Rappels

- Angle extérieur ϵ_k
- Umlanfsatz : Si α est une courbe dans une surface, $\alpha' \cdots$
- Gauss-Bonnet local

$$\iint_R \kappa \mathrm{d}A + \int_{\partial R} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k 2\pi$$

- Gauss-Bonnet Global

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = 2\pi\chi(S)$$

- Caractéristique d'Euleur

$$\chi(S,\tau) = V - E + F$$

<u>Démonstration</u> : τ est une triangulation de S. On applique Gauss-Bonnet à tous les triangle $\triangle \int \tau$ et on fait la somme

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=i}^{3} \epsilon_k^{\triangle} = 2\pi$$

$$\sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} \epsilon_j^{\triangle} = \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} (\pi - i_j^{\triangle}) = 3\pi F - \sum_{\triangle \in \tau} \sum_{j=1}^{3} i_j^{\triangle} = 3 - \left(3\pi V - \sum \epsilon_k\right)$$

Donc,

$$\iint_S \kappa + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + 3\pi F - 2\pi V + \sum \epsilon_k = 2\pi F$$

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_k = - + 2$$

Chaque face a 3 arrêtes, chaque arrête est adjacente à deux faces

$$\implies 3F = 2E$$

$$\begin{aligned} \implies \chi(S,\tau) &= V - E + F \\ &= V - \frac{3}{2}F + F \\ &= V - \frac{1}{2}F \end{aligned}$$

$$= 2\pi(V - \frac{1}{2}F) = 2\pi\chi(S,\tau)$$

<u>Conséquence</u> La caractéristique d'Euleur ne dépend pas de choix de triangulation τ.

Dans un cours de topologie, on démontre que $\chi(S)$ est une invariant topologique (ne change pas pour une déformation continue de la surface)

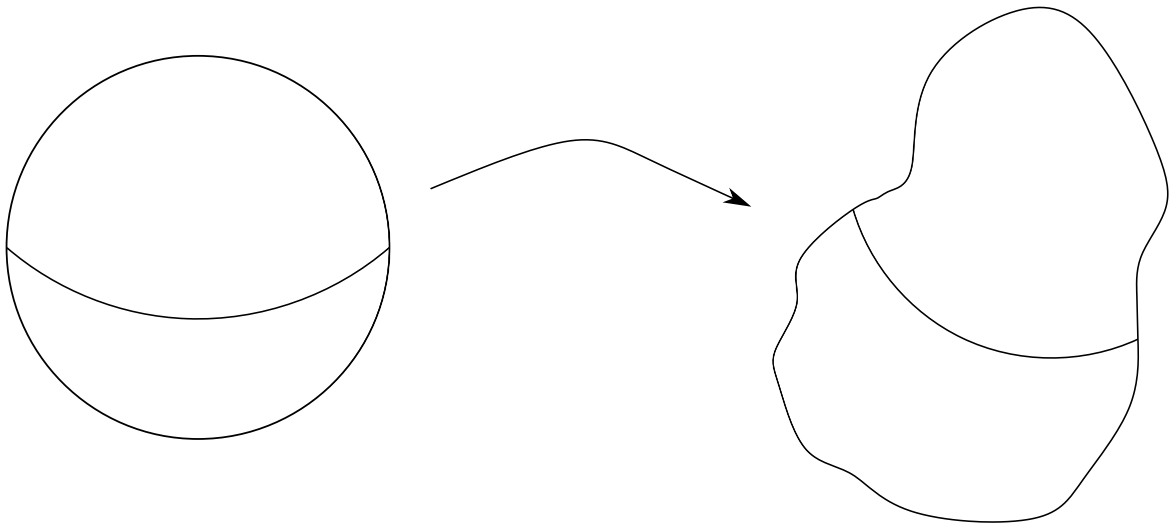

Figure 1 – Déformation continue

La quantité

$$\iint_S \kappa \mathrm{d}S + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \epsilon_f$$

est invariante sous déformations continues de la surface S.

Exemple : $\chi(S^2) = 2$

$$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$$

$\chi(\Pi^2) = 0$ (exercice)

Exemple : Une surface de courbure $\kappa \leq 0$ ne contiens pas de bigone géodésique.

