

# 1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire  $(G, *)$ , où  $G$  est un ensemble et  $*$  est une opération  $(* : G \times G \rightarrow G)$

3 axiomes :

1.  $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2.  $\exists e \in G | e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3.  $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex :  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \dots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est  $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \rightarrow E | f \text{ est inversible} \}$$

avec l'opération de composition  $\circ$

On l'appelle le groupe symétrique de  $E$

$$S_n = S_{\{1, 2, \dots, n\}}$$

Est le groupe des permutations de  $n$  éléments

Notation pour désigner les éléments  $\sigma \in S_n$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes  $(G, H)$  est une fonction  $f : G \rightarrow H$  t.q.  $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ .  
Si  $f$  est inversible alors  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et on dit alors que  $f$  est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  est une application

$$\bullet : G \times X \rightarrow X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad X = \mathbb{R}^n$$

Définition : Une action de  $G$  sur  $X$  est un homomorphisme  $f : G \rightarrow S_X$

Les deux définitions sont équivalentes

On définit  $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_1)(f(g_2)(x)) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si  $X$  a plus de structure et qu'on a une action de  $G$  sur  $X$  qui preserve la structure lors on dit que  $G$  agit par (homéomorphisme, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur  $X$

exemple :  $G = S_3$  agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

**ATTENTION :**  $S_4$  n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permutations *brisent le triangle*)  $S_4$  agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$  et est groupe des permutations paires

$A_5$  agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation  $S_G$

Démonstration : On considère l'action de  $G$  sur lui-même ( $x = G$ )

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

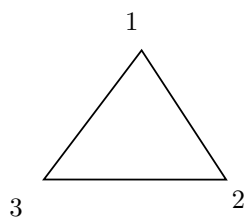
on obtiens  $f : G \rightarrow S_G$  : homomorphisme injectif car si  $f(g_1) = f(g_2)$  alors  $f(g_1)(e) = f(g_2)(e)$ ,  $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$ ,  $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe à } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe  $G$  est une action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$ . Autrement dit, un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Le rang d'une représentation est  $\dim V$

exemples :

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$

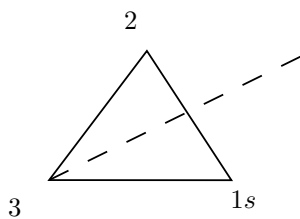


$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma)$$

$$F(\eta)$$



Réflexion du triangle

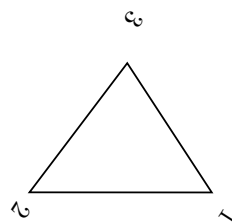


FIGURE 1 – Triangles équilatéraux

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

*Si*

## retour sur le dernier cours

$(G, \bullet)$  c'est un groupe

$S_E = \{\sigma : E \rightarrow E | \sigma \text{ inversible} \}$  est une groupe pour la composition

Un cycle est un élément de  $S_n$  de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1}, \sigma(a_k) = a_1, i = 1, \dots, k$$

On le note  $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$

### Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12) \circ (35) = (35) \circ (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1756234)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longueur  $\ell$  est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est impaire} \end{cases}$$

On a la relation  $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de  $G$  sur  $X$  : deux définitions

1.  $\bullet : G \times X \rightarrow X$
2. homomorphisme  $f : G \rightarrow S_x$

Représentation de  $G$  : action linéaire de  $G$  sur un espace vectoriel  $V$

Exemple : La Représentation vectoriel sur  $V$

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G, v \in V$$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour  $G$  fixé, on a la représentation régulière ( $R$ ) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \dots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

On définit  $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \langle e_0 \ e_1 \ e_2 \rangle$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe  $\mathbb{Z}_3$  sont ici représenté par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si  $G$  agit sur  $E$  (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$   $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  par  $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_i$  (action de  $G$  sur  $E$ )

exemple :  $V = \mathbb{C}$  Ou on prend  $\mathbb{C}$  comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$

$$\rho : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentation de

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la restriction de  $\rho$  à un sous-espace  $U \subset V$  invariant par  $\rho$ . c-à-d, si  $u \in U$ , alors  $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$  Le sous-espace  $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$  est une sous représentation triviale

