

Photonique et optique quantique

2022-08-31

Références

- D. Steck : quantum optics note
- G. Milbur : Quantum optics
- Aspect Fabres : Introduction to Quantum Optics

Contenu du cours

- Interaction lumière-matière
- Les degrés de liberté internes
 - LASER
 - LDOS local density of optical states
 - Source de photon unique (cryptographie quantique)
- Propriété des émetteurs à deux niveaux
 - matière classique
- effet d'optique non-linéaire.
 - SPDC (source de pair de photons)
- Effet mécaniques
 - Refroidissement doppler
 - Pince optique
 - optomécanique

Table des Matière

Chapitre 1 : Physique des LASER

Chapitre 2 : émetteurs à 2 niveaux

Chapitre 3 : Source de photon unique

Chapitre 4 : Cryptographie quantique et clef quantique

Chapitre 5 : Modèle de Jaynes-Cummings et mesure dispersive

Chapitre 6 : Mesure quantique et non démolition (QND)

Chapitre 7 : Optomécanique

1 Physique des LASER

1.1 Histoire

L'émission des atomes est introduit en 1926 en s'inspirant de la radioactivité.

$$\frac{dN_k}{dt} = -A_k N_k$$

$$N_k(t) = N_k(u)e^{-A_k t}$$

On s'imagine le système à deux niveaux (atome) comme pouvant soit se désexciter ou pas avec 50% de chance après un temps Δt . Ce modèle mène directement à la décroissance exponentielle.

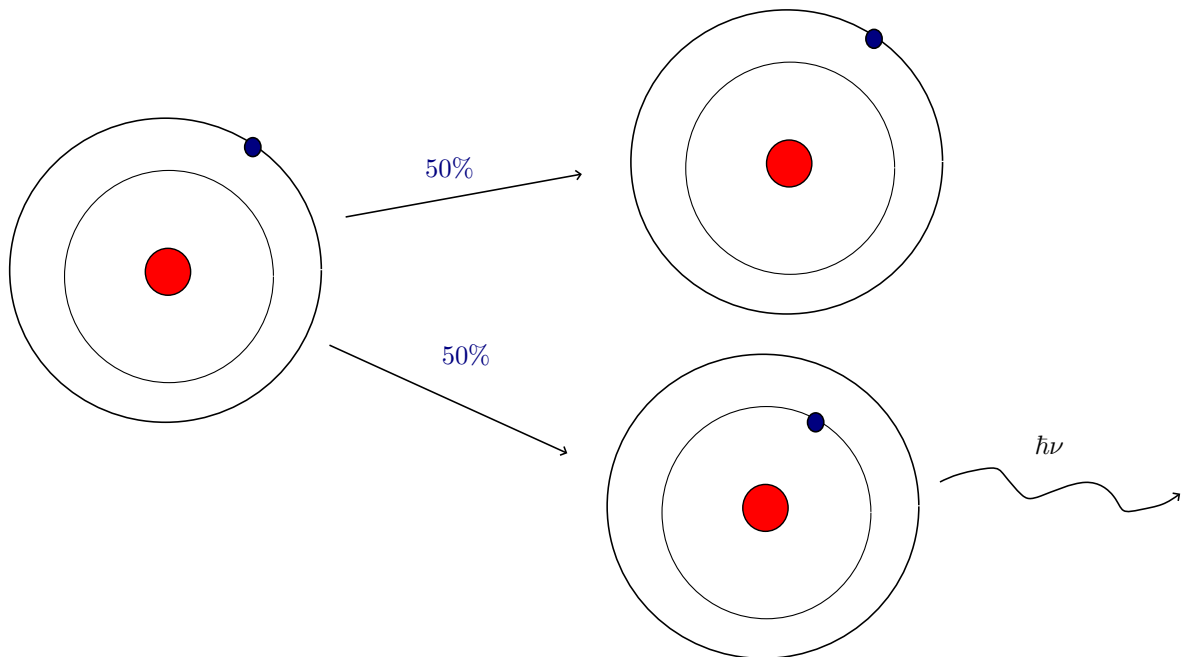


FIGURE 1 – probabilités

L'état 1 est l'état désexcité et comprend n_1 atomes, similaire pour E_2

Processus d'absorption

$$\frac{\partial}{\partial n_2 t} = +I_j B_{12} n_1$$

B_{12} Coefficient de Einstein

$$I_\nu = \frac{1}{4\pi} \iint i_{V(k')} dk' \underbrace{\psi(\nu)}_{\text{chevauchement fréquence phot et at}} d\nu$$

