Diffusion élastique

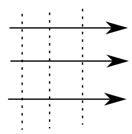

Figure 1 –

$$\mathrm{d}n = F_i(\theta.\varphi)\mathrm{d}\Omega$$

$$u_{\mathbf{k}}(r) \sim left(e^{ikz} + f(\theta\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$(\theta, \varphi) = \left|f_k(\theta\varphi)\right|^2$$

Première approche : Approximation de Born

$$(\theta, \varphi) = \frac{\mu^2}{(2\pi)^2\hbar^4}\left|\mathrm{d}r^3 e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} v(\mathbf{r})\right|^2$$

Deuxième approche : Méthode des déphasages ou d'ondes partielles

Pour des $V(\mathbf{r})$ central $(V(\mathbf{r})V(r))$ on a que la base $\left\{H, \mathbf{L}^2, L_z\right\}$ forme un E.C.O.C

tandis que $\{\varphi_{k,l,m}\}$ forme une fase de fonctions propres (ondes partielles)

$$\varphi_{k,l,m} = R_{kl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$$

En pricipe en devrait décomposer sur trois incdie mais on n'elève k parce que c'est élastique et m je sais plus pourquoi.

$$v_k(\mathbf{r}) = \sum_{\ell} C_{k,\ell}\varphi_{klm}(\mathbf{r})$$

Loin du potentiel $\varphi_{klm} \to \varphi_{klm}^{(0)}$: Ondes sphérique libres.

Ces derniéres fonctions d'ondes ($\varphi_{klm}^{(0)}$ sont des fonction propres de $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$

$$H_0 \left|\varphi_{klm}^{(0)}\right\rangle = E_k \left|\varphi_{klm}^{(0)}\right\rangle$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

$$\langle \mathbf{r}| H_0 \left|\varphi_{klm}^{(0)}\right\rangle = E_k \left\langle \mathbf{r}\middle|\varphi_{klm}^{(0)}\right\rangle$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\boldsymbol{\nabla}^2\varphi_{klm}^{(0)} = E_k\varphi_{klm}^{(0)}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{?}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]\varphi_{klm}^{(0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}\varphi_{klm}^{(0)}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}l(l+1)\right]R_{kl}^{(0)}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}R_{kl}^{(0)}$$

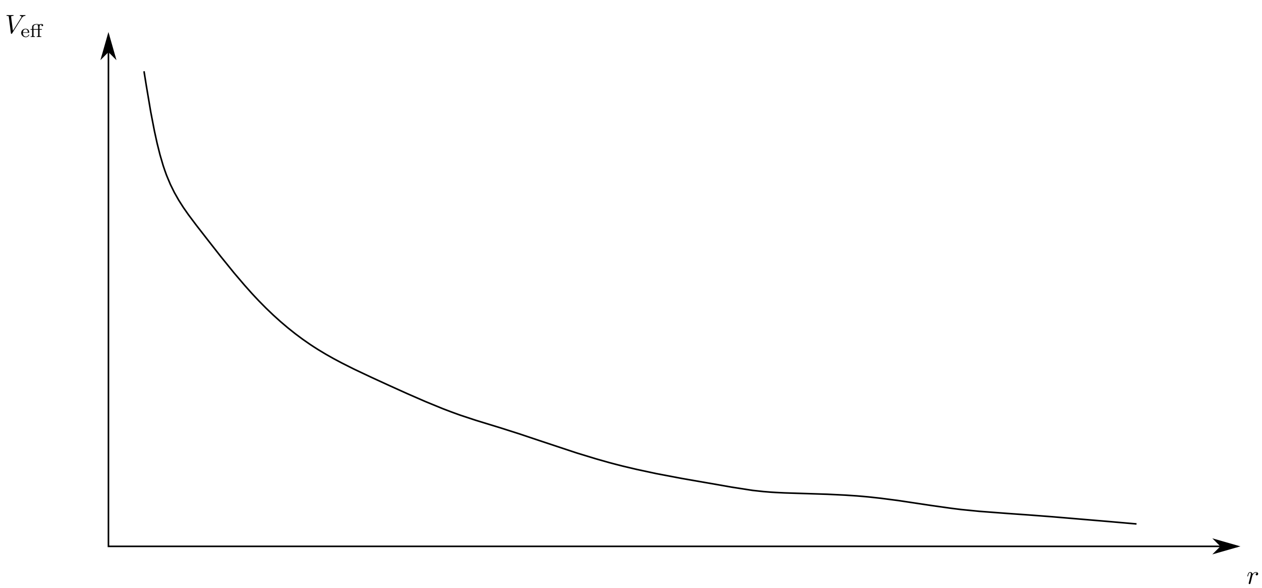

Figure 2 – Potentiel effectif

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 u_{kl}^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2^2} l(l+1) u_{kl}^{(0)}$$

Lorsqu'on fait tendre le rayon vers l'infini, on trouve

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 u_{kl}^{(0)}}{\partial r^2} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} u_{kl}^{(0)}$$

Les solution de cette équation différentielle sont bel est bien des ondes sphériques !

Dans le cas $r \to 0$

$$u_{kl}^{(0)}(r) \sim r^s$$

$$s(s-1) = l(l+1)$$

$$s_1 = l+1 \implies r^{l+1}$$

$$s_1 = -l \implies r^{-l}$$

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 R_{kl}^{(0)}}{\mathrm{d}r^2} + 2r \frac{\mathrm{d}R_{kl}^{(0)}}{\mathrm{d}r} + k^2 r^2 R_{kl}^{(0)} - l(l+1) R_{kl}^{(0)} = 0$$

C'est une équation à point régulier sigulier ! Il est pertinant de faire un changement de variable.

$$\rho^2 \frac{\mathrm{d}R_{kl}(\rho)}{\mathrm{d}\rho} + 2\rho \frac{\mathrm{d}R_{kl}^{(0)}}{\mathrm{d}\rho} + \rho^2 R_{kl}^{(0)} - l(l+1) R^{(0)} = 0$$