2024-01-11

1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, ou G est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \to G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \cdots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \to E | f \text{ est inversible } \}$$

avec l'opération de composition $\circ$

On l'appel le groupe symétrique de E

$S_n = S_{\{1,2,\cdots,n\}}$

Est le groupe des permuations de n éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes (G, H) est une fonction $f : G \to H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$. Si f est inversible alors f^{-1} est aussi un morphisme et on dit alors que f est un isomorphisme

Exemples :

— $\det : \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
— $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^*$
— $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe G sur un ensemble X est une application

$$\bullet : G \times \to X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{X} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

Définition : Une action de G sur x est un homomorphisme $f : G \to S_x$

Les deux définition sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_{2)(x)} &= (g_1 * g_{2)} \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_{1)}(f(g_{2)(x)}) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)]\,(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si X a plus de structure et qu'on a une action de de G sur X qui preserve la structure lors on dit que G agit par (homéomorphise, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur X

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

ATTENTION : S_4 n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permuations *brisent le triangle*) S. Par contre S_4 agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permuations paire

A_5 agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation S_E

Démonstration : On considère l'action de G sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

on obtiens $f : G \to S_G$: homomorphisme injectif car si $f(g_{1)} = f(g_1)$ alors $f(g_{1)(e)} = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe a } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe G est une actions linéaire de G sur un espace vectoriel V. Autremenet dit, un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$. Le rang d<une représentation est dimV

exemples :

$$\rho\mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

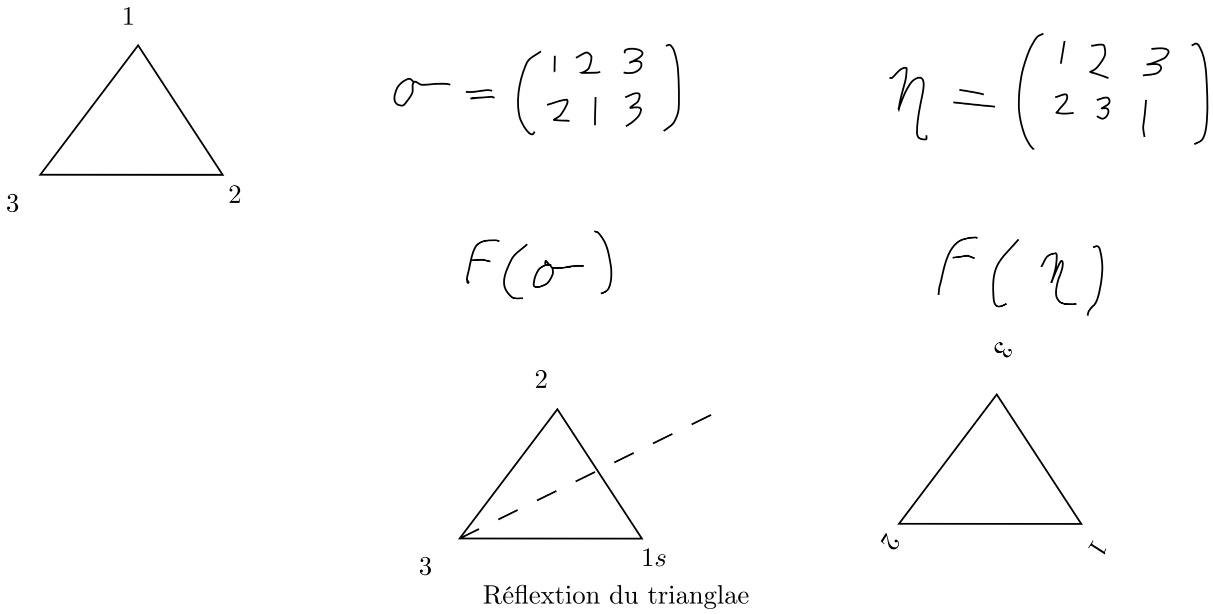

Figure 1 – Triangles équilatérals

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si

2024-01-15

retour sur le dernier cours

$$(G, \bullet) \quad \text{c'est un groupe}$$

$$S_E = \{\sigma : E \to E | \sigma \text{ inversible } \} \quad \text{est une groupe pour la composition}$$

Un cycle est un élément de S_n de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1},\, \sigma(a_k) = a_{1,}\, i = 1, \cdots, k$$

On le note $(a_1\, a_2\, a_3\, \cdots\, a_k)$

Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2) \circ (3\,5) = (3\,5) \circ (1\,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\,7\,5\,6\,2\,3\,4)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longeur ℓ est

$$(-1)^{\ell - 1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est imparire} \end{cases}$$

