

## Diagramme de complexité

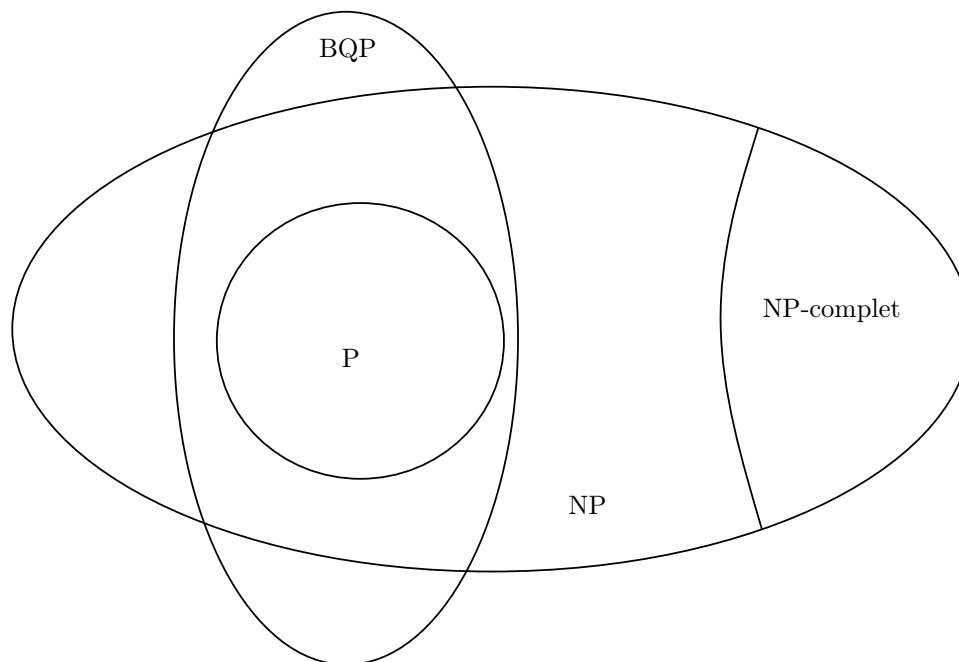


FIGURE 1 – diagramme de complexité

## 2.5 Portes logiques

### 2.5.1 Portes à 1 qubit

Les matrices de Paul forme une base pour décomposer n'importe quel matrice  $2 \times 2$ .  $\mathcal{P} = \{\mathbb{1}, X, Y, Z\} = \{\sigma_0, \sigma_{1,2,3}\}$

$$M_{2 \times 2} = \sum_j m_j \sigma_j$$

#### Démonstration de la complétude

Autre base :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B_1 = \frac{\mathbb{1} + Z}{2} \quad B_2 = \frac{\mathbb{1} - Z}{2} \quad B_3 = \frac{X + iY}{2} \quad B_4 = \frac{X - iY}{2}$$

### Propriétés de $\mathcal{P}$

- Hermétique  $\sigma^\dagger = \sigma$
- unitaire  $\sigma^T = \sigma^{-1}$
- Base orthogonale  $\text{Tr}(\sigma_j^\dagger \sigma_k) = \delta_{jk}$

Les Matrices de Pauli génèrent des rotations sur la sphère de Bloch

$$R_x(\theta) = e^{\frac{-i\theta}{2}X} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)X$$

$$R_y(\theta) = e^{\frac{-i\theta}{2}Y} = \dots$$

$$R_z(\theta) = e^{\frac{-i\theta}{2}Z} = \dots$$

Plus généralement, on a une équivalence entre transformation unitaire (à un qubit) et rotation en 3D.

$$\text{SU}(2) \longleftrightarrow \text{SO}(3)$$

$\text{SU}(2)$  :  $\det(U) = 1$ ,  $UU^\dagger = \mathbb{1}$ ,  $2 \times 2$

$\text{SO}(3)$  :  $\det(O) = 1$ , orthogonale,  $3 \times 3$

En général, on a

$$U = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \sigma}$$

$$U = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{n} \cdot \sigma$$

$$U = R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma)$$

### 3 opérations utiles

#### 1. Porte d'Hadamard ( $H$ )

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{X+Z}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{X+Z}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|1\rangle = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$X \leftrightarrow Z \quad Y \leftrightarrow -Y$$

#### 2. Porte de Phase ( $S$ )

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{2}Z}$$

$$S|0\rangle = |0\rangle$$

$$S|1\rangle = i|1\rangle$$

$$S|+\rangle = |+i\rangle$$

$$S|+i\rangle = |-\rangle$$

$$S|-1\rangle = |-1\rangle$$

$$S|-i\rangle = |+\rangle$$

$$X \rightarrow Y \rightarrow -X \rightarrow -Y \rightarrow X$$

$$S^2 = Z$$

#### 3. $\frac{\pi}{8}$ ( $T$ )

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{8}Z} = e^{-i\frac{\pi}{4}Z}$$

$$X \rightarrow \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \rightarrow Y \rightarrow \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$$

$$T^2 = S \approx \sqrt{Z}$$

Prendre la racine d'un opérateur est ambigu !

