2022-09-14

Courbure

Tenseur de Riemann R^i_{jkl}

$$R^l_{kji} = \partial_i \Gamma^l_{ki} - \partial^l_{i\Gamma_{kj}} + \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi}$$

(1) Non commutativité des dérivées covarientes

$$\partial_i \partial_i Y = \partial_j \partial_i Y$$

$$\nabla_i \nabla_j A_k - \nabla_j \nabla_i A_k = R^l_{kji} A_l$$

(2) holonomie

$$\Delta A^i = R^i_{kjl} A^k \mathrm{d}x^l \mathrm{d}x'^j$$

(voir figure 1)

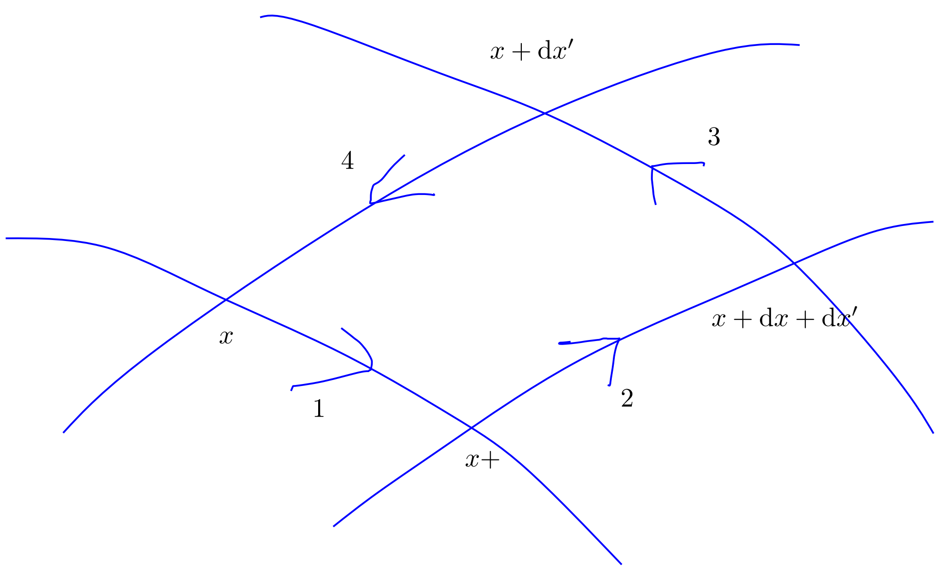

Figure 1 – holonomie

(3) déviation géodésique

dérivé intrinsèque

$$\mathbf{A}() = A^i(lambda)\mathbf{e}_i(\lambda)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{A} = \frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{e}_i + A^i\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_i}{\mathrm{d}\lambda} = \dot{A}^i\mathbf{e}_i + A^i\partial_j\mathbf{e}_i\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\dot{A}^k + \Gamma)ji^k A^i\dot{x}^j\right)\mathbf{e}_k$$

