2024-01-11

# 1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, ou $G$ est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \to G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \cdots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \to E | f \text{ est inversible }\}$$

avec l'opération de composition $\circ$

On l'appel le groupe symétrique de $E$

$S_n = S_{\{1,2,\cdots,n\}}$

Est le groupe des permuations de $n$ éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes $(G, H)$ est une fonction $f : G \to H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$. Si $f$ est inversible alors $f^{-1}$ est aussi un morphisme et on dit alors que $f$ est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe $G$ sur un ensemble $X$ est une application

$$\bullet : G \times \to X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{X} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

Définition : Une action de $G$ sur $x$ est un homomorphisme $f : G \to S_x$

Les deux définition sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_{2)(x)} =& (g_1 * g_{2)} \bullet x \\ =& g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_{1)}(f(g_{2)(x)}) \\ &= \left[f(g_1) \circ f(g_2)\right](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si $X$ a plus de structure et qu'on a une action de de $G$ sur X qui preserve la structure lors on dit que $G$ agit par (homéomorphise, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur $X$

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

**ATTENTION** : $S_4$ n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permuations *brisent le triangle*) S. Par contre $S_4$ agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permuations paire

$A_5$ agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation $S_E$

Démonstration : On considère l'action de $G$ sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

on obtiens $f : G \to S_G$ : homomorphisme injectif car si $f(g_{1)} = f(g_1)$ alors $f(g_{1)(e)} = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe a } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe $G$ est une actions linéaire de $G$ sur un espace vectoriel $V$. Autremenet dit, un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$. Le rang d<une représentation est dimV

exemples :

$$\rho \mathbb{C}^* \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

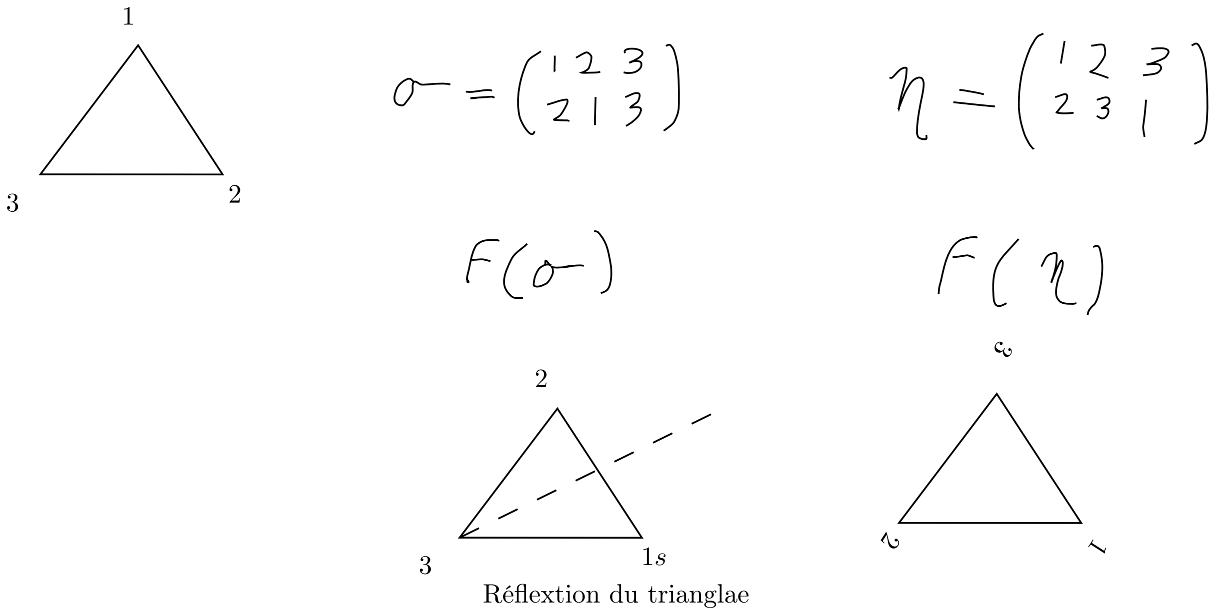


Figure 1 – Triangles équilatérals

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

*Si*

2024-01-15

## retour sur le dernier cours

$$(G, \bullet) \quad \text{c'est un groupe}$$

$$S_E = \{\sigma : E \to E | \sigma \text{ inversible } \} \quad \text{est une groupe pour la composition}$$

