Particules identiques

<u>Définition</u> : Des particules identiques ont la même mase, charge et spin... etc. Rien ne distingue une de l'autre.

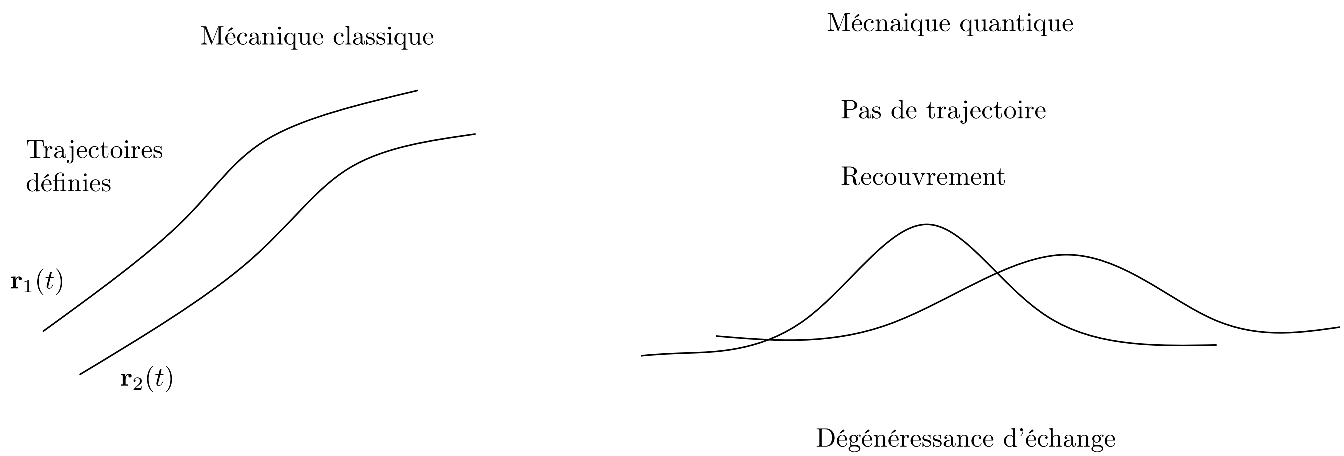

FIGURE 1 – Mécanique clasique versus quantique

Cas simples avec $n = 2$

Les particules "1" et "2" sont des les états $\left|\varphi_r^1\right\rangle$ et $\left|\varphi_{r'}^2\right\rangle$ respectivement

Espace de Hilbert

$$\mathcal{E}^{\otimes 2} = \mathcal{E}^1 \otimes \mathcal{E}^2$$

Dégénéresance d'échange

$$\left|\varphi_r^1\right\rangle \otimes \left|\varphi_{r'}^2\right\rangle = \left|\varphi_r^1, \varphi_{r'}^2\right\rangle$$

On prend le vecteur $|\Psi\rangle = a_1 \left|\varphi_r^1, \varphi_{r'}^2\right\rangle + a_2 \left|\varphi_{r'}^1, \varphi_r^2\right\rangle$

Avec $|a_1| = |a_2|$ Comme dicté par le <u>postulat de symétrisation</u>

La dégénérecese d'échange induit l'utilité des opérateur de permutation P_π ou π représente les difféentes permutation.

Par exemple pour $n = 2$ on a

$$\{P_\pi\} = \{\mathbb{1}, P_{21}\} = \{P_{\pi 1} P_{\pi 2}\}$$

$$P_{21} \left|\varphi_r^1, \varphi_{r'}^2\right\rangle = \left|\varphi_r^2, \varphi_{r'}^1\right\rangle$$

$$P_{21}^2 = \mathbb{1}$$

$$\implies P_{21} = P_{21}^{-1}$$

Hérmiticité de P_2

$$\left\langle \varphi_i^1, \varphi_j^2 \right| P_{21}^\dagger \left| \varphi_i^1, \varphi_j^2 \right\rangle = \left(\left\langle \varphi_i^1, \varphi_j^2 \right| P_{21} \left| \varphi_i^1, \varphi_j^2 \right\rangle \right)^* = \cdots = \delta_{ij'}\delta_{ji'}$$