Aparté : on fait un état avec un circuit

$$U|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (|\text{psi}\rangle \rightarrow |\text{psi}'\rangle)$$

On peut faire évoluer un opérateur

$$A \rightarrow UAU^\dagger$$

$$A' = UAU^\dagger$$

ex :

$$Z \rightarrow HZH = X$$

$$HZH = \dots = X$$

$$H \rightarrow X$$

Un groupe de porte importantes est les portes de Clifford

$$\mathcal{P} = \{I, X, Y, Z\}$$

$$C = \{U | UPU^\dagger \in \mathcal{P}, P \in \mathcal{P}\}$$

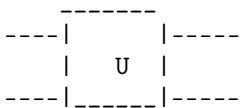
ex :

$$H, S \in C \quad T \notin C$$

### 2.5.2 Portes à 2 qubits

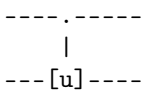
Il faut de l'intrication pour réaliser des calculs intéressants pour

$$U \in \text{SU}(4)$$



On utilisera souvent des opérateurs contrôlant

$$CU|ij\rangle = |i\rangle \otimes U^i|j\rangle$$



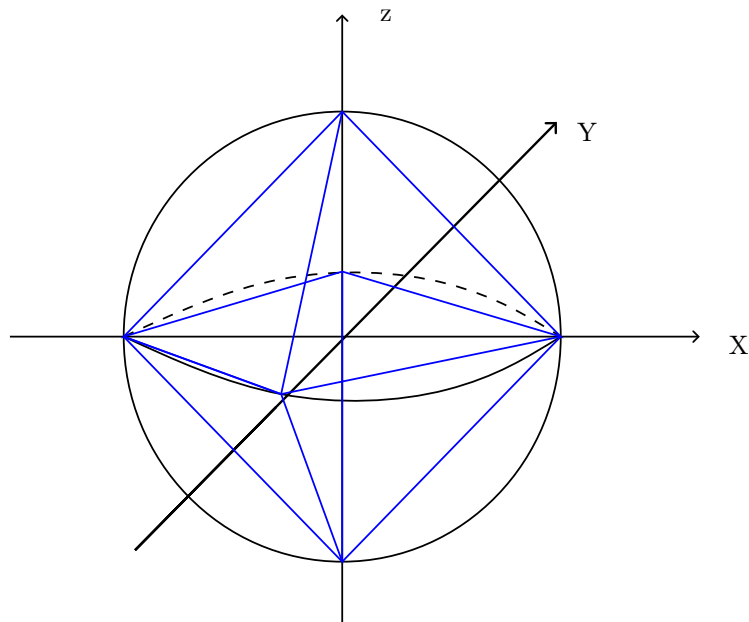


FIGURE 2 – octaèdre

Ex : CNOT (non contrôlé) CX

$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ | \\ \text{---} (+) \text{---} \end{array}$

$$\text{CNOT} |ij\rangle = |i\rangle X |j\rangle = |i, j \otimes i\rangle$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT} &= |0\rangle \langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle \langle 1| \otimes X \\ \text{CNOT} &= \left( \frac{\mathbb{1} + Z}{2} \right) \otimes \mathbb{1} + \left( \frac{\mathbb{1} - Z}{2} \right) \otimes X = \frac{1}{2} (H + Z\mathbb{1} + X - ZX) \end{aligned}$$

CNOT est hermétique et unitaire !

$$\text{CNOT} = \text{CNOT}^\dagger \quad \text{CNOT}^T = \quad \implies \text{CNOT}^2 = \mathbb{1}$$

$$\text{CNOT}^2 |ij\rangle = |i, j \oplus 2i\rangle = |ij\rangle$$

$$\text{CNOT}(Z\mathbb{1})\text{CNOT} = ZI$$

$$\text{CNOT}(\mathbb{1}X)\text{CNOT} = \mathbb{1}X$$

$$\text{CNOT}(X\mathbb{1})\text{CNOT} = XX$$

Porte contrôle phase (CZ)

$$\begin{array}{c} \text{---}. \text{---} \\ | \\ \text{---}[Z] \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---}[Z] \text{---} \\ | \\ \text{---}. \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---}. \text{---} \\ | \\ \text{---}. \text{---} \end{array}$$

$$CZ |ij\rangle = |1\rangle Z |j\rangle = (-1)^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} |ij\rangle$$

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En calcul quantique, le qubit "contrôle" est aussi affecté par la porte CU

Phase kick-back Revenons à la porte CNOT.

$$\begin{array}{c} |\text{psi}\rangle \text{---}. \text{---} |\text{psi}\rangle \\ | \\ | + \rangle \text{---}. \text{---} | + \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{c} |\text{psi}\rangle \text{---}. \text{---} (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) |\text{psi}\rangle \\ | \\ | + \rangle \text{---}. \text{---} | - \rangle \end{array}$$