Taux d'absorption doit dépendre des photons incidents (densité, mode, fréquence)

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= -A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= A_{21}n_2 - U\nu B_{12}n_1 \end{aligned}$$

A, B sont des constantes

Que ce passe-t-il à l'équilibre thermodynamique local.

État stationnaire

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = 0$$

Équilibre thermodynamique :

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

Rayonnement du corps noir

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 = 0 \iff \frac{n_2}{n_1} \frac{A_{21}}{B_{12}} = I_\nu$$

$$\implies \frac{g_1}{g_2} e^{\Delta E/kT} \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Ce résultat n'a aucun sens. Le problème est qu'il manque l'émission stimulée.

Nouvelle équation

$$-A_{21}n_2 + I_\nu B_{12}n_1 - I_\nu B_{21}n_2$$

Équilibre thermodynamique local

$$A_{21}n_2 = I_\nu B_{12}n_1 - I + \nu B_{21}N_2 \iff I_\nu = \frac{A_{21}n_2}{B_{12}n_1 - B_{21}n_2} = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{B_{12}}{B_{21}}}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\Delta E/kT}$$

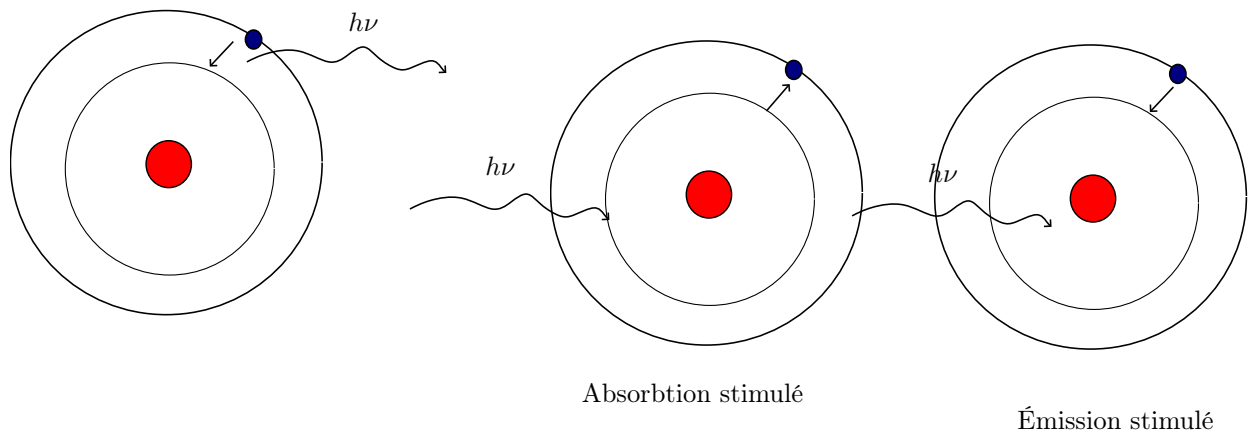


FIGURE 2 – emission stimulée

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{\frac{g_1}{g_2} e^{-\Delta/kT} - \frac{B_{21}}{B_{12}}} = \frac{2(\Delta E)^3}{h^2 c^2} \frac{1}{e^{\Delta E/kT} - 1}$$

Puisque c'est vrai pour toute température, on doit avoir que

$$g_2 B_{21} = g_1 B_{12}$$

On peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial n_2 t} = -A_{21} n_2 + I_\nu B_{21} \Delta n$$

Si $\Delta n > 0$ on a pas que des perte et on peut avoir un laser. On appelle   a une inversion des population.

