2022-36-05

Métrique de Schwarzschild

Solution des équation de Einstein à symétrie sphérique. Solution découverte par Schwarzschild un peu avant sa mort.

$$\mathrm{d}\tau = A(r)\mathrm{d}t^2 B(r)\mathrm{d}r^2 - r^2\left({}^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 - \mathrm{d}\theta^2\right) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\mathrm{d}t^2\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

Cette métrique présente une singularité à $r = r_s$. Cependant c'est une artéfact du système de coordonné et non un singularité *physique*. On peut s'en rendre compte en étudiant des valeurs qui ne dépende pas des coordonnés comme le tenseur de Riemann. En faisant cela, on se rend compte qu'il y a un *vraie* singularité en $r = 0$

$$R^{ijkl}R_{ijkl} = 12\frac{r_s^2}{r^6} \quad \text{singularité géométrique!}$$

On note la partie spatiale des coordonnées $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$

On peut alors noter la métrique de manière générale (avec des fonction arbitraire de toute les quantité qui sont invariantes par rotation)

$$\mathrm{d}\tau^2 = A(r,t)\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\mathrm{d}t(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}) - C(r,t)(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})^2 - D(r,t)\mathrm{d}\mathbf{r}^2$$

On peut faire le changement de variable :

$$\begin{cases} x^1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x^3 = r\sin\theta \end{cases}$$

Notre métrique est alors

$$\mathrm{d}\tau^2 = A\mathrm{d}t^2 - Vr\cdots - D\left(\sin^{2\theta}\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

On peut alors toujours faire un changement de coordonné ou $\sqrt{D} = r$. On trouve alors

$$\mathrm{d}\tau^2 = A\mathrm{d}t^2 + B\mathrm{d}t\mathrm{d}r - C\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\mathrm{d}\theta^2\right)$$

Si on impose également un symétrie d'inversion du temps (qui exclus les rotation), B doit être nul car ce terme n'as pas cette symétrie. Ce n'est pas nécessaire de requérir cette symétrie. Plutôt, on peut posser

$$\mathrm{d}\bar{t}^2 = \left[A\mathrm{d}t - \frac{1}{2}B\mathrm{d}r\right]$$

Cela permet de se débarrasser de ce B

On a donc

$$\mathrm{d}\tau^2 = A(r,t)\mathrm{d}t^2 - B(r,t)\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\sin^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2\right)$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} A(r) & & & \\ & -B(r) & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{ij} = 0$$

$$\begin{cases} R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rB} \\ R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB} \\ R_{22} = 1 - \frac{1}{B} - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \\ R_{33} = R_{32}\sin\theta \end{cases}$$

$$R_{00} + \frac{A}{B}R_{11} = 0$$

$$\frac{A'}{rB} + \frac{B'A}{rB^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left(A'B + B'A\right) = 0$$

$$\implies (AB)' = 0 \implies AB = \mathrm{CST} = \alpha$$

$$\ldots$$

$$\boxed{\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2}$$

Loi de conservation

$$\boxed{\dot{u}_i = \frac{1}{2}\partial_i g_{mk} u^m u^k}$$

$$\dot{u}_0 = 0 \quad u_0 = \mathrm{cst} = k = g_{00}\dot{u}^0 = g_{00}\dot{t} = \underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = k}}_{\substack{\text{conservation de l'énergie} \\ \text{cinétique par unité de masse}}}$$

$$\dot{u}_3 = \text{cst} \implies u_3 = g_{33} u^3 = -r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = -h$$

$$\underbrace{\boxed{r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = h}}_{\text{moment cinétique par masse}}$$