Rappels :

Théorème fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$:

$$I^* = I \wedge II = II^* \iff p^* = T \cdot p, T | T \text{ est une isométrie directe}$$

Champ de vecteurs sur S

$$x : S \to \mathbb{R}^3 | X(x) \in T_x S$$

x serait la vitesse d'un fluide sur la surface

Dérivé couvariante

$$\boldsymbol{\nabla}_v : X = \pi_{T_x s} D_v X = D_v X - (D_v x \cdot u)u$$

Rappels sur les dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ on peut définir sa dérivées directionelle dans la directiondu vecteur v

$$D_v f := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

.
On peut l'évaluer enutilisant un chemin :

$$D_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \qquad \text{avec } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$$

Si f est définie sur une surface s, on utilise un chemin de la forme $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$
Les vecteur tangants à $\gamma(t)$ sont $\frac{d}{dt}\gamma(t) = u' p_u + v' p_v$
Si on connaît la fonctions en coordonnées locales $(f(u, v))$, on a :

$$D(u' p_u + v' p_v)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u(t), v(t))$$

Un champ de vecteur sur S est intrinsèque. Si X set un champ de vecteurs sur S, on peut l'écrire comme

$$X - f(u, v) p_u + g(u, v) p_v$$

$$\begin{aligned} D u' p_u v' p_v X &= u'(f(u, v) p_u + g(u, v) p_v)_u + v'(f(u, v) p_u + g(u, v) p_v)_v \\ &= u'(f_u p_u + f p_{uu} + g_u p_v + g p_{uv}) + v'(f_v p_u + f p_{uv} + g_u p_u g p_u u) \end{aligned}$$

Les termes p_{uu}, p_{uv} et p_{vv} ont des composantes en u. $\implies$ La dérivée directionnelle n'est pas un champ de vecteur sur S mais la dérivée covariante oui !

Lien avec les symbols de cristoffel : p_u et p_v sont des champs de vecteurs sur S

Exemple :

Sue chaque point on peut calculer la dérivé covariante de p_u par rapport à p_v

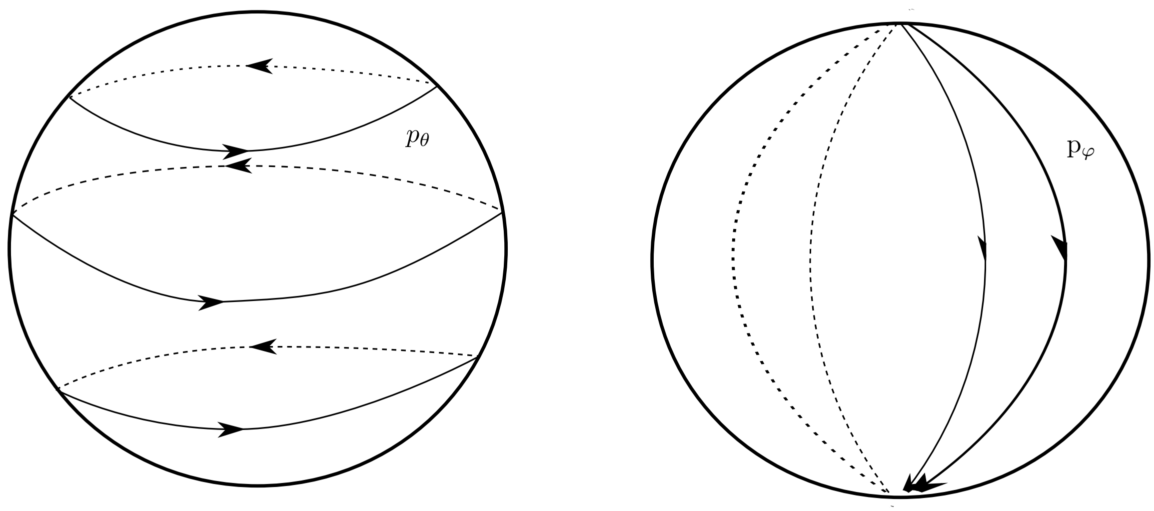

FIGURE 1 – Champ de vecteur

$$\boldsymbol{\nabla} p_u p_u = \pi^{\perp}_{T_xS}(Dp_up_u) = \pi^{\perp}_{T_xS}(\Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}p_v + Lu = \Gamma^u_{uu}p_u + \Gamma^v_{uu}p_v$$

On peut alors trouver les quantitées intrinsèques (ignornent les isométries locales)

$$\boldsymbol{\nabla} p_u p_v = \Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^v_{uv}p_v \boldsymbol{\nabla} p_v p_u = \Gamma^u_{uv}p_u + \Gamma^u_{uv}p_v \boldsymbol{\nabla} p_v p_u = \Gamma^u_{vu}p_u + \Gamma^u_{vv}p_v$$

Propriétes de la dérivé couvariante

1. Linéarité 1 :
$$\boldsymbol{\nabla}_v(x_1 + x_2) = \boldsymbol{\nabla}_v X_1 + \boldsymbol{\nabla}_v x_1 + \boldsymbol{\nabla}_v x_2$$
2. Règles de Leibnitz :
$$\boldsymbol{\nabla}_v(fX) = (D_vf)X + f\boldsymbol{\nabla}_v X \qquad f : S \to \mathbb{R}$$
3. linéarité 2 :
$$\boldsymbol{\nabla}_{av_1+bv_2}X = a\boldsymbol{\nabla}_{v_1}X + b\boldsymbol{\nabla}_{v_2}X$$

Démonstation de la deuxième propriété :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_v(fx) &= D_v(fx) - (D_v(fx)\cdot u)n \\
&= (D_vf)x + f(D_vx) - ((D_vf)\underbrace{x\cdot n}_{0}) + f(D_ux)\cdot n)n \\
&= D_vfx + f(D_vs = [(D_vx)\cdot n]n) \\
&= D_vfx + f\boldsymbol{\nabla}_vx
\end{aligned}
$$

En utilisant les trois propriétées on calculs :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}p_u(fp_u + gp_v) = \boldsymbol{\nabla}p_u(fp_u) + \boldsymbol{\nabla}_{p_u}(gp_v) \\
&= (Dp_uf)p_u + (DP_ug)p_v + f\boldsymbol{\nabla}_{p_u}p_u + g\boldsymbol{\nabla}_{p_u}p_v \\
&= (f_u + f\Gamma^u_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_u + (g_u + \Gamma^v_{uu} + g\Gamma^u_{uv})p_v
\end{aligned}
$$

On fait la même chose pour $\boldsymbol{\nabla}_{p_v}$ et avec la propriété 3 on peut calculer $\boldsymbol{\nabla}_vx$ pour n'importe que v, x.