Rappels

Première forme fondamentale

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale est une forme bilinéaire symétique définie positive (produit scalaire) sur T_xS : l'espace tangeant au point $x \in S$.

C'est $X, Y \in T_xS$

$$I_x(X.Y) = X \cdot Y$$

Dans la base p_u, p_v la matrice de I est

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si $X = ap_u + bp_v \quad Y = cp_u dp_v$

$$I_x(X, Y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Rappels (encore)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$Df\Big|_x = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x_n} \end{pmatrix}$$

$$D_vf\Big|_x = Df\Big|_x \cdot v$$

est la dérivée directionnelle de f dams la direction v.

$$lim_{t \to o} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Rèlge de chaîne :

$$D(g \circ f) \ \Big|_x = Dg\Big|_{f(x)} \cdot Df\Big|_x$$

Remarge

Soit un chemain $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\gamma(0) = x; \quad \gamma'(0) = v$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$D(f \circ \gamma)\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} \cdot D\gamma\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} \gamma'(0) = Df\Big|_x \cdot v = D_v f\Big|_x$$

Dérivée directionelle de f dans la direction v. Dépend <u>uniqument</u> de $gamma(0)$ et $\gamma'(0)$

Si $p : U \to S$ est une carte locale de surface et que γ est un chemin dans U, alors $p \circ \gamma$i est un chemain dans S.

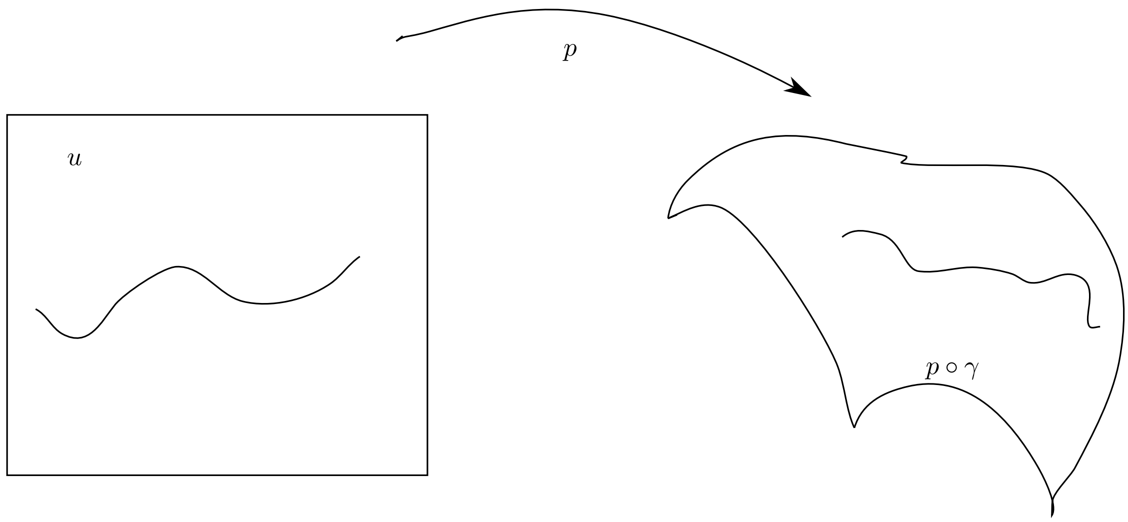

FIGURE 1 – chemin dans une surface

<u>Définition</u>

Soit $f : S \to \mathbb{R}$. ON dit que f est différentiable en $x \in S$ si pour une carte $p : U \to S$ t.q. $p(u_?, v_?) = x$, $f \circ p$ est différentialble en (u_0, v_0) Dans ce cas la <u>dérivée</u> de f est x_i nortée $df\big|_x$ est définie par

$$df\Big|_x : T_xS \to \mathbb{R} \qquad X \to D_x\, f\Big|_x$$

La composistion $F = f \circ p$, s'appelle <u>l'expression de f en coordonnées locales</u>