Le sous-espace  $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \mid z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0 \right\}$  est aussi une sous-représentation de  $R$  de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ( $\neq 0, \neq V$ )

Exemple :  $S_3$  :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$  la représentation de permutation induite par l'action ??? de  $S_3$  sur  $\{1, 2, 3\}$   $\rho(12) = \dots 3x3$ ,  $\rho(123) = \dots 3x3$

$\rho$  est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid z \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariant est irréductible

Également,  $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$  est invariant

Es-ce que  $U_0$  est irréductible ?

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

...

Conclusion :  $U_0$  est une représentation irréductible. On l'appelle représentation standard de  $S_3$

Ex :  $S_3$

$$\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si  $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(u)$ ,  $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(v)$  sont 2 représentation de  $G$ , leurs somme directe est la représentation  $\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(u \oplus v)$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si  $U = \mathbb{R}^n$   $V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$  contient  $u \oplus 0$  et  $0 \oplus v$  comme sous représentation

Proposition : Soit  $U \subset V$  une sous-repr/sentation de  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Alors, il existe une sous-représentation  $W \subset V$  telle que  $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple :  $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de  $\mathbb{Z}$ ,  $\langle e_1 \rangle$  est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe pas d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit  $V_0 \subset V$  n'importe quel complément de  $U$  ( $V = U \oplus W_0$ )

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_0 \quad \text{pour } w \in W_0$$

Soit  $\pi: V \rightarrow U$  la projection complémentaire à  $W_0$

Définissons  $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$  si  $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi [\rho(g^{-1})u]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g^{-1})u$$

$$\frac{1}{|G|} |G| u = u$$

$\implies \pi' : V \rightarrow U$  est surjectif et identité sur

$W = \text{Ker}(\pi')$  est notre candidat de sous-représentation

Vérifions que  $W$  est  $\rho(G)$  invariant

$$h \in G \quad V \in \text{Ker} \pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g) \pi \rho(g') \rho(h) v = \dots = 0$$

comme  $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , ,$$



## Rappels

- représentation de  $G$   $\rho \rightarrow \text{GL}(V)$
- somme direct  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow (V \oplus U)$
- Sous-représentation  $U \subset V$   $G$  invariant  $\forall g \in G, \rho(g)u \in U$
- $\rho$  est irréductible si les seul sous-représentation sont  $\{0\}$  et  $V$
- Théorème : Si  $U \subset V$  est une sous représentation de  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  alors  $\exists W \subset V$  sous-espace t.q.  $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$  : représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre  $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(U)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une application linéaire  $\varphi : U \rightarrow V$  telle que  $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

Si  $\varphi$  est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1.  $\text{Ker}(\varphi) \subset U$
2.  $\text{Im}(\varphi) \subset V$  sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si  $v \in \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1(g)v) &= \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ \implies \rho_1(g)v &\in \text{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$

$$2. \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$$

#### Lemme de Shur

1.  $\varphi : V \rightarrow U$  est un morphisme entre représentation irréductible alors  $\varphi = 0$  ou  $\varphi$  est un iso

2.  $\varphi : V \rightarrow V$  Morphisme de  $V$  représentation irréductible alors  $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration :  $\varphi : V \rightarrow U$

1.

...

2.  $\varphi V \rightarrow V$   $\varphi$  admet une valeur propre  $\lambda$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = V$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit  $G$  une groupe fini abélien

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \dots$$

et supposons  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  irréductible. Fixons  $g \in G$

$\rho(g) : V \rightarrow V$  alors  $\rho(g)$  est une morphisme de représentation car  $\rho(h)(\rho(g)v) = \rho(hg)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor  $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$  tout les  $\rho(g)$  sont  $\lambda_g I$

$\implies$  tout sous-espace de  $V$  est stable par  $\rho(g) \forall g \in G$

donc  $\dim V = 1$

Conclusion : tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple :  $G = \mathbb{Z}_4$

...

