

1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, où G est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \rightarrow G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \dots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \rightarrow E | f \text{ est inversible} \}$$

avec l'opération de composition \circ

On l'appelle le groupe symétrique de E

$$S_n = S_{\{1, 2, \dots, n\}}$$

Est le groupe des permutations de n éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes (G, H) est une fonction $f : G \rightarrow H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$.
Si f est inversible alors f^{-1} est aussi un morphisme et on dit alors que f est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe G sur un ensemble X est une application

$$\bullet : G \times X \rightarrow X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad X = \mathbb{R}^n$$

Définition : Une action de G sur X est un homomorphisme $f : G \rightarrow S_X$

Les deux définitions sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_1)(f(g_2)(x)) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si X a plus de structure et qu'on a une action de G sur X qui preserve la structure lors on dit que G agit par (homéomorphisme, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur X

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

ATTENTION : S_4 n'agit pas (fidelement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permutations *brisent le triangle*) S_4 agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permutations paires

A_5 agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation S_G

Démonstration : On considère l'action de G sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

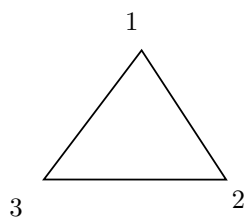
on obtiens $f : G \rightarrow S_G$: homomorphisme injectif car si $f(g_1) = f(g_2)$ alors $f(g_1)(e) = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe à } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe G est une action linéaire de G sur un espace vectoriel V . Autrement dit, un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Le rang d'une représentation est $\dim V$

exemples :

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma)$$

$$F(\eta)$$

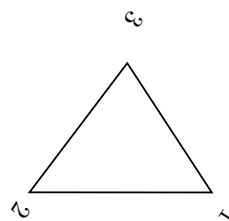
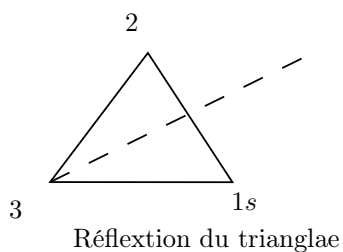


FIGURE 1 – Triangles équilatéraux

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si

retour sur le dernier cours

(G, \bullet) c'est un groupe

$S_E = \{\sigma : E \rightarrow E | \sigma \text{ inversible} \}$ est une groupe pour la composition

Un cycle est un élément de S_n de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1}, \sigma(a_k) = a_1, i = 1, \dots, k$$

On le note $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$

Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12) \circ (35) = (35) \circ (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1756234)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longueur ℓ est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est impaire} \end{cases}$$

On a la relation $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1)\text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de G sur X : deux définitions

1. $\bullet : G \times X \rightarrow X$
2. homomorphisme $f : G \rightarrow S_x$

Représentation de G : action linéaire de G sur un espace vectoriel V

Exemple : La Représentation vectoriel sur V

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G, v \in V$$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour G fixé, on a la représentation régulière (R) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \dots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

On définit $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \langle e_0 \ e_1 \ e_2 \rangle$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe \mathbb{Z}_3 sont ici représenté par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si G agit sur E (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ par $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_i$ (action de G sur E)

exemple : $V = \mathbb{C}$ Ou on prend \mathbb{C} comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$

$$\rho : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentation de

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la restriction de ρ à un sous-espace $U \subset V$ invariant par ρ . c-à-d, si $u \in U$, alors $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$ Le sous-espace $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z \in \mathbb{C} \right\}$ est une sous représentation triviale

Le sous-espace $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0 \right\}$ est aussi une sous-représentation de R de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ($\neq 0, \neq V$)

Exemple : S_3 :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$ la représentation de permutation induite par l'action ??? de S_3 sur $\{1, 2, 3\}$ $\rho(12) = \dots 3x3$, $\rho(123) = \dots 3x3$

ρ est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | z \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariant est irréductible

Également, $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} | z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$ est invariant

Es-ce que U_0 est irréductible ?

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

...