Sans la base p_u, p_v de T_xS la dérivé $d\,f\big|_x$ a pour matrice :

$$Df\Big|_{u_0,v_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}\right)\Big|_{(u_0v_0)}$$

$$\gamma(t) = (u_0v_0 \circ t(a,b)$$

alors

$$D(p\circ\gamma)\Big|_? = D\,p\Big|_? \cdot D\gamma\Big|_? = Df\Big|_? \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (p_u|p_v)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big|_{u_0,v_0}$$

Si $X = ap_u + bp_v$

$$Df\Big|_x = D\,(f\circ p\circ\gamma)\Big|_0 = D\,(F\circ\gamma)\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} D\,\gamma\Big|_0 = D\,F\Big|_{(u_0,v_0)\cdot}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice de $df\big|_x$ dans la base p_u, p_v est bien $DF\big|_x$.

<u>Exemple</u>

$$p(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$f : S \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x\cdot x = \|x\|^2$$

En coordonnées localess $f(x)$ est donnée par $F = f\circ p$

$$I = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v \\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$f(p(0,z)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta + z^2 = 1 + z^2$$

$$DF = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}, dvFz\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2z \end{pmatrix}$$

est la matrice de df en coordonnées locales

<u>Définition</u>

Soit S, S^* deux surfaces et $f : S \to S^*$

On dit que f est dérivable/différentiable en $x \in S$ si, pour des cartes p de S, p^* de S^*, la composition

On appelle $F = p\circ g\circ p$, l'expression en coordonées locales de f

La dérivée de f est $df\big|_x\, T_xS \to T_{f(x)}S^*$ dont la matrice ? ? les bases p_up_v de T_xS et p^*, p^* de $T_{f(x)}S^*$ est $DF\big|_{f(x)?}$

