Figure 1 – champignon

On veut calculer le champ magnétique d'un solénoide

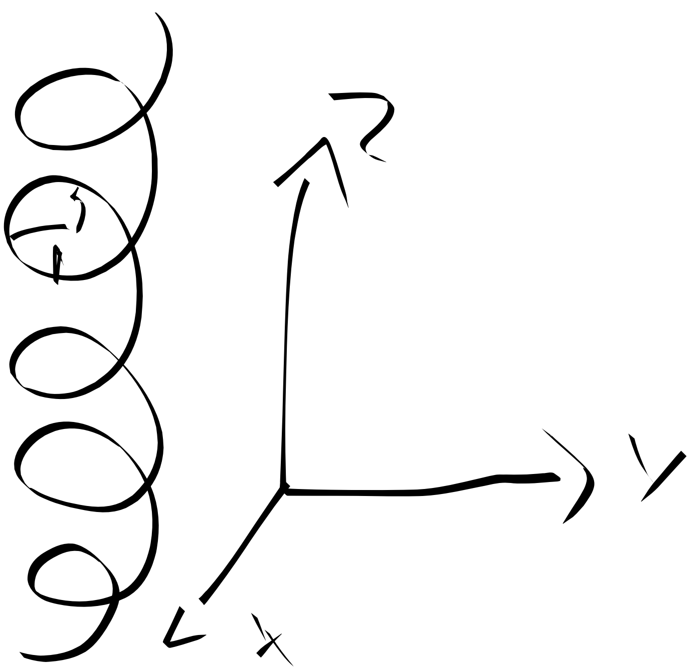

Figure 2 – soleno

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\vec{r'}) \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$$

Cours 6

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

Pour passer de $\vec{j} \to \vec{B}$ on utilise la loi de Biot-Savard

Pour faire le contraire on utilise l'équation locale $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ où sa forme intégrale le théorème d'Ampère

On a aussi les contraintes

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot B = 0$$

et

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

On doit aussi raisoner par linéartité, c'est à dire que le champ causé à un point sera la somme de tout les champs causé en ce point par chaque élément de courrant.

$$\phi = \iint_2 \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_2 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \phi_{1\to 2} + \phi_{2\to 2} = M_{21} I_1 + M_2 2 I_2$$

$$M_{21} = M_{12}$$

1 Induction

On fait plus de l'éléctrostatique Whoooop.

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathbf{B}}(t) \quad \text{Loi de Faraday}}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Cours 7

Jean-Baptiste Bertrand

27 janvier 2022

1 4 équation de Maxwell révisée

Imaginons qu'on ai un circuit comportant une capacitance. Si on fait une boucle d'Ampère autour du fil, on devrait trouver que le circulation dépende du courrant. Cepedant, si on déforme la surface de manière à ce que la boucle reste en place mais que la surface ne croise plus le fil (ce qui est possible à cause du trou laissé par la capacitance) on trouve que la cirulation devrait être nul ou $\mu_0 I = 0$. Comme ni μ ni I ne sont nul, l'équation de Maxwell doit être fausse !. Plus exactement il lui manque un terme en electrodynamique.

En effet on a que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \implies \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}_{0} = \mu_o \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} \implies \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

Autrement dit, notre équation de Maxwell, dans son état actuel **implique** que la charge ne ne varie pas dans le temps.

On pose alors

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 j + \mathbf{u}$$

On cherche alors la forme de $\mathbf{u}$ qui est pour l'instant quelquonque

2 Temps de vol d'une charge

On veut savoir le temps caractéristique que prend un chaque pour se dissiper dans un materiaux. On ne considère par les effets de bords et on a que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\sigma \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \sigma = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho(t) = \rho_0 e^{\frac{-t}{\tau_q}}$$

avec $\tau_q = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$

3 La loi d'Ohm, d'où c'est que ça viens c'taffaire là

À partir de ce qu'on a fait plus haut (?) on a que

$$\frac{d\!<\mathbf{v}>}{dt} = -\frac{<\mathbf{v}>}{\tau} \implies m\mathbf{v}t = -\frac{m}{\tau} <>$$

avec champ éléctrique :

Inserer les équations de Maxwell ici

On se met dans le vide donc $\rho \equiv J \equiv 0$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot B = 0 \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

On veut une équation pour $\mathbf{E}$ seulement !