Conclusion : U_0 est une représentation irréductible. On l'appelle représentation standard de S_3

Ex : S_3

$$\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(u)$, $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(v)$ sont 2 représentation de G , leurs somme directe est la représentation $\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(u \oplus v)$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$ contient $u \oplus 0$ et $0 \oplus v$ comme sous représentation

Proposition : Soit $U \subset V$ une sous-repr/sentation de $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$. Alors, il existe une sous-représentation $W \subset V$ telle que $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple : $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de \mathbb{Z} , $\langle e_1 \rangle$ est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe pas d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit $V_0 \subset V$ n'importe quel complément de U ($V = U \oplus W_0$)

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_0 \quad \text{pour } w \in W_0$$

Soit $\pi: V \rightarrow U$ la projection complémentaire à W_0

Définissons $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$ si $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi [\rho(g^{-1})u]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g^{-1})u$$

$$\frac{1}{|G|} |G| u = u$$

$\implies \pi' : V \rightarrow U$ est surjectif et identité sur

$W = \text{Ker}(\pi')$ est notre candidat de sous-représentation

Vérifions que W est $\rho(G)$ invariant

$$h \in G \quad V \in \text{Ker} \pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g) \pi \rho(g') \rho(h) v = \dots = 0$$

comme $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , ,$$

Rappels

- représentation de G $\rho \rightarrow \text{GL}(V)$
- somme direct $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$, $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow (V \oplus U)$
- Sous-représentation $U \subset V$ G invariant $\forall g \in G, \rho(g)u \in U$
- ρ est irréductible si les seul sous-représentation sont $\{0\}$ et V
- Théorème : Si $U \subset V$ est une sous représentation de $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ alors $\exists W \subset V$ sous-espace t.q. $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$: représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une application linéaire $\varphi : U \rightarrow V$ telle que $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

Si φ est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1. $\text{Ker}(\varphi) \subset U$
2. $\text{Im}(\varphi) \subset V$ sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si $v \in \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1(g)v) &= \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ \implies \rho_1(g)v &\in \text{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$

$$2. \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$$

Lemme de Shur

1. $\varphi : V \rightarrow U$ est un morphisme entre représentation irréductible alors $\varphi = 0$ ou φ est un iso

2. $\varphi : V \rightarrow V$ Morphisme de V représentation irréductible alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration : $\varphi : V \rightarrow U$

1.

...

2. $\varphi V \rightarrow V$ φ admet une valeur propre λ

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = V$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit G une groupe fini abélien

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \dots$$

et supposons $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ irréductible. Fixons $g \in G$

$\rho(g) : V \rightarrow V$ alors $\rho(g)$ est une morphisme de représentation car $\rho(h)(\rho(g)v) = \rho(hg)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$ tout les $\rho(g)$ sont $\lambda_g I$

\implies tout sous-espace de V est stable par $\rho(g) \forall g \in G$

donc $\dim V = 1$

Conclusion : tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple : $G = \mathbb{Z}_4$

...

Exemple : $G = S_3 = \{e, (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de G qui est abélien

Remarque : G est engendré par (123) et (12)

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation irréductible

on a $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$ car $\tau^3 = e$

$\implies \rho(\tau)$ est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit $v \in V$ vecteurs propres de $\rho(\tau)$
 $\implies \rho(\tau)v = \omega^k v$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned} \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^2)v \\ &= \rho(\sigma)\rho(\tau)^2v \\ &= \rho(\sigma)\omega^{2k}v \\ &= \omega^{2k}(\rho(\sigma)v) \end{aligned}$$

conclusion si v est une vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^k alors $\rho(\tau)v$ est vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^{2k}

Il y a deux cas selon la valeur propre

1. $k = 1$ ou $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

$$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

sont linéairement indépendants $U = \langle v, \rho(\sigma)v \rangle$, U est stable par $G : V$ et $\rho(\sigma)V$ sont vecteur propres de $\rho(\tau)$ et $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$, $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

$$\implies U = V$$

et dans la base $v, \rho(\sigma)v$ on alors

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $k = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\tau)v &= v \\ \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\sigma)v \end{aligned}$$

(a)

$$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

et $\lambda \in \{1, -1\}$ ($\sigma^2 = 1$) si $\lambda = 1$ $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{trivial}}$ si $\lambda = -1$, $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{sign}}$

(b) v et $\rho(\sigma)v$ sont linéairement indépendants

Considérons $V + \rho(\sigma)v$, $V - \rho(\sigma)v$

$$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v \text{ et } \rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$$

$$\implies v + \rho(\sigma)v \text{ est stable par } G.$$

idem pour $-$. C'est donc une contradiction au fait que V soit irréductible.

Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

une représentation

Alors son caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire $\varphi : V \rightarrow U$ (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$$

φ est appelée une application équivariante

Lemme de Shur

1. Si ρ_1, ρ_2 sont irréductible φ morphisme $\implies \varphi = 0$ ou isomorphe
2. Si $V = U$ alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ??? de S_3 (à iso près) sont ρ_1, ρ_2 et ρ_3

Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

χ_ρ est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d $\forall h \in G, \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans S_n permutation de n éléments la conjugaison correspond à un "changement d'étiquette"

La table des caractères d'un groupe fini G est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les classes de conjugaison dans G . Les entrées sont $\chi_\rho(g)$

Exemple : S_3

	1 e	3 (12)	2 (123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\text{std}}}$	2	0	-1

TABLE 1 – tables des caractères de S_3

Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme $|G|$

Exemple : \mathbb{Z}_4

	1	1	1	1
	0	1	2	3
$\chi?$	1	1	1	1
$\chi?$	1	i	-1	-i
$\chi?$	1	-1	i	-i
$\chi?$	1	-i	-1	i

TABLE 2 – Table des caractères de \mathbb{Z}_4

Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

V un (k) espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
2. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$

Soit U, V deux k -espaces vectoriels

$$\text{Hom}(U, V) := \{L : U \rightarrow V \mid \text{L'application linéaire}\}$$

est un k -espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\dim(\text{Hom}(u, v)) = \dim(u)\dim(v)$$

Le produit Tensoriel de U et V est un k -espace vectoriel $U \otimes V$ muni d'une application bilinéaire

$$U \times V \rightarrow U \otimes V$$

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour toute application bilinéaire $b : U \times V \rightarrow W$

Je vois pas ...

En pratique : Si e_1, \dots, e_n est une base de U , f_1, \dots, f_m est une base de V alors $\{e_i \otimes f_j\}$ est une base de $U \otimes V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \dots ace_1 \otimes f_1 + \dots$$

Exemple : produit scalaire standard dans \mathbb{C}^2 est bilinéaire $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$

Quelle est $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$$

Attention

Il est des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2. Q_8 : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \quad -ji = ij = -k$$

- (a) Calculer les classes de conjugaison dans Q_8
 - (b) Déterminer les représentations irréductibles (il y en a 5, dimension 1 et 2)
 - (c) Dresser la table des caractères de Q_8
3. Décomposer $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$ en irréductibles
 4. Calculer $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

abélien \implies toute représentation irréductible est de dim 1 On a $(0, 1) + (0, 1) = (0, 0)$

$$\rho(0, 1)\rho(0, 1) = 1 = \rho(0, 1)^2 \implies \rho(0, 1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1)^m \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$

...

Pareil pour tous les éléments

- (b) Si $\rho : Q_8 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est de rang 1. Comme $i^4 = 1$, $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$ (de même pour j et k)

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$ Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prenant $\rho(i) = i$ ou $\rho(i) = -1$ (même chose pour j et k évidemment) On doit donc prendre $\rho(i) \in \{1, -1\}$, $\rho(j) \in \{1, -1\}$, $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)

	e	i	j	k	-1
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_1	1	-1	1	-1	1
ρ_2	1	-1	-1	1	1
ρ_3	1	1	-1	-1	1
ρ_4	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de C_8

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

V espace vectoriel

$P : V \rightarrow V$ application linéaire t.q. $P^2 = P$ est appelé une projection (sur le sous-espace $\text{Im}(P)$)