$$\nabla_k A^k = \dot{A}^k + \Gamma^k_{ji}A^i\dot{x}^j$$

$$\boxed{\nabla^2_{lamda}\xi^i = R^i_{jkm}\xi^m\dot{x}^j\dot{x}^k}$$

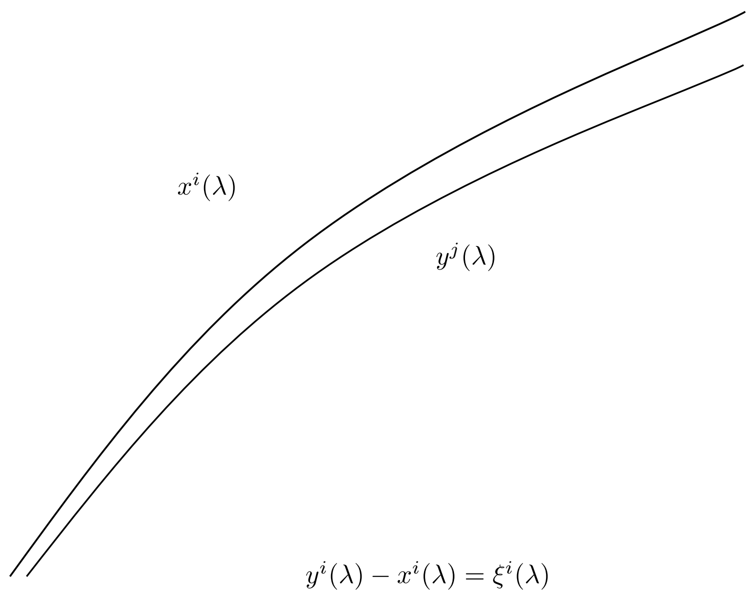

FIGURE 2 – déviation géodésique

<u>Tenseur de Rixxi</u>

$$R_{ik} = R^j_{ijk}$$

<u>Tenseur scalaire</u>

$$R = r^i_i = g^{ik}R_{ik}$$

$$\nabla_j A_k = \partial_j A_k - \Gamma^m_{jk}A_m$$

$$\nabla_i \nabla_j A_k = \nabla_i \left[\partial_j A_k - \Gamma^m_{jk} A_m\right] = \partial_i \partial_j A_k - \partial_j \left(\Gamma^m_{jk} A_m\right) - \Gamma^l_{ij} \left(\partial_l A_k - \Gamma^m_{lk} A_m\right) - \Gamma^l_{ik} \left({}_i A_l - \Gamma^m_{jl} A_m\right)$$

$$= \partial_i \partial_j A_k - \Gamma^m_{jk} \partial_i A_m - \partial_i \Gamma^m_{jk} A_m - \Gamma^l_{ij} \partial_l A_k - \Gamma^l_{ij} \partial_j A_l + \Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} A_m + \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{jl} A_m$$

$${}_j \nabla_i A_k = \cdots (j \leftrightarrow i)$$

$$\left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\right) A_k = \left(-\partial_i \Gamma^m_{jk} + \partial_j \Gamma^m_{ik}\right) A_m + \left(\Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^m_{il}\right) A_m$$

$$= (\partial_i \Gamma^l_{ki} - \partial^l_{i\Gamma_{kj}} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi}) A_l$$

Propriétés

A)

$$R_{lkji} = \frac{1}{2} \left({}_i \partial_j g_{ki} + del_k \partial_j g_{li} - \partial_l \partial_j g_{ki} - \partial_k \partial_i g_{lj}\right) + g^{mn} \left(\Gamma_{mil} \Gamma_{nkj} - \Gamma_{mjl} \Gamma_{nki}\right)$$

$$R_{lkji} = R_{klji}$$
$$R_{lkji} = R_{lkij}$$
$$R_{lkji} = R_{jilk}$$
$$R_{lkji} + R_{ljik} + R_{likj} = 0$$

En d dimensions il y a $\frac{1}{12} d^2 (d^2 - 1)$ (20 pour $d = 4$)

B) Indentité de Bianchi

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0$$

Exemple 1 : sphère de rayon a

$$\mathrm{d}s = a^2\mathrm{d}\theta^2 + a^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

$$[g_{ij}] = a^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$[g^{ij}] = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sin\theta}\end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$$

$$R_{1212} = a^2\sin\theta$$

$$R_{22} = \sin\theta$$

$$R_{11} = 1$$

$$R = g^{ij}R_{ij} = \frac{2}{a^2}$$

Exemple 2 : le cylindre de rayon a

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}z^2 + a^2\mathrm{d}\varphi^2$$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a^2\end{bmatrix}$$

Le cylindre est plat !

Exemple 3 : le cône

Le cône est plat **sauf** à l'apex, qui possède un courbure infini

Exemple 4 : tore plongé dans $\mathbb{R}^3$

$$\ldots$$