Rappels

- Paramétisation orthogonale : $p_u p_v = 0 = F$
- Intégrale de surface $f : S \to \mathbb{R}$

$$\iint_{p(u)} f(x)\mathrm{d}S := \iint_{u} f(u,v)\|p_u \times p_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{U} f(u,v)\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

-

$$\varphi_{12} := (\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} e_{1)} \cdot e_2$$

  où $e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}},\ e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G}}$ "Rotation de e_1 e_2 le lond de α "
- α courbe fermée borant R

$$\Longrightarrow \int_{\alpha} \varphi_{12}\mathrm{d}s = -\iint_{R} \kappa \mathrm{d}S$$

- Si $\alpha'(s) = T(s) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ alors $\underbrace{k_g}_{\text{Courbure de } \alpha \text{ intrinsèque à la surface}} = \underbrace{\varphi_{12}}_{\text{Rotation du repère } e_1,\ e_2} + \underbrace{\theta'}_{\text{rotation de } \alpha' \text{ dans le repère } e_1,\ e_2}$

"Umlanfsatz" sur une surface : Si α est une courbe simple fermée contractible sur S alors

$$\int_0^L \theta' \mathrm{d}s = 2\pi$$

ContractibleP qui peut être "remplie" par/borne un disque

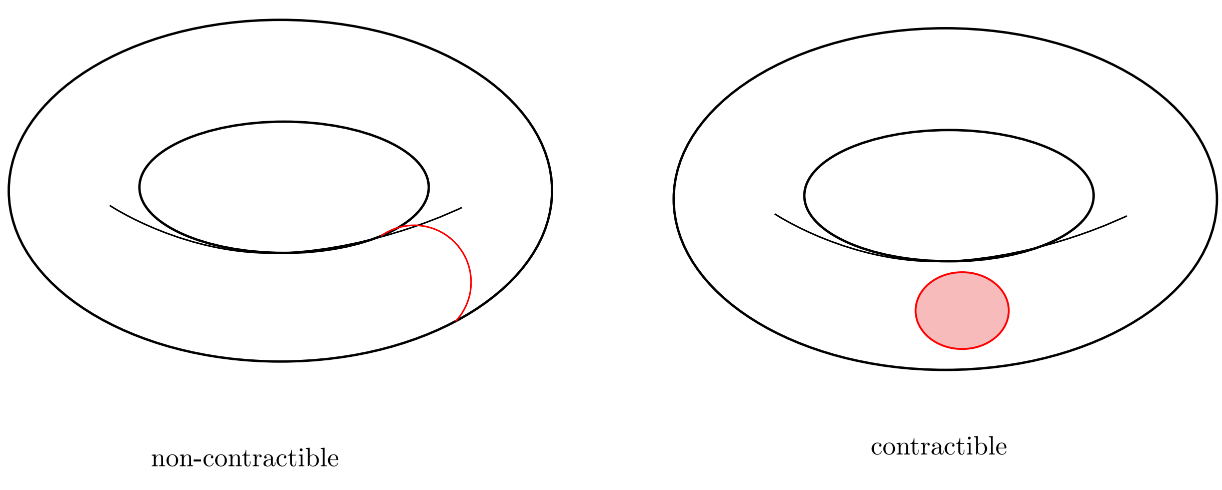

Figure 1 – Contractible vs non-contractible

"Dém" : La quantité $\int_0^L$ est toujours une mutiple de 2π (On commence et finit par le même vecteur). C'est une fonction continue de la courbe α

Version "avec des coins"