1.5   quation de taux et inversion de population

On prende

$$g_1 = g_2 \implies B_{21} = B_{12} = B$$

$$p d n_2 t = A_{21} n_2 - I_\mu B \Delta n$$

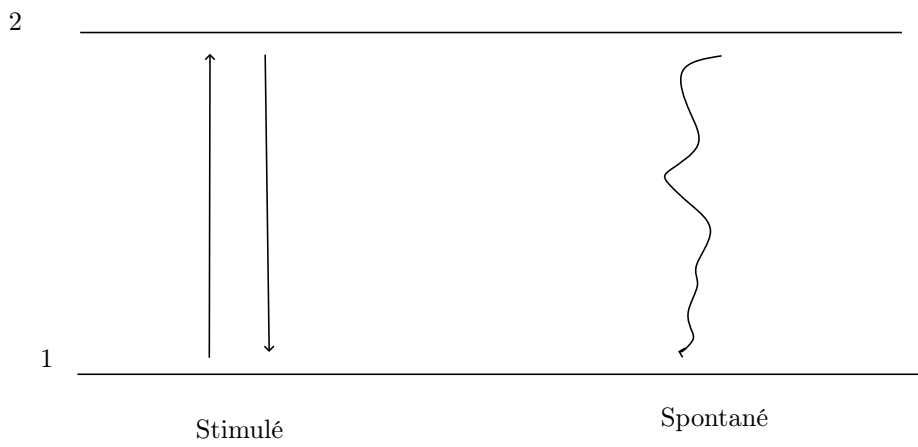


FIGURE 3 – bop

Inversion de population : $n_2 > n_1$ ($\Delta n > 0$)

On s'intéresse au nombre de photons stimulés

Emission spontanée + Absorption + Émission stimulées

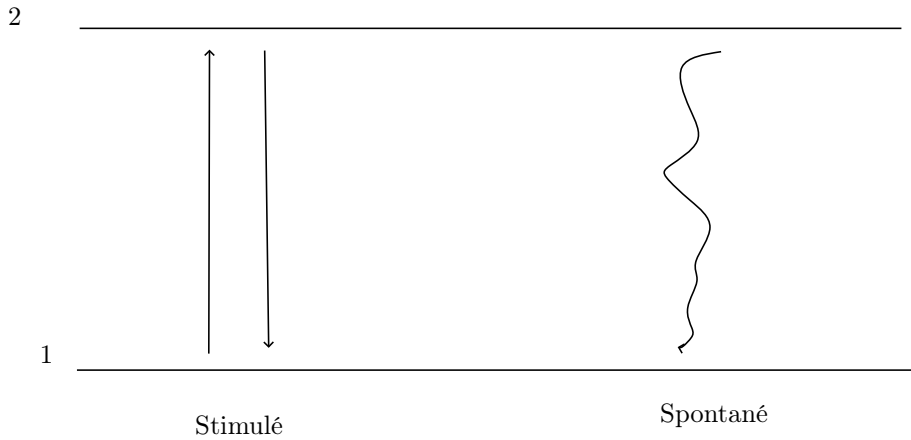


FIGURE 1 – rebop

$$\frac{d}{dn_2 t} = -A_{21}n_2 - I_\nu B_{12}\Delta n$$

1.5 Inversion de population

Comment obtenir $\Delta n > 0$

Equilibre thermodynamique local : $n_2 = e^{-\Delta E/kT} n_1 \leq n_1 \implies \Delta n \leq 0$

État stationnaire : $n_2 = \frac{Bh\nu n_p A_{21} + Bh\nu n_p}{n} n_1 < n_1 \implies \Delta n \leq 0$

On veut une cavité qui correspond au mode du photo γ_{21} pour que les photons resont et maximisent le processus d'émission spontané.

