# Cours 5

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

La dernière fois, on s'interessait à ce qui se passe quand un courbe n'est pas paramétrisé par longueur d'arc. On suppose qu'il existe un paramétisation par longueur d'arc : $\alpha(s(t))$ où $s$ est la longueur d'arc

$$s(t) = \int_0^t ||\alpha(s(x))||\mathrm{d}x$$

$$s'(t) = ||\alpha(s(t))'|| = v(t)$$

$$\alpha(s(t))' = \alpha'(s(t))s'(t) = T(s(t))v(t)$$
$$\alpha(s(t))'' = T'(s(t))v(t)^2 + T(s(T))v'(t) = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)^2 + v'(t)T(s(t))$$

Pour calculer $N$ et $\kappa$ sans passer par la longeure d'arc, on utilise

$$\kappa(s(t))N(s(t)) = \frac{\alpha(s(t))'' - v'(t)T(s(t))}{v(t)^2}$$

<u>Exercice :</u> Finir l'exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$$

On devrais trouver

$$\kappa(s(t)) = \tau(s(t)) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

<u>Proposition :</u> La courbure d'une coure $\alpha$ (non-paramétrée par longueur d'arc) est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|}^2$$

<u>Démonstration</u>

On a, par ce qu'on a fait ci-haut

$$\alpha(s(t)) = vT$$
$$\alpha(s(t))'' = v'T + \kappa v^2 N$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3 \kappa (T \times N) = v^3 \kappa B$$

$$\implies \|\alpha' \times \alpha''\| = v^3 \kappa$$
$$\implies \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \kappa \quad \text{car } v = \|\alpha'\|$$

Conséquence des formules de Frenet-Serret

Prop : Une courbe est un droite $\iff \kappa = 0$

Démonstration ( $\implies$ ) Si $\alpha$ est une droite

$$\alpha(s) = \rho_0 + sV$$
$$\alpha'(s) = v - T(s) \implies T'(s) = 0 \implies \kappa = 0$$

($\impliedby$) si $\kappa(s) = 0 \forall s$

$$T'(s) = 0 \implies T(s) = T_0$$

$$\alpha(s) = \int_0^s T * (x) \mathrm{d}x = sT_0 + \rho_0$$

Exemple : Que peut-on dire d'une courve $\alpha$ dont toutes les tangeantes passent par un même point ?

Sans pertes de généralité, les tangeantes passent par $\vec{O} \in \mathbb{R}$

$$\implies \alpha(s) + \lambda(s)T(s) = 0$$
$$\implies T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = 0$$
$$\implies (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s) + \lambda(s)(\kappa(s)N(s)) = 0$$

$$\implies 1 + \lambda'(s) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0$$
$$\lambda(s) = -s + c$$
$$\lambda = 0 \text{ si } s = c \implies \kappa = 0 \text{ sauf si } \cdots$$

Prop 1)Une courbe birrégulière $\alpha$ est planaire $\iff \tau \equiv 0$. 2) Les courbes planaires de courbure constante sont des cercles.

Démonstration 1) $\implies$ Si $\alpha$ est planaire, $T$ et $N$ engendrent le plan qui contiens $\alpha$. Cela signifique que $T \times N = B$ est constant. C'est le vecteur normal au plan qui contient la courbe $\alpha$.

$$\implies B'(s) = 0 = -\tau N \implies \tau = 0$$

Donc la torsion est nulle ■

($\Longleftarrow$) Inveserment, si $\tau \equiv 0$

$$B'(s) = 0 \implies B(s) = B_0(estconstant)$$
$$\implies (\alpha(s) \cdot B(s))' = T(s) \cdot B(s) + \alpha(s) \cdot B'(s) = 0$$

$$\alpha(s) \cdot B(s) = \alpha(s) \cdot B_0 = C$$

C'est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}$ ■

2) $\Longleftarrow$

Un cercle est paramétré par longeur d'arc avec l'équation suivante :

$$\alpha(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$
$$\alpha'(s) = T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

$$\implies \kappa = \|T'(s)\| = \frac{1}{r} \text{ est constante}$$

Cela donne une interprétation à la courbure qui est que en chaque point, il existe un cercle de rayon $r$ qui est une meilleur approximation de la courbe.

$$\implies$$

Soit $\alpha(s)$ ime courbe planaire avec
$$\kappa_s = \kappa_0$$

Commme on sait déja que cela doit ête un cercle, on s'aide en cherchant le centre du cercle.

