

## Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$  osti, je suis déjà done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :

Si  $v \in V_{\alpha}, C \in g_{\beta}$   $\beta$ -racine,  $\alpha$ -poids

alors  $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur  $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$  t.q.  $a_0 > b_0 > c_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids  $v$  qui satisfait

- $v \in V_{\alpha}$  pour  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$
- $E_{23}v = E_{13}v = E_{31}v = 0$

Proposition :

$V$  est engendré par  $v$  (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

$W$  le sous-espace engendré par  $v$  et tout les mots possibles en  $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$  appliqué à  $V$

$$W = \langle v, E_{21}v, E_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \dots \rangle$$

On veut montrer que  $W$  est  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ -invariant

Partie facile,  $W$  est invariant par  $\mathfrak{h}$  et par  $E_{21}, E_{31}, E_{32}$

Reste à montrer que  $W$  est invariant par  $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$ , il suffit donc de vérifier  $E_{1,2}W \subseteq W$  et  $E_{2,3}W \subseteq W$

Posons  $W_n$  le sous-espace engendré par  $v$  et tout les mots en  $E_{21}, E_{32}$  de la longueur  $\leq n$  appliqué à  $v$

Par récurrence, on montre  $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$ ,  $E_{2,3} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$

Soit  $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour } w' \in W_{n-1}$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1.

$$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12}) w'$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &\in g_{L_1-L_2} \\
E_{21} &\in G_{L_2-L_1} \\
\implies [E_{1,2}, E_{21}] &\in \mathfrak{h} = g_e
\end{aligned}$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,3} \cdot w &= E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w' \\
&= \left( \underbrace{[E_{23}, E_{21}]}_0 + E_{2,1} + E_{23} \right) \cdot w' \\
&= E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')}_{W_{n-2}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{W_{n-1}}
\end{aligned}$$

2. même chose

Puisque  $W = \bigcup_n W_n$ ,  $W$  est stable par  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$  ■

De la preuve, on déduit :

Pour  $V$  une représentation (pas nécessairement irréductible), si  $v$  est un vecteur de plus haut poids alors le sous espace engendré par  $v$  est ses images par  $E_{21}$  et  $E_{3,2}$  est une sous représentation irréductible

Il existe un  $n$  pour lequel  $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$  mais  $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation :  $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$  est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre  $\alpha$  et  $\alpha + m(L_2 - L_1)$ )

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} E_{21} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y \end{array} & 
\begin{array}{c} E_{12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X \end{array} & 
\begin{array}{c} E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H \end{array}
\end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  sur  $V$  (par nécessairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour  $H$  dans une représentation de  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$  sont entières et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de " $H$ " =  $E_{11} - E_{22}$  sont  $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \dots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit  $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \dots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre  $\alpha$  et  $\alpha + n(L_2 - L_1)$  est symétrique par rapport à la droite  $\beta(H_{12}) = 0$

Posons  $\alpha + \alpha(J_{1,2})(L_2 - L_1) = \alpha_2$  et  $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a  $E_{21} \cdot v_2 = 0$ ,  $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$ ,  $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

$v_2$  est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par  $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$ ,  $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets  $\alpha$  et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que  $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2eme heure

$$\text{sym}^n(\mathbb{C}^3) = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k \mid i + j + k = n \right\rangle$$

les poids sont  $H \cdot \left( e_1^i e_2^j e_3^k \right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H)e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est  $nL$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

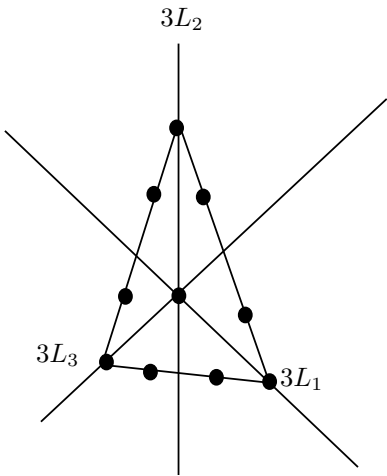


FIGURE 1 – triangle

$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3)$  par le même argument a pour plus haut poids  $nL_3$  est est irréductible

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de  $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$  est un vecteur de plus haut poids.

Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (uv) \otimes \alpha &\mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) &= \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha)) \\ &= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x))\end{aligned}$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha))$$

$\text{Her}(\varphi) \subseteq \text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$  est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \text{Ker} \varphi (\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_1)e_1)$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_2) = 2L_1 - L_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans  $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par  $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans  $\text{Ker}(\varphi)$ ,  $\dim(V_{L_1}) = 2$

engendré par  $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que  $V_{L_1}$  est engendré par  $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$  et  $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*)$

$$\begin{aligned}E_{32}E_{21}(e_1^2 \otimes e_3^*) &= E_{32}((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)) \\ &= E_{32}(2e_1e_2 \otimes e_3^*)\end{aligned}$$

$$= 2(e_1 e_3 \otimes e_3^* + e_1 e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32} \left( e_1^2 \otimes e_3^* \right)$$

$$= E_{21}le_0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21} \left( e_1^2 \otimes e_2^* \right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b \mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids  $aL_1 - bL_3$  On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphisme

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \rightarrow \mathrm{Sym}^{a-1} \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

## Rappels

Les représentation irréductibles de  $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$  sont en bijection avec  $\{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ entiers}\}$

$$\rightarrow \Gamma_{a,b}$$

dont le plus haut poids est  $aL_1 - bL_3$

$$\Gamma_{a,b} \subseteq \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3)$$

$$\Gamma_{a,b} = \text{Ker}(\varphi)$$

$$\varphi : \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3) \rightarrow \text{Sym}^{a+b}(\mathbb{C}^3)$$

## Recette pour analyser les représentation d'une algèbre de Lie semi-simple

## Rappel

Simple :  $\text{ad}_X$  est irréductible  $\iff$  pas d'idéal non-trivial

Semi-simple : Somme direct d'algèbre simple

**Étape 1 :** Identifier une sous algèbre  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  abélienne diagonalisable maximale. On appelle  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan

*On a vu que si une algèbre est diagonalisable dans une représentation, elle l'est dans toutes les représentations. Une algèbre diagonalisable est une algèbre qu'on peut montrer diagonalisable dans au moins une représentation.*

## Attention

Ex :

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathfrak{h}$  n'est pas nécessairement diagonale

truc : choisir une base jacobienne Dans une base t.q. la forme bilinéaire est donnée par la matrice  $J =$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \text{ est donné par } X^t J + JX = 0$$

...

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & -b \\ 0 & -c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

ici, on peut prendre  $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \right\}$

**Étape 2 :** Décomposer  $\mathfrak{g}$  selon les poids (racines) de sa représentation adjointe

$$g = h \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in R} g_{\alpha} \right)$$

où  $R \subseteq h^*$  est t.q.  $g_{\alpha} \neq \{0\}$

$$g_{\alpha} = \{X \in g | \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \forall H \in h\} = \{X \in g | [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$$

Faits :

- i)  $\dim(g_{\alpha}) = 1 \forall \alpha \in R$
- ii)  $R$  engendre un réseau  $\Lambda_R \subseteq h^*$  de rang égal à  $\dim(h^*)$
- iii)  $R = -R$  (Si  $\alpha$  est une racine  $-\alpha$  l'est aussi) Une représentation  $V$  va se décomposer en  $V = \bigoplus V_{\alpha}, \alpha \in h^*$

Les vecteurs de racines,  $X \in g_x$  agissent par translation sur les  $V_{\beta}$

$$X : V_{\beta} \rightarrow V_{\alpha+\beta}$$

Si  $V$  est irréductible, tout les poids sont congrus modulo  $\Lambda_R$

**Étape 3 :** Pour chaque racine, on va identifier une sous-algèbre  $\mathfrak{s}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

on sait que  $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \subseteq h$

en fait  $\mathfrak{s}_{\alpha} = g_{\alpha} \oplus g_{-\alpha} \oplus [g_{\alpha}, g_{-\alpha}]$  est aussi un sous-algèbre de  $g$  isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