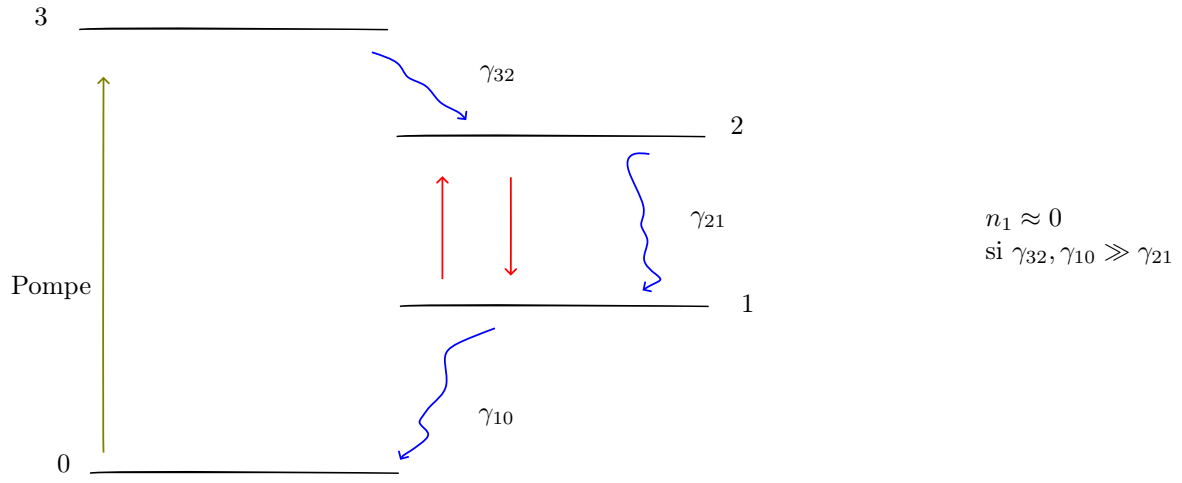


FIGURE 2 – Diagramme énergétique typique d'un laser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn_3 t} &= \gamma_{\omega} (n_0 - n_3) - \gamma_{32} n_3 \\ \frac{d}{dn_2 t} &= \gamma_{32} n_3 - \gamma_{21} n_2 + Bh\nu n_p (n_1 - n_2) \\ \frac{dn_1}{dt} &= \gamma_{21} n_2 - \gamma_{10} n_1 - Bh\nu n_p (n_1 - n_2) \\ \frac{dn_0}{dt} &= \gamma_{10} n_1 - \gamma_{\omega} (n_0 - n_3) \end{aligned}$$

2 Émetteurs à deux niveaux

Objectifs

- Montrer comment certains modèles classiques peuvent donner des prédictions exactes dans l'interaction atom/lumière (dans certaines limites)
 - Indice de réfraction (nuage d'atome)
 - radiation d'un atome
 - effets mécaniques de la lumière
 - refroidissement d'atome (ralentir le centre de masse)
 - (Emission collective)

2.1 Oscillateur harmonique

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$m = \frac{m_e m_n}{n_e + m_n} \approx m_e$$

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r})e^{i\omega t} + \mathbf{E}^-(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E}^+ = (\mathbf{E}^-)^*$$

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = q\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

...

$$x_0^+ = \frac{eE^+/m}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Moment dipolaire électrique

$$d \sim 1[\text{e Å}]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^+ &= -ex^+ \\ &= -\frac{e^2}{m} \frac{E^+}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

La densité de polarisation est donc

$$\mathbf{P} = Nd^+ = \hat{\epsilon} \frac{Ne^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0^+}{\omega_0^2} e^{-i\omega t}$$

$$\chi = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{N}{\epsilon_0} \alpha(\omega)$$

2.2 Modèle de Lorentz

On ajoute de la dissipation

$$x_0^+ = \frac{e}{m} \frac{E_0^+}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

indice de réfraction :

$$\tilde{n}(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \approx 1 + \frac{\chi(\omega)}{2}$$

$$\tilde{n}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2}$$

coefficient d'absorption $a(\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= -a(\omega)I \\ a(\omega) &\equiv 2k_0 \operatorname{Im} [\tilde{n}(\omega)] \\ n(\omega) &\equiv \operatorname{Re} [\tilde{n}(\omega)] \end{aligned}$$

retard de phase

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Le modèle de Lorentz est valide à basse puissance

