

# Photonique et optique quantique

2022-08-31

## Références

- D. Steck : quantum optics note
- G. Milbur : Quantum optics
- Aspect Fabres : Introduction to Quantum Optics

## Contenu du cours

- Interaction lumière-matière
- Les degrés de liberté internes
  - LASER
  - LDOS local density of optical states
  - Source de photon unique (cryptographie quantique)
- Propriété des émetteurs à deux niveaux
  - matière classique
- effet d'optique non-linéaire.
  - SPDC (source de pair de photons)
- Effet mécaniques
  - Refroidissement doppler
  - Pince optique
  - optomécanique

## Table des Matière

**Chapitre 1 : Physique des LASER**

**Chapitre 2 : émetteurs à 2 niveaux**

**Chapitre 3 : Source de photon unique**

**Chapitre 4 : Cryptographie quantique et clef quantique**

**Chapitre 5 : Modèle de Jaynes-Cummings et mesure dispersive**

**Chapitre 6 : Mesure quantique et non démolition (QND)**

**Chapitre 7 : Optomécanique**

# 1 Physique des LASER

## 1.1 Histoire

L'émission des atomes est introduit en 1926 en s'inspirant de la radioactivité.

$$\frac{dN_k}{dt} = -A_k N_k$$

$$N_k(t) = N_k(u)e^{-A_k t}$$

On s'imagine le système à deux niveaux (atome) comme pouvant soit se désexciter ou pas avec 50% de chance après un temps  $\Delta t$ . Ce modèle mène directement à la décroissance exponentielle.

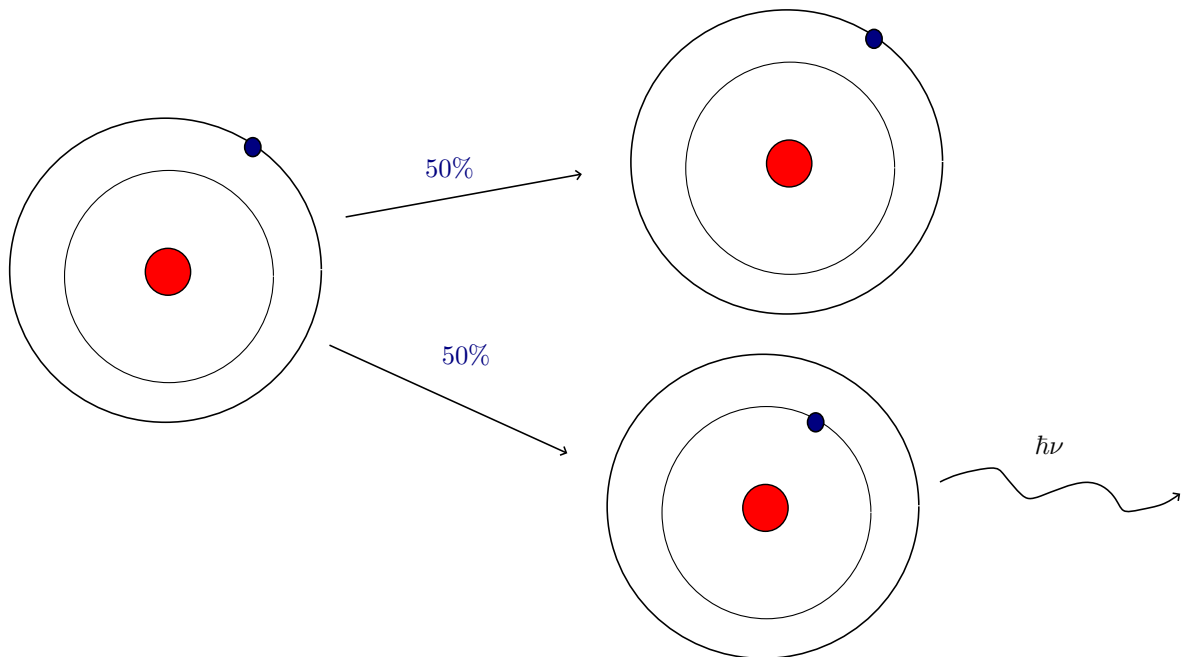


FIGURE 1 – probabilités

L'état 1 est l'état désexcité et comprend  $n_1$  atomes, similaire pour  $E_2$

Processus d'absorption

$$\frac{\partial}{\partial n_2 t} = +I_j B_{12} n_1$$

$B_{12}$  Coefficient de Einstein

$$I_\nu = \frac{1}{4\pi} \iint i_{V(k')} dk' \underbrace{\psi(\nu)}_{\text{chevauchement fréquence phot et at}} d\nu$$

Taux d'absorption doit dépendre des photons incidents (densité, mode, fréquence)

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= -A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= A_{21}n_2 - U\nu B_{12}n_1 \end{aligned}$$

$A, B$  sont des constantes

Que ce passe-t-il à l'équilibre thermodynamique local.

État stationnaire

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = 0$$

Équilibre thermodynamique :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

Rayonnement du corps noir

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 = 0 \iff \frac{n_2}{n_1} \frac{A_{21}}{B_{12}} = I_\nu$$

$$\implies \frac{g_1}{g_2} e^{\Delta E/kT} \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Ce résultat n'a aucun sens. Le problème est qu'il manque l'émission stimulée.

Nouvelle équation

$$-A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 - I_\nu B_{21}n_2$$

Équilibre thermodynamique local

$$A_{21}n_2 = I_\nu B_{12}n_1 - I + \nu B_{21}N_2 \iff I_\nu = \frac{A_{21}n_2}{B_{12}n_1 - B_{21}n_2} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{B_{12}}{B_{21}}}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\Delta E/kT}$$

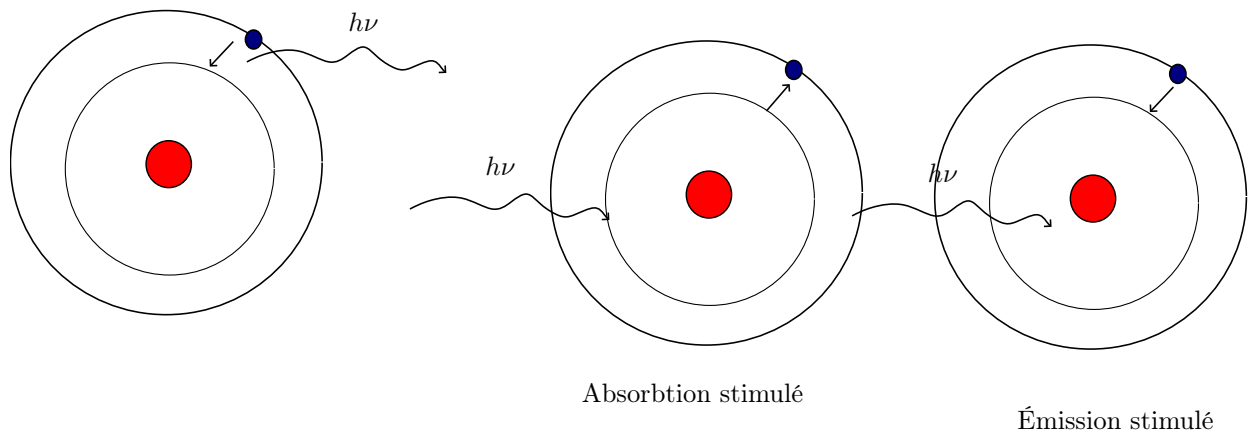


FIGURE 2 – emission stimulée

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\frac{g_1}{g_2} e^{-\Delta/kT} - \frac{B_{21}}{B_{12}}} = \frac{2(\Delta E)^3}{h^2 c^2} \frac{1}{e^{\Delta E/kT} - 1}$$

