

# 1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire  $(G, *)$ , où  $G$  est un ensemble et  $*$  est une opération  $(* : G \times G \rightarrow G)$

3 axiomes :

1.  $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2.  $\exists e \in G | e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3.  $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex :  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \dots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est  $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \rightarrow E | f \text{ est inversible} \}$$

avec l'opération de composition  $\circ$

On l'appelle le groupe symétrique de  $E$

$$S_n = S_{\{1, 2, \dots, n\}}$$

Est le groupe des permutations de  $n$  éléments

Notation pour désigner les éléments  $\sigma \in S_n$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes  $(G, H)$  est une fonction  $f : G \rightarrow H$  t.q.  $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ .  
Si  $f$  est inversible alors  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et on dit alors que  $f$  est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\bullet : G \times X \rightarrow X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad X = \mathbb{R}^n$$

Définition : Une action de  $G$  sur  $X$  est un homomorphisme  $f : G \rightarrow S_X$

Les deux définitions sont équivalentes

On définit  $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_1)(f(g_2)(x)) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si  $X$  a plus de structure et qu'on a une action de  $G$  sur  $X$  qui preserve la structure lors on dit que  $G$  agit par (homéomorphisme, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur  $X$

exemple :  $G = S_3$  agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

**ATTENTION :**  $S_4$  n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permutations *brisent le triangle*)  $S_4$  agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$  et est groupe des permutations paires

$A_5$  agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation  $S_G$

Démonstration : On considère l'action de  $G$  sur lui-même ( $x = G$ )

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

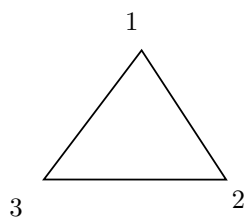
on obtiens  $f : G \rightarrow S_G$  : homomorphisme injectif car si  $f(g_1) = f(g_2)$  alors  $f(g_1)(e) = f(g_2)(e)$ ,  $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$ ,  $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe à } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe  $G$  est une action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$ . Autrement dit, un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Le rang d'une représentation est  $\dim V$

exemples :

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$

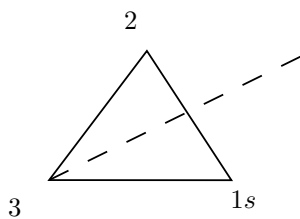


$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma)$$

$$F(\eta)$$



Réflexion du triangle

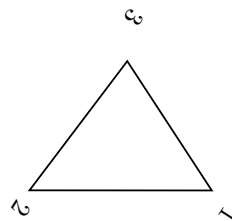


FIGURE 1 – Triangles équilatéraux

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

*Si*

## retour sur le dernier cours

$(G, \bullet)$  c'est un groupe

$S_E = \{\sigma : E \rightarrow E | \sigma \text{ inversible} \}$  est une groupe pour la composition

Un cycle est un élément de  $S_n$  de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1}, \sigma(a_k) = a_1, i = 1, \dots, k$$

On le note  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$

### Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12) \circ (35) = (35) \circ (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1756234)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longueur  $\ell$  est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est impaire} \end{cases}$$

On a la relation  $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1)\text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de  $G$  sur  $X$  : deux définitions

1.  $\bullet : G \times X \rightarrow X$
2. homomorphisme  $f : G \rightarrow S_x$

Représentation de  $G$  : action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$

Exemple : La Représentation vectoriel sur  $V$

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G, v \in V$$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour  $G$  fixé, on a la représentation régulière ( $R$ ) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \dots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

On définit  $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe  $\mathbb{Z}_3$  sont ici représenté par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si  $G$  agit sur  $E$  (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$   $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  par  $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_i$  (action de  $G$  sur  $E$ )

exemple :  $V = \mathbb{C}$  Ou on prend  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$

$$\rho : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentation de

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la restriction de  $\rho$  à un sous-espace  $U \subset V$  invariant par  $\rho$ . c-à-d, si  $u \in U$ , alors  $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$  Le sous-espace  $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$  est une sous représentation triviale

Le sous-espace  $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0 \right\}$  est aussi une sous-représentation de  $R$  de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ( $\neq 0, \neq V$ )

Exemple :  $S_3$  :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$  la représentation de permutation induite par l'action ??? de  $S_3$  sur  $\{1, 2, 3\}$   $\rho(12) = \dots 3x3$ ,  $\rho(123) = \dots 3x3$

$\rho$  est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariant est irréductible

Également,  $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$  est invariant

Es-ce que  $U_0$  est irréductible ?

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

...