Ex : $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si P est une projection, $\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$

Démonstration On a $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$

- car $\dim(V) = \dim(\text{Ker}P) + \dim(\text{Im}(P))$
- et si $v \in (\text{Ker}P) \cap (\text{Im}P)$ $P(v) = 0$ mais aussi $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$
 $\implies v = 0$

Si $v \in \text{Im}(P)$ $P(v) = v$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\text{Im}(P)} = \mathbb{1}_{\text{Im}(P)} \\ &\quad \text{et} \quad P|_{\text{Ker}P} = 0_{\text{Ker}P} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\text{Im}P} & 0 \\ 0 & 0_{\text{Im}P} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \text{tr}(P) = \text{tr}(\mathbb{1}_{\text{Im}P}) = \dim \text{Im}P \end{aligned}$$

??? d'irréductibilité est relations d'orthogonalité

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$

définissons $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que V^G est un sous-espace vectoriel de V

et $P : V \rightarrow V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

Prop : P est une projection sur V^G

Démonstration : ON veut montrer

1. $\text{Im} P = V^G$ et
2. $P^2 = P$

1. Supposons $v \in \text{Im} P$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \cdots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter : (

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \text{Im} P \subset V^G$$

Inversement, si $v \in V^G$

$$\text{alors } P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\dim(V^G) = \text{tr}(P) = \text{tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

En particulier, si ρ est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

Ex : S_3

...

Rappels

P projection, apli linéaire $P : V \rightarrow V$ t.q. $P^2 = P$

$$\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$$

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est une projection avec $\text{Im}P = V^G = ?$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Nombre de représentation triviale dans la décomposition de ρ
En particulier si ρ est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

ρ_1, ρ_2 deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2) : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(U, V))$$

Rappel

Si $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho_{2(g)} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)(M) = \rho_2(g) \cdot M \cdot \rho_1(g)^{-1}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(U, V)^G = \{\varphi : u \rightarrow v \mid \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \text{Hom}(U, V)^G \iff \rho_2 M \rho_1(g) = M \rho_1(g) \iff \rho_2(g) M = M \rho_1(g) \iff M \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si ρ_1, ρ_2 sont irréductibles, le lemme de Schur dit

$$\dim(\text{Hom}(U, V)^G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\cong \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \text{tr } P = \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \text{ (à démontrer)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g})$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g}) \chi_\rho(g) = \left\{ \dots \right.$$

Les caractères de représentations irréductibles sont orthonormés par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Exemple : S_3

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} (1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 1 \quad \dots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\dim(\mathbb{C}_C(G)) = \# \text{ de classes de conj}$$

Corollaire

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

Démonstration : (je vois pas lol)

Corollaire 2 : Toute représentation est déterminée (à iso près) par son caractère χ_ρ

Démonstration : On sait que $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \dots \oplus \rho_k^{m_k}$

$$\text{De plus } \chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \dots + m_k \chi_{\rho_k}$$

On peut retrouver m_i avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

Exemple

Décomposons $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^6)$ (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6, \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$ (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi? + 2\chi?$$

Exemple

Décomposons $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$ la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{\text{std}} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 : ρ est irréductible ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2 = 1$$

puisque $m_i \in \mathbb{N}$, un des $m_i = 1$, tout les autres =0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} : \text{irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décomposition de R avec multiplicité $\dim \rho_i$ et $|G| (= \dim(R)) = \sum_{\rho_i \text{ irre}} \dim(\rho_i)^2$

2024-02-01

typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \ e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2) + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

Rappels

ρ_1, ρ_2 reps indestructibles de G
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

...

