2024-02-26

Rappels

Représentation irréductibles de $\mathrm{sl}(2\mathbb{C}) = \langle H, X, Y \rangle$

$$V^{(n)} = \oplus_\alpha V_\alpha$$

$$-n \begin{array}{c} Y \\ \leftarrow \\ \\ \rightarrow \\ X \end{array} -n+2 \begin{array}{c} Y \\ \leftarrow \\ \\ \rightarrow \\ X \end{array} \cdots \begin{array}{c} Y \\ \leftarrow \\ \\ \rightarrow \\ X \end{array} n-2 \begin{array}{c} Y \\ \leftarrow \\ \\ \rightarrow \\ X \end{array} n$$

Notation

Une Représentation est doit

$$\rho : g \to gl(V)$$

ou bien une action

$$g \times V \to V$$

$$\forall Z \in g \quad v \mapsto Xv \quad \text{est linéaire}$$

$\exists$ une unique représentation de dim n. On peut la construire comme $\mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C})$
Produit tensoriel de représentation d'algèbre de Lie,
V, W deux repr de g, $V \otimes W$ est une représentation avec $X(v \otimes w = Xv \otimes w + v \otimes Xw$

Exemple :

$$\Lambda^2(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2))$$

$$\mathbb{C}^2 = \langle e_1 m e_2 \rangle$$

$$\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \left\langle e_1^3, e_1^2, e_2, e_1, e_2^2, e_2^3 \right\rangle$$

$$\Lambda^2(\mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \left\langle e_1^3 \wedge e_1^2 e_2, e_1^3 \wedge \cdots \right\rangle$$

Calculons les valeurs propres de H pour cette représentation

$$\cdots$$

Représentation de $\mathrm{SL}(2\mathbb{C})$ irréductibles

Fait : Si G est connexe $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation est uniquement déterminée par ka représentation

$$\mathrm{d}\,\rho\Big|_I : g \to \mathrm{gl}(V)$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est connexe. On connait toutes les représentation irréductibles de $\mathrm{sl}(2\mathbb{C})$. On peut les construire avec $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2$

Conséquences : Les représentations $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}$ sont toutes les représentation irréductibles de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Exemple :

Calculons $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2$ pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^2, e_1 e_2, e_2^2 \rangle$$

$$\dots$$

Représentation de $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$

Fait : $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ est une algèbre simple.

On veut imiter la stratégie utilisé pour $\mathrm{sl}(2\mathbb{C})$

Le sous-espace $h = \{ \begin{pmatrix} a_1 0 & 0 & \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \}$ joue le role de la matrice H

remarquons que les matrices de h commutent entre elles et sont diagonalisables

Si $\rho : \mathrm{sl}(3,\mathbb{C}) \to \mathrm{gl}(V)$

Par préservation de la forme de Jordan $\forall H \in h$, $\rho(H)$ est diagonalisable

Rappel

Une famille de matrices diagonalisables qui commutent est simultanément diagonalisable c-à-d il existe une base dans laquelle elles sont toutes diagonales

$$\implies V = \oplus_\alpha V_\alpha$$

décomposition en sous-espaces propres simultanés de h

On interprète α comme des fonctions $\alpha : h \to \mathbb{C}$ $\alpha(H)$ est la valeur propre de $H \in h$ sur le sous-espace V_α

$$\rho(H)v = \alpha(H)v \quad \forall H \in H \quad \forall v \in V_\alpha$$

α est linéaire

$$\alpha(aH_1 + bH_2)v = \rho(aH_1 + bH_2)v = a\rho(H_1)v + b\rho(H_2)v = a\alpha(H_1) + b\alpha(H_2)$$

Autrement dit, $\alpha \in h^*$

On doit comprendre $[,]$ sur $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$

De manière équivalente, on doit comprendre

$$\mathrm{ad} : g \to \mathrm{gl}(g)$$

$$\mathrm{ad}(x)y = [X, Y]$$

Par la construction précédente, on peut découper g en sous-espaces propres de $\mathrm{ad}(h)$

$$\mathrm{ad}\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots \begin{pmatrix} 0 & a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\alpha(H)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On viens de trouver un des 8 sous-espace propres, (trouvons les autres ?)

Notons E_{ij} matrice avec un 1 en i, j est 0 ailleurs

$$\mathrm{ad}(H)E_{1,2} = \alpha(H)E_{1,2}$$

on définit $L_i \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & 1_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} = a_i$

$$\mathrm{ad}(H)E_{1,2} = (L_1 - L_2)\,(H)E_{1,2}$$

$$\mathrm{ad}(H)E_{1,3} = (L_1 - L_3)(H)E_{1,3}$$

$$\mathrm{ad}(H)E_{2,1} = (L_2 - L_1)\,(H)E_{2,3}$$

$$2, 1$$

$$3, 1$$

$$3, 2$$

de plus $\mathrm{ad}(H_1)H_2 = 0$ est de dimension 2

$$g = h???$$