Puisque c'est vrai pour toute température, on doit avoir que

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12}$$

On peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial n_2 t} = -A_{21} n_2 + I_\nu B_{21} \Delta n$$

Si  $\Delta n > 0$  on a pas que des pertes et on peut avoir un laser. On appelle   a une inversion des populations.

## 1.5   quation de taux et inversion de population

On prend

$$g_1 = g_2 \implies B_{21} = B_{12} = B$$

$$p d n_2 t = A_{21} n_2 - I_\nu B \Delta n$$

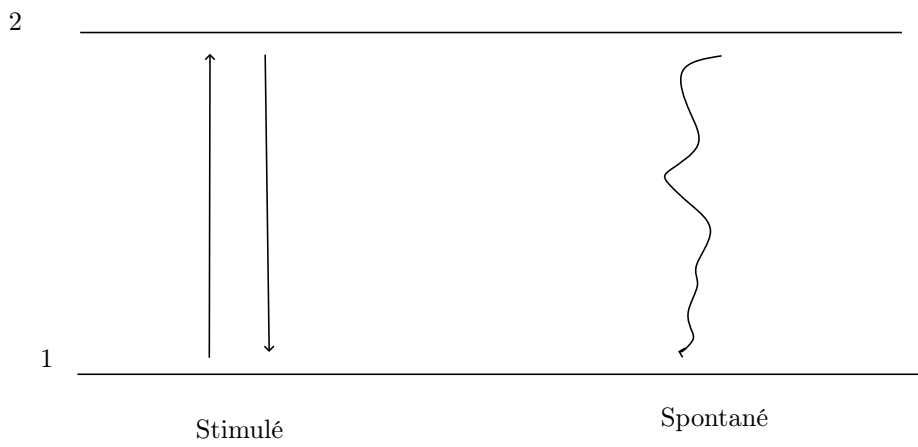


FIGURE 3 – bop

Inversion de population :  $n_2 > n_1$  ( $\Delta n > 0$ )

On s'intéresse au nombre de photons stimulés

## Emission spontanée + Absorption + Émission stimulées

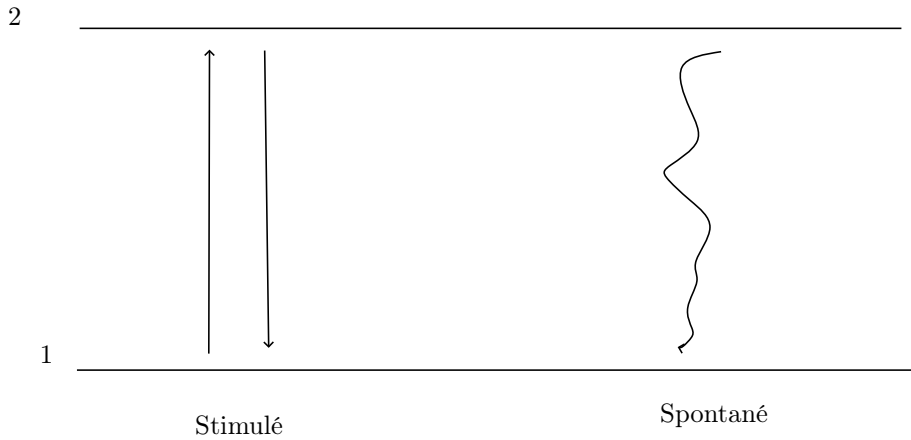


FIGURE 1 – rebop

$$\frac{d}{dn_2 t} = -A_{21}n_2 - I_\nu B_{12}\Delta n$$

### 1.5 Inversion de population

Comment obtenir  $\Delta n > 0$

Equilibre thermodynamique local :  $n_2 = e^{-\Delta E/kT} n_1 \leq n_1 \implies \Delta n \leq 0$

État stationnaire :  $n_2 = \frac{Bh\nu n_p A_{21} + Bh\nu n_p}{n} n_1 < n_1 \implies \Delta n \leq 0$

On veut une cavité qui correspond au mode du photo  $\gamma_{21}$  pour que les photons resont et maximisent le processus d'émission spontané.

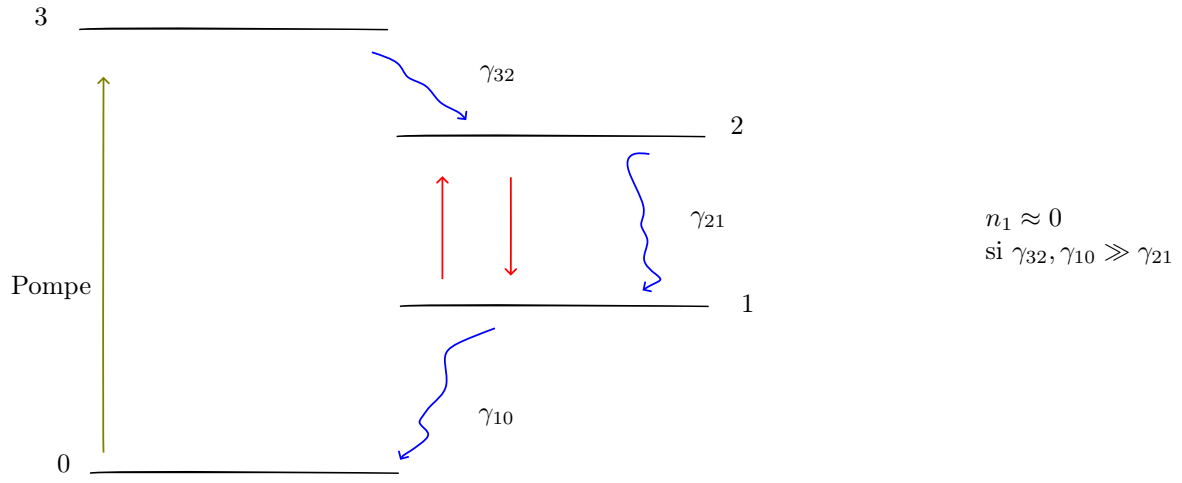


FIGURE 2 – Diagramme énergétique typique d'un laser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn_3 t} &= \gamma_\omega (n_0 - n_3) - \gamma_{32} n_3 \\ \frac{d}{dn_2 t} &= \gamma_{32} n_3 - \gamma_{21} n_2 + Bh\nu n_p (n_1 - n_2) \\ \frac{dn_1}{dt} &= \gamma_{21} n_2 - \gamma_{10} n_1 - Bh\nu n_p (n_1 - n_2) \\ \frac{dn_0}{dt} &= \gamma_{10} n_1 - \gamma_\omega (n_0 - n_3) \end{aligned}$$