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{E}}{\mathrm{d}t^2}$$

C'est une équation d'onde ! Wow quel dénouement innatendu !

On pose la constante c comme nom de variable totalement alétoire dans le processus de résolution de notre équation différentielle. Oh ! Mon DIEU ! Il s'agit en fait... de la vitesse de la lumiére ! ! ! ! ! ! ! ! ! ! Pourtant celle-ci ne semble dépende que de constantes universelles fondamentales. Cela signifie donc que si je vois la lumière aller à une vitesse différente, les constante des $_0$ et μ_0 doivent être différente. Cependant comme on le sait de Galillé, qui a inventé la realtivité, il suffit de changer de référentielle pour cela ! Cela veut donc dire que si j'allais à vitesse c je mesurais que $\epsilon \mu_0 = \infty$. C'est facsinant, les constantes fondamentales changent drastiquement d'un référentiel à l'autre ! La terre doit être dans un référentiel très priviligié pour que nous n'ayons jamais remarqué ce fait incyoablement important. Je m'envais vérifier cette hypthèse expérimentalement puis passer par go pour collecter mon prix Nobel de ce pas !

Journal, entrée 192

Autre observation fasciante : les champ éléctrique et le champ mangétique sont tout deux perpendicualire au vecteur d'onde k qui dicte la direction de propagation ! Ce sont donc des ondes transverse. Fascinant. Une nouvelle découverte n'attend pas l'autre.

ONdes guidées

On a un tube infini de métal parfait

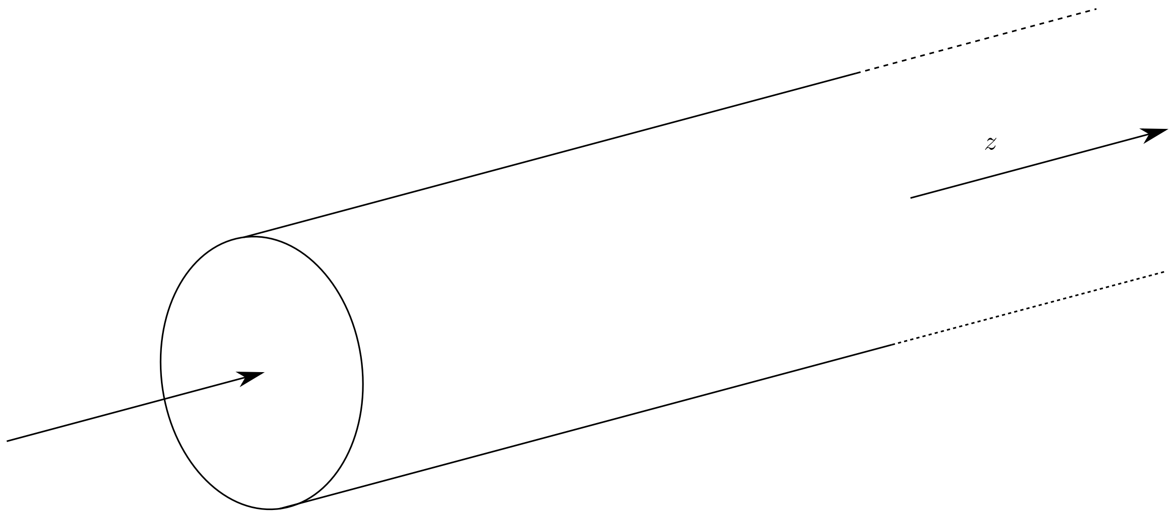

Figure 1 – Onde dans un CEP cynlindrique

On cherche une solution de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(x,y,z) = \mathbf{B}_0(x,y)e^{(kz-\omega t)} \end{cases}$$

l'onde ne peut pas être TEM

$E_z = B_z = 0$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y} = 0$$

$$\implies \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = i\omega B_z = 0$$

$$\implies dvE_yx = \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}y} = 0$$

C'est donc identique à un problème d'éléctrostatiqueo

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse. On peut avoir des ondes

$$\begin{cases} TE & E_z = 0 \\ TM & B_z = 0 \end{cases}$$

Remarque

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse dans un conducteur seul, il en faut au moins deux

Cas d'une onde TE ($E_z = 0$)

$$\nabla^2 B_z = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ à l'interieur}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}y^2} - k^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0$$

On cherche une solution sous la forme $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$ pour le cas d'un guide d'onde rectangulaire

