



FIGURE 1 – champignon

On veut calculer le champ magnétique d'un solénoïde

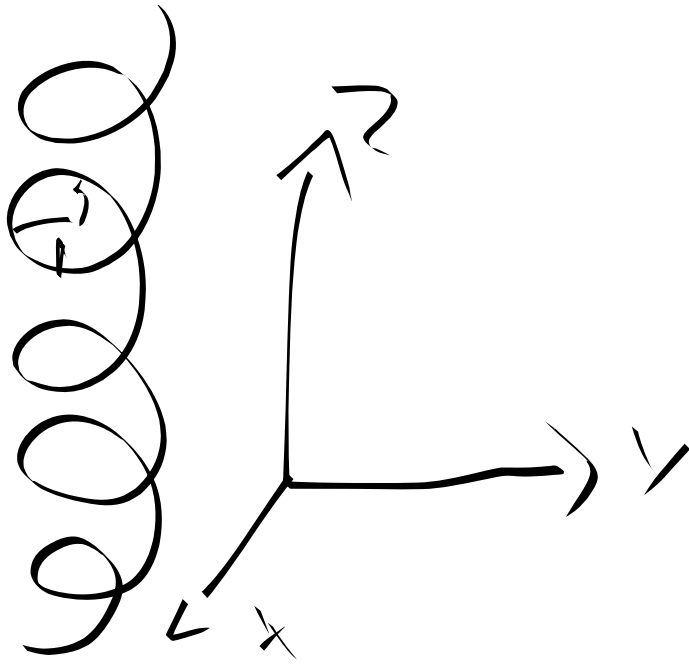
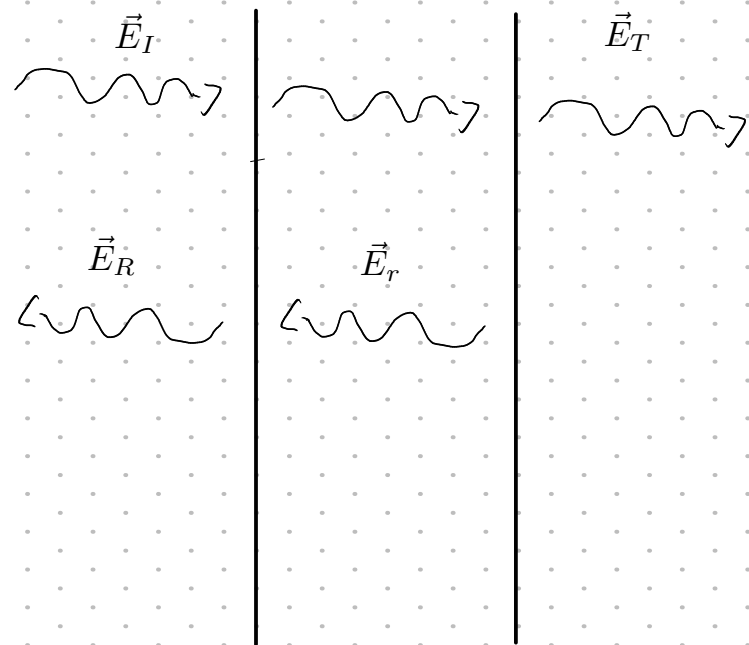


FIGURE 2 – soleno



$$\mu = \mu_0$$

$$\vec{E}_{\parallel} \text{ continue}$$

$$\vec{B}_{\parallel} \text{ continue}$$

milieu 1

$$\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_0 \left(e^{i(k_1x - \omega t)} + \Gamma e^{i(-k_1x - \omega t)} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} = i\omega t$$

$$\vec{B}_1 = \hat{z} E_0 e^{-i\omega t} \frac{k_1}{\omega} \left(e^{ikx} - \Gamma e^{-ikx} \right)$$

milieu 2

$$\vec{E}_2 = E_0 \left(A e^{ikx - \omega t} + B e^{i-kx - \omega t} \right) \hat{y}$$

$$\vec{B}_2 = \hat{z} E_0 \frac{n_2}{c} e^{i\omega t} \left(A e^{ik_2x} + B e^{-ik_2x} \right) \hat{y}$$

