2.6 Universalité

Calcul Classique $\{\mathrm{NAND}, \mathrm{COPY}\}$

Calcul classique réversible $\{\mathrm{Toffoli}\}$

Calcul quantique : plusieurs choix possibles

1. Matrice générique $4x4$ ($M \in \mathrm{SU}(4)$) Ex $\mathrm{CR}_x(\theta)$ $\frac{\theta}{\pi}$ irrationnel

```
----.----
    |
-[Rx(z)]-
```

2. SU(2)+CNOT 2 générateurs de rotations sont suffisant pour générer SU(2) CNOT permet de générer de l'enchevêtrement. Ce n'est pas la seul pour qui permet de faire cela et d'autre porte aurait fait le travail (Cz par exemple)
   Cz :

```
----.----   ----o----
    |     =     |
--[(+)]--   ----o----
```

3. Un ensemble discret de porte peut être universel : ex : $\{\mathrm{H}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{CNOT}\}$
   Ces portes sont importantes dans la théorie du calcul tolérant au faute.
   $T^2 = S$, on pourrait donc enlever S de l'ensemble. Par contre faire des portes T est vraiment difficile donc en pratique on aime remplacer T^2 par S

   $\{\mathrm{H}, \mathrm{S}, \mathrm{CNOT}\}$ n'est pas universel mais génère le groupe Clifford à plusieurs qubits. v

   Gotesman-Krill 98

   Le calcul quantique avec seulement les portes Clifford peut-être simulé classiquement. L'intrication est nécessaire mais pas suffisant pour avoir un avantage quantique. Preuve Sketch :
   Suivre l'évolution des opérateurs de Pauli à travers le circuit.

2.7 L'algorithme de Deustch

Soit une fonction classique $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$.On cherche à savoir si f est balancée ou constante.

$$\begin{array}{ll} f \text{ balancé } f(0) \neq f(1) & f(0)=0, f(1)=1 \quad \text{ou} \quad f(0)=1, f(1)=0 \\ f \text{ constante } f(0)=f(1) & f(0)=0, f(1)=0 \quad \text{ou} \quad f(0)=1, f(1)=1 \end{array}$$

Calcul classique, il fait évaluer f deux fois et comparer calcul quantique. On peut évaluer qu'une seule fois ...

Puisque f n'est pas forcément réversible car utilise un registre.

$U_f \left|xy\right\rangle \equiv \left|x, y \oplus f(x)\right\rangle$

Ex : f constant $f(0) = f(1) = 1$

$$U_f \left|10\right\rangle = \left|1, 0 \oplus 1\right\rangle = \left|11\right\rangle$$

$$U_f^2 |xy\rangle = |x, y \oplus 2f(x)\rangle = |xy\rangle$$

$$\implies U_f^2 = \mathbb{1}$$

$$U_f = U_f^\dagger = U_f^{-1}$$

Ce circuit quantique est

```
|0>----[H]----|----|----[H]----[Mes]
              |    |
              | U_f|
              |    |
|0>--[X]--[H]-|----|--------[Poubelle]
```

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |{+}{-}\rangle$$

Appliquons U_f sur $|x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$$U_f \left(\frac{|X0\rangle - |X1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|X, f(x)\rangle - |x, 1 \oplus f(x)\rangle\right)$$

Si $f(x) = 0$ ou 1, l'état final est le même à un signe près

$$U_f |x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^{f(x)} |x\rangle |1\rangle$$

...

<u>Préparation d'un état de Bell</u>

```
|0>----[H]----.----
              |    |Phi+>
|0>----------(x)---
```

$$|\Psi_1\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |10\rangle\right)$$

$$|\psi_2\rangle = \text{CNOT} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

```
|0>----[H]----.----
              |    |Psi+>
|1>----------(x)---
```

(Démarche similaire pour le démontrer)

```
|0>----[H]-,--.---,--
 !         !  |   !
|0>--------!-(x)--!--
 !         !      !
 !         !      !
 !         !      !
 Z         X      X
 I         I      X
 --------------------
 I         I      Z
 Z         Z      Z
```

$|00\rangle$ étant propre de ZI et IZ

<u>SWAP gate</u>

```
----x----   ----o---(+)---o----
    |     =     |    |    |
----x----   ---(x)---o---(x)---
```

$$|\psi_0\rangle = |ij\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = |i, j \oplus i\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = |i \oplus j \oplus i, j \oplus i\rangle = |2i \oplus j, j \oplus i\rangle = |j, j \oplus i\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = |j, j \oplus i \oplus j\rangle = |ji\rangle = \text{SWAP}\,|ij\rangle$$

<u>Notation binaire</u>

On écrit le nombre binaire en décimale.