Relativité générale

Rappels sur la relativité restrainte (vecteurs et tenseurs)

* On prend comme exemple une espace euclidien de dimension 2 mais la théorie est générale

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_2 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3 = A^i\mathbf{e}_i$$

les A^i sont les composantes *contravariantes*

Changement de base : $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_i = \Lambda_i^j\mathbf{e}'_j = \Lambda_i^1\mathbf{e}'_1 + A_i^2\mathbf{e}'_2 + A_i^3\mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}'_i = (\Lambda^{-1})_i^j\mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A} = A^j\mathbf{e}_j = \underbrace{A^j\Lambda_j^i}_{A^{i\prime}} e'_i$$

$$\boxed{A'i = \Lambda_j^i A^j}$$

Base duale

ayant une base B On peut définir une base duale $\tilde{B} = \left\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\right\} | \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_j^i$

$$\mathbf{A} = \underbrace{A^i}_{contravariante} \mathbf{e}_i = \underbrace{A_j}_{covariantes} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i = A^i$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_i$$

On veut démontrer que $\mathbf{e}'^i = A_j^i\mathbf{e}^j$

<u>Tenseurs :</u>

base : $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

Il y a des représentation covarientes contravarites et mixtes au tenseurs.

$$T'^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l T^{kl}$$
$$T'^i_j = \Lambda^i_k (\Lambda^{-1})^l_j T^k_l$$

$$T^i_i = tr(T) = \cdot = tr(T')$$

Tenseur Métrique

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j \iff \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j}_{\delta^k_j} = g_i j$$

de même :

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij}\mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{AB} = A^i \mathbf{e}_i B^j \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^i$$

$$A^i = \mathbf{Ae}^i = \mathbf{A} \cdot (g^{ij}\mathbf{e}_j) = g^{ij} A_j$$

$$A^i = g^{ij} A_j$$
$$A_i = g_{iij} A^j$$
$$g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i$$

Espace-Temps (1908)

Un concept définis par Minkowski après avoir lu les papier de Einstein de 1905. Ce dernier n'aimait pas du tout ce concept.

Quadrivecteur

$$x^i = (ct, x, y, z)$$

Transformation de Lorentz

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j$$

Intervalle

$$S^2 = \cancelto{1}{c^2} t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

unitées Géométriques

$$G = 1 \qquad c = 1$$

Transformation de Lorentz

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

On a 16 variables dans une matrice 4x4. On a une contrainte sur 10 d'entres elles. Il reste donc 6 degrés de libertés. Celles ci représente l'alignement des axes et la vitesse.

<u>Rapidité</u>

$$\tanh \psi = v$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -x \sinh \psi & t \cosh \psi & 0 & 0 \\ x \cosh \psi & -t \sinh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Quadrigradient</u>

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\boxed{\partial_{i'} = (\Lambda^{-1})^j_i \partial_j : q}$$

2022-09-02

Espace-temps

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\tau^2$$

Temps propre

Temps qui s'écoule dans le référentielle de l'objet

$$\implies x(\tau)$$

Si on connais $x^i(t)$, alors que vaut le temps propre ?

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} \\ &= \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} \end{aligned}$$

Action

$$\begin{aligned} S = -m\int_A^B \mathrm{d}\tau = -m\int_A^B \mathrm{d}t\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ \approx -m\int_A^B \mathrm{d}t\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) \\ = -m\int_A^B \mathrm{d}t\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

