1 Chapitre 0

On s'interesse à qualifier des courbes sans étudier les propriétés des fonctions. Par exemple, on veut considérer $y = x^2$ et $y^2 = x$ comme identique à roatition près malgré le fait qu'elle soit définis comme deux équations assez différentes.

On va distingues les propriétés intrinsèques et extrinsèques d'une surface.

Une propriété intrinsèques pourrait être détécté par quelqu'un vivant dans la surface.

La distance de longueure d'arc est une quantité intrinsèque à la sphère tandis que la *logueure cordale* est une quantitée intrinsèque.

La corubure gaussiènne est la plus importante quantitié intrinsèque associé à une surface.

La courbure gaussienne ne change pas si on la déforme de manière rigide.

1.1 Courbure d'un polyèdre

Défault d'angle :

$c(s) = 2\pi - \sum_{T \text{ face}} \theta_T(s)$

La caractéristique d'Euleur d'un polytope P est la quantité

$$\chi(P) = V - E + F$$

1.2 Théorème de Gauss-Bonnet discret

$$\sum_{s \in P} c(s) = 2\pi\chi(P)$$

Dém On compte de le défaut d'andre total de deux manières différentes

- Défault d'angle total $\sum_{s \in P} c(s)$
- Dans chanque face triangulaire de P, la somme des angles $= \pi$. Le défault d'angle total : $2\pi V - \pi F$

Chaque arrête à 2 faces

Chaque face à 3 arrêtes

$$2E = 3F$$

On compte la carinalité des $\{(a, f) | a \in f\}$

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(P) &= 2\pi(V - E + F) \\ &= 2\pi(V - \frac{3}{2}F + F) \\ &= 2\pi V - \pi F \end{aligned}$$

Ex : En utilisant le théorème démontré plus haut. et le fait que toute triangulation d'une sphère satisfait $\chi(P) = 2$ classifie les solides réguliers. (Les face sont des polygones r/guliers. Même nombre de faces à chaque sommet)

2 Chapitre 2

Définition : UNe fonction vectorielle $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ est C^k si f et ses k premières dérivées existent et sont continues sur (a, b). On dit que f est lisse si c'est vrai pour tout $k > 0$

Une courbe paramétré est une application C^3

$\alpha I \to \mathbb{R}^3$

Ex :

- $p \neq q \in \mathbb{R}^3$, on définit $V = q - p$ et $\alpha(t) = p + tv,\ t \in \mathbb{R}$

- $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ (le cerlce de rayon a)
- Courbe cubique sigulière : $\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad \alpha'(t) = (2t, 3t^2) \implies \alpha'(0) = (0, 0)$ non-régilère en $t = 0$

Cours 2

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

<u>Courbe du jour</u> : Cycloïde : Trajectoire d'un point sur une roue qui tourne sans gilisser
<u>Paramétrisation</u> : $\alpha(t) = \underbrace{(tr, r)}_{\text{Centre du cerlce}} + (-r\sin t, -r\cos t)$

<u>Def :</u> La <u>longeur d'arc</u> d'une courbe $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^{\nVDash}$ est $l(\alpha) = \int_a^b ||a'(t)||\mathrm{d}t$
$\tilde{a} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$ est une <u>reparamétrisation</u> de α

Cours 3

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

courbe régulière : $\alpha' \neq 0 \forall t$

<u>longeure d'arc</u>

$$\mathscr{L} = \int_a^b ||a'(t)||\mathrm{d}t$$

Approximtion avec une partition

$P = (t_0, t_1, ...t_n)$

$$\mathscr{L}(\alpha, P) = \sum_{i=0} ||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})||$$

<u>Prop</u>

Si alpha est C^1 alors α est rectifiable et

$\mathscr{L}(\alpha) = sup_p \mathscr{L}(\alpha, P)$

On a montré que pour toute partition P : $\mathscr{L}(\alpha, P) \leq \int_a^b ||\alpha(t)\mathrm{d}t||$

<u>Lemme</u> : $|| \int_a^b \alpha(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_a^b ||\alpha(t)\mathrm{d}t$

Reste à montrer que $\forall \epsilon > 0 \exists P t.q.$

$$\mathscr{L}()\alpha, P) \geq \int_a^b |\alpha(t)|\mathrm{d}t - \epsilon$$

Continuité uniforme de alpha prime

$\exists \delta > 0$ t.q. si

<u>Proposition :</u> Une courbe paramétré α admetant une reparamétrisation par longeur d'arc ssi elle est régulière

<u>Dem</u> ($\implies$)

Si α admet une reparamétrisation par longeure d'arc $\tilde{\alpha}$

et $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ $\varphi : [a, b] \to [c, d]$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(\varphi(t)) \\
\tilde{\alpha}'(t) &= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\underbrace{||\tilde{\alpha}'(t)||}_{1} &= ||\alpha'(\varphi(t))|||\varphi'(t)|| \\
&\implies ||\alpha'(\varphi(t))|| \neq 0
\end{aligned}
$$

$(\Longleftarrow)$

Trop long, trop loin

Exemple : Calculer la paramétrisation par longeure d'arc d'une hélice

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)\ (a, b > 0)(t \in \mathbb{R})$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_0^t ||\alpha'(x)||\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t (-a\sin x, a\cos x, b)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}x \\
&= t\sqrt{a^2+b^2} \\
&\implies \Psi^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\implies \tilde{\alpha}(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})
\end{aligned}
$$

Courbe du jour : Caténoide

Repère de Frenst

Un repère adapté à la courbe.

Le premier vecteur est le vecteur tangeant.

Le second vecteur est le vecteur *accélération*. En effet, il est toujours pependiculaire au déplacement dans le cas d'une courbe paramétré par longeure d'arc (vitesse constante)

Le troisième est celui qui reste $(\times)$

Lemme : Soient $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differentiable. Si $f(t) \circ g(t)$ est constante alors $f'(t) \circ g(t) = -f(t) \circ g('t)$

Dem $(f(t) \circ g(t))' = 0 \implies f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g('t) = 0$■

Soit α paramétré par longueure d'arc

$$T(s) := \alpha(s)$$

$$k(s) := ||T'(s)|| = ||\alpha''(s)||$$

est la courbure de α au point $\alpha(s)$

$$N(S) := \frac{T'(s)}{k(s)}$$

On dur que α est birégulière si $k(s) \neq 0 \forall s$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

T, N, B est le <u>repère de Frenet</u> de α

$$||T(s)|| = 1 T(s) \cdot T(s) = 1 T(s) \cdot T'(s) = 0 \implies k(s) T(s) \cdot N(s) = 0$$

$$T, N, B \text{ sont } \perp$$

$$||B|| ||T \times N|| = ||T|| |N|| sin(\phi) = 1$$

Orthonormé !

On a, par définition que

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) N'(s) \cdot N(s) = 0 N'(s) \cdot B(s) =: \tau(s)$$

τ :torsion

...

On obtiens les <u>Équations de Frenet-Serra</u>

$$\begin{aligned} &T'(s) = k(s)N(s) \\ &N'(s) = k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ &B'(s) - \tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Cours 4

Jean-Baptiste Bertrand

19 janvier 2022

Rappel

- Une courbe est régulière ($\alpha'(t) \neq 0 \iff$) elle peut être oaramétrisé pr longeur d'arc ($||\tilde{\alpha}(s)|| \equiv 1$)
- Repère de Frenet de α paramétré par longeur d'arc

$$T = \alpha'(s),\ N = \frac{T'(s)}{||T'(s)||}(\|T'(s) = k(s)\|\,),\ B = T \times N$$

- Courbe birrégulière $\rightarrow k(s) \neq 0$
- Équations de Frenet-Serret

$$\begin{array}{rccc} T' = & & kN & \\ N' = & -kT & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{array}$$

- $N'(s) \cdot B(s) = \tau(s)$

La torsion (τ) mesure à quel point on sort d'un plan. La courbure (k) mesure à quel point on dévie d'une droite.

Exemple : Hélice

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right)$$

où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

est paramétrisé par longueure d'arc

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{q}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right)$$

$$T'(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|\,\frac{a}{c^2}$$

$$N = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

$$B = T \times N = \left(\frac{b}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\right)$$

$$N'(s) = \left(\frac{1}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

$$\tau(s) = N' \cdot B = \frac{b}{c^2}\sin^2(\frac{s}{c}) + \frac{b}{c^2}\cos^2(\frac{s}{c}) + 0 = \frac{b}{c^2}$$

Remarque

La courbure d<une coubre de $\mathbb{R}^3$ est <u>toujours positive</u> (C'est une nrome) mais la torsion <u>a un signe</u>. La torsion renseigne sur la chiralité.

$$T' = \kappa N \checkmark$$

$$\ldots$$

<u>Courbes non-paramétrées pas longueur d'arc</u>

Soit α une courbe birrégulière. On note $s(t)$ la reparamétrisation par longueur d'arc.

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha(s(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\alpha(s(t))}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{*}$$

$$\|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\| = 1\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

la fonction $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t)$ est la vitesse de α

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = T(s(t))v(t)$$

Pour calculer N

$$\frac{\mathrm{d}T(s(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T(s(t))}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)$$

$$\implies N(s(t)) = \frac{1}{v(t)}\frac{\mathrm{d}T(s(t)}{\mathrm{d}t}$$

On peut ensuite calculer B et τ

Exemple

$$\alpha(t) = \big(3t - t^3, 3t^3, 3t + t^3\big)$$

$$\alpha'(t) = \big(3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2\big) = 3\big(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\big)$$

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| \ = \cdots = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$T = \frac{\alpha'}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}\big(1 - t^2, 2t, 1 + t^2\big)$$

$$\kappa N(t) = \frac{1}{v(t)} T'(t) = \cdots = \frac{1}{6}\left(\frac{-4t}{1+t^2}, \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$\kappa(t) = \|k(t)N(t)\| \ = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

On calcul B, pas le temps de retranscrire

Cours 5

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

La dernière fois, on s'interessait à ce qui se passe quand un courbe n'est pas paramétrisé par longueur d'arc. On suppose qu'il existe un paramétisation par longueur d'arc : $\alpha(s(t))$ où s est la longueur d'arc

$$s(t) = \int_0^t ||\alpha(s(x))||\mathrm{d}x$$

$$s'(t) = ||\alpha(s(t))'|| = v(t)$$

$$\alpha(s(t))' = \alpha'(s(t))s'(t) = T(s(t))v(t)$$
$$\alpha(s(t))'' = T'(s(t))v(t)^2 + T(s(T))v'(t) = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)^2 + v'(t)T(s(t))$$

Pour calculer N et κ sans passer par la longeure d'arc, on utilise

$$\kappa(s(t))N(s(t)) = \frac{\alpha(s(t))'' - v'(t)T(s(t))}{v(t)^2}$$

<u>Exercice :</u> Finir l'exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$$

On devrais trouver

$$\kappa(s(t)) = \tau(s(t)) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

<u>Proposition :</u> La courbure d'une coure α (non-paramétrée par longueur d'arc) est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|}^{2}$$

<u>Démonstration</u>

On a, par ce qu'on a fait ci-haut

$$\alpha(s(t)) = vT$$
$$\alpha(s(t))'' = v'T + \kappa v^2 N$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3\kappa(T \times N) = v^3\kappa B$$

$$\implies \|\alpha' \times \alpha''\| = v^3\kappa$$
$$\implies \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \kappa \quad \text{car } v = \|\alpha'\|$$

<u>Conséquence des formules de Frenet-Serret</u>

<u>Prop</u> : Une courbe est un droite $\iff \kappa = 0$

<u>Démonstration</u> ($\implies$) Si α est une droite

$$\alpha(s) = \rho_0 + sV$$
$$\alpha'(s) = v - T(s) \implies T'(s) = 0 \implies \kappa = 0$$

($\impliedby$) si $\kappa(s) = 0 \forall s$

$$T'(s) = 0 \implies T(s) = T_0$$

$$\alpha(s) = \int_0^s T * (x)\mathrm{d}x = sT_0 + \rho_0$$

<u>Exemple</u> : Que peut-on dire d'une courve α dont toutes les tangeantes passent par un même point ?

Sans pertes de généralité, les tangeantes passent par $\vec{O} \in \mathbb{R}$

$$\implies \alpha(s) + \lambda(s)T(s) = 0$$
$$\implies T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = 0$$
$$\implies (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s) + \lambda(s)(\kappa(s)N(s)) = 0$$

$$\implies 1 + \lambda'(s) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0$$
$$\lambda(s) = -s + c$$
$$\lambda = 0 \text{ si } s = c \implies \kappa = 0 \text{ sauf si } \cdots$$

Prop 1)Une courbe birrégulière α est planaire $\iff \tau \equiv 0$. 2) Les courbes planaires de courbure constante sont des cercles.

Démonstration 1) $\implies$ Si α est planaire, T et N engendrent le plan qui contiens α. Cela signifique que $T \times N = B$ est constant. C'est le vecteur normal au plan qui contient la courbe α.

$$\implies B'(s) = 0 = -\tau N \implies \tau = 0$$

Donc la torsion est nulle ■

($\Longleftarrow$) Inveserment, si $\tau \equiv 0$

$$B'(s) = 0 \implies B(s) = B_0 (est constant)$$
$$\implies (\alpha(s) \cdot B(s))' = T(s) \cdot B(s) + \alpha(s) \cdot B'(s) = 0$$

$$\alpha(s) \cdot B(s) = \alpha(s) \cdot B_0 = C$$

C'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}$ ■

2) $\Longleftarrow$

Un cercle est paramétré par longeur d'arc avec l'équation suivante :

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$
$$\alpha'(s) = T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

$$\implies \kappa = \|T'(s)\| = \frac{1}{r} \text{ est constante}$$

Cela donne une interprétation à la courbure qui est que en chaque point, il existe un cercle de rayon r qui est une meilleur approximation de la courbe.

$$\implies$$

Soit $\alpha(s)$ ime courbe planaire avec

$$\kappa_s = \kappa_0$$

Commme on sait déja que cela doit ête un cercle, on s'aide en cherchant le centre du cercle.

On pose $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0} N(s)$

$$\beta'(s) = T(s) = \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa T + \tau B)$$

$$\|\alpha(s) - \beta(s)\| = \left\| \frac{1}{k_0} N(s) \right\| = \frac{1}{k_0}$$

$\implies \alpha(s)$ est sur le cercle de rayon $\frac{1}{k_0}$ centré en B_0

Courbe du jour : Tractrice UN chien enterre un os à $(0,1)$, son maître à $(0,0)$ la tire par une laisse en de déplaçant vers $x > 0$. Comme le chien tire très for, la laisse est toujours tangenante à la trajectoire du chien.

Soit θ l'angle formé par la laisse et l'axe des x

$$\alpha(t) = (t + \cos\theta(t), \sin\theta(t))$$
$$\alpha'(t) = 1 - (\sin\theta)\theta', \cos\theta\theta'$$

La laisse est dans la direction $(\cos\theta, \sin\theta)$. Comme la trajectoire α est tangeante à la laisse.

$$\frac{\cos\theta\theta'}{1 - (\sin\theta)\theta'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\cos\theta\theta' = \sin\theta - (\sin^2\theta)\theta'$$
$$\theta' = \sin\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sin\theta$$
$$-\ln(\csc\theta + \tan\theta) = t + c \quad t = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \to c = 0$$

$$\alpha = (-\ln(\csc\theta + \tan\theta) + \cos(\theta), \sin\theta) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

En reparamétrisant

$$\alpha(t) = (t - t\sinh(t), \sinh(t))$$

Forme locale canonique d'une courbe

Proposition : Soit α une courbe birrégulière paramétrée par longueur d'arc t.q. $\alpha(0) = 0$ alors

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^2 + o(s^2))T(o) + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \right) \cdots$$

C'est vraiment laid, c'est loin pis il y a du soleil, sorry.

Démonstration Le théorème de Taylor nous dit

$$\alpha(s) = sa'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^2}{6}\alpha'''(0) + O(s^4)$$

$\alpha'(0) = T(0)$ $\alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$ $\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa'(0)N(0) + \kappa_0\tau_0 B(0)$

$$\implies \alpha(s) = \left(s - \frac{s^2}{6}\kappa_0^2 + O(s^3)\right)T(0) + \left(k_0\frac{s^3}{2} + k_0'\frac{s^2}{6} + o(s^3)\right)N(0) + \left(\kappa_0\tau_o\frac{s^3}{6} + O(s^3)\right)B(0)$$

Le théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Si j'ai deux courbes donc je connais la même courbure est la même torsion en tout point alors c'est la même courbe à une isométrie près.

Montrons d'abord que les isométies de $\mathbb{R}^3$ préservent la courbure est la torsion.

Rappel Une isométrie de $\mathbb{R}^3$ e st de la forme $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ où $A \in O(3) \iff AA = \text{id},\ b \in \mathbb{R}^3$

Une isométrie est directe où une transformation directe si $A \in SO(3) \iff \det A = 1$

Soit α une courbe paramétré par longeure d'arc

On définit

$$\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$$

$$\begin{gathered} {\alpha^*}'(s) = A\alpha(s) \\ T'(s) = AT(S) \\ {T^*}'(s) = AT'(s) \\ \|\kappa^* N^*(s)\| = \|\kappa(s)AAN(s)\| \end{gathered}$$

$$\kappa^* = \kappa$$

$$B^* = T^* \times N(AT) \times (AN) = A(T \times N) = AB$$

$$\begin{gathered} (B^*)' = -\tau^* N^* \\ (AB)' = AB' = - \implies \tau = \tau^* \end{gathered}$$

Rappels

Fourmule de la courbure $\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$$\kappa(s) = - \iff \text{ segment de droite}$$

$$\tau = 0 \iff \text{ la courbe est planaire}$$

$$\tau(s) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa(s) \equiv c \iff \alpha \text{ portion de cercle de rayon}$$

Forme locale canonique (Taylor)

Isométrie $x \mapsto Ax + b \quad AA^t = 1$

La courbure et la torsion sont invarientes par isométries

Pour A une isométrie directe $A\vec{u} \times A\vec{v} = A(\vec{u}\vec{v})$ En général $A\vec{u} \times A\vec{v} = \det(A)A(\vec{u} \times \vec{v})$

Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Deux courbes C, C^* dans $\mathbb{R}^3$ de courbure non-nulle diffèrent par une isométrie directe $\iff$ ellse ont la même courbure et torsion ($\kappa = \kappa^*$ et $\tau = \tau^*$)

Dém Soit α, α^* des courbes paramétrées par longueures d'arc de C, C^*

Prenons A, l'unique matrice orthogonale t.q.

$$\begin{gathered} AT(0) = T^*(0) \\ AN(0) = N^*(0) \\ AB(0) = B^*(0) \end{gathered}$$

> Rappel : si A enovie une base orhtonormée vers une base orthonormée alors A est orthogonale.
> Si A envoie une base positiviement orienté à une base positiviment orientée alors $\det\{A\} > 0$

Soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $A \cdot \alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Définissons $I(x) = Ax + \vec{b}$ et $\tilde{\alpha}(s) = I(\alpha(s)) = A\alpha(s) + b$

reste à montrer que $\tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s)\forall s$

On a $\tilde{\alpha}(0) = A\alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Et comme I est une isométrie

$$\tilde{T}(0) = AT(0) = T^*(0)\tilde{N}(0) = AN(0) = N^*(0)\tilde{B}(0) = AB(0) = B^*(0)$$

Comme κ, τ sont ivarients par isométries directe

$$\kappa^*(s) = \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)\tau^*(s) = \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$$

Définissons une fonction $f(s) = \tilde{T}(s) \cdot T^*(s) + \tilde{N} \cdot N^* + \tilde{B} \cdot b^*$

$f'(s) =$ C'est vraiment long à écrire, fuck ça, règle de chaine mdr $= 0$

$$\implies f(s) \equiv C \text{ mais } f(0) = 1 + 1 + 1 = 3 \implies f(s) = 3$$

Par l'inégalité de Chauchy-Swatzsdfjhh ($|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$)

$\tilde{T}(s) \cdot T^*(s) \leq 1$

$\tilde{N}(s) \cdot N^*(s) \leq 1$

$\tilde{B}(s) \cdot B^*(s) \leq 1$

On en conclut que les vecteur du repert de frenet tilde et étoile sont les mêmes

En particulier $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha^{*\prime}(s) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) + \vec{v}_0$ mais $\vec{v}_0 = 0$ car $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$

Question : Étant donné deux donctions $\kappa(s), \tau(s)$, existe-t-il une courbe α ayant κ, τ comme courbure et torsion ?