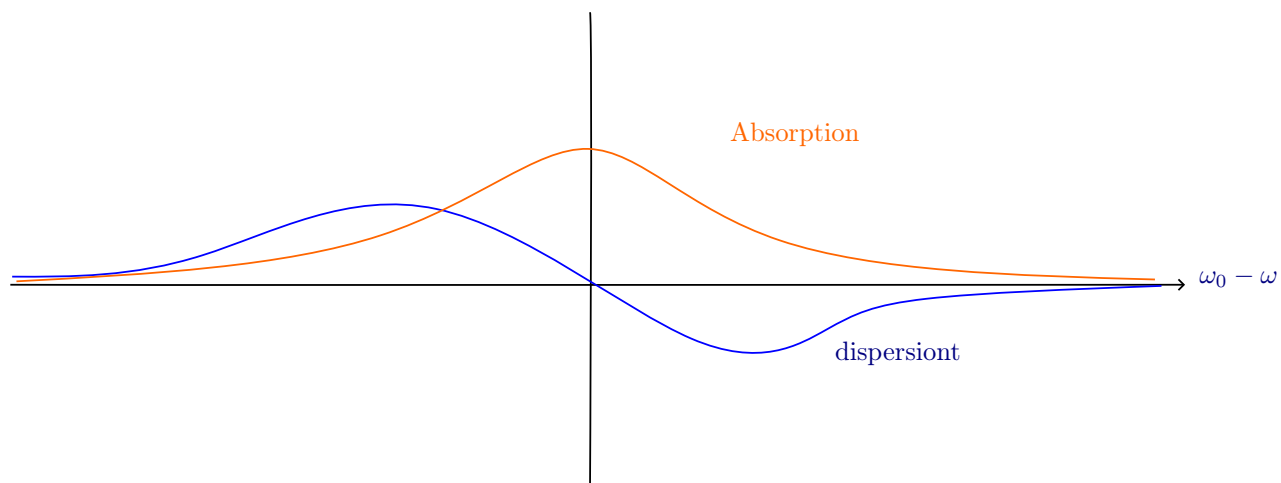


FIGURE 3 – indice de réfraction complexe

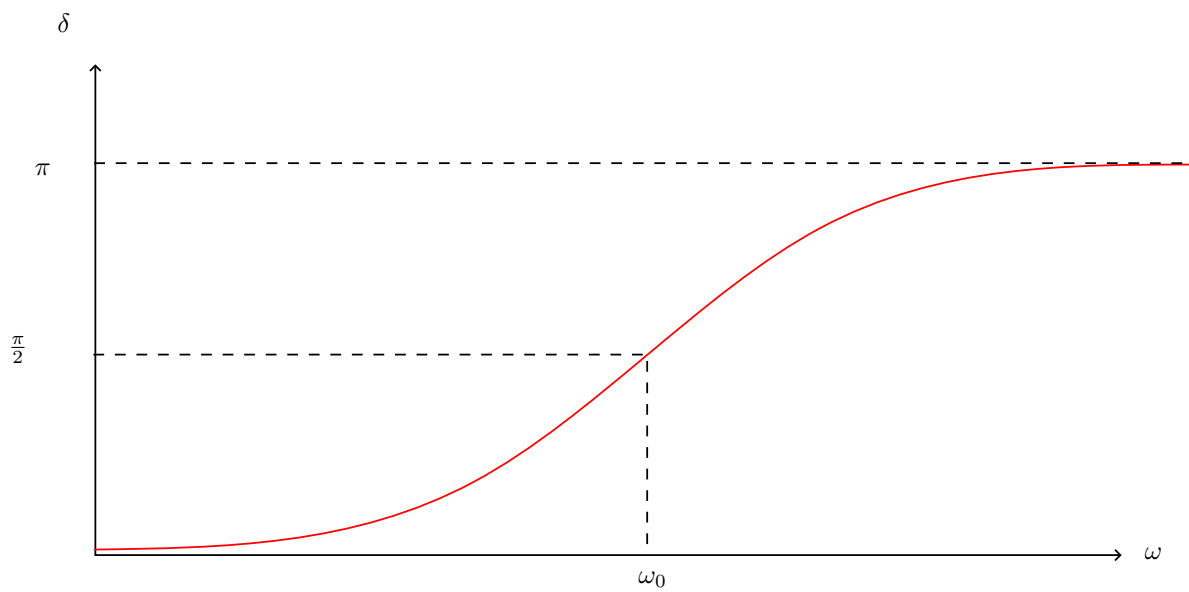


FIGURE 4 – delta

2.3 Limite de l'approche classique

Reproduit beaucoup d'effets à faible intensité.

Le coefficient d'absorption correct ?

$$a(\omega) = \sigma(\omega)N$$

$$\sigma_c = \frac{e^2}{m\epsilon_0 c \gamma} \bigg|_{\omega=\omega_0}$$

Avec un traitement quantique, on obtiens

$$\sigma_q = \frac{2\pi c^2}{\omega_{12}^2}$$

Définissons un terme de correction

$$f_{12} = \frac{\sigma_q}{\sigma_c} = \dots \frac{g_2}{g_1}$$

Pour des amplitude très faibles, on trouve le comportement de l'oscillateur harmonique

$$\chi(\omega) \rightarrow -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^0} \implies \sum_i f_{1i} = 1$$

fudge factor

2.4 Modèle quantique

Modèle simple de l'atome + approche perturbative pour calculer la probabilité de transition $1 \rightarrow 2$

Entrevoir les oscillations de Rabi

Modèle de Lorentz, retour

On se place à $\omega \gg \omega_i j$

Le déplacement est très faible, on peut négliger ω_0, γ

2.4 Modèles quantiques

Objectifs

- Réintroduire la théorie des perturbation
- $\mathcal{P}_{|g\rangle \rightarrow |e\rangle}$
- Oscillations de Rabo

$$H_0 = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \hbar \cdot 0 |g\rangle \langle g|$$

$$|\psi(t)\rangle = \gamma_g |g\rangle + \gamma_e e^{-i\omega_e t} |e\rangle$$

