Révision

<u>Différentes dérivée</u>

$$f : S \to \mathbb{R}^n$$

Dérivé directionnelle de f au point x dans la direction $\mathbf{v}$: $D_x f(\mathbf{v})$

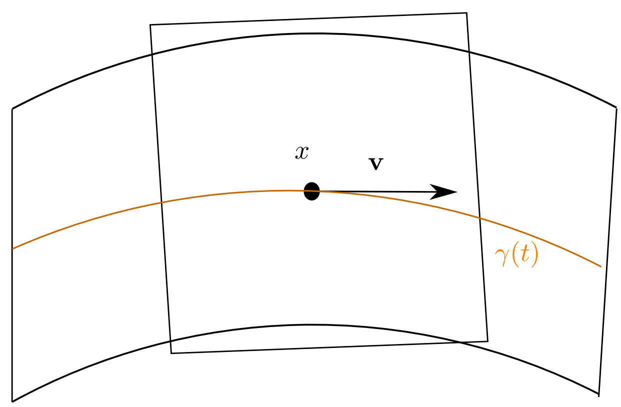

Figure 1 – Dérivée directionnelle

$$D_x f(\mathbf{v}) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma(t))$$

Indépendant du choix de γ

Raccourcit de notation

Si le chemin $\gamma(t)$ est fixé au départ, on note souvent $f(\gamma(t)) = f(t)$. Dans ce cas

$$D_x f(\mathbf{v}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(t) = f'(t)$$

Si on écrit

$$f(p(u, v)) = f(u, v)$$

La matrice de $D_x f$ dans la base p_u, p_v est

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}v} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}v} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$D_x f(ap_u + bp_v) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}v} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

<u>Exemple</u>

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$f(\theta, \varphi) = 5\theta - \theta^2 + 8\varphi - \varphi^2$$

Pour trouver le max/min de f sur

$$S^2$$

,

$$Df = (5 - 2\theta, 4 - 2\varphi) = 0 \implies \theta = \frac{5}{2} \quad \varphi = \frac{4}{2} = 2$$

<u>Projection de Mercader</u>

$$\begin{aligned} M :& C && \to S^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} && \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}x \\ \sqrt{1-z^2}y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$C : \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$M(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-z^2} \\ z \end{pmatrix} = p(\theta, \arccos(z))$$

<u>Champs de vecteur</u>

Champ de vecteur F sur S

$$F : S \to \mathbb{R}^3 | F(x) \in T_x S$$

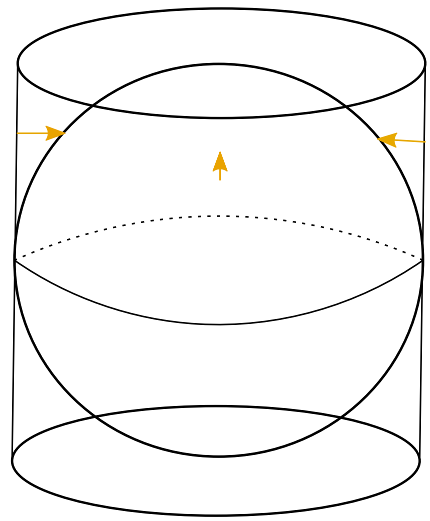

FIGURE 2 – Projection de Mercate

Dérivé directionnelle : Comme pour une fonction quelconque

$$D_x F(\mathbf{v})$$

Dérivée <u>covariante</u>

$$\nabla_{\mathbf{v}} F = D_x F(\mathbf{v}) - (D_x F(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n}$$

(Projection orthogonale sur $T_x S$)