Oui ! (avec suffisement de régularité)

Pour trouver α, on résout le système

$$\begin{array}{lllll} T' & = & & \kappa T & \\ N' & = & -\kappa T & & \tau B \\ B' & = & & \tau B & \end{array}$$

puis on intègre T. On sait qu'une solution existe grace au théorème d'exsitance des solutions d'éqiation différentielles.

Courbes planaires

Théorème [inégalité isopérimétrique] :

Soit C une courbe planaire simple fermée de longeure l et A est l'aire de la région bornée par C. Alors $l^2 - 4\pi A \leq 0$ Avec $= \iff C$ est un cercle

Rappel

Théroème de Greene :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R rot(\mathbf{F})\mathrm{d}A$$

En particulier, aire$(R) = \int_C = \frac{1}{2} \int_c (yx) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int xy' - yx' \mathrm{d}t$

α paramétrée par longeure d'arc de C $\bar{\alpha}$ paramétré du cercle

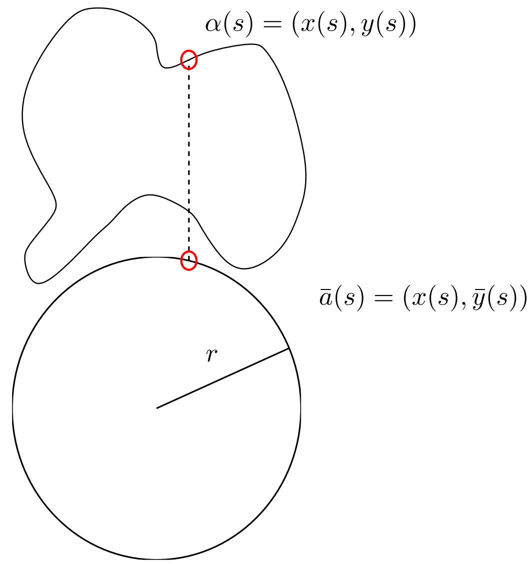


FIGURE 1 – parametrisation isoperimetrique

Calculons

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s)\mathrm{d}s + \int_0^l -\bar{y}(s)x'(s)\mathrm{d}y$$

Fuck les notes ; dodo. Aussi, criss que mon shéma est laid, faut vraiment que j'aprène à utiliser inkscape

Indice de rotation et Umalufsatz

α une courbe planaire

On peut assigner un signe à la courbe.

On définit T comme d'habitude soit $T(s) \equiv \alpha'(s)$ mais $N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

Où $R_{\frac{\pi}{2}}$ est une rotation de $\frac{\pi}{2}$. ON a donc

$$T(s) = (x(s), y(s)) \implies N(s) = (-y(s), x(s))$$

et

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s)$$

Fenet-Seret dans $\mathbb{R}^2$:

$$T'(s) = \kappa(s) N(s)$$
$$N'(s) = -\kappa(s) T(s)$$

<u>autres interprétation de $\kappa(s)$</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, on peut toujours écrire $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$

$$T'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s). \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \theta'(s) M(s)$$

On comprend donc que $\theta'(s) = \kappa(s)$

On peut donc définir $\theta(s)$ comme

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t) \mathrm{d}t + \theta(0) \implies \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \kappa(t) \mathrm{d}t$$

Si α est une courbe <u>fermée</u> ($\alpha(s+L) = \alpha(s)$) alors on a que

$$\theta(L) = \theta(0) = 2k\pi$$

On appelle $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) \mathrm{d}t = R$ l'<u>indice de rotaition</u>

Rappels

Pour une courbe de $\mathbb{R}^2$, la courbure à un signe

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$$

où $N(s) = R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$"

L'indice de rotation d<une courbe fermée (periodique) est

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \mathrm{d}s$$

où $R \in \mathbb{Z}$

Umlaufsatz (tangeantes tournantes). Si α est <u>simple</u> (pas d'auto-intersection) $\mathcal{R}(\alpha) = 1$

Si on écrit $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$, alors $\kappa(s) = \theta'(s)$

Chapitre 2 : Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On va maintenant parler des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

<u>Rappels</u> : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$Df\Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_1} & \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_p$$

La différentiel de f en p

$U \subset \mathbb{R}^n$ est <u>ouvert</u> ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q. $B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq U$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$. UN sous-ensemble $U \subseteq S$ est <u>ouvert dans S</u> ssi $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$ t.q $B_\epsilon(\vec{x}) \bigcap S \subseteq U$

<u>Exemple</u> $S^2 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

ON peut parametriser une partie de S^2 à l'aide de <u>coordonn.es sphériques</u>

$(0, \cos\varphi, \sin\varphi)^T, \quad -\frac{pi}{2} \leq \varphi \geq \frac{pi}{2}$

Rotation autour de θ

$$R_\theta = \cdots$$

Les pôles ne sont pas dans notre paramétrisation

<u>Déf</u> Une application $p : I \subseteq\to \mathbb{R}^3$ (U Ouvert) est une <u>carte de surface lisse</u> si elle est lisse, bijective et Df est de plein range $\forall p \in U$

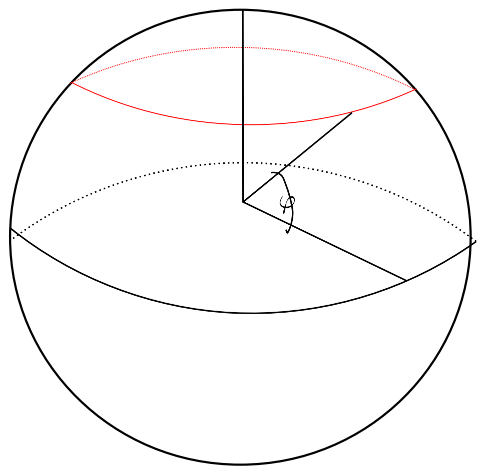


Figure 1 – parametrisation shperique

Déf Une surface lisse $S \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-ensemble t.q tout point $\vec{x} \in S$ est contenue dans l'image d<une carte de surface lisse $p : U \to S$ t.q. p est une homéomorphisme (application bijective continue d'inverse continu) entre u et une ouvert de S

UNe collection de paramétrisation $p_i : U_\mathrm{i} \to S$ t.q. $p_i(u_i)$ recouvrent S s<appelle un atlas

Exemple Pour la shpère, on peut construitre un atla avec 2 cartes de surfaces lisses

On peut aussi construire un atlas de S^2 en utilisant des "projections inverses"

$$p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - -x^2 - y^2})$$

On doit prendre un total de 6 hemi-sphere pour couvrir toute la sphère de cette manière. Sinon il manque toujours de points sur l'équateur.

Exemple 2 le graph d<une fonction lisse $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une carte de surface lisse

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \end{pmatrix}$$

toujours de premier rang

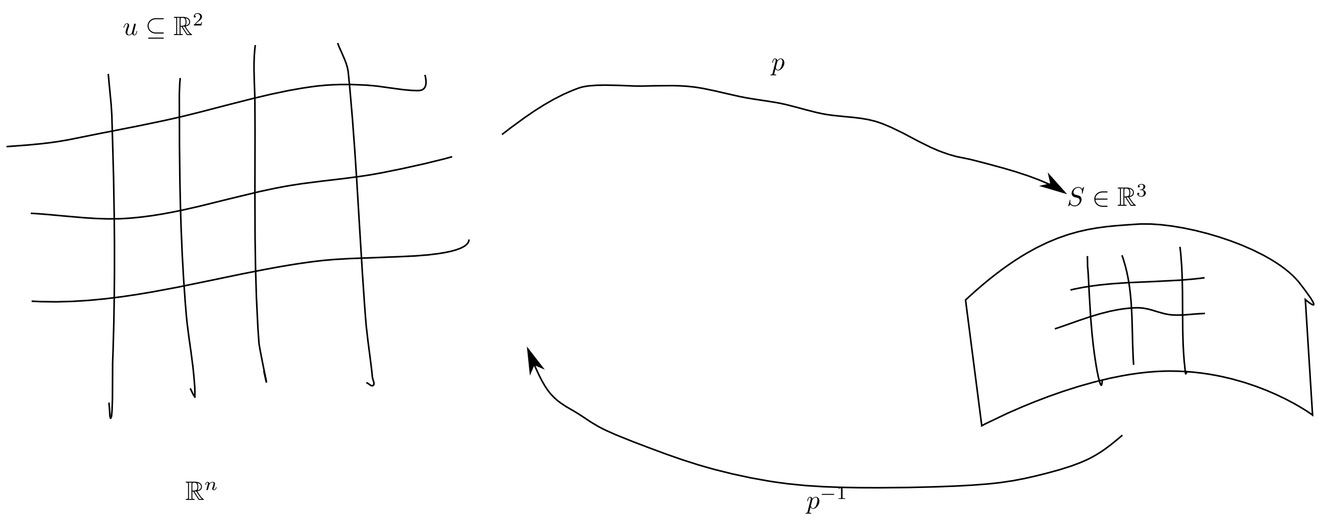


FIGURE 2 – mapping dune surface

<u>Exemple 3 : l'hélicoïde</u> est une hélive dans $\mathbb{R}^3$ à laquelle on ajouter des segments horizontaux

$$p(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v0, bv) \quad (b \geq 0)$$

Domaine $U \geq 0, v\ in \mathbb{R}$

Une seule carte forme un atlas

$$Dp = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ \sin(v) & u\cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On notes les colonnes de Dp par p_u et p_v

<u>Exemple 4 : Le toree</u>

$$p(u,v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos u)\cos v \\ (a + b\cos *u)\sin v \\ b\sin s \end{pmatrix}$$

Peut être couvert avec 4 cartes en changeant le domaine de p de $\pm\pi$

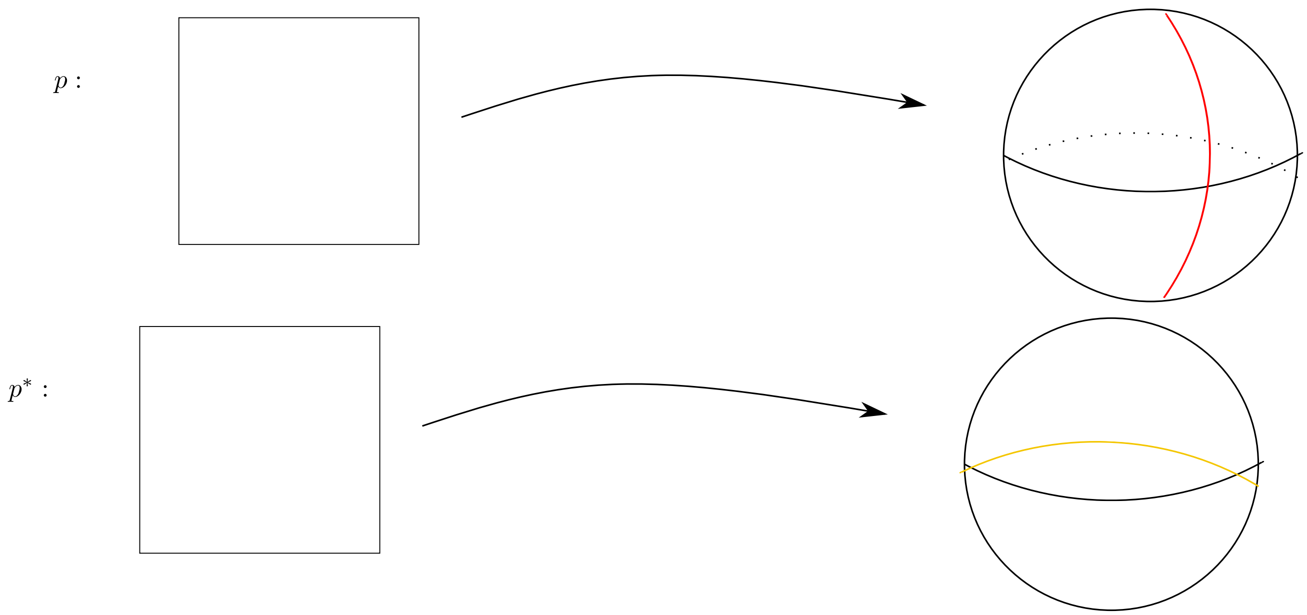


FIGURE 3 – mapping de la sphère

Plus généralement, si $\alpha : [a, b] \to bbR3$ est une courbe régulière dans le plan y, z avec $y.0$. La surface de révolution associée est une surface lisse.

Si $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$

$$p(t,) = \begin{pmatrix} f(t)\cos\theta \\ f(t)\sin\theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

<u>Déf :</u> Soit $f : \mathbb{R}^3 < to\mathbb{R}$ une fonction lisse. Un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $Df\big|_{\vec{x}} = 0$ est un <u>point critique</u> et la valeur associée $a = f(\vec{x})$ est une <u>valeur critique</u> . UNe valeur $a \in \mathbb{R}$ est <u>régulière</u> si elle n'est pas critique.

<u>Exemple :</u> $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

le seul point critique est $(0, 0, 0)$. La seule valeur critique est $f(0, 0, 0) = 0$. Toutes les valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sont des valeurs régulières.

On a $S^2 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)^T\} \quad \text{pas une surface lisse}$$

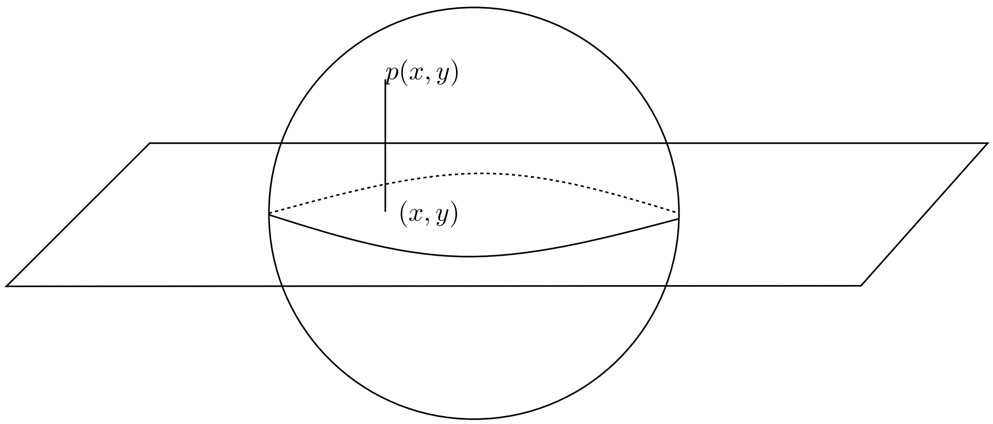


FIGURE 4 – projection inverses

Proposition Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est lisse et $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de f, alors $S = f^{-1}(a)$ est une surface lisse $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = a\}$ Rappel Théorème de la fonction inverse Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable $\mathcal{C}^K$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Df\big|_{\vec{x}}$ est inversible. Alors il existe des ouverts $U \ni \vec{x}$ $V \ni F(\vec{x})$ t.q. $F : U \to V$ est inversible d<inverse de classe $\mathcal{C}^k$

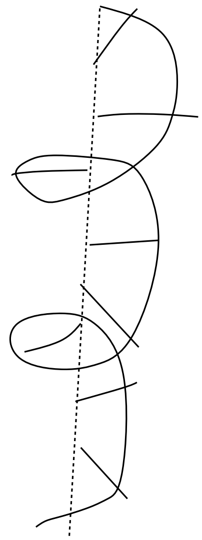


Figure 5 – helicoide

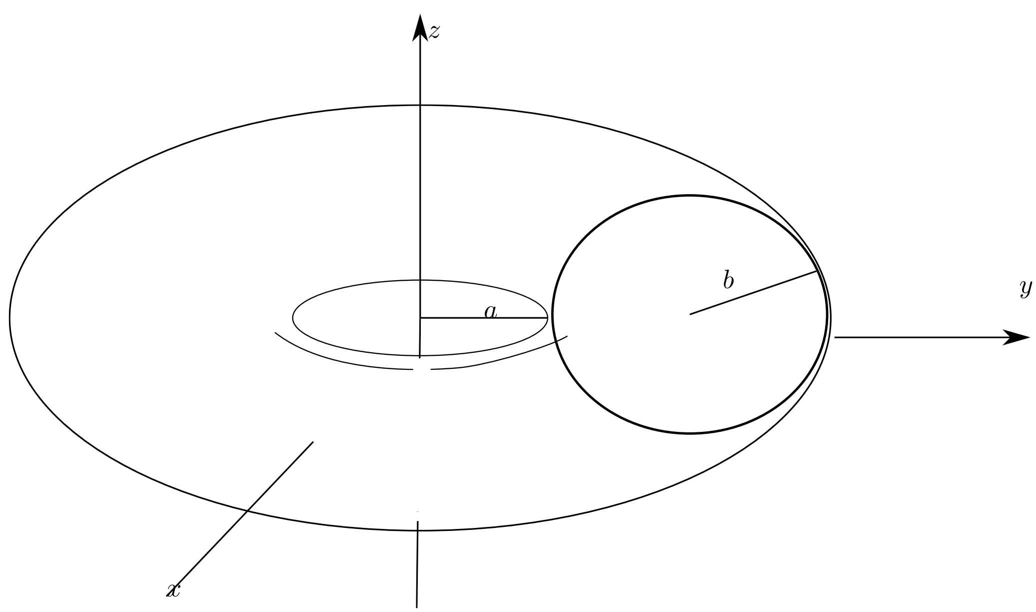


Figure 6 – parametrisation du tore

Rappels

- Carte de Surface : $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$
  lisse
  homéomorphisme entre U et $p(U)$
  $Dp = (p_u|p_V)$ rang maximal

- Surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$
  tout point est contenu dans la carte de surface
- Point régulier p de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $Df\Big|_p \neq 0$
  valeur régulière : $f(p)$
  valeur critique $\iff$ non-régulière

Proposition Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière. alors $f^{-1}(a)$ est une surface lisse

Dém : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $f(\vec{x}) = a$

Comme a est une valeur régulière, $df\Big|_{\vec{x}} \neq 0$

$\implies$ un des dérivé partitiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$

Définissons $F : \mathbb{R}^3 < to \mathbb{R}^3$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)\Bigg|_{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Bigg|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut applique le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts }, U \ni \vec{x}, \quad V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q. $F : U \to V$ est inversible et F^{-1} est lisse.

