Rappels

— Carte de Surface : $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$
lisse
homéomorphisme entre U et $p(U)$
$Dp = (p_u | p_V)$ rang maximal

— Surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$
tout point est contenu dans la carte de surface

— Point régulier p de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $Df\big|_p \neq 0$
valeur régulière : $f(p)$
valeur critique $\iff$ non-régulière

Proposition Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière. alors $f^{-1}(a)$ est une surface lisse

Dém : Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ t.q. $f(\vec{x}) = a$

Comme a est une valeur régulière, $df\big|_{\vec{x}} \neq 0$

$\implies$ un des dérivé partitiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$

Définissons $F : \mathbb{R}^3 < to \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} & \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)\Big|_{\vec{x}} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut applique le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts }, U \ni \vec{x}, \quad V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q. $F : U \to V$ est inversible et F^{-1} est lisse.

Soit W la projection de V sir le plan (x, y)

$$p : W \to S \quad (x, y, z)^T \to F^{-1}(x, y, z)^T \in f^{-1}(a)$$

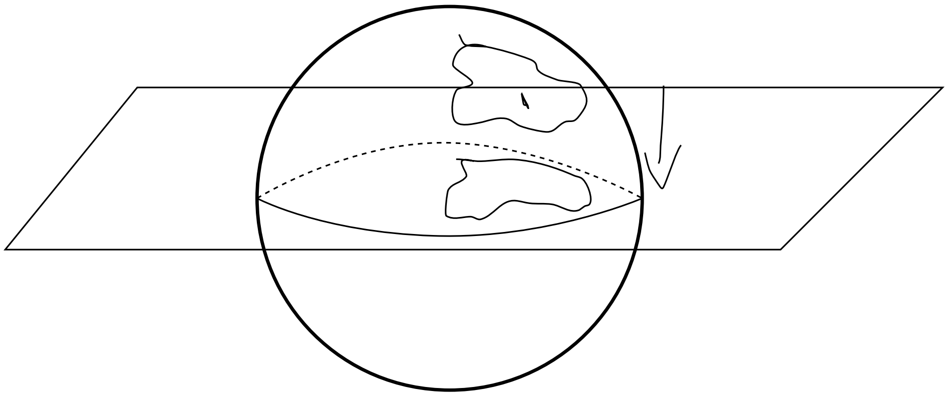

FIGURE 1 – bingobong

comme $DF^{-1}\big|_{F(\vec{x})} = (DF\big|_{\vec{x}})^{-1}$

$Dp =$ deux premires colonnes de DF^{-1} est de range maxmial ■

Exemple

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est $(0, 0, 0)$

La seule valeur critique est $f(0, 0, 0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x, y, z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

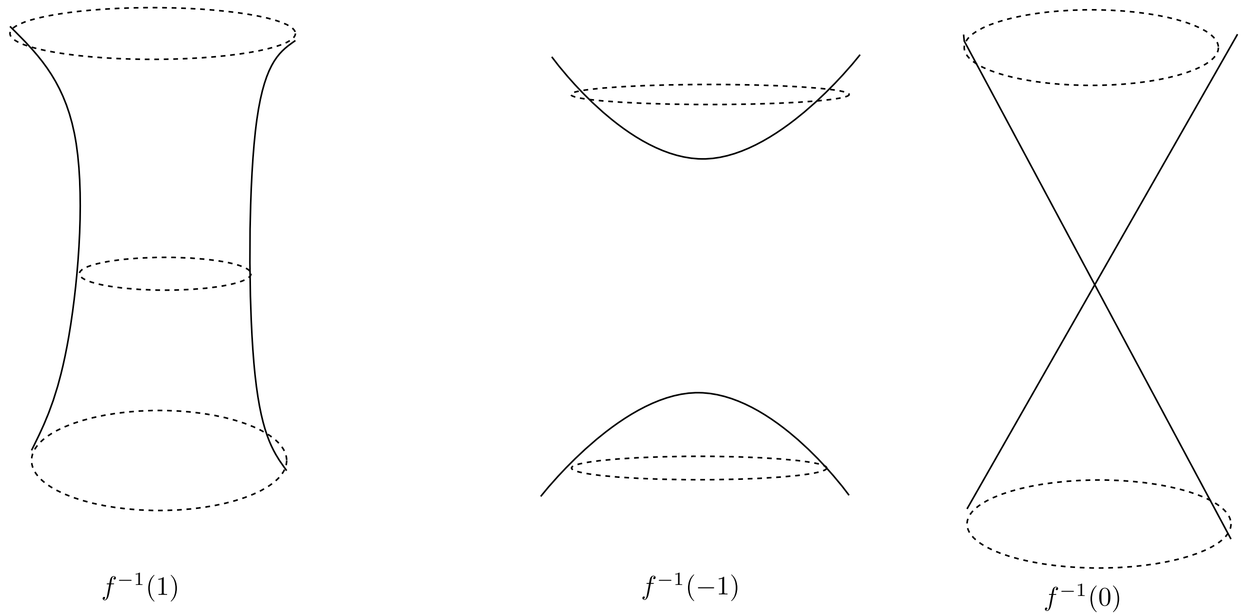

FIGURE 2 – Exesmples de fonctions

première forme fondamentale

Définition Étant donnée une carte de surface lisse p, la première forme fondamentale ou métrique est

$$I_{u,v} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}\Bigg|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Définition : Deux surfaces S, S^* sont localement isométrique s'il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et des paramétristion p, p^* t.q. $I\big|_{(u,v)} = I^*\big|_{(u,v)}$