On trouve  $X_{\alpha} \in g_{\alpha}, Y_{\alpha} \in g_{-\alpha}$  t.q.  $H_{\alpha} = [X_{\alpha}, Y_{\alpha}]$

on a  $[H_{\alpha}, X_{\alpha}] = 2X_{\alpha}$  on a  $[H_{\alpha}, Y_{\alpha}] = 2Y_{\alpha}$

Toujours possible car

- i)  $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \neq 0$
- ii)  $[[g_{\alpha}, g_{-\alpha}], g_{\alpha}] \neq 0$

**Étape 4 :** Utiliser l'intégralité des valeurs propres de  $H_{\alpha}$

Pour tout poids  $\beta$  d'une représentation de  $g$

$$\beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}$$

On définit une autre réseau, (le réseau des poids)  $\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$

Si  $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda_W$  dans  $(\beta_1 + \beta_2)(H_{\alpha}) = \beta_1(H_{\alpha}) + \beta_2(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies \beta_1 + \beta_2 \in \Lambda_W$

et  $-\beta_1(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies -\beta_1 \in \Lambda_W$

En fait,  $\Lambda_R \subseteq \Lambda_W$



**Étape 5 :** Utiliser la symétrie par rapport à 0 des v.p. de  $H_\alpha$

On introduit une réflexion pour chaque  $\alpha \in R$ , noté  $W_\alpha$ ,  $W_\alpha : h^* \rightarrow h^*$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle$$

groupe engendré par les  $W_\alpha$  qui s'appelle Groupe de Weyl

Pour une représentation  $V = \oplus V_\beta$  on peut regrouper les  $V_\beta$  en classes modulo  $\alpha$

$$V = \oplus V_{[\beta]}$$

$$\text{où } V_{[\beta]} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\alpha+n\beta}$$

les poids dans  $V_{[\beta]}$  sont  $\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + n\alpha$  où  $n = -\beta(H_\alpha)$

**Conclusion**

l'ensemble des poids  $V$  est  $\mathcal{W}$ -invariant

**Étape 6 :** Faire un dessin

Il existe un produit bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$  appelé forme de Killing qui est défini positif sur le sous-espace réel engendré par les  $H_\alpha$

donne un produit scalaire sur le sous-espace réel engendré par  $R$  dans  $h^*$ . Pour ce produit,  $W_\alpha$  est une réflexion euclidienne

**Étape 7 :** Choisir une direction dans  $h^*$ . C'est-à-dire une forme linéaire  $l$  sur  $h^*$

$$l : h^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } L(\alpha) \neq 0 \text{ si } \alpha \in R$$

On décompose  $R = R^+ \cup R^-$  en racine positives et négatives

On dit que  $v \in V$  est un vecteur de plus haut poids pour  $g$  si  $Xv = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R^+$

Proposition :

- (i) Toute représentation de  $g$  possède un vecteur de plus haut poids
- (ii)  $V$  et toutes ses images obtenus en itérant des applications de  $X_\alpha, \alpha \in R^-$  engendrent une sous-représentation  $W \subseteq V$  irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet un unique vecteur de plus haut poids (à scalaire près)

**Manque de Batterie !**

## Rappels

$h \subseteq g$  : sous algèbre de Cartan

$$g = h \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} g_\alpha \quad R \subseteq h^*$$

$$\mathfrak{s}_\alpha = \left\langle \underbrace{X_\alpha}_{\in g_\alpha}, \underbrace{Y_\alpha}_{\in g_{-\alpha}}, \underbrace{H_\alpha}_{\in h} \right\rangle \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

$V$ -représentation de  $\mathfrak{g}$

$$V = \bigoplus V_\alpha$$

$$\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

$$\Lambda_R = \mathbb{Z}R \subseteq \Lambda_W$$

Réflexion dans une racine  $\alpha$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \text{ groupe de Weyl}$$

les poids de  $V$  sont stables par  $\mathcal{W}$

On fixe  $\ell : h^* \rightarrow \mathbb{R}$

...

