2022-09-09

À l'épisode précédent :

$$\partial_i A_j,\, \partial_i A^j$$

$$\nabla_i A_j = \partial_i A_j - \Gamma^k_{ji} A_k$$
$$\nabla_i A^j = \partial_i A^j + \Gamma^j_{kj} A^k$$

Γ est la <u>connection affine ou symbole de Chritoffel</u>

$$\Gamma^k_{ik}(x) = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right)$$

> $\Gamma_i j^k$ **n'est pas un tenseur**
> ${}_i A^j$ en est un !

Il est toujours possible de choisir un référentiel tel que $\Gamma^k_{ij} = 0\ \forall i, j, k$!

Théorème du quotient

si $B^{ij} A_j$ est un vecteur $\forall A_j$ qui est un vecteur alors B^{ij} est un tenseur.

Équation géodésique

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Cette équation est équivalente à

$$\dot{u}^i \Gamma^i_{jk} u^j u^k$$

$$Du^i = \mathrm{d}u^i + \Gamma^i_{jk} u^i \mathrm{d}x^k = 0$$

$$Du_i = \mathrm{d}u_i - \Gamma^k_{ij} u_k \mathrm{d}x^j = 0$$

On divise par $\mathrm{d}\lambda$

$$\begin{aligned} \implies \dot{u}_i - \Gamma^k_{ij} u_k u^i = 0 \\ = \dot{u}_i - \Gamma_{kij} u^k u^j \\ = \dot{u}_i - \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{ki} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) u^k u^i \end{aligned}$$

$$A_{kj} = -A_{jk} \qquad S^{kj} = -S^{jk}$$
$$A_{ki}S^{kj} = A_{jk}S^{jk} = -A_{kj}S_{kj} = 0$$

comme les deux derniers termes forment ensemble un tenseur anitsymétrique et qu'ils mutilplient un tenseur symétrique la contribution de ces termes s'annulent

$$0 = \dot{u}_{ii} g_{kj} u^k u^j$$

Si $g_k j$ ne dépend pas de x^i alors $u_i = \text{cst}$

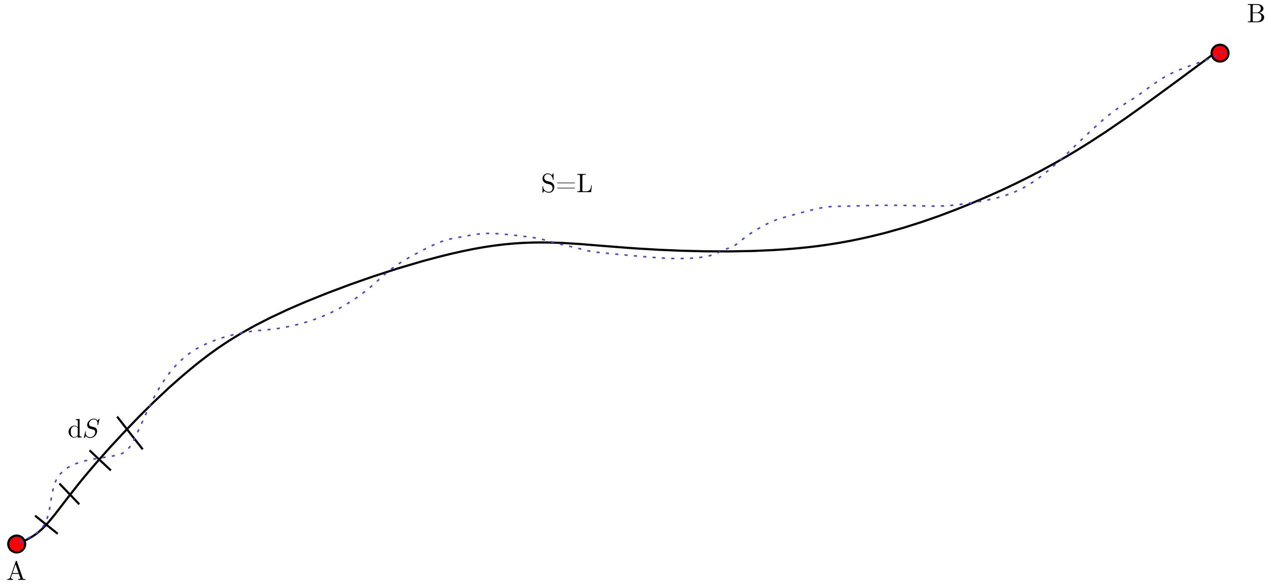

Figure 1 – Géodésique 2

$$S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}\lambda L(x, \dot{x}) = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \underbrace{\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i x^j}}_{|\mathbf{u}|} = \int_A^B \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^j} = \int_A^B \mathrm{d}s$$

