2024-02-15

Rappels

G groupe de liea
$\mathfrak{g} = T_I G$ algèbre de Lie pour $[X, Y] = XY - YX$
En général, une algèbre de LIe est un espace vectoriel muni d'un crochet $[.,.] : V \times V \to V$ satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

Exercice

1. Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel $\times$ est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre $\left(\mathbb{R}^3, x\right)$ et $(\square(3), [.,.])$

tentative

1. On doit montrer que $\times$ respecte les trois conditions
   (a) $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}$$

L'application exponentielle

G groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_I G$ sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{G} \to G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1. $\exp(0) = I$
2. $\mathrm{d}\exp\big|_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est l'application identité
3. $\forall X \in g$ l'application $t \to \exp(tx)$ est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t+s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour $G = \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}, \exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^X$

Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \to H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g} & \to \mathrm{d}f\big|_I \to & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \to f \to & H \end{pmatrix}$$

commute, c-à-d, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ \mathrm{d}f\big|_I$

Conséquence :

Si $G \subseteq \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

$\implies i \circ \cdots$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

$$\ldots$$

Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de G est un morphisme $G \to \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}$

Une représentation de $\mathfrak{g}$ est une morphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\mathrm{l}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

Exemeple : Représentation adjointe

$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}$

$$g \mapsto \mathrm{Ad(g)}$$

où $\mathrm{Ad(g)(X) = gX^{-1}g}$

on peut vérifier la linéairité et $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Adg})\,(\mathrm{Adh})$