2024-03-18

Rappels

Les représentation irréductibles de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ sont en bijection avec $\{(a,b) > a, b \leq 0 \text{ entiers}\}$

$$\to \Gamma_{a,b}$$

dont le plus haut poids et $aL_1 - bL_3$

$$\Gamma_{a,b} \subseteq \mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b(\mathbb{C}^3)$$

$$\Gamma_{a,b} = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}\mathbb{C}^{3*} \to \mathrm{Sym}^{a-1} \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

Recette pour analyser les représentation d'une algèbre de Lie semi-simple

Rappel

Simple : ad_X est irréductible $\iff$ pas d'idéal non-trivial

Semi-simple : Somme direct d'algèbre simple

Étape 1 : Identifier une sous algèbre $h \subseteq g$ abélienne diagonalisable maximale. On appelle h une sous-algèbre de Cartan

On a vu que si un algèbre est diagonalisable dans une représentation, elle l'est dans toutes les représentations. Une algèbre diagonalisable est une algèbre qu'on peut montrer diagonalisable dans au moins une représentation.

Attention

Ex :

$$\square(3,\mathbb{C}) = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{C}\}$$

h n'est pas nécessairement diagonale
truc : choisir une base jacobienne Dans une base t.q. la forme bilinéaire est donnée par la matrice $J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, $\square(3\mathbb{C})$ est donné par $X^tJ + JX = 0$

$$\dots$$

$$\square(3,\mathbb{C}) = \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & -b \\ 0 & -c & -a \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{C}\}$$

ici, on peut prendre $h \in \{ \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \}$

Étape 2 : Décomposer $\mathfrak{g}$ selon les poids (racines) de sa représentation adjointe

$$g = h \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} g_\alpha \right)$$

où $R \subseteq h^*$ est t.q. $g_\alpha \neq \{0\}$

$$g_\alpha = \{X \in g | \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \forall H \in h\} = \{X \in g | [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$$

<u>Faits</u> :

i) $\dim(g_\alpha) = 1 \forall \alpha \in R$
ii) R engendre un réseau $\Lambda_R \subseteq h^*$ de rand égal à $\dim(h^*)$
iii) $R = -R$(Si α est une racine $-\alpha$ l'est aussi) Une représentation V va se décompose en $V = \oplus V_\alpha, \alpha \in h^*$

Les vecteurs de racines, $X \in g_x$ agissent par translation sur les V_β

$$X : V_\beta \to V_{\alpha+\beta}$$

Si V est irréductible, tout les poids sont congrus modulo Λ_R

Étape 3 : Pour chaque raine, on va identifier une sous-algèbre $\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

on sait que $[g_\alpha, g_{-\alpha}] \subseteq h$

en fait $\mathfrak{s}_\alpha = g_\alpha \oplus g_{-\alpha} \oplus [g_\alpha, g_{-\alpha}]$ est aussi un sous-algèbre de g isomorphe à sl$(2\mathbb{C})$

On trouve $X_\alpha \in g_\alpha$, $Y_\alpha \in g_{-\alpha}$ t.q. $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$

on a $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ on a $[H_\alpha, Y_\alpha] = 2Y_\alpha$

Toujours possible car

i) $[g_\alpha, g_{-\alpha}] \neq 0$
ii) $[[g_\alpha, g_{-\alpha}], g_\alpha \neq 0$

Étape 4 : Utiliser l'<u>intégralité</u> des valeurs propres de H_α

Pour tout poids β d'une représentation de g

$$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$$

On définit une autre réseau, (le réseau des poids) $\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$

Si $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda_W$ dans $(\beta_1 + \beta_2)(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) + \beta_2(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \implies \beta_1 + \beta_2 \in \Lambda_W$

et $-\beta_1(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \to -? \in \Lambda_W$

En fait, $\Lambda_R \subseteq \Lambda_W$

Étape 5 : Usilser la symétrie par rapport à 0 des v.p. de H_α

On introduit une réflexion pour chaque $\alpha \in R$, noté W_α, $W_\alpha : h^* \to h^*$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)_\alpha$$

$$\mathscr{W} = \langle W_\alpha \rangle$$

groupe engendré par les W_α qui s'appelle Groupe de Weyl

Pour une representation $V = \oplus V_\beta$ on peut regrouper les V_β en classes modulo α

$$V = \oplus V_{[\beta]}$$

où $V_{[\beta]} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\alpha + n\beta}$

les poids dans $V_{[\beta]}$ sont $\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \cdots, \beta + n\alpha$ où $n = -\beta(H_\alpha)$

Conclusion

l'ensemble des poids V est $\mathscr{W}$-invarient

Étape 6 : Faire un dessin

Il existe un produit bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ appelé forme de Killing qui est définit positif sur le sous-espace réel engendré par les H_α

donne un produit scalaire sur le sous-espace réel engendré par R dans h^*. Pour ce produit , W_α est une réflexion euclidienne

Étape 7 : Choisir une direction dans h^*. C'est-à-dire une forme linéaire l sur h^*

$$l : h^* \to \mathbb{R} t.q. L(\alpha) \neq 0 si \alpha \in R$$

On décompose $R = R^+ \cup R^-$ en racine positives et négatives

On dit que $v \in V$ est un vecteur de plus haut poids pour g si $Xv = 0 \forall X \in g_\alpha, \alpha \in R^+$

Proposition :

(i) Toute représentation de g possède un vecteur de plus haut poids
(ii) V et toutes ses images obtenus en itérants des applications de $X_\alpha, \alpha \in R^-$ engendre une sous-représentation $W \subseteq V$ irréductible
(iii) Tout représentation irréductible admet un unique vecteur de plus haut poids (à scalaire près)

Manque de Batterie !