2024-03-11

Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = h \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ osti, je suis deja done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :
Si $v \in V_\alpha, C \in g_\beta$ β-racine, α-poids
alors $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in h$ t.q. $a_0 > b_0 > C_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids v qui satisfait

— $v \in V_\alpha$ pour $\alpha \in h^*$

— $E_{23}v = E_{13}v = E_?v = 0$

Proposition :

V est engendré par v (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

W le sous-espace engendré par v et tout les motes possibles en $E_{2,1}, E_{32}, E_{31}$ appliqué à V

$$W = \langle v, E_{21}v, e_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \cdots\rangle$$

On veur montrer que W est $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-invarient

Partie facile, W est invariant par h et par E_{21}, E_{31}, E_{32}

Reste à montrer que W est invarient par $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$, il suffit donc de vérifier $E_{1,2}W \subseteq W$ et $E_{23}W \subseteq W$

Posons W_n le sous-espace engendré par va et tout les mots en E_{21}, E_{32} de la longeure $\leq n$ appliqué à v

Par récurence, on montre $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$, $E_{2,3} \cdot W_{n_\subseteq} W_{n-1}$

Soit $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour} \quad w' \in W_n - 1$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1. $$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12})\, w'$$

$$E_{1,2} \in g_{L_1-L_2}$$
$$E_{21} \in G_{L_2-L_1}$$
$$\implies [E_{1,2}, E_{21}] \in h = g_e$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$E_{2,3} \cdot w = E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w'$$
$$= \left(\underbrace{[E_{23}, E_{21}]}_{0} + E_{2,1} + E_{23} \right) \cdot w'$$
$$= \underbrace{E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')}_{W_{n-2}}}_{W_{n-1}}$$

2. même chose

   Puisque $W = \bigcup_n W_n$, W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$ ■

De la preuve, on déduit :

Pour V une représentation (pas nécéssairement irréductible), si v est un vecteur de plus haut poidsm alors le sous espace engendré par v est ses images par E_{21} et $E_{3,2}$ est une sous représentation irréductible

Il existe un n pour lequel $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$ mais $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation : $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$ est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre α et $\alpha + m(L_2 - L_1)$)

$$\begin{array}{ccc} E_{21} & E_{12} & E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y & X & H \end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur V (par nécéssairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour H dans un représentation de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$ sont entière et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de "H" $= E_{11} - E_{22}$ sont $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \cdots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \cdots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre α et $\alpha + n(L_2 - L_1)$ est symétrique par rapport à la droite $\beta(H_{12}) = 0$

Posons $\alpha + \alpha\left(J_{1,2}\right)\left(L_2 - L_1\right) = \alpha_2$ et $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a $E_{21} \cdot v_2 = 0$, $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$, $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

v_2 est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets α et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2024-03-14

2eme heure

$$sym^n(\mathbb{C}^3 = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k | i+j+k=n \right\rangle$$

les poids sonts $H \cdot \left(e_1^i e_2^j e_3^k\right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H) e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est nL

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

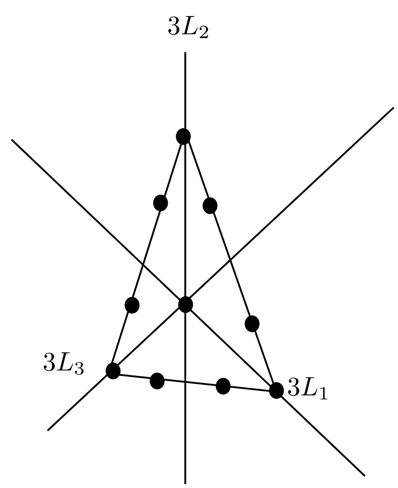

FIGURE 1 – triangle

$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^3)$ par le même argument a pour plus haut poids nL_3 est est irréductible

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$ est un vecteur de plus haut poids.

Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\begin{gathered}\varphi : \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (uv)\otimes\alpha \mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u\end{gathered}$$

$$\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) = \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha))$$

$$= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x)$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha)$$

$\mathrm{Her}(\varphi) \subseteq \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$ est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \mathrm{Ker}\varphi(\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_{1)}e_1$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_{2)} = 2L_1 - L{-}_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans $\mathrm{Ker}(\varphi), \dim(V_{L_1)} = 2$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que V_{L_1} est engendré par $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$ et $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*$

$$\begin{aligned} E_{32}E_{21}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right) &= E_{32}\left((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)\right) \\ &= E_{32}\left(2e_1e_2 \otimes e_3^*\right)\end{aligned}$$

$$= 2(e_1e_3 \otimes e_3^* + e_1e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right)$$

$$= E_{21}le0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21}\left(e_1^2 \otimes e_2^*\right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b\mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids $aL_1 - bL_3$ On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphimse

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \to \mathrm{Sym}^{a-1}\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

2024-03-18

Rappels

Les représentation irréductibles de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ sont en bijection avec $\{(a,b) > a, b \leq 0 \text{ entiers}\}$

$$\to \Gamma_{a,b}$$

dont le plus haut poids et $aL_1 - bL_3$

$$\Gamma_{a,b} \subseteq \mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b(\mathbb{C}^3)$$

$$\Gamma_{a,b} = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}\mathbb{C}^{3*} \to \mathrm{Sym}^{a-1} \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

Recette pour analyser les représentation d'une algèbre de Lie semi-simple

Rappel

Simple : ad_X est irréductible $\iff$ pas d'idéal non-trivial

Semi-simple : Somme direct d'algèbre simple

Étape 1 : Identifier une sous algèbre $h \subseteq g$ abélienne diagonalisable maximale. On appelle h une sous-algèbre de Cartan

On a vu que si un algèbre est diagonalisable dans une représentation, elle l'est dans toutes les représentations. Une algèbre diagonalisable est une algèbre qu'on peut montrer diagonalisable dans au moins une représentation.

