Cours 3

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

courbe régulière : $\alpha' \neq 0 \forall t$

longeure d'arc

$$\mathscr{L} = \int_a^b ||a'(t)||\mathrm{d}t$$

Approximtion avec une partition

$P = (t_0, t_1, ...t_n)$

$$\mathscr{L}(\alpha, P) = \sum_{i=0} ||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})||$$

Prop

Si alpha est C^1 alors α est rectifiable et

$\mathscr{L}(\alpha) = sup_p \mathscr{L}(\alpha, P)$

On a montré que pour toute partition P : $\mathscr{L}(\alpha, P) \leq \int_a^b ||\alpha(t)\mathrm{d}t||$

Lemme : $|| \int_a^b \alpha(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_a^b ||\alpha(t)\mathrm{d}t$

Reste à montrer que $\forall \epsilon > 0 \exists P t.q.$

$$\mathscr{L}()\alpha, P) \geq \int_a^b |\alpha(t)|\mathrm{d}t - \epsilon$$

Continuité uniforme de alpha prime

$\exists \delta > 0$ t.q. si

Proposition : Une courbe paramétré α admetant une reparamétrisation par longeur d'arc ssi elle est régulière

Dem ($\implies$)

Si α admet une reparamétrisation par longeure d'arc $\tilde{\alpha}$

et $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi$ $\varphi : [a, b] \to [c, d]$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(\varphi(t)) \\
\tilde{\alpha}'(t) &= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\underbrace{||\tilde{\alpha}'(t)||}_{1} &= ||\alpha'(\varphi(t))|| ||\varphi'(t)|| \\
&\implies ||\alpha'(\varphi(t))|| \neq 0
\end{aligned}
$$

$(\Longleftarrow)$

Trop long, trop loin

Exemple : Calculer la paramétrisation par longeure d'arc d'une hélice

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt) \ (a, b > 0)(t \in \mathbb{R})$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_0^t ||\alpha'(x)||\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t (-a\sin x, a\cos x, b)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}x \\
&= t\sqrt{a^2+b^2} \\
&\implies \Psi^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\implies \tilde{\alpha}(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})
\end{aligned}
$$

Courbe du jour : Caténoide

Repère de Frenst

Un repère adapté à la courbe.

Le premier vecteur est le vecteur tangeant.

Le second vecteur est le vecteur *accélération*. En effet, il est toujours pependiculaire au déplacement dans le cas d'une courbe paramétré par longeure d'arc (vitesse constante)

Le troisième est celui qui reste $(\times)$

Lemme : Soient $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differentiable. Si $f(t) \circ g(t)$ est constante alors $f'(t) \circ g(t) = -f(t) \circ g('t)$

Dem $(f(t) \circ g(t))' = 0 \implies f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g('t) = 0$■

Soit α paramétré par longueure d'arc

$$T(s) := \alpha(s)$$

$$k(s) := ||T'(s)|| = ||\alpha''(s)||$$

est la courbure de α au point $\alpha(s)$

$$N(S) := \frac{T'(s)}{k(s)}$$

On dur que α est birégulière si $k(s) \neq 0 \forall s$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

T, N, B est le <u>repère de Frenet</u> de α

$$||T(s)|| = 1 T(s) \cdot T(s) = 1 T(s) \cdot T'(s) = 0 \implies k(s) T(s) \cdot N(s) = 0$$

$$T, N, B \text{ sont } \perp$$

$$||B|| ||T \times N|| = ||T|| |N|| sin(\phi) = 1$$

Orthonormé !

On a, par définition que

$$T'(s) = k(s) N(s)$$

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) N'(s) \cdot N(s) = 0 N'(s) \cdot B(s) =: \tau(s)$$

τ :torsion

...

On obtiens les <u>Équations de Frenet-Serra</u>

$$\begin{aligned} &T'(s) = k(s)N(s) \\ &N'(s) = k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ &B'(s) - \tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$