

1 Rappel de théorie des groupes et de leurs actions

Un groupe est une paire $(G, *)$, où G est un ensemble et $*$ est une opération $(* : G \times G \rightarrow G)$

3 axiomes :

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$
2. $\exists e \in G | e * a = a * e = a \quad \forall a \in G$
3. $\forall a \in G, \exists b \in G | a * b = e$

Ex : $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), \dots$

Les groupes matriciels sont très importants

Tout les groupes mentionné jusqu'à maintenant sont infini, un exemple de groupe fini est $(\mathbb{Z}_n, +)$

$$S_E = \{f : E \rightarrow E | f \text{ est inversible} \}$$

avec l'opération de composition \circ

On l'appelle le groupe symétrique de E

$$S_n = S_{\{1, 2, \dots, n\}}$$

Est le groupe des permutations de n éléments

Notation pour désigner les éléments $\sigma \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Définition : Un morphisme/homomorphisme de groupes (G, H) est une fonction $f : G \rightarrow H$ t.q. $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$.
Si f est inversible alors f^{-1} est aussi un morphisme et on dit alors que f est un isomorphisme

Exemples :

- $\det : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$

Définition : Une action d'une groupe G sur un ensemble X est une application

$$\bullet : G \times X \rightarrow X$$

satisfaisant

$$e \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

et

$$a \bullet (b \bullet x) = (a * b) \bullet x$$

Exemple :

$$G = \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad X = \mathbb{R}^n$$

Définition : Une action de G sur X est un homomorphisme $f : G \rightarrow S_X$

Les deux définitions sont équivalentes

On définit $f(g) = (x \mapsto g \bullet x)$

$$\begin{aligned} f(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) \bullet x \\ &= g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \\ &= g_1 \bullet f(g_2)(x) \\ &= f(g_1)(f(g_2)(x)) \\ &= [f(g_1) \circ f(g_2)](x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$$\implies f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$$

Si X a plus de structure et qu'on a une action de G sur X qui preserve la structure lors on dit que G agit par (homéomorphisme, isométrie, application linéaire, ... (linéairement)) sur X

exemple : $G = S_3$ agit par isométrie sur un triangle équilatéral (voir 1)

ATTENTION : S_4 n'agit pas (fidellement, injectivement) sur le carré par isométrie (certaines permutations *brisent le triangle*) S_4 agit par isométries sur le cube !

$A_n \subset S_n$ et est groupe des permutations paires

A_5 agit par isométrie sur le dodécaèdre

Théorème : [Cayley] Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutation S_G

Démonstration : On considère l'action de G sur lui-même ($x = G$)

$$g_1 \bullet g_2 = g_1 * g_2$$

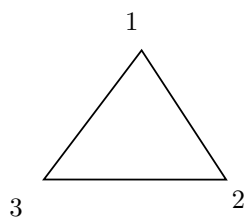
on obtiens $f : G \rightarrow S_G$: homomorphisme injectif car si $f(g_1) = f(g_2)$ alors $f(g_1)(e) = f(g_2)(e)$, $g_1 \bullet e = g_2 \bullet e$, $g_1 = g_2$

$$\implies f(G) \subset S_G \text{ est isomorphe à } G$$

Définition : Une représentation d'un groupe G est une action linéaire de G sur un espace vectoriel V . Autrement dit, un homomorphisme $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Le rang d'une représentation est $\dim V$

exemples :

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\sigma)$$

$$F(\eta)$$

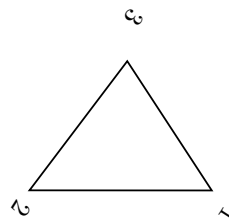
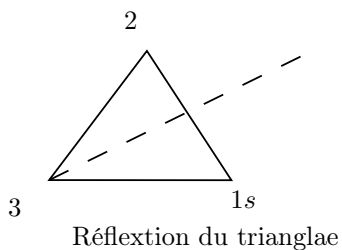


FIGURE 1 – Triangles équilatéraux

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si G est un groupe fini, il admet la représentation régulière :

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

$$V = \langle e_{g_1}, \dots \rangle$$

retour sur le dernier cours

(G, \bullet) c'est un groupe

$S_E = \{ \sigma : E \rightarrow E \mid \sigma \text{ inversible} \}$ est une groupe pour la composition

Un cycle est un élément de S_n de la forme

$$\sigma(a_1) = a_{i \neq 1}, \sigma(a_k) = a_1, i = 1, \dots, k$$

On le note $(a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$

Fait important

Toute permutation se décompose de manière unique en cycles disjoint Exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12) \circ (35) = (35) \circ (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1756234)$$

Le signe (ou la signature) d'un cycle de longueur ℓ est

$$(-1)^{\ell-1} \begin{cases} +1 : \text{la permutation est paire} \\ -1 : \text{la permutation est impaire} \end{cases}$$

On a la relation $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \text{sgn}(\sigma_2)$

On peut utiliser une manière graphique pour calculer la signature d'une permutation (graph : compter le nombre d'intersections)

Action de G sur X : deux définitions

1. $\bullet : G \times X \rightarrow X$
2. homomorphisme $f : G \rightarrow S_x$

Représentation de G : action linéaire de G sur un espace vectoriel V

Exemple : La Représentation vectoriel sur V

$$g \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall g \in G, v \in V$$

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

$$g \mapsto \mathbb{1}$$

Pour G fixé, on a la représentation régulière (R) (pour chaque élément du groupe on a un vecteur)

$$\langle e_{g_1}, \dots, e_{g_n} \rangle \quad \text{où} \quad G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

On définit $g \bullet e_g = e_{g \bullet g}$

Exemple :

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \langle e_0 \ e_1 \ e_2 \rangle$$

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments du groupe \mathbb{Z}_3 sont ici représenté par les matrices 3x et l'addition (modulaire) est remplacé par la multiplication matriciel des éléments de la représentation.

Autre exemple :

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$R(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si G agit sur E (ensemble fixé), on définit une représentation de permutation sur $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ par $\rho(g)(e_i) = g \bullet e_i$ (action de G sur E)

exemple : $V = \mathbb{C}$ Ou on prend \mathbb{C} comme un espace vectoriel

$$G = \mathbb{Z}_3$$

$$\rho : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$n \mapsto \omega^n \quad \text{où} \quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

Définition : Un sous-représentation de

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est la restriction de ρ à un sous-espace $U \subset V$ invariant par ρ . c-à-d, si $u \in U$, alors $\rho(g)u \in U \forall g \in G$

Exemple : Pour $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$ Le sous-espace $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \\ z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z \in \mathbb{C} \right\}$ est une sous représentation triviale

Le sous-espace $U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 | z_1 + z_2 + \dots + z_6 = 0 \right\}$ est aussi une sous-représentation de R de dimension 5

Définition : Une représentation est irréductible si elle n'admet aucune sous représentation propre ($\neq 0, \neq V$)

Exemple : S_3 :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{C})$ la représentation de permutation induite par l'action ??? de S_3 sur $\{1, 2, 3\}$ $\rho(12) = \dots 3x3$, $\rho(123) = \dots 3x3$

ρ est elle irréductible ? non,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | z \in \mathbb{C} \right\}$$

est invariant est irréductible

Également, $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} | z_1 + z_2 + z_3 = 0 \right\}$ est invariant

Es-ce que U_0 est irréductible ?

Cherchons un sous-espace invariant de dim 1

$$\rho(12) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

...

Conclusion : U_0 est une représentation irréductible. On l'appelle représentation standard de S_3

Ex : S_3

$$\text{sgn} : S_3 \rightarrow \mathbb{C}^* = \text{GL}(1, \mathbb{C})$$

$$\sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$$

Si $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(u)$, $\rho_2: G \rightarrow \text{GL}(v)$ sont 2 représentation de G , leurs somme directe est la représentation $\rho_1 \oplus \rho_2: G \rightarrow \text{GL}(u \oplus v)$

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(u \oplus v) = \rho_1(g)u \oplus \rho_2(g)v$$

Exemple : si $U = \mathbb{R}^n$ $V = \mathbb{R}^m$

$$U \oplus V = \mathbb{R}^{n+m}$$

$U \oplus v$ contient $u \oplus 0$ et $0 \oplus v$ comme sous représentation

Proposition : Soit $U \subset V$ une sous-repr/sentation de $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$. Alors, il existe une sous-représentation $W \subset V$ telle que $V = U \oplus W$

Attention !