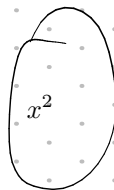
milieu 3 : similaire j'imagine

$$x = \vec{0}$$

$$1 + \Gamma = A + B \quad (1)$$

$$\frac{n_1}{c} (1 - \Gamma) = \frac{n_2}{c} (A - B) \implies 1 - \Gamma = \frac{n_2}{n_1} (A - B) \quad (2)$$

$$x = d :$$



$$Ae^{ik_2d} + Be$$



$$\vec{E} = \int \mathrm{d}r' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}$$

Cours 6

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

Pour passer de $\vec{j} \rightarrow \vec{B}$ on utilise la loi de Biot-Savard

Pour faire le contraire on utilise l'équation locale $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ où sa forme intégrale le théorème d'Ampère

On a aussi les contraintes

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

et

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

On doit aussi raisonner par linéarité, c'est à dire que le champ causé à un point sera la somme de tout les champs causés en ce point par chaque élément de courant.

$$\phi = \iint_2 \mathbf{B} d\mathbf{S} = \iint_2 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{S} = \phi_{1 \rightarrow 2} + \phi_{2 \rightarrow 2} = M_{21}I_1 + M_{22}I_2$$

$$M_{21} = M_{12}$$

1 Induction

On fait plus de l'électrostatique Whoooooop.

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}(t) \quad \text{Loi de Faraday}$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Cours 7

Jean-Baptiste Bertrand

27 janvier 2022

1 4 équation de Maxwell révisée

Imaginons qu'on ai un circuit comportant une capacitance. Si on fait une boucle d'Ampère autour du fil, on devrait trouver que la circulation dépende du courant. Cependant, si on déforme la surface de manière à ce que la boucle reste en place mais que la surface ne croise plus le fil (ce qui est possible à cause du trou laissé par la capacitance) on trouve que la circulation devrait être nul ou $\mu_0 I = 0$. Comme ni μ ni I ne sont nul, l'équation de Maxwell doit être fausse!. Plus exactement il lui manque un terme en électrodynamique.

En effet on a que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \implies \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} \implies \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Autrement dit, notre équation de Maxwell, dans son état actuel **implique** que la charge ne varie pas dans le temps.

On pose alors

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mathbf{u}$$

On cherche alors la forme de \mathbf{u} qui est pour l'instant quelconque

2 Temps de vol d'une charge

On veut savoir le temps caractéristique que prend un charge pour se dissiper dans un matériaux. On ne considère pas les effets de bords et on a que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho(t) = \rho_0 e^{\frac{-t}{\tau_q}}$$

avec $\tau_q = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$

3 La loi d'Ohm, d'où c'est que ça viens c'taffaire là

À partir de ce qu'on a fait plus haut (?) on a que

$$\frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{\tau} \implies m\mathbf{v}t = -\frac{m}{\tau} \langle \rangle$$

avec champ électrique :

Inserer les équations de Maxwell ici

On se met dans le vide donc $\rho \equiv J \equiv 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (4)$$

On veut une équation pour \mathbf{E} seulement !

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2}$$

C'est une équation d'onde ! Wow quel dénouement innatendu !

On pose la constante c comme nom de variable totalement aléatoire dans le processus de résolution de notre équation différentielle. Oh ! Mon DIEU ! Il s'agit en fait... de la vitesse de la lumière !!!!!!!!!!!!!!! Pourtant celle-ci ne semble dépendre que de constantes universelles fondamentales. Cela signifie donc que si je vois la lumière aller à une vitesse différente, les constantes ϵ_0 et μ_0 doivent être différentes. Cependant comme on le sait de Galilée, qui a inventé la relativité, il suffit de changer de référentielle pour cela ! Cela veut donc dire que si j'allais à vitesse c je mesurais que $\epsilon \mu_0 = \infty$. C'est fascinant, les constantes fondamentales changent drastiquement d'un référentiel à l'autre ! La terre doit être dans un référentiel très privilégié pour que nous n'ayons jamais remarqué ce fait incroyablement important. Je m'en vais vérifier cette hypothèse expérimentalement puis passer par Go pour collecter mon prix Nobel de ce pas !