## 2 Émetteurs à deux niveaux

### Objectifs

- Montrer comment certains modèles classiques peuvent donner des prédictions exactes dans l'interaction atom/lumière (dans certaines limites)
  - Indice de réfraction (nuage d'atome)
  - radiation d'un atome
  - effets mécaniques de la lumière
  - refroidissement d'atome (ralentir le centre de masse)
  - (Emission collective)

### 2.1 Oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$m = \frac{m_e m_n}{n_e + m_n} \approx m_e$$

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \mathbf{E}^-(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E}^+ = (\mathbf{E}^-)^*$$

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

...

$$x_0^+ = \frac{eE^+/m}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Moment dipolaire électrique

$$d \sim 1[\text{e Å}]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^+ &= -ex^+ \\ &= -\frac{e^2}{m} \frac{E^+}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$



La densité de polarisation est donc

$$\mathbf{P} = Nd^+ = \hat{\epsilon} \frac{Ne^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0^+}{\omega_0^2} e^{-i\omega t}$$

$$\chi = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{N}{\epsilon_0} \alpha(\omega)$$

## 2.2 Modèle de Lorentz

On ajoute de la dissipation

$$x_0^+ = \frac{e}{m} \frac{E_0^+}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

indice de réfraction :

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \approx 1 + \frac{\chi(\omega)}{2}$$

$$\tilde{n}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2}$$

coefficient d'absorption  $a(\omega)$  :

$$\frac{dI}{dz} = -a(\omega)I$$

$$a(\omega) \equiv 2k_0 \operatorname{Im} [\tilde{n}(\omega)]$$

$$n(\omega) \equiv \operatorname{Re} [\tilde{n}(\omega)]$$

retard de phase

$$\delta = \tan^{-1} \left( \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Le modèle de Lorentz est valide à basse puissance

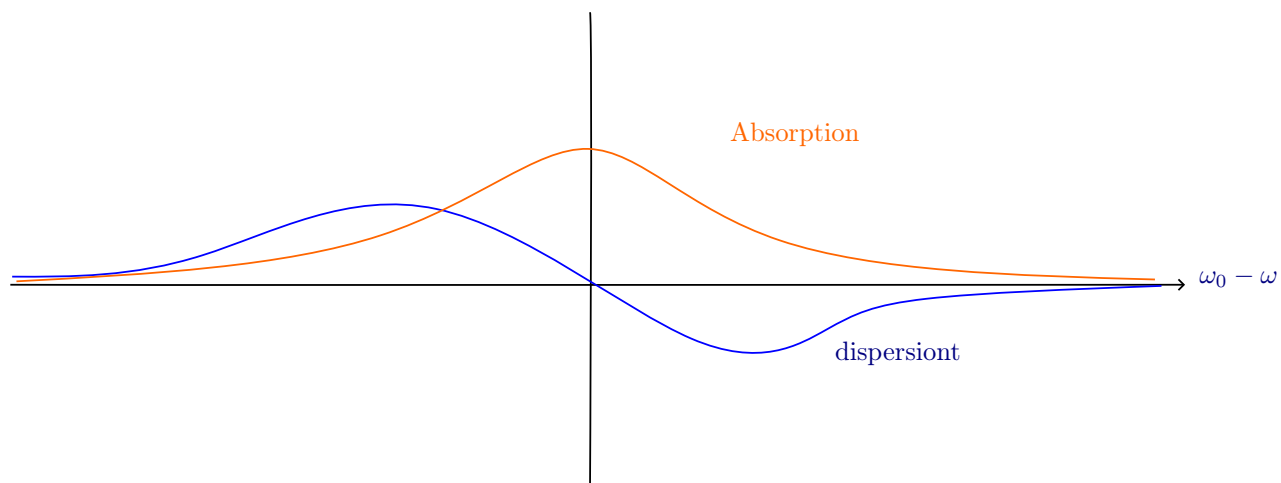


FIGURE 3 – indice de réfraction complexe

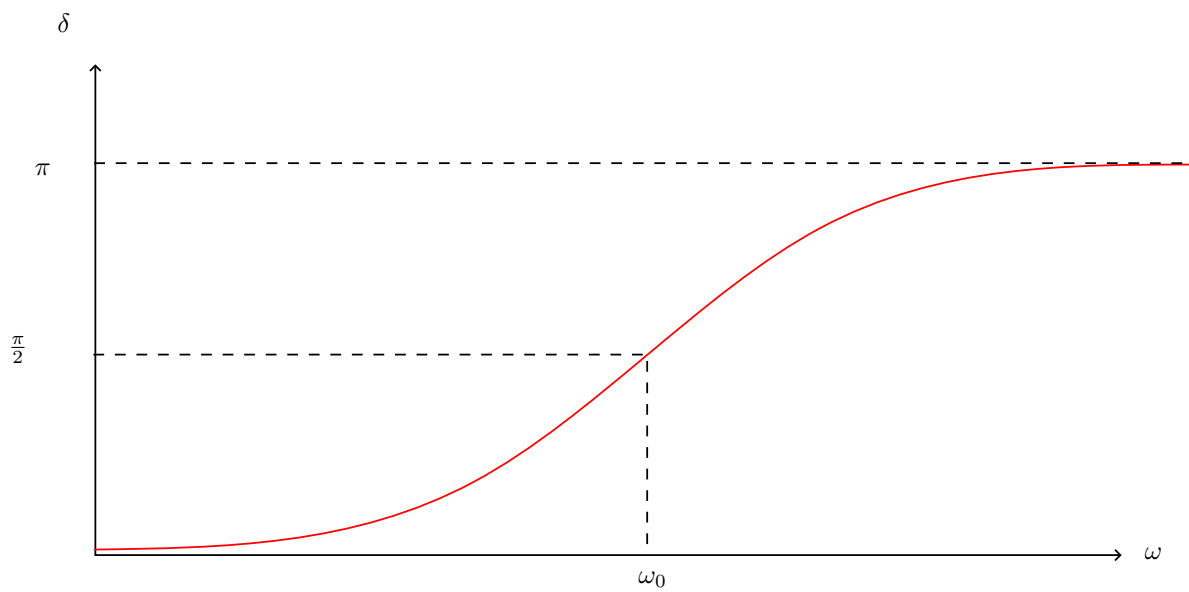


FIGURE 4 – delta

## 2.3 Limite de l'approche classique

Reproduit beaucoup d'effets à faible intensité.