Faux en général pour les groupes infinis

Exemple : $\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une représentation de \mathbb{Z} , $\langle e_1 \rangle$ est une sous-représentation triviale, mais il n'en existe pas d'autre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Démonstration :

Soit $V_0 \subset V$ n'importe quel complément de U ($V = U \oplus W_0$)

Ce n'est **pas** un sous-espace en général

$$\rho(g)w \notin W_0 \quad \text{pour } w \in W_0$$

Soit $\pi: V \rightarrow U$ la projection complémentaire à W_0

Définissons $\pi' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})$ si $u \in U$

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \pi [\rho(g^{-1})u]$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g^{-1})u$$

$$\frac{1}{|G|} |G| u = u$$

$\implies \pi' : V \rightarrow U$ est surjectif et identité sur

$W = \text{Ker}(\pi')$ est notre candidat de sous-représentation

Vérifions que W est $\rho(G)$ invariant

$$h \in G \quad V \in \text{Ker} \pi'$$

$$\pi'(\rho(h)V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}^{\infty} \rho(g) \pi \rho(g') \rho(h) v = \dots = 0$$

comme $\pi'/i = \mathbb{1}_u$

$$U \cup , , , , ,$$

Rappels

- représentation de G $\rho \rightarrow \text{GL}(V)$
- somme direct $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V)$, $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow (V \oplus U)$
- Sous-représentation $U \subset V$ G invariant $\forall g \in G, \rho(g)u \in U$
- ρ est irréductible si les seul sous-représentation sont $\{0\}$ et V
- Théorème : Si $U \subset V$ est une sous représentation de $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ alors $\exists W \subset V$ sous-espace t.q. $V = U \oplus W$

Exemple :

$\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$: représentation de permutation

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$$

est une sous-représentation

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathbb{C}^3 = U \oplus W$$

Corrolaire : Toute représentation s'écrit comme une somme directe de représentation irréductible

Définition : Un morphisme de représentation entre $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(U)$, $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une application linéaire $\varphi : U \rightarrow V$ telle que $\forall g \in G$

$$\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$$

Si φ est inversible, c'est un isomorphisme de représentation

Proposition :

1. $\text{Ker}(\varphi) \subset U$
2. $\text{Im}(\varphi) \subset V$ sont des sous représentation

Démonstration :

1. Si $v \in \text{Ker}(\varphi) \implies \varphi(v) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho_1(g)v) &= \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0 \\ \implies \rho_1(g)v &\in \text{Ker}(\varphi) \end{aligned}$$

$$2. \rho_2(g)(\varphi(v)) = \varphi(\rho_1(g)V) \in \text{Im}(\varphi)$$

Lemme de Shur

1. $\varphi : V \rightarrow U$ est un morphisme entre représentation irréductible alors $\varphi = 0$ ou φ est un iso

2. $\varphi : V \rightarrow V$ Morphisme de V représentation irréductible alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Démonstration : $\varphi : V \rightarrow U$

1.

...

2. $\varphi V \rightarrow V$ φ admet une valeur propre λ

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$$

$$\implies \text{Ker}(\varphi - \lambda \mathbb{1}) = V$$

$$\implies \varphi - \lambda \mathbb{1} = 0$$

$$\implies \varphi = \lambda I$$

La décomposition en irréductible

$$V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_k^{m_k}$$

est unique à isomorphisme près

Exemple : Soit G une groupe fini abélien

$$G \simeq \mathbb{Z}_{m_1}^{n_1} \oplus \dots$$

et supposons $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ irréductible. Fixons $g \in G$

$\rho(g) : V \rightarrow V$ alors $\rho(g)$ est une morphisme de représentation car $\rho(h)(\rho(g)v) = \rho(hg)v = \rho(hg)v = \rho(h)(\rho(g)v)$

Par le Lemme de Shor $\rho(g) = \lambda_g \mathbb{1} \implies$ tout les $\rho(g)$ sont $\lambda_g I$

\implies tout sous-espace de V est stable par $\rho(g) \forall g \in G$

donc $\dim V = 1$

Conclusion : tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dim 1

Exemple : $G = \mathbb{Z}_4$

...

Exemple : $G = S_3 = \{e, (12), (123), (132)\}$

$$H = \{e, (123), (132)\}$$

est le plus grand sous-groupe de G que est abélien

Remarque : G est engendré par (123) et (12)

On leur donne des petit non spéciaux en cette honneur $\tau = (123), \sigma = (12)$

$$\sigma\tau\sigma = (12)(123)(12) = (132) = \tau^2$$

Soit $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation irréductible

on a $\rho(\tau)^3 = \mathbb{1}$ car $\tau^3 = e$

$\implies \rho(\tau)$ est diagonalisable est ses valeurs propres sont des racines cubiques de 1. Soit $v \in V$ vecteurs propres de $\rho(\tau)$
 $\implies \rho(\tau)v = \omega^k v$ pour $\omega = e^{2\pi i/3}, i \in \{0, 1, 2\}$

on a

$$\begin{aligned} \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\tau\sigma)v \\ &= \rho(\sigma\tau^2)v \\ &= \rho(\sigma)\rho(\tau)^2v \\ &= \rho(\sigma)\omega^{2k}v \\ &= \omega^{2k}(\rho(\sigma)v) \end{aligned}$$

conclusion si v est une vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^k alors $\rho(\tau)v$ est vecteur propre de $\rho(\tau)$ de valeur propre ω^{2k}

Il y a deux cas selon la valeur propre

1. $k = 1$ ou $2 \implies \omega^2 \neq \omega^{2k}$

$$\implies v \text{ et } \rho(\sigma)v$$

sont linéairement indépendants $U = \langle v, \rho(\sigma)v \rangle$, U est stable par $G : V$ et $\rho(\sigma)V$ sont vecteur propres de $\rho(\tau)$ et $\rho(\sigma)(v) = \rho(\sigma)v$, $\rho(\sigma)(\rho(\sigma)(v)) = v$

$$\implies U = V$$

et dans la base $v, \rho(\sigma)v$ on alors

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{2k} \end{pmatrix} \\ \rho(\sigma) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $k = 0$

$$\begin{aligned} \rho(\tau)v &= v \\ \rho(\tau)(\rho(\sigma)v) &= \rho(\sigma)v \end{aligned}$$

(a)

$$\rho(\sigma)v = \lambda v$$

et $\lambda \in \{1, -1\}$ ($\sigma^2 = 1$) si $\lambda = 1$ $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{trivial}}$ si $\lambda = -1$, $\langle v \rangle = V$ et $\rho = \rho_{\text{sign}}$

(b) v et $\rho(\sigma)v$ sont linéairement indépendants

Considérons $V + \rho(\sigma)v$, $V - \rho(\sigma)v$

$$\rho(\tau)(v + \rho(\sigma)v) = v + \rho(\sigma)v \text{ et } \rho(\sigma)(v + \rho(\sigma)v) = \rho(\sigma)v + v$$

$$\implies v + \rho(\sigma)v \text{ est stable par } G.$$

idem pour $-$. C'est donc une contradiction au fait que V soit irréductible.

Théorie des caractères

soit

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

une représentation

Alors son caractère est la fonction

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

Rappel

Un morphisme de représentation est une application linéaire $\varphi : V \rightarrow U$ (qui est compatible avec les deux représentation) t.q.

$$\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$$

φ est appelée une application équivariante

Lemme de Shur

1. Si ρ_1, ρ_2 sont irréductible φ morphisme $\implies \varphi = 0$ ou isomorphe
2. Si $V = U$ alors $\varphi = \lambda \mathbb{1}$

Prop : Tout représentation irréductible d'un groupe abélien est de dimension (rang) 1.