Journal, entrée 192

Autre observation fasciante : les champs électrique et le champ magnétique sont tout deux perpendiculaires au vecteur d'onde k qui dicte la direction de propagation ! Ce sont donc des ondes transverses. Fascinant. Une nouvelle découverte n'attend pas l'autre.

ONdes guidées

On a un tube infini de métal parfait

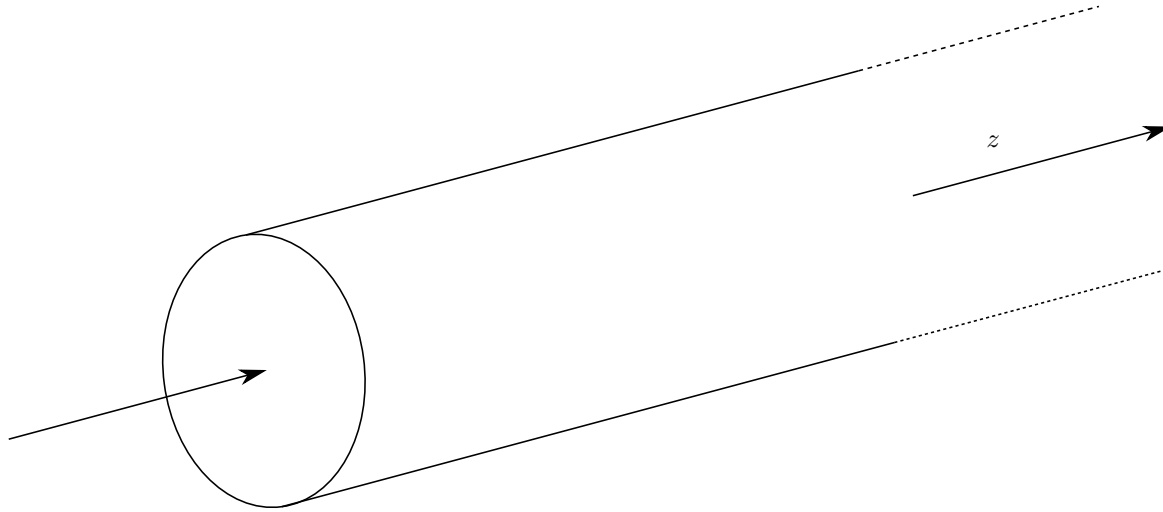


FIGURE 1 – Onde dans un CEP cylindrique

On cherche une solution de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \\ \mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)} \end{cases}$$

l'onde ne peut pas être TEM

$$E_z = B_z = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = i\omega B_z = 0$$

$$\Rightarrow dvE_yx = \frac{dE_x}{dy} = 0$$

C'est donc identique à un problème d'électrostatique

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse. On peut avoir des ondes

$$\begin{cases} TE & E_z = 0 \\ TM & B_z = 0 \end{cases}$$

Remarque

On ne peut donc pas avoir d'onde transverse dans un conducteur seul, il en faut au moins deux

Cas d'une onde TE ($E_z = 0$)

$$\nabla^2 B_z = \frac{1}{c^2} \frac{dB_z}{dt} = 0 \text{ à l'intérieur}$$

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} + \frac{d^2 B_z}{dy^2} - k^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0$$

On cherche une solution sous la forme $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$ pour le cas d'un guide d'onde rectangulaire

