2024-01-25

Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2. Q_8 : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1,\, -1,\, i,\, j,\, k\, -i,\, -j,\, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \qquad -ji = ij = -k$$

   (a) Calculer les classes de conjugasion dans Q_8
   (b) Déterminer les représentations irréductible (il y en a 5, dimension 1 et 2)
   (c) Dresser la tables des caractère de Q_8
3. Décomposer $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ en irréductibles
4. Calculer $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

abélien $\implies$ toute représentation irréductible est de dim 1 On a $(0,1) + (0,1) = (0,0)$

$$\rho(0,1)\rho(0,1) = 1 = \rho(0,1)^2 \implies \rho(0,1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1^m) \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$
$$\dots$$

Pareil pour tout les éléments

(b) Si $\rho : Q_8 \to \mathbb{C}^*$ est de rang 1. Comme $i^4 = 1$, $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$ (de même pour j et k)

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$ Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prennant $\rho(i) = i$ ou $\rho(i) = -1$ (même chose pour j et k évidemment) On doit donc prendre $\rho(i) \in \{1, -1\}$, $\rho(j) \in \{1, -1\}$, $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)

	e	i	j	k	-1
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_1	1	-1	1	-1	1
ρ_2	1	-1	-1	1	1
ρ_3	1	1	-1	-1	1
ρ_4	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de C_8

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

V espace vectoriel

$P : V \to V$L application linéaire t.q. $P^2 = P$ est appelé une projection (sur le sous-espace Im(P))

Ex : $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si P est une projection, $\mathrm{tr}(P) = \dim(\mathrm{ImP})$

Démonstration On a $V = \mathrm{KerP} \oplus \mathrm{ImP}$

1. car $\dim(\mathrm{V}) = \dim(\mathrm{KerP}) + \dim(\mathrm{Im(P)})$
2. et si $v \in (\mathrm{KerP}) \cap (\mathrm{ImP})$ $P(v) = 0$ mais aussi $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$

$$\implies v = 0$$

Si $v \in \mathrm{Im(P)}$ $P(V) = V$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\mathrm{Im(P)}} = \mathbb{1}_{\mathrm{Im(P)}} \\ &\text{et} \quad P|_{\mathrm{KerP}} = 0_{\mathrm{KerP}} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathrm{ImP}} & 0 \\ 0 & 0_{\mathrm{ImP}} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(\mathbb{1}_{\mathrm{ImP}}) = \mathrm{dimImP} \end{aligned}$$

??? d'irréducitbilité est relations d'orthogonalité

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$

définissons $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que V^G est un sous-espace vectoriel de V

et $P : V \to V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G?} \rho(g)v$$

<u>Prop :</u> P est une projection sur V^G

<u>Démonstration :</u> ON veut montrer

1. $\mathrm{ImP} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ et
2. $P^2 = P$

1. Supposons $v \in \mathrm{ImP}$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \cdots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter :(

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \mathrm{ImP} \subset \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$$

Inversement, si $v \in V^G$

alors $P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\mathrm{dim}(\mathrm{V}^{\mathrm{G})} = \mathrm{tr(P)} = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \rho(\mathrm{g})\right) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{G})) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \chi_\rho(\mathrm{g})$$

En particulier, si ρ est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

<u>Ex :</u> S_3

$$\cdots$$