Exemple :  $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de  $G$  qui est abélien

Remarque :  $G$  est engendré par  $(123)$  et  $(12)$

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur  $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation irréductible

on a  $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$  car  $\tau^3 = e$

$\implies \rho(\tau)$  est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit  $v \in V$  vecteurs propres de  $\rho(\tau)$   
 $\implies \rho(\tau)v = \omega^k v$  pour  $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned} \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^2)v \\ &= \rho(\sigma)\rho(\tau)^2v \\ &= \rho(\sigma)\omega^{2k}v \\ &= \omega^{2k}(\rho(\sigma)v) \end{aligned}$$

conclusion si  $v$  est une vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^k$  alors  $\rho(\tau)v$  est vecteur propre de  $\rho(\tau)$  de valeur propre  $\omega^{2k}$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1.  $k = 1$  ou  $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

$$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

sont linéairement indépendants  $U = \langle v, \rho(\sigma)v \rangle$ ,  $U$  est stable par  $G : V$  et  $\rho(\sigma)V$  sont vecteur propres de  $\rho(\tau)$  et  $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$ ,  $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

$$\implies U = V$$

et dans la base  $v, \rho(\sigma)v$  on alors

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.  $k = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\tau)v &= v \\ \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\sigma)v \end{aligned}$$

(a)

$$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

et  $\lambda \in \{1, -1\}$  ( $\sigma^2 = 1$ ) si  $\lambda = 1$   $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{trivial}}$  si  $\lambda = -1$ ,  $\langle v \rangle = V$  et  $\rho = \rho_{\text{sign}}$

(b)  $v$  et  $\rho(\sigma)v$  sont linéairement indépendants

Considérons  $V + \rho(\sigma)v$ ,  $V - \rho(\sigma)v$

$$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v \text{ et } \rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$$

$$\implies v + \rho(\sigma)v \text{ est stable par } G.$$

idem pour  $-$ . C'est donc une contradiction au fait que  $V$  soit irréductible.

## Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

une représentation

Alors son caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

## Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire  $\varphi : V \rightarrow U$  (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$$

$\varphi$  est appelée une application équivariante

### Lemme de Shur

1. Si  $\rho_1, \rho_2$  sont irréductible  $\varphi$  morphisme  $\implies \varphi = 0$  ou isomorphe
2. Si  $V = U$  alors  $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ??? de  $S_3$  (à iso près) sont  $\rho_1, \rho_2$  et  $\rho_3$

## Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

$\chi_\rho$  est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d  $\forall h \in G, \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans  $S_n$  permutation de  $n$  éléments la conjugaison correspond à un "changement d'étiquette"

La table des caractères d'un groupe fini  $G$  est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les calsses de conjugaison dans  $G$ . Les entrées sont  $\chi_\rho(g)$

Exemple :  $S_3$

	1 e	3 (12)	2 (123)
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\text{std}}}$	2	0	-1

TABLE 1 – tables des caractères de  $S_3$

## Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme  $|G|$

Exemple :  $\mathbb{Z}_4$

	1	1	1	1
	0	1	2	3
$\chi?$	1	1	1	1
$\chi?$	1	i	-1	-i
$\chi?$	1	-1	i	-i
$\chi?$	1	-i	-1	i

TABLE 2 – Table des caractères de  $\mathbb{Z}_4$

## Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

$V$  un  $(k)$ espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1.  $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
2.  $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3.  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4.  $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$

Soit  $U, V$  deux  $k$ -espaces vectoriels

$$\text{Hom}(U, V) := \{L : U \rightarrow V \mid \text{L'application linéaire}\}$$

est un  $k$ -espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\dim(\text{Hom}(u, v)) = \dim(u)\dim(v)$$

Le produit Tensoriel de  $U$  et  $V$  est un  $k$ -espace vectoriel  $U \otimes V$  muni d'une application bilinéaire

$$U \times V \rightarrow U \otimes V$$

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour toute application bilinéaire  $b : U \times V \rightarrow W$

Je vois pas ...