On pose $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0}N(s)$

$$\beta'(s) = T(s) = \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa T + \tau B)$$

$$\|\alpha(s) - \beta(s)\| = \left\|\frac{1}{k_0}N(s)\right\| = \frac{1}{k_0}$$

$\implies \alpha(s)$ est sur le cercle de rayon $\frac{1}{k_0}$ centré en $B_0$

Courbe du jour : Tractrice UN chien enterre un os à $(0,1)$, son maître à $(0,0)$ la tire par une laisse en de déplaçant vers $x > 0$. Comme le chien tire très for, la laisse est toujours tangenante à la trajectoire du chien.

Soit $\theta$ l'angle formé par la laisse et l'axe des $x$

$$\alpha(t) = (t + \cos\theta(t), \sin\theta(t))$$
$$\alpha'(t) = 1 - (\sin\theta)\theta', \cos\theta\theta'$$

La laisse est dans la direction $(\cos\theta, \sin\theta)$. Comme la trajectoire $\alpha$ est tangeante à la laisse.

$$\frac{\cos\theta\theta'}{1 - (\sin\theta)\theta'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\cos\theta\theta' = \sin\theta - (\sin^2\theta)\theta'$$
$$\theta' = \sin\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sin\theta$$
$$-\ln(\csc\theta + \tan\theta) = t + c \quad t = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \to c = 0$$

$$\alpha = (-\ln(\csc\theta + \tan\theta) + \cos(\theta), \sin\theta) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

En reparamétrisant

$$\alpha(t) = (t - t\sinh(t), \sinh(t))$$

Forme locale canonique d'une courbe

Proposition : Soit $\alpha$ une courbe birrégulière paramétrée par longueur d'arc t.q. $\alpha(0) = 0$ alors

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^2 + o(s^2))T(o) + \left(\frac{k_0}{2}s^2 +\right)\cdots$$

C'est vraiment laid, c'est loin pis il y a du soleil, sorry.

Démonstration Le théorème de Taylor nous dit

$$\alpha(s) = sa'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^2}{6}\alpha'''(0) + O(s^4)$$

$\alpha'(0) = T(0)$ $\alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s)$ $\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa'(0)N(0) + \kappa_0\tau_0 B(0)$

$$\implies \alpha(s) = \left(s - \frac{s^2}{6}\kappa_0^2 + O(s^3)\right)T(0) + \left(k_0\frac{s^3}{2} + k_0'\frac{s^2}{6} + o(s^3)\right)N(0) + \left(\kappa_0\tau_o\frac{s^3}{6} + O(s^3)\right)B(0)$$

Le théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Si j'ai deux courbes donc je connais la même courbure est la même torsion en tout point alors c'est la même courbe à une isométrie près.

Montrons d'abord que les isométies de $\mathbb{R}^3$ préservent la courbure est la torsion.

Rappel Une isométrie de $\mathbb{R}^3$ e st de la forme $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ où $A \in O(3) \iff AA = \text{id},\ b \in \mathbb{R}^3$

Une isométrie est directe où une transformation directe si $A \in SO(3) \iff \det A = 1$

Soit $\alpha$ une courbe paramétré par longeure d'arc

On définit

$$\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$$

$$\alpha^{*'}(s) = A\alpha(s)$$
$$T'(s) = AT(S)$$
$$T^{*'}(s) = AT'(s)$$
$$\|\kappa^* N^*(s)\| = \|\kappa(s)AAN(s)\|$$

$$\kappa^* = \kappa$$

$$B^* = T^* \times N(AT) \times (AN) = A(T \times N) = AB$$

$$(B^*)' = -\tau^* N^*$$
$$(AB)' = AB' = - \implies \tau = \tau^*$$