Soit W la projection de V sir le plan (x, y)

$$p : W \to S \quad (x,y,z)^T \to F^{-1}(x,y,z)^T \in f^{-1}(a)$$

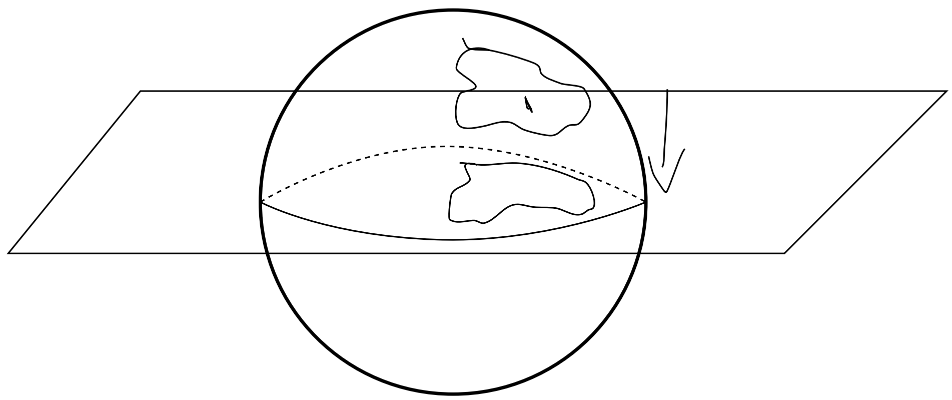


Figure 1 – bingobong

comme $DF^{-1}\,\big|_{F(\vec{x})} = (DF\big|_{\vec{x}})^{-1}$

$Dp =$ deux premires colonnes de DF^{-1} est de range maxmial $\blacksquare$

Exemple

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est $(0,0,0)$

La seule valeur critique est $f(0,0,0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x,y,z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

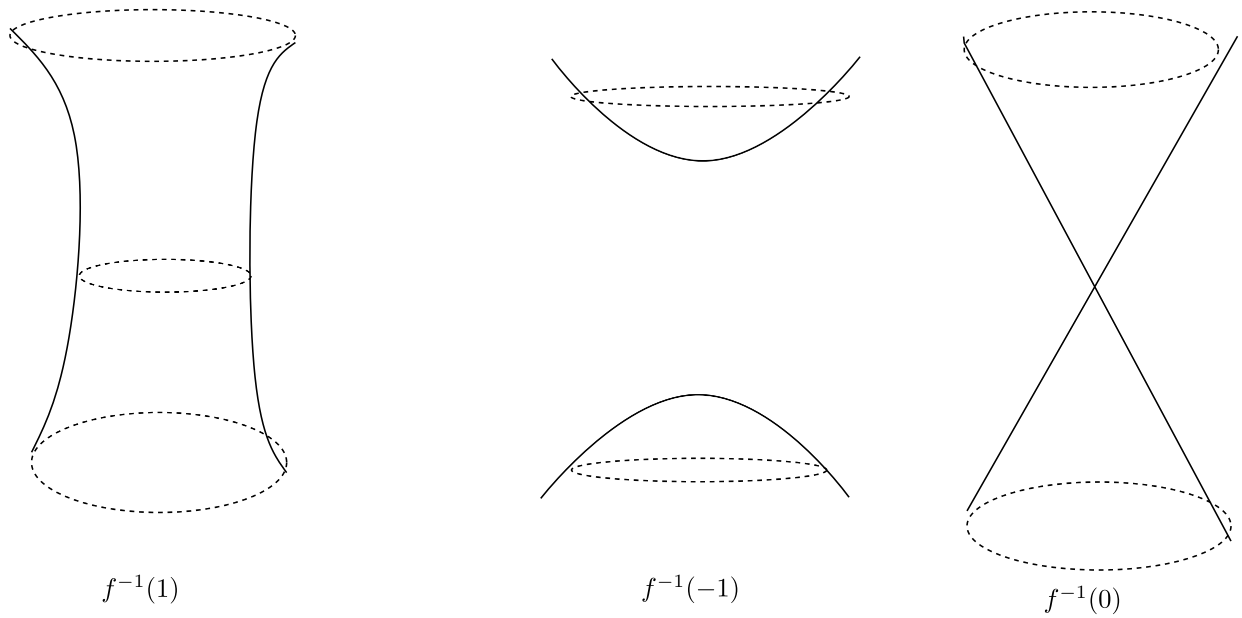


FIGURE 2 – Exesmples de fonctions

première forme fondamentale

Définition Étant donnée une carte de surface lisse p, la première forme fondamentale ou métrique est

$$I_{u,v} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Définition : Deux surfaces S, S^* sont localement isométrique s'il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et des paramétristion p, p^* t.q. $I\big|_{(u,v)} = I^*\big|_{(u,v)}$

Exemple : Considérons S Le plan x, y paramétrisé par $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre S^* paramétrisé par $p^*(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1,0,0), p_v = (0,1,0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0,0,1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

$\implies S$ est localement isométrique à S^*

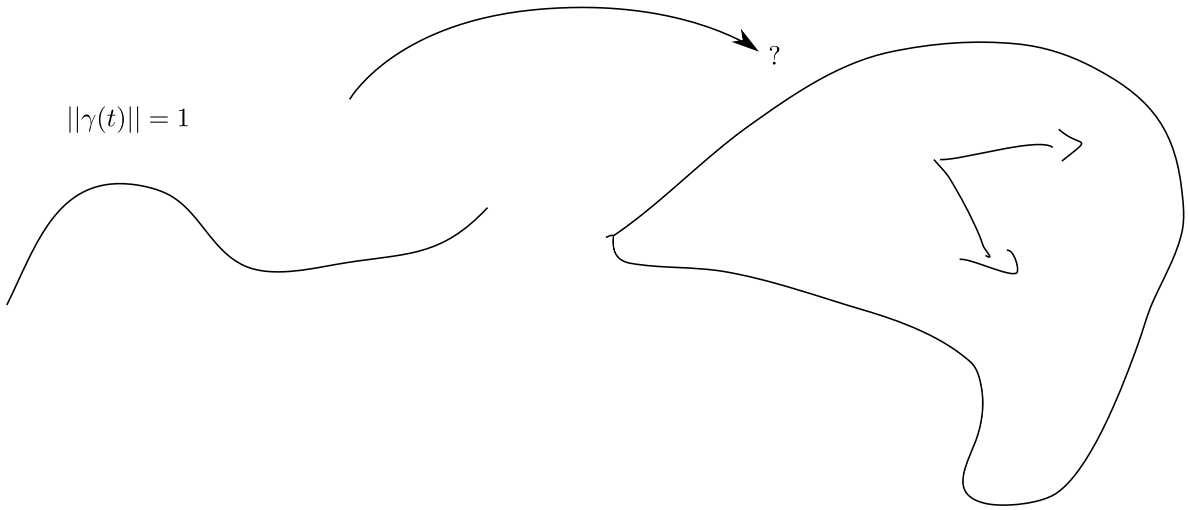


FIGURE 3 – forme fondamentale

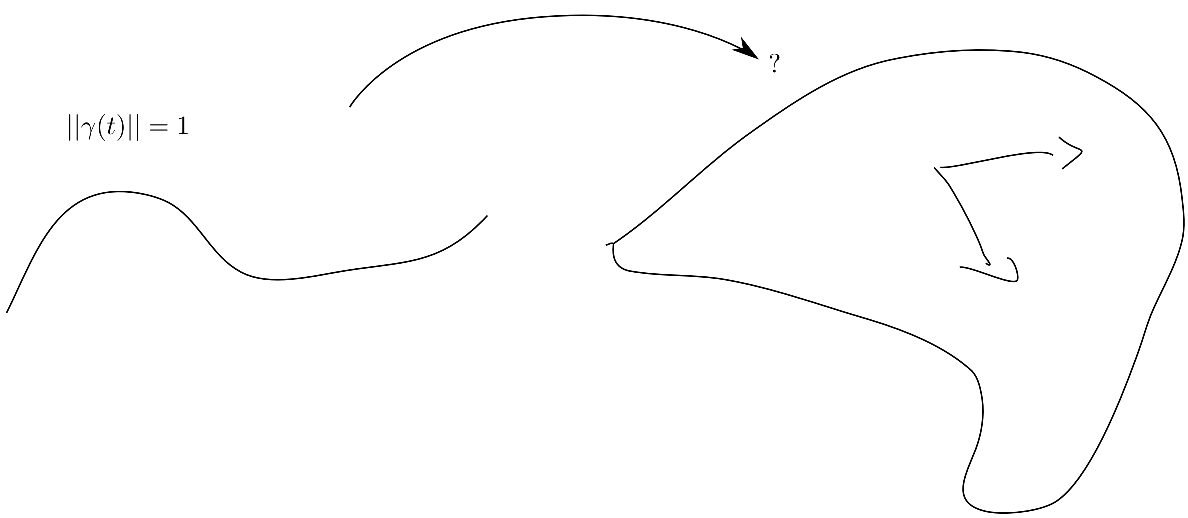


FIGURE 4 – forme fondamentale

Rappels

Première forme fondamentale

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale est une forme bilinéaire symétique définie positive (produit scalaire) sur T_xS : l'espace tangeant au point $x \in S$.

C'est $X, Y \in T_xS$

$$I_x(X.Y) = X \cdot Y$$

Dans la base p_u, p_v la matrice de I est

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si $X = ap_u + bp_v \quad Y = cp_u dp_v$

$$I_x(X, Y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Rappels (encore)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$Df\Big|_x = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x_1} & \cdots & \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x_n} \end{pmatrix}$$

$$D_v f\Big|_x = Df\Big|_x \cdot v$$

est la dérivée directionnelle de f dams la direction v.

$$lim_{t \to o} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Rèlge de chaîne :

$$D(g \circ f)\ \Big|_x = Dg\Big|_{f(x)} \cdot Df\Big|_x$$

Remarge

Soit un chemain $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\gamma(0) = x; \quad \gamma'(0) = v$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$D(f \circ \gamma)\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} \cdot D\gamma\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} \gamma'(0) = Df\Big|_x \cdot v = D_v f\Big|_x$$

Dérivée directionelle de f dans la direction v. Dépend <u>uniqument</u> de $gamma(0)$ et $\gamma'(0)$

Si $p : U \to S$ est une carte locale de surface et que γ est un chemin dans U, alors $p \circ \gamma$i est un chemain dans S.

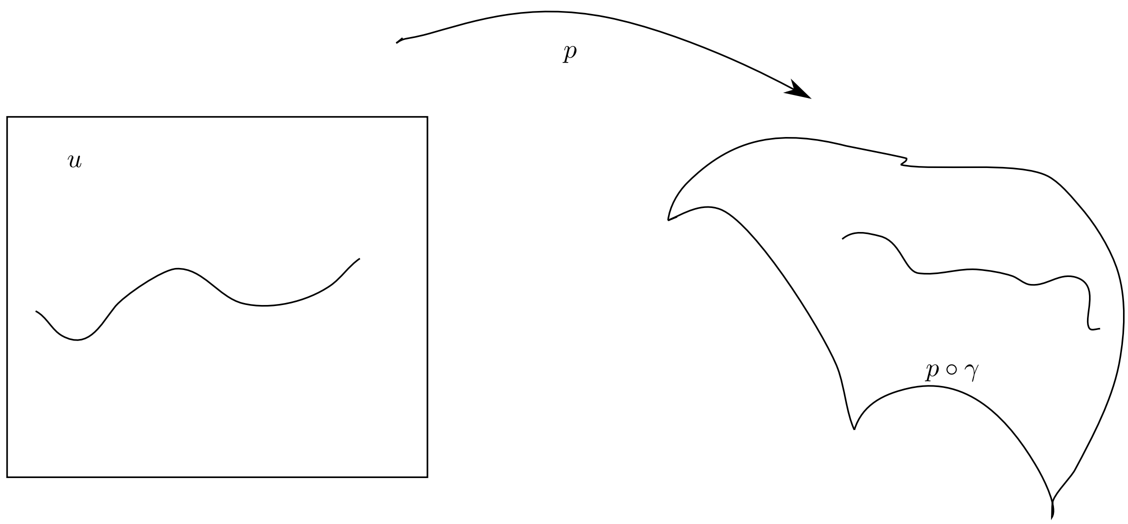


Figure 1 – chemin dans une surface

<u>Définition</u>

Soit $f : S \to \mathbb{R}$. ON dit que f est différentiable en $x \in S$ si pour une carte $p : U \to S$ t.q. $p(u_?, v_?) = x$, $f \circ p$ est différentialble en (u_0, v_0) Dans ce cas la <u>dérivée</u> de f est x_i nortée $df\big|_x$ est définie par

$$df\Big|_x : T_x S \to \mathbb{R} \qquad X \to D_x\, f\Big|_x$$

La composistion $F = f \circ p$, s'appelle <u>l'expression de f en coordonnées locales</u>

Sans la base p_u, p_v de $T_x S$ la dérivé $d\, f\big|_x$ a pour matrice :

$$Df\Big|_{u_0,v_0} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\end{pmatrix}\Big|_{(u_0v_0)}$$

$$\gamma(t) = (u_0v_0 \circ t(a,b)$$

alors

$$D(p\circ\gamma)\Big|_? = D\ p\Big|_? \cdot D\gamma\Big|_? = Df\Big|_? \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (p_u|p_v)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Big|_{u_0,v_0}$$

Si $X = ap_u + bp_v$

$$Df\Big|_x = D\ (f\circ p\circ\gamma)\Big|_0 = D\ (F\circ\gamma)\Big|_0 = Df\Big|_{\gamma(0)} D\ \gamma\Big|_0 = D\ F\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

Donc, la matrice de $df\big|_x$ dans la base p_u, p_v est bien $DF\big|_x$.

<u>Exemple</u>

$$p(\theta,z) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{pmatrix}$$

$$f : S \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x\cdot x = \|x\|^2$$

En coordonnées localess $f(x)$ est donnée par $F = f\circ p$

$$I = \begin{pmatrix}p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v\\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v\end{pmatrix}$$

$$f(p(0,z)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta + z^2 = 1 + z^2$$

$$DF = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\theta}, dvFz\right) = \begin{pmatrix}0 & 2z\end{pmatrix}$$

est la matrice de df en coordonnées locales

<u>Définition</u>

Soit S, S^* deux surfaces et $f : S \to S^*$

On dit que f est dérivable/différentiable en $x\in S$ si, pour des cartes p de S, p^* de S^*, la composition

On appelle $F = p\circ g\circ p$, l'expression en coordonées locales de f

La dérivée de f est $df\big|_x\, T_xS \to T_{f(x)}S^*$ dont la matrice ? ? les bases p_up_v de T_xS et p^*, p^* de $T_{f(x)}S^*$ est $DF\big|_{f(x)?}$

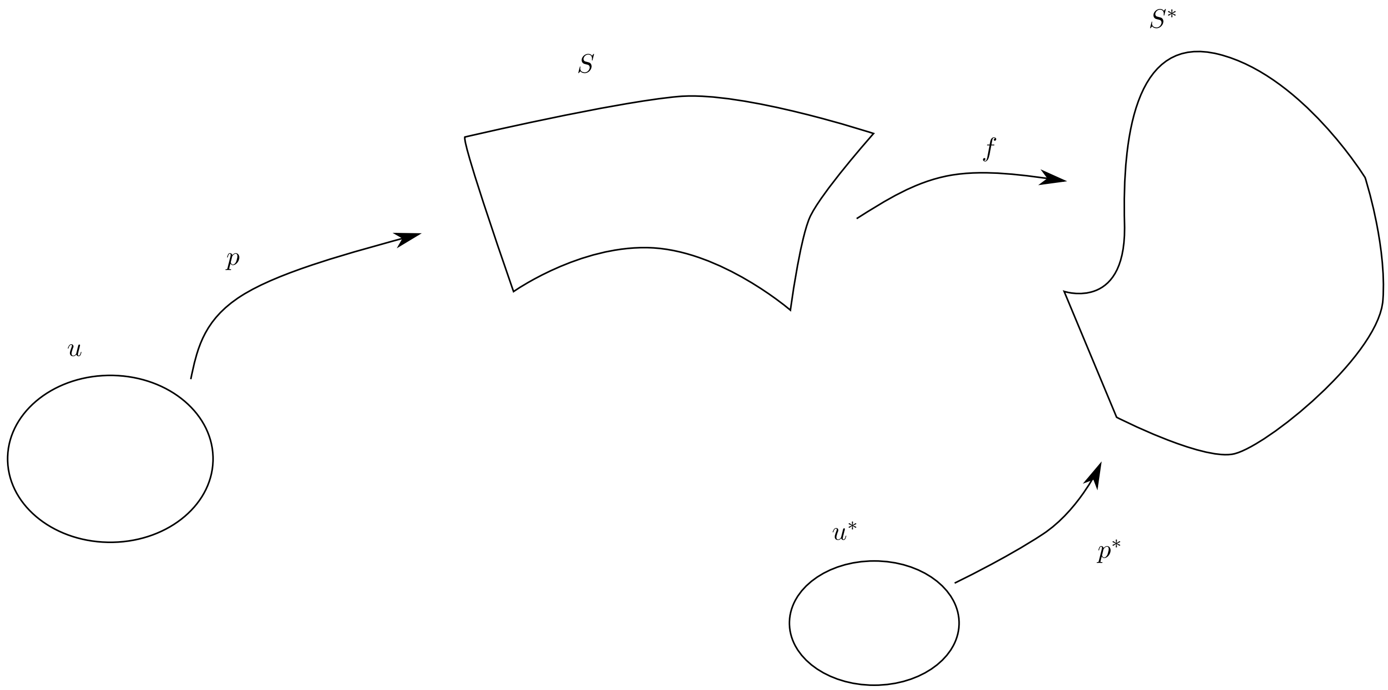


Figure 2 – Le même dessin que d'habithude

Application de Gauss

Étant donné une surface S un choix ? de vecteurs unitaires normales s'appelles une <u>orientation</u> sur S

<u>L'application de Gauss</u> est la fonction

$$n : S \to S^2$$

qui associe à un point $x \in S$ le vecteur normal en x. (défini sur une surface orientée)

par exemple, si $S = S^2$, $n : S^2 \to S^2$ est l'identitié.

Si S est un plan n est constant ?

Si S est un cylinde, l'image de S est un grand cercle

Si on a plutôt une scelle :

<u>Définition</u> <u>L'opérateur de forme</u> (shape operator) d'une surface S est $\mathcal{S}_x(s) = -dn(x)$

$$\mathcal{S} : T_x S \to T_{n(x)} S$$

<u>"Demonstaraion"</u>

<u>Déf</u> <u>La seonde forme fondamentale</u> de S est

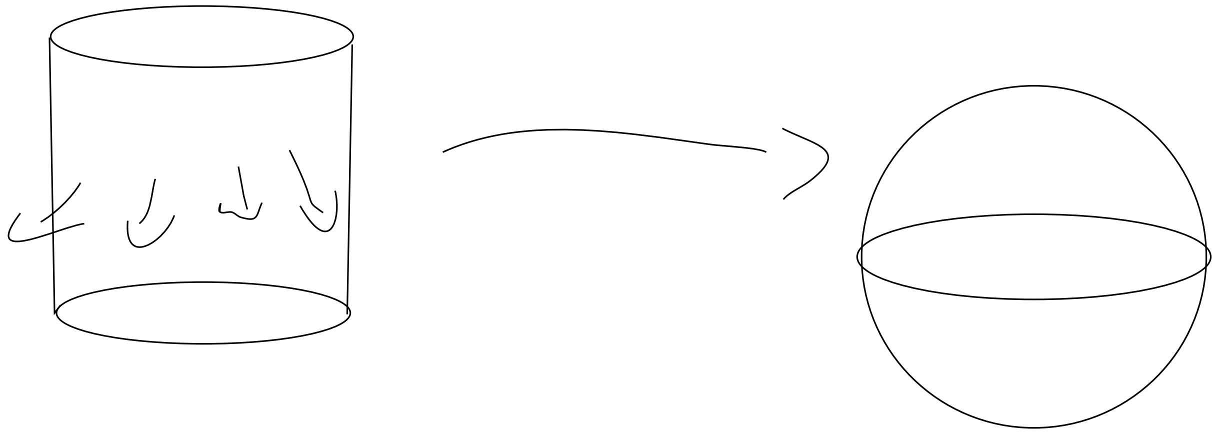


Figure 3 – grand cercle à shpère

$$II_x(X,Y) = \mathcal{S}(X) \cdot Y$$

$$(X < y \in T_x S)$$

<u>Prop :</u> II_x est une forme bilinéaire symétrique

<u>Dém :</u> II_x est bilinéaire car le produit scalaire est bilinéaire et $\mathcal{S} = -dn$ est linéaire

Calculons II_x sur p_u,p_v

ON sait que $p_u\big|_{u,v} = n(?) = 0$

On prend $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}$ de chaque côté

Fuck, je vais noter la conclusion quand on ferra le prochain rappel

Je vois pas assez bien :(

.