Proposition :

- (i) Toute représentation a un vecteur de plus haut poids
- (ii) Les sous-espace  $W \subseteq V$  engendré par  $V$  et applications successive de  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in R^-}$  et une sous représentation irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet une unique vecteur de plus haut poids

Démonstration :

- (i) Soit  $\alpha$  maximal parmi les  $V_\alpha \neq \{0\}$  pour l'ordre partiel

$$\alpha > \beta$$

ssi  $\ell(\alpha) > \ell(\beta)$  et soit  $v \in V_\alpha$

S'il existe  $X \in \mathfrak{g}_\beta$  avec  $\beta \in R^+$  et  $X \cdot v \neq 0$  alors  $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$  et  $\ell(\alpha+\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) > \ell(\alpha)$  considérant la maximalité

Parmi les racines de  $R^+$  on dit que  $\alpha \in R^+$  est une racine simple s'il n'existe pas de  $\beta_1, \beta_2 \in R^+$  t.q.  $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

Lemme : Si  $\alpha, \beta$  sont simples alors  $\alpha - \beta$  et  $\beta - \alpha$  ne sont pas des racines

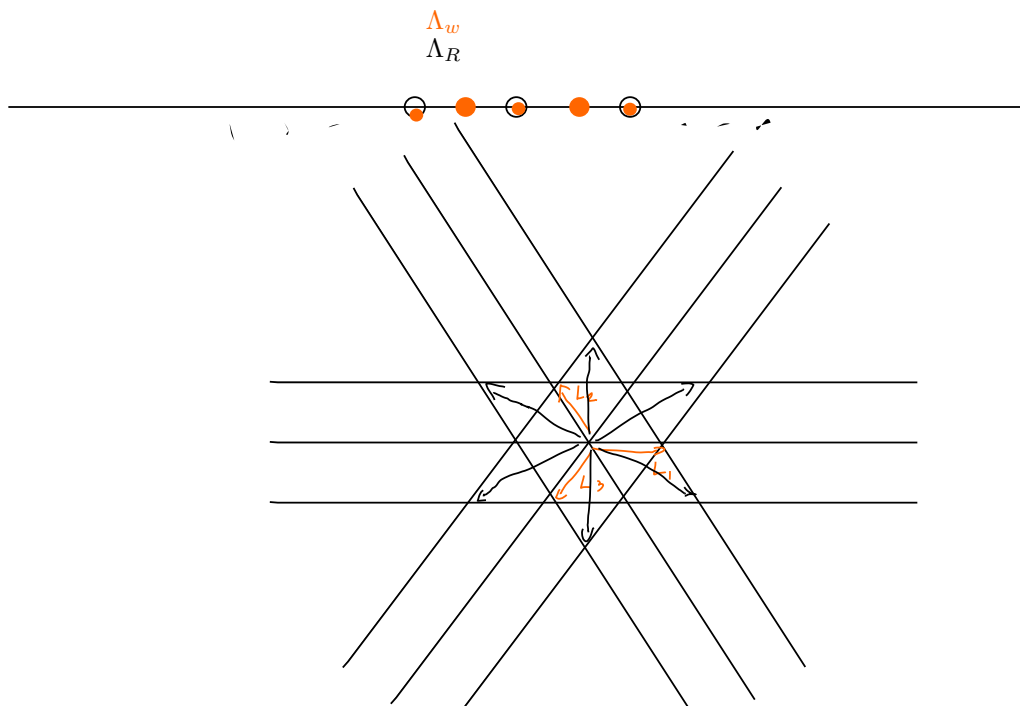


FIGURE 1 – Resaux

Dém :

...