Si α est lisse par morceaux

$$\int_0^L = 2\pi = \sum \epsilon_k$$

avec ϵ_k les angles exterieurs de α

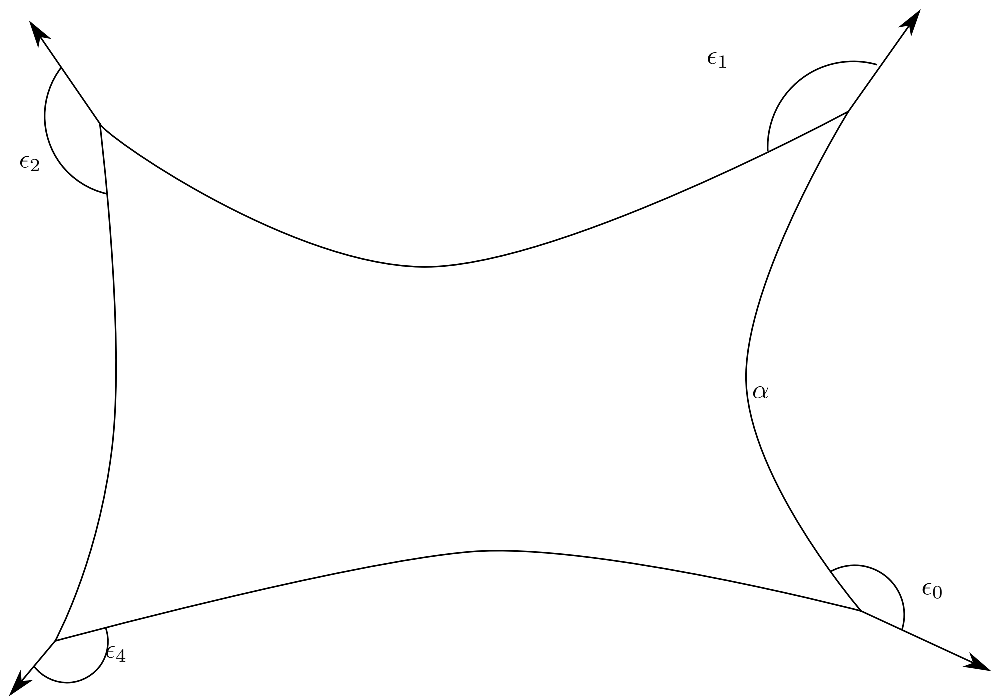

FIGURE 2 – Umlanfsatz sur une surface avec des coins

ϵ_k : l'angle entre le vecteur tangeant entrant et le vecteur sortant au sommet de k

Théorème de Gauss-Bonnet local : Soit α une courbe lisse par morceaux fermées, simples???, contractible, bornant R dans la surface S. Alors

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Démonstration : On a montré

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S = -S_\alpha \varphi_{12} \mathrm{d}s = -\int_\alpha \kappa_g - \theta' \mathrm{d}s = -\int_\alpha \kappa_g + \int \theta' \mathrm{d}s = -\kappa_g \mathrm{d}S + 2\pi - \sum \epsilon_k \qquad \blacksquare$$

Exemple : Dans le plan ou sur un cylindre :

$$\implies \int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Si

$$\kappa_g = 0 (\text{cotées sont des géodésiques})$$

$$\sum \epsilon_f = 2\pi$$

Si α est lisse

$$\int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s = 2\pi$$

: Umlasfstax

Exemple 2 : Sur S^2 $\kappa = 1$

Cercle de lattitude φ_0

$$k_g = \cot\varphi_0$$

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\circ} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \cdots = 2\pi$$