Gauss-Bonnet

$$\implies \iint_R \kappa \mathrm{d}S + \int_{\alpha_1} \kappa_g \mathrm{d}s \int_{alpha_2} \kappa_g \mathrm{d}s + \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2\pi$$

mais

$$\iint \kappa \mathrm{d}S + \epsilon_1 \epsilon_2 \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \pi\pi = 2\pi \quad \lightning$$

Donc un bigone ne peut pas exister si $\kappa \leq 0$

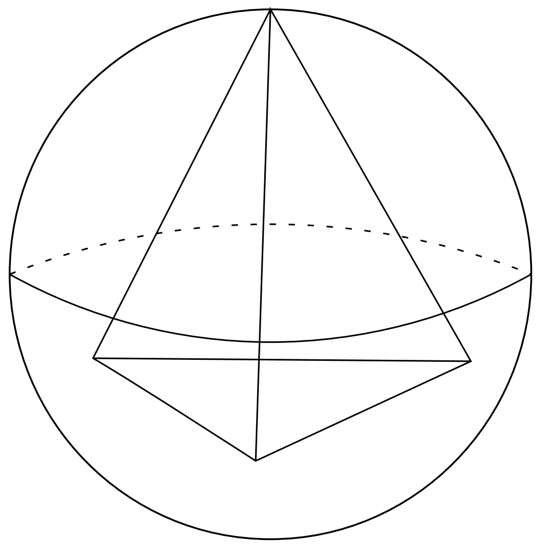

FIGURE 2 – Triangulation d'une shpère

Exemple : Si une surface topologiquement équivalente ;a une cylindre à $k < 0$ alors elle a au plus une géodésique ? fermée.

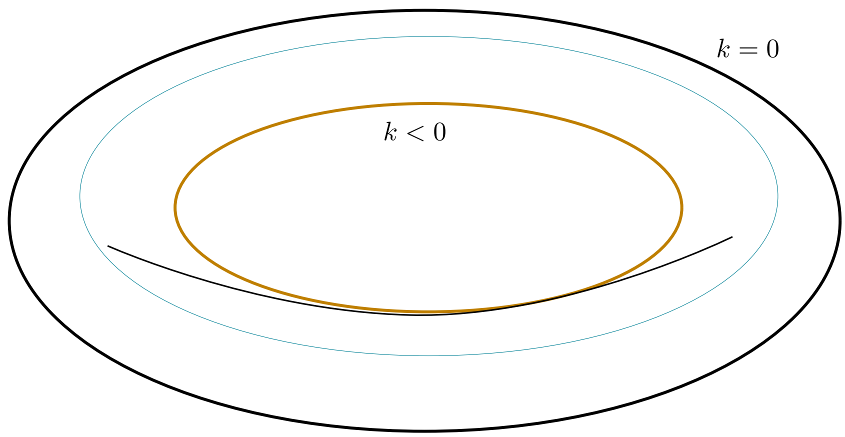

FIGURE 3 – tore

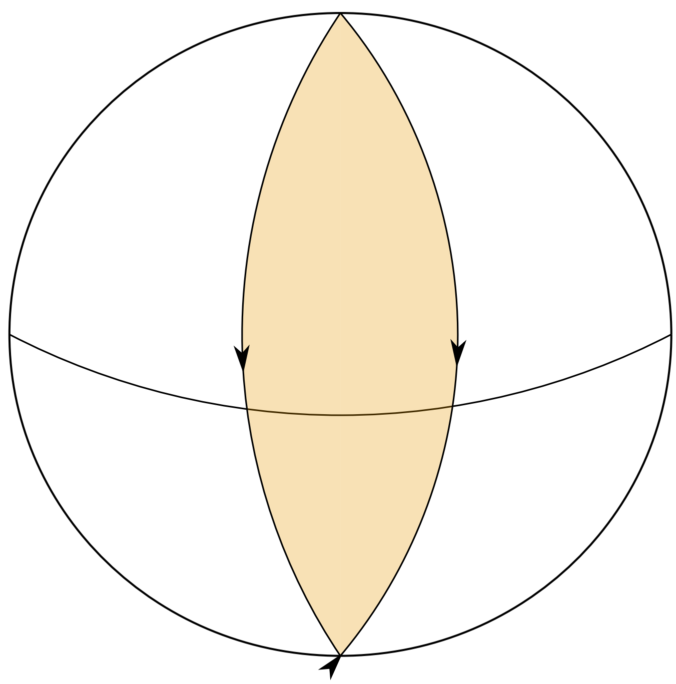

FIGURE 4 – bigone géodésique sur une sphère