2024-03-28

Rappels

$$B(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X \cdot \mathrm{ad}Y)$$

— B est définit positive sur $\mathbb{R}\left\langle H_\alpha \right\rangle_{\alpha \in R} \subseteq h$
— B^* est définit positif sur $\mathbb{R}\left\langle \alpha \right\rangle_{\alpha \in R} \subseteq h^*$
— Pour toute paires de racines $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2B(\alpha,\beta)}{\beta(\alpha,\alpha)}$$

Un <u>système de racine abstrait</u> est $R \subseteq \mathbb{E}$ satisfaisant :

$\mathbb{E}$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec (,) comme produit scalaire

1. R est fini est engendre $\mathbb{E}$
2. $\alpha \in R \implies -\alpha \in R$ et aucun autre $n\alpha$ pour $n \neq \pm 1$ n'est dans R
3. $\forall \alpha \in R$, $W_\alpha(R) = R$ (si $\alpha, \beta \in R$, $W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in R$)
4. $\forall \alpha, \beta \in R$ $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} - n_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$

La propriété 4 implique que

$$\mathbb{Z} \ni n_{\beta\alpha} n_{\beta\alpha} = \frac{4(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)} = 4\frac{\cancel{\cdots}\cos^2\theta}{\cancel{\cdots}}$$

$$\implies n_{\alpha,\beta} n_{\beta\alpha} \in \{0,1,2,3,4\}$$

si $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 4$

$$\cos^2\theta = 1 \implies \alpha = \pm\beta$$

si $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 3$

$$n_{\alpha\beta} = 3 \quad n_{\beta\alpha} = \pm 1 \quad \theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

si $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 2$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} \implies \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} \quad \|\alpha\| = \sqrt{2}\|\beta\|$$

si $n_{\alpha\beta} m_{\beta\alpha} = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4} \implies \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \quad |\alpha| = |\beta|\right\}$$

si $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 0$

$$\cos\theta = 0 \quad \alpha \perp \beta \quad \text{pas de condition sur la longueur}$$

<u>Corollaire</u> : Si l'angle entre α et β est aigu, alors $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ sont des racines

Démonstration :

$W_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\alpha\beta}\beta$, si $\angle\alpha, \beta$ est aigu alors $n_{\beta\alpha} = 1$

Sans perte de généralité, $W_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in R \implies \beta - \alpha \in R$

Fixons $h \in \mathbb{E} | (h, \alpha) \neq 0 \forall \alpha \in R$ et définissons $R^+ = \{\alpha \in R | (h, \alpha) > 0\}$ $R^- = \{\alpha \in R | (h, \alpha) < 0\} = -R^+$

Définissons : Une racine positive $\alpha \in R^+$ est simples si elle ne s'écrit pas comme une somme de racines positives.

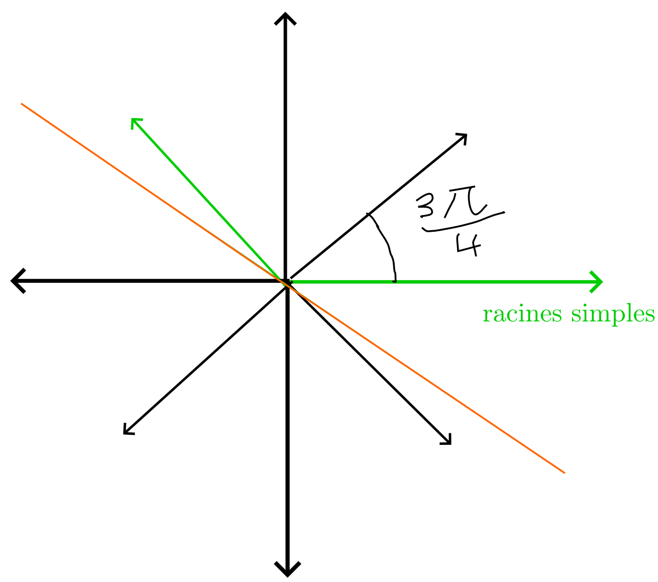

FIGURE 1 – Racines simples

Par le corollaire, l'angle entre 3 racines simples est obtus. Di α, β simples et $\alpha - \beta, \beta - \alpha \in R \implies \alpha = (\alpha - \beta) + \beta,\ \beta = \beta - \alpha + \alpha$ ↯

Définition : Une configuration admissible est une ensemble de vecteur unitaires dans $\mathbb{E}$ tels que

1. tous les vecteurs sont dans un demi-espace ouvert $\{v > (v, h) > 0\}$
2. L'angle entre 2 vecteurs est une de $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

Une configuration admissible est réductible si elle s'écrit comme une somme orthogonale de configurations admissibles.

Par ce qui précède, si R est un système de racines,

$$\{\frac{\alpha}{\|\alpha\|} | \alpha \text{ racine simple}\}$$

est une configuration admissible.

Proposition : Une configuration admissible est linéairement independente.

Démonstration :

Supposons que $\sum a_i v_i = 0$, a_i non tout nuls

$$\implies \sum_{i \in I} a_i v_i = \sum_{j \in J} a_j v_j \quad a_i, a_j > 0$$

mais $\|\sum a_i v_i\|^2 = (\sum a_i v_i, \sum a_j v_j) = \sum \sum a_i a_j (v_i, v_j) \leq 0$

$$\implies \sum a_i v_i = 0 = \sum a_i v_i$$

mais $a_i > 0$ et v_i sont das un demi-espace ↯

Conséquence :

Comme R engendre $\mathbb{E}$ pour un système de racine (par axiome) et toute paire s'écrit comme une combinaison linéaire de racines simples, les racines simples engendre $\mathbb{E}$

$\implies$ Les racines simples forment une base

$\implies$ # de racines = $\dim(h)$ pour $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sous algèbre de Cartan.

