Indice de rotation et Umalufsatz

α une courbe planaire

On peut assigner un signe à la courbe.

On définit T comme d'habitude soit $T(s) \equiv \alpha'(s)$ mais $N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

Où $R_{\frac{\pi}{2}}$ est une rotation de $\frac{\pi}{2}$. ON a donc

$$T(s) = (x(s), y(s)) \implies N(s) = (-y(s), x(s))$$

et

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s)$$

Fenet-Seret dans $\mathbb{R}^2$:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$
$$N'(s) = -\kappa(s)T(s)$$

<u>autres interprétation de $\kappa(s)$</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, on peut toujours écrire $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$

$$T'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s). \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \theta'(s)M(s)$$

On comprend donc que $\theta'(s) = \kappa(s)$

On peut donc définir $\theta(s)$ comme

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)\mathrm{d}t + \theta(0) \implies \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \kappa(t)\mathrm{d}t$$

Si α est une courbe <u>fermée</u> ($\alpha(s+L) = \alpha(s)$) alors on a que

$$\theta(L) = \theta(0) = 2k\pi$$

On appelle $\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\mathrm{d}t = R$ l'<u>indice de rotaition</u>