Raypnnement

Potentiels

Statique

$$\nabla \times E = 0 \implies E = -\nabla V$$
$$\nabla \cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla^2 B = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(M) d\tau}{PM}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla x \mathbf{B} = \mu_0 j = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A$$

A n'est pas définis de manière unique. On a un choix de gauge sur la valeur du gradient

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{jauge de Coulomb}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Remarque

La condition $\nabla \cdot A = 0$ n'est pas trop forte

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi$$
$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le résultat physique reste le même peut importe le gradient !

dynamique

$$\nabla \cdot B = 0 \implies \nabla \times A$$

$$\nabla \times B = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -\nabla \times \frac{dB}{dt}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial B}{\partial t} \right) = 0 \implies \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}+\epsilon\mu_0\left(-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot E=\frac{\rho}{\epsilon_0}=-\boldsymbol{\nabla}^2V-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{cases}$$

On veut annuler le terme en V car c'est celui-là qui mélange les deux composantes

$$\mu_0 j=\epsilon_0\mu\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}=\boldsymbol{\nabla}\left[\boldsymbol{\nabla}\cdot A+\frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0}+\boldsymbol{\nabla}^2B=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot A)$$

<u>Gauge de Lorentz</u>

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot A+\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{j}\\ \boldsymbol{\nabla}^2V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{cases}$$

Si on modifie maintenant le potentiel vecteur, on trouver

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\varphi\implies\mathbf{B}'=B$$

Cepdant, cela change $\mathbf{E}$, à moins que V change aussi. On veut que $\mathbf{E}=\mathbf{E}'$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'&=-\boldsymbol{\nabla}V'-\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\\&=\boldsymbol{\nabla}V'-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\mathbf{E}'=-\boldsymbol{\nabla}\underbrace{\left(V'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{V}-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

On a donc que V' doit être différent de V. V et $\mathbf{A}$ ne sont plus indépendant !

Potentiels retardées

Quand on travail en dynamique le potentiel ne s'applique plus instantanément. L'information voyage à la vitesse de la lumière

$$V(P,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(M,t-\frac{PM}{c})}{PM}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathbf{A}(P,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(M, t - \frac{PM}{c}}{PM}\mathrm{d}\tau$$

On appelle la quantité $t - \frac{PM}{c}$ le temps retardé.

Cette forme d'équation ne s'applique pas sur $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$