

# 1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire  $(G, *)$ , où  $G$  est un ensemble et  $*$  est une opération  $(* : G \times G \rightarrow G)$

3 axiomes :

1.  $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2.  $\exists e \in G | e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3.  $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex :  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \dots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est  $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \rightarrow E | f \text{ est inversible} \}$$

avec l'opération de composition  $\circ$

On l'appelle le groupe symétrique de  $E$

$$S_n = S_{\{1, 2, \dots, n\}}$$

Est le groupe des permutations de  $n$  éléments

Notation pour désigner les éléments  $\sigma \in S_n$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes  $(G, H)$  est une fonction  $f : G \rightarrow H$  t.q.  $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ .  
Si  $f$  est inversible alors  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et on dit alors que  $f$  est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\bullet : G \times X \rightarrow X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad X = \mathbb{R}^n$$

Définition : Une action de  $G$  sur  $X$  est un homomorphisme  $f : G \rightarrow S_X$

Les deux définitions sont équivalentes

On définit  $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_1)(f(g_2)(x)) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si  $X$  a plus de structure et qu'on a une action de  $G$  sur  $X$  qui preserve la structure lors on dit que  $G$  agit par (homéomorphisme, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur  $X$

exemple :  $G = S_3$  agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

**ATTENTION :**  $S_4$  n'agit pas (fidellement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permutations *brisent le triangle*)  $S_4$  agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$  et est groupe des permutations paires

$A_5$  agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation  $S_G$

Démonstration : On considère l'action de  $G$  sur lui-même ( $x = G$ )

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

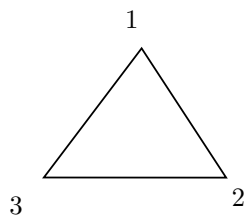
on obtiens  $f : G \rightarrow S_G$  : homomorphisme injectif car si  $f(g_1) = f(g_2)$  alors  $f(g_1)(e) = f(g_2)(e)$ ,  $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$ ,  $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe à } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe  $G$  est une action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$ . Autrement dit, un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Le rang d'une représentation est  $\dim V$

exemples :

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$

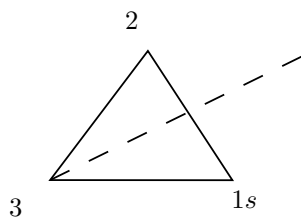


$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma)$$

$$F(\eta)$$



Réflexion du triangle

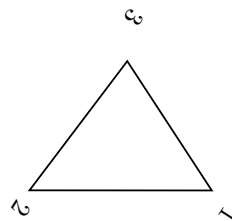


FIGURE 1 – Triangles équilatéraux

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si  $G$  est un groupe fini, il admet la représentation régulière :

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

$$V = \langle e_{g_1}, \dots \rangle$$

## retour sur le dernier cours

$(G, \bullet)$  c'est un groupe

$S_E = \{ \sigma : E \rightarrow E \mid \sigma \text{ inversible} \}$  est une groupe pour la composition

Un cycle est un élément de  $S_n$  de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1}, \sigma(a_k) = a_1, i = 1, \dots, k$$

On le note  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$

### Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12) \circ (35) = (35) \circ (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1756234)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longueur  $\ell$  est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est impaire} \end{cases}$$

On a la relation  $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de  $G$  sur  $X$  : deux définitions

1.  $\bullet : G \times X \rightarrow X$
2. homomorphisme  $f : G \rightarrow S_x$

Représentation de  $G$  : action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$

Exemple : La Représentation vectoriel sur  $V$

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G, v \in V$$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour  $G$  fixé, on a la représentation régulière ( $R$ ) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \dots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

On définit  $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \langle e_0 \ e_1 \ e_2 \rangle$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe  $\mathbb{Z}_3$  sont ici représenté par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si  $G$  agit sur  $E$  (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$   $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  par  $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_i$  (action de  $G$  sur  $E$ )

exemple :  $V = \mathbb{C}$  Ou on prend  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$

$$\rho : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentation de

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la restriction de  $\rho$  à un sous-espace  $U \subset V$  invariant par  $\rho$ . c-à-d, si  $u \in U$ , alors  $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$  Le sous-espace  $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$  est une sous représentation triviale

Le sous-espace  $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0 \right\}$  est aussi une sous-représentation de  $R$  de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ( $\neq 0, \neq V$ )

Exemple :  $S_3$  :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$  la représentation de permutation induite par l'action ??? de  $S_3$  sur  $\{1, 2, 3\}$   $\rho(12) = \dots 3x3$ ,  $\rho(123) = \dots 3x3$

$\rho$  est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariant est irréductible

Également,  $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$  est invariant

Es-ce que  $U_0$  est irréductible ?

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

...

Conclusion :  $U_0$  est une représentation irréductible. On l'appelle représentation standard de  $S_3$

Ex :  $S_3$

$$\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si  $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(u)$ ,  $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(v)$  sont 2 représentation de  $G$ , leurs somme directe est la représentation  $\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(u \oplus v)$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si  $U = \mathbb{R}^n$   $V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$  contient  $u \oplus 0$  et  $0 \oplus v$  comme sous représentation

Proposition : Soit  $U \subset V$  une sous-repr/sentation de  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Alors, il existe une sous-représentation  $W \subset V$  telle que  $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple :  $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de  $\mathbb{Z}$ ,  $\langle e_1 \rangle$  est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe pas d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit  $V_0 \subset V$  n'importe quel complément de  $U$  ( $V = U \oplus W_0$ )

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_0 \quad \text{pour } w \in W_0$$

Soit  $\pi: V \rightarrow U$  la projection complémentaire à  $W_0$

Définissons  $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$  si  $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi [\rho(g^{-1})u]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g^{-1})u$$

$$\frac{1}{|G|} |G| u = u$$

$\implies \pi' : V \rightarrow U$  est surjectif et identité sur

$W = \text{Ker}(\pi')$  est notre candidat de sous-représentation

Vérifions que  $W$  est  $\rho(G)$  invariant

$$h \in G \quad V \in \text{Ker} \pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g) \pi \rho(g') \rho(h) v = \dots = 0$$

comme  $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , ,$$



## Rappels

- représentation de  $G$   $\rho \rightarrow \text{GL}(V)$
- somme direct  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow (V \oplus U)$
- Sous-représentation  $U \subset V$   $G$  invariant  $\forall g \in G, \rho(g)u \in U$
- $\rho$  est irréductible si les seul sous-représentation sont  $\{0\}$  et  $V$
- Théorème : Si  $U \subset V$  est une sous représentation de  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  alors  $\exists W \subset V$  sous-espace t.q.  $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$  : représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une application linéaire  $\varphi : U \rightarrow V$  telle que  $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

Si  $\varphi$  est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1.  $\text{Ker}(\varphi) \subset U$
2.  $\text{Im}(\varphi) \subset V$  sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si  $v \in \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1(g)v) &= \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ \implies \rho_1(g)v &\in \text{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$

$$2. \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$$

#### Lemme de Shur

1.  $\varphi : V \rightarrow U$  est un morphisme entre représentation irréductible alors  $\varphi = 0$  ou  $\varphi$  est un iso

2.  $\varphi : V \rightarrow V$  Morphisme de  $V$  représentation irréductible alors  $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration :  $\varphi : V \rightarrow U$

1.

...

2.  $\varphi V \rightarrow V$   $\varphi$  admet une valeur propre  $\lambda$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = V$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit  $G$  une groupe fini abélien

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \dots$$

et supposons  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  irréductible. Fixons  $g \in G$

$\rho(g) : V \rightarrow V$  alors  $\rho(g)$  est une morphisme de représentation car  $\rho(h)(\rho(g)v) = \rho(hg)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor  $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$  tout les  $\rho(g)$  sont  $\lambda_g I$

$\implies$  tout sous-espace de  $V$  est stable par  $\rho(g) \forall g \in G$

donc  $\dim V = 1$

Conclusion : tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple :  $G = \mathbb{Z}_4$

...

Exemple :  $G = S_3 = \{e, (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de  $G$  que est abélien

Remarque :  $G$  est engendré par  $(123)$  et  $(12)$

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur  $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation irréductible

on a  $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$  car  $\tau^3 = e$

$\implies \rho(\tau)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit  $v \in V$  vecteurs propres de  $\rho(\tau)$   
 $\implies \rho(\tau)v = \omega^k v$  pour  $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned} \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^2)v \\ &= \rho(\sigma)\rho(\tau)^2v \\ &= \rho(\sigma)\omega^{2k}v \\ &= \omega^{2k}(\rho(\sigma)v) \end{aligned}$$

conclusion si  $v$  est une vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^k$  alors  $\rho(\tau)v$  est vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^{2k}$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1.  $k = 1$  ou  $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

$$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

sont linéairement indépendants  $U = \langle v, \rho(\sigma)v \rangle$ ,  $U$  est stable par  $G : V$  et  $\rho(\sigma)V$  sont vecteur propres de  $\rho(\tau)$  et  $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$ ,  $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

$$\implies U = V$$

et dans la base  $v, \rho(\sigma)v$  on alors

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.  $k = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\tau)v &= v \\ \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\sigma)v \end{aligned}$$

(a)

$$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

et  $\lambda \in \{1, -1\}$  ( $\sigma^2 = 1$ ) si  $\lambda = 1$   $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{trivial}}$  si  $\lambda = -1$ ,  $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{sign}}$

(b)  $v$  et  $\rho(\sigma)v$  sont linéairement indépendants

Considérons  $V + \rho(\sigma)v$ ,  $V - \rho(\sigma)v$

$$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v \text{ et } \rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$$

$$\implies v + \rho(\sigma)v \text{ est stable par } G.$$

idem pour  $-$ . C'est donc une contradiction au fait que  $V$  soit irréductible.

## Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

une représentation

Alors son caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

## Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire  $\varphi : V \rightarrow U$  (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$$

$\varphi$  est appelée une application équivariante

### Lemme de Shur

1. Si  $\rho_1, \rho_2$  sont irréductible  $\varphi$  morphisme  $\implies \varphi = 0$  ou isomorphe
2. Si  $V = U$  alors  $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ??? de  $S_3$  (à iso près) sont  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$

## Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

$\chi_\rho$  est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d  $\forall h \in G, \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans  $S_n$  permutation de  $n$  éléments la conjugaison correspond à un "changement d'étiquette"

La table des caractères d'un groupe fini  $G$  est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les classes de conjugaison dans  $G$ . Les entrées sont  $\chi_\rho(g)$

Exemple :  $S_3$

	1 e	3 (12)	2 (123)
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\text{std}}}$	2	0	-1

TABLE 1 – tables des caractères de  $S_3$

## Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme  $|G|$

Exemple :  $\mathbb{Z}_4$

	1	1	1	1
	0	1	2	3
$\chi?$	1	1	1	1
$\chi?$	1	i	-1	-i
$\chi?$	1	-1	i	-i
$\chi?$	1	-i	-1	i

TABLE 2 – Table des caractères de  $\mathbb{Z}_4$

## Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

$V$  un  $(k)$ espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1.  $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
2.  $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3.  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4.  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$

Soit  $U, V$  deux  $k$ -espaces vectoriels

$$\text{Hom}(U, V) := \{L : U \rightarrow V \mid \text{L'application linéaire}\}$$

est un  $k$ -espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\dim(\text{Hom}(u, v)) = \dim(u)\dim(v)$$

Le produit Tensoriel de  $U$  et  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel  $U \otimes V$  muni d'une application bilinéaire

$$U \times V \rightarrow U \otimes V$$

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour toute application bilinéaire  $b : U \times V \rightarrow W$

Je vois pas ...

En pratique : Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base de  $U$ ,  $f_1, \dots, f_m$  est une base de  $V$  alors  $\{e_i \otimes f_j\}$  est une base de  $U \otimes V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \dots ace_1 \otimes f_1 + \dots$$

Exemple : produit scalaire standard dans  $\mathbb{C}^2$  est bilinéaire  $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}), (\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix})) \rightarrow ac + bd$

Quelle est  $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \otimes (\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix})) \rightarrow ac + bd$$

Attention

Il est des éléments de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

### Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2.  $Q_8$  : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \quad -ji = ij = -k$$

- (a) Calculer les classes de conjugaison dans  $Q_8$
  - (b) Déterminer les représentations irréductibles (il y en a 5, dimension 1 et 2)
  - (c) Dresser la table des caractères de  $Q_8$
3. Décomposer  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$  en irréductibles
  4. Calculer  $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

### Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

abélien  $\implies$  toute représentation irréductible est de dim 1 On a  $(0, 1) + (0, 1) = (0, 0)$

$$\rho(0, 1)\rho(0, 1) = 1 = \rho(0, 1)^2 \implies \rho(0, 1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1)^m \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

#### Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$

...

Pareil pour tous les éléments

- (b) Si  $\rho : Q_8 \rightarrow \mathbb{C}^*$  est de rang 1. Comme  $i^4 = 1$ ,  $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$  (de même pour  $j$  et  $k$ )

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons  $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$  Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prenant  $\rho(i) = i$  ou  $\rho(i) = -1$  (même chose pour  $j$  et  $k$  évidemment) On doit donc prendre  $\rho(i) \in \{1, -1\}$ ,  $\rho(j) \in \{1, -1\}$ ,  $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)



	$e$	$i$	$j$	$k$	$-1$
$\rho_{\text{triv}}$	1	1	1	1	1
$\rho_1$	1	-1	1	-1	1
$\rho_2$	1	-1	-1	1	1
$\rho_3$	1	1	-1	-1	1
$\rho_4$	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de  $C_8$

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

$V$  espace vectoriel

$P : V \rightarrow V$  application linéaire t.q.  $P^2 = P$  est appelé une projection (sur le sous-espace  $\text{Im}(P)$ )

Ex :  $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si  $P$  est une projection,  $\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$

Démonstration On a  $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$

- car  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}P) + \dim(\text{Im}(P))$
- et si  $v \in (\text{Ker}P) \cap (\text{Im}P)$   $P(v) = 0$  mais aussi  $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$   
 $\implies v = 0$

Si  $v \in \text{Im}(P)$   $P(v) = v$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\text{Im}(P)} = \mathbb{1}_{\text{Im}(P)} \\ &\quad \text{et} \quad P|_{\text{Ker}P} = 0_{\text{Ker}P} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\text{Im}P} & 0 \\ 0 & 0_{\text{Im}P} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \text{tr}(P) = \text{tr}(\mathbb{1}_{\text{Im}P}) = \dim \text{Im}P \end{aligned}$$

??? d'irréductibilité est relations d'orthogonalité

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$

définissons  $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$  le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que  $V^G$  est un sous-espace vectoriel de  $V$

et  $P : V \rightarrow V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

Prop :  $P$  est une projection sur  $V^G$

Démonstration : ON veut montrer

1.  $\text{Im} P = V^G$  et
2.  $P^2 = P$

1. Supposons  $v \in \text{Im} P$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \dots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter : (

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \text{Im} P \subset V^G$$

Inversement, si  $v \in V^G$

$$\text{alors } P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\dim(V^G) = \text{tr}(P) = \text{tr} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

En particulier, si  $\rho$  est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

Ex :  $S_3$

...

## Rappels

$P$  projection, apli linéaire  $P : V \rightarrow V$  t.q.  $P^2 = P$

$$\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$$

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est une projection avec  $\text{Im}P = V^G = ?$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Nombre de représentation triviale dans la décomposition de  $\rho$   
En particulier si  $\rho$  est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

$\rho_1, \rho_2$  deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2) : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(U, V))$$

## Rappel

Si  $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho_{2(g)} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)(M) = \rho_2(g) \cdot M \cdot \rho_1(g)^{-1}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(U, V)^G = \{\varphi : u \rightarrow v \mid \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \text{Hom}(U, V)^G \iff \rho_2 M \rho_1(g) = M \rho_1(g) \iff \rho_2(g) M = M \rho_1(g) \iff M \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si  $\rho_1, \rho_2$  sont irréductibles, le lemme de Schur dit

$$\dim(\text{Hom}(U, V)^G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\cong \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \text{tr } P = \text{tr} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \text{ (à démontrer)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g})$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g}) \chi_\rho(g) = \left\{ \dots \right.$$

Les caractères de représentations irréductibles sont orthonormés par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Exemple :  $S_3$

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} (1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 1 \quad \dots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\dim(\mathbb{C}_C(G)) = \# \text{ de classes de conj}$$

Corollaire

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

Démonstration : (je vois pas lol)

Corollaire 2 : Toute représentation est déterminée (à iso près) par son caractère  $\chi_\rho$

Démonstration : On sait que  $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \dots \oplus \rho_k^{m_k}$

$$\text{De plus } \chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \dots + m_k \chi_{\rho_k}$$

On peut retrouver  $m_i$  avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

### Exemple

Décomposons  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^6)$  (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6, \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$  (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi? + 2\chi?$$

### Exemple

Décomposons  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$  la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{\text{std}} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons  $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 :  $\rho$  est irréductible ssi  $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2 = 1$$

puisque  $m_i \in \mathbb{N}$ , un des  $m_i = 1$ , tout les autres = 0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} : \text{irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décomposition de  $R$  avec multiplicité  $\dim \rho_i$  et  $|G| (= \dim(R)) = \sum_{\rho_i \text{ irre}} \dim(\rho_i)^2$

2024-02-01

### typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \ e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2) + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

### Rappels

$\rho_1, \rho_2$  reps indestructibles de  $G$   
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

...

Corollaire 5 : si  $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) \quad (g \neq e)$$

Permet de trouver une caractère manquant dans le table si on connaît tout les autres

### Plus d'algèbre linéaire

$e_1, \dots, e_n$  base de  $V$   $f_1, \dots, f_m$  base de  $W$   $e_i \otimes f_j$  base de  $V \otimes W$

$$M \in \text{GL}(V) \quad N \in \text{GL}(W)$$

$$M \otimes N \in \text{GL}(V \otimes W)$$

Proposition :

$$\text{tr}(M \otimes N) = (\text{tr } M)(\text{tr } N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\text{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left( \sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \text{tr } M \text{ tr } N$$

### Définition

L'espace dual de  $V$  est  $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$  noté  $V^*$

Si  $M \in \text{GL}(V)$

$M^* \in \text{GL}(V^*)$

$$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$$

De même, si  $\rho_i G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une repr. La repr dual est  $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

### Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration :  $g \in G$ ,  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$  est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$\implies \rho(g)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de 1

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire  $\rho$  est irréductible  $\iff \rho^*$  est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* W$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \dots, e_n^* \text{ base de } V$$

$$w_1, \dots, w_m \text{ base de } W$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples :  $S_4$  et  $A_4$

Les classes de conjugaisons dans  $S_4$  sont

$$\overbrace{(e)}^1, \overbrace{(12)}^2, \overbrace{(123)}^3, \overbrace{(1234)}^4, \overbrace{(12)(34)}^5$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés )

	1 $e$	2 $(12)$	3 $(123)$	4 $(1234)$	5 $(12)(34)$
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\chi_{\text{sym}}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_{\text{std}}$	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym} \otimes \text{std}}$	3	-1	0	1	-1
$\chi_4$	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de  $S_4$

Regardons la representation  $\rho_?$  de dim 4

$$\rho_? : S_4 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que  $\rho_?$  se décompose en  $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$



$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$\begin{aligned} &= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1) \\ &= (3\,1\,0\,-1\,-1) \end{aligned}$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24} \left( 3^2 + 6^2 + \cdots \right) = 1$$

Pour trouver  $\text{di}(\rho_4)$

on utilise  $|G| = \sum_{\rho \text{ irred}} \dim(\rho_i)^2$

$$23=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$$

$$d=2$$

On trouve les autres coeffs avec

$$0=\sum_{g \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g)$$

Calculons  $\rho_4$

On a  $\rho((12)(34))=I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34)))=2$$

$M$  est conjugué à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyau  $\text{Ker} \rho \subset G$

elle se factorise

$\rho_4$  ne se factorise pas

2024-02-08

### Groupe de Lie (matriciel)

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$  un sous-groupe fermé

(La topologie sur  $GL(n, \mathbb{C}) \subseteq M_n \mathbb{C}$

SI  $M_n \in G$  et  $M_n \rightarrow M \in GL(n, \mathbb{C})$  alors  $M \in G$

En fait, tout sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{C})$  est une sous-variété lisse ( $G$  a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur  $G$ )

(contre)Exemple :

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$  n'est pas fermé.