Le coefficient d'absorption correct ?

$$a(\omega) = \sigma(\omega)N$$

$$\sigma_c = \frac{e^2}{m\epsilon_0 c \gamma} \bigg|_{\omega=\omega_0}$$

Avec un traitement quantique, on obtiens

$$\sigma_q = \frac{2\pi c^2}{\omega_{12}^2}$$

Définissons un terme de correction

$$f_{12} = \frac{\sigma_q}{\sigma_c} = \dots \frac{g_2}{g_1}$$

Pour des amplitude très faibles, on trouve le comportement de l'oscillateur harmonique

$$\chi(\omega) \rightarrow -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^0} \implies \sum_i f_{1i} = 1$$

*fudge factor*

## 2.4 Modèle quantique

Modèle simple de l'atome + approche perturbative pour calculer la probabilité de transition  $1 \rightarrow 2$

Entrevoir les oscillations de Rabi

## Modèle de Lorentz, retour

On se place à  $\omega \gg \omega_i j$

Le déplacement est très faible, on peut négliger  $\omega_0, \gamma$

## 2.4 Modèles quantiques

### Objectifs

- Réintroduire la théorie des perturbation
- $\mathcal{P}_{|g\rangle \rightarrow |e\rangle}$
- Oscillations de Rabo

$$H_0 = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \hbar \cdot 0 |g\rangle \langle g|$$

$$|\psi(t)\rangle = \gamma_g |g\rangle + \gamma_e e^{-i\omega_e t} |e\rangle$$

Comment le système se couple à un champ E.M. ?

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

$$H_{\text{int}} = -\hat{D}\hat{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{D} : \text{Opérateur de moment dipolaire} = q\hat{r}$$

Problème à deux niveaux

$$H = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| - \hat{D}\hat{E}(r, t)$$

Approche perturbative :  $H_{\text{int}}$  : faible

$$H_{\text{int}} \rightarrow \lambda H_{\text{int}} \quad \lambda \ll 1$$

$$\psi(t) = \sum_n \gamma_n(t) |n\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi |\psi(t)\rangle = (H_0 + \lambda H_{\text{int}}) |\psi(t)\rangle$$

On projette sur un  $|k\rangle$  quelconque

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} \langle k | \psi(t) \rangle &= \langle k | H_0 | \psi(t) \rangle + \lambda \langle k | H_{\text{int}} | \psi(t) \rangle \\
&= E_k \langle k | \psi \rangle + \lambda \sum_n \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \langle n | \psi(t) \rangle \\
i \left[ -\frac{E_k}{\hbar} + \frac{d}{dt} \gamma_k(t) \right] e^{-iE_k t/\hbar} &= e_k \gamma_{k(t)} e^{-iE_k t/\hbar} + \lambda \sum_m \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \psi_n(t) e^{(E_n - E_k)t/\hbar}
\end{aligned}$$

donc,

$$\forall |k\rangle, \quad \frac{d}{dt} \gamma_k(t) = \lambda \sum_n \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \gamma_n(t) e^{-i \frac{E_n - E_k}{\hbar} t}$$

Cela est la solution exacte et n'est, évidemment, pas facile à résoudre en général.

On fait donc une série en  $\lambda$

$$\begin{aligned}
\gamma_{k(t)} &= \gamma_k^{(0)}(t) + \lambda \gamma_k^{(1)}(t) + \lambda^2 \gamma_k^{(2)}(t) + \dots \\
\gamma_e^{(1)} &= \frac{1}{i} \int_{t_0}^t dt' \langle e | H_{\text{int}} | e \rangle \gamma_e^{(0)} e^{-i\delta E_{eg} t'/\hbar} + \dots \\
\gamma_e^{(1)}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \langle \psi | e H_{\text{int}} | g \rangle e^{-i\Delta E_{ge} t/\hbar}
\end{aligned}$$

On va considérer un champ électrique de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned}
H_{\text{int}} &= \hat{W} \cos(\omega t \pm \varphi) \\
\hat{W} &= \hat{D} \mathbf{E}_0 = q \hat{r} \mathbf{E}_0
\end{aligned}$$

$$\gamma_e(t) = \frac{W_{eg}}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \cos(\omega t' + \varphi) e^{-i \frac{E_g - E_e}{\hbar} t'}$$

$$\gamma_e(t) \approx \frac{W_{eg}}{2i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \left[ e^{i\psi} e^{i\omega t'} + e^{-i\varphi - i\omega t'} \right] e^{i\omega_{eg} t'}$$

...

## Solution non-perturbative

$$H_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle \langle e| = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = -\langle e | \hat{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | g \rangle$$

$$H_{\text{int}} = -\hat{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{D} \cdot (\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + cc)$$

$$= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \left[ -\hat{D} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$$

$$= -|g\rangle\langle g| \hat{d} \cdot \mathbf{E} |g\rangle\langle g| - |g\rangle\langle g| \hat{D} \mathbf{E} |e\rangle\langle e| - \dots$$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \langle g | \hat{D} \mathbf{E} | g \rangle & \langle g | \hat{D} \mathbf{E} | e \rangle \\ \langle e | \hat{D} \mathbf{E} | g \rangle & \langle e | \hat{D} \mathbf{E} | e \rangle \end{pmatrix}$$

### importance des symétries

On va regarder l'effet de l'opérateur parité sur notre système.

$$\hat{H}_e = \frac{P^2}{2m} + V_{\text{coul}}(\mathbf{r})$$

on compare  $H_e \Pi$  et  $\Pi H_e$  : si  $H_e$  commute avec l'opérateur parité, le système a une symétrie d'inversion spatiale.

$$H_e \Pi f(x) = H_e f(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f''(-x) + V_{\text{coul}} f(x)$$

dans l'autre sens

$$\Pi H_e f(x) = \Pi \left( -\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) + V_{\text{coul}}(x) f(x) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} f''(-x) + V_{\text{coul}}(x) f(-x) = H_e \Pi f(x)$$

Donc  $[\Pi, H_e] = 0$  si  $V(x) = V(-x)$ , ce qui est vrai pour les atomes.