En pratique : Si  $e_1, \dots, e_n$  est une base de  $U$ ,  $f_1, \dots, f_m$  est une base de  $V$  alors  $\{e_i \otimes f_j\}$  est une base de  $U \otimes V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \dots ace_1 \otimes f_1 + \dots$$

Exemple : produit scalaire standard dans  $\mathbb{C}^2$  est bilinéaire  $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$

Quelle est  $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$$

Attention

Il est des éléments de  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

### Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2.  $Q_8$  : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \quad -ji = ij = -k$$

- (a) Calculer les classes de conjugaison dans  $Q_8$
  - (b) Déterminer les représentations irréductibles (il y en a 5, dimension 1 et 2)
  - (c) Dresser la table des caractères de  $Q_8$
3. Décomposer  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$  en irréductibles
  4. Calculer  $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

### Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

abélien  $\implies$  toute représentation irréductible est de dim 1 On a  $(0, 1) + (0, 1) = (0, 0)$

$$\rho(0, 1)\rho(0, 1) = 1 = \rho(0, 1)^2 \implies \rho(0, 1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1)^m \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

#### Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$

...

Pareil pour tous les éléments

- (b) Si  $\rho : Q_8 \rightarrow \mathbb{C}^*$  est de rang 1. Comme  $i^4 = 1$ ,  $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$  (de même pour  $j$  et  $k$ )

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons  $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$  Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prenant  $\rho(i) = i$  ou  $\rho(i) = -1$  (même chose pour  $j$  et  $k$  évidemment) On doit donc prendre  $\rho(i) \in \{1, -1\}$ ,  $\rho(j) \in \{1, -1\}$ ,  $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)



	$e$	$i$	$j$	$k$	$-1$
$\rho_{\text{triv}}$	1	1	1	1	1
$\rho_1$	1	-1	1	-1	1
$\rho_2$	1	-1	-1	1	1
$\rho_3$	1	1	-1	-1	1
$\rho_4$	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de  $C_8$

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

$V$  espace vectoriel

$P : V \rightarrow V$  application linéaire t.q.  $P^2 = P$  est appelé une projection (sur le sous-espace  $\text{Im}(P)$ )

Ex :  $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si  $P$  est une projection,  $\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$

Démonstration On a  $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$

- car  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}P) + \dim(\text{Im}(P))$
- et si  $v \in (\text{Ker}P) \cap (\text{Im}P)$   $P(v) = 0$  mais aussi  $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$   
 $\implies v = 0$

Si  $v \in \text{Im}(P)$   $P(v) = v$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\text{Im}(P)} = \mathbb{1}_{\text{Im}(P)} \\ &\quad \text{et} \quad P|_{\text{Ker}P} = 0_{\text{Ker}P} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\text{Im}P} & 0 \\ 0 & 0_{\text{Im}P} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \text{tr}(P) = \text{tr}(\mathbb{1}_{\text{Im}P}) = \dim \text{Im}P \end{aligned}$$

??? d'irréductibilité est relations d'orthogonalité

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$

définissons  $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$  le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que  $V^G$  est un sous-espace vectoriel de  $V$

et  $P : V \rightarrow V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

Prop :  $P$  est une projection sur  $V^G$

Démonstration : ON veut montrer

1.  $\text{Im} P = V^G$  et
2.  $P^2 = P$

1. Supposons  $v \in \text{Im} P$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \dots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter : (

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \text{Im} P \subset V^G$$

Inversement, si  $v \in V^G$

$$\text{alors } P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\dim(V^G) = \text{tr}(P) = \text{tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

En particulier, si  $\rho$  est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

Ex :  $S_3$

...