### Exemples

$GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$

...

Définition On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin  $\gamma : [0 : 1] \rightarrow G$  avec  $\gamma(0) = A$   $\gamma(1) = B$   
 $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer  $A = I$ )

Exemple :  $O(n)$  n'est pas connexe

$$A = I \in O(n) B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

S'il existait un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow O(n)$  t.q.  $\gamma(0) = I$  et  $\gamma(1) = B$

alors  $\det \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$  t.q.  $\det \circ \gamma(0) = 1$ ,  $\det \circ \gamma(1) = -1$

$G$  Groupe de Lie matriciel

$G^0$  Composantes connexe de l'identité

Proposition :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

Démonstration

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$  des chemins ,  $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit  $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit,  $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a  $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que  $G^0$  est normal, il faut montrer que  $\forall C \in G, A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit  $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = C I C^{-1} = I$$

$$\gamma(1) = C A C^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est  $f : G \rightarrow H$  qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple :  $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  est une homomorphisme de groupe de Lie car

1.  $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

### Rappel

Pour  $S \subset \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n$  une sous-variété. l'espace tangent en  $p \in S$  est

$$T_p S = \left\{ \gamma'(0) \mid \begin{array}{l} \gamma : [-1, 1] \rightarrow S \\ \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est une application lisse, la dérivé de  $f$  en  $p$  est une application linéaire

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

définie par :

$$df_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$$

pour  $\gamma$  chemin dans  $S_1$  avec  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour  $\det : \text{GL}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  La dérivé au point  $p = I \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$d(\det)|_I : T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow T_1 \mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix} (0) = X$$

$$T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})$$

$$(\det \circ \gamma)(t) = (1+ta)(1+td) - t^2 bc$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\det \circ \gamma)(t)) = a + d = \text{tr}(X) \in T_1(\mathbb{C}^*)$$

Conclusion

$$d(\det) \Big|_I (X) = \text{tr}(X)$$

Exemple :

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C}^* | z\bar{z} = 1\}$$

On veut déterminer  $T_1(u_1)$

$$\gamma(t) = e^{itx} \quad \gamma'(t) = ix e^{itx} \quad \gamma'(0) = ix$$

$$T_{1(S')} = T_1(U_1) = i\mathbb{R}$$

## Rappels

- Groupe de Lie matriciel  $G \ni I \rightarrow$  sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{C})$
- $G$  est une sous-variété
- Exemples  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n)$ ,  $O(n, \mathbb{C})$ ,  $SO(n)$ ,  $SO(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(2n, \mathbb{R})$ ,  $Sp(2n, \mathbb{C})$  Groupe des matrice triangulaire superieur  $(S)O(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{R}) | M^t I_{pq} M = I_{pq}\}$   $(S)U(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}$
- $G$  Connexe si  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G$  avec  $\gamma(0) = I$ ,  $\gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$  (composantes connexe de  $I$ ) est un sous-groupe normal exemple :

$$O(1, 1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

On résous le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :  
 $O(2)$

Étant donné  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$df \Big|_I : T_I G \rightarrow T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement  $f$ .

Un voisinage arbitrairement petit autour de  $I$  engendre  $G$

## Attention

Pas tout les applications linéaires  $L : T_I G \rightarrow T_I H$  sont la dérivé d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = df \Big|_I$$

Étant donnée  $g \in G$ , on définit la multiplication à gauche  $L_g : G \rightarrow G$  c'est une application lisse mais

$$dL_g \Big|_I : T_I G \rightarrow T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par  $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{Ad}(g) \Big|_I : T_I G &\rightarrow T_I G \\ X &\rightarrow gXg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X \\ \operatorname{Ad}(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1} \end{aligned}$$

$$d \operatorname{Ad}(G) \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obtenir une condition sur  $T_I G$  uniquement, on dérive  $\operatorname{Ad}(f)$  par rapport à  $g$  en fixant  $X$

$$\begin{aligned} G &\rightarrow T_I G \\ g &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

pour dériver cette application on prend

$$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= I \\ \gamma'(0) &= U \in T_I G \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = [\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})']_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1} \\ &= YX - XY \in T_I G \end{aligned}$$

L'opération sur  $T_I g$

$$[X, Y] = XY - YX$$

s'appelle le crochet

Comme le crochet est défini en termes de la multiplication dans  $G$  et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie  $f : G \rightarrow H$  la dérivée  $df|_I : T_I G \rightarrow T_I H$  satisfaisant  $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$

En fait  $L : T_I G \rightarrow T_I H$  est la dérivée d'un morphisme de groupe de Lie  $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  complexe muni d'une application sur  $\mathbb{C}$

$$[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Exemple : Si  $G$  est une groupe de lie matriciel,  $g = T_I G$  muni de  $[X, Y] = XY - YX$  est une algèbre de lie

Si  $f: G \rightarrow H$  est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et  $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$ )

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \left. d \det(0) \right|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(n\mathbb{C}) \subseteq \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

En fait on a l'égalité

## Rappels

$G$  groupe de liea

$\mathfrak{g} = T_I G$  algèbre de Lie pour  $[X, Y] = XY - YX$

En général, une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

## Exercice

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3$  muni du produit vectoriel  $\times$  est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre  $(\mathbb{R}^3, \times)$  et  $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$

## tentative

1. On doit montrer que  $\times$  respecte les trois conditions
  - (a)  $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

## L'application exponentielle

$G$  groupe de Lie,  $\mathfrak{g} = T_I G$  sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1.  $\exp(0) = I$
2.  $d\exp|_0 : \mathfrak{g} \rightarrow G$  est l'application identité
3.  $\forall X \in \mathfrak{g}$  l'application  $t \rightarrow \exp(tX)$  est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t + s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = e^X$



## Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \rightarrow H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\left( \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df|_I} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array} \right)$$

commute, c-à-d,  $f \circ \exp_G = \exp_H \circ df|_I$

Conséquence :

Si  $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\implies i \circ \dots$$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

...

## Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de  $G$  est un morphisme  $G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Une représentation de  $\mathfrak{g}$  est une morphisme d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

Exemple : Représentation adjointe

$$\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

$$\text{où } \mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$$

on peut vérifier la linéarité et  $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Ad}g)(\mathrm{Ad}h)$

## Rappels

...

Proposition : Soit  $0 \neq V \in V_\beta$ , alors  $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2v, \dots\}$  engendre  $V$

Démonstration : On montre que  $U = \langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2v, \dots \rangle$  est stable pour  $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1.  $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m) \rho(Y)^m v \in U$
2.  $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1}v \in U$
3.  $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

On va montrer par récurrence que  $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$

pour  $m = 0$   $\rho(x)v = 0$  pour  $m = 1$   $\rho(x)\rho(y)v = (\rho(H) + \rho(Y))\rho(y)v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1}v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho(y)^m v$$

...

$$[(m+1)(\beta - m)\rho(y)^m v]$$

$\implies U \subseteq V$  est stable pour  $\rho$  comme  $\rho$  est irréductible,  $U = V$

### Conséquences

- $V_\alpha = 1$
- $\rho$  est uniquement déterminé par  $\beta = \max \text{sup}(\rho(H))$

De plus, comme  $V$  est de dimension finie, il existe  $m$  t.q.  $\rho(y)^m v = 0$  et  $\rho(y)^{m-1}v \neq 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$$

$$\implies m(\beta - m + 1) = 0$$

$$\implies \beta = m - 1 \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimension  $n$  et les espaces propres de  $\rho(H)$  sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

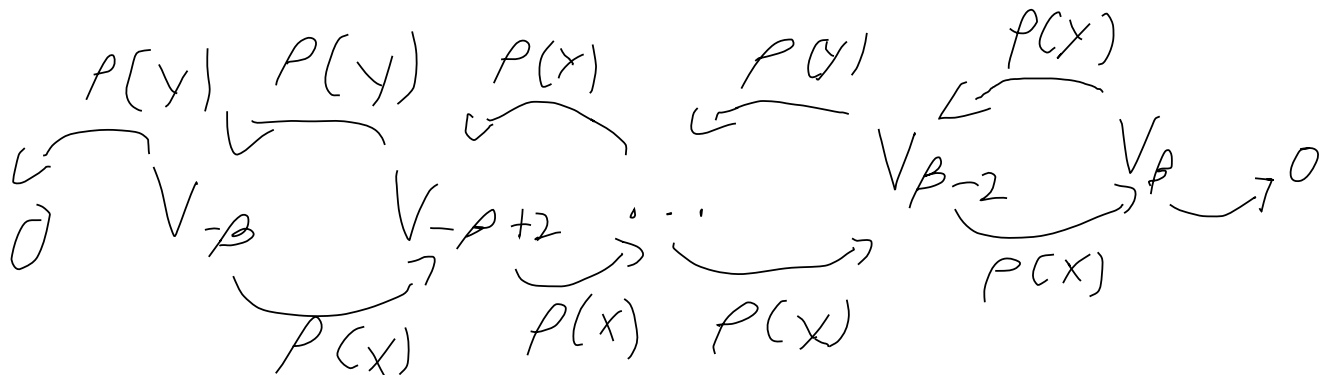


FIGURE 1 – ladder

## Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

### Rappel

$$\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i) i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par  $\rho_1 \otimes \rho_2(g) (V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si  $G$  est un groupe de Lie  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie

Calculons  $d(\rho_1 \otimes \rho_2) \big|_I \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}V_1 \otimes V_2$

Soit  $\gamma(t) \in G$ ,  $\gamma(0) = I$ ,  $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \otimes \rho_2) \gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \dots = \left( d \rho_1 \big|_I (X) V_1 \right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\dots)$$

### Définition :

Si  $\rho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V_i)$  sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors  $\rho_1 \otimes \rho_2$  est définie par  $(\rho_1 \otimes \rho_2) X (V_1 \otimes V_2)$

On a également  $\text{sym}^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ ,  $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$  sous-représentation comme pour  $G$  un groupe On introduit la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdots v_n := \text{Sym}^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in \text{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_1 \cdots = \text{Alt}(v_1 \cdots)$$

Revenons à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation ???? est  $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres  $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus V_2$$

est la représentation irréductible de dimension 2

$$\text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(\text{Sym}(i)(H))(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_1) = 2e_1^2$$

sur  $e_1 \otimes e_2$  c'est 0 sur  $e_2 \otimes e_2$  c'est  $-2e_2^2$

$$\implies \text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^{n-i}, e_2^i \rangle$$

Chacun est un vecteur propre de  $\text{sym}(H)$  et

$$\text{sym}(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left( H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + (e_1 H e_1 \cdots e_2^i) + \cdots$$

$$= \cdots = (n-2i)e_1^{n-i}e_2^i$$

Je vois pas

Exemple : Quelle est la d/composition de  $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes \text{sym}^2(\mathbb{C}^2)$  en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de  $\rho(H)$

pour  $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) : -2, 0, 2$  pour  $\text{sum}^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si  $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) H (v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2) (v \otimes u)$$

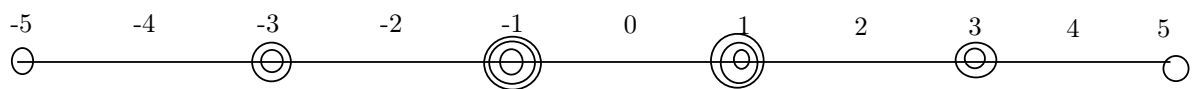


FIGURE 2 – valeurs propres

Rappels

Représentation irréductibles de  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) = \langle H, X, Y \rangle$

$$V^{(n)} = \oplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & Y & & Y & & Y & & Y \\ & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\ -n & & -n+2 & & \cdots & & n-2 & & n \\ & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & X & & X & & X & & X \end{array}$$

Notation

Une Représentation est doit

$$\rho : g \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

ou bien une action

$$g \times V \rightarrow V$$

$$\forall Z \in g \quad v \mapsto Xv \quad \text{est linéaire}$$

$\exists$  une unique représentation de dim  $n$ . On peut la construire comme  $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C})$

Produit tensoriel de représentation d'algèbre de Lie,

$V, W$  deux repr de  $g$ ,  $V \otimes W$  est une représentation avec  $X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw$

Exemple :

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2))$$

$$\mathbb{C}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3 \rangle$$

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \langle e_1^3 \wedge e_1^2 e_2, e_1^3 \wedge \cdots \rangle$$

Calculons les valeurs propres de  $H$  pour cette représentation

...

## Représentation de $SL(2, \mathbb{C})$ irréductibles

Fait : Si  $G$  est connexe  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation est uniquement déterminée par la représentation

$$d\rho \Big|_I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

$SL(2, \mathbb{C})$  est connexe. On connaît toutes les représentations irréductibles de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . On peut les construire avec  $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$

Conséquences : Les représentations  $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  sont toutes les représentations irréductibles de  $SL(2, \mathbb{C})$

Exemple :

Calculons  $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$  pour  $SL(2, \mathbb{C})$

$$\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^2, e_1 e_2, e_2^2 \rangle$$

...

## Représentation de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Fait :  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  est une algèbre simple.

On veut imiter la stratégie utilisée pour  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Le sous-espace  $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \right\}$  joue le rôle de la matrice  $H$

remarquons que les matrices de  $\mathfrak{h}$  commutent entre elles et sont diagonalisables

Si  $\rho : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

Par préservation de la forme de Jordan  $\forall H \in \mathfrak{h}$ ,  $\rho(H)$  est diagonalisable

Rappel

Une famille de matrices diagonalisables qui commutent est simultanément diagonalisable c-à-d il existe une base dans laquelle elles sont toutes diagonales

$$\implies V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

décomposition en sous-espaces propres simultanés de  $\mathfrak{h}$

On interprète  $\alpha$  comme des fonctions  $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$   $\alpha(H)$  est la valeur propre de  $H \in \mathfrak{h}$  sur le sous-espace  $V_{\alpha}$

$$\rho(H)v = \alpha(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad \forall v \in V_{\alpha}$$

$\alpha$  est linéaire

$$\alpha(aH_1 + bH_2)v = \rho(aH_1 + bH_2)v = a\rho(H_1)v + b\rho(H_2)v = a\alpha(H_1) + b\alpha(H_2)$$

Autrement dit,  $\alpha \in h^*$

On doit comprendre  $[\cdot, \cdot]$  sur  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

De manière équivalente, on doit comprendre

$$\begin{aligned} \text{ad} : g &\rightarrow \mathfrak{gl}(g) \\ \text{ad}(x)y &= [X, Y] \end{aligned}$$

Par la construction précédente, on peut découper  $g$  en sous-espaces propres de  $\text{ad}(h)$

$$\text{ad} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots \begin{pmatrix} 0 & a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\alpha(H)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On viens de trouver un des 8 sous-espace propres, (trouvons les autres?)

Notons  $E_{ij}$  matrice avec un 1 en  $i, j$  est 0 ailleurs

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = \alpha(H)E_{1,2}$$

$$\text{on définit } L_i \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & 1_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} = a_i$$

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = (L_1 - L_2)(H)E_{1,2}$$

$$\text{ad}(H)E_{1,3} = (L_1 - L_3)(H)E_{1,3}$$

$$\text{ad}(H)E_{2,1} = (L_2 - L_1)(H)E_{2,3}$$

$$2, 1$$

$$3, 1$$

$$3, 2$$

de plus  $\text{ad}(H_1)H_2 = 0$  est de dimension 2

$$g = h^{???}$$



2024-02-29

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

où  $\forall X \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \forall H \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}(H)X = [H, X] = \alpha(H)X$$

exemple :

$$X = E_{1,2}$$

$$\left[ \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & v \end{pmatrix}, E_{1,2} \right] = (a - b)E_{1,2}$$

$$X \in \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \alpha \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = a - b$$

On définit  $L_i \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = i$

$$L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{h}^*$$

$$\alpha = L_1 - L_2$$

les  $\alpha$  dans la décomposition  $(*)$  s'appellent des racines de

$$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$$

La liste des racines et

$$L_1 - L_2, L_1 - L_3, \dots$$

dans  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , une racine est un nombre complexe car  $\dim(\mathfrak{h}) = 1$ . Les racines de

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

sont -2 et 2

Les vecteurs propres associés à une racine s'appellent des vecteurs de racine

$$E_{i,j}, i \neq j$$

est un vecteur de racine pour  $L_i - L_j$

Supposons que  $X \in g_\alpha$  et  $Y \in g_\beta$  et  $H \in h$

$$[H, [X, Y]] = [X, [H, Y]] + [Y, [X, H]] = [X, \beta(H)Y] - [Y, \alpha(H)X] = \beta(H)[X, Y] - \alpha(H)[Y, X] = (\alpha + \beta)(H)[X, Y]$$

Si  $X$  vecteur de racine  $\alpha$ ,  $Y$  vecteur de racine  $\beta$  alors  $[X, Y]$  vecteur de racine  $\alpha + \beta$

$\text{ad}(X)$  agit *par translation* de la racine de  $Y$

$$[,] : g_\alpha \times g_\beta \rightarrow g_{\alpha+\beta}$$

Revenons à une représentation irréductible  $V$  de  $\text{sl}(3\mathbb{C})$

$$\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(V)$$

On décompose  $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$  où  $\alpha \in h^*$  et  $v \in V_\alpha$ ,  $H \in h$

$$\implies H_v = \alpha(H)v$$

Les valeurs propres  $\alpha$  s'appellent les racines de la représentation. Les vecteurs propres sont des vecteurs de poids

Une racine est donc un poids pour la représentation  $\text{ad}$

soit  $X \in g_\alpha$  et  $v \in V_\beta$

$$H \cdot (Xv) = [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) = \alpha(H)Xv + C(\beta(H)v) = (\alpha + \beta)(H)(Xv)$$

$X \in g_\alpha$  agit par translation de  $\alpha$  sur le poids  $\beta$  de  $V$

Conséquence : Pour  $V$  irréductible, tout les poids diffèrent d'une combinaison entière de racine de  $L_i - L_j$

Le réseau  $\Lambda_R$  engendré par les racines est appelé réseaux des racines.