Pour un vecteur propre  $|n\rangle$

$$H_e \Pi |n\rangle = \Pi H_e |n\rangle = \Pi E_n |n\rangle = E_n (\Pi |n\rangle)$$

Donc si  $|n\rangle$  est un vecteur propre, alors  $\Pi|n\rangle$  l'est aussi.

$$\Pi^2|n\rangle = |n\rangle$$

$$\Pi|n\rangle = \pm|n\rangle$$

Si  $|n\rangle$  est un vecteur propre de  $H_e$ , c'est aussi un vecteur propre de  $\Pi$  avec une valeur propre de  $\pm 1$

Pour un atome  $\psi_e$  et  $\psi_g$  sont soit pair, soit impair.

$$\langle e|\hat{D}|e\rangle = q \int \psi_e^* \hat{r} \psi_e = 0 = \langle g|\hat{D}|g\rangle$$

$$H_{\text{int}} = - \begin{pmatrix} 0 & \langle g|D \cdot E|e\rangle \\ \langle e|D \cdot E|g\rangle & 0 \end{pmatrix}$$

Les orbitales  $\psi_e$  et  $\psi_g$  ne présente pas de moments dipolaire permanents.

$$E_n \text{ posant } d_{eg} = \langle e|D|g\rangle$$

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| - d_{eg}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) |e\rangle\langle g| - d_{eg}^*\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) |g\rangle\langle e|$$

Changement de base pour  $H$  : Base tournante avec la pompe ( $e^{-i\omega t}$ )

Si on prend un unitaire  $U$

Dans la nouvelle base (changement de base définis par  $U$ )

$$H' = U H U^\dagger + i\hbar \frac{dU}{dt} U$$

Shro :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{-i}{\hbar} H \psi$$

$$U \frac{d\psi}{dt} = \frac{-i}{\hbar} U H \underbrace{U^\dagger U}_{\mathbf{1}} \Psi$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dU}{dt} \psi + U \frac{d\psi}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dt} U^\dagger U \psi + U \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{-i}{\hbar} U H U^\dagger U \psi + \frac{dU}{dt} U^\dagger U \psi = \frac{-i}{\hbar} \left( U H U^\dagger + i\hbar \frac{dU}{dt} U^\dagger \right) U \psi$$

$$U = e^{i\omega t |e\rangle\langle e|}$$

$$U |e\rangle = e^{i\omega t |e\rangle\langle e|} |e\rangle = \sum_k \frac{1}{k!} (i\omega t)^k |e\rangle = \sum_k \frac{1}{k!} (i\omega)^k |e\rangle = e^{i\omega t} |e\rangle$$

$$\langle e| U^\dagger = e^{-i\omega t} \langle e|$$

$$i\hbar \left( \frac{d}{dt} U \right) U^\dagger = i\hbar (i\omega |e\rangle\langle e|) e^{i\omega t |e\rangle\langle e|} e^{-i\omega t |e\rangle\langle e|} = -\hbar\omega |e\rangle\langle e|$$

$$U H U^\dagger = \dots$$

$$\dots$$

$$H' = -\hbar \underbrace{\Delta}_{\omega - \omega_0} |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| - d_{eg} \mathbf{E}_0^* e^{2i\omega t} |e\rangle\langle g| + d_{eg}^* \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e| + d_{eg}^* \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e|$$

Dans la base tournante on *renormalise* l'énergie  $\hbar\omega_0 \rightarrow \hbar(\omega - \omega_0)$

Approximation Séculaire (Rotating wave approximation | RWA)

Négliger les termes en  $2\omega t$

$$H_{\text{séculaire}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| d_{eg}^* E_0^* |g\rangle\langle e|$$

Pour obtenir  $\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t)$ , il faut diagonaliser  $H_{\text{sec}}$

On pose  $\underbrace{\Omega}_{\text{Freq. de Rabi}} = -\frac{2d_{eg} \mathbf{E}_0}{\hbar}$

$$H_{\text{sec}} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & -\Delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\pm} = -\frac{\hbar\Delta}{2} \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$$

Pour  $\Delta = 0$

$$|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right)$$



$$afg/af$$

## Résolution du Hamiltonien avec la théorie des perturbations

$$H = \underbrace{-\hbar(\omega - \omega_0) |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| - d_{eg}^* \mathbf{E}_0^* |g\rangle\langle e|}_{H_0} \underbrace{- d_{eg}^* |e\rangle\langle g| - d_{eg} \mathbf{E}_0^* e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e|}_V$$

états propres de  $H_0$

$$|\pm\rangle = (\cos, \sin) \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} |e\rangle \pm (\sin, \cos) \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

L'approximation séculaire (qui consiste à négliger  $V$ ), revient à dire que la probabilité de transition  $|\pm\rangle \rightarrow |\mp\rangle$  qu'il cause est très faible.

On veut connaître  $\mathcal{P}_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle}(t)$

$$\mathcal{P}_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle} = \frac{1}{\hbar} \left| \int_0^t dt' e^{-i \frac{E_+ - E_-}{\hbar} t'} \langle + | V | - \rangle \right|^2$$

à calculer à  $\Delta = 0$  et  $\Omega \in \mathbb{R}(\varphi = 0)$

## Retour

$$H = -\hbar(\omega - \omega_0) |e\rangle\langle e| - \mathbf{d}_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| - \mathbf{d}_{eg} \mathbf{E}_0 |g\rangle\langle e| + V$$

$$\Omega = \left| \frac{\mathbf{d}_{eg} \mathbf{E}_0}{\hbar} \right|, \quad \omega \gg \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$$

Comment calcule-t-on la probabilité d'exciter l'atome ? (  $\mathcal{P}_{|g\rangle \rightarrow |e\rangle}(t)$  )

$$H |+\rangle = e^{-i \frac{E_+}{\hbar} t} |+\rangle$$

$$H |-\rangle = e^{-i \frac{E_-}{\hbar} t} |-\rangle$$

$$\text{État initial : } |\psi(0)\rangle = |g\rangle = (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) |g\rangle$$

Pour un  $t$  quelconque :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) |g\rangle = \langle +|g\rangle e^{-iE_+t/\hbar} |+\rangle + \langle -|g\rangle e^{-iE_-t/\hbar} |-\rangle$$

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t) = |\langle e|\psi(t)\rangle|^2$$

$$= \langle +|g\rangle e^{-iE_+t/\hbar} \langle e|+\rangle + \langle -|g\rangle e^{-iE_-t/\hbar} \langle e|-\rangle$$

$$\langle e|\psi(t)\rangle = \dots = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \left\{ \frac{e^{-iE_+t/\hbar} - e^{-iE_-t/\hbar}}{2} \right\}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t) = \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{t}{2} \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2} \right)}$$

valable si  $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2} \ll \omega$  : Fréquence de la pompe

Es-ce possible que cette approximation ne soit plus valide ? (  $\tilde{\Omega} \sim \omega$  )

Pour pomper l'atome, on prendre  $\Delta = 0$

$$|\Omega| \sim \omega?$$

$$|\Omega| = \left| \frac{\mathbf{d}_{eg} \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar} \right|$$

Possible en utilisant un laser toujours plus puissant !

