2024-01-18

Rappels

- représentation de G $\rho \to \mathrm{GL(V)}$
- somme direct $\rho_1 : G \to \mathrm{GL(V)}$, $\rho_2 : G \to \mathrm{GL(U)}$, $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to (V \otimes U)$
- Sous-représentation $U \subset V$ G invarientL $\forall g \in G$, $\rho(g)u \in U$
- ρ est <u>irréductible</u> si les seul sous-représentation sont $\{0\}$ et V
- <u>Théorème</u> : Si $U \subset V$ est une sous représentation de $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$ alors $\exists W \subset V$ sous-espace t.q. $V = U \oplus W$

<u>Exemple :</u>

$\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$: représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x + y + z = 0\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

<u>Corrolaire</u> : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

<u>Définition :</u> Un <u>morphisme de représentation</u> entre $\rho_1 : G\mathrm{GL(U)}$, $\rho_2 : \rho_2 : \mathrm{GL(U)}$ est une application linéaire $\varphi V \to U$ telle que $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_{1(g)} = \rho_{2(g)} \circ \varphi$$

Si φ est inversible, c'est un <u>isomorphisme</u> de représentation

<u>Proposition</u> :

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{V}$
2. $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{U}$ sont des sous représentation

<u>Démonstration</u> :

1. Si $v < in\mathrm{Kerr}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$
$$\varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0$$
$$\implies \rho_1(g)v \in \mathrm{kerr}(\varphi)$$

2. $\rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \mathrm{Im}(\varphi)$

Lemme de Shur

1. $\varphi : V \to U$ est un morphisme entre représentation irréductible alors $\varphi = 0$ ou φ est un iso
2. $\varphi : V \to V$ Morphisme de V représentation irréductible alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration : $\varphi : V \to U$

1.

$$\cdots$$

2. $\varphi V \to V$ φ admet une valeur propre λ

$$\implies \mathrm{Kerr}(\varphi - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$$
$$\implies \mathrm{Kerr}(\varphi - \lambda\mathbb{1}) = \mathrm{V}$$
$$\implies \varphi - \lambda\mathbb{1} = 0$$
$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \cdots V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit G une goupe fini abélien

$$G \tilde{=} \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \cdots$$

et supposons $\rho : G \to \mathrm{GL(V)}$irréductible. Fixons $g \in G$

$\rho(g) : V \to V$ alors $\rho(g)$ est une morphisme de représentation car $\rho(h)(\rho(h)v) = \rho(gh)b = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$ tout les $\rho(g)$ sontλ_g I

$\implies$ tout sous-espace de V est stable par $\rho(g) \forall g \in G$

donc dimV = 1

Conclusion : tout représentaiton irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple : $G = \mathbb{Z}_4$

$$\cdots$$

Exemple : $G = S_3 = \{e, (12), (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de G que est abélien

Remarque : G est engendré par (123) et (12)

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit $\rho : S_3 \to \mathrm{GL(V)}$ une représentation irréductible

on a $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$ car $\tau^3 = e$

$\implies$ $\rho(\tau)$ est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit $v \in V$ vecteurs propres de $\rho(\tau)$ $\implies$ $\rho(\tau)v = \omega^k v$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned}\rho(\tau)\left(\rho(\sigma)v\right) =& \rho(\tau\sigma)v \\ =& \rho(\sigma\tau^{2)}v \\ =& \rho(\sigma)\rho(\tau)^2 v \\ =& \rho(\sigma)\omega^{2k} v \\ =& \omega^{2k}(\rho(\sigma)v)\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> si v est une vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^k alors $\rho(\tau)v$ est vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre $\omega^2 k$

Il y a deux cas selon la valeur propre

1. $k = 1$ ou $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

   $$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

   sont linéairement indépendants $U = \langle v_1 \rho(\sigma)v\rangle$, U est stable par G : V et $\rho(\sigma)V$ sont vecteur propres de $\rho(\tau)$ <u>et</u> $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$, $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

   $$\implies U = V$$

   et dans la base $v, \rho(\sigma)v$ on alors

   $$\rho(\tau) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix}$$

   $$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. k = 0

   $$\rho(\tau)v = v$$
   $$\rho(\tau)(\rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v$$

   (a)

   $$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

   et $\lambda \in \{1, -1\}$ $\quad (\sigma^2 = 1)$ si $\lambda = 1$ $\langle v\rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{trivial}}$ si $\lambda = -1$, $\langle v\rangle = V$ et $\rho - \rho_{\text{sign}}$

(b) v et $\rho(\sigma)v$ sont linéairement indépendants

Considérons $V + \rho(\sigma)v$, $V - \rho(\sigma)v$

$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v$ et $\rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$

$\implies v + \rho(\sigma)v$ est stable par G.

idem pour $-$. C'est donc une contradiction au fait que V soit irréductible.

Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \to \mathrm{GL(v)}$$

une représentation

Alors sont caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{g}))$$