Figure 4 – Scelle vers shpère

Rappels

La dérivé d'une application $f : S \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire $df\Big|_x : T_xS \to \mathbb{R}$ de matrice $D(f \circ p)$ dans la base p_u, p_v

Par une application $f : S \to S^*$

$$df\Bigg|_x T_xS \to T_{f(x)}S^*$$

est donné par la matrice $D \circ p^{-1} \circ f \circ p$ dans la base p_u, p_v de T_xS et $p_u^* p_v^*$

Application de Gauss $n : S \to S^2$ vecteur normal uniraite pour p fixée, n $= \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$

Opérateur de formce : $\mathcal{S}_x : T_xS \to T_xS$

$$\mathcal{S}_x(x) = -dn_x(X)$$

seconde forme fondamentale

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot Y = I(\mathcal{S}_x(X), Y)$$

Exemple :

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \qquad p_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$p_u p_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|p_u \times p_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a montré, dans la démonstration que II est symétrique, que

$$II_x = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Résumé intra

I Coubrebes dans $\mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3$

- Longeur d'arc $\rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$
- Paramétrisation par longueur d'arc

$$\Psi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$$

  $\gamma(s) = (\gamma \circ \psi^{-1})(s)$
- Courbure, torsion, repère de Frenet
- Formules de Frenet-Serret

$$\begin{array}{rccc} T'(s) = & & \kappa(s)N(s) & \\ N'(s) = & \kappa T & & \tau B \\ B'(s) = & & -\tau N & \end{array}$$

- Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$ - isométrie de $\mathbb{R}^3$ + isométrie discrète
- courbures signées d'une coube dans $\mathbb{R}^2$
- Indice de rotation

$$R(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \mathrm{d}s$$

- Umlaufsatz

II Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

- Cartes de surfaces (paramétrisation)
- Surfaces lisses
- Plan tangent $T_{p(u,v)}S = \langle p_u, p_v \rangle$ (engendré par)
- Théorème des valeurs régulières

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, x) = x$$

  est une surface lisse si c est une valeur régulière $\iff$ tout les points de $f^{-1}(c)$ sont réguliers ($df \neq 0$)
- Première forme fondamentale

$$X, Y \in T_x S$$

$$I_x(X, Y) = X \cdot Y$$

  donné par la matrice

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

  dans la base $p_u p_v$
- Surfaces localement isométrique (même première forme fondamenetale)

Rappels

Application de Gauss :

—
$$n : S \to S^2$$

— opérateur de forme $\mathcal{S}_x T_x S \to T_x S \quad \mathcal{S}_(x)(X) == dn(X)$

— Seconde forme fondamentale $II_x T_x S$??????

$$II_x(X,Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot \mathbf{Y}$$

En pratique, pour calculer II on utilise que sa matrice dans la base p_u, p_v est $M_{II} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{uv} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$

Comment trouve-t-on la matrice de $\mathcal{S}$ maintenant ?

Proposition : Dans la base p_u, p_v

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_{II}$$

Si $M_{\mathcal{S}}$ est la matrice de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}(ap_u + bp_v) = cp_u + dp_v$ alors

$$M_{\mathcal{S}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

.

On sait que $II(X,Y) = \mathcal{S}(X) \cdot y = I(S(X), Y)$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{II} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \left(M_{S?} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{\mathcal{S}}^t M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = M_{\mathcal{S}}^T M_I$$
$$M_{calS}^T = M_{II} M_I^{-1}$$
$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_I I$$

En général, on a que $M_{\mathcal{S}}$ n'est pas symétrique bien que les deux autres le sois

Interprétation de la seconde forme fondamentale

α : Courbe planaire d'intersection entre le plan engedré par $X \in T_x S$ et $n(x)$ et la surface S paramétré par longeur d'arc et $\alpha(0) = x$

$$T(0) = \alpha'(0) = X$$
$$N(0) = \pm n(x)$$

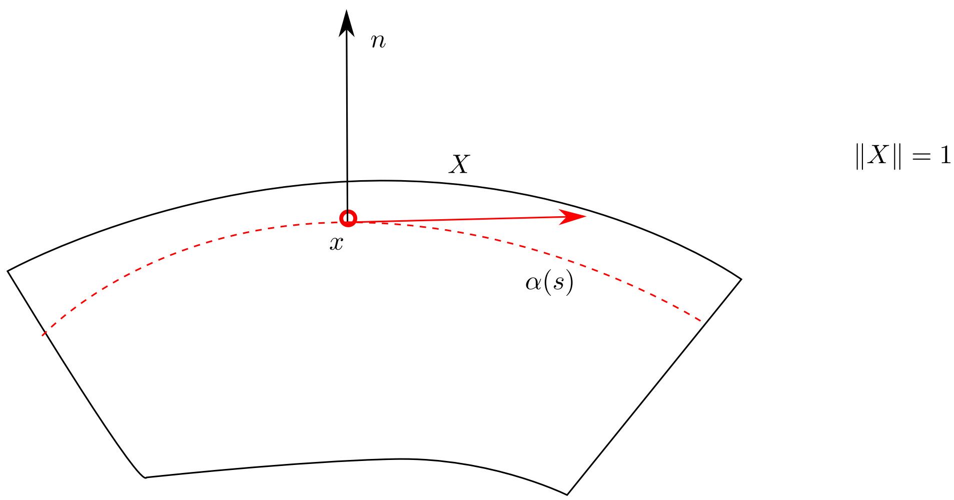


Figure 1 – Interprétation de la seconde forme fondamentale

$$N(s) = \pm n(\alpha(s))$$

$$N'(o) = -\kappa(0)T(0) + \underbrace{\tau(0)B(0)}_{0} = -\kappa(0)X$$

$$\kappa(0) = -N'(0) = \left.(n(\alpha(s)))'\right|_0 \cdot X? = \pm dn(X) \cdot X = \pm \mathcal{S}(X) \cdot X = II(X, X)$$

(Il y a des étapes rajoutées à posteriori que je vois mal... demander à quelqu'un peut-être...)

$II(X, X)$ est la courbure sectionnelle de S dans la direction X

Parenthèse d'algèbre linéaire

La nortion de matrice symétique dépend de la base :

$$\text{matrice symétrique} : M^T = M$$

Si M est la matrice de l'application $T : V \mapsto V$ T est auto-adjoint si :

$$T(u) \cdot V = u \cdot T(v) \forall u, v \in V$$

Un opérateur est auto-adjoint pour un produit scalaire donné. C'est la généralisation de matrice symétrique sans base

L'application de $\mathcal{S}$ est auto-adjointe par I :

$$I(\mathcal{S}(X), Y) = I(X, \mathcal{S}(Y))$$

Dans la base p_u,p_v la matrice de S n'est pas symétrique mais dans une base orthogonale, elle le serait.

Un opérateur auto-adjoint est toujours <u>diagonalisable</u> et ses valeur propres sont <u>réels</u>.

$\Longrightarrow$ S est diagonalisable et a 2 valeurs propres réelles k_1, k_2. On appelle k_1, k_2 les <u>courbures principales</u> de S en x. Les vecteur propres associés sont les directions principales. Elles s'interprètent comme les courbures sectionneles <u>max</u> et <u>min</u>.

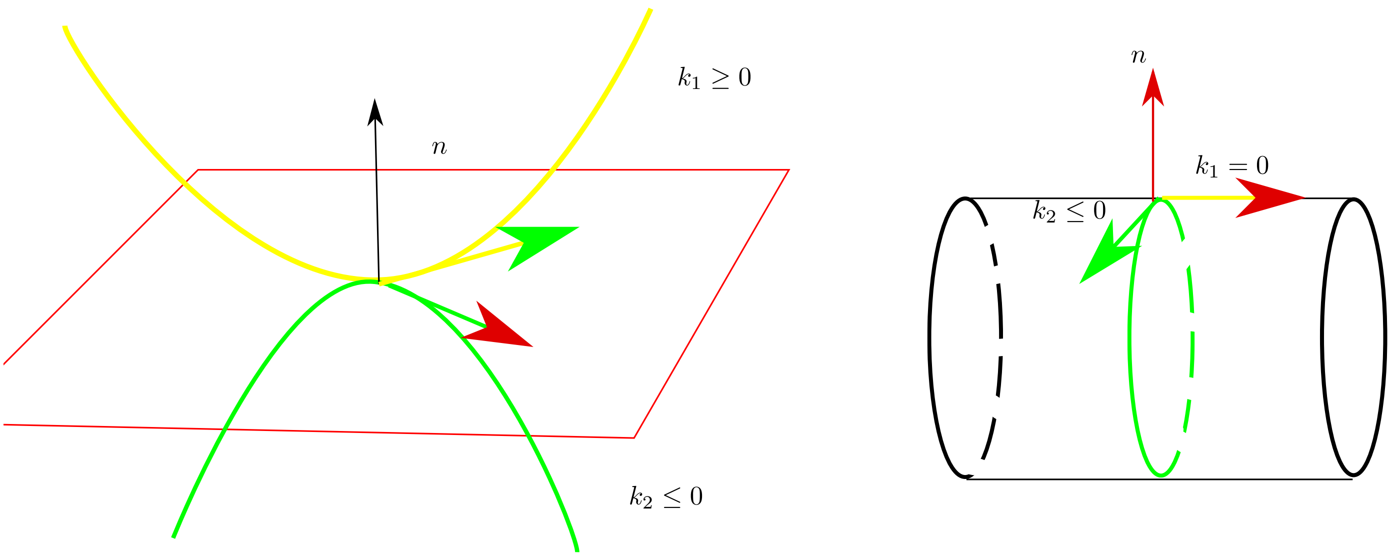


Figure 2 – Courbures principales

Le <u>déterminant</u> de $\mathcal{S} = k_1 k_2$ s'apelle la <u>Courbure de Gauss</u> et sa trace $= k_1 + k_2$ s'appelle la <u>sourbure moyenne</u>

<u>Exemple</u> : Surface avec un point de selle $p(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$p_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_u \times p_v = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

$$n(p(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}} = m_I^{-1} M_{II} = \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2) - u^2v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \\ \frac{1}{\sqrt{\cdots}} & 0 \end{pmatrix}$$

au poiny $u = v = 0 \quad p(u,v) = (0,0,0)$

$$M_{\mathcal{S}}\Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ses vecteur propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec valeurs propres associées 1,-1. La courbure de Gausse est -1

Exercices :

— Si S est le graph d'une fonction f t.q. $f(0,0) = 0 \quad \nabla f\big|_{(0,0)} = 0$ Alors $M_{\mathcal{S}}\big|_{(0,0)} = H_{(0,0)}$

$$p_{x,y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad H_{0,0} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \\ \cdots \end{pmatrix}$$

— Calculer la courbure de Gauss pour

1. S^2

$$p(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2. La pseudo-sphère (surface de révolution d'une tractrice)

$$p(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sech}\varphi\sin\theta \\ \varphi - \tanh\varphi \end{pmatrix}$$

Symbole de Chistoffel et Théorema Egregium

Une quantité sur une surface est intrinsèque si elle est invariente par isométrie locale. $\iff$ Dépendent uniquement de la première forme fondamentale (et ses dérivées).

L'opérateur de forme et II dépendent d'autre chose que seulement la première forme fondamentale. Par exemple un cylindre est à une isométrie près d'un plan mais ces deux surface n'ont clairement pas le même $\mathcal{S}$ et II. C-à-d qu'en faisant des tranformations localement rigique on présèrve la première forme fondamentale mais on modifie les courbures/direction principales. La courbures de Gauss par contre, bien qu'elle ai été définie par une approche "extrinsèque", est intrinsèque !

Pour le démontrer on veut essayer de définir la courbure de Gauss en passant seulement par la première forme fondamentale. Pour se faire, il va falloir définir les symbols de Christoffel

Symbols de Christoffel

En tout point de S, les vecteurs $p_u p_v, n$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Les coefficients L, M, K de II donnet les coordonnées en n des dériviées secondes p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}

$$p_{uu} = (\Gamma^u_{uu})p_u + (\Gamma^v_{uu})p_v + Ln$$
$$p_{uv} = (\Gamma^u_{uv})p_u + (\Gamma^v_{uv})p_v + Mn$$
$$p_{vv} = (\Gamma^u_{vv})p_u(\Gamma^v_{vv})p_v + Nn$$

Γ^k_{ij} = Coordonnées en p_u de $p_{ij} \quad i, j, k \in \{u, v\}$

Les Γ^k_{ij} s'appellent symbols de Christofel

Exemple : Calculons Γ^k_{ij} pour S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$p_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$n(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi)$$
$$p_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$p_{\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

p$_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi, -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$p_{\theta\theta}.n = -\sin^2\varphi$$
$$p_{\theta\varphi}.n = 0$$
$$p_{\varphi\varphi} \cdot n = -1$$

$$p_{\theta\theta} = 0p_\theta + \sin\varphi\cos\varphi p_\varphi - \sin^2\varphi n$$
$$p_{\theta\varphi} =_\theta +0p_\varphi + 0n$$
$$p_{\varphi\varphi} = 0p_\theta + 0p_\varphi - n$$

Rappels

- $M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ G & G \end{pmatrix}$
- $M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$
- $M_{\mathcal{S}=M_I^{-1}\cdot M_{II}}$
- $\mathcal{S}$ est diagonalisable
- $k_1, k_2 \to$ courbure principale
- $\det(\mathcal{S}) \to$ courbure gaussienne
- $\mathrm{tr}(\mathcal{S}) \to$ Courbure moyennne
- Symbol de Christoffel

Tentons d'exprimer Γ_{ij}^k en termes de E, F, G

$$p_{uu}p_u = \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F = \frac{E_u}{2}$$
$$p_{uu}p_v =^u_{uu} F + \Gamma^v_{uu}G = F_u \frac{E_v}{2}$$
$$p_{uv}p_u = \Gamma^u_{uv}E + \Gamma^v_{uv}F = \frac{E_v}{2}$$
$$p_{uv}p_v = \Gamma^u_{uv}F + \Gamma^v_{uv}G = \frac{G_u}{2}$$
$$p_{vv}p_u\Gamma^u_{vv}E + \Gamma^v_{vv}F + F_v - \frac{G_u}{2}$$
$$p_{vv}p_v = \Gamma^u_{vv}F + \Gamma^v_{vv}G = \frac{G_v}{2}$$

Pour obtenir les équations de Gauss-Codazzi, on compare p_{uuv} et p_{uvu}

$$p_{uuv} = \left(\Gamma^u_{uu}\right)_v p_u + \Gamma^u_{uu}p_{uv} + \left(\Gamma^v_{uu}\right)_v p_v + \Gamma^v_{uu}p_{vv} + L_v n + L n_v$$

$$= \left(\Gamma^u_{uu}\right)_v p_u + \Gamma^u_{uu}(\Gamma^u_{uu} \left(\Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uu}p_v + M_n\right) + \left(\Gamma^v_{uu}\right)_v p_v + \Gamma^v_{uu} \left(\Gamma^u_{vv}p + u + \Gamma^v_{vv}p_v + N_n\right) + L_v n + L(bp_u + dp_v)$$

$$\boxed{D_n = \begin{pmatrix} a & | & b \\ c & | & d \end{pmatrix} = -M_I^{-1}M_{II} \implies n_u = ap_u + cp_v n_v = bp_u + dp_v}$$

$$= \left(\left(\Gamma^u_{uu}\right)_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^u_{vv} + Lb\right) p_u + \Big(\left(\Gamma^v_{uu}\right)_v + \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^?_{vv} + Ld\Big) p_v + \left(\Gamma^u_{uu}M + \Gamma^v_{uu}N + L_v\right) n$$

De la même manière

$$p_{uvu} = \left(\left(\Gamma^u_{uv}\right)_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^u_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^u_{uv} + Ma\right) p_u + \left(\left(\Gamma^v_{uv}\right)_u + \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} + \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} + Mc\right) p_v + \left(\Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{iv}M + M_u\right) n$$

$$p_{uuv} = p_{uvu}$$

On compare les coefficients de p_v

$$Mc - Ld = (\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u = \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} = \Gamma^v_{uv}\Gamma^v_{uv} + \Gamma + uu^u\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv}$$

$$Mc - Ld = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - MF & GM - F? \\ EM - FL & EN - ?? \end{pmatrix}$$

$$MC = Ld = M\left(\frac{FL - EM}{EF - G^2}\right) - L\left(\frac{FM - EN}{EF - G^2}\right) = \frac{E - M^2 + LN}{EF - G^2} = E \cdot k$$

$$E \cdot k = \Gamma^u_{uu}\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{uu}\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\Gamma^v_{uu} - (\Gamma^v_{uv})^2 + (\Gamma^v_{uu})_v - (\Gamma^v_{uv})_u$$

k est intrinsèque (Peut être calculé avec E, F, G et leurs 2 premières dérivées

On peut aussi obtenir des équation similaire avec

$$F \cdot k \qquad F \cdot K \qquad g \cdot k$$

Équations de Cedazzi

$$\begin{aligned} L_v = M_u &= L\Gamma^u_{uv} + M\left(\Gamma^v_{uv} - \Gamma^u_{uu}\right) - N\Gamma^v_{uu} \\ M_v - N_u &= L\Gamma^u_{vv} + M\left(\Gamma^v_{vv} - \Gamma^u_{uv}\right) - N\Gamma^v_{uv} \end{aligned}$$

Comme la courbure est une propriété intrinsèque, Si un surface possède un surface de Gauss nul (comme une pizza). On peut forcer sa courbure dans une direction à être nul en la faisant courber dans un autre direction. Si la courbe imposé est *vers le haut*. Il n'y aura aucune courbure vers le bas et la aliments ne tomberons pas.

Rappels

Les symbols de Christoffel sont intrinsèques

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uu}\\ \Gamma^u_{uu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_u/2\\ F_u/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uv}\\ \Gamma^v_{uv}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_v/2\\ G_u/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{vv}\\ \Gamma^u_{vv}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_v - G_u/2\\ G_v/2\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} \cdot M_{II}$$

$$M_I = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} = (p_u|p_v)^t(p_u|p_v)$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{uu}\cdot n & p_{uv}\cdot n\\ p_{vu}\cdot n & p_{vv}\cdot n\end{pmatrix}$$

Les équations de Gauss-Cedazzi (que je ne réécrirais pas ici !)

Théorème fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Soit $p, p^* : U \to \mathbb{R}^3$ deux cartes de surfaces. Alors $I = I^*$ et $II = II^*$ ssi $\exists$ une isométrie directe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $p^* = T \circ p$

($\Longleftarrow$)

Écrivons $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$

$$p^*_u = (T \circ p)_u = (Ap + b)_u$$
$$p^*_v = Ap_v$$

Comme A est orthogonale,

$$Ap_u \times Ap_v = A(p_u \times p_v)$$

$$n^* = \frac{p^*_u \times p^*_v}{\|p^*_u \times p^*_v\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|A(p_u \times p_v)\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|p_u \times p_v\|} = A \cdot n$$

$$E^* = p^*_u \cdot^*_u = Ap_u \cdot Ap_u = p_u \cdot p_u = E$$

même chose pour F et $G \implies I = I^*$

On a

$$p^*_{uu} = (Ap_u)_u = Ap_u u$$
$$p^*_{uv} = Ap_{uv}$$
$$p^*_{vv} = Ap_v v$$

$\implies L^* = n^* \cdot p^*_{uu} = (An) \cdot (Ap_u u) = n \cdot p_{uu} = L$, de même pour M et N

$$\implies II = II^*$$

$(\implies)$

Fixons $u_0 \in U$

Soit T l'isométrie $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ t.q. $T(p(u_0)) = p^*(u_0)$

$$A \cdot p_u\Big|_{u_0} = p^*_u\Big|_{u_0}$$
$$A \cdot p_v\Big|_{u_o} = p^*_v\Big|_{u_0}$$
$$A \cdot n\Big|_{u_0} = n^*\Big|_{u_0}$$

> Si e, f, g e^*, f^*, g^* sont deux bases de $\mathbb{R}^3$ avec les mêmes produits scalaires entre les vecteur de base, alors $\exists A$ orthogonale t.q. $A : e \to e^*, \cdots$

Définissons $\tilde{p} = T \circ p$ et montrons que $\tilde{p} = p^*$

Soint $\mathbf{u} \in U$ quelquonque et : $[0,1] \to U$ un chemin t.q. $\gamma(0) = \mathbf{u}_0$ et $\gamma(1) = \mathbf{u}$

Considérons la la famille de bases de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)} \qquad \tilde{p}_v\Big|_{\gamma(t)} \qquad \tilde{n}\Big|_{\gamma(t)}$$

$$\tilde{E}(t) = \left(\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}\Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^t \tilde{E}(t) = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même, si

$$\tilde{E}^*(t) = \left(\tilde{p}^*_u\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}^*_v\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}^*\Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^{t*}\tilde{E}(t)^* = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)}\right) = \tilde{p}_{uv}\Big|_{\gamma(t)}\gamma_1'(t) + \tilde{p}_{uv}\Big|_{\gamma(t)}\gamma_2'(t) = (\Gamma^u_{uu}\tilde{p}_u + \Gamma^v_{uv}\tilde{p}_v + L\tilde{n})\gamma_1'(t) + (\gamma^u_{uv}\tilde{p}_u + \Gamma^v_{uv}\tilde{p}_v + M\tilde{n})\gamma_2'(t) = \cdots$$

Nottons que les coefficients dépendent seulement de E, F, G, L, M, N

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{E}(t) = \tilde{E}(t)\cdot M(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E^*(t) = E^*(t)M(t)$$

<u>Lemme</u> :

Soient $B(t) = (e_1|e_2|e_3)$ et $B^*(t) = (e_1^*|e_2^*|e_3^*)$ deux familles de de bases dans $\mathbb{R}^3$ t.q.