<u>Lagrangien :</u>

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

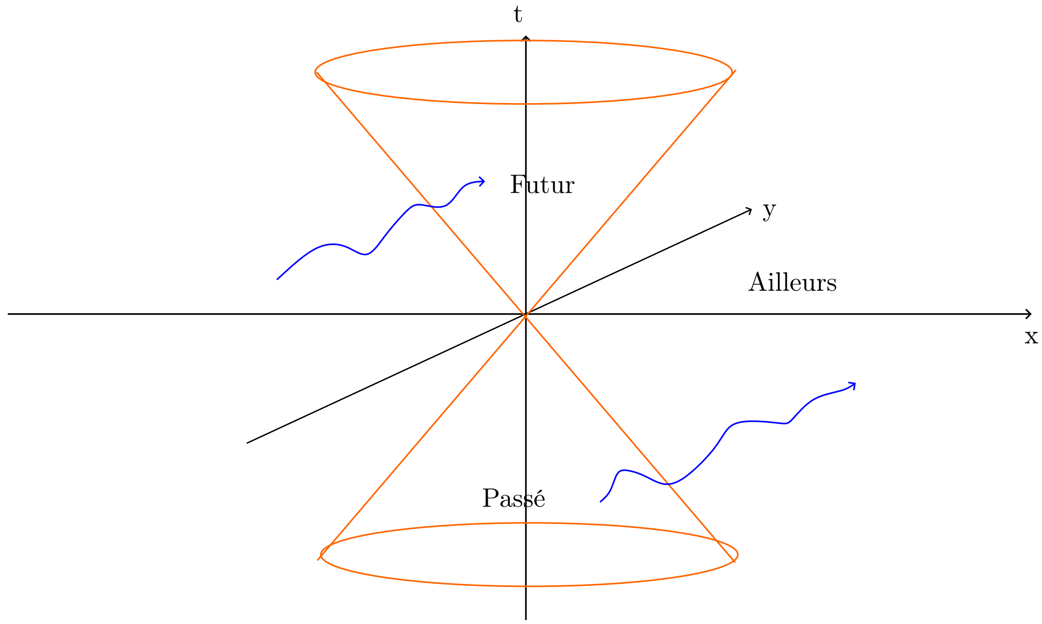

FIGURE 1 – Espace-temps

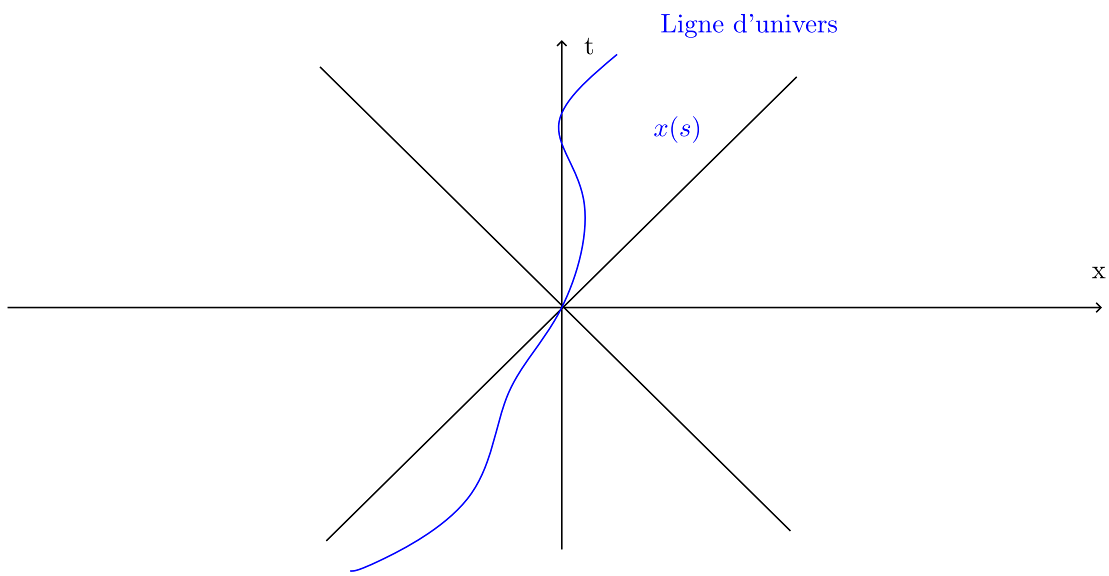

FIGURE 2 – Minkowski 2D

Hamiltonien

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = L = H$$

Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \left\{ \mathbf{v}^2 + 1 - \mathbf{v}^2 \right\} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

$$H^2 = \frac{m^2}{1-\mathbf{v}^2} \quad \mathbf{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1-\mathbf{v}^2}$$