## Rappels

$P$  projection, apli linéaire  $P : V \rightarrow V$  t.q.  $P^2 = P$

$$\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$$

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est une projection avec  $\text{Im}P = V^G = ?$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Nombre de représentation triviale dans la décomposition de  $\rho$   
En particulier si  $\rho$  est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

$\rho_1, \rho_2$  deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2) : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(U, V))$$

## Rappel

Si  $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho_{2(g)} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)(M) = \rho_2(g) \cdot M \cdot \rho_1(g)^{-1}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(U, V)^G = \{\varphi : u \rightarrow v \mid \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \text{Hom}(U, V)^G \iff \rho_2 M \rho_1(g) = M \rho_1(g) \iff \rho_2(g) M = M \rho_1(g) \iff M \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si  $\rho_1, \rho_2$  sont irréductibles, le lemme de Schur dit

$$\dim(\text{Hom}(U, V)^G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\cong \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \text{tr } P = \text{tr} \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \text{ (à démontrer)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g})$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g}) \chi_\rho(g) = \left\{ \dots \right.$$

Les caractères de représentations irréductibles sont orthonormés par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Exemple :  $S_3$

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} (1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 1 \quad \dots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\dim(\mathbb{C}_C(G)) = \# \text{ de classes de conj}$$

Corollaire

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

Démonstration : (je vois pas lol)

Corollaire 2 : Toute représentation est déterminée (à iso près) par son caractère  $\chi_\rho$

Démonstration : On sait que  $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \dots \oplus \rho_k^{m_k}$

$$\text{De plus } \chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \dots + m_k \chi_{\rho_k}$$

On peut retrouver  $m_i$  avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

### Exemple

Décomposons  $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^6)$  (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6, \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$  (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi? + 2\chi?$$

### Exemple

Décomposons  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$  la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{\text{std}} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons  $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 :  $\rho$  est irréductible ssi  $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2 = 1$$

puisque  $m_i \in \mathbb{N}$ , un des  $m_i = 1$ , tout les autres =0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} : \text{irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décompostion de  $R$  avec multiplicité  $\dim \rho_i$  et  $|G| (= \dim(R)) = \sum_{\rho_i \text{ irre}} \dim(\rho_i)^2$

2024-02-01

### typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \ e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2) + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

### Rappels

$\rho_1, \rho_2$  reps indestructibles de  $G$   
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

...

Corollaire 5 : si  $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) \quad (g \neq e)$$

Permet de trouver une caractère manquant dans le table si on connaît tout les autres

### Plus d'algèbre linéaire

$e_1, \dots, e_n$  base de  $V$   $f_1, \dots, f_m$  base de  $W$   $e_i \otimes f_j$  base de  $V \otimes W$

$$M \in \text{GL}(V) \quad N \in \text{GL}(W)$$

$$M \otimes N \in \text{GL}(V \otimes W)$$

Proposition :

$$\text{tr}(M \otimes N) = (\text{tr } M)(\text{tr } N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\text{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left( \sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \text{tr } M \text{ tr } N$$

### Définition

L'espace dual de  $V$  est  $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$  noté  $V^*$

Si  $M \in \text{GL}(V)$

$M^* \in \text{GL}(V^*)$

$$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$$

De même, si  $\rho_i G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une repr. La repr dual est  $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

### Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration :  $g \in G$ ,  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$  est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$\implies \rho(g)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de 1

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire  $\rho$  est irréductible  $\iff \rho^*$  est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* W$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \dots, e_n^* \text{ base de } V$$

$$w_1, \dots, w_m \text{ base de } W$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples :  $S_4$  et  $A_4$

Les classes de conjugaisons dans  $S_4$  sont

$$\overbrace{(e)}^1, \overbrace{(12)}^2, \overbrace{(123)}^3, \overbrace{(1234)}^4, \overbrace{(12)(34)}^2$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés )

	1 $e$	2 $(12)$	3 $(123)$	4 $(1234)$	2 $(12)(34)$
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\chi_{\text{sym}}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_{\text{std}}$	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym} \otimes \text{std}}$	3	-1	0	1	-1
$\chi_4$	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de  $S_4$

Regardons la representation  $\rho_?$  de dim 4

$$\rho_? : S_4 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que  $\rho_?$  se décompose en  $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$