Exemple :  $V \in \mathbb{C}^3$  et  $\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(\mathbb{C}^3)$  l'inclusion  $e_1, e_2, e_3$  des vecteurs propres de poids pour les poids  $l_1, L_2, L_3$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_1 \left( \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet,  $L_2 = L = 1 + (L_2 - L_1)$

$$L_3 = L_1 + (L_3 - L_1)$$

Exemple 2 :

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^3) = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} (e_1 \wedge e_2) = ae_1 \wedge e_2 + be_1 \wedge e_3 + ce_2 \wedge e_3 = \dots = -L_3 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

...

Pour imiter ce qu'on a fait dans  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  on cherche un poids *maximal*. On définit la maximalité. On fixe

$$H_0 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

et on considère l'ordre partiel sur  $\mathfrak{h}^*$

$$\alpha < \beta \iff \operatorname{Re}(\beta(H_0) - \alpha(H_0)) > 0$$

En choisissant  $a > b > c$ , les racines  $L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3$  sont positives alors que les trois autres sont négatives

Lemme : Pour  $V$  une représentation irréductible de  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ , il existe un vecteur de poids  $v \in V_\alpha, v \neq 0$  t.q.  $E_{1,2}(v) = 0, E_{1,3}(v) = 0, E_{2,3}(v) = 0$

Démonstration : Soit  $\alpha$  maximal parmi les poids t.q.  $V_\alpha \neq \{0\}$  par l'ordre  $<$   $\alpha$  existe car  $V$  est de dimension finie. Soit  $v \in V_\alpha$ . Alors,  $E_{1,2} \cdot v \in V_{\alpha+L_1-L_2}$

Si  $E_{1,2}v \neq 0$  alors  $\alpha + L_1 + L_2 > \alpha$  et  $v_\alpha \neq 0$  contredit la maximalité

De même  $E_{1,3}v = 0, E_{2,3}v = 0$

ON appelle  $v$  un vecteur de plus haut poids ou vecteur maximal

Proposition :  $V$  est engendré par  $v$  et toutes les images de  $v$  par toutes les combinaison possibles de  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration : Soit  $W$  le sous-espace engendré par  $V$  et toutes ses images par des combinaisons de  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Il suffit de montrer que  $W$  est stable par  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$

1.  $W$  est stable par  $\mathfrak{h}$  ( $W$  est engendré par des espaces de poids)
2.  $W$  est stable par  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$  par définition
3. Il reste à montrer que  $W$  est stable par  $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,2}$ . Il suffit de le montrer pour  $E_{1,2}$  et  $E_{2,3}$  car  $E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$

## À suivre...

2024-03-11

## Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$  osti, je suis déjà done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :

Si  $v \in V_{\alpha}, C \in g_{\beta}$   $\beta$ -racine,  $\alpha$ -poids

alors  $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur  $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$  t.q.  $a_0 > b_0 > c_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids  $v$  qui satisfait

- $v \in V_{\alpha}$  pour  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$
- $E_{23}v = E_{13}v = E_{31}v = 0$

Proposition :

$V$  est engendré par  $v$  (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

$W$  le sous-espace engendré par  $v$  et tout les mots possibles en  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$  appliqué à  $V$

$$W = \langle v, E_{21}v, E_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \dots \rangle$$

On veut montrer que  $W$  est  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ -invariant

Partie facile,  $W$  est invariant par  $\mathfrak{h}$  et par  $E_{21}, E_{31}, E_{32}$

Reste à montrer que  $W$  est invariant par  $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$ , il suffit donc de vérifier  $E_{1,2}W \subseteq W$  et  $E_{2,3}W \subseteq W$

Posons  $W_n$  le sous-espace engendré par  $v$  et tout les mots en  $E_{21}, E_{32}$  de la longueur  $\leq n$  appliqué à  $v$

Par récurrence, on montre  $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$ ,  $E_{23} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$

Soit  $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour } w' \in W_{n-1}$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1.

$$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12}) w'$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &\in g_{L_1-L_2} \\
E_{21} &\in G_{L_2-L_1} \\
\implies [E_{1,2}, E_{21}] &\in \mathfrak{h} = g_e
\end{aligned}$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,3} \cdot w &= E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w' \\
&= \left( \underbrace{[E_{23}, E_{21}]_0}_{0} + E_{2,1} + E_{23} \right) \cdot w' \\
&= E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')_{W_{n-2}}}_{W_{n-1}}
\end{aligned}$$

2. même chose

Puisque  $W = \bigcup_n W_n$ ,  $W$  est stable par  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$  ■

De la preuve, on déduit :

Pour  $V$  une représentation (pas nécessairement irréductible), si  $v$  est un vecteur de plus haut poids alors le sous espace engendré par  $v$  est ses images par  $E_{21}$  et  $E_{3,2}$  est une sous représentation irréductible

Il existe un  $n$  pour lequel  $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$  mais  $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation :  $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$  est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre  $\alpha$  et  $\alpha + m(L_2 - L_1)$ )

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} E_{21} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y \end{array} & 
\begin{array}{c} E_{12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X \end{array} & 
\begin{array}{c} E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H \end{array}
\end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sur  $V$  (par nécessairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour  $H$  dans une représentation de  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$  sont entières et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de " $H$ " =  $E_{11} - E_{22}$  sont  $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \dots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit  $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \dots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre  $\alpha$  et  $\alpha + n(L_2 - L_1)$  est symétrique par rapport à la droite  $\beta(H_{12}) = 0$

Posons  $\alpha + \alpha(J_{1,2})(L_2 - L_1) = \alpha_2$  et  $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a  $E_{21} \cdot v_2 = 0$ ,  $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$ ,  $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

$v_2$  est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par  $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$ ,  $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets  $\alpha$  et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que  $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2eme heure

$$\text{sym}^n(\mathbb{C}^3) = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k \mid i + j + k = n \right\rangle$$

les poids sont  $H \cdot \left( e_1^i e_2^j e_3^k \right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H)e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est  $nL$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

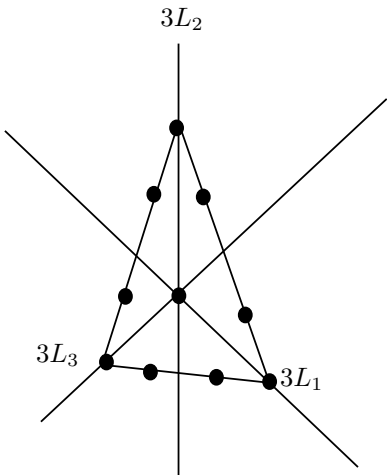


FIGURE 1 – triangle

$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3)$  par le même argument a pour plus haut poids  $nL_3$  est est irréductible

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de  $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$  est un vecteur de plus haut poids.



Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (uv) \otimes \alpha &\mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) &= \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha)) \\ &= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x))\end{aligned}$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha))$$

$\text{Her}(\varphi) \subseteq \text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$  est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \text{Ker} \varphi (\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_1)e_1)$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_2) = 2L_1 - L_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans  $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par  $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans  $\text{Ker}(\varphi)$ ,  $\dim(V_{L_1}) = 2$

engendré par  $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que  $V_{L_1}$  est engendré par  $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$  et  $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*)$

$$\begin{aligned}E_{32}E_{21}(e_1^2 \otimes e_3^*) &= E_{32}((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)) \\ &= E_{32}(2e_1e_2 \otimes e_3^*)\end{aligned}$$

$$= 2(e_1 e_3 \otimes e_3^* + e_1 e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32} \left( e_1^2 \otimes e_3^* \right)$$

$$= E_{21}le_0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21} \left( e_1^2 \otimes e_2^* \right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b \mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids  $aL_1 - bL_3$  On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphisme

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \rightarrow \mathrm{Sym}^{a-1} \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

## Rappels

Les représentation irréductibles de  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$  sont en bijection avec  $\{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ entiers}\}$

$$\rightarrow \Gamma_{a,b}$$

dont le plus haut poids est  $aL_1 - bL_3$

$$\Gamma_{a,b} \subseteq \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3)$$

$$\Gamma_{a,b} = \text{Ker}(\varphi)$$

$$\varphi : \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3) \rightarrow \text{Sym}^{a+b}(\mathbb{C}^3)$$

## Recette pour analyser les représentation d'une algèbre de Lie semi-simple

## Rappel

Simple :  $\text{ad}_X$  est irréductible  $\iff$  pas d'idéal non-trivial

Semi-simple : Somme direct d'algèbre simple

**Étape 1 :** Identifier une sous algèbre  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  abélienne diagonalisable maximale. On appelle  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan

*On a vu que si une algèbre est diagonalisable dans une représentation, elle l'est dans toutes les représentations. Une algèbre diagonalisable est une algèbre qu'on peut montrer diagonalisable dans au moins une représentation.*

## Attention

Ex :

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathfrak{h}$  n'est pas nécessairement diagonale

truc : choisir une base jacobienne Dans une base t.q. la forme bilinéaire est donnée par la matrice  $J =$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \text{ est donné par } X^t J + JX = 0$$

...