Éléctromagnétisme

4-vecteur potentiel :

$$A^i = (\Phi, \mathbf{A}), \quad A_i = (\Phi, -\mathbf{A})$$

$$S = \underbrace{S_0}_{-m\int \mathrm{d}\tau} - e \int_A^B \underbrace{A_i \mathrm{d}x^i}_{\text{invarient}} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

Tensuer de Faraday

$$F_{ij} =_i A_j - \partial_j A_i$$

$$F_i^i = 0 \quad F_{ij}F^{ij} \text{ : invarient}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}$$

→ principe de moindre action :

$$\boxed{m\ddot{x}^i = eF_j^i \dot{x}^2}$$

$$\boxed{m\dot{u}^i = eF_j^i u^j}$$

Chapitre 2 : géométrie différentielle

Théorème du plongement

Nash
Ne vaut que pour des espace euclidien (pas pour l'espace-temps donc) mais le théorème se généralise
On définit un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme un point de la surface. Où $\mathbb{R}^3$ est *l'espace hôte*

$$\mathbf{X}(x^i) \quad i \in \{1, \cdots, d\}$$

Par exemple, la sphère :

$$\mathbf{X} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$x^1 = \theta \quad x^2 = \phi$$

Il n'existe pas de vecteur position
Il est impossible en général de représenter un variété différentiel avec une seule carte

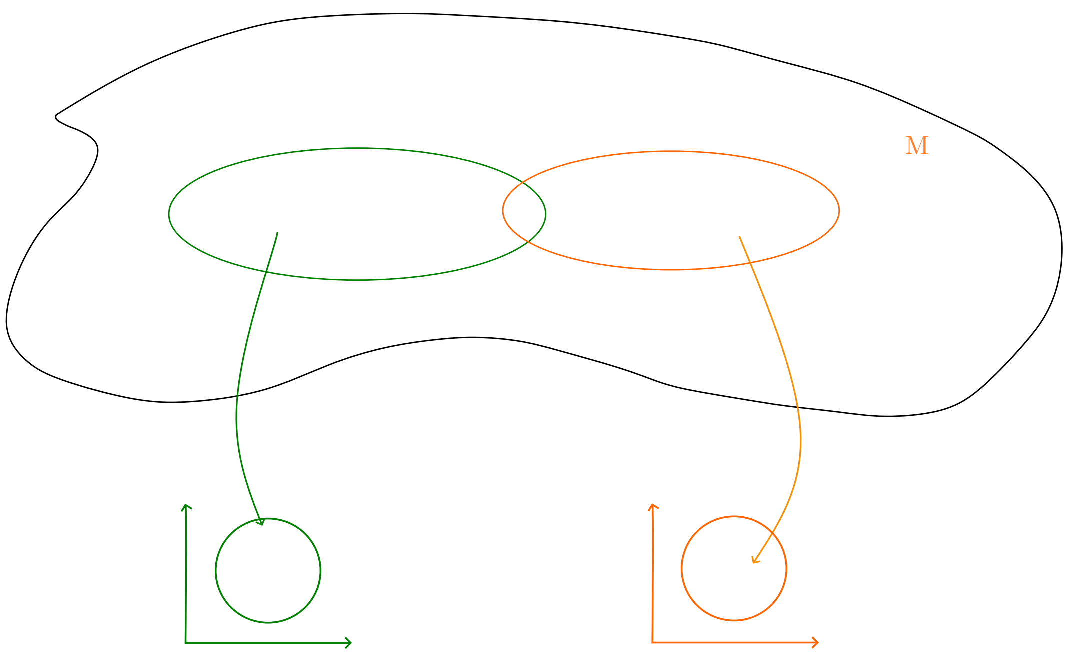

Figure 3 – Atlas

Espace tangeant

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}'_j \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\Lambda^j}$$

Truc mémotechnique

Quand on divise par un indice inferieur il deviens suppérieur et inversement

tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \left(\partial_i \mathbf{X} \mathrm{d}x^i\right) \cdot \left(\partial_j \mathbf{X} \mathrm{d}x^j\right) = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x_j = g_{ij}(x) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2$$

fonction : $\phi(x)$

$$\partial_{i\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\partial_i' = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \cdots$$

$$\partial_i \phi = \partial_j' \phi \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

(vecteur covarient)