2022-11-16

Précession géodésique = effet de Sitter

effet de Lense-thirring

4-vecteur spin :

$$s^i = \left[0, \vec{S}\right] \qquad \text{(Dans le référentiel de l'obejet)}$$

$$\frac{\mathrm{d}S^i}{\mathrm{d}\tau} = \Gamma^i_{jk} S^j u^k$$

$$\nabla_\lambda A^i =$$

On considère une orbite (criculaire ?)

$$\Omega = -\frac{3M\omega}{2r} = -\frac{3r_s}{r} \underbrace{\omega}_{\text{freq de l'orbite}}$$

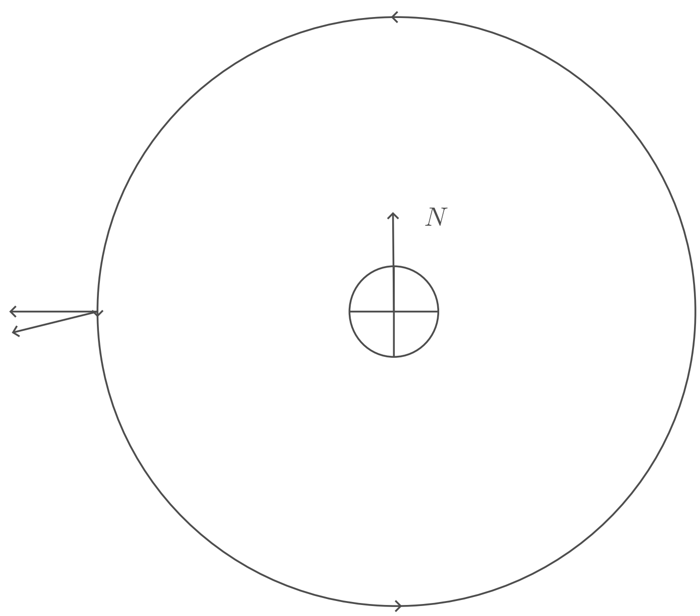

Figure 1 – Orbite

$$\Omega^\alpha = \frac{1}{r^3}\left(S^\alpha - 3\frac{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})\,x^a}{r^2}\right)$$

Gravity probe B

Une sonde dont la conception à pris de *nombreuse* décénies

	observation	théorie
géodésique	6602 ±18mas	6606
Lense-Thirring	37.2 ±7.2mas	39.2

Ondes Gravitationnelles

La théories des ondes gravitationnel présente beaucoup de subtilité. Presque tout les grand de la relativité se sont trompé sur les ondes gravitationnelles. La théorie de la relativité et hautement non-linéaire mais comme pour tout, on peut faire des approximation au premier ordre.

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$$

η_{ij} ne se transforme pas comme un tenseur *sauf* dans le cas d'une transformation de Lorentz, c'est une constante sinon

Transformation de Lorentz

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \Lambda^i_j \qquad \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \left(\Lambda^{-1}\right)^k_i = \cancel{\Lambda^k_j}$$

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x^j} g_{kl}$$

$$\eta_{ij} + h'_{ij} = \left(\Lambda^{-1}\right)^k_i \left(Lambda^{-1}\right)^l_g (\eta_{ij} - h_{lg})$$

$$x'^i[x^i + \xi^i(x)]$$

difféomorphisme :

$$\begin{cases} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \partial_j \xi^i \\ \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta^j_i + \partial_j \xi^i \end{cases}$$

$$g'_{ij} = \eta_{ij} + h'_{ij} = \cdots = \eta_{ij} + \partial_j \xi_i - \partial_i \xi_j + h_{ij}$$