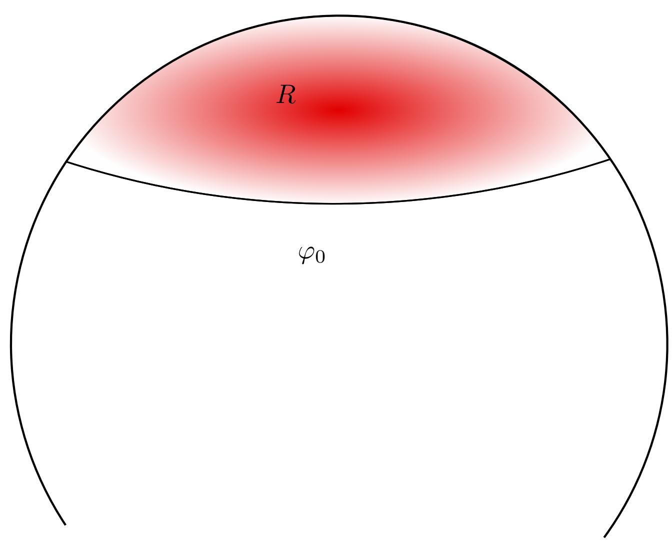

Figure 3 – Théorème de Gauss-Bonnet sur la sphère unitée

Cela doit être vrai pour n'importe quel surface qu'on a déformé continuement. (α reste contractible)

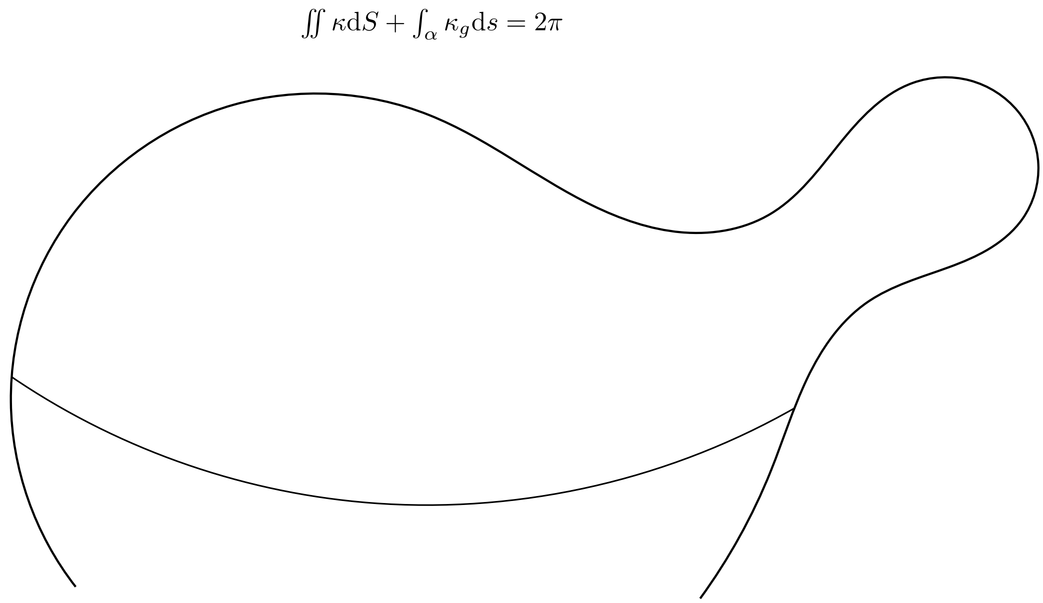

Figure 4 – sphère avec un pustule

<u>Corrolaire</u> : si $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ sont les angles intérieurs d'un triangle géodésique T dans S_1 alors

$$\int_T \kappa \mathrm{d}s = -\pi + \sum_i^3 \theta_i$$

<u>Démonstration</u> :

Comme les côtés sont géodésiques $k_g = 0$ sur les côtées.

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 2\pi$$

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S + 3\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 2\pi$$