$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$\begin{aligned} &= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1) \\ &= (3\,1\,0\,-1\,-1) \end{aligned}$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24} \left( 3^2 + 6^2 + \cdots \right) = 1$$

Pour trouver  $\text{di}(\rho_4)$

on utilise  $|G| = \sum_{\rho_{\text{irred}}} \dim(\rho_i)^2$

$$23=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$$

$$d=2$$

On trouve les autres coeffs avec

$$0=\sum_{g\text{irred}}\dim(\rho_i)\chi_{\rho_i}(g)$$

Calculons  $\rho_4$

On a  $\rho((12)(34))=I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34)))=2$$

$M$  est conjugué à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyau

2024-02-08

### Groupe de Lie (matriciel)

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$  un sous-groupe fermé

(La topologie sur  $GL(n, \mathbb{C}) \subseteq M_n \mathbb{C}$

SI  $M_n \in G$  et  $M_n \rightarrow M \in GL(n, \mathbb{C})$  alors  $M \in G$

En fait, tout sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{C})$  est une sous-variété lisse ( $G$  a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur  $G$ )

(contre)Exemple :

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$  n'est pas fermé.

### Exemples

$GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$

...

Définition On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin  $\gamma : [0 : 1] \rightarrow G$  avec  $\gamma(0) = A$   $\gamma(1) = B$   
 $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer  $A = I$ )

Exemple :  $O(n)$  n'est pas connexe

$$A = I \in O(n) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

S'il existait un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow O(n)$  t.q.  $\gamma(0) = I$  et  $\gamma(1) = B$

alors  $\det \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$  t.q.  $\det \circ \gamma(0) = 1$ ,  $\det \circ \gamma(1) = -1$

$G$  Groupe de Lie matriciel

$G^0$  Composantes connexe de l'identité

Proposition :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

Démonstration

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$  des chemins,  $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit  $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit,  $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a  $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que  $G^0$  est normal, il faut montrer que  $\forall C \in G, A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit  $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = C I C^{-1} = I$$

$$\gamma(1) = C A C^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est  $f : G \rightarrow H$  qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple :  $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  est une homomorphisme de groupe de Lie car

1.  $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

### Rappel

Pour  $S \subset \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n$  une sous-variété. l'espace tangent en  $p \in S$  est

$$T_p S = \left\{ \gamma'(0) \mid \begin{array}{l} \gamma : [-1, 1] \rightarrow S \\ \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est une application lisse, la dérivé de  $f$  en  $p$  est une application linéaire

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

définie par :

$$df_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$$

pour  $\gamma$  chemin dans  $S_1$  avec  $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour  $\det : \text{GL}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$  La dérivé au point  $p = I \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$d(\det)|_I : T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow T_1 \mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix} (0) = X$$

$$T$$

## Rappels

- Groupe de Lie matriciel  $G \ni I \rightarrow$  sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{C})$
- $G$  est une sous-variété
- Exemples  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n)$ ,  $O(n, \mathbb{C})$ ,  $SO(n)$ ,  $SO(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(2n, \mathbb{R})$ ,  $Sp(2n, \mathbb{C})$  Groupe des matrices triangulaires supérieures  $(S)O(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{R}) | M^t I_{pq} M = I_{pq}\}$   $(S)U(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}$
- $G$  Connexe si  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G$  avec  $\gamma(0) = I$ ,  $\gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$  (composantes connexes de  $I$ ) est un sous-groupe normal exemple :

$$O(1, 1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

On résout le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :

$O(2)$

Étant donné  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$df \Big|_I : T_I G \rightarrow T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement  $f$ .