$$x^i(\lambda) \to x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

$$\delta S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \frac{1}{2L} \delta(g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j) = \int_A^B \mathrm{d}\lambda \left\{ \frac{1}{2} \partial_k g_i j \dot{x}^i j \delta x^k + \dot{g}_{ij} \dot{x}^i \delta \dot{x}^i \right\}$$

$$g_{ij}\dot{x}^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} x^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_i j \dot{x}^i \delta x^j\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{ik}\dot{x}^k\right)\delta x^l$$

$$\dots$$

$$0 = \frac{1}{2}\partial_k g_{ij} u^i u^j - \left(\frac{1}{2}\partial_j g_{ik} + \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\right) u^j u^i - g_{ki}\dot{u}^j$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}\right)}_{-\Gamma_{kij}} u^i u^j - g_{kj}\dot{u}^i = 0$$

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} u^i u^j + \dot{u}^k = 0}$$

Vaisseau en accélération constante

$\boxed{\text{A}}$ $v(t), x(t)$ avec t le temps terrestre

4-accélération

$$a^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{(1-v^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-\mathbf{v}^2} + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{(1-v^2)^2}\right)$$

$$a_i a^i = -\gamma^4\left(\mathbf{a}^2 + \gamma^2\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-v^2)^{3/2}}\left(-2\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{(1-v^2)^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)$$

$$= -\gamma^6 a^2$$

$$\gamma^3 a = g$$

$$\frac{1}{\left(1-v^2\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$$

$$g\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\,v}{(1-v^2)^{3/2}}$$

Rapidité :

$$\gamma = \cosh\eta$$

$$v\gamma = \sinh\eta$$

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\cosh^2\eta}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\gamma^2}\mathrm{d}\eta$$

$$\int g\mathrm{d}t = \int \gamma\mathrm{d} = \int \cosh\eta\mathrm{d}\eta$$

$$gt + \cancel{cst} = \sinh\eta$$

$$v(t) = \tanh\eta = \cdots = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}$$

Comment restaurer les *vrai unités* ?

$$\frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$$

$$gt = \sinh\eta \implies g\mathrm{d}t = \cosh\eta\mathrm{d}\eta$$

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{g}\int \tanh\eta\cosh\eta\mathrm{d}\eta = \frac{1}{g}\int \sinh\eta = \frac{1}{g}\cosh\eta + \cancelto{0}{cst} = \frac{1}{g}(\cosh\eta - 1)$$

$\boxed{\text{B}}$

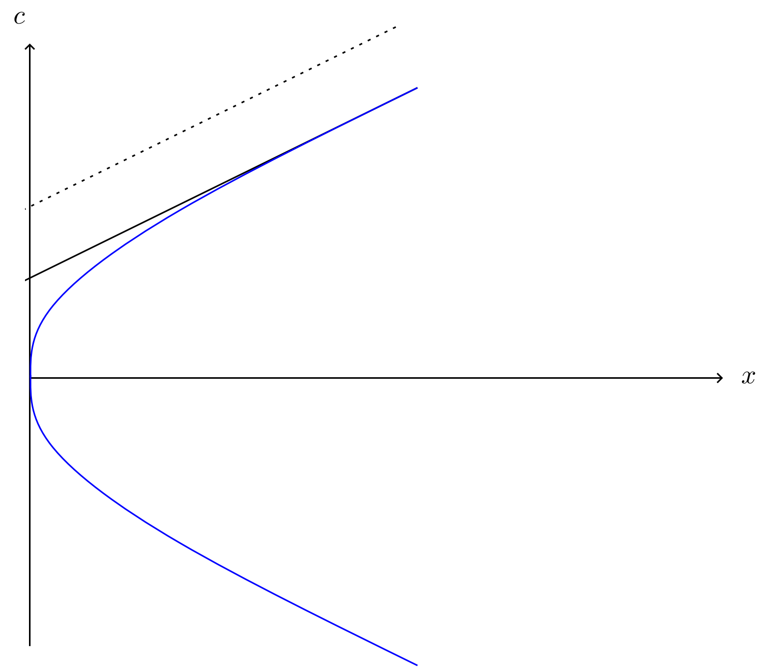

Figure 2 – Milles mots

$\boxed{\text{C}}$