2024-03-21

Rappels

$$h \subseteq g: \text{ sous algèbre de Cartan}$$

$$g = h \bigoplus_{a \in R} g_\alpha \quad R \subseteq h^*$$

$$\mathfrak{s}_\alpha = \left\langle \underbrace{X_\alpha}_{\in g_\alpha}, \underbrace{Y_\alpha}_{\in g_{-\alpha}}, \underbrace{H_\alpha}_{\in h} \right\rangle \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

$V-$représentation de $\mathfrak{g}$

$$V = \bigoplus V_\alpha$$

$$\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

$$\Lambda_R = \mathbb{Z}R \subseteq \Lambda_W$$

Réflexion dans une racine α

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathscr{W} = \langle W_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \text{ groupe de Weyl}$$

les poids de V sont stalbes par $\mathscr{W}$
On fixe $\ell : h^* \to \mathbb{R}$

$$\ldots$$

Proposition :

(i) Toute représentation a un vecteur de plus haut poids
(ii) Les sous-espace $W \subseteq V$ engendré par V et applications successive de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in R^-}$ et une sous représentation irréductible
(iii) Toute représentation irréductible admet une unique vecteur de plus haut poids

Démonstration :

(i) Soit α maximal parmis les $V_\alpha \neq \{0\}$ pour l'ordre partiel

$$\alpha > \beta$$

ssi $\ell(\alpha) > \ell(\alpha)$ et soit $v \in V_\alpha$

S'il existe $X \in \mathfrak{g}_\beta$ avec $\beta \in R^+$ et $X \cdot v \neq 0$ alors $X \cdot \in V_{\alpha+\beta}$ et $\ell(\alpha + \beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) > \ell(\alpha)$ considérant la maximalité

Parmis les racines de R^+ on dit que $\alpha \in R^+$ est une racine simple s'il n'existe pas de $\beta_1, \beta_2 \in R^+$ t.q. $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

Lemme : : Si α, β sont simples alors $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ ne sont pas des racines

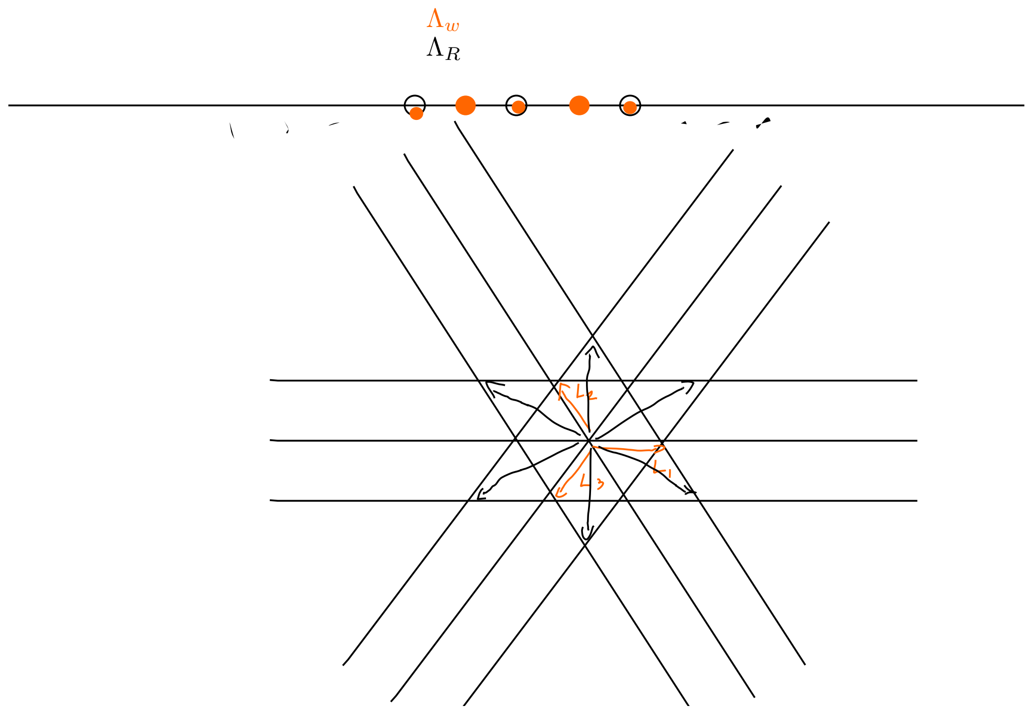

Figure 1 – Resaux

<u>Dém :</u>

...