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & -b \\ 0 & -c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

ici, on peut prendre  $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \right\}$

**Étape 2 :** Décomposer  $\mathfrak{g}$  selon les poids (racines) de sa représentation adjointe

$$g = h \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} g_{\alpha} \right)$$

où  $R \subseteq h^*$  est t.q.  $g_{\alpha} \neq \{0\}$

$$g_{\alpha} = \{X \in g | \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \forall H \in h\} = \{X \in g | [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$$

Faits :

- i)  $\dim(g_{\alpha}) = 1 \forall \alpha \in R$
- ii)  $R$  engendre un réseau  $\Lambda_R \subseteq h^*$  de rang égal à  $\dim(h^*)$
- iii)  $R = -R$  (Si  $\alpha$  est une racine  $-\alpha$  l'est aussi) Une représentation  $V$  va se décomposer en  $V = \bigoplus V_{\alpha}, \alpha \in h^*$

Les vecteurs de racines,  $X \in g_x$  agissent par translation sur les  $V_{\beta}$

$$X : V_{\beta} \rightarrow V_{\alpha+\beta}$$

Si  $V$  est irréductible, tout les poids sont congrus modulo  $\Lambda_R$

**Étape 3 :** Pour chaque racine, on va identifier une sous-algèbre  $\mathfrak{s}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

on sait que  $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \subseteq h$

en fait  $\mathfrak{s}_{\alpha} = g_{\alpha} \oplus g_{-\alpha} \oplus [g_{\alpha}, g_{-\alpha}]$  est aussi un sous-algèbre de  $g$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

On trouve  $X_{\alpha} \in g_{\alpha}, Y_{\alpha} \in g_{-\alpha}$  t.q.  $H_{\alpha} = [X_{\alpha}, Y_{\alpha}]$

on a  $[H_{\alpha}, X_{\alpha}] = 2X_{\alpha}$  on a  $[H_{\alpha}, Y_{\alpha}] = 2Y_{\alpha}$

Toujours possible car

- i)  $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \neq 0$
- ii)  $[[g_{\alpha}, g_{-\alpha}], g_{\alpha}] \neq 0$

**Étape 4 :** Utiliser l'intégralité des valeurs propres de  $H_{\alpha}$

Pour tout poids  $\beta$  d'une représentation de  $g$

$$\beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}$$

On définit une autre réseau, (le réseau des poids)  $\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$

Si  $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda_W$  dans  $(\beta_1 + \beta_2)(H_{\alpha}) = \beta_1(H_{\alpha}) + \beta_2(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies \beta_1 + \beta_2 \in \Lambda_W$

et  $-\beta_1(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies -\beta_1 \in \Lambda_W$

En fait,  $\Lambda_R \subseteq \Lambda_W$

**Étape 5 :** Utiliser la symétrie par rapport à 0 des v.p. de  $H_\alpha$

On introduit une réflexion pour chaque  $\alpha \in R$ , noté  $W_\alpha$ ,  $W_\alpha : h^* \rightarrow h^*$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle$$

groupe engendré par les  $W_\alpha$  qui s'appelle Groupe de Weyl

Pour une représentation  $V = \oplus V_\beta$  on peut regrouper les  $V_\beta$  en classes modulo  $\alpha$

$$V = \oplus V_{[\beta]}$$

$$\text{où } V_{[\beta]} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\alpha+n\beta}$$

les poids dans  $V_{[\beta]}$  sont  $\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + n\alpha$  où  $n = -\beta(H_\alpha)$

**Conclusion**

l'ensemble des poids  $V$  est  $\mathcal{W}$ -invariant

**Étape 6 :** Faire un dessin

Il existe un produit bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$  appelé forme de Killing qui est défini positif sur le sous-espace réel engendré par les  $H_\alpha$

donne un produit scalaire sur le sous-espace réel engendré par  $R$  dans  $h^*$ . Pour ce produit,  $W_\alpha$  est une réflexion euclidienne

**Étape 7 :** Choisir une direction dans  $h^*$ . C'est-à-dire une forme linéaire  $l$  sur  $h^*$

$$l : h^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } L(\alpha) \neq 0 \text{ si } \alpha \in R$$

On décompose  $R = R^+ \cup R^-$  en racine positives et négatives

On dit que  $v \in V$  est un vecteur de plus haut poids pour  $g$  si  $Xv = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R^+$

Proposition :

- (i) Toute représentation de  $g$  possède un vecteur de plus haut poids
- (ii)  $V$  et toutes ses images obtenus en itérant des applications de  $X_\alpha, \alpha \in R^-$  engendrent une sous-représentation  $W \subseteq V$  irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet un unique vecteur de plus haut poids (à scalaire près)

**Manque de Batterie !**

## Rappels

$h \subseteq g$  : sous algèbre de Cartan

$$g = h \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} g_\alpha \quad R \subseteq h^*$$

$$\mathfrak{s}_\alpha = \left\langle \underbrace{X_\alpha}_{\in g_\alpha}, \underbrace{Y_\alpha}_{\in g_{-\alpha}}, \underbrace{H_\alpha}_{\in h} \right\rangle \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

$V$ -représentation de  $\mathfrak{g}$

$$V = \bigoplus V_\alpha$$

$$\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

$$\Lambda_R = \mathbb{Z}R \subseteq \Lambda_W$$

Réflexion dans une racine  $\alpha$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \text{ groupe de Weyl}$$

les poids de  $V$  sont stables par  $\mathcal{W}$

On fixe  $\ell : h^* \rightarrow \mathbb{R}$

...

Proposition :

- (i) Toute représentation a un vecteur de plus haut poids
- (ii) Les sous-espace  $W \subseteq V$  engendré par  $V$  et applications successive de  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in R^-}$  et une sous représentation irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet une unique vecteur de plus haut poids

Démonstration :

- (i) Soit  $\alpha$  maximal parmi les  $V_\alpha \neq \{0\}$  pour l'ordre partiel

$$\alpha > \beta$$

ssi  $\ell(\alpha) > \ell(\beta)$  et soit  $v \in V_\alpha$

S'il existe  $X \in \mathfrak{g}_\beta$  avec  $\beta \in R^+$  et  $X \cdot v \neq 0$  alors  $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$  et  $\ell(\alpha+\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) > \ell(\alpha)$  considérant la maximalité

Parmi les racines de  $R^+$  on dit que  $\alpha \in R^+$  est une racine simple s'il n'existe pas de  $\beta_1, \beta_2 \in R^+$  t.q.  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

Lemme : Si  $\alpha, \beta$  sont simples alors  $\alpha - \beta$  et  $\beta - \alpha$  ne sont pas des racines

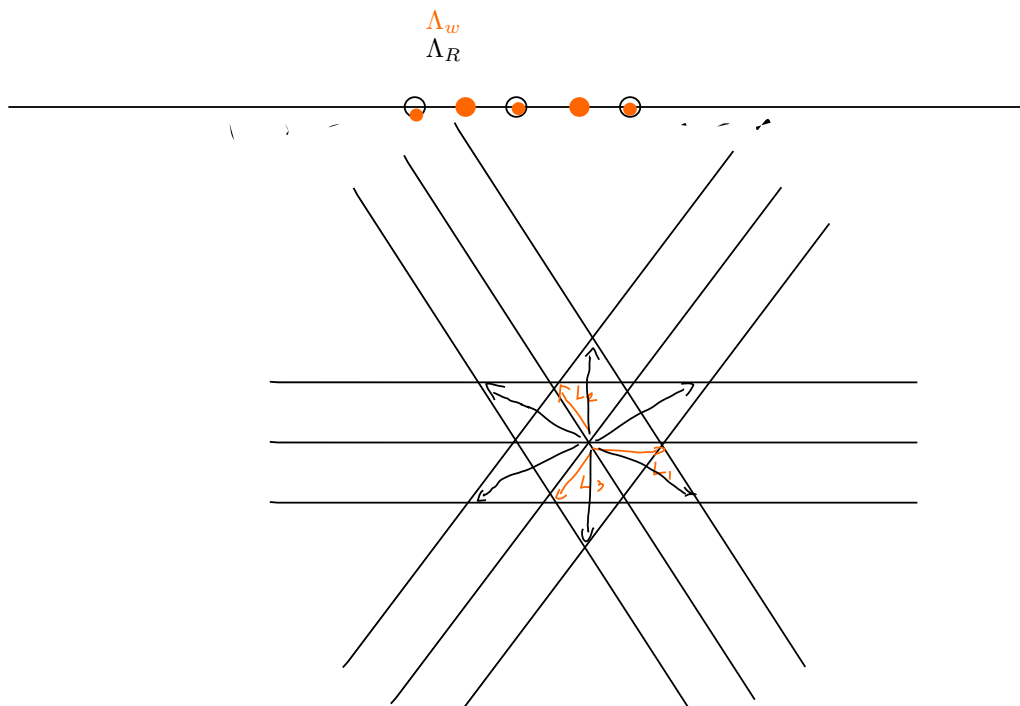


FIGURE 1 – Resaux

Dém :

...

(ii)  $W$  est aussi engendré par  $V$  et ses images successives par  $\{X_{-\alpha}\}_{\alpha \in S}, S \subseteq R^+ : \text{ racins simples}$

-  $W$  est stable par  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in R^-}$  -  $W$  est stable par  $H \in \mathfrak{h}$

Reste à montrer que  $W$  est stable par  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in S}$

$W_n \subseteq W$  sous-espace où on applique des monts de longueur  $\leq n$

Par récurrence on montre que  $X_{\alpha}W_n \subseteq W_n \quad \alpha \in S$

Soit  $u \in W_n$  un générateur

$$\Rightarrow u = X_{\beta}u' \quad \text{où} \quad u' \in W_{n-1} \\ -\beta \in S$$

Soit

$$X_{\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \in S$$

$$\text{Alors } X_{\alpha}u = X_{\alpha}X_{\beta}u' = (X_{\beta}X_{\alpha} + [X_{\alpha}, X_{\beta}])u'$$

$$= X_{\beta}X_{\alpha}u' + [X_{\alpha}, X_{\beta}]u'$$

Étape 8 :

Classifier les représentations irréductibles

Dans le sous-espace réel de  $h^*$  engendré par  $R$ , on note  $\mathcal{C} = \{\beta \mid \beta(H_\alpha) \geq 0 \forall \alpha \in R\}$

On appelle cela une chambre de Weyl

Théorème :

Pour tout poids  $\alpha \in \mathcal{C} \cap \Lambda_W$  il existe une unique représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  ayant  $\alpha$  comme plus haut poids.