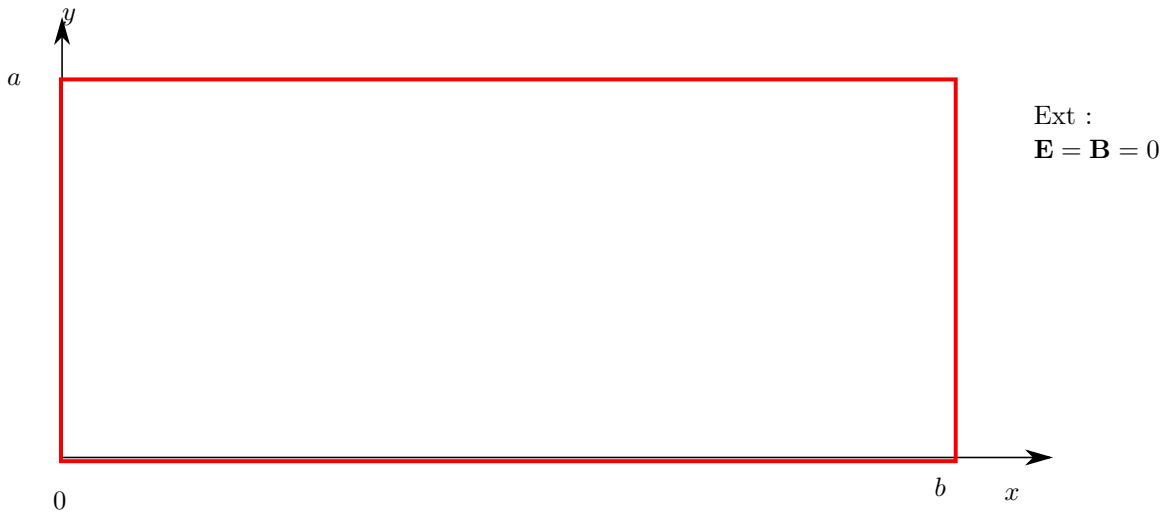


FIGURE 2 – guide d'onde rectangulaire

$$X''Y + XY'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) XY = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

$$\frac{X''}{X} = - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) - \frac{Y''}{Y} = -k_z^2 \text{ On le pose}$$

$$X = \alpha \sin k_z x + \beta \cos k_z x$$

de mmême

$$\frac{Y''}{Y} = -k_z^2$$

$$\text{avec } -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

Conditions aux limites $\mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{B} = 0$ à l'extérieur du cylindre

On a aussi que E_{\parallel} et B_{\perp} sont continus

Donc, en $y \in \{0, b\}$ $E_x = B_x = 0$ et en $X \in \{0, a\}$ $E_y = B_y = 0$

Il nous reste à relier E_x, E_y, B_x, B_y à E_z, B_z

On veut donc se servir des autre équations de Maxwell. En particulier on veut se servir du rotationnel car il mélange les composantes

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} = i\omega\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ikE_y \\ ikE_x \\ \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} \end{pmatrix}$$

$$B_x = -\frac{k}{\omega}E_y, \quad B_y = \frac{k}{\omega}E_x$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} d\mathbf{v}\mathbf{E}t = -\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\Rightarrow -\frac{i\omega}{c^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dB_z}{dy} - ikB_y \\ ikB_x - \frac{dB_z}{dx} \\ \frac{dB_y}{dx} - \frac{dB_x}{dy} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dB_z}{dy} = ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2}E_x = \left(-\frac{i\omega}{c^2} \right) \frac{\omega}{k}B_y$$

$$\frac{dB_z}{dy} = B_y \left[-i\frac{\omega^2}{kc^2} + ik \right] = ikB_y \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2} \right]$$

$$-\frac{dB_z}{dx} + ikb_x - i\frac{\omega^2}{kc^2}B_x = ikB_x \left[1 - \frac{\omega^2}{k^2c^2}\right]$$