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi \qquad \blacksquare$$

Courbure positive :

$$\sum_i^3 \theta_i = \pi \iint_T \kappa \mathrm{d}S > \pi$$

Courbure négative

$$\sum_{i}^{3} \theta_i = \pi \iint_T \kappa \mathrm{d}S - \pi$$

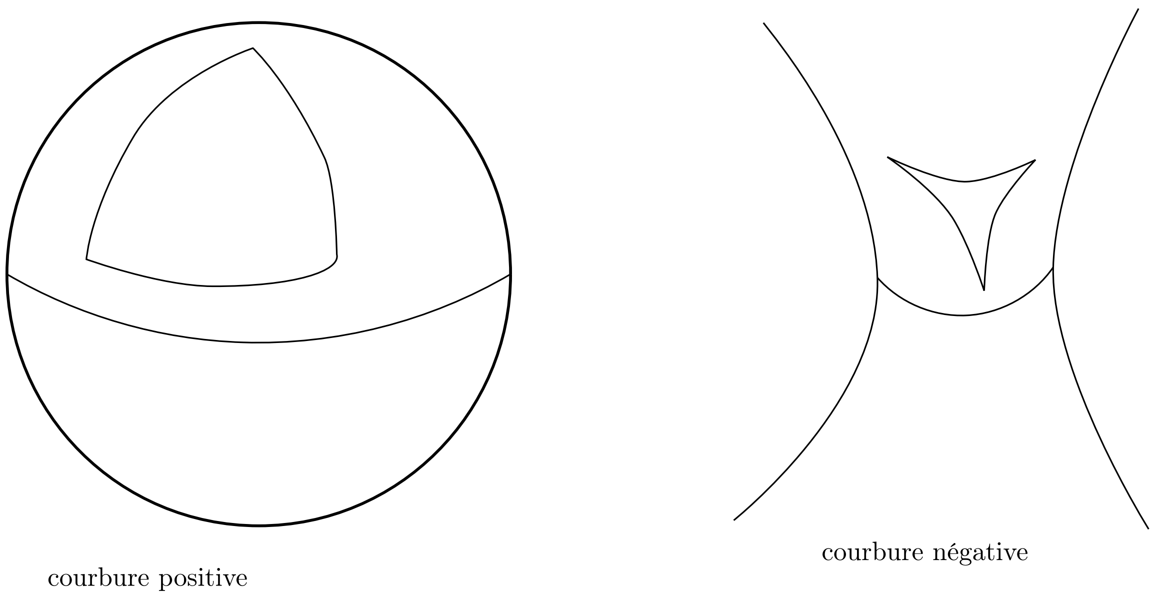

Figure 5 – Trinagle sur surface courbées

<u>Caractéristique d'Euleur d'une surface</u> :

Une trinangulation d'une surface est formée par une collection de triangles (image d'un triangle dans le plan par p)

- 2 triangles se rencontrent en un coté ou rien
- Les trinagles recouvrent la sruface
- Chaque triangle a au plus 1 côté sur le bord de la surface

La caractéristique d'Euleur d'une triangulation T d'une surface S est $\chi(s, \tau) = V - E + F$

Par exemple, la caracthéristique d'Euleur d'un triangle est $\chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1$

<u>Théorème de Gauss-Bonnet (Global)</u>

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(s)$$

<u>Corollaire</u> : Pour une surface sans bord ($\partial S = \emptyset$)

