

1 (Rappel) Électromagnétisme classique

On s'intéresse d'abord à développer la théorie du magnétisme en physique classique. Cette théorie échoue à décrire correctement le magnétisme. En effet il faut la mécanique quantique pour le faire. Par contre le formalisme développé en quantique reste utile.

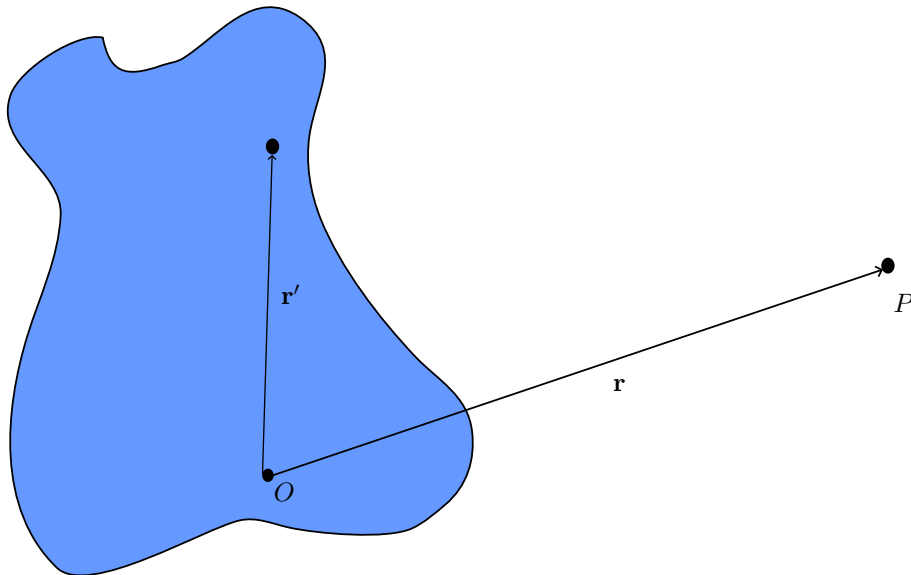


FIGURE 1 – densité de courant

On a la loi suivant pour obtenir le champ magnétique

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r' \quad (\text{Biot-Savart})$$

Qu'on peut réécrire comme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

Puisque $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

Pas de monopoles magétiques :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \nabla \times \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \dots$$

On developpe $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|^3} + \dots$$

Le premier terme non-nul est le terme dit *dipolaire*

$$A_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \sum_{i,j} \hat{n}_i r_j \int r'_j J_i d^3 r' = \dots = -\frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \sum_i \hat{n}_i \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) \right]_i d^3 r'$$

On définit alors la densité de moment dipolaire comme

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Ce qui permet de réécrire

$$\mathbf{A}_{\text{dip}} = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \times \int \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{r}') d^3 r' \equiv \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Le moment magnétique peut se réécrire de la forme

$$\mathbf{m} = \sum_i \gamma_i \mathcal{L}_i$$

avec \mathcal{L}_i le moment cinétique et $\gamma_i = \frac{q_i}{2M_i c}$ le facteur gyromagnétique

2024-01-16

On poursuit sur le Magnétisme quantique

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{H} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$$

Comment faire apparaitre le spin 1/2

L'équation de Shordinger n'est pas invariante de Lorentz

L'idée de Dirac, prendre un H linéaire en p mais dont le carré redonne $E = p^2 c^2 + m^2 c^4$

On pose la forme

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m c^2$$

$$= c^2 \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \beta^2 + \dots$$

C'est impossible de trouver des matrices 2x2 qui fonctionne, on prends donc des matrices 4x4

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \Phi \end{pmatrix}$$

On rajoute le champ mangétique dans l'équation par $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$

Magnétisme quantique

$$Z = \text{tr } e^{-\beta H} = \sum e^{-\beta E} = \sum \langle e \rangle \quad \text{ensemble canonique}$$

On considère que les spins vivent sur un réseau.

On néglige l'interaction avec les spins ?? (Je sais pas ce que ça veut dire, spin-spin surement)

On considère que le champ magnétique externe est constant

Moment magnétique d'un atome à plusieurs e

$$\mathbf{M} = \gamma \sum_i (\mathbf{L}_i + g\mathbf{S}_i) \xrightarrow{\text{W-E proj}} \gamma g_J \mathbf{J} \quad \text{dans} \quad \mathcal{E}_J = \{|E_0, S, L, J, M\rangle\}$$

$$|\mu_{\text{eff}}| \|\mathbf{M}\rangle_{\mathcal{E}_J}\| = \sqrt{\langle \mathbf{M} | \vec{M} \cdot \mathbf{M} | \rangle_{\mathcal{E}_J}} = \frac{\hbar |\gamma| \rho_s}{|\mu|_B} \sqrt{J(J+1)}$$