On obtiens une bijection entre les représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{C} \cap \Lambda_W$

Démonstration : ON démontre l'unicité seulement

Soient  $U, V$  deux représentations irréductibles ayant  $\alpha$  comme plus haut poids. Soient  $u \in U_\alpha, v \in V_\alpha$  comme plus haut poids. Alors  $(u, v) \in U \oplus V$  est un vecteur de plus haut poids  $\alpha$  dans  $U \oplus V$

$\implies (u, v)$  engendre un sous-espace

$$W \subseteq U \oplus V$$

irréductible

$$\pi_u : W \rightarrow U$$

$$\pi_v : W \rightarrow V$$

sont des isomorphismes de représentation (par le lemme de Schur)

$$\implies U \cong V$$

## La forme de Killing

On définit  $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$

Par la formule  $B(x, y) = \text{tr}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)$

Observation :

$$X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$$

avec  $\beta \neq \pm\alpha$

Alors, pour tout  $Z \in \mathfrak{g}_\gamma$

on a  $(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)(Z)$

$$= [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha+\beta} \neq \mathfrak{g}_\gamma$$



En particulier  $[X, [Y, Z]]$  n'a pas de composante en  $Z$

$$\implies B(X, Y) = 0$$

Autrement dit  $g_\alpha \perp g_\beta$  si  $\beta \neq -\alpha$

La décomposition  $g = h \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R^+} (g_\alpha \oplus g_{-\alpha}))$

est orthogonale pour  $B$

Si  $X, Y \in h$  alors  $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$(\text{ad} X \circ \text{ad} Y)(Z) = [X, [Y, Z]] = \alpha(Y)[X, Z] = \alpha(X)\alpha(Y)Z$$

$$\implies \text{tr}(\text{ad} X \text{ad} Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X)\alpha(Y)$$

sur le sous-espace réel engendré par les  $H_\alpha$

$B$  est définie positive

$$B(H_\alpha, H_\beta) = \underbrace{\sum_{\gamma \in R} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta)}_{\in \mathbb{Z}}$$

si  $H \in \mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle_{\alpha \in R}$

alors  $B(H, H) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H)^2 \geq 0$

si  $B(H, H) = 0$

$\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in R$

$$H = 0$$

car  $R$  engendre  $h^*$

Prop :  $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$

Démonstration :

...

Proposition : si  $g$  est simple alors  $B$  est non dégénéré

(rappel :  $B$  est dégénérée si  $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$   $\text{Ker}(B) = \{X \in g \mid B(x, y) = 0 \forall y \in g\}$ )

Démonstration : Supposons qu'il existe  $X \in B, X \neq 0$

Alorsm pour tout  $Y$  et tout  $Z \in g$

$$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]) = 0$$

$$\implies [X, Y] \in \ker B$$

$$\implies B \subseteq g$$

est un ideal

## Rappel

Forme de Killing

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(X, Y) \mapsto \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

Propriétés :  $\alpha, \beta$  avec  $\beta \neq \alpha$  alors si  $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta, B(X, Y) = 0$  (autrement dit, si  $\beta \neq \alpha, \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_{-\alpha}$ )

cas spéciaux

1. si  $\alpha = 0, \beta \neq 0, \mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\beta$
2. si  $\alpha = \beta \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha$  est isotrope ( $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\alpha$ )

Si on restreint à  $\mathfrak{h} (X, Y \in \mathfrak{h})$

$$B(X, Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X) \alpha(Y)$$

$\implies$  sur  $\mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle, B$  est défini positive (non-dégénéré)

## Rappel d'algèbre linéaire

$V$  espace vectoriel,  $b$  forme bilinéaire symétrique

$$\varphi_b : V \rightarrow V^*$$

$$v \mapsto b(v, -)$$

$b$  est non dégénéré  $\iff \varphi_b$  est un isomorphisme

On définit la forme bilinéaire duale de  $b, b^*$  donné par

$$b^*(\alpha, \beta) = b(\varphi_b^{-1}(\alpha), \varphi_b^{-1}(\beta))$$

Autrement dit, si  $\alpha = b(u, -), \beta = b(v, -)$  alors  $b^*(\alpha, \beta) = b(u, v) = \alpha(v) = \beta(u)$

Proposition : Si  $\alpha(H) = 0 (\alpha \in R)$  alors  $B(H, H_\alpha) = 0$

Autrement dit  $H_\alpha^\perp = \text{Ker}(\alpha)$

Démonstration :

$$H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$$

Supposons  $\alpha(H) = 0$

$$B(H, H_\alpha) = B(H, [X_\alpha, Y_\alpha]) = B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H) B(X_\alpha, Y_\alpha) = 0$$

Corollaire :

Une racine  $\alpha \in R$  est orthogonale à l'hyperplan

$$\Omega_\alpha = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) = 0\}$$

*Démonstration.* Soit  $\beta \in \Omega_\alpha$

$$\implies \beta(H_\alpha) = 0$$

$$\exists X, Y \in \mathfrak{h} \text{ t.q. } \alpha = B(X, -), \beta = B(Y, -)$$

$$0 = \beta(H_\alpha) = B(Y, H_\alpha)$$

$$\begin{aligned} Y &\in H_\alpha^\perp \\ \alpha(Y) &= 0 = B(X, Y) = B(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

□

Proposition :

$$\varphi_B^{-1}(\alpha) = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha$$

$$\varphi_B(H_\alpha) = \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha$$

$$\text{où } \varphi_\beta(H) = B(H, -)$$

Démonstration : Par définition, si  $\varphi_B^{-1}(\alpha) = T_\alpha$

$$B(T_\alpha, -) = \alpha(-)$$

$$\text{n a } \forall H \in \mathfrak{h},$$

$$B(H_\alpha, H) = B([X_\alpha, Y_\alpha], H) = B(X_\alpha, [Y_\alpha, H]) = B(X_\alpha, -[H, Y_\alpha]) = B(X_\alpha, -(-\alpha(H))Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, Y_\alpha)$$

$$\text{De plus, } B(H_\alpha, H_\alpha) = \alpha(H_\alpha)B(X_\alpha, Y_\alpha) = 2B(X_\alpha, Y_\alpha)$$

$$\implies B(H_\alpha, H) = \alpha(H) \frac{B(H_\alpha, H_\alpha)}{2}$$

$$\implies B\left(\frac{2}{B(H, H_\alpha)} H_\alpha, H\right) = \alpha(H)$$

$$\implies T_\alpha = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)}$$

2) exercice !

ON peut donc réécrire les générateurs du groupe de Weyl

$$W_\alpha(\beta) = \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - 2\frac{B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}\alpha$$

Réflexion dans l'hyperplan  $\alpha^\perp$

Exemple :

Calculons  $B$  sur  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

$$\text{ad} : \mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$$

$$H \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dans la base  $H, X, Y$ )

$$B(H, H) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}^2 \right) = 8$$

$$B(H, X) = \text{tr} \left( \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(X, X) = B(Y, Y) = 0$$

$$B(X, Y) = \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots \\ \dots & 2 & \dots \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**$B$  sur  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$**

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$B(H_1, H_1) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 12$$

$$B(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)\alpha(H_2) = 2[2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 + -1 \cdot 2] = 2 \cdot -3 = -6$$

$$B(H_2, H_2) = 12$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définie positive

On peut alors vérifier que les racines sont orthogonales à leur plans de réflexion,  $L_1 - L_2$  est la racine qui pointe vers le haut (comme on le dessine habituellement). En se fiant au dessin habituel, cette racine devrait être orthogonale à  $L_1$ .

Rappel d'algèbre linéaire

si  $b$  est donné par une matrice,  $b(u, v) = u^t b v$

$$\varphi_b = V \mapsto V^*$$

$$V \mapsto kb$$

$$b(u, v) = u^t b v = b^*(\alpha^t b, v^t b) = u^t b (b^*)^t v \implies b^t = (b^t)^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

La base duale de  $H_1, H_2$  est  $L_1, -L_3$  la matrice dans cette base est  $\frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

On calcule  $B(L_1, L_2 - L_3) = B(L_1, -L_1 + 2(-L_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

*jazz hands*

On a également

$$B(L_2 - L_3, L_2 - L_3) = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$$

$$\implies \|L_2 - L_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Corollaire de

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}$$

Si  $\alpha, \beta$  deux racines alors

$$\frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

# Classification des algèbres de Lie simples complexes

soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$  sous algèbre de Cartan.

Notons  $\mathbb{E}$  le sous-espace euclidien de  $\mathfrak{h}^*$  engendré par  $R$  munie de  $B^*$  qui (dual de Killing) qu'on va noter  $(\ , \ )$

$$B(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$$

On

—  $R$  est finie et engendre  $\mathbb{E}$

— ...