(ii) W est aussi engendré par V et ses images successives par $\{X_{-\alpha}\}_{\alpha \in S}, S \subseteq R^+$: racins simples

- W est stable par $\{X_\alpha\}_{\alpha \in R^-}$ - W est stable par $H \in h$

Reste à montrer que W est stable par $\{X_\alpha\}_{\alpha \in S}$

$W_n \subseteq W$ sous-espace où on applique des monts de longeure $\leq n$

Par récurence on montre que $X_\alpha W_n \subseteq W_n \;\; \alpha \in S$

Soit $u \in W_n$ un générateur

$$\implies u = X_\beta u' \quad \text{où} \quad u' \in W_{n-1}$$
$$-\beta \in S$$

Soit

$$X_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in S$$

Alors $X_\alpha u = X_\alpha X_\beta u' = (X_\beta X_\alpha + [X_\alpha, X_\beta])\, u'$

$$= X_\beta X_\alpha u' + [X_\alpha, X_\beta] u'$$

Étape 8 :

Classifier les représentations irréductibles

Dans le sous-espace réal de h^* engendré par R, on note $\mathcal{C} = \{\beta | \beta(H_{\alpha)} \geq 0 \forall \alpha \in R\}$

On appelle cela une chambre de Weyl

Théorème :

Pour tout poids $\alpha in \mathcal{C} \cap \Lambda_W$ il existe une unique représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ ayant α comme plus haut poids.

On obtiens une bijections entre les représentations irréductible de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{C} \cap \Lambda_W$

Démonstration : ON démontre l'unicité seulement

Soient U, V deux représentation irréductible ayant α comme plus haut poids. Soient $u \in U_\alpha$, $v \in V_\alpha$ comme plus haut poids. Alors $(u, v) \in U \oplus V$ est une vecteur de plus haut poids α dans $U \oplus V$

$\implies$ (u, v) engendre une sous-espace

$$W \subseteq U \otimes W$$

irréductible

$$\pi_u : W \to u$$
$$\pi_v : W \to v$$

sont des isomorphismes de représentation (par le lemme de Shur)

$$\implies U \cong V$$

La forme de Killing

On définit $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$

Par la formule $B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}X \circ \operatorname{ad}Y)$

Observation :

$X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in g_\beta$

avec $\beta \neq \pm\alpha$

Alors, pour tout $Z \in g_\gamma$

on a $(\operatorname{ad}X \circ \operatorname{ad}Y)(Z)$

$$= [X, [Y, Z] \in g_{\gamma+\alpha+\beta} \neq g_\gamma$$

En particuleier $[X,[Y,Z]]$ n'as pas de composante en Z

$$\implies B(X,Y)=0$$

Autrement dit $g_\alpha \perp g_\beta$ si $\beta \neq -\alpha$

La décomposition $g = h \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in R^+} (g_\alpha \oplus g_{-\alpha})\right)$

est orthogonale pour B

Si $X,Y \in h$ alors $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}Y)(Z) = [X,[Y,Z]] = \alpha(Y)[X,Z] = \alpha(X)\alpha(Y)Z$$

$$\implies \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y) = \sum_{\alpha\in R}\alpha(X)\alpha(Y)$$

sur le sous-esapce réel engendré par les H_α

B est définie positive

$$B(H_\alpha,H_\beta) = \underbrace{\sum_{\gamma\in R}\gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta)}_{\in\mathbb{Z}}$$

si $H \in \mathbb{R}\langle H_\alpha\rangle_{\alpha\in R}$

alors $B(H,H) = \sum_{\alpha\in R}\alpha(H)^2 \geq 0$

si $B(H,H)=0$

$\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in R$

$$H=0$$

car R engendre h^*

Porp : $B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z])$

Démonstration :

$$\ldots$$

Proposition : si g est simple alors B est non dégénéré

(rappel : B est dégénérée si $Ker(B) \neq \{0\}$ $\mathrm{Ker}(B) = \{X \in g | B(x,y) = 0 \forall y \in g\}$

Démonstration : Supposons qu'il existe $X \in \mathrm{B}, X \neq 0$

Alorsm pour tout Y et tout $Z \in g$

$B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z]) = 0$

$$\implies [X,Y] \in \ker B$$

$$\implies B \subseteq g$$

est un ideal