On a la relation $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de G sur X : deux définitions

1. $\bullet : G \times X \to X$
2. homomorphisme $f : G \to S_x$

Représentation de G : action linéaire de G sur un espace vectoriel V

Exemple : La Représentation vectoriel sur V

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G,\, v \in V$$

$$\rho : G \to GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour G fixé, on a la représentation régulière (R) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \cdots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \cdots, g_n\}$$

On définit $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$
$$V = \langle e_0 \, e_1 \, e_2 \rangle$$
$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe $\mathbb{Z}_3$ sont ici representé par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement , si G agit sur E (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur $\langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle \quad E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ par $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_1 \quad$ (action de G sur E)

exemple : $V = \mathbb{C}$ Ou on prend $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$
$$\rho : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$
$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentaation de
$$\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$$
est la restriction de ρ à un sous-espace $U \subset V$ invariant par ρ. c-à-d, si $u \in U$, alors $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ Le sous-espace $\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z \in \mathbb{C}\}$ est une sous représentation triviale

Le sous-espace $U_0 = \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 0\right\}$ est aussi une sous-représentation de R de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre $(\neq 0, \neq V)$

Exemple : S_3 :

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(3, \to \mathbb{C})$ la représentation de permutation induite par l'action ? ? ? de S_3 sur $\{1, 2, 3\}$ $\rho(12) = \cdots 3x3$, $\rho(123) = \cdots 3x3$

ρ est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | z \in \mathbb{C}\}$$

est invariant est irréductible

Également, $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} | z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ est invariant

Es-ce que U_0 est irréducibleÉ

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

Conculsion : U_0 est une représentation irréductible. On l'appelle repreésentation standard de S_3

Ex : S_3

$$\mathrm{sgn} : \mathrm{S}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$$

Si $\rho_{1:}G \to \mathrm{GL(u)}, \quad \rho_{2:}\mathrm{G} \to \mathrm{GL(v)}$ sont 2 représentation de G, leurs somme directe est la représentation $\rho_1 \oplus \rho_{2:}G\mathrm{GL(u}\oplus\mathrm{v)}$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si $U = \mathbb{R}^n \ V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$ contient $u \oplus 0$ et $0 \oplus v$ comme sous représentation

Proposition : Soit $U \subset V$ une sous-repr/sentation de $\rho : G \to \mathrm{Gl(V)}$. Alors, il existe une sous-représentation $W \subset V$ telle que $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple : $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de $\mathbb{Z}$, $\langle e_1 \rangle$ est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe par d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit $V_0 \subset V$ n'importe quel complément de U $(V = U \oplus W_0)$

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_o \quad \text{pour} \quad w \in W_0$$

Soit $\pi : V \to U$ la projection complémentaire à W_0

Définissons $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$ si $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g)\pi\left[\rho(g')u\right]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cancel{\rho(g)\rho(g^{-1})}u$$

$$\frac{1}{|G|}|G|u = u$$

$$\implies \pi' : V \to U \quad \text{est surjectif et indentité sur}$$

$$W = Ker(\pi') \quad \text{est notre candidat de sous-représentation}$$

Vérifions que W est $\rho(G)$ invariant

$$h \in G \quad V \in \mathrm{Ker}\pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g)\pi\rho(g')\rho(h)v = \cdots = 0$$

comme $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup, , , , , ,$$

2024-01-18

Rappels

- représentation de G $\rho \to \mathrm{GL(V)}$
- somme direct $\rho_1 : G \to \mathrm{GL(V)}$, $\rho_2 : G \to \mathrm{GL(U)}$, $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to (V \otimes U)$
- Sous-représentation $U \subset V$ G invarientL $\forall g \in G$, $\rho(g)u \in U$
- ρ est <u>irréductible</u> si les seul sous-représentation sont $\{0\}$ et V
- <u>Théorème</u> : Si $U \subset V$ est une sous représentation de $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ alors $\exists W \subset V$ sous-espace t.q. $V = U \oplus W$

<u>Exemple :</u>

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$: représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x + y + z = 0 \}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

<u>Corrolaire</u> : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

<u>Définition :</u> Un <u>morphisme de représentation</u> entre $\rho_1 : G \mathrm{GL(U)}$, $\rho_2 : \rho_2 : \mathrm{GL(U)}$ est une application linéaire $\varphi V \to U$ telle que $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_{1(g)} = \rho_{2(g)} \circ \varphi$$

Si φ est inversible, c'est un <u>isomorphisme</u> de représentation

<u>Proposition</u> :

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{V}$
2. $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{U}$ sont des sous représentation