Les repr ??? de S_3 (à iso près) sont ρ_1, ρ_2 et ρ_3

Caractère d'une représentation :

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

χ_ρ est un exemple de fonction centrale (class function) c-à-d $\forall h \in G, \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Dans S_n permutation de n éléments la conjugaison correspond à un "changement d'étiquette"

La table des caractères d'un groupe fini G est un tableau où les lignes sont les représentations irréductibles et les colonnes sont les calsses de conjugaison dans G . Les entrées sont $\chi_\rho(g)$

Exemple : S_3

	1 e	3 (12)	2 (123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
$\chi_{\rho_{\text{std}}}$	2	0	-1

TABLE 1 – tables des caractères de S_3

Remarques

- Dans la première colonne on lit les dimensions des représentation irréductible
- les colonnes sont orthogonales par le produit scalaire standard
- Autant de lignes que de colonnes
- chaque lignes est un vecteur de norme $|G|$

Exemple : \mathbb{Z}_4

	1	1	1	1
	0	1	2	3
$\chi?$	1	1	1	1
$\chi?$	1	i	-1	-i
$\chi?$	1	-1	i	-i
$\chi?$	1	-i	-1	i

TABLE 2 – Table des caractères de \mathbb{Z}_4

Rappels et suppléments d'algèbre linéaire

V un (k) espace vectoriel est un groupe abélien muni d'une multiplication par un scalaire

$$k \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$$

satisfaisant

1. $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
2. $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$
3. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
4. $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v}$

Soit U, V deux k -espaces vectoriels

$$\text{Hom}(U, V) := \{L : U \rightarrow V \mid \text{L'application linéaire}\}$$

est un k -espace vectoriel lorsque muni des opérations

$$(L_1 + L_2)(u) = L_1(u) + L_2(u)$$

$$(\lambda \cdot L)(u) = \lambda \cdot (L(u))$$

$$\dim(\text{Hom}(u, v)) = \dim(u)\dim(v)$$

Le produit Tensoriel de U et V est un k -espace vectoriel $U \otimes V$ muni d'une application bilinéaire

$$U \times V \rightarrow U \otimes V$$

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

et satisfaisant la propriété universelle : Pour toute application bilinéaire $b : U \times V \rightarrow W$

Je vois pas ...

En pratique : Si e_1, \dots, e_n est une base de U , f_1, \dots, f_m est une base de V alors $\{e_i \otimes f_j\}$ est une base de $U \otimes V$

Exemple :

J'ai pas envie de l'écrire

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \dots ace_1 \otimes f_1 + \dots$$

Exemple : produit scalaire standard dans \mathbb{C}^2 est bilinéaire $((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$

Quelle est $\bar{b}\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

$$((\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) \rightarrow ac + bd)$$

Attention

Il est des éléments de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ qui n'écrivent pas comme des états factorisables

2024-01-25

Exercices

1. Calculer la représentation irréductible de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
2. Q_8 : Groupe des quaternions (8 éléments)

$$\{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$$

avec

$$ii = jj = kk = -1 \quad -ji = ij = -k$$

- (a) Calculer les classes de conjugaison dans Q_8
 - (b) Déterminer les représentations irréductibles (il y en a 5, dimension 1 et 2)
 - (c) Dresser la table des caractères de Q_8
3. Décomposer $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$ en irréductibles
 4. Calculer $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}} : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$

Solutions :

1.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

abélien \implies toute représentation irréductible est de dim 1 On a $(0, 1) + (0, 1) = (0, 0)$

$$\rho(0, 1)\rho(0, 1) = 1 = \rho(0, 1)^2 \implies \rho(0, 1) \in \{1, -1\}$$

$$\rho_2(nm) = (-1)^n \quad \rho_{3(n,m)} = (-1)^m \quad \rho_4 = (-1)^n(-1)^m \quad \rho_1 = \text{repr. triv} = 1$$

2. (a)

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$$

Démarche :

$$jij^{-1} = ji(-j) = -k(-j) = kj = -i$$

...

Pareil pour tous les éléments

- (b) Si $\rho : Q_8 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est de rang 1. Comme $i^4 = 1$, $\rho(i) \in \{1, i, -1, -i\}$ (de même pour j et k)

$$(-1)^2 = 1 \implies \rho(-1) \in \{-1, 1\}$$

On a

$$\rho_{\text{triv}}(g) = 1$$

Supposons $\rho(i) = i \implies \rho(-1) = -1$ Je vois pas très bien le reste de la démarche mais on arrive à une contradiction en prenant $\rho(i) = i$ ou $\rho(i) = -1$ (même chose pour j et k évidemment) On doit donc prendre $\rho(i) \in \{1, -1\}$, $\rho(j) \in \{1, -1\}$, $\rho(k) \in \{1, -1\}$

On fait le c) tout de suite pour s'aider (voir 2b)

	e	i	j	k	-1
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_1	1	-1	1	-1	1
ρ_2	1	-1	-1	1	1
ρ_3	1	1	-1	-1	1
ρ_4	2	0	0	0	-2

TABLE 1 – Tableau de char de C_8

Fin de la periode d'Exercices

Rappel d'algèbre linéaire sur les projections

V espace vectoriel

$P : V \rightarrow V$ application linéaire t.q. $P^2 = P$ est appelé une projection (sur le sous-espace $\text{Im}(P)$)

Ex : $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ est une projection

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^2 = P$$

Proposition : Si P est une projection, $\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$

Démonstration On a $V = \text{Ker}P \oplus \text{Im}P$

- car $\dim(V) = \dim(\text{Ker}P) + \dim(\text{Im}(P))$
- et si $v \in (\text{Ker}P) \cap (\text{Im}P)$ $P(v) = 0$ mais aussi $v = P(u) \implies 0 = P(v) = P(P(u)) = P(u) = v$
 $\implies v = 0$

Si $v \in \text{Im}(P)$ $P(v) = v$

$$\begin{aligned} &\implies P|_{\text{Im}(P)} = \mathbb{1}_{\text{Im}(P)} \\ &\quad \text{et} \quad P|_{\text{Ker}P} = 0_{\text{Ker}P} \\ &\implies P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\text{Im}P} & 0 \\ 0 & 0_{\text{Im}P} \end{pmatrix} \quad \text{dans certaines bases} \\ &\implies \text{tr}(P) = \text{tr}(\mathbb{1}_{\text{Im}P}) = \dim \text{Im}P \end{aligned}$$

??? d'irréductibilité est relations d'orthogonalité

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$

définissons $V^G = \{v \in V | \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ le sous-espace des invariants

Exercice

Montrer que V^G est un sous-espace vectoriel de V

et $P : V \rightarrow V$

$$P(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

Prop : P est une projection sur V^G

Démonstration : ON veut montrer

1. $\text{Im} P = V^G$ et
2. $P^2 = P$

1. Supposons $v \in \text{Im} P$

$$\implies v = P(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)u$$

alors

$$\rho(h)v = \rho(h) \dots$$

Il a effacé avant que j'ai eu le temps de noter : (

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)h = P(u) = v$$

$$\implies \text{Im} P \subset V^G$$

Inversement, si $v \in V^G$

$$\text{alors } P(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v$$

$$\implies P^2 = P(P(v)) = P(v)$$

$$\dim(V^G) = \text{tr}(P) = \text{tr}\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

En particulier, si ρ est irréductible est non-trivial alors

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

Ex : S_3

...

Rappels

P projection, apli linéaire $P : V \rightarrow V$ t.q. $P^2 = P$

$$\text{tr}(P) = \dim(\text{Im}P)$$

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

est une projection avec $\text{Im}P = V^G = ?$

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$$

Nombre de représentation triviale dans la décomposition de ρ
En particulier si ρ est irréductible et non-trivial

$$\sum_{g \in G} \chi_\rho(g) = 0$$

ρ_1, ρ_2 deux représentations et on s'intéresse à la représentation

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2) : G \rightarrow \text{GL}(\text{Hom}(U, V))$$

Rappel

Si $U = \mathbb{C}^n, V = \mathbb{C}^m$

$$\rho_{1(g)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho_{2(g)} \in \text{GL}_m(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(U, V) = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{C})$$

$$\text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g)(M) = \rho_2(g) \cdot M \cdot \rho_1(g)^{-1}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(U, V)^G = \{\varphi : u \rightarrow v \mid \varphi \text{ est une morphisme de représentation}\}$$

Démonstration :

$$M \in \text{Hom}(U, V)^G \iff \rho_2 M \rho_1(g) = M \rho_1(g) \iff \rho_2(g) M = M \rho_1(g) \iff M \text{ est une morphisme de représentations}$$

Si ρ_1, ρ_2 sont irréductibles, le lemme de Schur dit

$$\dim(\text{Hom}(U, V)^G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_1 \not\cong \rho_2 \\ 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \end{cases} = \text{tr } P = \text{tr} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)(g) \text{ (à démontrer)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g})$$

$$\therefore \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(\bar{g}) \chi_\rho(g) = \left\{ \dots \right.$$

Les caractères de représentations irréductibles sont orthonormés par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{f}_1(g) f_2(g)$$

sur l'espace $f : G \rightarrow \mathbb{C}$

Exemple : S_3

$$\rho_{\text{triv}} = \frac{1}{6} (1^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^3) = 1 \quad \dots$$

$$\mathbb{C}_C(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hgh^{-1}) = f(g) \forall g \in G\}$$

$$\dim(\mathbb{C}_C(G)) = \# \text{ de classes de conj}$$

Corollaire

$$\# \text{ de repr irr homo-isomorphe de } G \leq \# \text{ de classe de conj}$$

(même = mais ça reste à démontrer !)