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t) = \frac{|\Omega|^2}{|\Omega|^2 + \Delta^2} \sin^2 \left( \frac{t}{2} \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2} \right)$$

Limites grand décalages :

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t) = \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2 + |\Omega|^2}$$

Limites petit décalages :

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t) = 1 - \frac{\Delta^2}{|\Omega|^2}$$

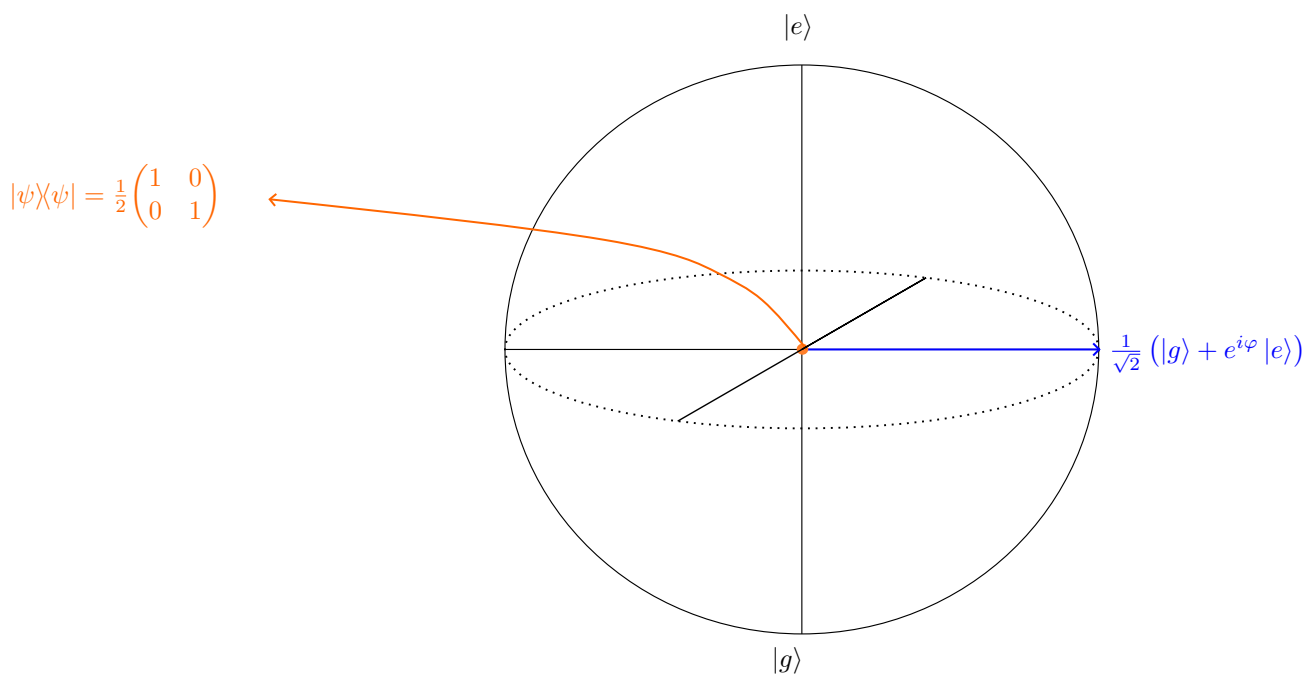


FIGURE 1 – boule de Bloch

## Règle d'or de Fermi

Atome en interaction avec un champ  $\mathbf{E}$  :

$$H = E_+ |+\rangle + E_- |-\rangle$$

Avec le champ, on peut faire  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$

Une fois dans l'état  $|e\rangle$ , l'atome y reste si le champ est nul puisque les états  $e$  et  $g$  ne sont plus couplés .

Comment alors, peut-il y avoir un émission spontanée ? : Les fluctuations du vide couple les états  $e$  et  $g$

## Règle d'or de Fermi

Les fluctuations du vide sont essentielles pour expliquer la relaxation spontanée

Pour prendre ces fluctuations en compte, on utilise la théorie des perturbations.

$$\begin{aligned}
 P_{e \rightarrow g} &= \frac{1}{2} \left| \int_0^t dt' \langle g | H_{\text{int}} | e \rangle e^{-i\omega t} \right|^2 \\
 S_{ge} &= \frac{W_{ge}}{\hbar} \left[ e^{i\varphi} \int_0^t dt' e^{i(\omega - \omega_0)t'} + e^{-i\varphi} \int_0^t dt' e^{-i(\omega + \omega_0)t'} \right] \\
 &= \frac{W_{ge}}{i\hbar} \left[ e^{-i\varphi} \frac{e^{i(\omega - \omega_0)t} - 1}{i(\omega - \omega_0)} - e^{-i\varphi} \frac{e^{-i(\omega + \omega_0)t} - 1}{i(\omega + \omega_0)} \right] \\
 P_{e \rightarrow g} &= \frac{|W_{ge}|^2}{\hbar^2} t^2 (\delta t/2) \quad t_0 = 0
 \end{aligned}$$

Pour tenir compte du champ électromagnétique :

$$\mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_\gamma \quad |e\rangle \rightarrow |e, 0\rangle \quad |g\rangle \rightarrow |g, 1\rangle$$

$$P_{\text{émission}} = \frac{|\langle g, 1_{\lambda, \mathbf{k}} | H_{\text{int}} | e, 0 \rangle|^2 (\delta t/2)}{\hbar^2 \Delta^2}$$

Il existe un continuum de modes  $\lambda, \mathbf{k}$

Concept de la densité de modes électromagnétiques

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE}$$

Sur un intervalle  $dE$

$$dP_{\text{émission}} = dN(E) \frac{|\langle g, 1_E | H_{\text{int}} | e, 0 \rangle|^2 \sin^2(\Delta/2)}{\Delta^2 \Delta^2}$$

Donc

$$P_{\text{émission}} = \frac{1}{\hbar^2} \int dE \rho(E) |\langle g, 1_E | H_{\text{int}} | e, 0 \rangle|^2$$

### Fonction de dirac

$$\frac{\sin^2 \Delta t/2}{\Delta^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \hbar t \delta(\Delta)$$