$B^tB = B^{*t}B^*\forall t$ $B'(t) = B(t)M(t)$ $B^{*\prime}(t) = B^*(t)M(t)$

$$B(0) = B^*(0)??? \quad B = B^*$$

Par le lemme appliqueé à $\tilde{E}(t), E(t) \implies \tilde{E}(t) = E^*(t)\forall t$

$$\tilde{p}_{u/v}\Big|_{\gamma(t)} = p^*_{u/v}\Big|_{\gamma(t)}$$

$$\cdots\blacksquare$$

<u>Démonstration du lemme</u>

(La matrice $G = B^*B$ s'appelle la matrice de Gram)

Comme $G\cdot G^{-1} = I$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\cdot^{-1} + G\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G^{-1}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G^{-1}\right) = -G^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}GG^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B^*B)(B^t)'B + B^tB' = (B^{*t})'B + (B^*t)B^{*\prime}$$

Calculons la dérivée de

$$(B^*)^t G^{-1} B$$

par rapport à t

$$(B^{*t} G^{-1} B)' = (B^* t G^{-1})' B + B \cdots$$

Fuck that, c'est le cambodge

Dérivées covariantes et parallélisme

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on dit que 2 vecteurs sont parallèles. si, quand on translate au point de base ils sont multiples/égaux.

Sur une surface, les plans tangeants à des points distincs sont différents.

Définition : Soit X un champ de vecteur sur une surface S $(X_p \in T_pS) \forall p \in S$ et $V \in T_{pS}$. La dérivée covariante de X dans la direction V est $\nabla_v X := \pi^{\perp}_{T_pS}(D_V X)$

Rappels :

Théorème fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$:

$$I^* = I \wedge II = II^* \iff p^* = T \cdot p, T | T \text{ est une isométrie directe}$$

Champ de vecteurs sur S

$$x : S \to \mathbb{R}^3 | X(x) \in T_x S$$

x serait la vitesse d'un fluide sur la surface

Dérivé couvariante

$$\boldsymbol{\nabla}_v : X = \pi_{T_x s} D_v X = D_v X - (D_v x \cdot u) u$$

Rappels sur les dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ on peut définir sa dérivées directionelle dans la directiondu vecteur v

$$D_v f := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

.
On peut l'évaluer enutilisant un chemin :

$$D_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \qquad \text{avec } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$$

Si f est définie sur une surface s, on utilise un chemin de la forme $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$
Les vecteur tangants à $\gamma(t)$ sont $\frac{d}{dt}\gamma(t) = u' p_u + v' p_v$
Si on connaît la fonctions en coordonnées locales ($f(u,v)$), on a :

$$D(u' p_u + v' p_v)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u(t), v(t))$$

Un champ de vecteur sur S est intrinsèque. Si X set un champ de vecteurs sur S, on peut l'écrire comme

$$X - f(u,v) p_u + g(u,v) p_v$$

$$\begin{aligned} D u' p_u v' p_v X &= u'(f(u,v)p_u + g(u,v)p_v)_u + v'(f(u,v)p_u + g(u,v)p_v)_v \\ &= u'(f_u p_u + f p_{uu} + g_u p_v + g p_{uv}) + v'(f_v p_u + f p_{uv} + g_u p_u g p_u u) \end{aligned}$$

Les termes p_{uu}, p_{uv} et p_{vv} ont des composantes en u. $\implies$ La dérivée directionnelle n'est pas un champ de vecteur sur S mais la dérivée covariante oui !

Lien avec les symbols de cristoffel : p_u et p_v sont des champs de vecteurs sur S

Exemple :

Sue chaque point on peut calculer la dérivé covariante de p_u par rapport à p_v

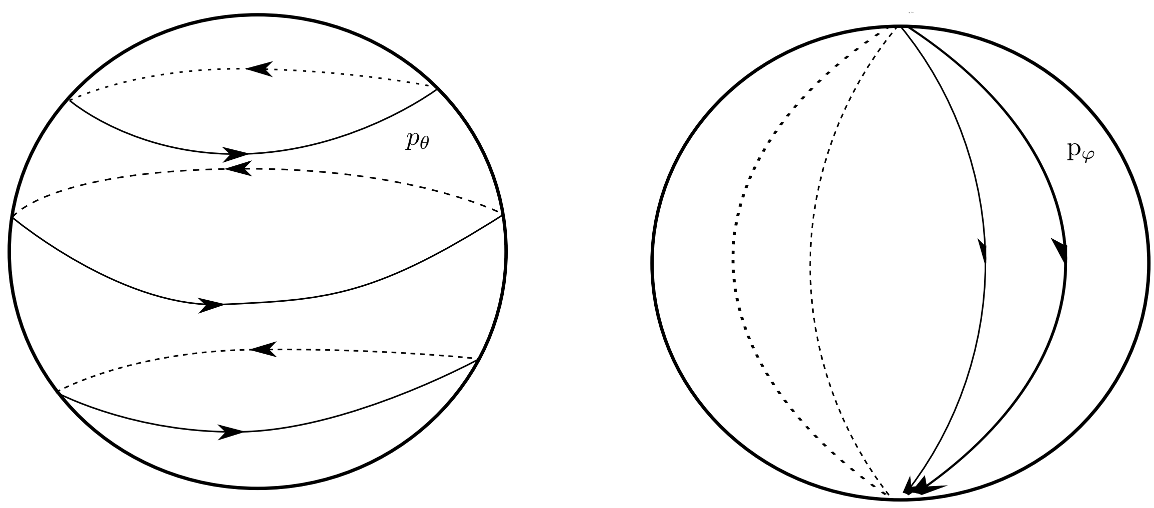


FIGURE 1 – Champ de vecteur

$$\nabla p_u p_u = \pi^{\perp}_{T_xS}(Dp_u p_u) = \pi^{\perp}_{T_xS}(\Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}p_v + Lu = \Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}p_v$$

On peut alors trouver les quantitées intrinsèques (ignornent les isométries locales)

$$\nabla p_u p_v = \Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v \nabla p_v p_u = \Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^u_{uv}p_v \nabla p_v p_u = \Gamma^u_{vu}p_u + \Gamma^u_{vv}p_v$$

Propriétes de la dérivé couvariante

1. Linéarité 1 :
$$\nabla_v(x_1 + x_2) = \nabla_v X_1 + \nabla_v x_1 + \nabla_v x_2$$
2. Règles de Leibnitz :
$$\nabla_v(fX) = (D_v f)X + f\nabla_v X \qquad f : S \to \mathbb{R}$$
3. linéarité 2 :
$$\nabla_{av_1+bv_2}X = a\nabla_{v_1}X + b\nabla_{v_2}X$$

<u>Démonstation de la deuxième propriété :</u>

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_v(fx) &= D_v(fx) - (D_v(fx)\cdot u)n \\
&= (D_vf)x + f(D_vx) - ((D_vf)\underbrace{x\cdot n}_{0}) + f(D_ux)\cdot n)n \\
&= D_vfx + f(D_vs = [(D_vx)\cdot n]n) \\
&= D_vfx + f\boldsymbol{\nabla}_vx
\end{aligned}
$$

En utilisant les trois propriétées on calculs :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}p_u(fp_u + gp_v) = \boldsymbol{\nabla}p_u(fp_u) + \boldsymbol{\nabla}_{p_u}(gp_v) \\
&= (Dp_uf)p_u + (DP_ug)p_v + f\boldsymbol{\nabla}_{p_u}p_u + g\boldsymbol{\nabla}_{p_u}p_v \\
&= (f_u + f\Gamma^u_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_u + (g_u + \Gamma^v_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_v
\end{aligned}
$$

On fait la même chose pour $\boldsymbol{\nabla}_{p_v}$ et avec la propriété 3 on peut calculer $\boldsymbol{\nabla}_vx$ pour n'importe que v, x.

Rappels

— propriétés

—
$$\boldsymbol{\nabla}_v(X+Y) = \boldsymbol{\nabla}_v(X) + \boldsymbol{\nabla}_v(Y)$$

—
$$\boldsymbol{\nabla}_v(fX) - (D_v f)X + (f)\boldsymbol{\nabla}_v X$$

—
$$\boldsymbol{\nabla}_{v_1+v_2} X = a\boldsymbol{\nabla}_{v_1} X + b\boldsymbol{\nabla}_{v_2} X$$

— Coordonnées

—
$$\boldsymbol{\nabla}_{p_u} p_u = \Gamma^u_{uu} p_u + \Gamma^v_{uu} p_u$$

—
$$\boldsymbol{\nabla}_{p_u} p_v = \boldsymbol{\nabla}_{pv} p_u = \Gamma^u_{uv} + \Gamma^v_{uv} p_v$$

—
$$\boldsymbol{\nabla}_{p_v} = \Gamma^u_{vv} p_u + \Gamma^v_{vv} p_v$$

. Pour $X = f p_u g p_v$
$$\boldsymbol{\nabla}_{p_u} X = (f_u + f\Gamma^u_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_i + (g_u + f\Gamma^v_{uv} + \Gamma^v_{vv})\, p_v$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{p_v} X = (f_v + f\Gamma^u_{uv} + g\Gamma^u_{vv})\, p_u + (g_v + f\Gamma^v_{uv} + g\Gamma^v_{uv} + g\Gamma^v_{vv})\, p_u$$

Proposotion : Soit α un chemin sur S avec $\alpha(0) = x_0$ et $\alpha(1) = x$. Soit $X_0 \in T_{x_0}S$. Alors il existe un unique champ de vecteurs sur α t.q. $\boldsymbol{\nabla}_{alpha'} X \equiv 0$

Démonstration : On écrit $\alpha(t) = p(u(t), v(t)) \implies \alpha' = u'p_u + v'p_v$ et $X = f(t)p_u + g(t)p_v$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} X = \pi^{\perp}_{T_{\alpha'(t)}}(D_{\alpha'} X)S = \pi_{T_{\alpha'(t)}S}\left(f' p_u f(p_{uu}u' p_{uv} v') + g' p_v + g(p_{uv} u' p_{vv} v')\right)$$
$$= \left(f' + f(\Gamma^u_{uu} u' + \Gamma^u_{uv} v') + g(\Gamma^u_{uv} u' + \Gamma^u_{vv} v)\right) p_u + \left(g' + f(\Gamma^v_{uu} u' + \Gamma^v_{uv} v') + g(\Gamma^v_{uv} u' + \Gamma^v_{vv} v'\right) p_v = 0$$

On réécrit :

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} u' + \Gamma^u_{uv} v' & \Gamma^u_{uv} u' + \Gamma^u_{vv} v' \\ \Gamma_u u^v u' + \Gamma^v_{uv} v' & \Gamma^v_{uv} u' + \Gamma^v_{vv} v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{*}$$

C'est un système d'équation différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

$\implies$ $\exists!$ solutions étant donné $f(0), g(0), g'(0), f'(0)$

Comme l'équation (*) dépend seulement de Γ^k_{ij}, le trasnport est parallèle est intrinsèque ■

Exemple : Calculons le trasnport parallèle d'un vecteur le long d'un cercle de latitude sur la sphère. Sur S^2

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$I_{(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = -\sin\varphi\cos\varphi$$
$$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \cot\varphi$$

On prend le cercle de Lattitude φ_0 : $\theta(t) = t, \quad \varphi(t) = \varphi_0$avec $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot\varphi\varphi' & \cot\varphi\theta' \\ \sin\varphi\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$f' = \cot\varphi_0 g$$
$$g' = \sin\varphi_0\cos\varphi_0 f$$

$$\implies f" = -\cot\varphi_0 g' = -\cot\varphi_0(\sin\varphi_0\cos\varphi_0)f = \cos^2\varphi_0 f$$

$$\implies f(t) = c_1\cos((\cos\varphi)t) + c_2\sin((\cos\varphi_0)t)$$

$$1 = f(0) = c_1$$
$$0 = g(0) - \frac{f'(0)}{\cot\varphi_0} = \frac{c_2\cos\varphi_0}{-\cos\varphi_0} = -c_{2\sin\varphi_0} \implies c_2 = 0$$

$$\implies f(t) = \cos((\cos\varphi_0)t)$$
$$g(t) = \frac{-\cos(\varphi_0)\sin(\cos\varphi)t)}{-\cot\varphi} = \sin\varphi_0\sin(\cos(\varphi_0)t)$$

transport parallèle :

$$X(t) = \cos(kt)p_\theta + \sin\varphi_0\sin(kt)p_\varphi \qquad k = \cos\varphi_0$$

$$\|X(t)\|^2 = \cos^2(kt)p_\theta p_\theta + 2\sin\varphi_0\cos^2(kt)p_\theta p_\varphi + \sin^2\varphi_0\sin^2(kt)p_\varphi p_\varphi = \cos^2(kt)\sin^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0\sin^2(kt) = \sin^2(\varphi_0)$$

On remaque que la norme ne dépend pas de t

Proposition : Le trasnport parallelèle présèrve les longeurs et les angles

Démonstration : Soit $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ et $X(t), Y(t)$ deux champs de vecteurs parallèles le long de α.

$$\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}X = \boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}Y = 0$$

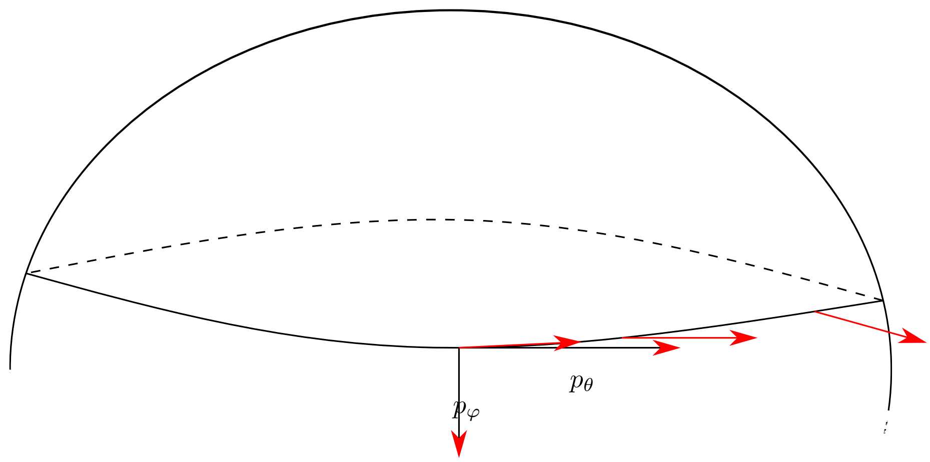


Figure 1 – Transport parallèle sur une shpère

Posons $f(t) = X(T) \cdot Y(t)$

$$f'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t) = D_{\alpha'}(X) \cdot Y + XD_{\alpha'}(Y) = \boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}(X) \cdot Y + X \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\alpha}(Y) = 0$$

$\implies f(t)$ est une constante $\implies$ longeures et angles constants $\blacksquare$

<u>Définition</u> : UNe chemin $\alpha(t)$ sur une surface S est une <u>géodésique</u> si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'(t)}\alpha' = 0 \forall t$

En coordonnées, pour $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ l'équation géodésique s'écrit

$$_\alpha; (u'p_u + v'p_v) = u"p_u + u'\boldsymbol{\nabla}_{u'}p_u + v"p_v + v\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'}p_v$$

$$= u"p_u + u'(u'(\Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}) + v'(\Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v)) + v"p_v + v'(u(\Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v) + v'(\Gamma^u_{vv}p_u\Gamma^u_{vv})p_u) = 0$$

$$\iff \begin{array}{l} u" + (u')^2\Gamma^u_{uu} + 2u'v'\Gamma^u_{uv} + (v')^2\Gamma^u_{vv} = 0 \\ v" + (u')^2\Gamma^v_{uu} + 2u'v'\Gamma^v_{uv} + (v')^2\Gamma^v_{vv} = 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{c} u" + (u'v')\begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v" + (u'v')\begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{vu} & Gamma^v_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{array}$$

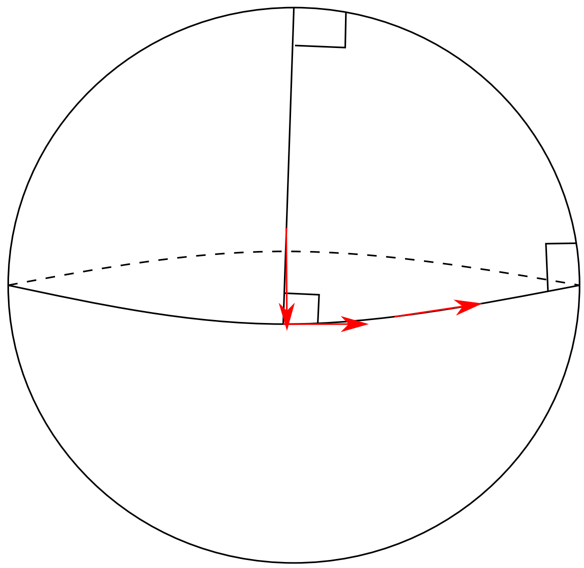


Figure 2 – Trois angles de 90

Les géodésiques sont uniques étant donné un point et vecteur tangeant initiaux

Exercice : Trouvez les géodésiques du plan en coordonées polaires

$$p(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fun fact

On ne sait pas si

$$\pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$$

est un entier ou non !

Rappels

- Transport parallèl : X est parallèle le long de α si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} X \equiv 0$
- Étant donné $X_0 \in T_{\alpha(0)} S \exists ! X$ définis sur α et parallèle
- Géodésique : α géodésique si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = 0$ (α' est parallèle le long de α)
- Vitesse constante car parallèle implique longeur constante
- En cooddonnées

$$\alpha(r) = p(u(t), v(t))$$

$$u" + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{uv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

$$v" + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{vu} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

Théorème de Clairaut : Si α est une géodésique sur une surface de révolution alors $\exists C$ constante t.q. pour tout point de α,

$$r \cos \varphi = C \tag{**}$$

Où r est la distance à l'axe et φ est l'angle entre $\alpha'(t)$ et le parallèl par $\alpha(t)$. Inversement, tout courbe α à vitesse constante qui satisfait (**) et n'est pas parallèle est une géodésique.