Démonstration : (je vois pas lol)

Corollaire 2 : Toute représentation est déterminée (à iso près) par son caractère χ_ρ

Démonstration : On sait que $\rho = \rho_1^{m_1} \oplus \dots \oplus \rho_k^{m_k}$

$$\text{De plus } \chi_\rho = m_1 \chi_{\rho_1} + m_2 \chi_{\rho_2} + \dots + m_k \chi_{\rho_k}$$

On peut retrouver m_i avec le produit scalaire

$$\langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle = m_i$$

Exemple

Décomposons $R : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^6)$ (la repr régulière) en irréductible

- $\chi_R(e) = 6, \chi_R(12) = 0, \chi_R(123) = 0$ (les générateurs n'ont pas de points fixes)
- $\langle \chi_R, \chi_{\text{triv}} \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 + 0 + 0)$$

$$\langle \rangle = \frac{1}{6}(6 * 2 + 0 + 0)$$

$$\implies \chi_R = \chi_{\text{triv}} + \chi? + 2\chi?$$

Exemple

Décomposons $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^3)$ la représentation de permutation canonique

—

$$\chi_\rho(e) = 3 \quad \chi_\rho(12) = 1 \quad \chi_\rho(123) = 0$$

$$\chi_\rho = \chi_{\text{triv}} + \chi_{\text{std}}$$

$$\rho = \rho_{\text{std}} \oplus \rho_{\text{triv}}$$

Calculons $\rho_{\text{std}} \otimes \rho_{\text{std}}$

(J'ai pas envie d'écrire des matrices à la main)

Corollaire 3 : ρ est irréductible ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$

Démonstration :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = m_1^2 + \dots + m_k^2 = 1$$

puisque $m_i \in \mathbb{N}$, un des $m_i = 1$, tout les autres = 0

$$\iff \chi_\rho = \chi_{\rho,i} : \text{irréductible}$$

Corollaire 4 :

Tout représentation irréductible apparait dans les décomposition de R avec multiplicité $\dim \rho_i$ et $|G| (= \dim(R)) = \sum_{\rho_i \text{ irre}} \dim(\rho_i)^2$

2024-02-01

typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} \mid \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \ e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2) + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

Rappels

ρ_1, ρ_2 reps indestructibles de G
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

...

Corollaire 5 : si $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) \quad (g \neq e)$$

Permet de trouver une caractère manquant dans le table si on connaît tout les autres

Plus d'algèbre linéaire

e_1, \dots, e_n base de V f_1, \dots, f_m base de W $e_i \otimes f_j$ base de $V \otimes W$

$$M \in \text{GL}(V) \quad N \in \text{GL}(W)$$

$$M \otimes N \in \text{GL}(V \otimes W)$$

Proposition :

$$\text{tr}(M \otimes N) = (\text{tr } M)(\text{tr } N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\text{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left(\sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \text{tr } M \text{ tr } N$$

Définition

L'espace dual de V est $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ noté V^*

Si $M \in \text{GL}(V)$

$M^* \in \text{GL}(V^*)$

$$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$$

De même, si $\rho_i G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une repr. La repr dual est $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration : $g \in G$, $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$\implies \rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de 1

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire ρ est irréductible $\iff \rho^*$ est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* W$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f : V^* \otimes W &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto (v \mapsto \alpha(v)w) \end{aligned}$$

est linéaire

$$\begin{aligned} e_1^*, \dots, e_n^* &\text{ base de } V \\ w_1, \dots, w_m &\text{ base de } W \end{aligned}$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples : S_4 et A_4

Les classes de conjugaisons dans S_4 sont

$$\overbrace{(e)}^1, \overbrace{(12)}^2, \overbrace{(123)}^3, \overbrace{(1234)}^4, \overbrace{(12)(34)}^2$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés)

	1 e	2 (12)	3 (123)	4 (1234)	2 $(12)(34)$
χ_0	1	1	1	1	1
χ_{sym}	1	-1	1	-1	1
χ_{std}	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym} \otimes \text{std}}$	3	-1	0	1	-1
χ_4	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de S_4

Regardons la representation $\rho_?$ de dim 4

$$\rho_? : S_4 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que $\rho_?$ se décompose en $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$

$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$\begin{aligned} &= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1) \\ &= (3\,1\,0\,-1\,-1) \end{aligned}$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24} \left(3^2 + 6^2 + \cdots \right) = 1$$

Pour trouver $\text{di}(\rho_4)$

on utilise $|G| = \sum_{\rho \text{ irred}} \dim(\rho_i)^2$

$$23=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$$

$$d=2$$

On trouve les autres coeffs avec

$$0=\sum_{g \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g)$$

Calculons ρ_4

On a $\rho((12)(34))=I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34)))=2$$

M est conjugué à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyau $\text{Ker} \rho \subset G$

elle se factorise

ρ_4 ne se factorise pas

2024-02-08

Groupe de Lie (matriciel)

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un sous-groupe fermé

(La topologie sur $GL(n, \mathbb{C}) \subseteq M_n \mathbb{C}$

SI $M_n \in G$ et $M_n \rightarrow M \in GL(n, \mathbb{C})$ alors $M \in G$

En fait, tout sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$ est une sous-variété lisse (G a un espace tangent à chaque point, on peut décrire les fonctions définies sur G)

(contre)Exemple :

$\mathbb{Q}^* \subseteq \mathbb{C}$ n'est pas fermé.

Exemples

$GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C})$

...

Définition On dit qu'un groupe de Lie matriciel est connexe s'il existe un chemin $\gamma : [0 : 1] \rightarrow G$ avec $\gamma(0) = A$ $\gamma(1) = B$
 $\forall A, B \in G$

(il suffit de considérer $A = I$)

Exemple : $O(n)$ n'est pas connexe

$$A = I \in O(n) \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

S'il existait un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow O(n)$ t.q. $\gamma(0) = I$ et $\gamma(1) = B$

alors $\det \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $\det \circ \gamma(0) = 1$, $\det \circ \gamma(1) = -1$

G Groupe de Lie matriciel

G^0 Composante connexe de l'identité

Proposition :

$$G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe normal

Démonstration

$A, B \in G \implies \exists A(t), B(t)$ des chemins, $A(0) = B(0) = I, A(1) = A, B(1) = B$

On définit $\gamma(t) = A(t) \cdot B(t)$

$$\implies A \cdot B \in G^0$$

Pour l'inverse, on définit, $\gamma(t) = A(t)^{-1}$

On a $\gamma(0) = A(0)^{-1} = I^{-1} = I$

$$\gamma(1) = A(1)^{-1} = A^{-1}$$

$$\implies A^{-1} \in G^0$$

$$\therefore G^0 \subseteq G$$

est un sous groupe

Pour vérifier que G^0 est normal, il faut montrer que $\forall C \in G, A \in G^0$

$$CAC^{-1} \in G^0$$

On définit $\gamma(t) = CA(t)C^{-1}$

$$\gamma(0) = CA(0)C^{-1} = CIC^{-1} = I$$

$$\gamma(1) = CAC^{-1}$$

Définition Une homomorphisme de groupe de Lie est $f : G \rightarrow H$ qui est un homomorphisme de groupe continue. (automatiquement lisse)

Exemple : $\det : \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une homomorphisme de groupe de Lie car

1. $\det(AB) = \det A \det B$
2. continu car polynôme

Rappel

Pour $S \subset \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n$ une sous-variété. l'espace tangent en $p \in S$ est

$$T_p S = \left\{ \gamma'(0) \mid \begin{array}{l} \gamma : [-1, 1] \rightarrow S \\ \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ est une application lisse, la dérivé de f en p est une application linéaire

$$df_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

définie par :

$$df_p(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0}$$

pour γ chemin dans S_1 avec $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \mathbf{v}$

Calculons pour $\det : \text{GL}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ La dérivé au point $p = I \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$d(\det)|_I : T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow T_1 \mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = I + tX \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 1+ta & tb \\ tc & 1+td \end{pmatrix} (0) = X$$

$$T_I \text{GL}(2, \mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C})$$

$$(\det \circ \gamma)(t) = (1+ta)(1+td) - t^2 bc$$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} ((\det \circ \gamma)(t)) = a + d = \text{tr}(X) \in T_1(\mathbb{C}^*)$$

Conclusion

$$d(\det) \Big|_I (X) = \text{tr}(X)$$

Exemple :

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C}^* | z\bar{z} = 1\}$$

On veut déterminer $T_1(u_1)$

$$\gamma(t) = e^{itx} \quad \gamma'(t) = ix e^{itx} \quad \gamma'(0) = ix$$

$$T_{1(S')} = T_1(U_1) = i\mathbb{R}$$

Rappels

- Groupe de Lie matriciel $G \ni I \rightarrow$ sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$
- G est une sous-variété
- Exemples $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$, $SO(n)$, $SO(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(2n, \mathbb{R})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$ Groupe des matrice triangulaire superieur $(S)O(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{R}) | M^t I_{pq} M = I_{pq}\}$ $(S)U(p, q) = \{M \in GL(p+q, \mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}$
- G Connexe si $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow G$ avec $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$ (composantes connexe de I) est un sous-groupe normal exemple :

$$O(1, 1) = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | M^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

On résous le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :
 $O(2)$

Étant donné $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$df \Big|_I : T_I G \rightarrow T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement f .