Corollaire 5 : si $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) \quad (g \neq e)$$

Permet de trouver une caractère manquant dans le table si on connaît tout les autres

Plus d'algèbre linéaire

e_1, \dots, e_n base de V f_1, \dots, f_m base de W $e_i \otimes f_j$ base de $V \otimes W$

$$M \in \text{GL}(V) \quad N \in \text{GL}(W)$$

$$M \otimes N \in \text{GL}(V \otimes W)$$

Proposition :

$$\text{tr}(M \otimes N) = (\text{tr } M)(\text{tr } N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\text{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left(\sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \text{tr } M \text{ tr } N$$

Définition

L'espace dual de V est $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ noté V^*

Si $M \in \text{GL}(V)$

$M^* \in \text{GL}(V^*)$

$$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$$

De même, si $\rho_i G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une repr. La repr dual est $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration : $g \in G$, $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$\implies \rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de 1

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire ρ est irréductible $\iff \rho^*$ est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* W$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \dots, e_n^* \text{ base de } V$$

$$w_1, \dots, w_m \text{ base de } W$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples : S_4 et A_4

Les classes de conjugaisons dans S_4 sont

$$\overbrace{(e)}^1, \overbrace{(12)}^2, \overbrace{(123)}^3, \overbrace{(1234)}^4, \overbrace{(12)(34)}^5$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés)

	1 e	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 $(12)(34)$
χ_0	1	1	1	1	1
χ_{sym}	1	-1	1	-1	1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym} \otimes \text{std}}$	3	-1	0	1	-1
χ_4	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de S_4

Regardons la representation $\rho_?$ de dim 4

$$\rho_? : S_4 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que $\rho_?$ se décompose en $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$

$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$\begin{aligned} &= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1) \\ &= (3\,1\,0\,-1\,-1) \end{aligned}$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24} \left(3^2 + 6^2 + \cdots \right) = 1$$

Pour trouver $\text{di}(\rho_4)$

on utilise $|G| = \sum_{\rho_{\text{irred}}} \dim(\rho_i)^2$

$$23=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$$

$$d=2$$

On trouve les autres coeffs avec

$$0=\sum_{g\text{irred}}\dim(\rho_i)\chi_{\rho_i}(g)$$

Calculons ρ_4

On a $\rho((12)(34))=I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34)))=2$$

M est conjugué à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyau

2024-02-08

Groupe de Lie (matriciel)

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe fermé

(La topologie sur $GL(n, \mathbb{C}) \subseteq M_n \mathbb{C}$

SI $M_n \in G$ et $M_n \rightarrow M \in GL(n, \mathbb{C})$ alors $M \in G$

En fait, tout sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$ est une sous-variété lisse (G a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur G)

(contre)Exemple :

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$ n'est pas fermé.

Exemples

$GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$

...

Définition On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin $\gamma : [0 : 1] \rightarrow G$ avec $\gamma(0) = A$ $\gamma(1) = B$
 $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer $A = I$)

Exemple : $O(n)$ n'est pas connexe

$$A = I \in O(n) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

S'il existait un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow O(n)$ t.q. $\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = B$

alors $\det \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $\det \circ \gamma(0) = 1$, $\det \circ \gamma(1) = -1$

G Groupe de Lie matriciel

G^0 Composantes connexe de l'identité

Proposition :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

Démonstration

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$ des chemins, $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit, $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que G^0 est normal, il faut montrer que $\forall C \in G, A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = C I C^{-1} = I$$

$$\gamma(1) = C A C^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est $f : G \rightarrow H$ qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple : $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une homomorphisme de groupe de Lie car

1. $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

Rappel

Pour $S \subset \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n$ une sous-variété. l'espace tangent en $p \in S$ est

$$T_p S = \left\{ \gamma'(0) \mid \begin{array}{l} \gamma : [-1, 1] \rightarrow S \\ \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une application lisse, la dérivé de f en p est une application linéaire

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

définie par :

$$df_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$$

pour γ chemin dans S_1 avec $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour $\det : \text{GL}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ La dérivé au point $p = I \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$d(\det)|_I : T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow T_1 \mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix} (0) = X$$

$$T$$

Rappels

- Groupe de Lie matriciel $G \ni I \rightarrow$ sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$
- G est une sous-variété
- Exemples $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$, $SO(n)$, $SO(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ Groupe des matrices triangulaires supérieures $(S)O(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{R}) | M^t I_{pq} M = I_{pq}\}$ $(S)U(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}$
- G Connexe si $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G$ avec $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$ (composantes connexes de I) est un sous-groupe normal exemple :

$$O(1, 1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

On résout le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :

$O(2)$

Étant donné $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$df \Big|_I : T_I G \rightarrow T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement f .