<u>Démonstration</u> :

1. Si $v < in\mathrm{Kerr}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$
$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0$$
$$\implies \rho_1(g)v \in \mathrm{kerr}(\varphi)$$

2. $\rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \mathrm{Im}(\varphi)$

Lemme de Shur

1. $\varphi : V \to U$ est un morphisme entre représentation irréductible alors $\varphi = 0$ ou φ est un iso
2. $\varphi : V \to V$ Morphisme de V représentation irréductible alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration : $\varphi : V \to U$

1.

$$\ldots$$

2. $\varphi V \to V$ φ admet une valeur propre λ

$$\implies \text{Kerr}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$
$$\implies \text{Kerr}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = \text{V}$$
$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$
$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \cdots V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit G une goupe fini abélien

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \cdots$$

et supposons $\rho : G \to \text{GL(V)}$irréductible. Fixons $g \in G$

$\rho(g) : V \to V$ alors $\rho(g)$ est une morphisme de représentation car $\rho(h)(\rho(h)v) = \rho(gh)b = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$ tout les $\rho(g)$ sontλ_g I

$\implies$ tout sous-espace de V est stable par $\rho(g) \forall g \in G$

donc dimV $= 1$

Conclusion : tout représentaiton irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple : $G = \mathbb{Z}_4$

$$\ldots$$

Exemple : $G = S_3 = \{e, (12), (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de G que est abélien

Remarque : G est engendré par (123) et (12)

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit $\rho : S_3 \to \mathrm{GL(V)}$ une représentation irréductible

on a $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$ car $\tau^3 = e$

$\implies$ $\rho(\tau)$ est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit $v \in V$ vecteurs propres de $\rho(\tau)$ $\implies$ $\rho(\tau)v = \omega^k v$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned}
\rho(\tau)\left(\rho(\sigma)v\right) =& \rho(\tau\sigma)v \\
&= \rho(\sigma\tau^{2)}v \\
=& \rho(\sigma)\rho(\tau)^2 v \\
=& \rho(\sigma)\omega^{2k} v \\
=& \omega^{2k}(\rho(\sigma)v)
\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> si v est une vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^k alors $\rho(\tau)v$ est vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre $\omega^2 k$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1. $k = 1$ ou $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

   $$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

   sont linéairement indépendants $U = \langle v_1 \rho(\sigma)v \rangle$, U est stable par G : V et $\rho(\sigma)V$ sont vecteur propres de $\rho(\tau)$ <u>et</u> $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$, $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

   $$\implies U = V$$

   et dans la base $v, \rho(\sigma)v$ on alors

   $$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix}$$

   $$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. k = 0

   $$\rho(\tau)v = v$$
   $$\rho(\tau)(\rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v$$

   (a)

   $$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

   et $\lambda \in \{1, -1\}$ $\quad (\sigma^2 = 1)$ si $\lambda = 1$ $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{trivial}}$ si $\lambda = -1$, $\langle v \rangle = V$ et $\rho - \rho_{\text{sign}}$

(b) v et $\rho(\sigma)v$ sont linéairement indépendants

Considérons $V + \rho(\sigma)v$, $V - \rho(\sigma)v$

$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v$ et $\rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$

$\implies v + \rho(\sigma)v$ est stable par G.

idem pour $-$. C'est donc une contradiction au fait que V soit irréductible.

Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \to \mathrm{GL(v)}$$

une représentation

Alors sont caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{g}))$$

2024-01-22

Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire $\varphi : V \to U$ (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_2(g)$$

φ est appelée une application équivariante

Lemme de Shur

1. Si ρ_1, ρ_2 sont irréductible φ morphisme $\implies$ $\varphi = 0$ ou isomorphe
2. Si $V = U$ alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ? ? ? de S_3 (à iso près) sont $\rho_?, \rho_? \quad$ et $\quad \rho_?$

Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$$

χ_ρ est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d $\forall h \in Ga$, $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans S_n permutation de n éléments la conjugasion correspond à un "changement d'étiquette"

La tables des caractères d'un groupe fini G est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les calsses de conjugaison dans G. Les entrées sont $\chi_\rho(g)$

Exemple : S_3

	1 e	3 (12)	2 (123)
$\chi_?$	1	1	1
$\chi_?$	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\text{std}}}$	2	0	-1

Table 1 – tables des caractères de S_3

Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme $|G|$

Exemple : $\mathbb{Z}_4$

	1 0	1 1	1 2	1 3
$\chi_?$	1	1	1	1
$\chi_?$	1	i	-1	-i
$\chi_?$	1	-1	i	-1
$\chi_?$	1	-i	-1	i