Un voisinage arbitrairement petit autour de I engendre G

Attention

Pas tout les applications linéaires $L : T_I G \rightarrow T_I H$ sont la dérivé d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = df \Big|_I$$

Étant donnée $g \in G$, on définit la multiplication à gauche $L_g : G \rightarrow G$ c'est une application lisse mais

$$dL_g \Big|_I : T_I G \rightarrow T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par $g \in G$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \operatorname{Ad}(g) \Big|_I : T_I G &\rightarrow T_I G \\ X &\rightarrow gXg^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X \\ \operatorname{Ad}(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1} \end{aligned}$$

$$d \operatorname{Ad}(G) \Big|_I = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obtenir une condition sur $T_I G$ uniquement, on dérive $\operatorname{Ad}(f)$ par rapport à g en fixant X

$$\begin{aligned} G &\rightarrow T_I G \\ g &\mapsto gXg^{-1} \end{aligned}$$

pour dériver cette application on prend

$$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= I \\ \gamma'(0) &= U \in T_I G \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = [\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})']_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1} \\ &= YX - XY \in T_I G \end{aligned}$$

L'opération sur $T_I g$

$$[X, Y] = XY - YX$$

s'appelle le crochet

Comme le crochet est défini en termes de la multiplication dans G et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie $f : G \rightarrow H$ la dérivée $df|_I : T_I G \rightarrow T_I H$ satisfaisant $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$

En fait $L : T_I G \rightarrow T_I H$ est la dérivée d'un morphisme de groupe de Lie $\iff L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_I G$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

Définition : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel \mathfrak{g} complexe muni d'une application sur \mathbb{C}

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Exemple : Si G est une groupe de lie matriciel, $g = T_I G$ muni de $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de lie

Si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et $df|_I [X, Y] = [df|_I X, df|_I Y]$)

Exemple :

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \left. d \det(0) \right|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(n\mathbb{C}) \subseteq \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr} X = 0\}$$

En fait on a l'égalité

Rappels

G groupe de lie

$\mathfrak{g} = T_I G$ algèbre de Lie pour $[X, Y] = XY - YX$

En général, une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ satisfaisant

1. bilinéaire
2. antisymétrique
3. Jacobi

Exercice

1. Montrer que \mathbb{R}^3 muni du produit vectoriel \times est une algèbre de lie
2. Construire un isomorphisme entre (\mathbb{R}^3, \times) et $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$

tentative

1. On doit montrer que \times respecte les trois conditions

(a) $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} \times \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda a_2 + \lambda b_2 \\ \lambda a_3 + \lambda b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \lambda(\mathbf{x} \times \mathbf{a} + \mathbf{x} \times \mathbf{b})$$

L'application exponentielle

G groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_I G$ sont algèbre de Lie

Définition :

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

est l'unique application lisse satisfaisant

1. $\exp(0) = I$
2. $d\exp|_0 : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est l'application identité
3. $\forall X \in \mathfrak{g}$ l'application $t \rightarrow \exp(tX)$ est un homomorphisme de groupes

$$\exp(t+s)X = \exp tX + \exp sX$$

(l'existence et l'unicité sont à démontrer)

Proposition :

Pour $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = e^X$

Rappels sur l'exponentiation de matrices

1.

Proposition :

$$f : G \rightarrow H$$

est un morphisme de groupe de Lie alors

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{df|_I} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_g & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array} \right)$$

commute, c-à-d, $f \circ \exp_G = \exp_H \circ df|_I$

Conséquence :

Si $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$\implies i \circ \dots$$

tout à été effacé dasfefefwefeffsfefrgqp

Démonstration :

...

Représentation de groupe/algèbre de Lie

Définition

Une représentation de G est un morphisme $G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Une représentation de \mathfrak{g} est une morphisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

Exemple : Représentation adjointe

$$\mathrm{Ad} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

$$\text{où } \mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$$

on peut vérifier la linéarité et $\mathrm{Ad} = (\mathrm{Ad}g)(\mathrm{Ad}h)$

Rappels

...

Proposition : Soit $0 \neq V \in V_\beta$, alors $\{V, \rho(\gamma)v, \rho(y)^2v, \dots\}$ engendre V

Démonstration : On montre que $U = \langle v, \rho(y)v, \rho(y)^2v, \dots \rangle$ est stable pour $\rho(x), \rho(y), \rho(H)$

1. $\rho(H)(\rho(y)^m v) = (\beta - 2m) \rho(Y)^m c \in U$
2. $\rho(y)\rho(y)^m v = \rho(y)^{m+1}v \in U$
3. $\rho(x)\rho(y)^m v = ?$

On va montrer par récurrence que $\rho(x)\rho(y)^m v = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$

pour $m = 0$ $\rho(x)v = 0$ pour $m = 1$ $\rho(x)\rho(y)v = (\rho(H) + \rho(Y)\rho(x))v$

$$\rho(x)\rho(y)^{m+1}v = (\rho(H) + \rho(y)\rho(x))\rho(y)^m v$$

...

$$[(m+1)(\beta - m)\rho(y)^m v]$$

$\Rightarrow U \subseteq V$ est stable pour ρ comme ρ est irréductible, $U = V$

Conséquences

- $V_\alpha = 1$
- ρ est uniquement déterminé par $\beta = \max \text{sup}(\rho(H))$

De plus, comme V est de dimension finie, il existe m t.q. $\rho(y)^m v = 0$ et $\rho(y)^{m-1}v \neq 0$

$$0 = m(\beta - m + 1)\rho(y)^{m-1}v$$

$$\Rightarrow m(\beta - m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = m - 1 \quad \beta \in \mathbb{N}$$

Il y a au plus une représentation irréductible de dimension n et les espaces propres de $\rho(H)$ sont

$$V_{1-n}, V_{2-n}, \dots, V_{n-2}, V_{n-1}$$

On va montrer qu'ils existent

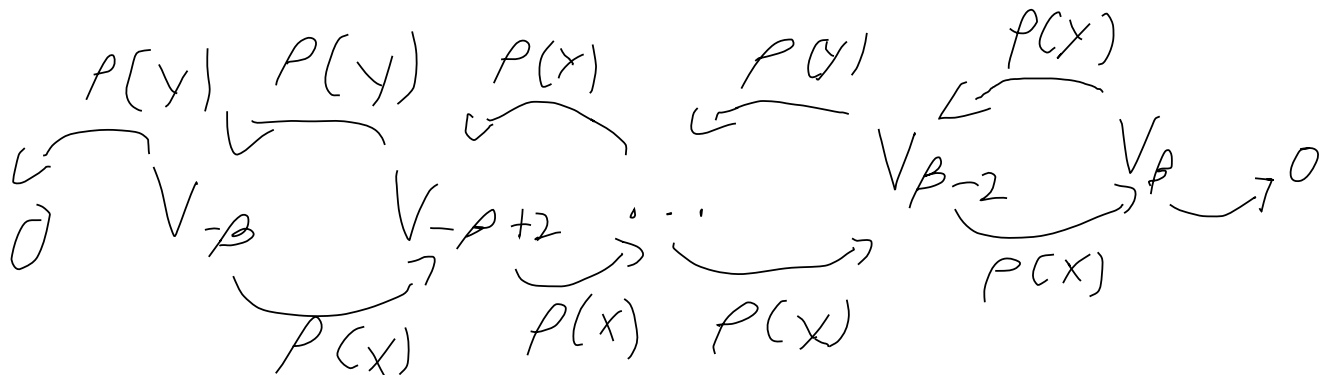


FIGURE 1 – ladder

Produit tensoriels de représentation d'algèbre de Lie

Rappel

$$\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i) \quad i \in \{1, 2\}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est définie par $\rho_1 \otimes \rho_2(g)(V_1 \otimes V_2) = \rho_1(g)v \otimes \rho_2(g)v_2$