Un voisinage arbitrairement petit autour de I engendre G

Attention

Pas toutes les applications linéaires $L : T_I G \rightarrow T_I H$ sont la dérivée d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = df \Big|_I$$

Étant donnée $g \in G$, on définit la multiplication à gauche $L_g : G \rightarrow G$ c'est une application lisse mais

$$dL_g \Big|_I : T_I G \rightarrow T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{Ad}(g) \Big|_I : T_I G &\rightarrow T_I G \\ X &\rightarrow gXg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X \\ \operatorname{Ad}(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1} \end{aligned}$$

$$d \operatorname{Ad}(G) \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obtenir une condition sur $T_I G$ uniquement, on dérive $\operatorname{Ad}(f)$ par rapport à g en fixant X

$$\begin{aligned} G &\rightarrow T_I G \\ g &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

pour dériver cette application on prend

$$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= I \\ \gamma'(0) &= U \in T_I G \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = [\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})']_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1} \\ &= YX - XY \in T_I G \end{aligned}$$

L'opération sur $T_I g$

$$[X, Y] = XY - YX$$

s'appelle le crochet

Comme le crochet est défini en termes de la multiplication dans G et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie $f : G \rightarrow H$ la dérivée $df|_I : T_I G \rightarrow T_I H$ satisfaisant $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$

En fait $L : T_I G \rightarrow T_I H$ est la dérivée d'un morphisme de groupe de Lie $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel \mathfrak{g} complexe muni d'une application sur \mathbb{C}

$$[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Exemple : Si G est une groupe de lie matriciel, $g = T_I G$ muni de $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de lie

Si $f: G \rightarrow H$ est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$)

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \left. d \det(0) \right|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(n\mathbb{C}) \subseteq \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

En fait on a l'égalité

Rappels

G groupe de lie

$\mathfrak{g} = T_I G$ algèbre de Lie pour $[X, Y] = XY - YX$

En général, une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

Exercice

1. Montrer que \mathbb{R}^3 muni du produit vectoriel \times est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre (\mathbb{R}^3, \times) et $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$

tentative

1. On doit montrer que \times respecte les trois conditions
 - (a) $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

L'application exponentielle

G groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_I G$ sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1. $\exp(0) = I$
2. $d\exp|_0 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est l'application identité
3. $\forall X \in \mathfrak{g}$ l'application $t \rightarrow \exp(tX)$ est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t+s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = e^X$

Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \rightarrow H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df|_I} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array} \right)$$

commute, c-à-d, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ df|_I$

Conséquence :

Si $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\implies i \circ \dots$$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

...

Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de G est un morphisme $G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Une représentation de \mathfrak{g} est une morphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

Exemple : Représentation adjointe

$$\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

$$\text{où } \mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$$

on peut vérifier la linéarité et $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Ad}g)(\mathrm{Ad}h)$

Rappels

...

Proposition : Soit $0 \neq V \in V_\beta$, alors $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2v, \dots\}$ engendre V

Démonstration : On montre que $U = \langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2v, \dots \rangle$ est stable pour $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1. $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m) \rho(Y)^m v \in U$
2. $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1} v \in U$
3. $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

On va montrer par récurrence que $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$

pour $m = 0$ $\rho(x)v = 0$ pour $m = 1$ $\rho(x)\rho(y)v = (\rho(H) + \rho(Y))\rho(y)v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1}v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho(y)^m v$$

...

$$[(m+1)(\beta - m)\rho(y)^m v]$$

$\implies U \subseteq V$ est stable pour ρ comme ρ est irréductible, $U = V$

Conséquences

- $V_\alpha = 1$
- ρ est uniquement déterminé par $\beta = \max_{\text{sup}}(\rho(H))$