Comment le système se couple à un champ E.M. ?

$$H = H_0 + H_{\text{int}}$$

$$H_{\text{int}} = -\hat{D}\hat{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\hat{D} : \text{Opérateur de moment dipolaire} = q\hat{r}$$

Problème à deux niveaux

$$H = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| - \hat{D}\hat{E}(r, t)$$

Approche perturbative : H_{int} : faible

$$H_{\text{int}} \rightarrow \lambda H_{\text{int}} \quad \lambda \ll 1$$

$$\psi(t) = \sum_n \gamma_n(t) |n\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi |\psi(t)\rangle = (H_0 + \lambda H_{\text{int}}) |\psi(t)\rangle$$

On projette sur un $|k\rangle$ quelconque

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} \langle k | \psi(t) \rangle &= \langle k | H_0 | \psi(t) \rangle + \lambda \langle k | H_{\text{int}} | \psi(t) \rangle \\
&= E_k \langle k | \psi \rangle + \lambda \sum_n \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \langle n | \psi(t) \rangle \\
i \left[-\frac{E_k}{\hbar} + \frac{d}{dt} \gamma_k(t) \right] e^{-iE_k t/\hbar} &= e_k \gamma_{k(t)} e^{-iE_k t/\hbar} + \lambda \sum_m \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \psi_n(t) e^{(E_n - E_k)t/\hbar}
\end{aligned}$$

donc,

$$\forall |k\rangle, \quad \frac{d}{dt} \gamma_k(t) = \lambda \sum_n \langle k | H_{\text{int}} | n \rangle \gamma_n(t) e^{-i \frac{E_n - E_k}{\hbar} t}$$

Cela est la solution exacte et n'est, évidemment, pas facile à résoudre en général.