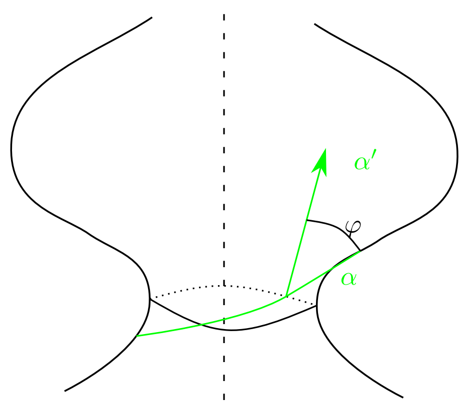


Figure 1 – Surface de révolution

$$p(s\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta x(s) \\ \sin \theta x(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

$$I_{s\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Les seuls symbols de Chritoffel non-nuls sont

$$\Gamma_s^\theta = \frac{x'(s)}{x(s)} \qquad \Gamma_{\theta\theta}^s = -x(s)x'(s)$$

Les équations géodésiques sont

$$S" + (-x(s)x'(s))\theta'^2 = 0 \tag{1}$$
$$\theta" + 2\frac{x'(s)}{x(s)}s'\theta' = 0 \tag{2}$$

$$(2) \iff \frac{\theta"}{\theta'} = -2\frac{x'(s)}{x(s)}s' \implies \ln\theta' = -2\ln(x(s)) + C \implies \theta' = \frac{C}{x^2} \implies x^2\theta' = C$$

Si $\alpha(t) = p(s(t), \theta(t))$ est une géodésique, alors $x^2\theta' = c$. α à une vitesse constante

$$\cos\varphi = \frac{\alpha' \cdot p_\theta}{\sqrt{\alpha' \cdot \alpha'}\sqrt{p_\theta \cdot p_\theta}} = \frac{(s'p_s + \theta' p_\theta) \cdot p_\theta}{v \cdot x} - \frac{\theta' x}{v'}$$

$$\cos\varphi = \frac{\theta' x}{v} = \frac{c}{xv}x\cos\varphi = \frac{c}{v} = c'$$

Pour l'autre directions, supposons que α est à vitesse constante v est que $r\cos\varphi = c$

$$r\cos\varphi = x\left(\frac{\theta' x^2}{v \cdot x}\right) = \frac{theta' x^2}{v} = C \implies \theta' x^2 = Cv \implies textl'quation2estsatisfaite$$

Il ne reste qu'à montrer que (1) est satisfaite

$$v^2 = \alpha' \cdot \alpha' = s'^2 + x(s)^2\theta'^2 \implies - = 2s's" + 2s(s)x'(s)s'\theta'^2 + x(s)^2(2\theta'\theta")$$

$$0 = s's" + xx's'\theta'^2 + x^2\theta'\left(-2\frac{x'}{x}s'\theta'\right) = s'(s" - xx'\theta'^2)$$

Si α n'est pas parallèle $s' \neq 0$ alors $s"xx'\theta'^2 = 0 \implies$ (1) est satifaite fonc α est une géodésique ■

Application :

$$r\cos\varphi = \text{const}$$

Initiallement $\cos\varphi = 1$

$\implies \text{const} = \mathrm{r}_0 \forall \mathrm{t} > 0 \mathrm{r} > \mathrm{r}_0 \text{ car } \cos\varphi < 1$

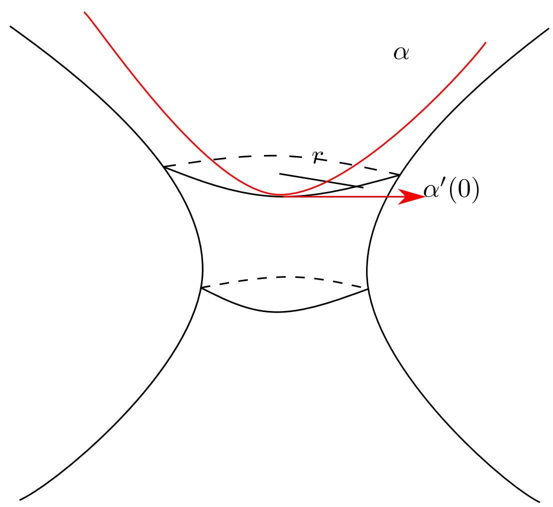


FIGURE 2 – Exemple d'application

Courbure géodésique & et courbures normales

α paramétré par longeur d'arc sur une surface S

$$T = \alpha'$$

$$\dots$$

(Il a effacé le tableau :( )

Rappels

— Théorème de Clairaut : Pour une surface de révolution les géodésiques satisfont

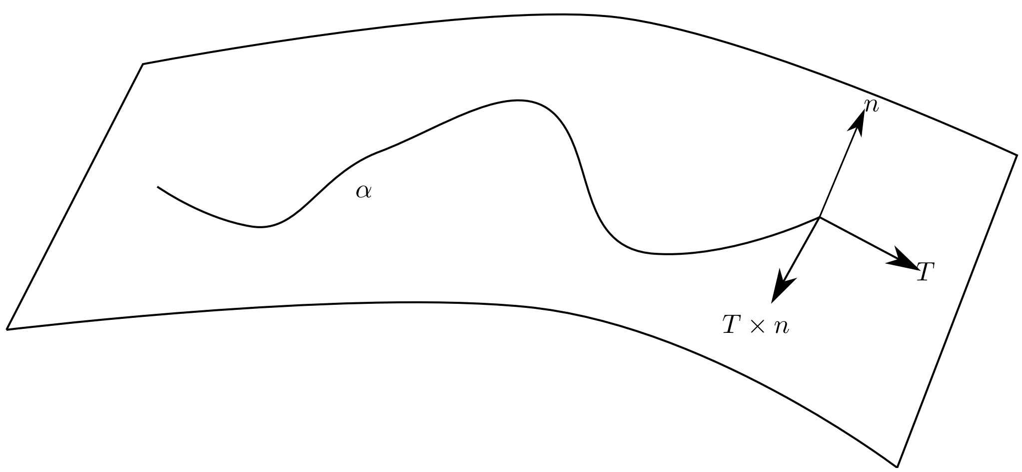
$$r\cos\varphi = C \tag{*}$$

. Inversement, toutes courbes à vitesse constante qui n'est pas un parallèle et qui satisfait (*) est une géodésique

— courbue géodésique

$$\alpha' = T \quad \alpha'' = T' = \underbrace{\kappa_g}_{\text{Courbure géodésique}} T\times n + \underbrace{k_n}_{\text{courbure normale}} n$$

$k_g = 0 \implies \alpha$ est une géodésique



α est paramété par longeure d'arc

Figure 1 – Courbure géodésique

Exercice 1 : Calcul de courbure géodésique du parallèle $\varphi = \varphi_0$ sur la shpère

$$P(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin\varphi_0\cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \sin\varphi_0\cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$$

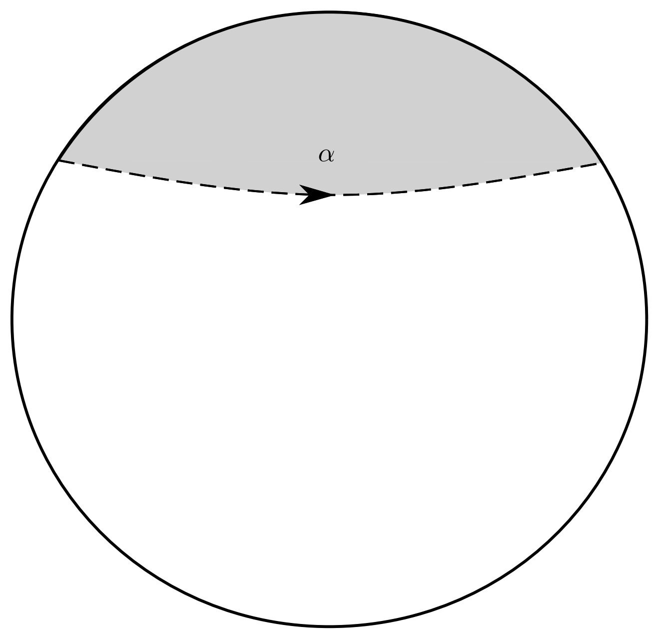


Figure 2 – parallèle sur la shpère

$$\alpha' = T = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \alpha(s) \to \text{on considère la sphère unité}$$

$$T \times n = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) - \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$T' = \frac{1}{\sin\varphi_0} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ -\sin\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha''$$

$$k_g = T' \cdot (T \times n) = -\cos\varphi_0 (\cos^2\left(\frac{s}{\sin\varphi_0}\right) \sin^2\left(\frac{s}{\varphi_0}\right) \frac{1}{\sin\varphi_0} = -\cot\varphi_0$$

<u>Exercice 2</u> :

$$\kappa^2(s) = \kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s) \quad \text{où } \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \csc\varphi_0$$

$$\kappa(s)^2 = \|T'(s)\|^2 \quad \|T'(s)\|^2 = k_g^2(t \times n)\cdot(T \times n) + k_n^2 n \cdot n = k_g^2(s) + k_u^2(s)$$

Pour le parallèle $\varphi = \varphi_0$, $\quad \kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{\sin\varphi_0} = \csc\varphi_0$. Aussi $\kappa_n = T' \cdot n = -1$ et $\kappa^2(s) = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$

Exercice 3 : Montrer qu'un cercle de lattitude (parallèle) s constante sur une surface de révolution ssi $x'(s) = 0$

Équations géodésiques

$$s' + \theta'^2(s)(-x(s)x'(s)) = 0 \tag{*}$$
$$\theta'' + 2\frac{x'(s)}{x(s)}\theta' s' = 0 \tag{**}$$

Cercles de lattitude $\implies s = \text{cste} \implies$ s$' = 0$ donc

$$(*) \implies \theta'^2(-x(s)x'(s)) = 0 \tag{A}$$
$$(**) \implies \theta'' = 0 \tag{B}$$

$$(B)\ \theta'' = 0 \implies \theta' = c$$

donc

$$(A) \quad \implies -c^2(x(s)x's) = 0$$

donc

$$x'(s) = 0$$

Relativité Générale

Considérons la première forme fondamenetale (métrique)

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+g^2u^2 & gu \\ gu & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{Eu}{2} \\ \frac{Fu}{2} - \frac{E}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies \quad u'' = 0 \quad u = at + b$$

$$v'' + (u'v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \implies v'' + (u')^2 g = 0 \quad v'' + a^2 g = 0 \quad u(t) = at + b \quad v)t) = -\frac{a^2 g}{2}t^2 + ct$$

Ce sont des équation cinématiques !

$$u'(t) = 1 = a$$

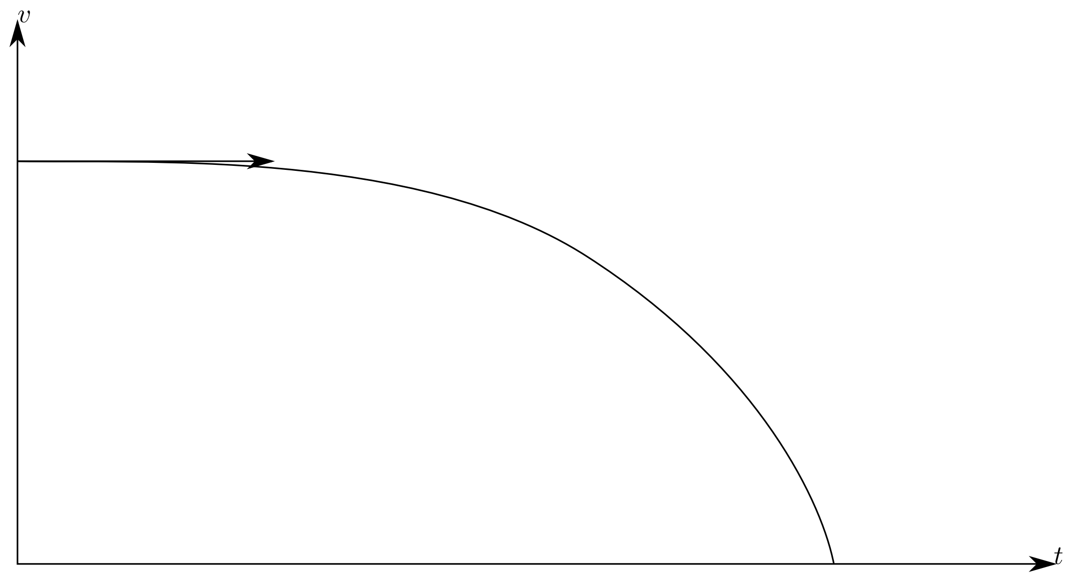


Figure 3 – Graphique de la vitesse en fonction du temps

<u>Théorème de Gauss Bonet</u>

Rappel : Gauss Bonet discret

Pour tout polyèdre p trinagulé dans $\mathbb{R}^3$

$$\sum_{\text{sommets de } p} c(s) = 2\pi\chi(p)$$

où

$$c(s) = 2\pi - \sum \theta \quad \chi(p) = V - E + F$$

Rappel : L'intégrale d'une fonction sur une surface S avec $f : s \to \mathbb{R}$

$$\int_{p(u)} f \cdot \mathrm{d}s = \int_u (f \circ p)\|p_u \times p_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

<u>Proposition</u> : L'aire d'une surface est intrinsèque

$$\|p_u \times p_v\| = \left(EG - F^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration : Dans la base p_u p_v n, la matrice du produit scalaire est

$$\begin{pmatrix} p_u & | & p_v & | & n \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} p_u & | & p_v & | & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le volume d'un parallépipède est donné par

$$\det(p_u|p_v|n)^2 = EG - F^2$$

$$\implies |\det(p_u|p_v|n)| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ce volume est également égal à l'aire de la base fois la hauteur

$$= \|p_u \times p_v\| \cdot 1 = \|p_u \times p_v\|$$

$$\int_u \|p_u \wedge p_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{p(u)} \mathrm{d}S$$

Lemme : Si $F = 0$, la courbure de Gauss s'écrit

$$h = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right);$$

Proposition : Au voisinage de tout point d'une sruface avec $k_1 \neq k_2 \exists$ une paramétrisation orthogonale ($F = 0$). Dans la suite, on suppose $F = 0$.

Étant donnée une base de $T_{p(u,v)}$, $e_1(u, v)$, $e_2(u, v)$ à chaque point de la sruface l'holonomie d'une courbe est $(\nabla_{\alpha'} e_{1)} \cdot e_2$

Propostition : Dans un paramétrisation $\perp$ pour

$$e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G},} (\nabla_a \cdot e_1) \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \cdot (-u' E_v + v' G u)$$

Rappels :

- Parmamétrisation orthogonale $F = 0 \quad (p_u \perp p_v)$
- $e_1 = \frac{p_v}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_u}{\sqrt{G}}$. $e_1(u,v)$ et $e_2(u,v)$ forment une base othonormée de $T_{p(u,v)}$

Étant donnée une courbe α dans S, on définit

$$\varphi_{12} = (\nabla_\alpha \cdot e_1) \cdot e_2 \text{ (mesure de la rotation du repère le long de } \alpha)$$

Remarque

$$\varphi_{21} = (\nabla_\alpha e_2) \cdot e_1 = -\varphi_{12}$$

car

$$\begin{aligned} 0 &= D_{\alpha'}(e_1 \cdot e_2) \\ &= D_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + D_{\alpha'}(e_2) \cdot e_2 \\ \nabla_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + \nabla_{\alpha'}(e_2) \cdot e_1 &= \varphi_{12} + \varphi_{21} \end{aligned}$$

Car la composante en n disparait avec le produit scalaire
De manière semblable, on montre que $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$

Proposition : Pour un chemin $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$,

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + VG_u)$$

Démonstation :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = (\nabla_{\alpha'} \cdot e_1) \cdot e_2 &= \left(\nabla_{\alpha'} \frac{p_u}{\sqrt{E}}\right) \cdot \frac{p_v}{\sqrt{G}} \\ &= \left(p_u \cdot D_\alpha \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}\nabla_{alpha'} \cdot p_u}\right) \cdot \frac{p_V}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\nabla_{\alpha'} \cdot p_u\right) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(u \cdot \nabla_{p_u} p_u + v' \nabla_{p_v} p_v\right) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(u' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v\right) \end{aligned}$$

paralléllisme

$$p_{uu} \cdot p_v : \quad 0 = F_u = (p_u \cdot p_v)_u = p_{uu} \cdot p_v + p_v \cdot p_{vv} \iff p_{uu} \cdot p_v = -p_u \cdot p_{vv} = -\frac{E_v}{2}$$

$$P_{vu} \cdot p_v : \quad \text{" "} \iff p_{uv} \cdot p_v = \frac{G_u}{2}$$

donc $\varphi_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(?' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v\right) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} = (-u'E_v + v'G_u)$

Proposition :

Si $\alpha(s)$ est une courbe fermée qui entoure la région R (à gauche selon règle de la main droite) alors

$$\int_0^L \varphi_{12} \mathrm{d}S = -\iint \kappa(u,v) \mathrm{d}S$$

Rappel : Théroème de G ? ?

$$\int_{\mathrm{d}R} \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

R paramétré par $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$

$$\int_o^L \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \mathrm{d}S = \iint_R (g_u - f_u) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Démonstration de la propriété

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + v'G_u)\mathrm{d}S \\
&= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \mathrm{d}S \\
&= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \iint_R \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_R \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) \underbrace{\sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S} \\
&= -\iint_R \kappa(u,v)\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

Proposition :

$$\int_o^L \varphi_{12} \mathrm{d}S = -\iint_R \kappa(u,v) \mathrm{d}S$$

On veut exprimer le terme de gauche différement.

$k_g = \varphi_{12} + \theta'$ pour une courbe $\alpha'(s) = p(u(s), v(s))$ paramétré par longeur d'arc et ou θ est défini par $\alpha'(s) = T(s) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$. α est une géodésique

Démonstration :

$$k_g = T' \cdot (m \times T)$$

comme $T = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ $n \times T = -\sin\theta e_1 \cos\theta e_2$

$$k_g = (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_{2)} \cdot (-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2) = [-sin\theta\theta' e_1 + \cos\theta \nabla_{alpha'} e_1 + \cos\theta\theta' e_2 + \sin\theta \nabla_{\alpha'} e_2] \cdot (-\sin\theta e_1 + cos\theta e_2)$$

$$= \sin^2\theta\theta' + \cos^2\theta\theta' + \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\varphi_{21} = \theta' + \varphi_{12}$$

Rappels

— Paramétisation orthogonale : $p_u p_v = 0 = F$
— Intégrale de surface $f : S \to \mathbb{R}$

$$\iint_{p(u)} f(x)\mathrm{d}S := \iint_{u} f(u,v)\|p_u \times p_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{U} f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

—

$$\varphi_{12} := (\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} e_{1)} \cdot e_2$$

où $e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}},\ e_2 = \frac{p_v}{\sqrt{G}}$ "Rotation de e_1 e_2 le lond de α "
— α courbe fermée borant R

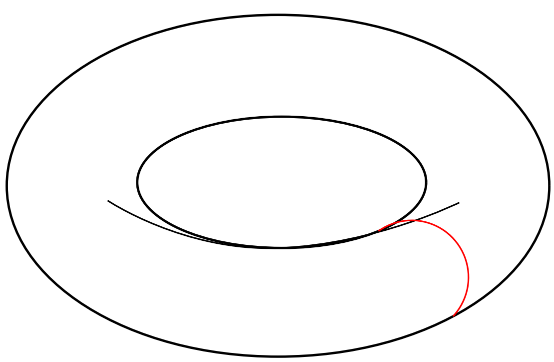
$$\implies \int_{\alpha} \varphi_{12}\mathrm{d}s = -\iint_{R} \kappa \mathrm{d}S$$

— Si $\alpha'(s) = T(s) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ alors $\underbrace{k_g}_{\text{Courbure de } \alpha \text{ intrinsèque à la surface}} = \underbrace{\varphi_{12}}_{\text{Rotation du repère } e_1,\ e_2} + \underbrace{\theta'}_{\text{rotation de } \alpha' \text{ dans le repère } e_1,\ e_2}$

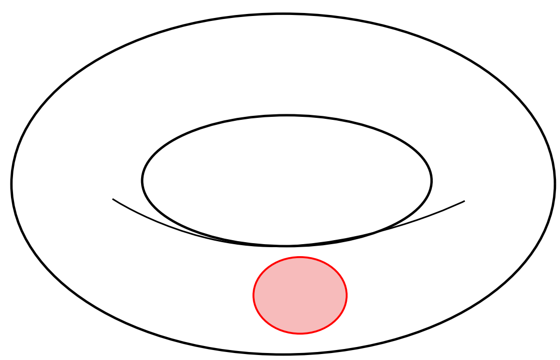
"Umlanfsatz" sur une surface : Si α est une courbe simple fermée contractible sur S alors

$$\int_0^L \theta' \mathrm{d}s = 2\pi$$

ContractibleP qui peut être "remplie" par/borne un disque



non-contractible



contractible

Figure 1 – Contractible vs non-contractible

"Dém" : La quantité $\int_0^L$ est toujours une mutiple de 2π (On commence et finit par le même vecteur). C'est une fonction continue de la courbe α

Version "avec des coins"