Démonstration : (du fait que toute racine s'écrit comme une combinaison linéaire de racine simples)

si α n'est pas simple, $\implies = \beta + \gamma$ avec $\beta, \gamma \in R^+ \implies (\alpha, h) = (\beta, h) + (\gamma, h)$

$$\implies (\beta, h) < (\alpha, h) \quad (\gamma, h) < (\alpha, h)$$

si β, γ sont simples, fini.

si β n'est pas simple $\beta = \beta_2 + \beta_3$, $\beta_2, \beta_3 \in R^+$

Comme $\#R^+ < \infty$ cet algorithme se termine et donne $\alpha = \sum n_i \alpha_i$, α_i simples

Définition : Le diagramme de Coxeter d'une configuration admissible $\{V_i\}$ est le graph dont les sommets sont V_i et on a $4\cos^2(\angle(v_i, v_j)$ arêtes entre v_i, v_j.

$$\begin{aligned} v_i - v_j \text{ si } \angle v_i v_j &= \frac{2\pi}{3} \\ v_i = v_j \text{ si } \angle v_i v_j &= \frac{3\pi}{4} \\ v_i \equiv v_j \text{ si } \angle v_i v_j &= \frac{5\pi}{6} \\ v_i \quad v_j \text{ si } \angle v_i v_j &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Lemme : Le diagramme de Coxeter d<une configuration admissible est acyclique (sans compter la multiplicité des arrêtes)

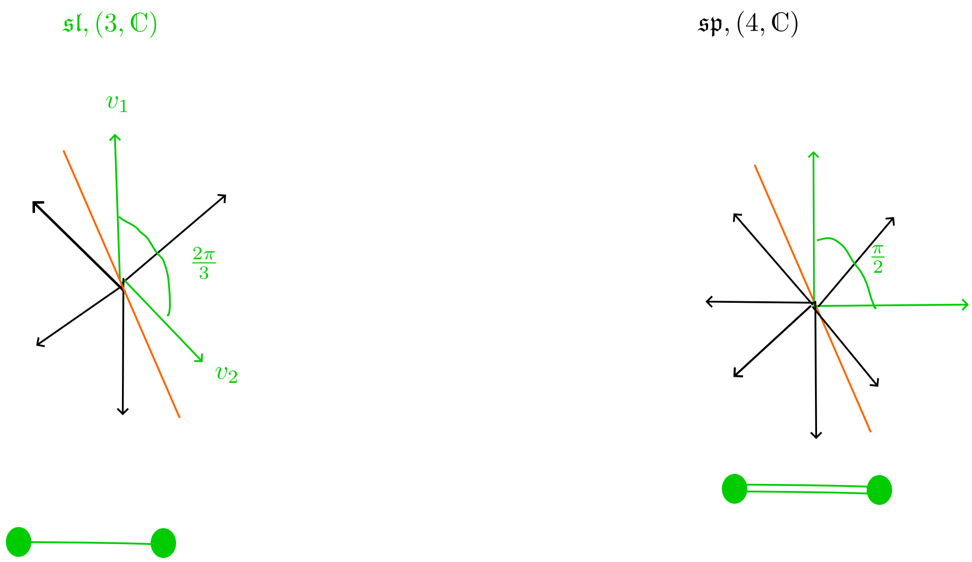

FIGURE 2 – exemples de iagrammes de Coxeters

<u>Démonstration</u> :

On prend le graph cyclique : $v_k - v_1 - v_2 - \cdots -$

$\implies (v_i, v_{i+1}) \leq \frac{-1}{2} \quad \text{pour} \quad i = 1, \cdots k-1$

$(v_i, v_k) \leq \frac{-1}{2}$

et $(v_i, v_j) \leq 0 \forall i \neq j$

$$\implies (\sum_{i}^{k} v_i, \sum_{i=1}^{k} v_i)$$

$$= \sum (v_i, v_i) + \sum_{i<j} 2(v_i, v_j)$$

$$= k + \sum_{i=1}^{k-1} 2(v_i, v_{i+1}) + 2(v_k, v_1) + \sum_{J \neq i+1} 2(v_i v_j)$$

$$\leq k + (-k) + 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^{k} v_i = 0$$

C'est une $\lightning$a l'independence linéaire

<u>Lemme</u> : Le degré d'une sommet est au plus 3 (avec multiplicité)

<u>Démonstration</u> : On considère le graph étoile avec v_0 au centre et k branches

Du lemme precedent, $v_i \perp v_j \forall 1 \leq j \neq j \leq k$

$\implies v_1, \cdots, v_k$ sont orhonormés

$$\sum_{i=1}^{k} (v_0, v_i)^2 < |v_0|^2 = 1$$

(Inégalité de Bessel)

$$(v_0, v_i)^2 = \frac{m_i}{4}$$

où m_i est le nombre de d'arrêtes entre v_0 et v_i

$$\implies \sum_{i=1}^{k} m_i < 4 = \text{ degré de } v_0$$