1 Règles de Hund*

1. Maximiser S
2. Maximiser L
3. Minimiser l'interaction spin-orbite $\rightarrow J$

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{L}_i \mathbf{S}_i \xrightarrow{\text{W-E}} \lambda(L, S) \vec{L} \cdot \mathbf{S}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \implies \mathbf{J}^2 = (\mathbf{S} + \mathbf{L})^2 = \dots$$

$$\implies \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)$$

théorie des perturbations dégénéré au premier ordre

$$\langle W_{\text{SO}} \rangle_{\mathcal{E}_J} = \frac{\lambda(L, S)}{2} \langle \mathbf{J}^2 - \dots \rangle$$

$$\Delta E_{\text{SO}} = \hbar^2 \lambda(S, L) \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$$

En prenant $J = L - S$ On minimise la répulsion si

Interaction d'échange (directe mais aussi superéchange)

Lorsque deux fonctions onde on on recouvrement non nul on doit les anti-symétriser

$$\psi_{\epsilon_1, \epsilon_2}(r_1, r_2) = A\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$$

1. $\psi_{\uparrow \uparrow}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(r_1)\psi_b(r_2) - \psi_a(r_2)\psi_b(r_1)] |++\rangle$
2. idem pour $--$
3. $| - + \rangle - | + - \rangle$
4. $| + - \rangle - | - + \rangle$

Pour que les fonctions d'onde corresponde au valeurs prorpres de S^2 on prend des combinason linéaires de 3 et 4

Rappels

$$\sum_k a_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| = D$$

$$\sum_k a_k = 1$$

$$S = -k_B \operatorname{tr} D \ln D$$

À l'équilibre S est maximale

Avec contrainte statistiques (valeur moyenne fixée) et certaines (valeur tout court fixé)

Multiplicateurs de Lagrange

$$\delta \left(S(D) - \sum_i \zeta_i \frac{\operatorname{tr}(DA_i)}{\langle A_i \rangle} - \zeta_0 \operatorname{tr} D \right)$$

$$\operatorname{tr}(\delta D \ln D) - \operatorname{tr} \delta D - \sum_i \underbrace{\frac{\zeta_i}{k_B}}_{\zeta_i} \operatorname{tr} \delta D A_i - \underbrace{\frac{\zeta_0}{k_B}}_{\zeta_0} \operatorname{tr} \delta D = 0$$

$$\operatorname{tr} \delta D \left[\ln D + \sum_i \zeta_i A_i + \zeta_0 + \mathbb{1} \right] = 0$$

...

$$\operatorname{tr} D = \frac{\operatorname{tr} e^{-\sum_i \zeta_i A_i}}{Z} = 1$$

$$Z = \operatorname{tr} e^{-\sum_i \zeta_i A_i}$$

On arrive donc à dériver n'importe quel quantité à partir de la fonction de partition

$$\langle A \rangle = \operatorname{tr} DA = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \zeta_i}$$

Transitions de phase

Définition : Transition de phase \implies émergence d'un paramètre d'ordre ($\langle \hat{\phi} \rangle \neq 0$) en dessous d'une température (pression, champ magnétique, ...) T_c suite à une brisure (spontané) de symétrie.