De plus, comme V est de dimension finie, il existe m t.q. $\rho(y)^m v = 0$ et $\rho(y)^{m-1}v \neq 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$$

$$\implies m(\beta - m + 1) = 0$$

$$\implies \beta = m - 1 \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimension n et les espaces propres de $\rho(H)$ sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

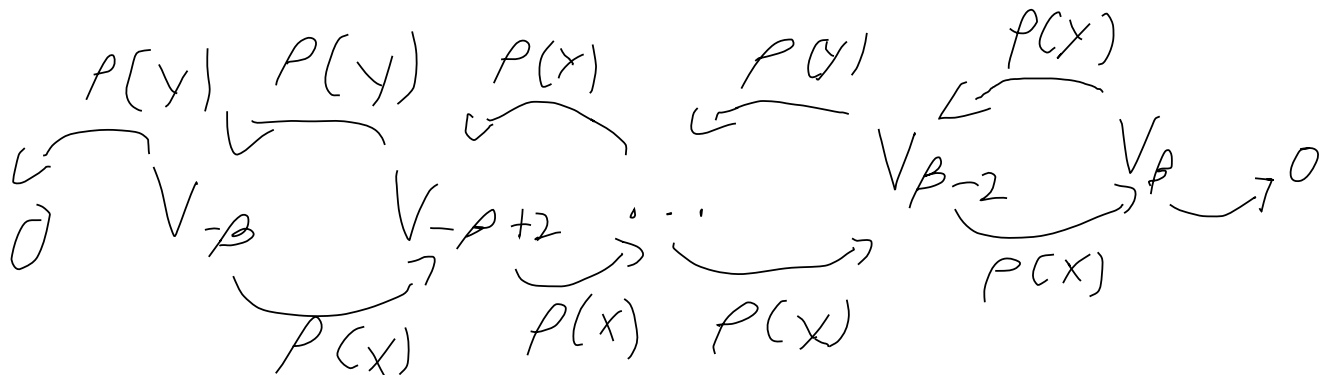


FIGURE 1 – ladder

Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

Rappel

$$\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i) i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par $\rho_1 \otimes \rho_2(g) (V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si G est un groupe de Lie \mathfrak{g} son algèbre de Lie

Calculons $d(\rho_1 \otimes \rho_2) \big|_I \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}V_1 \otimes V_2$

Soit $\gamma(t) \in G$, $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \otimes \rho_2) \gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \dots = \left(d \rho_1 \big|_I (X) V_1 \right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\dots)$$

Définition :

Si $\rho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V_i)$ sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ est définie par $(\rho_1 \otimes \rho_2) X (V_1 \otimes V_2)$

On a également $\text{sym}^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$, $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ sous-représentation comme pour G un groupe On introduite la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdots v_n := \text{Sym}^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in \text{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_1 \cdots = \text{Alt}(v_1 \cdots)$$

Revenons à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation ???? est $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus v_2$$

est la représentation irréductible de dimension 2

$$\text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(\text{Sym}(i)(H))(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_1) = 2e_1^2$$

sur $e_1 \otimes e_2$ c'est 0 sur $e_2 \otimes e_2$ c'est $-2e_2^2$

$$\implies \text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^{n-i}, e_2^i \rangle$$

Chacun est une vecteur propre de $\text{sym}(H)$ et

$$\text{sym}(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left(H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + (e_1 H e_1 \cdots e_2^i) + \cdots$$

$$= \cdots = (n-2i)e_1^{n-i}e_2^i$$

Je vois pas

Exemple : Quelle est la d/composition de $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes \text{sym}^2(\mathbb{C}^2)$ en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de $\rho(H)$

pour $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) : -2, 0, 2$ pour $\text{sum}^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) H (v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2) (v \otimes u)$$