Un cycle est un élément de $S_n$ de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i\neq 1},\, \sigma(a_k) = a_{1,}\, i = 1, \cdots, k$$

On le note $(a_1\, a_2\, a_3\, \cdots\, a_k)$

**Fait important**

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2) \circ (3\,5) = (3\,5) \circ (1\,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1\,7\,5\,6\,2\,3\,4)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longeur $\ell$ est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est imparire} \end{cases}$$

On a la relation $\mathrm{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de $G$ sur $X$ : deux définitions

1. $\bullet : G \times X \to X$
2. homomorphisme $f : G \to S_x$

Représentation de $G$ : action linéaire de $G$ sur un espace vectoriel $V$

Exemple : La Représentation vectoriel sur $V$

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G,\, v \in V$$
$$\rho : G \to GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour $G$ fixé, on a la représentation régulière $(R)$ (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \cdots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \cdots, g_n\}$$

On définit $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$
$$V = \langle e_0\, e_1\, e_2 \rangle$$
$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe $\mathbb{Z}_3$ sont ici representé par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement , si $G$ agit sur $E$ (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur $\langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle \quad E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ par $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_1 \quad$ (action de $G$ sur $E$)

exemple : $V = \mathbb{C}$ Ou on prend $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$
$$\rho : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$
$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentaation de

$$\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$$

est la restriction de $\rho$ à un sous-espace $U \subset V$ invariant par $\rho$. c-à-d, si $u \in U$, alors $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour $R : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ Le sous-espace $\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z \in \mathbb{C}\}$ est une sous représentation triviale

Le sous-espace $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 0 \right\}$ est aussi une sous-représentation de $R$ de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre $(\neq 0, \neq V)$

Exemple : $S_3$ :

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(3, \to \mathbb{C})$ la représentation de permutation induite par l'action ? ? ? de $S_3$ sur $\{1, 2, 3\}$ $\rho(12) = \cdots 3x3$, $\rho(123) = \cdots 3x3$

$\rho$ est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | z \in \mathbb{C}\}$$

est invariant est irréductible

Également, $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} | z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ est invariant

Es-ce que $U_0$ est irréducibleÉ

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

Conculsion : $U_0$ est une représentation irréductible. On l'appelle repreésentation standard de $S_3$

Ex : $S_3$

$$\mathrm{sgn} : \mathrm{S}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si $\rho_{1:}G \to \text{GL(u)}, \quad \rho_{2:}\text{G} \to \text{GL(v)}$ sont 2 représentation de $G$, leurs <u>somme directe</u> est la représentation $\rho_1 \oplus \rho_{2:}G\text{GL(u}\oplus\text{v)}$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

<u>Exemple :</u> si $U = \mathbb{R}^n \ V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$ contient $u \oplus 0$ et $0 \oplus v$ comme sous représentation

<u>Proposition</u> : Soit $U \subset V$ une sous-repr/sentation de $\rho : G \to \text{Gl(V)}$. Alors, il existe une sous-représentation $W \subset V$ telle que $V = U \oplus W$

**Attention !**

Faux en général pour les groupes infinis

<u>Exemple :</u> $\rho : \mathbb{Z} \to \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de $\mathbb{Z}$, $\langle e_1 \rangle$ est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe par d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration :</u>

Soit $V_0 \subset V$ n'importe quel complément de $U$ $(V = U \oplus W_0)$

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_o \quad \text{pour} \quad w \in W_0$$

Soit $\pi : V \to U$ la projection complémentaire à $W_0$

Définissons $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$ si $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g)\pi\left[\rho(g')u\right]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \cancel{\rho(g)\rho(g^{-1})}u$$

$$\frac{1}{|G|}|G|u = u$$

$$\implies \pi' : V \to U \quad \text{est surjectif et indentité sur}$$

$$W = Ker(\pi') \quad \text{est notre candidat de sous-représentation}$$

Vérifions que $W$ est $\rho(G)$ invariant

$$h \in G \quad V \in \mathrm{Ker}\pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g)\pi\rho(g')\rho(h)v = \cdots = 0$$

comme $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , , ,$$