$$B_y(x, 0) = 0 \forall x$$

$$\implies \frac{dB_x}{dy} = 0 \quad B_z = X(x)Y(y)e^{i(kz - \omega t)}$$

$$X(x)Y'(0) = 0 \forall x \implies Y'(0) = 0$$

$$\text{de même } B_z(x, b) = 0 \implies Y'(b) = 0$$

On reviens sur le guide d'onde rectangulaire

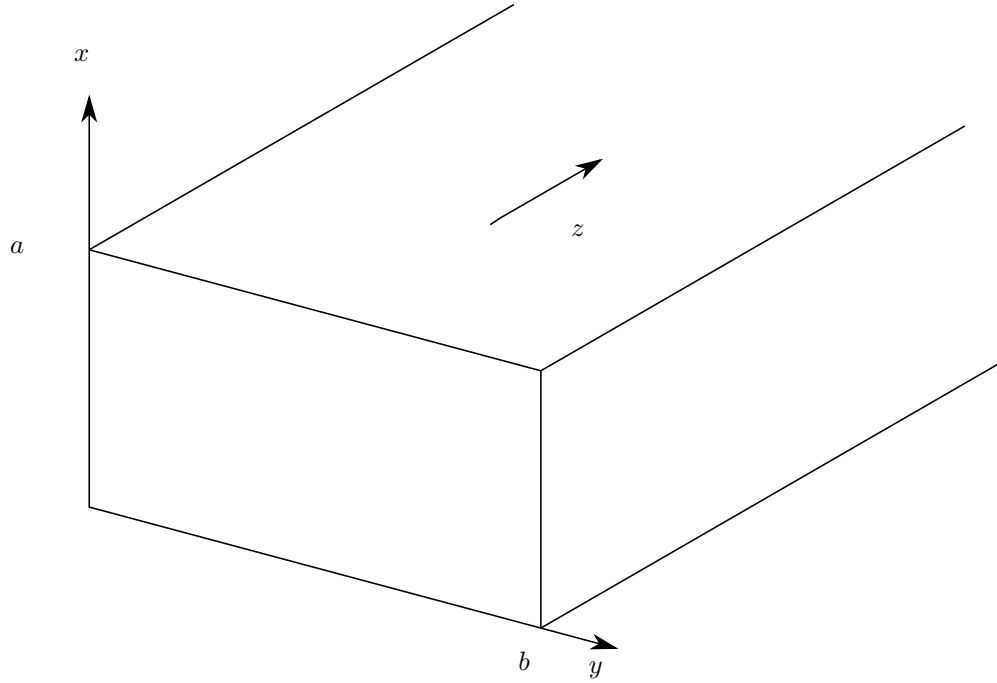


FIGURE 1 – guide d'onde rectangulaire

Modes :

$$\begin{cases} \text{TE} & E_z = 0 \\ \text{TM} & B_z = 0 \end{cases}$$

$$B_z(x, y, z) = B_0 \cos k_x x \cos k_y y e^{ikz}$$

avec

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b}$$

ex : $n = 0, m = 1$

$$B_z(x, y, z) = B_0 \cos k_y y e^{ikz}$$

$$B_z(x, y, 0) = B_0 \cos \frac{y\pi}{b}$$

Dans le cas d'un métal non-parfait, il y aurait des pertes dues aux courants. On s'intéresse maintenant à calculer ces courants.

Comme $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ On peut obtenir la charge facilement à partir du courant (à constante près) mais pas l'inverse
discontinuités de $B_z \rightarrow j_z$

