Rappels

Pour une courbe de $\mathbb{R}^2$, la courbure à un signe

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$$

où $N(s) = R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$"

L'indice de rotation d<une courbe fermée (periodique) est

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \mathrm{d}s$$

où $R \in \mathbb{Z}$

Umlaufsatz (tangeantes tournantes). Si α est simple (pas d'auto-intersection) $\mathcal{R}(\alpha) = 1$

Si on écrit $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$, alors $\kappa(s) = \theta'(s)$

Chapitre 2 : Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On va maintenant parler des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Rappels : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$Df\Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_1} & \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_p$$

La différentiel de f en p

$U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q. $B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq U$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$. UN sous-ensemble $U \subseteq S$ est ouvert dans S ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q $B_\epsilon(\vec{x}) \bigcap S \subseteq U$

Exemple $S^2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

ON peut parametriser une partie de S^2 à l'aide de coordonn.es sphériques

$(0, \cos\varphi, \sin\varphi)^T, \quad -\frac{pi}{2} \leq \varphi \geq \frac{pi}{2}$

Rotation autour de θ

$$R_\theta = \cdots$$

Les pôles ne sont pas dans notre paramétrisation

Déf Une application $p : I \subseteq \to \mathbb{R}^3$ (U Ouvert) est une carte de surface lisse si elle est lisse, bijective et Df est de plein range $\forall p \in U$

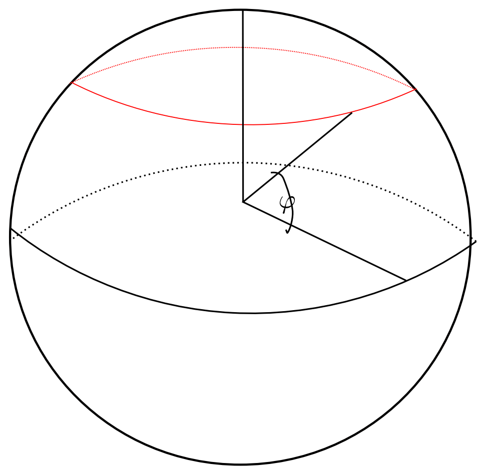

Figure 1 – parametrisation shperique

Déf Une surface lisse $S \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble t.q tout point $\vec{x} \in S$ est contenue dans l'image d<une carte de surface lisse $p : U \to S$ t.q. p est une homéomorphisme (application bijective continue d'inverse continu) entre u et une ouvert de S

UNe collection de paramétrisation $p_i : U_\mathrm{i} \to S$ t.q. $p_i(u_i)$ recouvrent S s<appelle un atlas

Exemple Pour la shpère, on peut construitre un atla avec 2 cartes de surfaces lisses

On peut aussi construire un atlas de S^2 en utilisant des "projections inverses"

$$p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - -x^2 - y^2})$$

On doit prendre un total de 6 hemi-sphere pour couvrir toute la sphère de cette manière. Sinon il manque toujours de points sur l'équateur.

Exemple 2 le graph d<une fonction lisse $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une carte de surface lisse