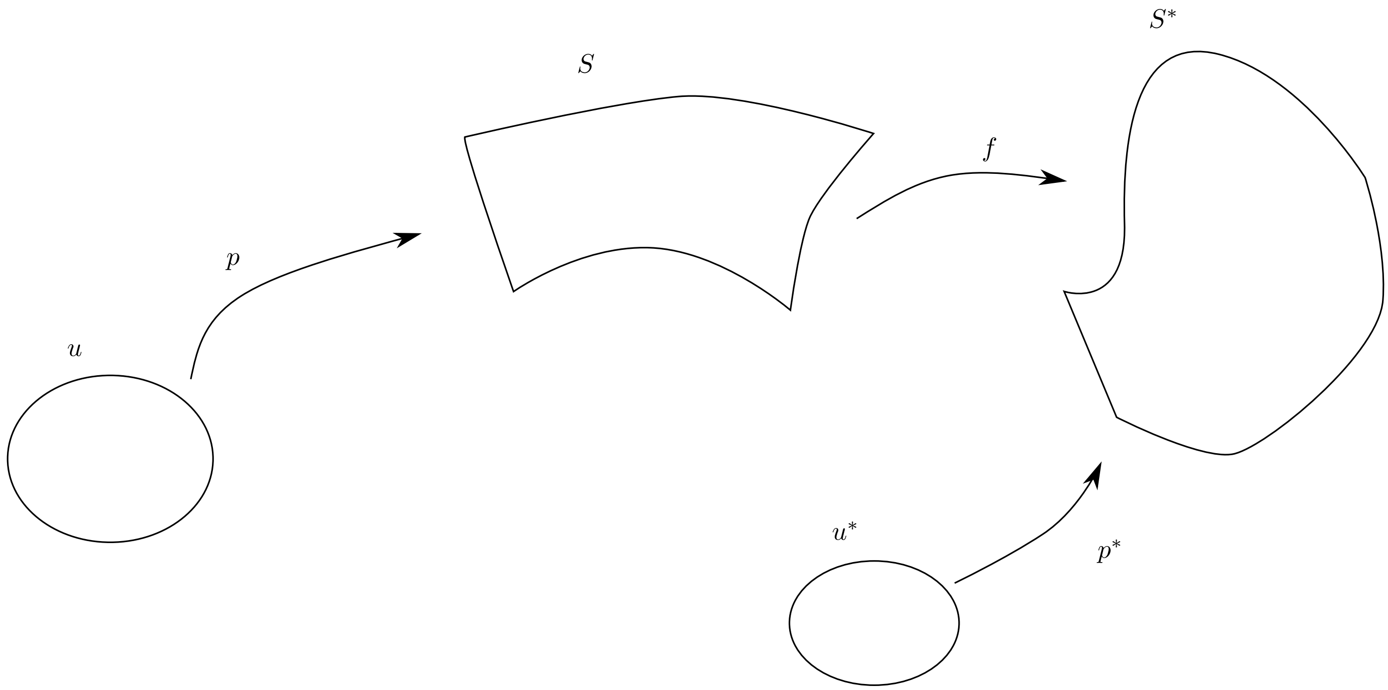

FIGURE 2 – Le même dessin que d'habithude

Application de Gauss

Étant donné une surface S un choix ? de vecteurs unitaires normales s'appelles une orientation sur S

L'application de Gauss est la fonction

$$n : S \to S^2$$

qui associe à un point $x \in S$ le vecteur normal en x. (défini sur une surface orientée)

par exemple, si $S = S^2$, $n : S^2 \to S^2$ est l'identitié.

Si S est un plan n est constant ?

Si S est un cylinde, l'image de S est un grand cercle

Si on a plutôt une scelle :

Définition L'opérateur de forme (shape operator) d'une surface S est $\mathcal{S}_x(s) = -dn(x)$

$$\mathcal{S} : T_x S \to T_{n(x)} S$$

"Demonstaraion"

Déf La seonde forme fondamentale de S est

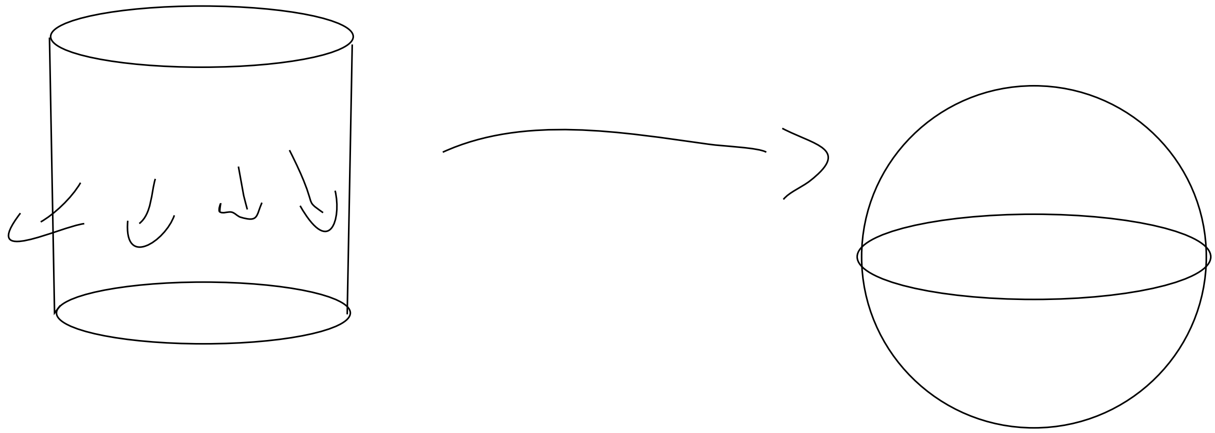

Figure 3 – grand cercle à shpère

$$II_x(X,Y) = \mathcal{S}(X) \cdot Y$$

$$(X < y \in T_xS)$$

<u>Prop :</u> II_x est une forme bilinéaire symétrique

<u>Dém :</u> II_x est bilinéaire car le produit scalaire est bilinéaire et $\mathcal{S} = -dn$ est linéaire

Calculons II_x sur p_u, p_v

ON sait que $p_u\big|_{u,v} = n(?) = 0$

On prend $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}$ de chaque côté

Fuck, je vais noter la conclusion quand on ferra le prochain rappel

Je vois pas assez bien :(

.

FIGURE 4 – Scelle vers shpère