Si α est lisse par morceaux

$$\int_0^L = 2\pi = \sum \epsilon_k$$

avec ϵ_k les angles exterieurs de α

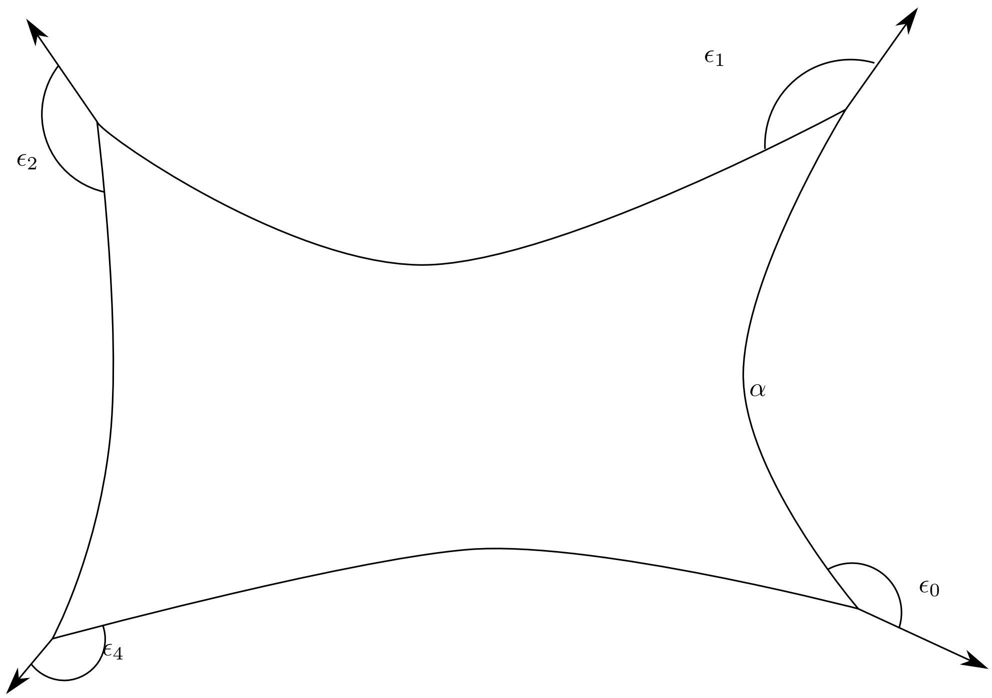


FIGURE 2 – Umlanfsatz sur une surface avec des coins

ϵ_k : l'angle entre le vecteur tangeant entrant et le vecteur sortant au sommet de k

Théorème de Gauss-Bonnet local : Soit α une courbe lisse par morceaux fermées, simples ? ? ?, contractible, bornant R dans la surface S. Alors

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Démonstration : On a montré

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S = -S_\alpha \varphi_{12} \mathrm{d}s = -\int_\alpha \kappa_g - \theta' \mathrm{d}s = -\int_\alpha \kappa_g + \int \theta' \mathrm{d}s = -\kappa_g \mathrm{d}S + 2\pi - \sum \epsilon_k \qquad \blacksquare$$

Exemple : Dans le plan ou sur un cylindre :

$$\implies \int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi$$

Si

$$\kappa_g = 0 (\text{cotées sont des géodésiques})$$

$$\sum \epsilon_f = 2\pi$$

Si α est lisse

$$\int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s = 2\pi$$

: Umlasfstax

Exemple 2 : Sur S^2 $\kappa = 1$

Cercle de lattitude φ_0

$$k_g = \cot \varphi_0$$

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^{0} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = \cdots = 2\pi$$

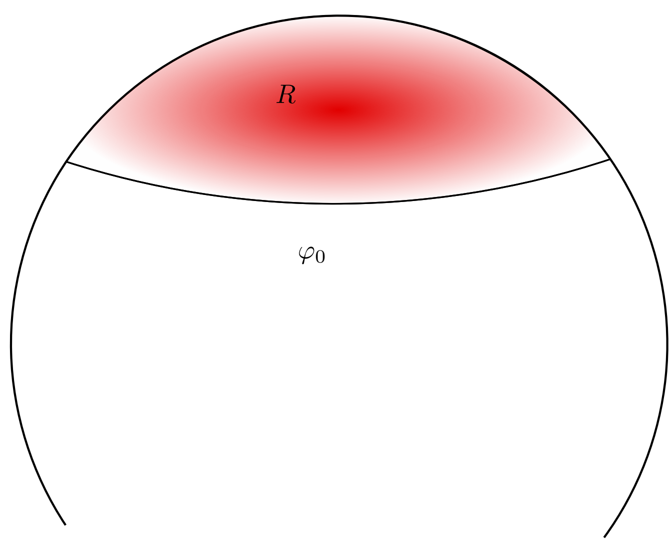


FIGURE 3 – Théorème de Gauss-Bonnet sur la sphère unitée

Cela doit être vrai pour n'importe quel surface qu'on a déformé continuement. (α reste contractible)

$$\iint \kappa \mathrm{d}S + \int_\alpha \kappa_g \mathrm{d}s = 2\pi$$

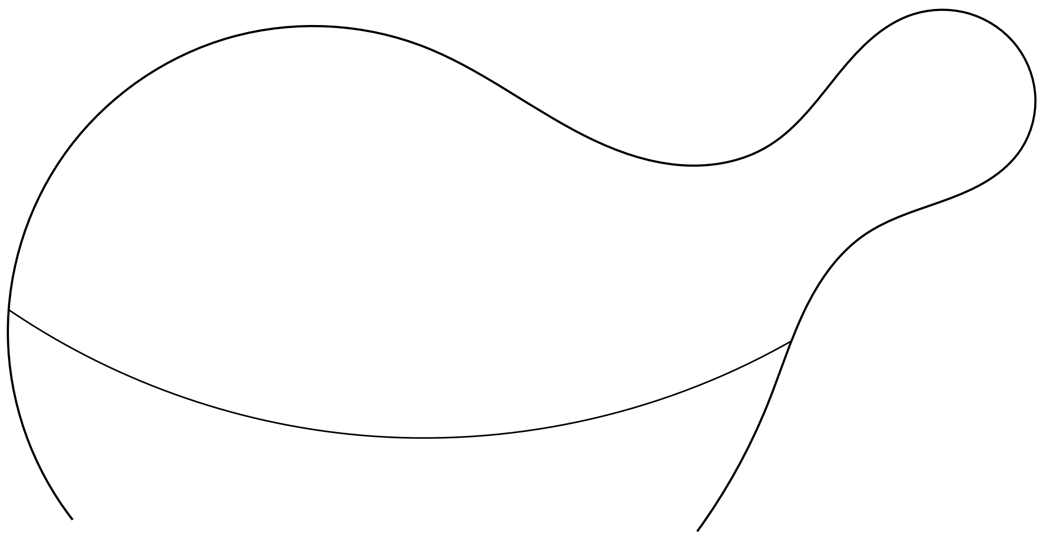


FIGURE 4 – sphère avec un pustule

<u>Corrolaire</u> : si $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ sont les angles intérieurs d'un triangle géodésique T dans S_1 alors

$$\int_T \kappa \mathrm{d}s = -\pi + \sum_i^3 \theta_i$$

<u>Démonstration</u> :

Comme les côtés sont géodésiques $k_g = 0$ sur les côtées.

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 2\pi$$

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S + 3\pi - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 2\pi$$

$$\implies \iint_T \kappa \mathrm{d}S = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi \qquad \blacksquare$$

Courbure positive :

$$\sum_i^3 \theta_i = \pi \iint_T \kappa \mathrm{d}S > \pi$$

Courbure négative

$$\sum_{i}^{3} \theta_i = \pi \iint_T \kappa \mathrm{d}S - \pi$$

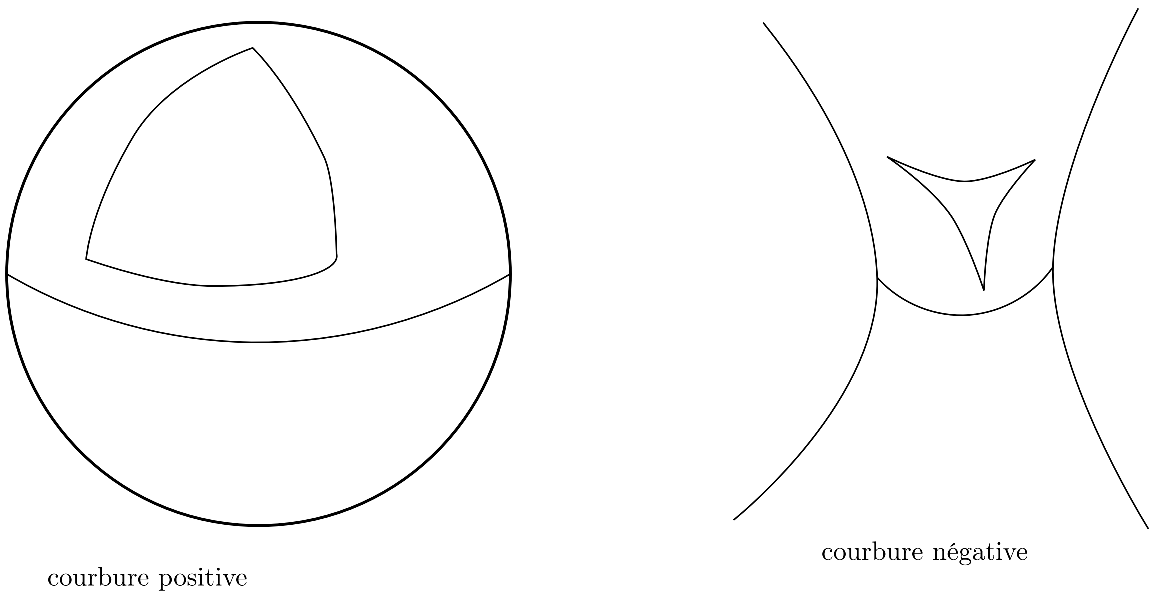


Figure 5 – Trinagle sur surface courbées

Caractéristique d'Euleur d'une surface :

Une trinangulation d'une surface est formée par une collection de triangles (image d'un triangle dans le plan par p)

- 2 triangles se rencontrent en un coté ou rien
- Les trinagles recouvrent la sruface
- Chaque triangle a au plus 1 côté sur le bord de la surface

La caractéristique d'Euleur d'une triangulation T d'une surface S est $\chi(s, \tau) = V - E + F$

Par exemple, la caracthéristique d'Euleur d'un triangle est $\chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1$

Théorème de Gauss-Bonnet (Global)

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(s)$$

Corollaire : Pour une surface sans bord ($\partial S = \emptyset$)

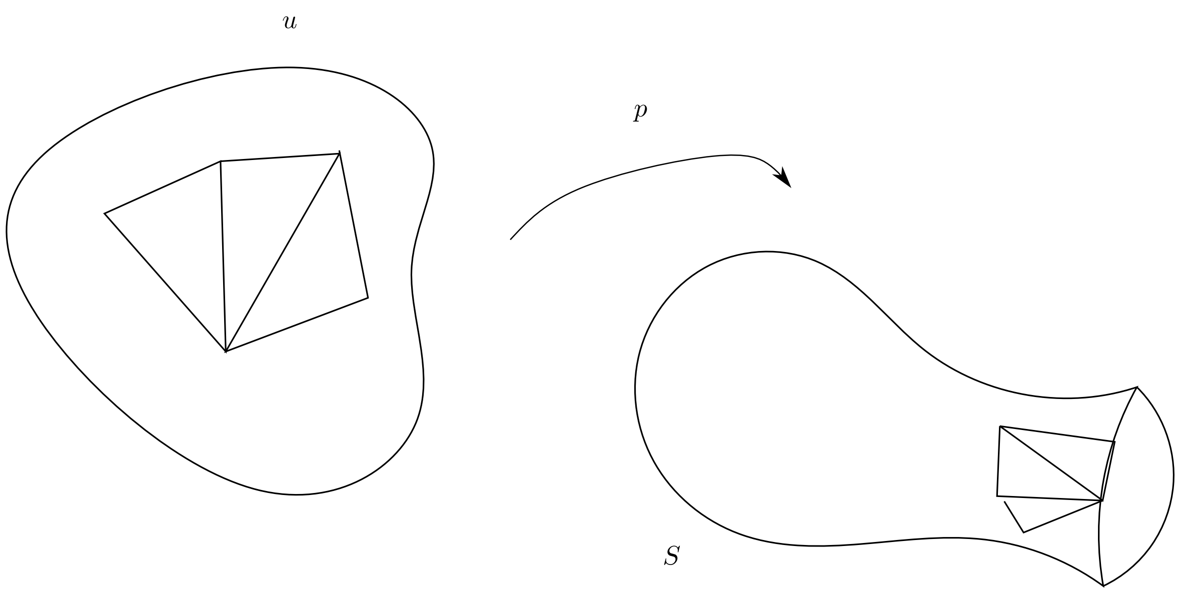


FIGURE 6 – Triangulation d'une surface

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S = 2\pi\chi(s)$$

Démonstration : Pour chaque triangle $\triangle$ de la triangulation τ, on applique le théorème local

$$\iint_\triangle \kappa \mathrm{d}S = \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k^\triangle = 2\pi$$

et on fait la somme sur les F triangles

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \underbrace{\sum_{\triangle\in\tau} \int_{\partial\tau} \kappa_g \mathrm{d}s}_{\text{S'annullent en paires}} + \sum_{\triangle\in\tau} \sum_k^3 \epsilon_k^\triangle = 2\pi F$$

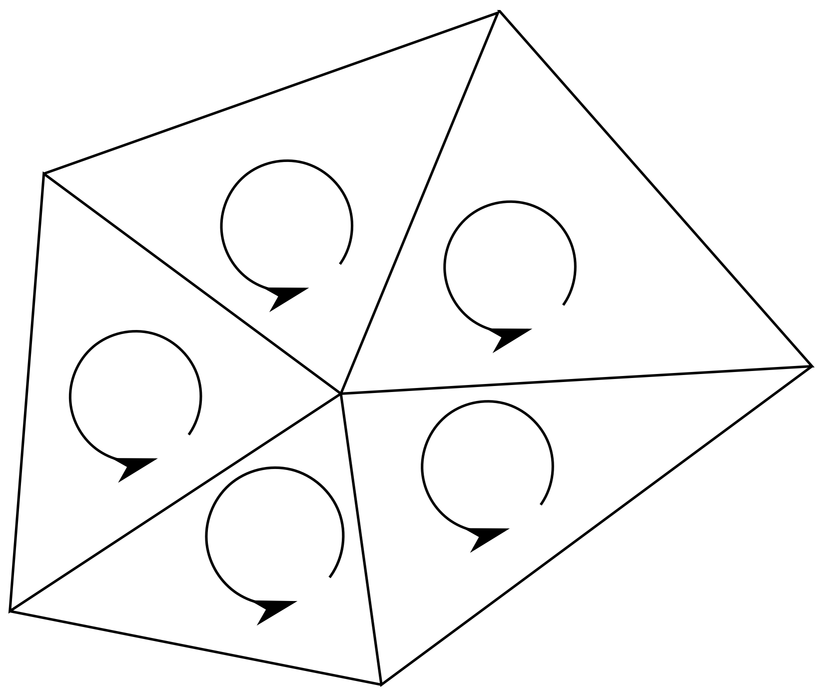


Figure 7 – Circulation des triangles

Rappels

- Angle extérieur ϵ_k
- Umlanfsatz : Si α est une courbe dans une surface, $\alpha' \cdots$
- Gauss-Bonnet local
$$\iint_R \kappa \mathrm{d}A + \int_{\partial R} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k 2\pi$$
- Gauss-Bonnet Global
$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(S)$$
- Caractéristique d'Euleur
$$\chi(S,\tau) = V - E + F$$

Démonstration : τ est une triangulation de S. On applique Gauss-Bonnet à tous les triangle $\triangle \int \tau$ et on fait la somme

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=i}^{3} \epsilon_k^{\triangle} = 2\pi$$

$$\sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_j^{\triangle} = \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} (\pi - i_j^{\triangle}) = 3\pi F - \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} i_j^{\triangle} = 3 - \left(3\pi V - \sum \epsilon_k\right)$$

Donc,

$$\iint_S \kappa + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + 3\pi F - 2\pi V + \sum \epsilon_k = 2\pi F$$

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = - + 2$$

Chaque face a 3 arrêtes, chaque arrête est adjacente à deux faces

$$\implies 3F = 2E$$
$$\begin{aligned} \implies \chi(S,\tau) &= V - E + F \\ &= V - \frac{3}{2}F + F \\ &= V - \frac{1}{2}F \end{aligned}$$

$$= 2\pi(V - \frac{1}{2}F) = 2\pi\chi(S,\tau)$$

Conséquence La caractéristique d'Euleur ne dépend pas de choix de triangulation τ.

Dans un cours de topologie, on démontre que $\chi(S)$ est une invariant topologique (ne change pas pour une déformation continue de la surface)

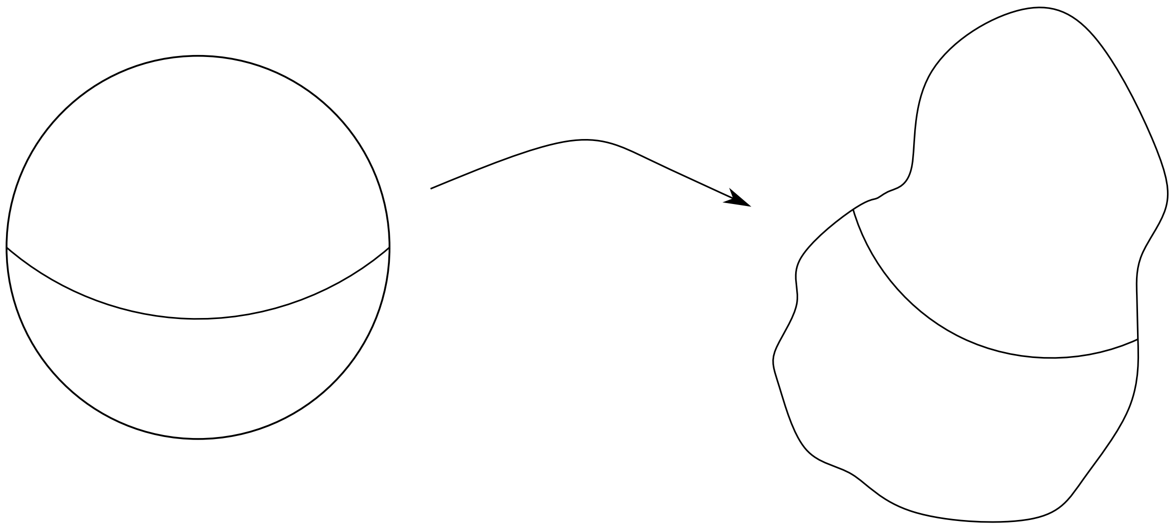


Figure 1 – Déformation continue

La quantité

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_f$$

est invariante sous déformations continues de la surface S.

Exemple : $\chi(S^2) = 2$

$$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$$

$\chi(\Pi^2) = 0$ (exercice)

Exemple : Une surface de courbure $\kappa \leq 0$ ne contiens pas de bigone géodésique.

Gauss-Bonnet

$$\implies \iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_{\alpha_1} \kappa_g \mathrm{d}s \int_{alpha_2} \kappa_g \mathrm{d}s + \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\pi$$

mais

$$\iint \kappa \mathrm{d}S + \epsilon_1 \epsilon_2 \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \pi\pi = 2\pi \quad \lightning$$

Donc un bigone ne peut pas exister si $\kappa \leq 0$

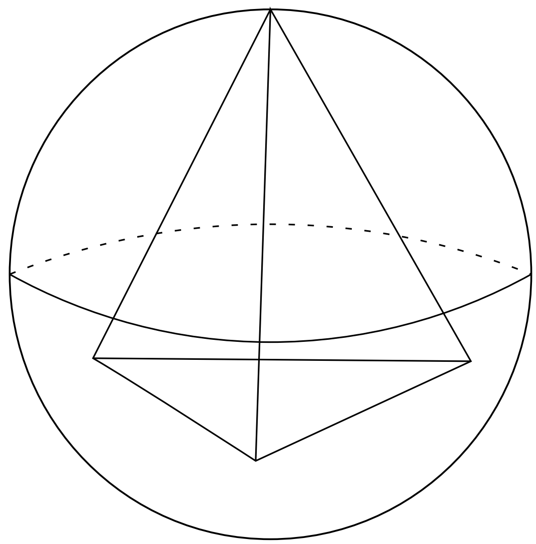


FIGURE 2 – Triangulation d'une shpère

Exemple : Si une surface topologiquement équivalente ;a une cylindre à $k < 0$ alors elle a au plus une géodésique ? fermée.