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

toujours de premier rang

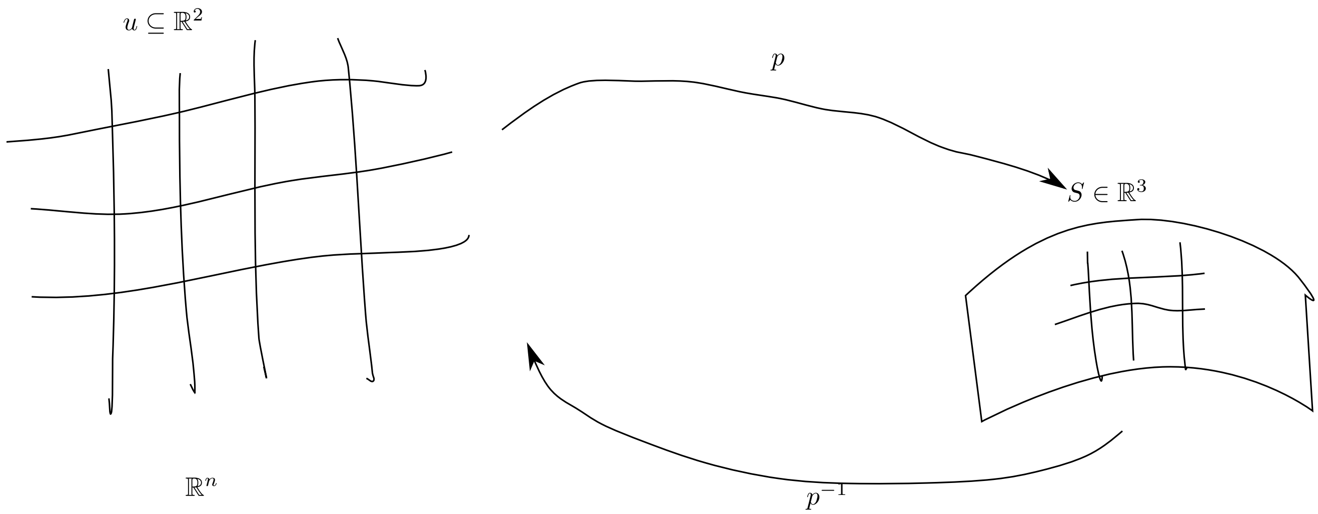

FIGURE 2 – mapping dune surface

Exemple 3 : l'hélicoïde est une hélive dans $\mathbb{R}^3$ à laquelle on ajouter des segments horizontaux

$$p(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v0, bv) \quad (b \geq 0)$$

Domaine $U \geq 0, v\ in \mathbb{R}$

Une seule carte forme un atlas

$$Dp = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On notes les colonnes de Dp par p_u et p_v

Exemple 4 : Le toree

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos u)\cos v \\ (a + b\cos *u)\sin v \\ b\sin s \end{pmatrix}$$

Peut être couvert avec 4 cartes en changeant le domaine de p de $\pm\pi$

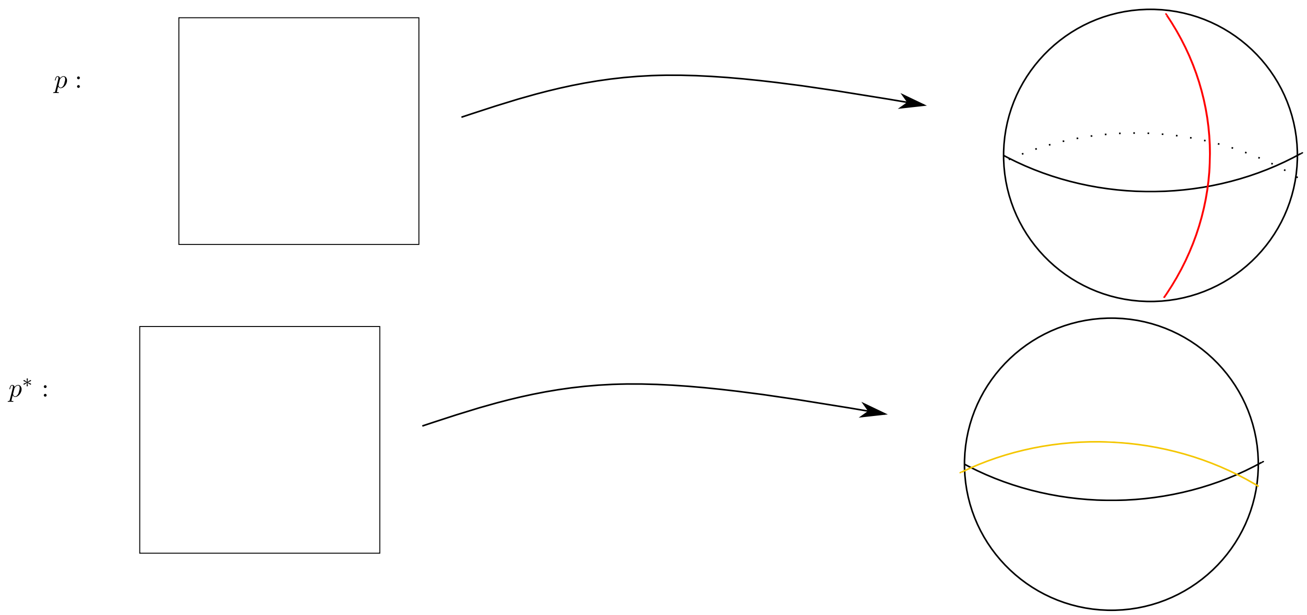

Figure 3 – mapping de la sphère

Plus généralement, si $\alpha : [a, b] \to bbR3$ est une courbe régulière dans le plan y, z avec $y.0$. La surface de révolution associée est une surface lisse.

Si $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$

$$p(t,) = \begin{pmatrix} f(t)\cos\theta \\ f(t)\sin\theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^3 < to\mathbb{R}$ une fonction lisse. Un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $Df\big|_{\vec{x}} = 0$ est un point critique et la valeur associée $a = f(\vec{x})$ est une valeur critique . UNe valeur $a \in \mathbb{R}$ est régulière si elle n'est pas critique.

Exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

le seul point critique est $(0, 0, 0)$. La seule valeur critique est $f(0, 0, 0) = 0$. Toutes les valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont des valeurs régulières.

On a $S^2 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)^T\} \quad \text{pas une surface lisse}$$

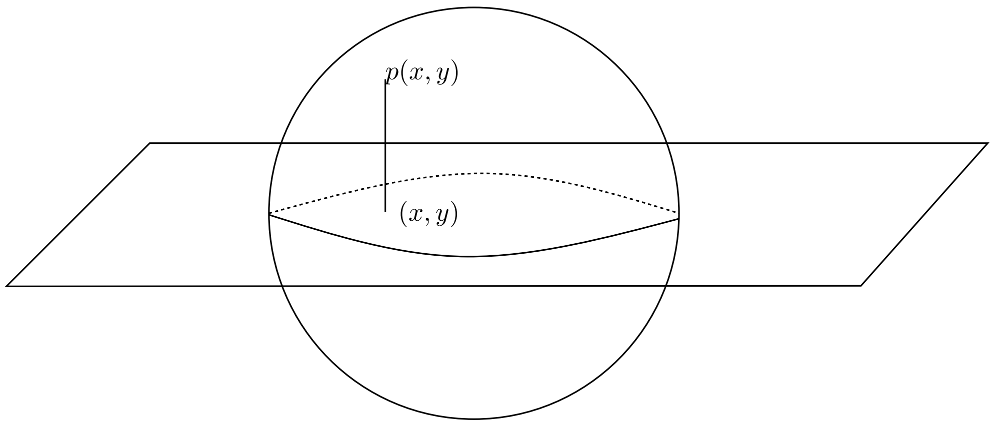

FIGURE 4 – projection inverses

Proposition Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est lisse et $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f, alors $S = f^{-1}(a)$ est une surface lisse $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = a\}$ Rappel Théorème de la fonction inverse Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable $\mathcal{C}^K$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Df\big|_{\vec{x}}$ est inversible. Alors il existe des ouverts $U \ni \vec{x}$ $V \ni F(\vec{x})$ t.q. $F : U \to V$ est inversible d<inverse de classe $\mathcal{C}^k$

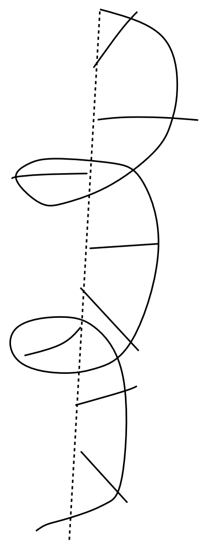

Figure 5 – helicoide

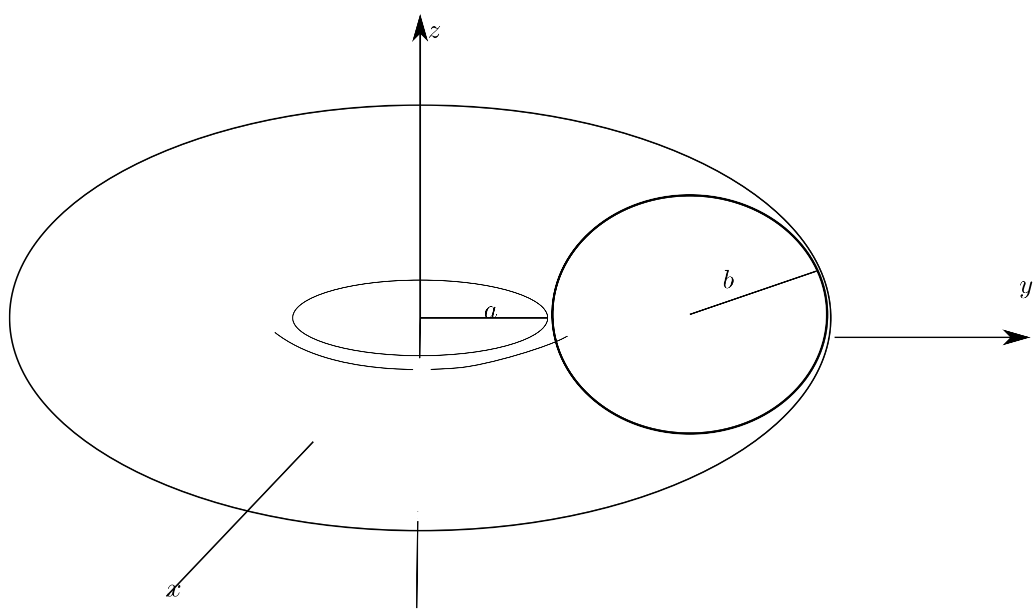

Figure 6 – parametrisation du tore