(ii)  $W$  est aussi engendré par  $V$  et ses images successives par  $\{X_{-\alpha}\}_{\alpha \in S}, S \subseteq R^+ : \text{ racins simples}$

-  $W$  est stable par  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in R^-}$  -  $W$  est stable par  $H \in \mathfrak{h}$

Reste à montrer que  $W$  est stable par  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in S}$

$W_n \subseteq W$  sous-espace où on applique des monts de longueur  $\leq n$

Par récurrence on montre que  $X_{\alpha}W_n \subseteq W_n \quad \alpha \in S$

Soit  $u \in W_n$  un générateur

$$\Rightarrow u = X_{\beta}u' \quad \text{où} \quad u' \in W_{n-1} \\ -\beta \in S$$

Soit

$$X_{\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \in S$$

$$\text{Alors } X_{\alpha}u = X_{\alpha}X_{\beta}u' = (X_{\beta}X_{\alpha} + [X_{\alpha}, X_{\beta}])u'$$

$$= X_{\beta}X_{\alpha}u' + [X_{\alpha}, X_{\beta}]u'$$

Étape 8 :

Classifier les représentations irréductibles

Dans le sous-espace réel de  $h^*$  engendré par  $R$ , on note  $\mathcal{C} = \{\beta \mid \beta(H_\alpha) \geq 0 \forall \alpha \in R\}$

On appelle cela une chambre de Weyl

Théorème :

Pour tout poids  $\alpha \in \mathcal{C} \cap \Lambda_W$  il existe une unique représentation irréductible de  $\mathfrak{g}$  ayant  $\alpha$  comme plus haut poids.

On obtiens une bijection entre les représentations irréductibles de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathcal{C} \cap \Lambda_W$

Démonstration : ON démontre l'unicité seulement

Soient  $U, V$  deux représentations irréductibles ayant  $\alpha$  comme plus haut poids. Soient  $u \in U_\alpha, v \in V_\alpha$  comme plus haut poids. Alors  $(u, v) \in U \oplus V$  est un vecteur de plus haut poids  $\alpha$  dans  $U \oplus V$

$\implies (u, v)$  engendre un sous-espace

$$W \subseteq U \oplus V$$

irréductible

$$\pi_u : W \rightarrow U$$

$$\pi_v : W \rightarrow V$$

sont des isomorphismes de représentation (par le lemme de Schur)

$$\implies U \cong V$$

## La forme de Killing

On définit  $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$

Par la formule  $B(x, y) = \text{tr}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)$

Observation :

$$X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$$

avec  $\beta \neq \pm\alpha$

Alors, pour tout  $Z \in \mathfrak{g}_\gamma$

on a  $(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)(Z)$

$$= [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha+\beta} \neq \mathfrak{g}_\gamma$$

En particulier  $[X, [Y, Z]]$  n'a pas de composante en  $Z$

$$\implies B(X, Y) = 0$$

Autrement dit  $g_\alpha \perp g_\beta$  si  $\beta \neq -\alpha$

La décomposition  $g = h \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R^+} (g_\alpha \oplus g_{-\alpha}))$

est orthogonale pour  $B$

Si  $X, Y \in h$  alors  $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$(\text{ad} X \circ \text{ad} Y)(Z) = [X, [Y, Z]] = \alpha(Y)[X, Z] = \alpha(X)\alpha(Y)Z$$

$$\implies \text{tr}(\text{ad} X \text{ad} Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X)\alpha(Y)$$

sur le sous-espace réel engendré par les  $H_\alpha$

$B$  est définie positive

$$B(H_\alpha, H_\beta) = \underbrace{\sum_{\gamma \in R} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta)}_{\in \mathbb{Z}}$$

si  $H \in \mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle_{\alpha \in R}$

alors  $B(H, H) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H)^2 \geq 0$

si  $B(H, H) = 0$

$\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in R$

$$H = 0$$

car  $R$  engendre  $h^*$

Prop :  $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$

Démonstration :

...

Proposition : si  $g$  est simple alors  $B$  est non dégénéré

(rappel :  $B$  est dégénérée si  $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$   $\text{Ker}(B) = \{X \in g \mid B(x, y) = 0 \forall y \in g\}$ )

Démonstration : Supposons qu'il existe  $X \in B, X \neq 0$

Alorsm pour tout  $Y$  et tout  $Z \in g$

$$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]) = 0$$

$$\implies [X, Y] \in \ker B$$

$$\implies B \subseteq g$$

est un ideal