### Taux d'émission

$$\Gamma = \frac{dP_{\text{émission}}}{dt}$$

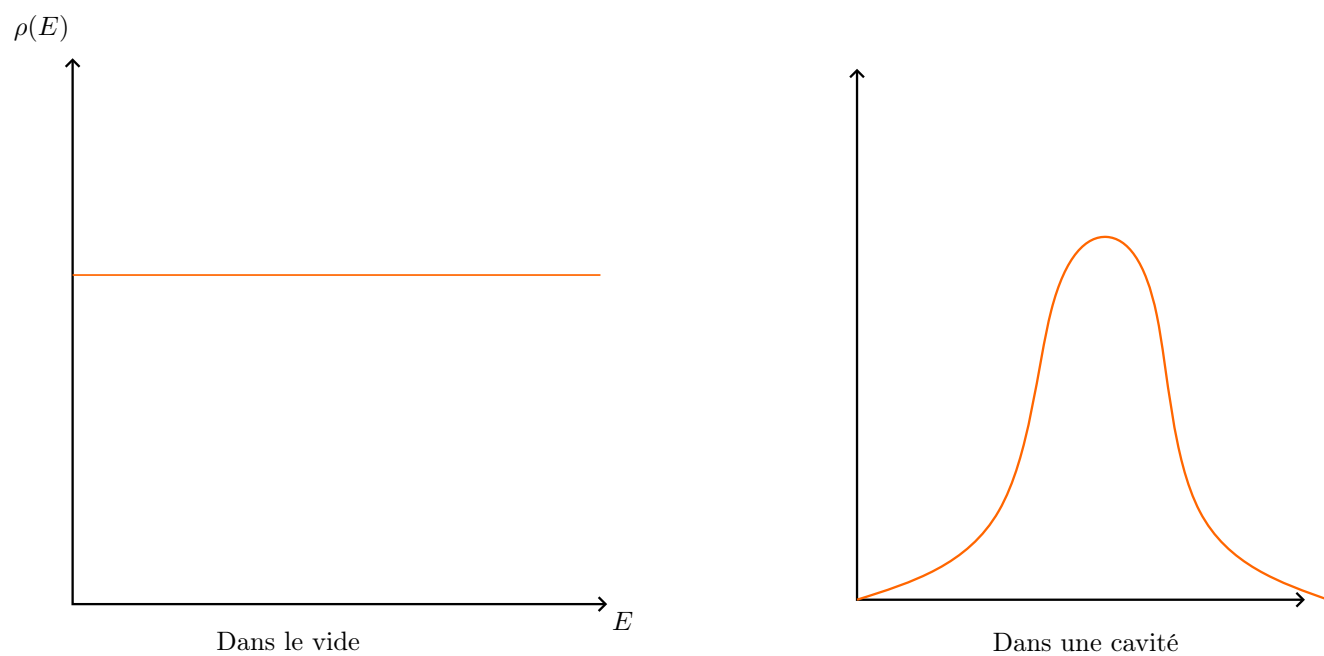


FIGURE 1 – densité

### Atome à proximité d'un miroir

## 3 Sources de photons uniques

#### Objectifs

- Importance de ce type de source
- Différentes réalisations
- Characterization en sources de photons

### 3.1 Pourquoi ?

La cryptographie quantique (BB84) est une application qui apporte énormément d'intérêt.

Une autre utilisation importante des sources de photons uniques est la production d'état quantique.

Un couplage optomécanique permet

$$|1\text{photon}, 0\text{phonon}\rangle \rightarrow |0\text{photon}, 1\text{phonon}\rangle$$

Préparation d'état plus complexes à partir d'un photon

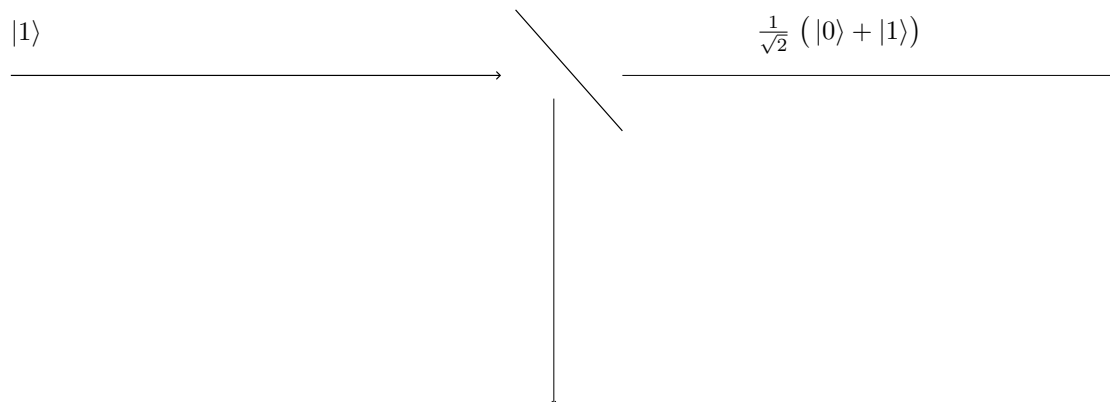


FIGURE 2 – lame séparatrice

atome à trois niveau

2 transitions permettent d'avoir un *photon annonceur*

Cependant, on a pas de contrôle sur le mode. Aussi même avec le photon annonceur, on est pas certain du temps où le second va arriver.

Pour corriger le manque de contrôle de la fréquence, on utilise une cavité. Pour qualifier la *qualité* de cette fréquence on utilise le facteur de Purcell :

$$F_p = \frac{\Gamma_{\text{cavité}}}{\Gamma_{\text{autre}} + \Gamma_{\text{cavité}}}$$

SPDC : Spontaneous Parametric Down Conversion

Cristal non-linéaire



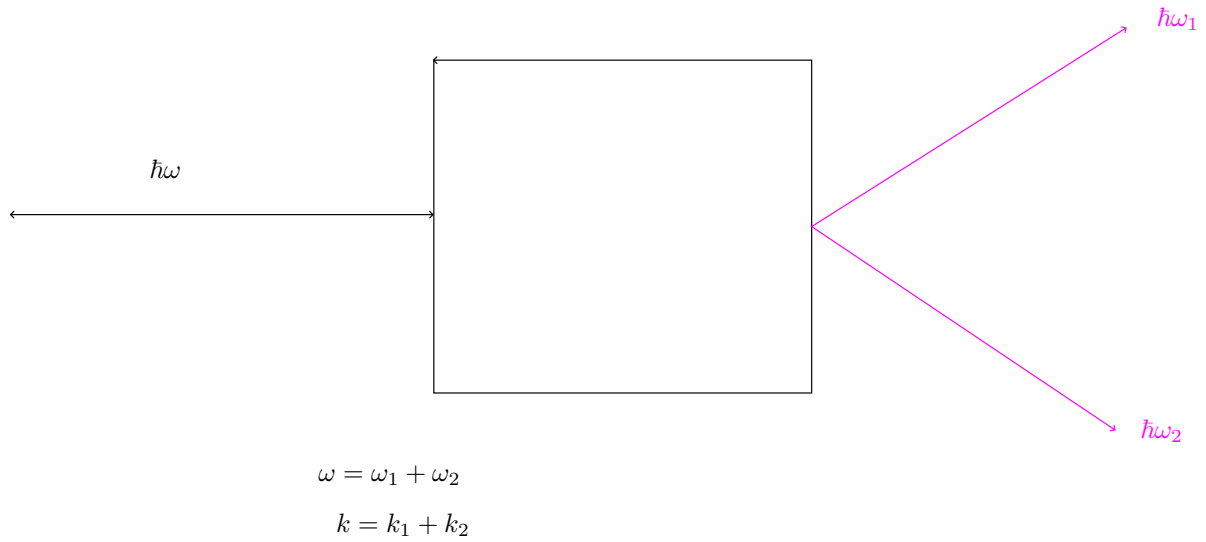


FIGURE 3 – Guy bernier

### 3.3 Optique non-linéaire

Exemple de système non-linéaire

- Doubleur de fréquence
- Laser pulsé (Q switch)
- Amplification fibré

La polarisation d'un milieu linéaire

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t) \quad \chi^{(1)} : \text{susceptibilité}$$