Si G est un groupe de Lie \mathfrak{g} son algèbre de Lie

Calculons $d(\rho_1 \otimes \rho_2)|_{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{gl}(V_1 \otimes V_2)$

Soit $\gamma(t) \in G$, $\gamma(0) = I$, $\gamma'(0) = X \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 \otimes \rho_2) \gamma(t)(V_1 \otimes V_2) = \dots = \left(d \rho_1 \Big|_I (X) V_1 \right) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\dots)$$

Définition :

Si $\rho_i : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V_i)$ sont 2 représentation d'algèbre de Lie, alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ est définie par $(\rho_1 \otimes \rho_2) X (V_1 \otimes V_2)$

On a également $\text{sym}^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$, $\Lambda^n(\rho) \subseteq \rho^{\otimes n}$ sous-représentation comme pour G un groupe On introduit la notation

$$v_1 \cdot v_2 \cdots v_n := \text{Sym}^n(v_1 \otimes v_2 \cdots v_n) \in \text{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \wedge v_2 \cdots = \text{Alt}(v_1 \cdots)$$

Revenons à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

la représentation ???? est $i : \cdots$

$$i(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres $1, -1$

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus V_2$$

est la représentation irréductible de dimension 2

$$\text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1 \cdot e_1, e_1 \cdot e_2, e_2 \cdot e_2 \rangle$$

$$(\text{Sym}(i)(H))(e_1^2) = H^{\otimes 2}(e_1 \otimes e_1) = 2e_1^2$$

sur $e_1 \otimes e_2$ c'est 0 sur $e_2 \otimes e_2$ c'est $-2e_2^2$

$$\implies \text{sym}(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^{n-i}, e_2^i \rangle$$

Chacun est un vecteur propre de $\text{sym}(H)$ et

$$\text{sym}(H)(e_1^{n-1} \cdot e_2^i) = \left(H \underbrace{e_1 e_1 e_1 e_2^i}_{n_1} \right) + (e_1 H e_1 \cdots e_2^i) + \cdots$$

$$= \cdots = (n-2i)e_1^{n-i}e_2^i$$

Je vois pas

Exemple : Quelle est la d/composition de $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes \text{sym}^2(\mathbb{C}^2)$ en irréductibles ?

On calcule les valeurs propres de $\rho(H)$

pour $\text{sym}^2(\mathbb{C}^2) : -2, 0, 2$ pour $\text{sum}^2(\mathbb{C}^2) : -3, -1, 1$

Si $\rho_1(H)v = \lambda_1 v, \rho_2(H)u = \lambda_2 u$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2) H (v \otimes u) = \rho_1(H)v \otimes u + v \otimes \rho_2(H)u = \lambda_1 v \otimes u + v \otimes \lambda_2 u = (\lambda_1 + \lambda_2) (v \otimes u)$$

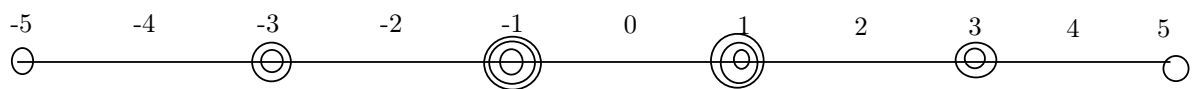


FIGURE 2 – valeurs propres

Rappels

Représentation irréductibles de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) = \langle H, X, Y \rangle$

$$V^{(n)} = \oplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & Y & & Y & & Y & & Y \\ & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\ -n & & -n+2 & & \cdots & & n-2 & & n \\ & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow \\ & X & & X & & X & & X \end{array}$$

Notation

Une Représentation est doit

$$\rho : g \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

ou bien une action

$$g \times V \rightarrow V$$

$$\forall Z \in g \quad v \mapsto Xv \quad \text{est linéaire}$$

\exists une unique représentation de dim n . On peut la construire comme $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C})$

Produit tensoriel de représentation d’algèbre de Lie,

V, W deux repr de g , $V \otimes W$ est une représentation avec $X(v \otimes w) = Xv \otimes w + v \otimes Xw$

Exemple :

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2))$$

$$\mathbb{C}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^3, e_1^2 e_2, e_1 e_2^2, e_2^3 \rangle$$

$$\Lambda^2(\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)) = \langle e_1^3 \wedge e_1^2 e_2, e_1^3 \wedge \cdots \rangle$$

Calculons les valeurs propres de H pour cette représentation

...

Représentation de $SL(2, \mathbb{C})$ irréductibles

Fait : Si G est connexe $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation est uniquement déterminée par la représentation

$$d\rho \Big|_I : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

$SL(2, \mathbb{C})$ est connexe. On connaît toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On peut les construire avec $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$

Conséquences : Les représentations $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$ sont toutes les représentations irréductibles de $SL(2, \mathbb{C})$

Exemple :

Calculons $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2)$ pour $SL(2, \mathbb{C})$

$$\text{Sym}^2(\mathbb{C}^2) = \langle e_1^2, e_1 e_2, e_2^2 \rangle$$

...

Représentation de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

Fait : $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ est une algèbre simple.

On veut imiter la stratégie utilisée pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Le sous-espace $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \right\}$ joue le rôle de la matrice H

remarquons que les matrices de \mathfrak{h} commutent entre elles et sont diagonalisables

Si $\rho : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$

Par préservation de la forme de Jordan $\forall H \in \mathfrak{h}$, $\rho(H)$ est diagonalisable

Rappel

Une famille de matrices diagonalisables qui commutent est simultanément diagonalisable c-à-d il existe une base dans laquelle elles sont toutes diagonales

$$\implies V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

décomposition en sous-espaces propres simultanés de \mathfrak{h}

On interprète α comme des fonctions $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ $\alpha(H)$ est la valeur propre de $H \in \mathfrak{h}$ sur le sous-espace V_{α}

$$\rho(H)v = \alpha(H)v \quad \forall H \in \mathfrak{h} \quad \forall v \in V_{\alpha}$$

α est linéaire

$$\alpha(aH_1 + bH_2)v = \rho(aH_1 + bH_2)v = a\rho(H_1)v + b\rho(H_2)v = a\alpha(H_1) + b\alpha(H_2)$$

Autrement dit, $\alpha \in h^*$

On doit comprendre $[\cdot, \cdot]$ sur $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

De manière équivalente, on doit comprendre

$$\begin{aligned} \text{ad} : g &\rightarrow \mathfrak{gl}(g) \\ \text{ad}(x)y &= [X, Y] \end{aligned}$$

Par la construction précédente, on peut découper g en sous-espaces propres de $\text{ad}(h)$

$$\text{ad} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots \begin{pmatrix} 0 & a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\alpha(H)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On viens de trouver un des 8 sous-espace propres, (trouvons les autres?)