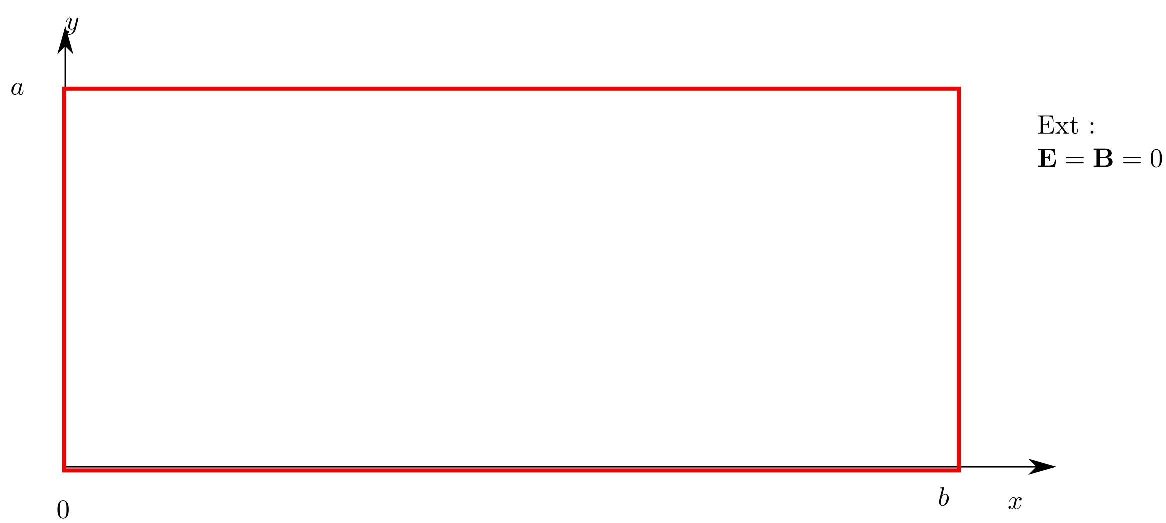

FIGURE 2 – guide d'onde rectangulaire

$$X\text{"}Y + XY\text{"} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) XY = 0$$

$$\frac{X"}{X} + \frac{Y"}{Y} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0$$

$$\frac{X"}{X} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) - \frac{Y"}{Y} = -k_z^2 \text{ On le pose}$$

$$X = \alpha \sin k_z x + \beta \cos k_z x$$

de mmême

$$\frac{Y"}{Y} = -k_z^2$$

avec $-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$

Conditions aux limites $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = 0$ à l'extérieur du cylindre

On a aussi que $E_\parallel$ et $B_\perp$ sont continus

Donc, en $y \in \{0, b\}$ $E_x = B_x = 0$ et en $X \in \{0, a\}$ $E_y = B_x = 0$

Il nous reste à relier $E_x, E_y B_x B_y$ à E_z, B_z

On veut donc se servir des autre équations de Maxwell. En particulier on veut se servir du rotationel car il mélange les composantes

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = i\omega\mathbf{B}$$

$$\implies i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ikE_y \\ ikE_x \\ \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

$$B_x = -\frac{k}{\omega} E_y, \quad B_y = \frac{k}{\omega} E_x$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} dv\mathbf{E}t = -\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\implies -\frac{i\omega}{c^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} - ikB_y \\ ikB_x - \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} = ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x = \left(-\frac{i\omega}{c^2}\right) \frac{\omega}{k} B_y$$

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}y} = B_y \left[-i\frac{\omega^2}{kc^2} + ik\right] = ikB_y \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right]$$

$$-\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x} + ikb_x - i\frac{omega^2}{kc^2}B_x = ikB_x\left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right]$$

$$B_y(x,0) = 0\forall x$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}B_x}{\mathrm{d}y} = 0 \qquad B_z = X(x)Y(y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$X(x)Y'(0) = 0\forall x \implies Y'(0) = 0$$