## Rappels

$$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}X \cdot \text{ad}Y)$$

- $B$  est défini positif sur  $\mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \subseteq \mathfrak{h}$
- $B^*$  est défini positif sur  $\mathbb{R} \langle \alpha \rangle_{\alpha \in R} \subseteq \mathfrak{h}^*$
- Pour toute paires de racines  $\alpha, \beta \in R$

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2B(\alpha, \beta)}{\beta(\alpha, \alpha)}$$

Un système de racine abstrait est  $R \subseteq \mathbb{E}$  satisfaisant :

$\mathbb{E}$  est l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  avec  $(, )$  comme produit scalaire

1.  $R$  est fini et engendre  $\mathbb{E}$
2.  $\alpha \in R \implies -\alpha \in R$  et aucun autre  $n\alpha$  pour  $n \neq \pm 1$  n'est dans  $R$
3.  $\forall \alpha \in R, W_\alpha(R) = R$  (si  $\alpha, \beta \in R, W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in R$ )
4.  $\forall \alpha, \beta \in R, \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} - n_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$

La propriété 4 implique que

$$\mathbb{Z} \ni n_{\beta\alpha} n_{\alpha\beta} = \frac{4(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = 4 \frac{\cos^2 \theta}{1}$$

$$\implies n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{si } n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 4$$

$$\cos^2 \theta = 1 \implies \alpha = \pm \beta$$

$$\text{si } n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 3$$

$$n_{\alpha\beta} = 3 \quad n_{\beta\alpha} = \pm 1 \quad \theta \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$\text{si } n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 2$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \implies \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|$$

$$\text{si } n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4} \implies \theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\} \quad |\alpha| = |\beta|$$

$$\text{si } n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 0$$

$$\cos \theta = 0 \quad \alpha \perp \beta \quad \text{pas de condition sur la longueur}$$

Corollaire : Si l'angle entre  $\alpha$  et  $\beta$  est aigu, alors  $\alpha - \beta$  et  $\beta - \alpha$  sont des racines



Démonstration :

$$W_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\alpha\beta}\beta, \text{ si } \angle\alpha, \beta \text{ est aigu alors } n_{\alpha\beta} = 1$$

Sans perte de généralité,  $W_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in R \implies \beta - \alpha \in R$

Fixons  $h \in \mathbb{E} | (h, \alpha) \neq 0 \forall \alpha \in R$  et définissons  $R^+ = \{\alpha \in R | (h, \alpha) > 0\}$   $R^- = \{\alpha \in R | (h, \alpha) < 0\} = -R^+$

Définissons : Une racine positive  $\alpha \in R^+$  est simples si elle ne s'écrit pas comme une somme de racines positives.

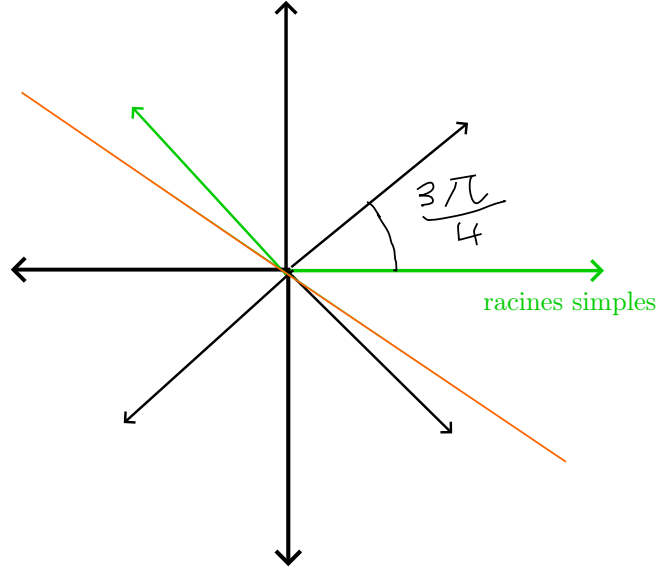


FIGURE 1 – Racines simples

Par le corollaire, l'angle entre 3 racines simples est obtus. Di  $\alpha, \beta$  simples et  $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in R \implies \alpha = (\alpha - \beta) + \beta, \beta = \beta - \alpha + \alpha \nmid$

Définition : Une configuration admissible est une ensemble de vecteur unitaires dans  $\mathbb{E}$  tels que

1. tous les vecteurs sont dans un demi-espace ouvert  $\{v > (v, h) > 0\}$
2. L'angle entre 2 vecteurs est une de  $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

Une configuration admissible est réductible si elle s'écrit comme une somme orthogonale de configurations admissibles.

Par ce qui précède, si  $R$  est un système de racines,

$$\left\{ \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \mid \alpha \text{ racine simple} \right\}$$

est une configuration admissible.

Proposition : Une configuration admissible est linéairement indépendante.

Démonstration :

Supposons que  $\sum a_i v_i = 0$ ,  $a_i$  non tout nuls

$$\implies \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{j \in J} a_j v_j \quad a_i, a_j > 0$$

$$\text{mais } \|\sum a_i v_i\|^2 = (\sum a_i v_i, \sum a_j v_j) = \sum \sum a_i a_j (v_i, v_j) \leq 0$$

$$\implies \sum a_i v_i = 0 = \sum a_i v_i$$

mais  $a_i > 0$  et  $v_i$  sont dans un demi-espace  $\nmid$

Conséquence :

Comme  $R$  engendre  $\mathbb{E}$  pour un système de racine (par axiome) et toute paire s'écrit comme une combinaison linéaire de racines simples, les racines simples engendrent  $\mathbb{E}$

$\implies$  Les racines simples forment une base

$\implies \#$  de racines =  $\dim(\mathfrak{h})$  pour  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  sous algèbre de Cartan.

Démonstration : (du fait que toute racine s'écrit comme une combinaison linéaire de racines simples)

si  $\alpha$  n'est pas simple,  $\implies = \beta + \gamma$  avec  $\beta, \gamma \in R^+ \implies (\alpha, h) = (\beta, h) + (\gamma, h)$

$$\implies (\beta, h) < (\alpha, h) \quad (\gamma, h) < (\alpha, h)$$

si  $\beta, \gamma$  sont simples, fini.

si  $\beta$  n'est pas simple  $\beta = \beta_2 + \beta_3$ ,  $\beta_2, \beta_3 \in R^+$

Comme  $\#R^+ < \infty$  cet algorithme se termine et donne  $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ ,  $\alpha_i$  simples

Définition : Le diagramme de Coxeter d'une configuration admissible  $\{V_i\}$  est le graph dont les sommets sont  $V_i$  et on a  $4 \cos^2(\angle(v_i, v_j))$  arêtes entre  $v_i, v_j$ .

$$v_i - v_j \text{ si } \angle v_i v_j = \frac{2\pi}{3}$$

$$v_i = v_j \text{ si } \angle v_i v_j = \frac{3\pi}{4}$$

$$v_i \equiv v_j \text{ si } \angle v_i v_j = \frac{5\pi}{6}$$

$$v_i \quad v_j \text{ si } \angle v_i v_j = \frac{\pi}{2}$$

Lemme : Le diagramme de Coxeter d'une configuration admissible est acyclique (sans compter la multiplicité des arêtes)

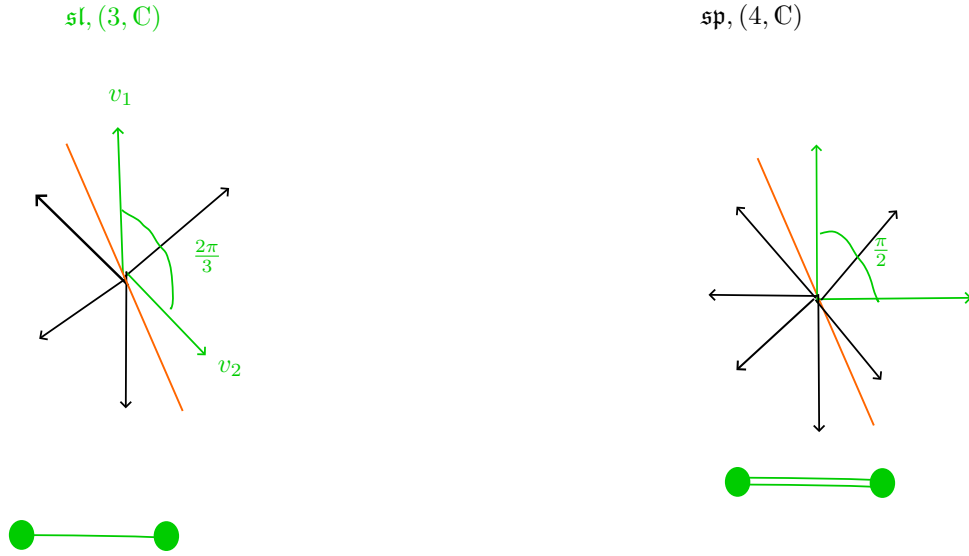


FIGURE 2 – exemples de iagrammes de Coxeters

Démonstration :

On prend le graph cyclique :  $v_k - v_1 - v_2 - \dots -$

$$\implies (v_i, v_{i+1}) \leq \frac{-1}{2} \quad \text{pour } i = 1, \dots, k-1$$

$$(v_i, v_k) \leq \frac{-1}{2}$$

$$\text{et } (v_i, v_j) \leq 0 \forall i \neq j$$

$$\begin{aligned}
 &\implies \left( \sum_i^k v_i, \sum_{i=1}^k v_i \right) \\
 &= \sum (v_i, v_i) + \sum_{i < j} 2(v_i, v_j) \\
 &= k + \sum_{i=1}^{k-1} 2(v_i, v_{i+1}) + 2(v_k, v_1) + \sum_{j \neq i+1} 2(v_i v_j) \\
 &\leq k + (-k) + 0
 \end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=1}^k v_i = 0$$

C'est une fa l'indépendance linéaire

Lemme : Le degré d'une sommet est au plus 3 (avec multiplicité)

Démonstration : On considère le graph étoile avec  $v_0$  au centre et  $k$  branches

Du lemme precedent,  $v_i \perp v_j \forall 1 \leq j \neq i \leq k$

$\implies v_1, \dots, v_k$  sont orthonormés

$$\sum_{i=1}^k (v_0, v_i)^2 < |v_0|^2 = 1$$

(Inégalité de Bessel)

$$(v_0, v_i)^2 = \frac{m_i}{4}$$

où  $m_i$  est le nombre de d'arrêtes entre  $v_0$  et  $v_i$

$$\implies \sum_{i=1}^k m_i < 4 = \text{degré de } v_0$$