2022-09-02

Espace-temps

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\tau^2$$

Temps propre

Temps qui s'écoule dans le référentielle de l'objet

$$\implies x(\tau)$$

Si on connais $x^i(t)$, alors que vaut le temps propre ?

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} \\ &= \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2} \\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} \end{aligned}$$

Action

$$\begin{aligned} S = -m\int_A^B \mathrm{d}\tau = -m\int_A^B \mathrm{d}t\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ \approx -m\int_A^B \mathrm{d}t\left(1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}\right) \\ = -m\int_A^B \mathrm{d}t\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

Lagrangien :

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}$$

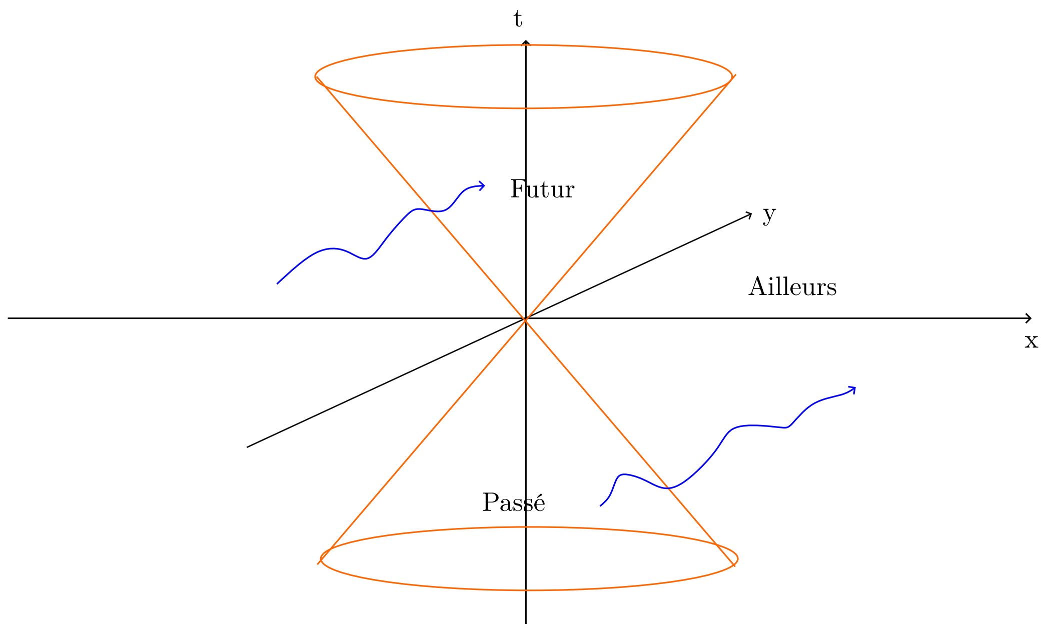

Figure 1 – Espace-temps

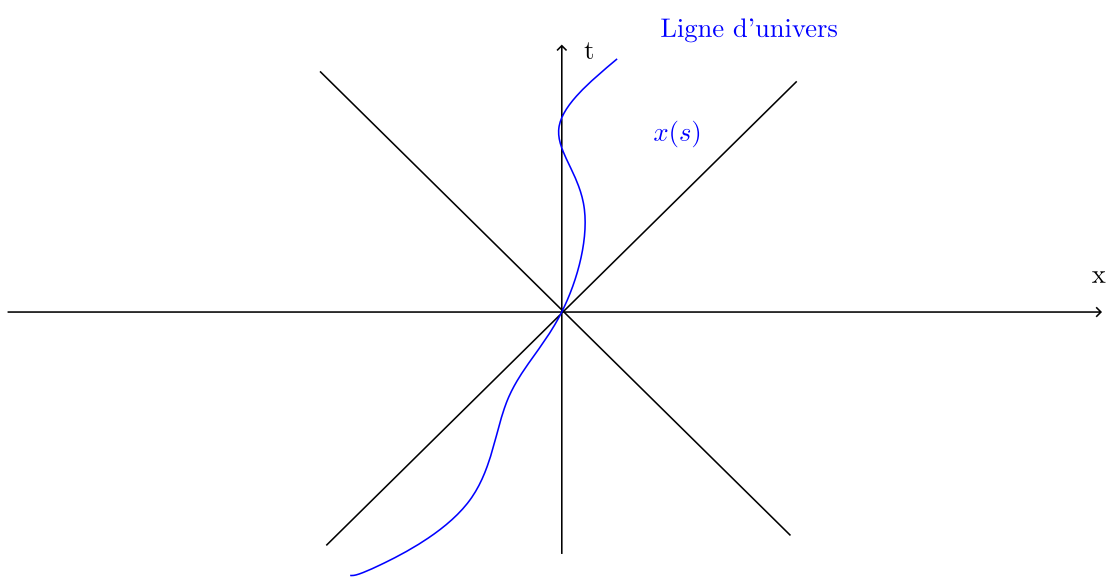

Figure 2 – Minkowski 2D

Hamiltonien

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = L = H$$

Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} + m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\left\{\mathbf{v}^2 + 1 - \mathbf{v}^2\right\} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

$$H^2 = \frac{m^2}{1-\mathbf{v}^2} \quad \mathbf{p}^2 = \frac{m^2 v^2}{1-\mathbf{v}^2}$$

