

Rappels

P projection, apli linéaire $P : V \rightarrow V$ t.q. $P^2 = P$

$$\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$$

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est une projection avec $\text{Im}P = V^G = ?$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Nombre de représentation triviale dans la décomposition de ρ
En particulier si ρ est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

ρ_1, ρ_2 deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2) : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(U, V))$$

Rappel

Si $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho_{2(g)} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)(M) = \rho_2(g) \cdot M \cdot \rho_1(g)^{-1}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(U, V)^G = \{\varphi : u \rightarrow v \mid \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \text{Hom}(U, V)^G \iff \rho_2 M \rho_1(g) = M \rho_1(g) \iff \rho_2(g) M = M \rho_1(g) \iff M \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si ρ_1, ρ_2 sont irréductibles, le lemme de Schur dit

$$\dim(\text{Hom}(U, V)^G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\cong \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \text{tr } P = \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \text{ (à démontrer)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g})$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g}) \chi_\rho(g) = \left\{ \dots \right.$$

Les caractères de représentations irréductibles sont orthonormés par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Exemple : S_3

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} (1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 1 \quad \dots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\dim(\mathbb{C}_C(G)) = \# \text{ de classes de conj}$$

Corollaire

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

Démonstration : (je vois pas lol)

Corollaire 2 : Toute représentation est déterminée (à iso près) par son caractère χ_ρ

Démonstration : On sait que $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \dots \oplus \rho_k^{m_k}$

$$\text{De plus } \chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \dots + m_k \chi_{\rho_k}$$

On peut retrouver m_i avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

Exemple

Décomposons $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^6)$ (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6, \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$ (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi? + 2\chi?$$

Exemple

Décomposons $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$ la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{\text{std}} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 : ρ est irréductible ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2 = 1$$

puisque $m_i \in \mathbb{N}$, un des $m_i = 1$, tout les autres = 0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} : \text{irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décomposition de R avec multiplicité $\dim \rho_i$ et $|G| (= \dim(R)) = \sum_{\rho_i \text{ irre}} \dim(\rho_i)^2$