Exemple : Considérons S Le plan x, y paramétrisé par $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre S^* paramétrisé par $p^*(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1, 0, 0), p_v = (0, 1, 0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0, 0, 1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

$\implies S$ est localement isométrique à S^*

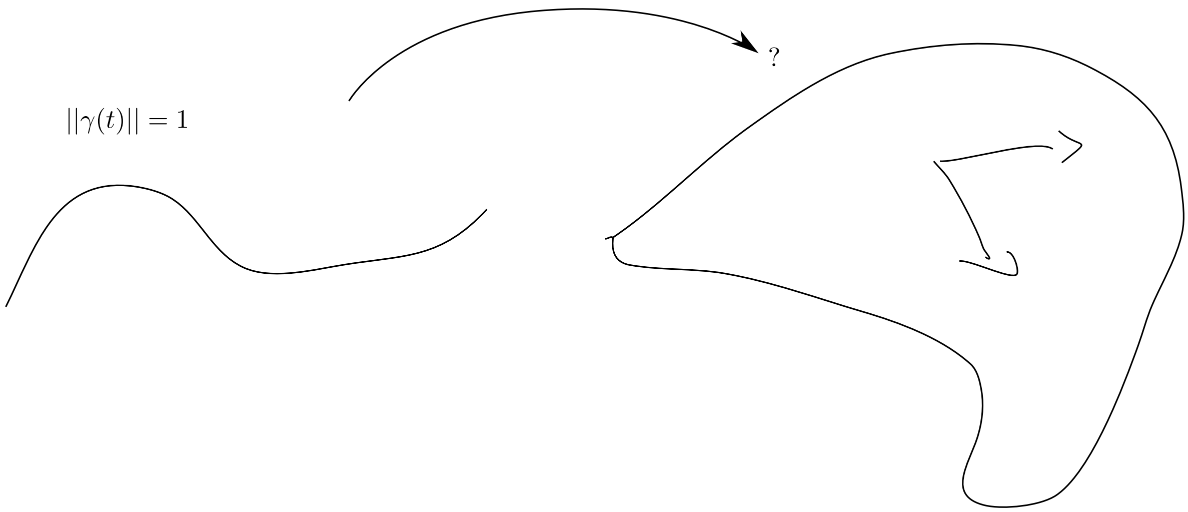

Figure 3 – forme fondamentale

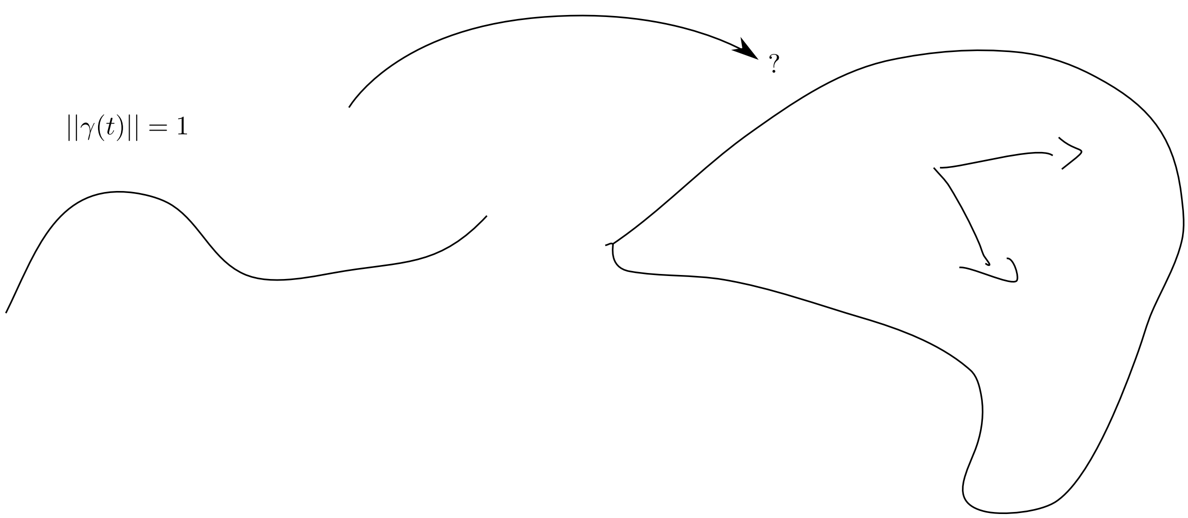

Figure 4 – forme fondamentale