Table 2 – Table des caractères de $\mathbb{Z}_4$

Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

V un (k)espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V < toV$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (u \cdot \mathbf{v})$
2. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu) = \lambda v + \mu v$

Soit U, V deux k-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom(U,\ V) := \{L : U \to V | Lapplication\ linéaire\}}$$

est un k-espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_{2)}(u) = L_1(u) + L_2(u)$$
$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$
$$\mathrm{dim(Hom(u, v)) = dim(u)dim(v)}$$

Le produit Tensoriel de U et V est un k-espace vectoriel $U \otimes V$ muni d'une application bilinéaire

$U \times V \to U \otimes V$

$(u, v) \mapsto u \otimes v$

et satisfaisant la <u>propriété universelle</u> : Pour tout application bilinéaire $b : U \times V \to W$

Je vois pas ...

<u>En pratique</u> : Si $e_1, \cdots, e_n$ est une base de U, $f_1, \cdots, f_m$ est une base de V alors $\{e_i \otimes f_g\}$ est une base de $U \times V$

<u>Exemple :</u>

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = \cdots ace_1 \otimes f_1 + \cdots$$

<u>Exemple</u> : produit scalaire standard dans $\mathbb{C}^2$ est bilinéaire $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc)$

Quelle est $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \to ac + bc$

Attention

Il est des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2. Q_8 : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1,\, -1,\, i,\, j,\, k\, - i,\, -j,\, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \qquad -ji = ij = -k$$

   (a) Calculer les classes de conjugasion dans Q_8
   (b) Déterminer les représentations irréductible (il y en a 5, dimension 1 et 2)
   (c) Dresser la tables des caractère de Q_8
3. Décomposer $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ en irréductibles
4. Calculer $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

abélien $\implies$ toute représentation irréductible est de dim 1 On a $(0,1) + (0,1) = (0,0)$

$$\rho(0,1)\rho(0,1) = 1 = \rho(0,1)^2 \implies \rho(0,1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1^m) \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$

$$\cdots$$

Pareil pour tout les éléments

   (b) Si $\rho : Q_8 \to \mathbb{C}^*$ est de rang 1. Comme $i^4 = 1$, $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$ (de même pour j et k)

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$ Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prennant $\rho(i) = i$ ou $\rho(i) = -1$ (même chose pour j et k évidemment) On doit donc prendre $\rho(i) \in \{1, -1\}$, $\rho(j) \in \{1, -1\}$, $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)

	e	i	j	k	-1
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_1	1	-1	1	-1	1
ρ_2	1	-1	-1	1	1
ρ_3	1	1	-1	-1	1
ρ_4	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de C_8

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

V espace vectoriel

$P : V \to V$L application linéaire t.q. $P^2 = P$ est appelé une projection (sur le sous-espace Im(P))

Ex : $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si P est une projection, $\mathrm{tr}(P) = \dim(\mathrm{ImP})$

Démonstration On a $V = \mathrm{KerP} \oplus \mathrm{ImP}$

1. car $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{KerP}) + \dim(\mathrm{Im(P)})$
2. et si $v \in (\mathrm{KerP}) \cap (\mathrm{ImP})$ $P(v) = 0$ mais aussi $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$

$$\implies v = 0$$

Si $v \in \mathrm{Im(P)}$ $P(V) = V$

$$\implies P|_{\mathrm{Im(P)}} = \mathbb{1}_{\mathrm{Im(P)}}$$
$$\text{et} \quad P|_{\mathrm{KerP}} = 0_{\mathrm{KerP}}$$
$$\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathrm{ImP}} & 0 \\ 0 & 0_{\mathrm{ImP}} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases}$$
$$\implies \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(\mathbb{1}_{\mathrm{ImP}}) = \dim\mathrm{ImP}$$

? ? ? d'irréducitbilité est relations d'orthogonalité

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$

définissons $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que V^G est un sous-espace vectoriel de V

et $P : V \to V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G?} \rho(g)v$$

Prop : P est une projection sur V^G

Démonstration : ON veut montrer

1. $\mathrm{ImP} = \mathrm{V^G}$ et
2. $P^2 = P$

1. Supposons $v \in \mathrm{ImP}$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \cdots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter :(

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \mathrm{ImP} \subset \mathrm{V^G}$$

Inversement, si $v \in V^G$

alors $P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\mathrm{dim(V^{G)}} = \mathrm{tr(P)} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \rho(\mathrm{g})\right) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{G})) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \chi_\rho(\mathrm{g})$$

En particulier, si ρ est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

Ex : S_3

$$\ldots$$