Non linéaire

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t) + \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(2)}(t) + \epsilon_0 \chi^{(3)}(t) + \dots}_{\text{Non linéaire}}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + c.c.$$

$$P^{(2)}(t) = \underbrace{2\epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^*}_{\text{rectification optique}} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \underbrace{(E_0^2 e^{-2i\omega t} + E_0^{*2} e^{2i\omega t})}_{\text{génération de seconde harmonique}}$$

## Crystal non-linéaire

$$P^{(2)} = 2\epsilon_0\chi^{(2)}E_0E_0^* + \epsilon_0\chi^{(2)}(E_0e^{-2i\omega t} + c.c.)$$

Excitation paramétrique spontanée vers le bas (SPDC)

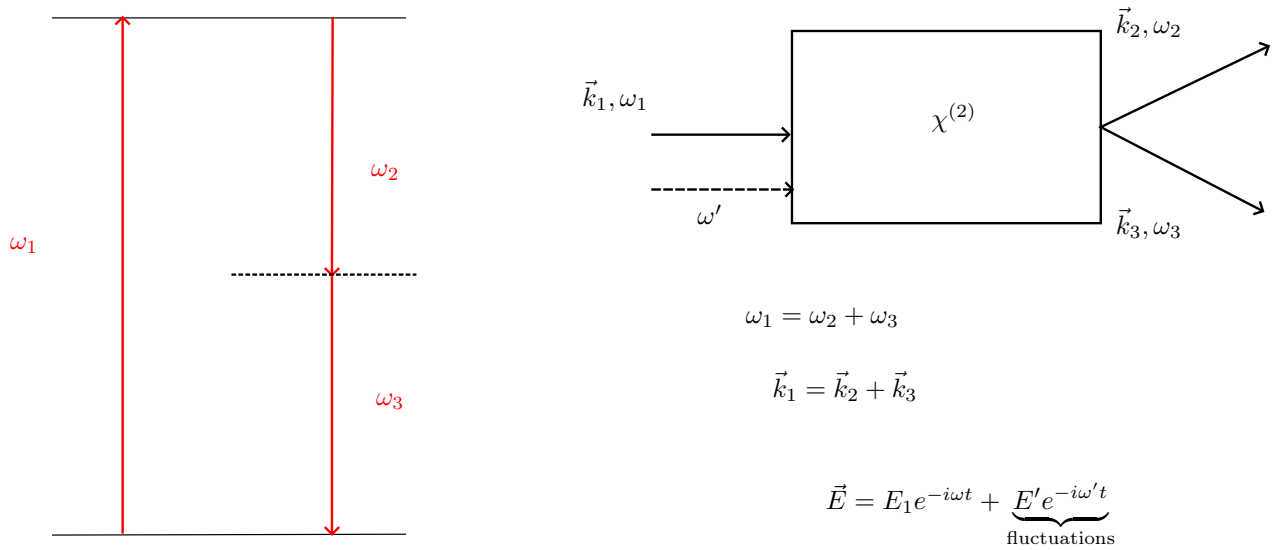


FIGURE 1 – SPEC

### 3.5 Corrélations $g^{(1)}(?), g^{(2)}(?)$

Nous avons parlé d'émetteurs uniques, de champs cohérents

Comment différencier des différents type de sources ? : **La corrélation**

Définition

$$g^{(1)}(\zeta) = \frac{\langle E^-(t)E^+(t+\zeta) \rangle}{\langle E^-(+)E^+(\zeta) \rangle}$$

$$g^{(2)}(\zeta) = \frac{\langle E^{-(t)} E^-(t + \zeta) \rangle}{\dots}$$

...

o

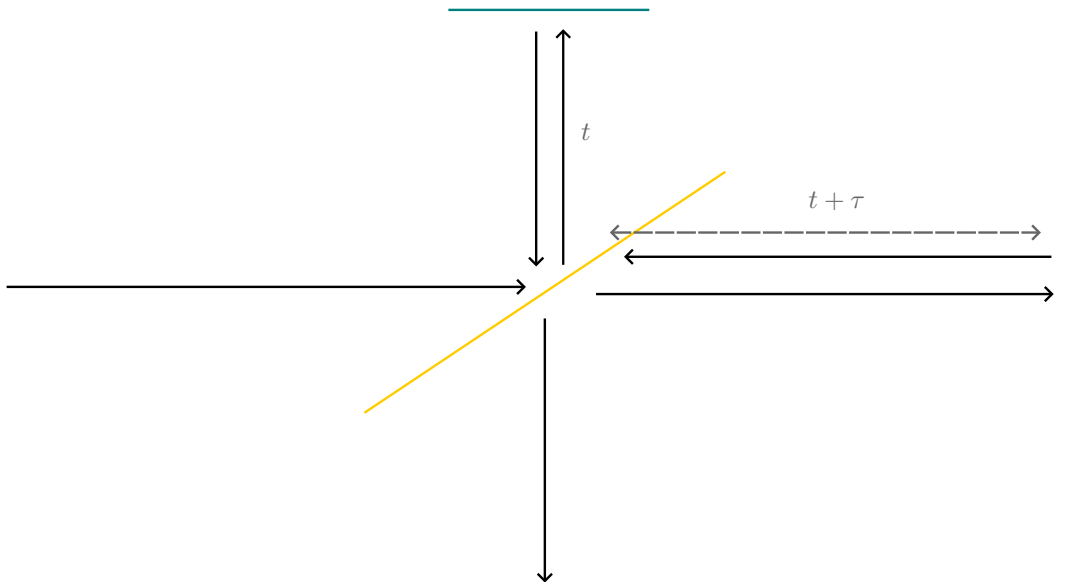


FIGURE 1 – interféromètre

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^-(t)E^+(t+\tau) \rangle}{E^-(t)E^+(\tau)}$$

$$g^{(1)}(\tau) = e^{i\omega\tau}$$

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |g^{(1)}(\tau)| = 1$$

Si on introduit maintenant une fluctuation aléatoire de phase (par exemple par un mouvement aléatoire des miroirs)

2022-36-02

[Retour sur l'examen](#)

$$\tan^2(x) + 1$$