Attention

Ex :

$$\square(3,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{C}\}$$

h n'est pas nécessairement diagonale

truc : choisir une base jacobienne Dans une base t.q. la forme bilinéaire est donnée par la matrice $J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, $\square(3\mathbb{C})$ est donné par $X^t J + JX = 0$

$$\ldots$$

$$\square(3,\mathbb{C}) = \{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & -b \\ 0 & -c & -a \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{C}\}$$

ici, on peut prendre $h \in \{\begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix}\}$

Étape 2 : Décomposer $\mathfrak{g}$ selon les poids (racines) de sa représentation adjointe

$$g = h \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} g_\alpha \right)$$

où $R \subseteq h^*$ est t.q. $g_\alpha \neq \{0\}$

$$g_\alpha = \{X \in g | \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \forall H \in h\} = \{X \in g | [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$$

<u>Faits</u> :

i) $\dim(g_\alpha) = 1 \forall \alpha \in R$
ii) R engendre un réseau $\Lambda_R \subseteq h^*$ de rand égal à $\dim(h^*)$
iii) $R = -R$(Si α est une racine $-\alpha$ l'est aussi) Une représentation V va se décompose en $V = \oplus V_\alpha, \alpha \in h^*$

Les vecteurs de racines, $X \in g_x$ agissent par translation sur les V_β

$$X : V_\beta \to V_{\alpha+\beta}$$

Si V est irréductible, tout les poids sont congrus modulo Λ_R

Étape 3 : Pour chaque raine, on va identifier une sous-algèbre $\mathfrak{s}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

on sait que $[g_\alpha, g_{-\alpha}] \subseteq h$

en fait $\mathfrak{s}_\alpha = g_\alpha \oplus g_{-\alpha} \oplus [g_\alpha, g_{-\alpha}]$ est aussi un sous-algèbre de g isomorphe à sl(2$\mathbb{C}$)

On trouve $X_\alpha \in g_\alpha$, $Y_\alpha \in g_{-\alpha}$ t.q. $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$

on a $[H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$ on a $[H_\alpha, Y_\alpha] = 2Y_\alpha$

Toujours possible car

i) $[g_\alpha, g_{-\alpha}] \neq 0$
ii) $[[g_\alpha, g_{-\alpha}], g_\alpha \neq 0$

Étape 4 : Utiliser l'<u>intégralité</u> des valeurs propres de H_α

Pour tout poids β d'une représentation de g

$$\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$$

On définit une autre réseau, (le réseau des poids) $\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$

Si $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda_W$ dans $(\beta_1 + \beta_2)(H_\alpha) = \beta(H_\alpha) + \beta_2(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \implies \beta_1 + \beta_2 \in \Lambda_W$

et $-\beta_1(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \to -? \in \Lambda_W$

En fait, $\Lambda_R \subseteq \Lambda_W$

Étape 5 : Usilser la symétrie par rapport à 0 des v.p. de H_α

On introduit une réflexion pour chaque $\alpha \in R$, noté W_α, $W_\alpha : h^* \to h^*$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)_\alpha$$

$$\mathscr{W} = \langle W_\alpha \rangle$$

groupe engendré par les W_α qui s'appelle Groupe de Weyl

Pour une representation $V = \oplus V_\beta$ on peut regrouper les V_β en classes modulo α

$$V = \oplus V_{[\beta]}$$

où $V_{[\beta]} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_{\alpha+n\beta}$

les poids dans $V_{[\beta]}$ sont $\beta, \beta+\alpha, \beta+2\alpha, \cdots, \beta+n\alpha$ où $n = -\beta(H_\alpha)$

Conclusion

l'ensemble des poids V est $\mathscr{W}$-invarient

Étape 6 : Faire un dessin

Il existe un produit bilinéaire sur $\mathfrak{g}$ appelé forme de Killing qui est définit positif sur le sous-espace réel engendré par les H_α

donne un produit scalaire sur le sous-espace réel engendré par R dans h^*. Pour ce produit , W_α est une réflexion euclidienne

Étape 7 : Choisir une direction dans h^*. C'est-à-dire une forme linéaire l sur h^*

$$l : h^* \to \mathbb{R} t.q. L(\alpha) \neq 0 si \alpha \in R$$

On décompose $R = R^+ \cup R^-$ en racine positives et négatives

On dit que $v \in V$ est un vecteur de plus haut poids pour g si $Xv = 0 \forall X \in g_\alpha, \alpha \in R^+$

Proposition :

(i) Toute représentation de g possède un vecteur de plus haut poids
(ii) V et toutes ses images obtenus en itérants des applications de $X_\alpha, \alpha \in R^-$ engendre une sous-représentation $W \subseteq V$ irréductible
(iii) Tout représentation irréductible admet un unique vecteur de plus haut poids (à scalaire près)

Manque de Batterie !