2022-33-28

$$S_m = -\sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \sqrt{g_{ij}(x_\alpha)\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\alpha}$$

$$S_g = \kappa \int \underbrace{\mathrm{d}\Omega \sqrt{|g|}}_{\text{invarien de Lorentz}} R$$

$$S = S_m + S_g$$

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} = 0o$$

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \frac{1}{\cancelto{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\alpha}}} \dot{x}^k_\alpha \dot{x}^l_\alpha \delta g_{ki}(x_\alpha)$$

On définit le tenseur énergie-impulsion

$$T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_\alpha m_\alpha \int \mathrm{d}\tau_\alpha \dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\alpha \delta^2(x - x_\alpha(\tau_\alpha))$$

Limite non-relativiste : les particules ne vont pas très vite et toutes les particules ont approximativement le même temps qu'on prend être le temps coordonnée.

$$T^{ij}_{\text{classique}} = \delta^i_0 \delta^j_0 \frac{1}{|g|} \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t))}_{\text{densité de masse } (\rho(\mathbf{r}))}$$

$$\delta\sqrt{|g|} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\sqrt{|g|} g^{ij} \delta g_i j$$

$$\ln\det M = \operatorname{tr}\ln M$$

$$\operatorname{tr}\ln g = \operatorname{tr}\delta(\ln g)\cdots$$

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

$$\delta R$$