Éléctromagnétisme

4-vecteur potentiel :

$$A^i = (\Phi, \mathbf{A}), \quad A_i = (\Phi, -\mathbf{A})$$

$$S = \underbrace{S_0}_{-m\int \mathrm{d}\tau} - e\int_A^B \underbrace{A_i \mathrm{d}x^i}_{\text{invarient}} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

Tensuer de Faraday

$$F_{ij} =_i A_j - \partial_j A_i$$
$$F_i^i = 0 \quad F_{ij}F^{ij} \text{ : invarient}$$
$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

→ principe de moindre action :

$$\boxed{m\ddot{x}^i = eF_j^i\dot{x}^2}$$

$$\boxed{m\dot{u}^i = eF_j^i u^j}$$

Chapitre 2 : géométrie différentielle

Théorème du plongement

Nash
Ne vaut que pour des espace euclidien (pas pour l'espace-temps donc) mais le théorème se généralise
On définit un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme un point de la surface. Où $\mathbb{R}^3$ est *l'espace hôte*

$$\mathbf{X}(x^i) \quad i \in \{1, \cdots, d\}$$

Par exemple, la sphère :

$$\mathbf{X} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$
$$x^1 = \theta \quad x^2 = \phi$$

Il n'existe pas de vecteur position
Il est impossible en général de représenter un variété différentiel avec une seule carte

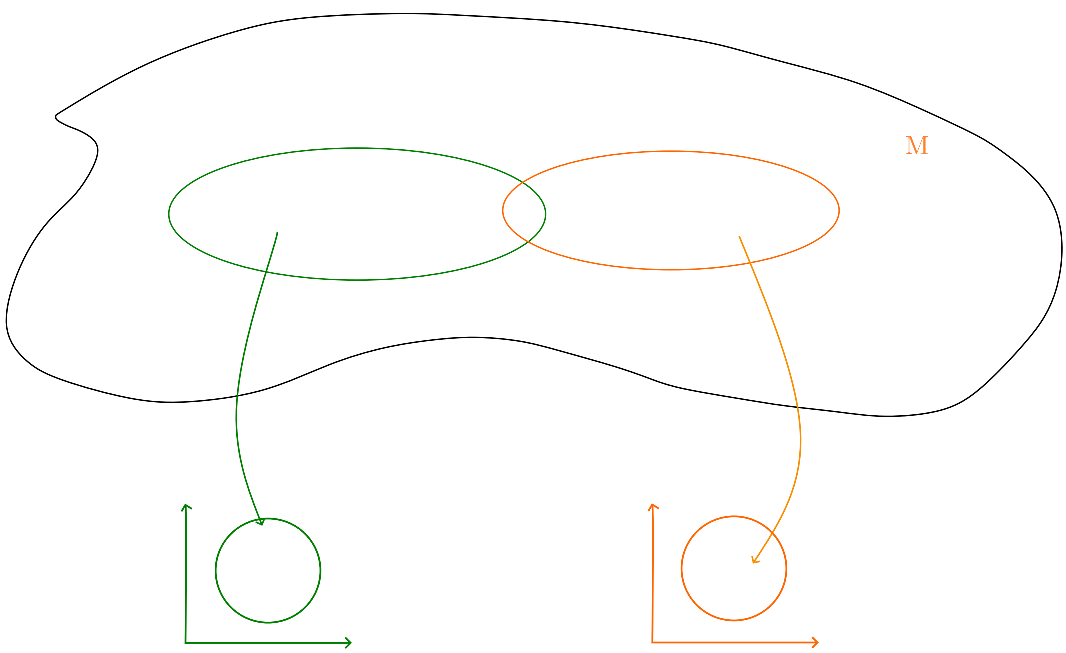

Figure 3 – Atlas

Espace tangeant

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}'_j \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\Lambda^j}$$

Truc mémotechnique

Quand on divise par un indice inferieur il deviens suppérieur et inversement

tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\mathbf{X}\mathrm{d}\mathbf{X} = \left(\partial_i \mathbf{X} \mathrm{d}x^i\right) \cdot \left(\partial_j \mathbf{X} \mathrm{d}x^j\right) = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x_j = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$$

fonction : $\phi(x)$

$$\partial_{i\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\partial_i' = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \cdots$$

$$\partial_i \phi = \partial_j' \phi \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

(vecteur covarient)