On fait donc une série en λ

$$\gamma_{k(t)} = \gamma_k^{(0)}(t) + \lambda \gamma_k^{(1)}(t) + \lambda^2 \gamma_k^{(2)}(t) + \dots$$

$$\gamma_e^{(1)} = \frac{1}{i} \int_{t_0}^t dt' \langle e | H_{\text{int}} | e \rangle \gamma_e^{(0)} e^{-i\delta E_{eg} t/\hbar} + \dots$$

$$\gamma_e^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt \langle \psi | e H_{\text{int}} | g \rangle e^{-i\Delta E_{ge} t/\hbar}$$

On va considérer un champ électrique de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$H_{\text{int}} = \hat{W} \cos(\omega t \pm \varphi)$$

$$\hat{W} = \hat{D} \mathbf{E}_0 = q \hat{r} \mathbf{E}_0$$

$$\gamma_e(t) = \frac{W_{eg}}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \cos(\omega t' + \varphi) e^{-i \frac{E_g - E_e \hbar}{t}}$$

$$\gamma_e(t) \approx \frac{W_{eg}}{2i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \left[e^{i\psi} e^{i\omega t'} + e^{-i\varphi - i\omega t'} \right] e^{i\omega_{eg} t'}$$

...

Solution non-perturbative

$$H_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle \langle e| = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = -\langle e | \hat{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | g \rangle$$

$$H_{\text{int}} = -\hat{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\hat{D} \cdot (\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + cc)$$

$$= (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) \left[-\hat{D} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right] (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$$

$$= -|g\rangle\langle g| \hat{d} \cdot \mathbf{E} |g\rangle\langle g| - |g\rangle\langle g| \hat{d} \cdot \mathbf{E} |e\rangle\langle e| - \dots$$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \langle g | \hat{D} \mathbf{E} | g \rangle & \langle g | \hat{D} \mathbf{E} | e \rangle \\ \langle e | \hat{D} \mathbf{E} | g \rangle & \langle e | \hat{D} \mathbf{E} | e \rangle \end{pmatrix}$$

importance des symétries

On va regarder l'effet de l'opérateur parité sur notre système.

$$\hat{H}_e = \frac{P^2}{2m} + V_{\text{coul}}(\mathbf{r})$$

on compare $H_e \Pi$ et ΠH_e : si H_e commute avec l'opérateur parité, le système a une symétrie d'inversion spatiale.

$$H_e \Pi f(x) = H_e f(-x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f''(-x) + V_{\text{coul}} f(x)$$

dans l'autre sens

$$\Pi H_e f(x) = \Pi \left(-\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) + V_{\text{coul}}(x) f(x) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} f''(-x) + V_{\text{coul}}(x) f(-x) = H_e \Pi f(x)$$

Donc $[\Pi, H_e] = 0$ si $V(x) = V(-x)$, ce qui est vrai pour les atomes.

Pour un vecteur propre $|n\rangle$

$$H_e \Pi |n\rangle = \Pi H_e |n\rangle = \Pi E_n |n\rangle = E_n (\Pi |n\rangle)$$

Donc si $|n\rangle$ est un vecteur propre, alors $\Pi|n\rangle$ l'est aussi.

$$\Pi^2|n\rangle = |n\rangle$$

$$\Pi|n\rangle = \pm|n\rangle$$

Si $|n\rangle$ est un vecteur propre de H_e , c'est aussi un vecteur propre de Π avec une valeur propre de ± 1

Pour un atome ψ_e et ψ_g sont soit pair, soit impair.

$$\langle e|\hat{D}|e\rangle = q \int \psi_e^* \hat{r} \psi_e = 0 = \langle g|\hat{D}|g\rangle$$

$$H_{\text{int}} = - \begin{pmatrix} 0 & \langle g|D \cdot E|e\rangle \\ \langle e|D \cdot E|g\rangle & 0 \end{pmatrix}$$

Les orbitales ψ_e et ψ_g ne présente pas de moments dipolaire permanents.