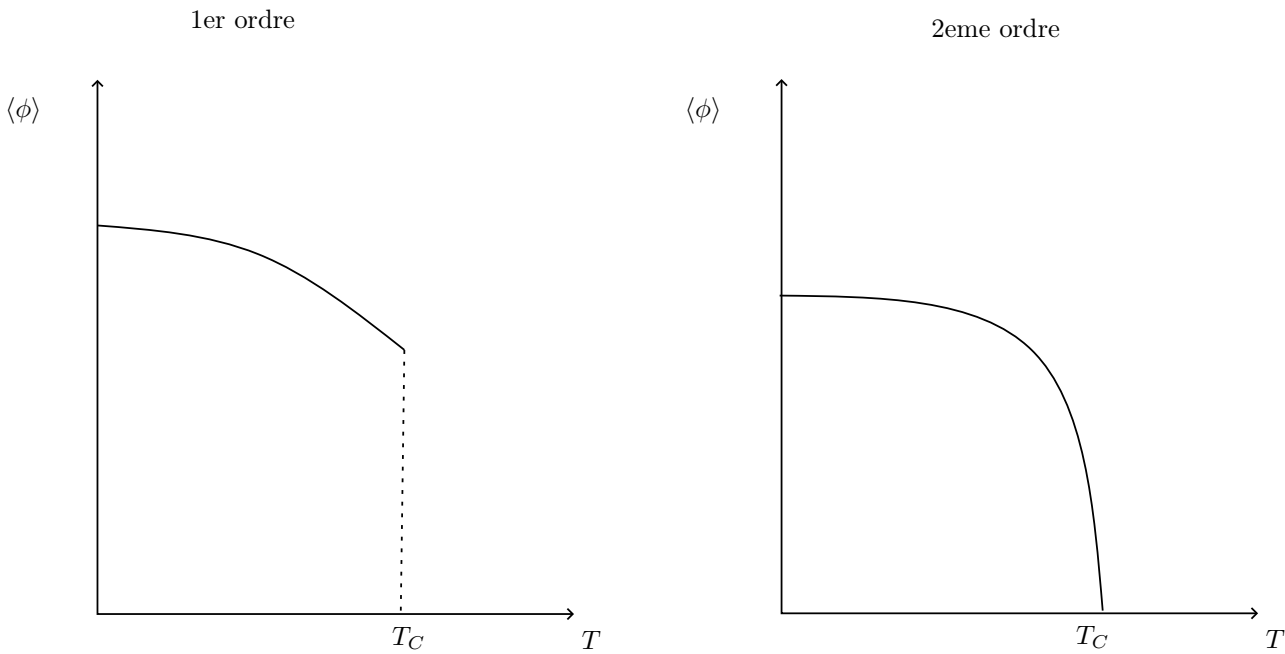


FIGURE 1 – Deux grands types de symétries

Transition	$\langle \phi \rangle$	ordre	nouvelles excitations
gaz-liquide	$\rho_L - \rho_G$	1 ou 2	aucune
liquide-solide	$\rho?$	1	phonons
Para - ferro (magnétique)	$??$	2	magnons, antiferro magnons
Cristaux liquides	(une fonction de l'angle)	2	oui(parce que θ varie continuellement)
Superfluide (${}^4\text{He}^{(1)} \rightarrow {}^4\text{He}^{(2)}$)	fonctions d'onde macroscopique		<i>mode de vibrations</i> , vortex
supraconductivité	$\Psi \sim \Psi e^{i\varphi}$		Pas d'excitation sans gap, Mécanisme Anderson-Higgs

Gaz-liquide/liquide-solide

Ensemble isobar-isotherme

$$G(T, P, N) = Ng(T, P,)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,P} = \mu = g$$

Fonctionnelle Ginzburg-Landau, fluctuations gaussiennes

$$\Gamma = \Gamma^0 - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \bar{M}_i \bar{M}_j + \frac{1}{\beta} \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \bar{M}_i^2 + \frac{1}{12} \dots \right\}$$

On fait un carré parfait avec le premier terme

$$\underbrace{- \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} \bar{M}_i \bar{M}_j + \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} \bar{M}_i^2 - \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} \bar{M}_j^2}_{\text{}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} (\bar{M}_i - \bar{M}_j)^2$$

$$\Rightarrow \Gamma = \Gamma^0 + \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J' (\bar{M}_i - \bar{M}_j)^2 + \sum_i \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 2J' \right) \bar{M}_i^2 + \frac{k_B T}{12} \bar{M}_i^4 + \dots \right]$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} (\bar{M}_i - \bar{M}_j)^2 \rightarrow \sum_{i, \hat{r}} \frac{1}{2} J' (\bar{M}(\mathbf{r}_1) - \bar{M}(\mathbf{r}_i + \hat{r} d_0))^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} J' \left[(\bar{M}(x, y, z) - \bar{M}(x + d_0, y, z))^2 + (\bar{M}(x_i, y_i, z_i) - \bar{M}(x_i - d_0, y_i, z_i))^2 + \text{permutations} \right]$$

On passe au continuum avec $d_0 \rightarrow 0$

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{d^3 r}{v_0}$$

Ginzburg-Landau

$$\Gamma[M] = \Gamma^0 + \int \frac{d^3 r}{v_0} \{ C(\nabla \bar{M})^2 + a(T) \bar{M}^2(\mathbf{r}) + b(T_c) \bar{M}^4(\mathbf{r}) \}$$

On passe maintenant dans l'espace de Fourier

$$\bar{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} \bar{M}(\mathbf{q}) e^{-\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

On sait que $\bar{M}(r)$ est réel $\Rightarrow \bar{M}(\mathbf{r}) = \bar{M}^*(\mathbf{r})$

$$\Rightarrow \bar{M}^*(\mathbf{q}) = \bar{M}(-\mathbf{q})$$

2024-03-26

État fondamental superfluide (^4He) : État choérant variationel

bla bla bla états choérants