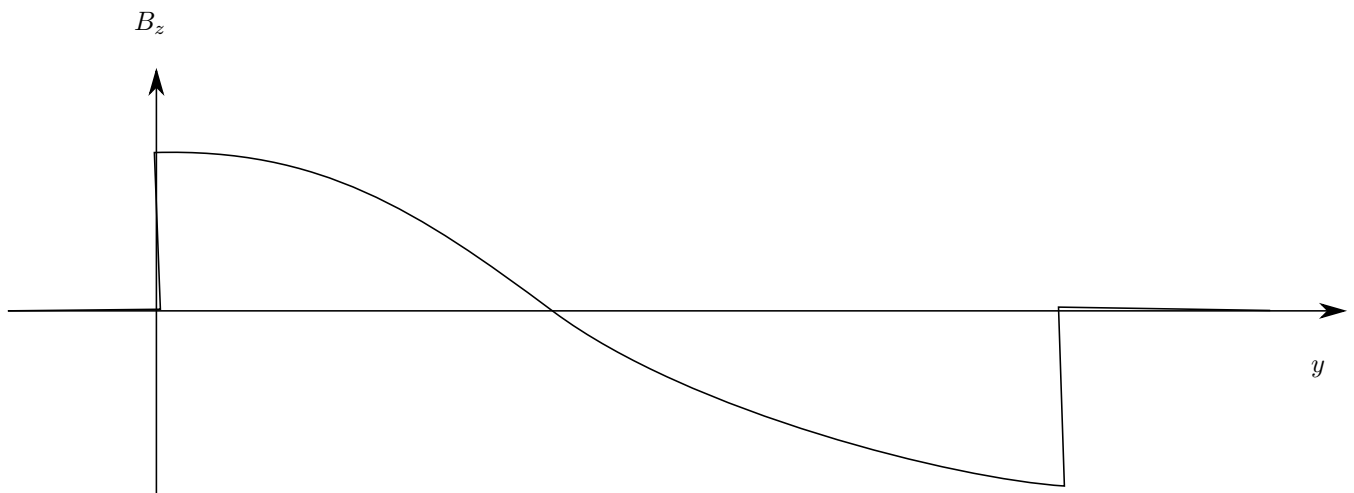


FIGURE 2 – Graphique du champ magnétique

en $y = b$: j_s suivant \hat{x}

$$B_z(y = b^+) - B_z(y = b^-) = \mu_0 j$$

$$\implies j_s = \frac{B_0}{\mu_0}$$

en $x = 0$

$$\mathbf{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0} \cos \frac{y\pi}{b} \hat{y}$$

Comme on est en 2D : on a

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En $y = 0, y = b$, on a $J_s = cte \implies \sigma = 0$

En $x = 0$ on a

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\pi}{b} \sin \frac{y\pi}{b} = i\omega\sigma$$

Autre approche : Discontinuité de E

en $x = a$:

$$E_x \propto \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \text{OK}$$

Remarque : Impédance

Quel est l'unité de $\frac{E}{H}$?

$$= \frac{Vm^{-1}}{Am^{-1}} = \Omega$$

l'impédance est alors donné par

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \mu_0 \frac{E_x}{B_y} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Dans le vide $k = \frac{\omega}{c}$, $Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 377\Omega$ (Exactement ? WOW !)

Rayonnement

Potentiels

Statique

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= 0 \implies E = -\nabla V \\ \nabla \cdot E &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \nabla^2 B = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0\end{aligned}$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(M)d\tau}{PM}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

\mathbf{A} n'est pas définis de manière unique. On a un choix de gauge sur la valeur du gradient

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \text{jauge de Coulomb}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = 0$$

Remarque

La condition $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ n'est pas trop forte

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi$$

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

Le résultat physique reste le même peu importe le gradient !

dynamique

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \implies \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon \mu_0 \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\nabla^2 V - \nabla \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases}$$

On veut annuler le terme en V car c'est celui-là qui mélange les deux composantes

$$\mu_0 j = \epsilon_0 \mu \frac{d^2 A}{dt^2} + \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} + \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Gauge de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Si on modifie maintenant le potentiel vecteur, on trouve

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varphi \implies \mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

Cependant, cela change \mathbf{E} , à moins que V change aussi. On veut que $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \\ &= \nabla V' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$\mathbf{E}' = -\nabla \underbrace{\left(V' + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}_V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

On a donc que V' doit être différent de V . V et \mathbf{A} ne sont plus indépendants !

Potentiels retardés

Quand on travaille en dynamique le potentiel ne s'applique plus instantanément. L'information voyage à la vitesse de la lumière

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(M, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau$$

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(M, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau$$

On appelle la quantité $t - \frac{PM}{c}$ le temps retardé.

Cette forme d'équation ne s'applique pas sur \mathbf{E} et \mathbf{B}

Un cas avec deux conducteur (genre un coax mais pas nécessairement)

$$\begin{cases} V(z, t) = V_+ e^{i(kz - \omega t)} + V_- e^{-i(kz + \omega t)} \\ I(z, t) = -\frac{V_+}{Z_0} e^{i(kz - \omega t)} + \frac{V_-}{Z_0} e^{-i(kz + \omega t)} \end{cases}$$