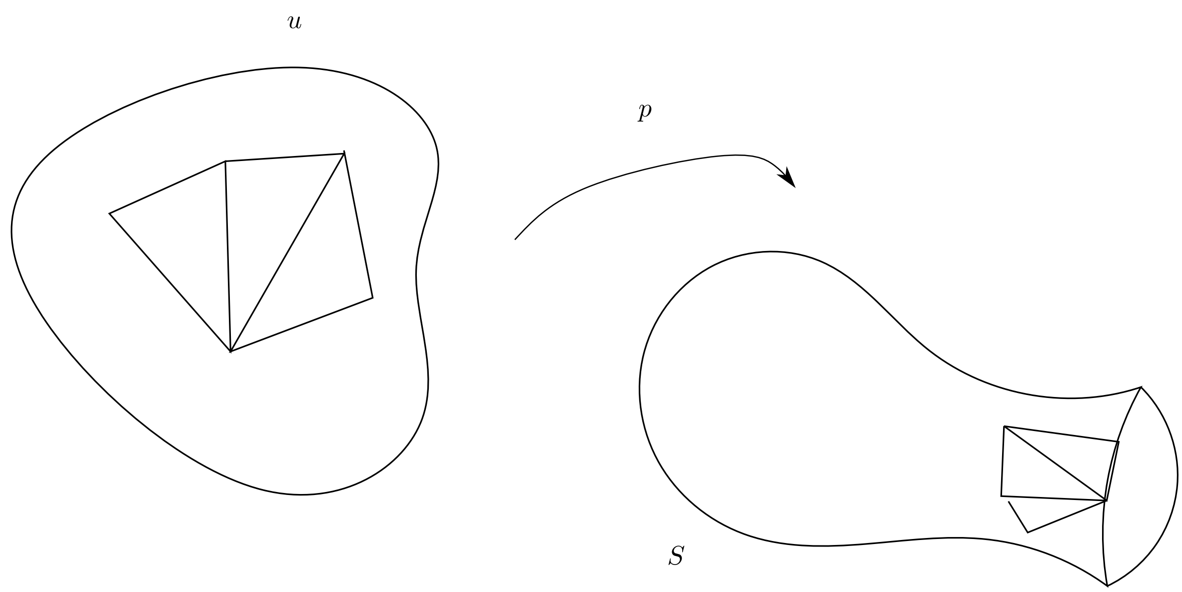

Figure 6 – Triangulation d'une surface

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S = 2\pi\chi(s)$$

Démonstration : Pour chaque triangle $\triangle$ de la triangulation τ, on applique le théorème local

$$\iint_\triangle \kappa \mathrm{d}S = \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k^\triangle = 2\pi$$

et on fait la somme sur les F triangles

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \underbrace{\sum_{\triangle\in\tau} \int_{\partial\tau} \kappa_g \mathrm{d}s}_{\text{S'annullent en paires}} + \sum_{\triangle\in\tau} \sum_k^3 \epsilon_k^\triangle = 2\pi F$$

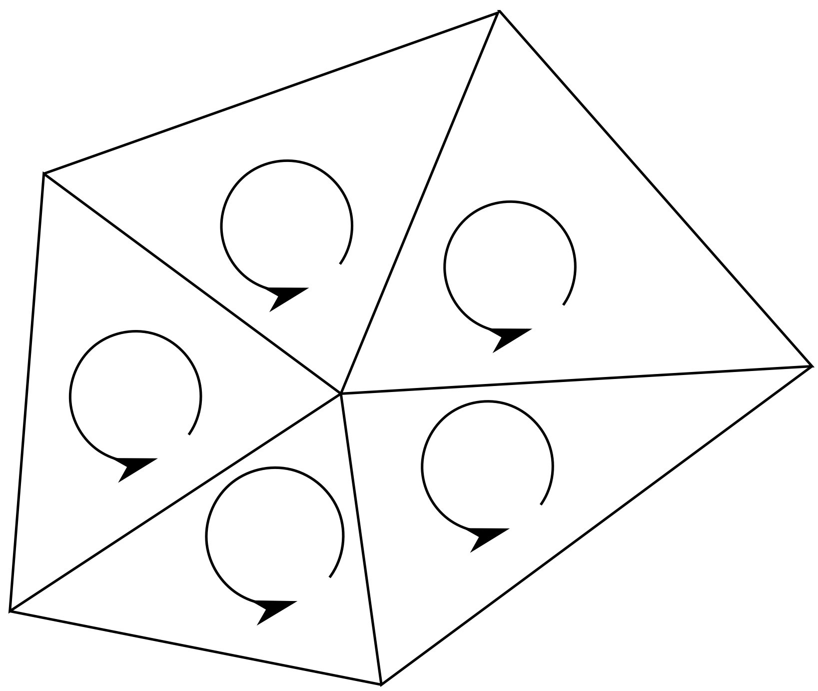

FIGURE 7 – Circulation des triangles