Un voisinage arbitrairement petit autour de  $I$  engendre  $G$

Attention

Pas toutes les applications linéaires  $L : T_I G \rightarrow T_I H$  sont la dérivée d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = df \Big|_I$$

Étant donnée  $g \in G$ , on définit la multiplication à gauche  $L_g : G \rightarrow G$  c'est une application lisse mais

$$dL_g \Big|_I : T_I G \rightarrow T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par  $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{Ad}(g) \Big|_I : T_I G &\rightarrow T_I G \\ X &\rightarrow gXg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X \\ \operatorname{Ad}(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1} \end{aligned}$$

$$d \operatorname{Ad}(G) \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obtenir une condition sur  $T_I G$  uniquement, on dérive  $\operatorname{Ad}(f)$  par rapport à  $g$  en fixant  $X$

$$\begin{aligned} G &\rightarrow T_I G \\ g &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

pour dériver cette application on prend

$$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= I \\ \gamma'(0) &= U \in T_I G \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = [\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})']_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1} \\ &= YX - XY \in T_I G \end{aligned}$$

L'opération sur  $T_I g$

$$[X, Y] = XY - YX$$

s'appelle le crochet

Comme le crochet est défini en termes de la multiplication dans  $G$  et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie  $f : G \rightarrow H$  la dérivée  $df|_I : T_I G \rightarrow T_I H$  satisfaisant  $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$

En fait  $L : T_I G \rightarrow T_I H$  est la dérivée d'un morphisme de groupe de Lie  $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  complexe muni d'une application sur  $\mathbb{C}$

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Exemple : Si  $G$  est une groupe de lie matriciel,  $g = T_I G$  muni de  $[X, Y] = XY - YX$  est une algèbre de lie

Si  $f : G \rightarrow H$  est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et  $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$ )

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \left. d \det(0) \right|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(n\mathbb{C}) \subseteq \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

En fait on a l'égalité

## Rappels

$G$  groupe de lie

$\mathfrak{g} = T_I G$  algèbre de Lie pour  $[X, Y] = XY - YX$

En général, une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

## Exercice

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3$  muni du produit vectoriel  $\times$  est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre  $(\mathbb{R}^3, \times)$  et  $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$

## tentative

1. On doit montrer que  $\times$  respecte les trois conditions
  - (a)  $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

## L'application exponentielle

$G$  groupe de Lie,  $\mathfrak{g} = T_I G$  sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1.  $\exp(0) = I$
2.  $d\exp|_0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est l'application identité
3.  $\forall X \in \mathfrak{g}$  l'application  $t \rightarrow \exp(tX)$  est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t+s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour  $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = e^X$



## Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \rightarrow H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\left( \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df|_I} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array} \right)$$

commute, c-à-d,  $f \circ \exp_G = \exp_H \circ df|_I$

Conséquence :

Si  $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\implies i \circ \dots$$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

...

## Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de  $G$  est un morphisme  $G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Une représentation de  $\mathfrak{g}$  est une morphisme d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

Exemple : Représentation adjointe

$$\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

$$\text{où } \mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$$

on peut vérifier la linéarité et  $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Ad}g)(\mathrm{Ad}h)$

## Rappels

...

Proposition : Soit  $0 \neq V \in V_\beta$ , alors  $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2v, \dots\}$  engendre  $V$

Démonstration : On montre que  $U = \langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2v, \dots \rangle$  est stable pour  $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1.  $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m) \rho(Y)^m c \in U$
2.  $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1}v \in U$
3.  $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

On va montrer par récurrence que  $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$

pour  $m = 0$   $\rho(x)v = 0$  pour  $m = 1$   $\rho(x)\rho(y)v = (\rho(H) + \rho(Y)\rho(x))v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1}v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho(y)^m v$$

...

$$[(m+1)(\beta - m)\rho(y)^m v]$$

$\implies U \subseteq V$  est stable pour  $\rho$  comme  $\rho$  est irréductible,  $U = V$

### Conséquences

- $V_\alpha = 1$
- $\rho$  est uniquement déterminé par  $\beta = \max_{\text{sup}}(\rho(H))$

De plus, comme  $V$  est de dimension finie, il existe  $m$  t.q.  $\rho(y)^m v = 0$  et  $\rho(y)^{m-1}v \neq 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$$

$$\implies m(\beta - m + 1) = 0$$

$$\implies \beta = m - 1 \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimension  $n$  et les espaces propres de  $\rho(H)$  sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