$$\boxed{h'_{ij} = h_{ij} - \partial_j \xi_i - \partial_i \xi_j}$$

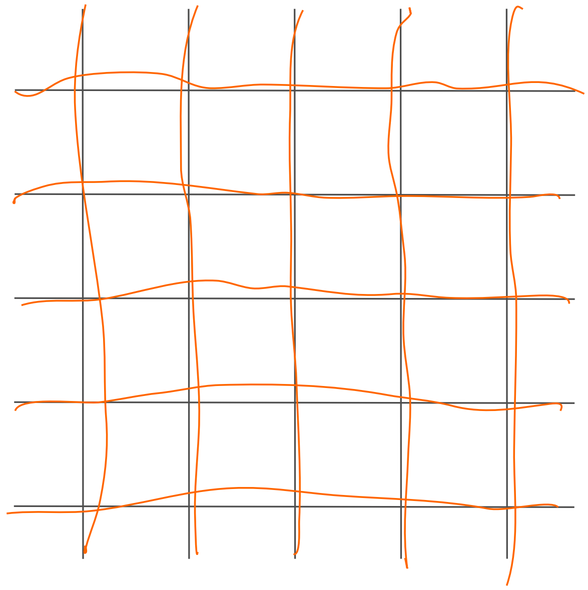

Figure 2 – difféomorphisme

$$\text{Transformation de jauge} \qquad A'_i = A_i - \partial_i \xi$$

Lien fort avec l'élétromagnétisme mais avec un spin 2

Le tenseur métrique est

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$$

le tenseur contravariant est

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$$

La soustraction venant du fait que la contribution au premier ordre de $g_{ij} g^{ij}$ doit s'annuler.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} - \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij} \right) = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j h_{il} - \partial_{ij} h_{jl} j_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(\partial_j h^l_i + \partial_i h_{jl} - \partial^l h_{ij} \right)$$

$$R^l_{kji} = \partial_j \Gamma^l_{ki} - \partial_i \Gamma^l_{kj} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi} = \frac{1}{2} \partial_j \left(del_k h_{il} - \partial_i h^l_k - \partial^l h_{ik} \right) - (i \leftrightarrow j) = \cdots$$

$$R_{ki} = \frac{1}{2} \left(\partial_k \partial_j h^j_i + \partial^i \partial_i h_{kj} - \partial_i \partial_k h^i_j - \partial^j \partial_j h_{ki} \right)$$

$$R = g^{ik} R_{ik} = \frac{1}{2} \left({}_{i \partial_j h^i_j + \partial^i \partial_i h^i_j - \partial_i \partial^i h^j_i - \partial^i \partial_j h^j_i} \right) = \partial_i \partial_j h^{ij} - \partial_i \partial^i h^i_j$$

$$\partial_i \partial^i = \Box \qquad \text{d'Alembertien}$$
$$\partial_a \partial^a = \nabla^2 = \triangle \qquad \text{Laplacien}$$

Equation d'Einstein :

$$\boxed{R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij}}$$

Vesion linéarisée :

$$\frac{1}{2}\left(\partial_k \partial_j k_{i?j} + \partial_i \partial_j h^i_k - \partial_{ik} h - \Box h_{ki} - \eta_{ik} \partial_i \partial_j h^{ij} + \eta_{ik} \Box h\right) 8\pi T_i k$$

Comparison avec l'électromagnétisme (qui est beaucoup plus simple)

$$\text{EM} \qquad \Box A_i + \partial_i \partial^j A_j = -j^i$$

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{2} \eta_i j h \qquad \text{déformation à trace inversée}$$

$$\bar{h} = h - 2h = -h$$

On veut simplifier l'expression avec une transformation de Gauge

$$h'_{ij} = h_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i$$
$$h' = h - 2\partial_i \xi^i$$

$$\bar{h}'_{ij} = \bar{h}_{ij} - \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i - \eta_{ij} \partial_k \xi_k$$

Si on choisit

$$\xi_i | \Box \xi_i = \partial^j h_{ij} \rightarrow \partial^i \bar{h}'_{ij} = 0$$

$$\implies \Box \bar{h}_{ij} = -16\pi T_{ki}$$

C'est une équation d'onde !