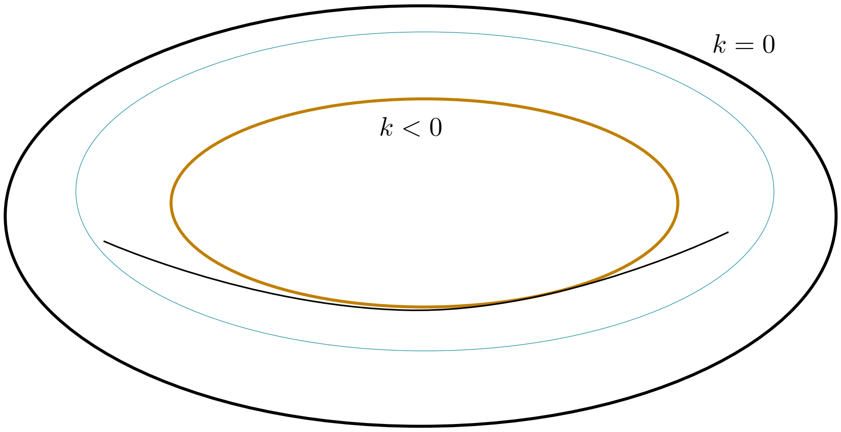


Figure 3 – tore

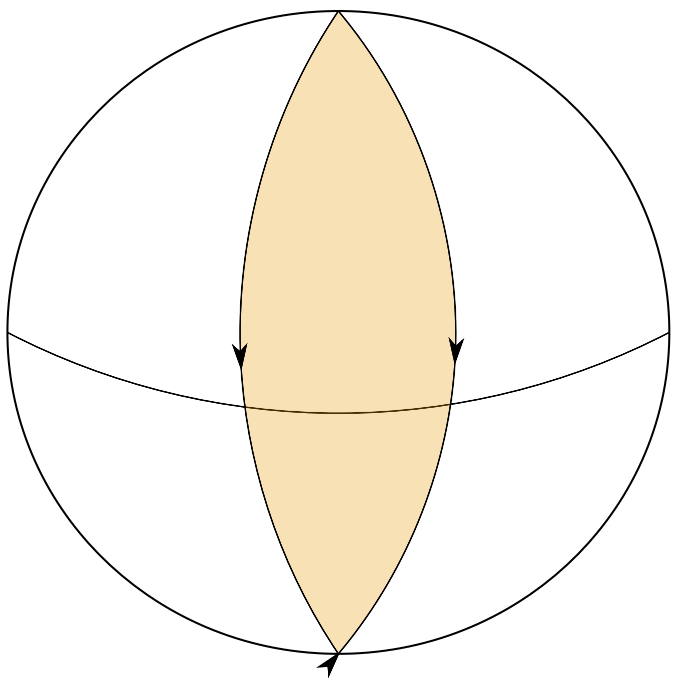


Figure 4 – bigone géodésique sur une sphère

Rappels

— Gauss-Bonnet :

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(S)$$
$$\chi(S) = V - E + F$$

Ex :

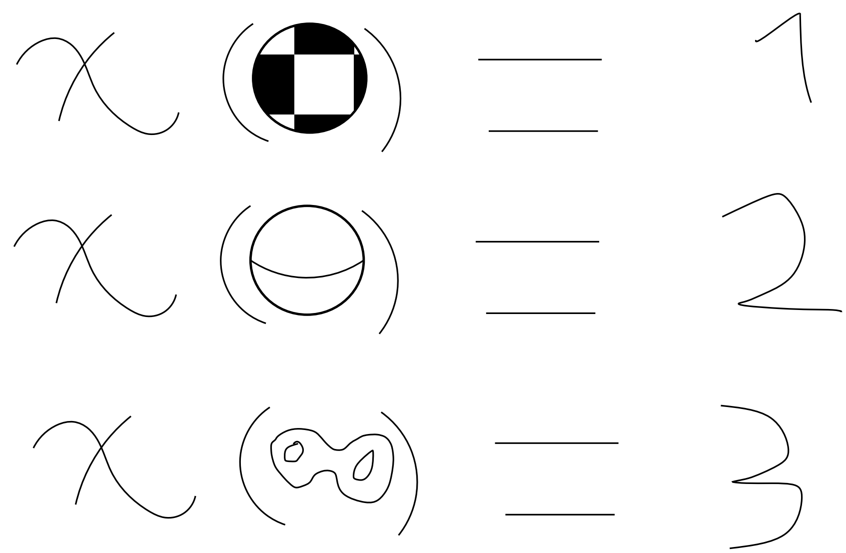


Figure 1 – Exemple de chi

Pour calculer

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S = \iint_u \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\right)\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

<u>Exemple</u> : Dans une surface avec $\kappa \leq 0$, il n'y a pas de bigones géodésiques.

Dans une surface topologiquement équivalente à un cylindre avec $\kappa < 0$, il y a au plus une géodésique simple fermée

<u>Démonstration</u> Supposons qu'il y a deux tels géodésiques sur la surface appellées α_1 et α_2 .

Pour chaque, il y a deux possibilité. Soit une géodésique simple fermée borne un dique (1), soit elle sépare le cylindre en deux (2).

(1) est impossible car

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int \underbrace{\kappa_g}_{0} \mathrm{d}s = 2\pi\chi(R) \implies 0 > 2\pi\chi(r) = 2\pi \lightning$$

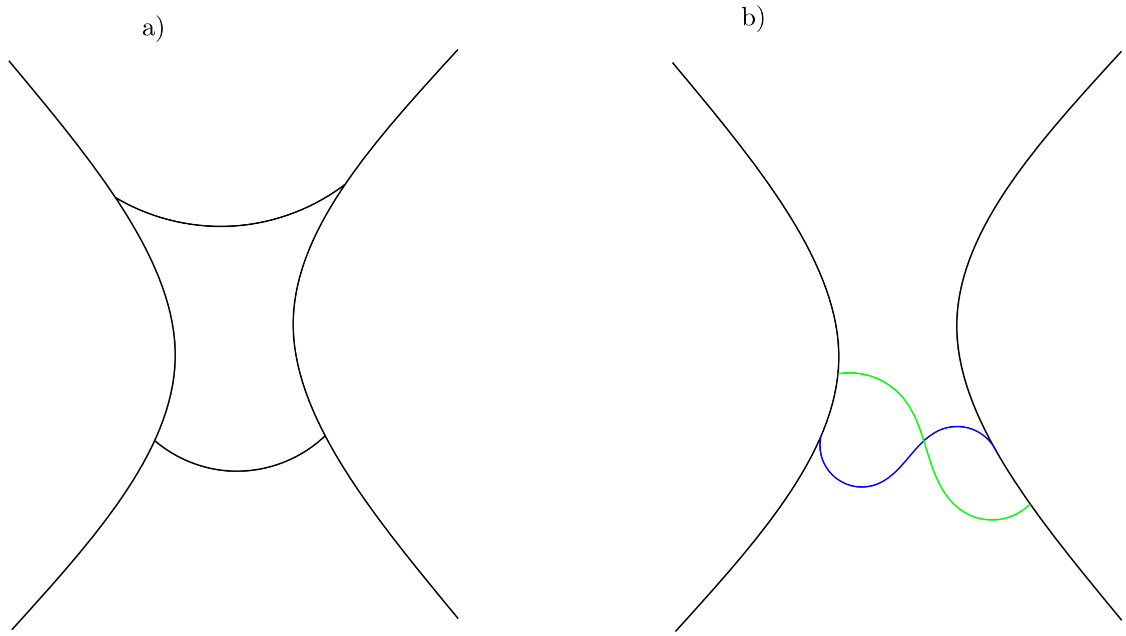


Figure 2 – cas (2)

(2) est la seule possibilité. Si α_{12} sont deux coubes distinces.

Dans le cas b), les coubres ne peuvent s'intersecter en un nombre impaires de points par unicité des géodésiques. Si elle s'intersectenet en un nombre impaires de points, on a des bigones géodésiques, ce qui est impossible sur une telle surface ($\kappa < 0$).

Cas a)

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \underbrace{\kappa_g}_{0} \mathrm{d}s = 2\pi\chi(R)$$

$$0 > 2\pi\chi(R) = 0 \lightning$$

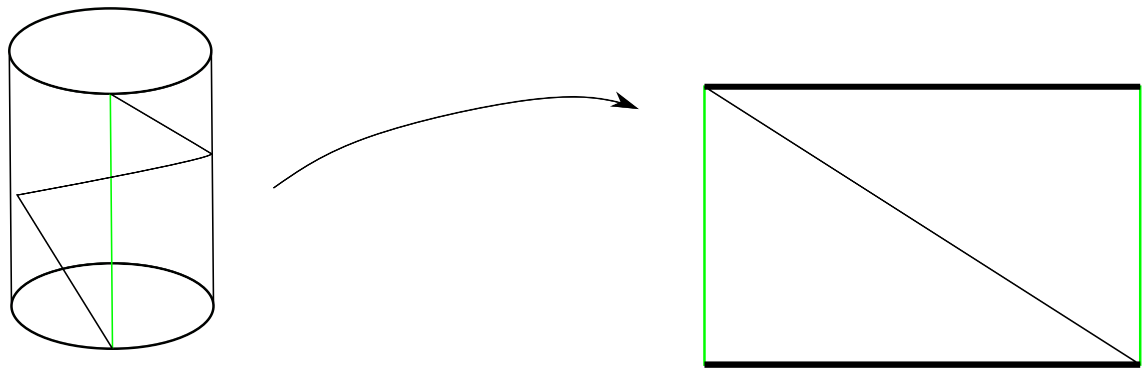
Rappel

Si T est un triangle géodésique,

$$\iint \kappa \mathrm{d}S = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

Sur la sphère de rayon 1, $\equiv 1$ <u>Proposition</u> : Pour une triangle géodésique de la sphère, Aire$(T) = \sum \theta_i - \pi$ Ex : Aire$(R) = \frac{4\pi}{8} = \pi 2$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$



$V - E + F = 2 - 4 + 2 = 0$

Figure 3 – Triangulation d'un cylindre

Introduction à la géométrie hyperbolique

Ceci ce veux être une introduction *historique* à la géométrie non-euclidienne

Peut-on contruire un surface de courbure constante négative ?

Ou ! : la pseudosphère (Surface de révolution de la tractrice.

Cette propriété n'as pas toute les propriétés qu'on aimerait que la surface universelle de coubure négative ait. Elle à des désavantage par rapport au plan ou à la sphère. En effet la surface n'est pas complète. Par là, on entend qu'il existe des géodésiques de longeures fini qui ne se prolongent pas. (On peut tomber en bas de la surface)

La sphère à l'avantage d'être homogène. On aimerait avoir une surface de courbure négative constante qui est homogène églament. On ne veut pas qu'il y ait un bord. Ce problème ne peut pas être reglé à moins de changer notre définition d'une surface.

Un théorèmde de Hilbert dit qu'il n'existe aucune surface complète dans $\mathbb{R}^3$ de courbure constante négative. On aimerait quand même avoir une telle surface. Un des raison qui nous pousse à la vouloir et que par exmple, sur shpère la somme des angle des trinangle est toujours égale ? à π. On voudait avoir une surface sur laquelle l'aire des triangle est toujours inférieut à π.

Imaginons une surface de paramétrisation P avec le domainre $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\right\}$ et t.q. la première forme fondamentale est $M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$. Calculons Γ_{ij}^k pour cette surface

$$\Gamma^x_{xx} = M_i^{-1}\begin{pmatrix} E_x/2 \\ F_x - E_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{xy} \\ \Gamma^y_{xy} \end{pmatrix} = M_I^{-1}\begin{pmatrix} E_y/2 \\ G_x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^x_{yy} \\ \Gamma^y_{yy} \end{pmatrix} = M_I^{-1}\begin{pmatrix} F_y - G_x/2 \\ G_y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

$$\implies \Gamma^y_{xx} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma^x_{xy} = \Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{y} \qquad \text{les autres termes sont tous nuls}$$

Selon la première équation de Gauss

$$E \cdot \kappa = \cdots$$

$$\implies \frac{1}{y^2} \cdot \kappa = -\frac{1}{y^2} \implies \kappa = -1$$

Pour calculer les distances de cette *sruface*, on utilise I

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{y^2}x'^2 + \frac{1}{y^2}y'^2}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{p(\gamma(t))' = x'p_x + y'p_y}$$

Comme on divise par y, les chemins à petit y devienne long rapidement.

Calculons les géodésique de cette surface

$$x'' + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^x_{xx} & \Gamma^x_{xy} \\ \Gamma^x_{xy} & \Gamma^x_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$y'' + \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma^y_{xx} & \Gamma^y_{xy} \\ \Gamma^y_{xy} & \Gamma^y_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies x'' + 2x'y'\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$y'' + x'^2\left(\frac{1}{y}\right) - y'^2\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{2}{y}x'y' = 0 \\ y'' + \frac{1}{y}\left(x'^2 - y'^2\right) = 0 \end{cases} \tag{1, 2}$$

<u>Proposition</u> : Les géodésique de cette surface sont les demi-droite verticales et les demi-cercles centré sur l'axe x.

<u>Démonstration</u> :

On va commencer par régler le cas des demis-droite verticale

Si $x(t)$ est constant $x' = 0$ et $x'' = 0$ (1) est satisfait !. (2)

$$\begin{gathered} y'' + \frac{1}{y}(-y'^2) = 0 \\ y'' = \frac{y'^2}{y} \\ \frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \\ \ln y' = \ln y + C \\ y' = C_1 y \\ y = C_2 e^{c_1 t} \end{gathered}$$

Donne une demi-droite verticale $\gamma(t) = (x_0 C_2 e^{C_2 t}$

<u>Exercice</u> : Vérifier que cette demi-droite est paramétré à vitesse constante.

Si $x(t)$ n'est pas constante, on utilise x comme paramètre : on écrit $t = t(x)$ $y = y(t(x))$

...

Rappels

— Le plan hyperbolique
$$U = \{(u,v) | v > 0\}$$
muni de la métrique
$$M_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$
Courbure gaussiene : $\kappa_g \equiv 1$ Symbol de Chrsitoffel $\Gamma^v_{uu} = \frac{1}{v}$ $\Gamma^v_{vv} = \Gamma^u_{uv} = -\frac{1}{v}$ Les autres sont nuls

Proposition : Les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ sont des demis-droites verticales et les demi-cercles centrées sur l'axe u .

Démonstration : x constant : good (demi-droite vecticale) Sinon :

$$\begin{cases} u'' - \frac{2}{v} u'v' = 0 \\ v'' + \frac{1}{v}(u'^2 v'^2) = 0 \end{cases}$$

On réécrit en termes de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$, $\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(v(t(u))\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} ? \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}u^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^{-2} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \cdots = \frac{-\left(u'^2 + v'^2\right)}{vu'^2} \end{aligned}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} = \frac{-\left(u'^2 + v'^2\right)}{vu'^2} = -\frac{1}{v} - \frac{1}{v}\left(\frac{v'}{u'}\right)^2 = -\frac{1}{v}\left(1 + (dvvu)^2\right)$$

$$v\frac{\mathrm{d}2}{\mathrm{d}vu} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 = -1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right) = -1$$

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -u + C$$

$$\int v\mathrm{d}v = \int -u\mathrm{d}u + C\mathrm{d}u$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{u^2}{2} + Cu + C'$$

$$v^2 + u^2 - 2Cu = 2C'$$

$$v^2 + (u - C)^2 = 2c' + c^2$$

Équation d'un cercle de rayon $\sqrt{2C' + C^2}$ et centré en $(C, 0)$

$$\blacksquare$$

Maintenant qu'on connait les lignes droite de notre nouvelles géométrie, on peut essayer de trouver des propriété analogues avec la géométries qui nous est familiaire, soit la géométrie Euclidienne.

Le plan hyperbolique satisfait aux axiômes d'Euclides saut le cinquième.

Celui-ci s'énonce :

Cinquieme postuat

Étant donné une droite ℓ et un point $p \notin \ell$ il existe une unique droite ℓ' par p parallèle à ℓ

Dans la géométrie Hyperbolique par contre, il existe une infinité de tels droites !

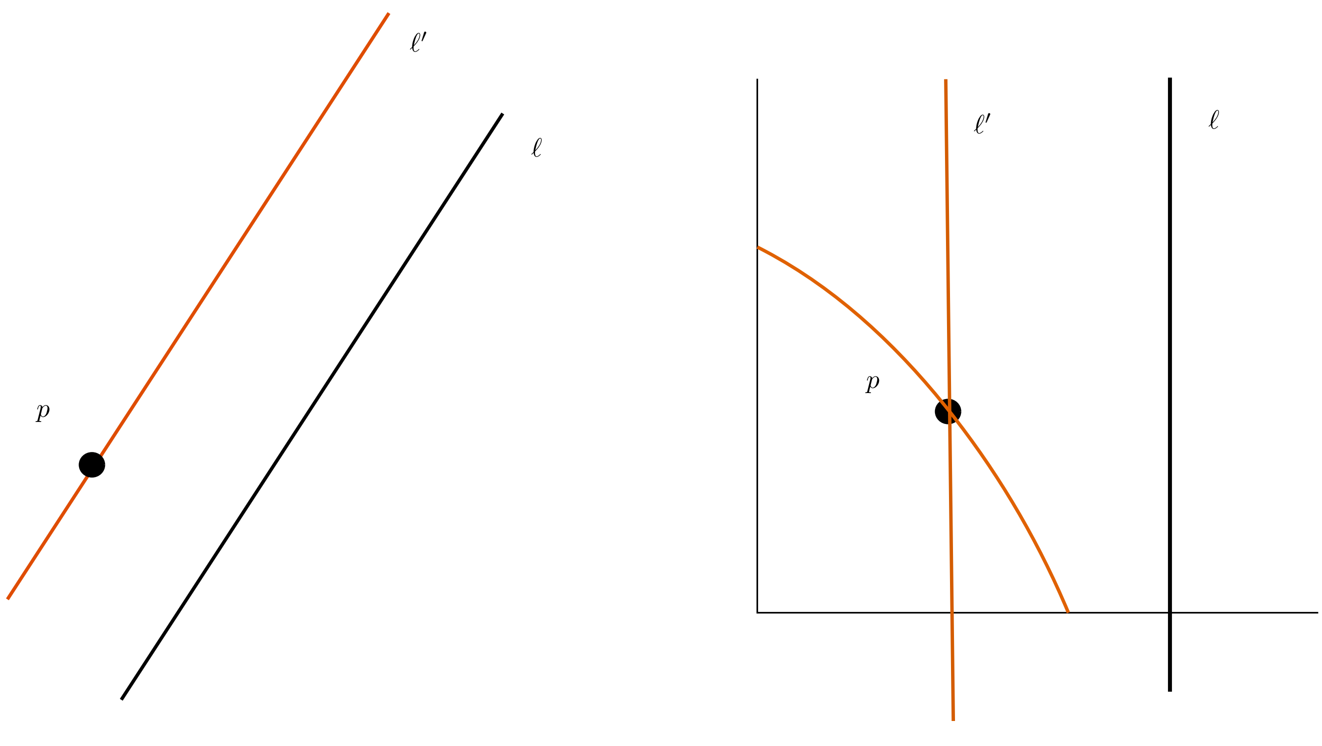


Figure 1 – Comparaison entre 5ieme postulat euclidien et hyperbolique

Tout les triangles hyperboliques on un aire inferieur à π

Gauss-Bonnet :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi - \mathrm{Aire(t)}$$

:)