Les état propres de opérateur de permutations sont les états complètement symétriques et les états complètement anti-symétriques

$$\begin{cases} P_{21} \left|\Psi\right\rangle_+ = \left|\Psi\right\rangle_+ & \text{État symétrique} \\ P_{21} \left|\Psi\right\rangle_- = -\left|\Psi\right\rangle_- & \text{État antisymétrique} \end{cases}$$

On définit mainetanant deux projecteurs : $S_\pm$

$$S_\pm \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm P_{21})$$

On démontre facilement que $S_\pm^2 = S_\pm$

On trouve que l'effet de ces projecteur est de (anti)symétriser les états !

$$P_{21} S_\pm \left|\Psi\right\rangle = P_{21} \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm P_{21}) \left|\Psi\right\rangle = S_\pm \left|\Psi\right\rangle$$

On trouve la propriété importante que

$$S_{+S_-} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + P_{12}\right)\left(\mathbb{1} - P_{21}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} - P_{21}^2 + P_{21} - P_2 1\right) = 0$$

Ce qui est tout à fait logique car on projete sur des sous espace disjoint ! On ne peux pas avoir des particules qui sont des bosons et des fermions en même temps.

$$\mathcal{E}_+^{\otimes 2} \cap \mathcal{E}_-^{\otimes 2} = 0 \qquad \mathcal{E}_+^{\otimes 2} \cup \mathcal{E}_-^{\otimes 2} = \mathcal{E}^{\otimes 2}$$

Septième postulat de la mécanique quantique ; postulat de symétrisation

Les vecteurs d'était pour $n = 2$ particules identiques sont soit symétriques (bosons) soit antisymétique (fermions)

Généralisation à plusieurs particules $(n > 2)$

$$\left| \varphi_{r_1}^2, \varphi_{r_2}^2, \cdots, \varphi_{r_n}^n \right\rangle \implies \text{dégénéressance d'échange}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_i^{n!} a_i P_{\pi i} |\Psi_{\pi i}\rangle$$

$$|a_i| = |a_j| \forall i, j$$

Illustation avec $n \equiv 3$

$$P_{321} |\varphi^1_{r_1}, \varphi^2_{r_2}, \varphi^3_{r_3}\rangle = |\varphi^3_{r_1}, \varphi^1_{r_2}, \varphi^2_{r_3}\rangle = |\varphi^2_{r_2}, \varphi^2_{r_3}, \varphi^3_{r_1}\rangle$$

Les P_π ne sont pas commutatif :

$$P_{132} P_{312} |1,2,3\rangle = P_{132} |3,1,2\rangle = |3,2,1\rangle$$

$$P_{321} P_{132} |1,2,3\rangle = P_{321} |1,3,2\rangle = |2,3,1\rangle$$

$$|3,2,1\rangle \neq |2,3,1\rangle \implies P_{\pi_i} P_{\pi_j} \neq P_{\pi_j} P_{\pi_i}$$

Les permutaitons peuvent toujours être décomposé en traspoition (échange de deux éléments seulement) Ex : $P_{321} = P_{132} P_{213}$. La parité d'une permutation correspond alors à la parité du nombre de transposition dont elle est composé.

En général $P_{pi} \neq P^\dagger_{pi}$ (n'est pas hérmitique) même si c'est le cas pour les transposition.

Unitarité :

$$P^\dagger_\pi P_\pi = \mathbb{1}$$

$$P^\dagger_{321} P_{321} = (P_{123} P_{213})^\dagger P_{321} = (P_{132} P_2 13)^\dagger (P_{132} P_{213}) = P^\dagger_{213} P^\dagger_{132} P_{132} P_{213} = \mathbb{1}$$

La preve général suit exactement le même raisonement.

ON cherche les état symétique et antisymériques

$$P_\pi |\Psi\rangle_\pm = \pm^\pi |\Psi\rangle_\pm$$

On introduit encore une fois des projecteurs

$$S_+ = \frac{1}{n!} = \sum_\pi P_\pi \qquad S_- = \frac{1}{n!} \sum_\pi (-1)^\pi P_\pi$$

$$S^2_\pm = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n!} \sum_\pi \pm^\pi P_\pi \right) \sum_{p'} \pm^{\pi'} P_{\pi'} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n!} \sum_\pi \pm^{\pi + \pi'} \underbrace{P_{pi} P_{\pi'}}_{P_{\tilde{\pi}}} + \cdots \right) = \frac{1}{n!} (S_\pm + \cdots) = \frac{n!}{n!} S_\pm = S_\pm$$