Rappels

— Gauss-Bonnet :

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(S)$$
$$\chi(S) = V - E + F$$

Ex :

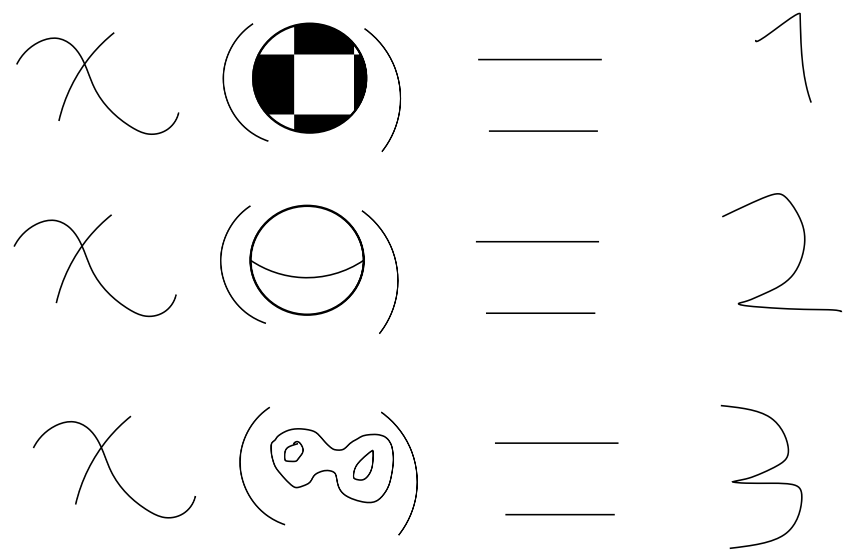

Figure 1 – Exemple de chi

Pour calculer

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S = \iint_u \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\right) \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Exemple : Dans une surface avec $\kappa \leq 0$, il n'y a pas de bigones géodésiques.

Dans une surface topologiquement équivalente à un cylindre avec $\kappa < 0$, il y a au plus une géodésique simple fermée

Démonstration Supposons qu'il y a deux tels géodésiques sur la surface appellées α_1 et α_2 .

Pour chaque, il y a deux possibilité. Soit une géodésique simple fermée borne un dique (1), soit elle sépare le cylindre en deux (2).

(1) est impossible car

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int \underbrace{\kappa_g}_{0} \mathrm{d}s = 2\pi\chi(R) \implies 0 > 2\pi\chi(r) = 2\pi \lightning$$

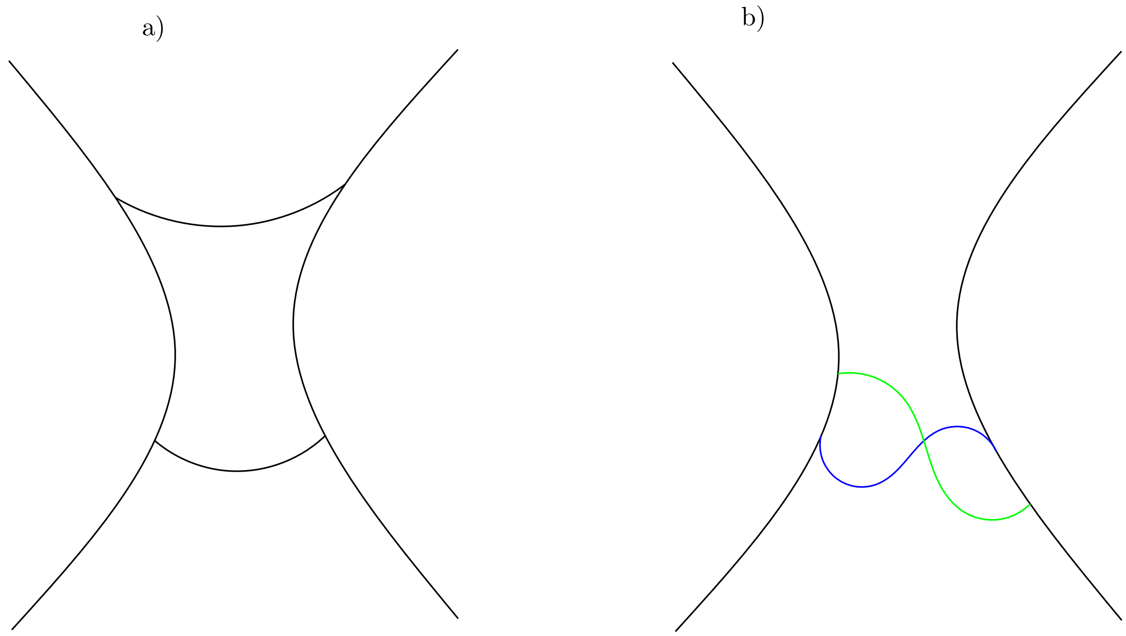

Figure 2 – cas (2)

(2) est la seule possibilité. Si α_{12} sont deux coubes distinces.

Dans le cas b), les coubres ne peuvent s'intersecter en un nombre impaires de points par unicité des géodésiques. Si elle s'intersectenet en un nombre impaires de points, on a des bigones géodésiques, ce qui est impossible sur une telle surface ($\kappa < 0$).