E_n posant $d_{eg} = \langle e|D|g\rangle$

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| - d_{eg}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) |e\rangle\langle g| - d_{eg}^*\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) |g\rangle\langle e|$$

Changement de base pour H : Base tournante avec la pompe ($e^{-i\omega t}$)

Si on prend un unitaire U

Dans la nouvelle base (changement de base définis par U)

$$H' = U H U^\dagger + i\hbar \frac{dU}{dt} U$$

Shro :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{-i}{\hbar} H \psi$$

$$U \frac{d\psi}{dt} = \frac{-i}{\hbar} U H \underbrace{\mathbf{1}}_{U^\dagger U} \Psi$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dU}{dt} \psi + U \frac{d\psi}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dt} U^\dagger U \psi + U \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{-i}{\hbar} U H U^\dagger U \psi + \frac{dU}{dt} U^\dagger U \psi = \frac{-i}{\hbar} \left(U H U^\dagger + i\hbar \frac{dU}{dt} U^\dagger \right) U \psi$$

$$U = e^{i\omega t |e\rangle\langle e|}$$

$$U |e\rangle = e^{i\omega t |e\rangle\langle e|} |e\rangle = \sum_k \frac{1}{k!} (i\omega t)^k |e\rangle = \sum_k \frac{1}{k!} (i\omega)^k |e\rangle = e^{i\omega t} |e\rangle$$

$$\langle e| U^\dagger = e^{-i\omega t} \langle e|$$

$$i\hbar \left(\frac{d}{dt} U \right) U^\dagger = i\hbar (i\omega |e\rangle\langle e|) e^{i\omega t |e\rangle\langle e|} e^{-i\omega t |e\rangle\langle e|} = -\hbar\omega |e\rangle\langle e|$$

$$U H U^\dagger = \dots$$

$$\dots$$

$$H' = -\hbar \underbrace{\Delta}_{\omega - \omega_0} |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| - d_{eg} \mathbf{E}_0^* e^{2i\omega t} |e\rangle\langle g| + d_{eg}^* \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e| + d_{eg}^* \mathbf{E}_0 e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e|$$

Dans la base tournante on *renormalise* l'énergie $\hbar\omega_0 \rightarrow \hbar(\omega - \omega_0)$

Approximation Séculaire (Rotating wave approximation | RWA)

Négliger les termes en $2\omega t$

$$H_{\text{séculaire}} = -\hbar\Delta |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| d_{eg}^* E_0^* |g\rangle\langle e|$$

Pour obtenir $\mathcal{P}_{g \rightarrow e}(t)$, il faut diagonaliser H_{sec}

On pose $\underbrace{\Omega}_{\text{Freq. de Rabi}} = -\frac{2d_{eg} \mathbf{E}_0}{\hbar}$

$$H_{\text{sec}} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & -\Delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\pm} = -\frac{\hbar\Delta}{2} \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2}$$

Pour $\Delta = 0$

$$|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right)$$

$$afg/af$$

Résolution du Hamiltonien avec la théorie des perturbations

$$H = \underbrace{-\hbar(\omega - \omega_0) |e\rangle\langle e| - d_{eg} \mathbf{E}_0 |e\rangle\langle g| - d_{eg}^* \mathbf{E}_0^* |g\rangle\langle e|}_{H_0} \underbrace{- d_{eg}^* |e\rangle\langle g| - d_{eg} \mathbf{E}_0^* e^{-2i\omega t} |g\rangle\langle e|}_V$$

états propres de H_0

$$|\pm\rangle = (\cos, \sin) \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} |e\rangle \pm (\sin, \cos) \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

L'approximation séculaire (qui consiste à négliger V), revient à dire que la probabilité de transition $|\pm\rangle \rightarrow |\mp\rangle$ qu'il cause est très faible.

On veut connaître $\mathcal{P}_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle}(t)$

$$\mathcal{P}_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle} = \frac{1}{\hbar} \left| \int_0^t dt' e^{-i \frac{E_+ - E_-}{\hbar} t'} \langle + | V | - \rangle \right|^2$$

à calculer à $\Delta = 0$ et $\Omega \in \mathbb{R}(\varphi = 0)$