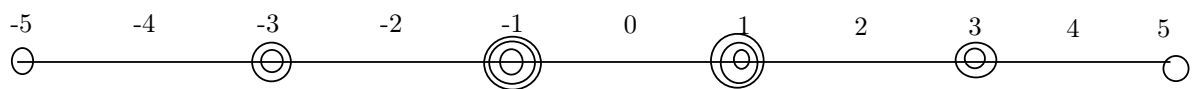


FIGURE 2 – valeurs propres

Rappels

Représentation irréductibles de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) = \langle H, X, Y \rangle$

$$V^{(n)} = \oplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & Y & & Y & & Y & & Y \\
 & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\
 -n & & -n+2 & & \cdots & & n-2 & & n \\
 & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\
 & X & & X & & X & & X
 \end{array}$$

Notation

Une Représentation est doit

$$\rho : g \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

ou bien une action

$$g \times V \rightarrow V$$

$$\forall Z \in g \quad v \mapsto Xv \quad \text{est linéaire}$$

\exists une unique représentation de dim n . On peut la construire comme $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C})$

Produit tensoriel de représentation d'algèbre de Lie,

V, W deux repr de g , $V \otimes W$ est une représentation avec $X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw$

Exemple :

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2))$$

$$\mathbb{C}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3 \rangle$$

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \langle e_1^3 \wedge e_1^2 e_2, e_1^3 \wedge \cdots \rangle$$

Calculons les valeurs propres de H pour cette représentation

...

Représentation de $SL(2, \mathbb{C})$ irréductibles

Fait : Si G est connexe $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation est uniquement déterminée par la représentation

$$d\rho \Big|_I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

$SL(2, \mathbb{C})$ est connexe. On connaît toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On peut les construire avec $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$

Conséquences : Les représentations $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$ sont toutes les représentations irréductibles de $SL(2, \mathbb{C})$

Exemple :

Calculons $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ pour $SL(2, \mathbb{C})$

$$\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^2, e_1 e_2, e_2^2 \rangle$$

...

Représentation de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Fait : $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est une algèbre simple.

On veut imiter la stratégie utilisée pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Le sous-espace $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \right\}$ joue le rôle de la matrice H

remarquons que les matrices de \mathfrak{h} commutent entre elles et sont diagonalisables

Si $\rho : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

Par préservation de la forme de Jordan $\forall H \in \mathfrak{h}$, $\rho(H)$ est diagonalisable

Rappel

Une famille de matrices diagonalisables qui commutent est simultanément diagonalisable c-à-d il existe une base dans laquelle elles sont toutes diagonales

$$\implies V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

décomposition en sous-espaces propres simultanés de \mathfrak{h}

On interprète α comme des fonctions $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ $\alpha(H)$ est la valeur propre de $H \in \mathfrak{h}$ sur le sous-espace V_{α}

$$\rho(H)v = \alpha(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad \forall v \in V_{\alpha}$$

α est linéaire

$$\alpha(aH_1 + bH_2)v = \rho(aH_1 + bH_2)v = a\rho(H_1)v + b\rho(H_2)v = a\alpha(H_1) + b\alpha(H_2)$$

Autrement dit, $\alpha \in h^*$

On doit comprendre $[\cdot, \cdot]$ sur $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

De manière équivalente, on doit comprendre

$$\begin{aligned} \text{ad} : g &\rightarrow \mathfrak{gl}(g) \\ \text{ad}(x)y &= [X, Y] \end{aligned}$$

Par la construction précédente, on peut découper g en sous-espaces propres de $\text{ad}(h)$

$$\text{ad} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots \begin{pmatrix} 0 & a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\alpha(H)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On viens de trouver un des 8 sous-espace propres, (trouvons les autres?)

Notons E_{ij} matrice avec un 1 en i, j est 0 ailleurs

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = \alpha(H)E_{1,2}$$

$$\text{on définit } L_i \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & 1_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} = a_i$$

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = (L_1 - L_2)(H)E_{1,2}$$

$$\text{ad}(H)E_{1,3} = (L_1 - L_3)(H)E_{1,3}$$

$$\text{ad}(H)E_{2,1} = (L_2 - L_1)(H)E_{2,3}$$

$$2, 1$$

$$3, 1$$

$$3, 2$$

de plus $\text{ad}(H_1)H_2 = 0$ est de dimension 2

$$g = h^{???}$$