Conclusion :  $U_0$  est une représentation irréductible. On l'appelle représentation standard de  $S_3$

Ex :  $S_3$

$$\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si  $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(u)$ ,  $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(v)$  sont 2 représentation de  $G$ , leurs somme directe est la représentation  $\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(u \oplus v)$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si  $U = \mathbb{R}^n$   $V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$  contient  $u \oplus 0$  et  $0 \oplus v$  comme sous représentation

Proposition : Soit  $U \subset V$  une sous-repr/sentation de  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Alors, il existe une sous-représentation  $W \subset V$  telle que  $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple :  $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de  $\mathbb{Z}$ ,  $\langle e_1 \rangle$  est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe pas d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit  $V_0 \subset V$  n'importe quel complément de  $U$  ( $V = U \oplus W_0$ )

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_0 \quad \text{pour } w \in W_0$$

Soit  $\pi: V \rightarrow U$  la projection complémentaire à  $W_0$

Définissons  $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$  si  $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi [\rho(g^{-1})u]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g^{-1})u$$

$$\frac{1}{|G|} |G| u = u$$

$\implies \pi' : V \rightarrow U$  est surjectif et identité sur

$W = \text{Ker}(\pi')$  est notre candidat de sous-représentation

Vérifions que  $W$  est  $\rho(G)$  invariant

$$h \in G \quad V \in \text{Ker} \pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g) \pi \rho(g') \rho(h) v = \dots = 0$$

comme  $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , ,$$



## Rappels

- représentation de  $G$   $\rho \rightarrow \text{GL}(V)$
- somme direct  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow (V \oplus U)$
- Sous-représentation  $U \subset V$   $G$  invariant  $\forall g \in G, \rho(g)u \in U$
- $\rho$  est irréductible si les seul sous-représentation sont  $\{0\}$  et  $V$
- Théorème : Si  $U \subset V$  est une sous représentation de  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  alors  $\exists W \subset V$  sous-espace t.q.  $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$  : représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une application linéaire  $\varphi : U \rightarrow V$  telle que  $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

Si  $\varphi$  est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1.  $\text{Ker}(\varphi) \subset U$
2.  $\text{Im}(\varphi) \subset V$  sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si  $v \in \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1(g)v) &= \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ \implies \rho_1(g)v &\in \text{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$

$$2. \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$$

#### Lemme de Shur

1.  $\varphi : V \rightarrow U$  est un morphisme entre représentation irréductible alors  $\varphi = 0$  ou  $\varphi$  est un iso

2.  $\varphi : V \rightarrow V$  Morphisme de  $V$  représentation irréductible alors  $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration :  $\varphi : V \rightarrow U$

1.

...

2.  $\varphi V \rightarrow V$   $\varphi$  admet une valeur propre  $\lambda$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = V$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit  $G$  une groupe fini abélien

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \dots$$

et supposons  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  irréductible. Fixons  $g \in G$

$\rho(g) : V \rightarrow V$  alors  $\rho(g)$  est une morphisme de représentation car  $\rho(h)(\rho(g)v) = \rho(hg)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor  $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$  tout les  $\rho(g)$  sont  $\lambda_g I$

$\implies$  tout sous-espace de  $V$  est stable par  $\rho(g) \forall g \in G$

donc  $\dim V = 1$

Conclusion : tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple :  $G = \mathbb{Z}_4$

...

Exemple :  $G = S_3 = \{e, (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de  $G$  qui est abélien

Remarque :  $G$  est engendré par  $(123)$  et  $(12)$

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur  $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation irréductible

on a  $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$  car  $\tau^3 = e$

$\implies \rho(\tau)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit  $v \in V$  vecteurs propres de  $\rho(\tau)$   
 $\implies \rho(\tau)v = \omega^k v$  pour  $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned} \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^2)v \\ &= \rho(\sigma)\rho(\tau)^2v \\ &= \rho(\sigma)\omega^{2k}v \\ &= \omega^{2k}(\rho(\sigma)v) \end{aligned}$$

conclusion si  $v$  est une vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^k$  alors  $\rho(\tau)v$  est vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^{2k}$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1.  $k = 1$  ou  $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

$$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

sont linéairement indépendants  $U = \langle v, \rho(\sigma)v \rangle$ ,  $U$  est stable par  $G : V$  et  $\rho(\sigma)V$  sont vecteur propres de  $\rho(\tau)$  et  $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$ ,  $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

$$\implies U = V$$

et dans la base  $v, \rho(\sigma)v$  on alors

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.  $k = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\tau)v &= v \\ \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\sigma)v \end{aligned}$$

(a)

$$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

et  $\lambda \in \{1, -1\}$  ( $\sigma^2 = 1$ ) si  $\lambda = 1$   $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{trivial}}$  si  $\lambda = -1$ ,  $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{sign}}$

(b)  $v$  et  $\rho(\sigma)v$  sont linéairement indépendants

Considérons  $V + \rho(\sigma)v$ ,  $V - \rho(\sigma)v$

$$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v \text{ et } \rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$$

$$\implies v + \rho(\sigma)v \text{ est stable par } G.$$

idem pour  $-$ . C'est donc une contradiction au fait que  $V$  soit irréductible.

## Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

une représentation

Alors son caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$