Cas a)

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \underbrace{\kappa_g}_{0} \mathrm{d}s = 2\pi\chi(R)$$

$$0 > 2\pi\chi(R) = 0 \lightning$$

Rappel

Si T est un triangle géodésique,

$$\iint \kappa \mathrm{d}S = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

Sur la sphère de rayon 1, $\equiv 1$ Proposition : Pour une triangle géodésique de la sphère, $\text{Aire}(T) = \sum \theta_i - \pi$ Ex : $\text{Aire}(R) = \frac{4\pi}{8} = \pi 2$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

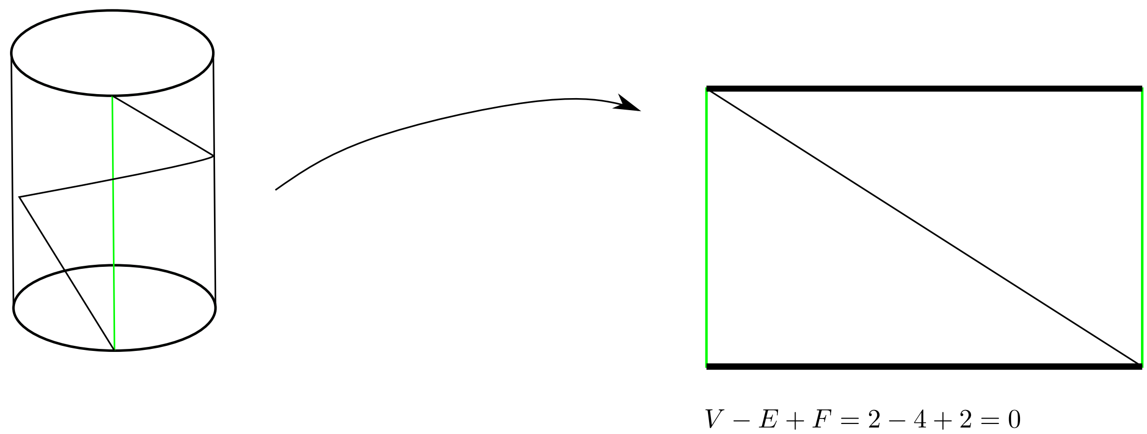

FIGURE 3 – Triangulation d'un cylindre

Introduction à la géométrie hyperbolique

Ceci ce veux être une introduction *historique* à la géométrie non-euclidienne

Peut-on contruire un surface de courbure constante négative ?

Ou ! : la pseudosphère (Surface de révolution de la tractrice.

Cette propriété n'as pas toute les propriétés qu'on aimerait que la surface universelle de coubure négative ait. Elle à des désavantage par rapport au plan ou à la sphère. En effet la surface n'est pas complète. Par là, on entend qu'il existe des géodésiques de longeures fini qui ne se prolongent pas. (On peut tomber en bas de la surface)

La sphère à l'avantage d'être homogène. On aimerait avoir une surface de courbure négative constante qui est homogène églament. On ne veut pas qu'il y ait un bord. Ce problème ne peut pas être reglé à moins de changer notre définition d'une surface.

Un théorèmde de Hilbert dit qu'il n'existe aucune surface complète dans $\mathbb{R}^3$ de courbure constante négative. On aimerait quand même avoir une telle surface. Un des raison qui nous pousse à la vouloir et que par exmple, sur shpère la somme des angle des trinangle est toujours égale ? à π. On voudait avoir une surface sur laquelle l'aire des triangle est toujours inférieut à π.

Imaginons une surface de paramétrisation P avec le domainre $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\right\}$ et t.q. la première forme fondamentale est $M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$. Calculons Γ_{ij}^k pour cette surface

$$\Gamma^x_{xx} = M_i^{-1}\begin{pmatrix} E_x/2 \\ F_x - E_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{xy} \\ \Gamma^y_{xy} \end{pmatrix} = M_I^{-1}\begin{pmatrix} E_y/2 \\ G_x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{yy} \\ \Gamma^y_{yy} \end{pmatrix} = M_I^{-1}\begin{pmatrix} F_y - G_x/2 \\ G_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

$$\implies \Gamma^y_{xx} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma^x_{xy} = \Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{y} \qquad \text{les autres termes sont tous nuls}$$

Selon la première équation de Gauss

$$E \cdot \kappa = \cdots$$

$$\implies \frac{1}{y^2} \cdot \kappa = -\frac{1}{y^2} \implies \kappa = -1$$

Pour calculer les distances de cette *sruface*, on utilise I

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{y^2}x'^2 + \frac{1}{y^2}y'^2}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{p(\gamma(t))' = x'p_x + y'p_y}$$

Comme on divise par y, les chemins à petit y devienne long rapidement.

Calculons les géodésique de cette surface

$$x'' + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^x_{xx} & \Gamma^x_{xy} \\ \Gamma^x_{xy} & \Gamma^x_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$y'' + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^y_{xx} & \Gamma^y_{xy} \\ \Gamma^y_{xy} & \Gamma^y_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies x'' + 2x'y'\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$y'' + x'^2\left(\frac{1}{y}\right) - y'^2\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \frac{1}{y}\left(x'^2 - y'^2\right) = 0 \end{cases} \tag{1, 2}$$

<u>Proposition</u> : Les géodésique de cette surface sont les demi-droite verticales et les demi-cercles centré sur l'axe x.

<u>Démonstration</u> :

On va commencer par régler le cas des demis-droite verticale

Si $x(t)$ est constant $x' = 0$ et $x'' = 0$ (1) est satisfait !. (2)

$$\begin{gathered} y'' + \frac{1}{y}(-y'^2) = 0 \\ y'' = \frac{y'^2}{y} \\ \frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \\ \ln y' = \ln y + C \\ y' = C_1 y \\ y = C_2 e^{c_1 t} \end{gathered}$$

Donne une demi-droite verticale $\gamma(t) = (x_0 C_2 e^{C_2 t}$

<u>Exercice</u> : Vérifier que cette demi-droite est paramétré à vitesse constante.

Si $x(t)$ n'est pas constante, on utilise x comme paramètre : on écrit $t = t(x)$ $y = y(t(x))$

...