de même $B_z(x,b) = 0 \implies Y'(b) = 0$

On reviens sur le guide d'onde rectangulaire

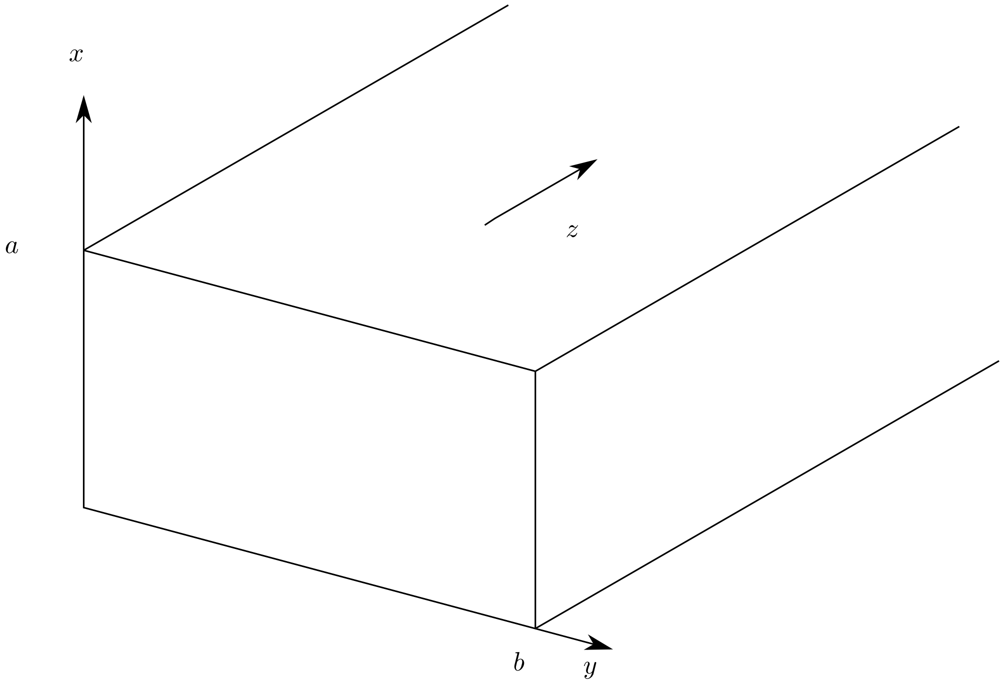

Figure 1 – guide donde rectangulaire

Modes :

$$\begin{cases} \text{TE} \quad E_z = 0 \\ \text{TM} \quad B_z = 0 \end{cases}$$

$$B_z(x,y,z) = B_0 \cos k_x x \cos k_y y e^{ikz}$$

avec

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2 - \omega_?^2}{c^2} \qquad k_x = \frac{n\pi}{a} \qquad k_y \frac{n\pi}{b}$$

ex : $n = 0, n = 1$

$$B_z(x,y,z) = B_0 \cos k_y y e^{ikz}$$
$$B_z(x,y,0) = B_0 \cos \frac{y\pi}{b}$$

Dans le cas d'un métal non-parfait, il y aurat des pertes du au courrants. On s'interesse maintenant à calculer ces courrants.

Comme $\boldsymbol{\nabla} \cdot j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ On peut obenir la charge facilement à partir du courrant (à constante près) mais pas l'inverse