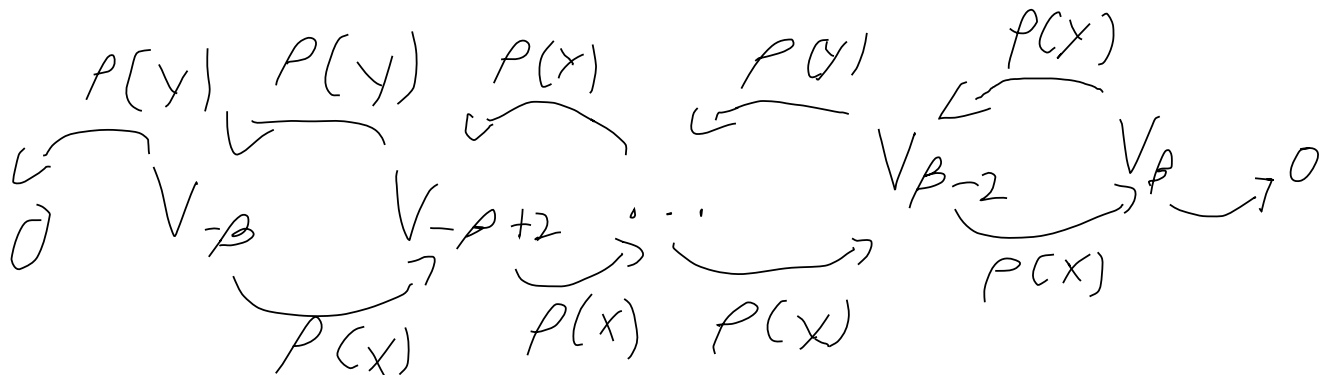


FIGURE 1 – ladder

## Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

### Rappel

$$\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i) \quad i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par  $\rho_1 \otimes \rho_2(g)(V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si  $G$  est un groupe de Lie  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie

Calculons  $d(\rho_1 \otimes \rho_2)|_{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{gl}(V_1 \otimes V_2)$

Soit  $\gamma(t) \in G$ ,  $\gamma(0) = I$ ,  $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \otimes \rho_2) \gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \dots = \left( d \rho_1 \Big|_I (X) V_1 \right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\dots)$$

### Définition :

Si  $\rho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V_i)$  sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors  $\rho_1 \otimes \rho_2$  est définie par  $(\rho_1 \otimes \rho_2) X (V_1 \otimes V_2)$

On a également  $\text{sym}^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ ,  $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$  sous-représentation comme pour  $G$  un groupe On introduit la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdots v_n := \text{Sym}^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in \text{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_1 \cdots = \text{Alt}(v_1 \cdots)$$

Revenons à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation ???? est  $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres  $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus V_2$$

est la représentation irréductible de dimension 2

$$\text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(\text{Sym}(i)(H))(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_1) = 2e_1^2$$

sur  $e_1 \otimes e_2$  c'est 0 sur  $e_2 \otimes e_2$  c'est  $-2e_2^2$

$$\implies \text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^{n-i}, e_2^i \rangle$$

Chacun est un vecteur propre de  $\text{sym}(H)$  et

$$\text{sym}(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left( H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + (e_1 H e_1 \cdots e_2^i) + \cdots$$

$$= \cdots = (n-2i)e_1^{n-i}e_2^i$$

Je vois pas

Exemple : Quelle est la d/composition de  $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes \text{sym}^2(\mathbb{C}^2)$  en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de  $\rho(H)$

pour  $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) : -2, 0, 2$  pour  $\text{sum}^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si  $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) H (v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2) (v \otimes u)$$

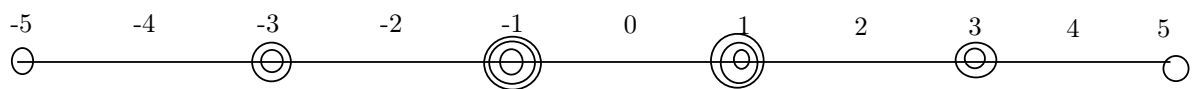


FIGURE 2 – valeurs propres