Rappels

La dérivé d'une application $f : S \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire $df\big|_x : T_xS \to \mathbb{R}$ de matrice $D(f \circ p)$ dans la base p_u, p_v

Par une application $f : S \to S^*$

$$df\Big|_x T_xS \to T_{f(x)}S^*$$

est donné par la matrice $D \circ p^{-1} \circ f \circ p$ dans la base p_u, p_v de T_xS et $p_u^* p_v^*$

Application de Gauss $n : S \to S^2$ vecteur normal uniraite pour p fixée, n $= \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$

Opérateur de formce : $\mathcal{S}_x : T_xS \to T_xS$

$$\mathcal{S}_x(x) = -dn_x(X)$$

seconde forme fondamentale

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot Y = I(\mathcal{S}_x(X), Y)$$

Exemple :

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \qquad p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$p_u p_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|p_u \times p_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a montré, dans la démonstration que II est symétrique, que

$$II_x = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Résumé intra

I Coubrebes dans $\mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3$

— Longeur d'arc $\rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$

— Paramétrisation par longueur d'arc

$$\Psi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$$

$\gamma(s) = (\gamma \circ \psi^{-1})(s)$

— Courbure, torsion, repère de Frenet

— Formules de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} T'(s) &= & & \kappa(s)N(s) & & \\ N'(s) &= & \kappa T & & & \tau B \\ B'(s) &= & & -\tau N & & \end{aligned}$$

— Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$ - isométrie de $\mathbb{R}^3$ + isométrie discrète

— courbures signées d'une coube dans $\mathbb{R}^2$

— Indice de rotation

$$R(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \mathrm{d}s$$

— Umlaufsatz

II Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

— Cartes de surfaces (paramétrisation)

— Surfaces lisses

— Plan tangent $T_{p(u,v)}S = \langle p_u, p_v \rangle$ (engendré par)

— Théorème des valeurs régulières

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, x) = x$$

est une surface lisse si c est une valeur régulière $\iff$ tout les points de $f^{-1}(c)$ sont réguliers ($df \neq 0$)

— Première forme fondamentale

$$X, Y \in T_x S$$

$$I_x(X, Y) = X \cdot Y$$

donné par la matrice

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

dans la base $p_u p_v$

— Surfaces localement isométrique (même première forme fondamenetale)