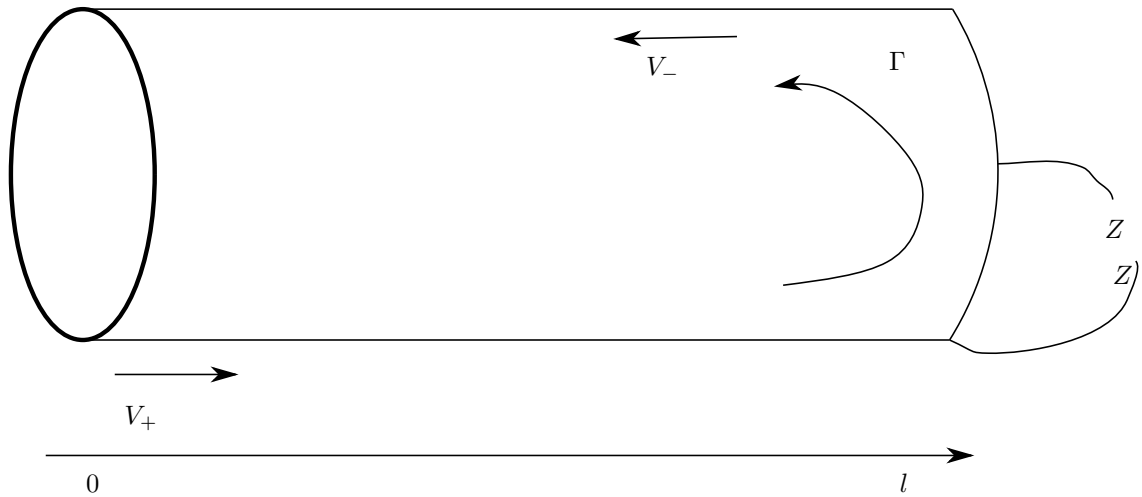


FIGURE 1 – Onde qui se propage dans un machin

$$V_-(z = l, \omega) = \Gamma(\omega) V_+(z = l, \omega)$$

$$V(z = l, \omega) = Z(\omega) I(z = l, \omega)$$

$$Z \left(\frac{-V_+ + V_-}{Z_0} \right) = V_+ V_-$$

$$V_-(Z_0 - Z) = V_+(+Z + Z_0)$$

$$\Gamma = \frac{V_-}{V_+} = \frac{-Z + Z_0}{Z_0 + Z}$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}}$$

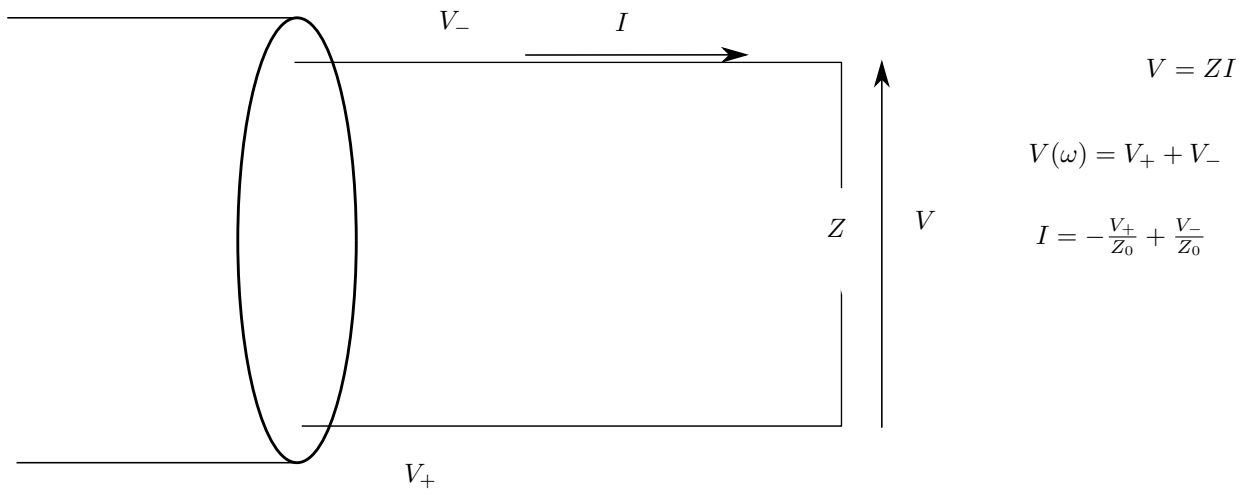


FIGURE 2 – Circuit électrique

\implies si $Z = Z_0$ alors $\Gamma = 0$

$Z = \infty \implies$ circuit ouvert $\implies \Gamma = 1 \wedge I = 0$