix}$
- $M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$
- $M_{\mathcal{S}=M_I^{-1}\cdot M_{II}}$
- $\mathcal{S}$ est diagonalisable
- $k_1, k_2 \to$ courbure principale
- $\det(\mathcal{S}) \to$ courbure gaussienne
- $\operatorname{tr}(\mathcal{S}) \to$ Courbure moyennne
- Symbol de Christoffel

Tentons d'exprimer Γ_{ij}^k en termes de E, F, G

$$p_{uu}p_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F = \frac{E_u}{2}$$

$$p_{uu}p_v =_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G = F_u \frac{E_v}{2}$$

$$p_{uv}p_u = \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F = \frac{E_v}{2}$$

$$p_{uv}p_v = \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G = \frac{G_u}{2}$$

$$p_{vv}p_u \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F + F_v - \frac{G_u}{2}$$

$$p_{vv}p_v = \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G = \frac{G_v}{2}$$

Pour obtenir les équations de Gauss-Codazzi, on compare p_{uuv} et p_{uvu}

$$p_{uuv} = \left(\Gamma_{uu}^u\right)_v p_u + \Gamma_{uu}^u p_{uv} + \left(\Gamma_{uu}^v\right)_v p_v + \Gamma_{uu}^v p_{vv} + L_v n + L n_v$$

$$= \left(\Gamma_{uu}^u\right)_v p_u + \Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uu}^u \left(\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uu}^v p_v + M_n\right) + \left(\Gamma_{uu}^v\right)_v p_v + \Gamma_{uu}^v \left(\Gamma_{vv}^u p + u + \Gamma_{vv}^v p_v + N_n\right) + L_v n + L(b p_u + d p_v)$$

$$\boxed{D_n = \begin{pmatrix} a & | & b \\ c & | & d \end{pmatrix} = -M_I^{-1} M_{II} \implies n_u = a p_u + c p_v n_v = b p_u + d p_v}$$

$$= \left(\left(\Gamma_{uu}^u\right)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u + Lb\right) p_u + \Big(\left(\Gamma_{uu}^v\right)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^? + Ld\Big) p_v + \left(\Gamma_{uu}^u M + \Gamma_{uu}^v N + L_v\right) n$$

De la même manière

$$p_{uvu} = \left(\left(\Gamma_{uv}^u\right)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u + Ma\right) p_u + \left(\left(\Gamma_{uv}^v\right)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v + Mc\right) p_v + \left(\Gamma_{uv}^u + \Gamma_{iv}^v M + M_u\right) n$$

$$p_{uuv} = p_{uvu}$$

On compare les coefficients de p_v

$$Mc - Ld = (\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u = \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} = \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} + \Gamma + uu^u\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv}$$

$$Mc - Ld = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - MF & GM - F? \\ EM - FL & EN - ?? \end{pmatrix}$$

$$MC = Ld = M\left(\frac{FL - EM}{EF - G^2}\right) - L\left(\frac{FM - EN}{EF - G^2}\right) = \frac{E - M^2 + LN}{EF - G^2} = E \cdot k$$

$$E \cdot k = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2 + (\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u$$

k est intrinsèque (Peut être calculé avec E, F, G et leurs 2 premières dérivées

On peut aussi obtenir des équation similaire avec

$$F \cdot k \qquad F \cdot K \qquad g \cdot k$$

Équations de Cedazzi

$$L_v = M_u = L\Gamma^u_{uv} + M\left(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}\right) - N\Gamma^v_{uu}$$
$$M_v - N_u = L\Gamma^u_{vv} + M\left(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\right) - N\Gamma^v_{uv}$$

Comme la courbure est une propriété intrinsèque, Si un surface possède un surface de Gauss nul (comme une pizza). On peut forcer sa courbure dans une direction à être nul en la faisant courber dans un autre direction. Si la courbe imposé est *vers le haut*. Il n'y aura aucune courbure vers le bas et la aliments ne tomberons pas.