discontinuités de $B_z \to j_z$

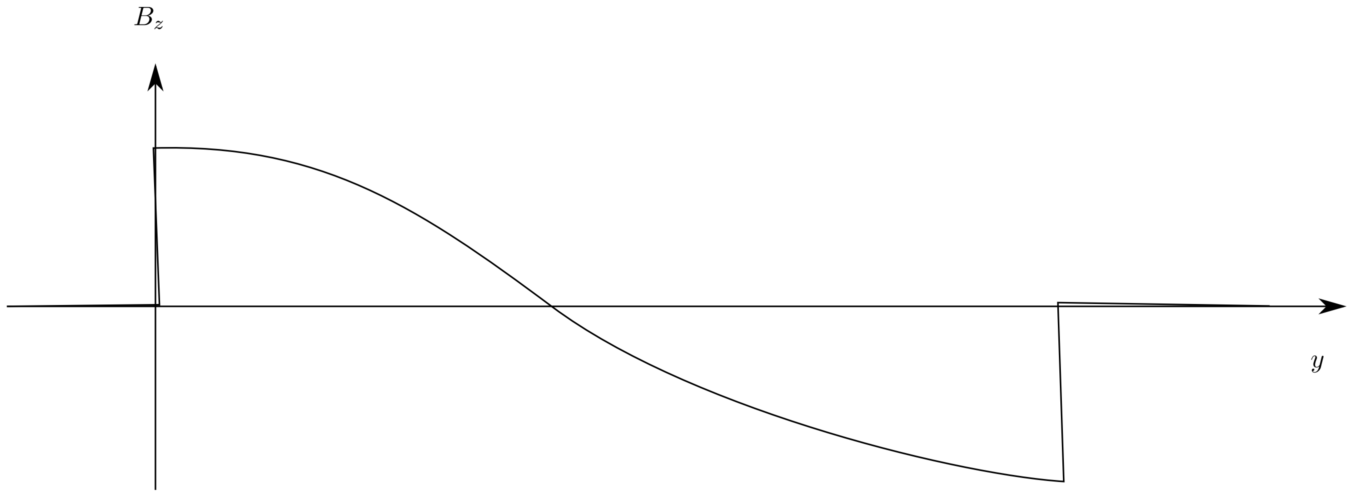

FIGURE 2 – Graphique du champ magnétique

en $y = b$: j_s suivant $\hat{x}$

$$B_z(y = b^+) - B_z(y = b^-) = \mu_0 j$$

$\implies j_s = \frac{B_0}{\mu_0}$

en $x = 0$

$$\mathbf{j_s} = \frac{B_0}{\mu_0} \cos\frac{y\pi}{b}\hat{y}$$

Comme on est en 2D : on a

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j_s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En $y = 0, y = b$, on a $J_s = cte \implies \sigma = 0$

En $x = 0$ on a

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = \frac{B_0}{mu_0}\frac{\pi}{b}\sin\frac{y\pi}{b} = i\omega\sigma$$

<u>Autre approche : Discontinuité de E</u>

en $x = a$:

$$E_x \propto \frac{\partial B_z}{\partial y} \qquad \text{OK}$$

Remarque : Impédance

Quel est l'unité de $\frac{E}{H}$?

$$= \frac{Vm^{-1}}{Am^{-1}} = \Omega$$

l'impédance est alors donné par

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \mu_0 \frac{E_x}{B_y} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_?^2}{c^2}$$

Dans le vide $k = \frac{omega}{c}$, $Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 377\Omega$ (Exactement ? WOW !)

Raypnnement

Potentiels

<u>Statique</u>

$$\boldsymbol{\nabla} \times E = 0 \implies E = -\boldsymbol{\nabla} V$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \boldsymbol{\nabla}^2 B = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(M) d\tau}{PM}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} x \mathbf{B} = \mu_0 j = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 A$$

A n'est pas définis de manière unique. On a un choix de gauge sur la valeur du gradient

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{jauge de Coulomb}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Remarque

<u>La condition $\boldsymbol{\nabla} \cdot A = 0$ n'est pas trop forte</u>

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \varphi$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \varphi) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$$

Le résultat physique reste le même peut importe le gradient !

<u>dynamique</u>

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot B = 0 \implies \boldsymbol{\nabla} \times A$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times B = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A}$$

$$\mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{dB}{dt}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0 \implies \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\epsilon\mu_0\left(-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot E=\frac{\rho}{\epsilon_0}=-\boldsymbol{\nabla}^2V-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{cases}$$

On veut annuler le terme en V car c'est celui-là qui mélange les deux composantes

$$\mu_0 j=\epsilon_0\mu\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot A+\frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0}+\boldsymbol{\nabla}^2B=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot A)$$

<u>Gauge de Lorentz</u>

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot A+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{j}\\ \boldsymbol{\nabla}^2V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{cases}$$

Si on modifie maintenant le potentiel vecteur, on trouver

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\implies\mathbf{B}'=B$$

Cepdant, cela change $\mathbf{E}$, à moins que V change aussi. On veut que $\mathbf{E}=\mathbf{E}'$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'&=-\boldsymbol{\nabla}V'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\\&=\boldsymbol{\nabla}V'-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\mathbf{E}'=-\boldsymbol{\nabla}\underbrace{\left(V'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{V}-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

On a donc que V' doit être différent de V. V et $\mathbf{A}$ ne sont plus indépendant !

Potentiels retardées

Quand on travail en dynamique le potentiel ne s'applique plus instantanément. L'information voyage à la vitesse de la lumière

$$V(P,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(M,t-\frac{PM}{c})}{PM}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathbf{A}(P,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(M, t - \frac{PM}{c}}{PM} \mathrm{d}\tau$$

On appelle la quantité $t - \frac{PM}{c}$ le temps retardé.

Cette forme d'équation ne s'applique pas sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$