Rappels

- Transport parallèl : X est parallèle le long de α si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} X \equiv 0$
- Étant donné $X_0 \in T_{\alpha(0)} S \exists ! X$ définis sur α et parallèle
- Géodésique : α géodésique si $\boldsymbol{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = 0$ (α' est parallèle le long de α)
- Vitesse constante car parallèle implique longeur constante
- En cooddonnées

$$\alpha(r) = p(u(t), v(t))$$

$$u" + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^u_{uu} & \Gamma^u_{uv} \\ \Gamma^u_{uv} & \Gamma^u_{uv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

$$v" + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^v_{uu} & \Gamma^v_{uv} \\ \Gamma^v_{vu} & \Gamma^v_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

Théorème de Clairaut : Si α est une géodésique sur une surface de révolution alors $\exists C$ constante t.q. pour tout point de α,

$$r \cos \varphi = C \tag{**}$$

Où r est la distance à l'axe et φ est l'angle entre $\alpha'(t)$ et le parallèl par $\alpha(t)$. Inversement, tout courbe α à vitesse constante qui satisfait (**) et n'est pas parallèle est une géodésique.

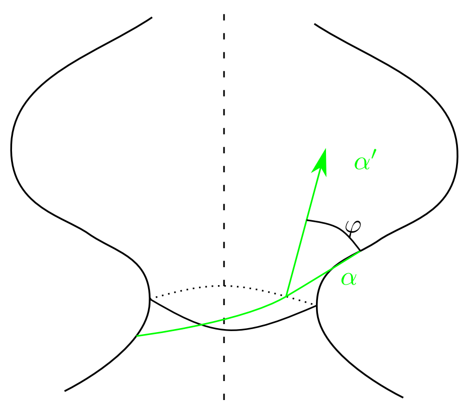

Figure 1 – Surface de révolution

$$p(s\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta x(s) \\ \sin\theta x(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

$$I_{s\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Les seuls symbols de Chritoffel non-nuls sont

$$\Gamma_s^\theta = \frac{x'(s)}{x(s)} \qquad \Gamma_{\theta\theta}^s = -x(s)x'(s)$$

Les équations géodésiques sont

$$S" + (-x(s)x'(s))\theta'^2 = 0 \tag{1}$$
$$\theta" + 2\frac{x'(s)}{x(s)}s'\theta' = 0 \tag{2}$$

$$(2) \iff \frac{\theta"}{\theta'} = -2\frac{x'(s)}{x(s)}s' \implies \ln\theta' = -2\ln(x(s)) + C \implies \theta' = \frac{C}{x^2} \implies x^2\theta' = C$$

Si $\alpha(t) = p(s(t), \theta(t))$ est une géodésique, alors $x^2\theta' = c$. α à une vitesse constante

$$\cos\varphi = \frac{\alpha' \cdot p_\theta}{\sqrt{\alpha' \cdot \alpha'}\sqrt{p_\theta \cdot p_\theta}} = \frac{(s'p_s + \theta' p_\theta) \cdot p_\theta}{v \cdot x} - \frac{\theta' x}{v'}$$

$$\cos\varphi = \frac{\theta' x}{v} = \frac{c}{xv} x\cos\varphi = \frac{c}{v} = c'$$

Pour l'autre directions, supposons que α est à vitesse constante v est que $r\cos\varphi = c$

$$r\cos\varphi = x\left(\frac{\theta' x^2}{v \cdot x}\right) = \frac{theta' x^2}{v} = C \implies \theta' x^2 = Cv \implies textl'quation2estsatisfaite$$

Il ne reste qu'à montrer que (1) est satisfaite

$$v^2 = \alpha' \cdot \alpha' = s'^2 + x(s)^2\theta'^2 \implies - = 2s's" + 2s(s)x'(s)s'\theta'^2 + x(s)^2(2\theta'\theta")$$

$$0 = s's" + xx's'\theta'^2 + x^2\theta'\left(-2\frac{x'}{x}s'\theta'\right) = s'(s" - xx'\theta'^2)$$

Si α n'est pas parallèle $s' \neq 0$ alors $s"xx'\theta'^2 = 0 \implies$ (1) est satifaite fonc α est une géodésique ■

<u>Application</u> :

$$r\cos\varphi = \text{const}$$

Initiallement $\cos\varphi = 1$

$\implies$ const $= \mathrm{r_0 \forall t > 0 r > r_0}$ car $\cos\varphi < 1$

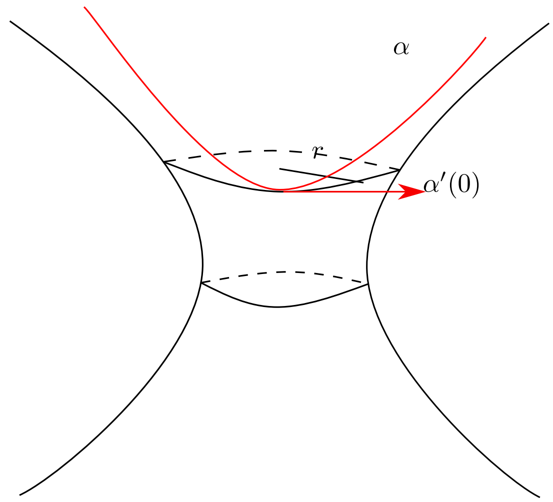

FIGURE 2 – Exemple d'application

Courbure géodésique & et courbures normales

α paramétré par longeur d'arc sur une surface S

$$T = \alpha'$$

$$\dots$$

(Il a effacé le tableau :( )