Notons E_{ij} matrice avec un 1 en i, j est 0 ailleurs

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = \alpha(H)E_{1,2}$$

$$\text{on définit } L_i \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & 1_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} = a_i$$

$$\text{ad}(H)E_{1,2} = (L_1 - L_2)(H)E_{1,2}$$

$$\text{ad}(H)E_{1,3} = (L_1 - L_3)(H)E_{1,3}$$

$$\text{ad}(H)E_{2,1} = (L_2 - L_1)(H)E_{2,3}$$

$$2, 1$$

$$3, 1$$

$$3, 2$$

de plus $\text{ad}(H_1)H_2 = 0$ est de dimension 2

$$g = h^{???}$$

2024-02-29

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0 \right\}$$

où $\forall X \in \mathfrak{g}_{\alpha}, \forall H \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}(H)X = [H, X] = \alpha(H)X$$

exemple :

$$X = E_{1,2}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & v \end{pmatrix}, E_{1,2} \right] = (a - b)E_{1,2}$$

$$X \in \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \alpha \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = a - b$$

On définit $L_i \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} = i$

$$L_1, L_2, L_3 \in \mathfrak{h}^*$$

$$\alpha = L_1 - L_2$$

les α dans la décomposition $(*)$ s'appellent des racines de

$$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$$

La liste des racines et

$$L_1 - L_2, L_1 - L_3, \dots$$

dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, une racine est un nombre complexe car $\dim(\mathfrak{h}) = 1$. Les racines de

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

sont -2 et 2

Les vecteurs propres associés à une racine s'appellent des vecteurs de racine

$$E_{i,j}, i \neq j$$

est un vecteur de racine pour $L_i - L_j$

Supposons que $X \in g_\alpha$ et $Y \in g_\beta$ et $H \in h$

$$[H, [X, Y]] = [X, [H, Y]] + [Y, [X, H]] = [X, \beta(H)Y] - [Y, \alpha(H)X] = \beta(H)[X, Y] - \alpha(H)[Y, X] = (\alpha + \beta)(H)[X, Y]$$

Si X vecteur de racine α , Y vecteur de racine β alors $[X, Y]$ vecteur de racine $\alpha + \beta$

$\text{ad}(X)$ agit *par translation* de la racine de Y

$$[,] : g_\alpha \times g_\beta \rightarrow g_{\alpha+\beta}$$

Revenons à une représentation irréductible V de $\text{sl}(3\mathbb{C})$

$$\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(V)$$

On décompose $V = \bigoplus_\alpha V_\alpha$ où $\alpha \in h^*$ et $v \in V_\alpha$, $H \in h$

$$\implies H_v = \alpha(H)v$$

Les valeurs propres α s'appellent les racines de la représentation. Les vecteurs propres sont des vecteurs de poids

Une racine est donc un poids pour la représentation ad

soit $X \in g_\alpha$ et $v \in V_\beta$

$$H \cdot (Xv) = [H, X] \cdot v + X \cdot (H \cdot v) = \alpha(H)Xv + C(\beta(H)v) = (\alpha + \beta)(H)(Xv)$$

$X \in g_\alpha$ agit par translation de α sur le poids β de V

Conséquence : Pour V irréductible, tous les poids diffèrent d'une combinaison entière de racine de $L_i - L_j$

Le réseau Λ_R engendré par les racines est appelé réseau des racines.

Exemple : $V \in \mathbb{C}^3$ et $\rho : \text{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \text{gl}(\mathbb{C}^3)$ l'inclusion e_1, e_2, e_3 des vecteurs propres de poids pour les poids l_1, l_2, l_3

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L_1 \left(\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En effet, $L_2 = L = 1 + (L_2 - L_1)$

$$L_3 = L_1 + (L_3 - L_1)$$

Exemple 2 :

$$\Lambda^2(\mathbb{C}^3) = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} (e_1 \wedge e_2) = ae_1 \wedge e_2 + be_1 \wedge e_3 + ce_2 \wedge e_3 = \dots = -L_3 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$

...

Pour imiter ce qu'on a fait dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ on cherche un poids *maximal*. On définit la maximalité. On fixe

$$H_0 \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$$

et on considère l'ordre partiel sur \mathfrak{h}^*

$$\alpha < \beta \iff \operatorname{Re}(\beta(H_0) - \alpha(H_0)) > 0$$

En choisissant $a > b > c$, les racines $L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3$ sont positives alors que les trois autres sont négatives

Lemme : Pour V une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$, il existe un vecteur de poids $v \in V_\alpha$, $v \neq 0$ t.q. $E_{1,2}(v) = 0, E_{1,3}(v) = 0, E_{2,3}(v) = 0$

Démonstration : Soit α maximal parmi les poids t.q. $V_\alpha \neq \{0\}$ par l'ordre $<$ α existe car V est de dimension finie. Soit $v \in V_\alpha$. Alors, $E_{1,2} \cdot v \in V_{\alpha+L_1-L_2}$

Si $E_{1,2}v \neq 0$ alors $\alpha + L_1 + L_2 > \alpha$ et $v_\alpha \neq 0$ contredit la maximalité

De même $E_{1,3}v = 0, E_{2,3}v = 0$

ON appelle v un vecteur de plus haut poids ou vecteur maximal

Proposition : V est engendré par v et toutes les images de v par toutes les combinaison possibles de $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration : Soit W le sous-espace engendré par V et toutes ses images par des combinaisons de $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Il suffit de montrer que W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$

1. W est stable par \mathfrak{h} (W est engendré par des espaces de poids)
2. W est stable par $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$ par définition
3. Il reste à montrer que W est stable par $E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,2}$. Il suffit de le montrer pour $E_{1,2}$ et $E_{2,3}$ car $E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$

À suivre...

2024-03-11

Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ osti, je suis déjà done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :

Si $v \in V_{\alpha}, C \in g_{\beta}$ β -racine, α -poids

alors $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ t.q. $a_0 > b_0 > c_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids v qui satisfait

- $v \in V_{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$
- $E_{23}v = E_{13}v = E_{31}v = 0$

Proposition :

V est engendré par v (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

W le sous-espace engendré par v et tout les mots possibles en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$ appliqué à V

$$W = \langle v, E_{21}v, E_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \dots \rangle$$

On veut montrer que W est $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ -invariant

Partie facile, W est invariant par \mathfrak{h} et par E_{21}, E_{31}, E_{32}

Reste à montrer que W est invariant par $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$, il suffit donc de vérifier $E_{1,2}W \subseteq W$ et $E_{2,3}W \subseteq W$

Posons W_n le sous-espace engendré par v et tout les mots en E_{21}, E_{32} de la longueur $\leq n$ appliqué à v

Par récurrence, on montre $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$, $E_{2,3} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$

Soit $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour } w' \in W_{n-1}$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1.

$$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12}) w'$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &\in g_{L_1-L_2} \\
E_{21} &\in G_{L_2-L_1} \\
\implies [E_{1,2}, E_{21}] &\in \mathfrak{h} = g_e
\end{aligned}$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,3} \cdot w &= E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w' \\
&= \left(\underbrace{[E_{23}, E_{21}] + E_{2,1} + E_{23}}_0 \right) \cdot w' \\
&= E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')}_{\substack{W_{n-2} \\ W_{n-1}}}
\end{aligned}$$

2. même chose

Puisque $W = \bigcup_n W_n$, W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$ ■

De la preuve, on déduit :

Pour V une représentation (pas nécessairement irréductible), si v est un vecteur de plus haut poids alors le sous espace engendré par v est ses images par E_{21} et $E_{3,2}$ est une sous représentation irréductible

Il existe un n pour lequel $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$ mais $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation : $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$ est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre α et $\alpha + m(L_2 - L_1)$)

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} E_{21} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y \end{array} &
\begin{array}{c} E_{12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X \end{array} &
\begin{array}{c} E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H \end{array}
\end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur V (par nécessairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour H dans une représentation de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$ sont entières et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de " H " = $E_{11} - E_{22}$ sont $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \dots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \dots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre α et $\alpha + n(L_2 - L_1)$ est symétrique par rapport à la droite $\beta(H_{12}) = 0$

Posons $\alpha + \alpha(J_{1,2})(L_2 - L_1) = \alpha_2$ et $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a $E_{21} \cdot v_2 = 0$, $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$, $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

v_2 est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets α et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2eme heure

$$\text{sym}^n(\mathbb{C}^3) = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k \mid i + j + k = n \right\rangle$$

les poids sont $H \cdot \left(e_1^i e_2^j e_3^k \right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H)e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est nL

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

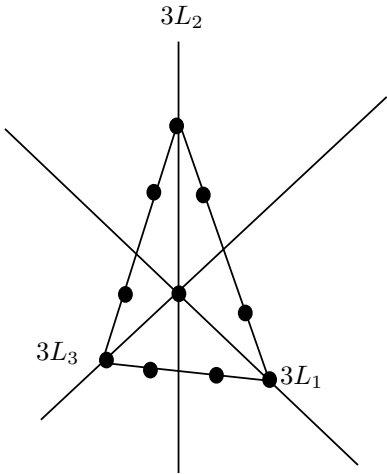


FIGURE 1 – triangle

$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3)$ par le même argument a pour plus haut poids nL_3 est est irréductible

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$ est un vecteur de plus haut poids.

Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (uv) \otimes \alpha &\mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) &= \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha)) \\ &= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x))\end{aligned}$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha))$$

$\text{Her}(\varphi) \subseteq \text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$ est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \text{Ker} \varphi (\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_1)e_1)$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_2) = 2L_1 - L_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans $\text{Ker}(\varphi)$, $\dim(V_{L_1}) = 2$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que V_{L_1} est engendré par $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$ et $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*)$

$$\begin{aligned}E_{32}E_{21}(e_1^2 \otimes e_3^*) &= E_{32}((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)) \\ &= E_{32}(2e_1e_2 \otimes e_3^*)\end{aligned}$$

$$= 2(e_1 e_3 \otimes e_3^* + e_1 e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32} \left(e_1^2 \otimes e_3^* \right)$$

$$= E_{21}le_0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21} \left(e_1^2 \otimes e_2^* \right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b \mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids $aL_1 - bL_3$ On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphisme

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \rightarrow \mathrm{Sym}^{a-1} \mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$

Rappels

Les représentation irréductibles de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ sont en bijection avec $\{(a, b) \mid a, b \geq 0 \text{ entiers}\}$

$$\rightarrow \Gamma_{a,b}$$

dont le plus haut poids est $aL_1 - bL_3$

$$\Gamma_{a,b} \subseteq \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3)$$

$$\Gamma_{a,b} = \text{Ker}(\varphi)$$

$$\varphi : \text{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \text{Sym}^b(\mathbb{C}^3) \rightarrow \text{Sym}^{a+b}(\mathbb{C}^3)$$

Recette pour analyser les représentation d'une algèbre de Lie semi-simple

Rappel

Simple : ad_X est irréductible \iff pas d'idéal non-trivial

Semi-simple : Somme direct d'algèbre simple

Étape 1 : Identifier une sous algèbre $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ abélienne diagonalisable maximale. On appelle \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan

On a vu que si une algèbre est diagonalisable dans une représentation, elle l'est dans toutes les représentations. Une algèbre diagonalisable est une algèbre qu'on peut montrer diagonalisable dans au moins une représentation.

Attention

Ex :

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

\mathfrak{h} n'est pas nécessairement diagonale

truc : choisir une base jacobienne Dans une base t.q. la forme bilinéaire est donnée par la matrice $J =$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \text{ est donné par } X^t J + JX = 0$$

...

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & -b \\ 0 & -c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

ici, on peut prendre $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & & \\ & & \\ & & -a \end{pmatrix} \right\}$

Étape 2 : Décomposer \mathfrak{g} selon les poids (racines) de sa représentation adjointe

$$g = h \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} g_{\alpha} \right)$$

où $R \subseteq h^*$ est t.q. $g_{\alpha} \neq \{0\}$

$$g_{\alpha} = \{X \in g | \text{ad}(H)X = \alpha(H)X \forall H \in h\} = \{X \in g | [H, X] = \alpha(H)X \forall H \in h\}$$

Faits :

- i) $\dim(g_{\alpha}) = 1 \forall \alpha \in R$
- ii) R engendre un réseau $\Lambda_R \subseteq h^*$ de rang égal à $\dim(h^*)$
- iii) $R = -R$ (Si α est une racine $-\alpha$ l'est aussi) Une représentation V va se décomposer en $V = \bigoplus V_{\alpha}, \alpha \in h^*$

Les vecteurs de racines, $X \in g_x$ agissent par translation sur les V_{β}

$$X : V_{\beta} \rightarrow V_{\alpha+\beta}$$

Si V est irréductible, tout les poids sont congrus modulo Λ_R

Étape 3 : Pour chaque racine, on va identifier une sous-algèbre $\mathfrak{s}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

on sait que $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \subseteq h$

en fait $\mathfrak{s}_{\alpha} = g_{\alpha} \oplus g_{-\alpha} \oplus [g_{\alpha}, g_{-\alpha}]$ est aussi un sous-algèbre de g isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

On trouve $X_{\alpha} \in g_{\alpha}, Y_{\alpha} \in g_{-\alpha}$ t.q. $H_{\alpha} = [X_{\alpha}, Y_{\alpha}]$

on a $[H_{\alpha}, X_{\alpha}] = 2X_{\alpha}$ on a $[H_{\alpha}, Y_{\alpha}] = 2Y_{\alpha}$

Toujours possible car

- i) $[g_{\alpha}, g_{-\alpha}] \neq 0$
- ii) $[[g_{\alpha}, g_{-\alpha}], g_{\alpha}] \neq 0$

Étape 4 : Utiliser l'intégralité des valeurs propres de H_{α}

Pour tout poids β d'une représentation de g

$$\beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}$$

On définit une autre réseau, (le réseau des poids) $\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$

Si $\beta_1, \beta_2 \in \Lambda_W$ dans $(\beta_1 + \beta_2)(H_{\alpha}) = \beta_1(H_{\alpha}) + \beta_2(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies \beta_1 + \beta_2 \in \Lambda_W$

et $-\beta_1(H_{\alpha}) \in \mathbb{Z} \implies -\beta_1 \in \Lambda_W$

En fait, $\Lambda_R \subseteq \Lambda_W$

Étape 5 : Utiliser la symétrie par rapport à 0 des v.p. de H_α

On introduit une réflexion pour chaque $\alpha \in R$, noté W_α , $W_\alpha : h^* \rightarrow h^*$

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle$$

groupe engendré par les W_α qui s'appelle Groupe de Weyl

Pour une représentation $V = \oplus V_\beta$ on peut regrouper les V_β en classes modulo α

$$V = \oplus V_{[\beta]}$$

$$\text{où } V_{[\beta]} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\alpha+n\beta}$$

les poids dans $V_{[\beta]}$ sont $\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + n\alpha$ où $n = -\beta(H_\alpha)$

Conclusion

l'ensemble des poids V est \mathcal{W} -invariant

Étape 6 : Faire un dessin

Il existe un produit bilinéaire sur \mathfrak{g} appelé forme de Killing qui est défini positif sur le sous-espace réel engendré par les H_α

donne un produit scalaire sur le sous-espace réel engendré par R dans h^* . Pour ce produit, W_α est une réflexion euclidienne

Étape 7 : Choisir une direction dans h^* . C'est-à-dire une forme linéaire l sur h^*

$$l : h^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } L(\alpha) \neq 0 \text{ si } \alpha \in R$$

On décompose $R = R^+ \cup R^-$ en racine positives et négatives

On dit que $v \in V$ est un vecteur de plus haut poids pour g si $Xv = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R^+$

Proposition :

- (i) Toute représentation de g possède un vecteur de plus haut poids
- (ii) V et toutes ses images obtenus en itérant des applications de $X_\alpha, \alpha \in R^-$ engendrent une sous-représentation $W \subseteq V$ irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet un unique vecteur de plus haut poids (à scalaire près)

Manque de Batterie !

Rappels

$h \subseteq g$: sous algèbre de Cartan

$$g = h \bigoplus_{\alpha \in R} g_\alpha \quad R \subseteq h^*$$

$$\mathfrak{s}_\alpha = \left\langle \underbrace{X_\alpha}_{\in g_\alpha}, \underbrace{Y_\alpha}_{\in g_{-\alpha}}, \underbrace{H_\alpha}_{\in h} \right\rangle \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$$

V -représentation de \mathfrak{g}

$$V = \bigoplus V_\alpha$$

$$\Lambda_W = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in R\}$$

$$\Lambda_R = \mathbb{Z}R \subseteq \Lambda_W$$

Réflexion dans une racine α

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

$$\mathcal{W} = \langle W_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \text{ groupe de Weyl}$$

les poids de V sont stables par \mathcal{W}

On fixe $\ell : h^* \rightarrow \mathbb{R}$

...

Proposition :

- (i) Toute représentation a un vecteur de plus haut poids
- (ii) Les sous-espace $W \subseteq V$ engendré par V et applications successive de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in R^-}$ et une sous représentation irréductible
- (iii) Toute représentation irréductible admet une unique vecteur de plus haut poids

Démonstration :

- (i) Soit α maximal parmi les $V_\alpha \neq \{0\}$ pour l'ordre partiel

$$\alpha > \beta$$

ssi $\ell(\alpha) > \ell(\beta)$ et soit $v \in V_\alpha$

S'il existe $X \in \mathfrak{g}_\beta$ avec $\beta \in R^+$ et $X \cdot v \neq 0$ alors $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$ et $\ell(\alpha+\beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) > \ell(\alpha)$ considérant la maximalité

Parmi les racines de R^+ on dit que $\alpha \in R^+$ est une racine simple s'il n'existe pas de $\beta_1, \beta_2 \in R^+$ t.q. $\alpha = \beta_1 + \beta_2$

Lemme : Si α, β sont simples alors $\alpha - \beta$ et $\beta - \alpha$ ne sont pas des racines

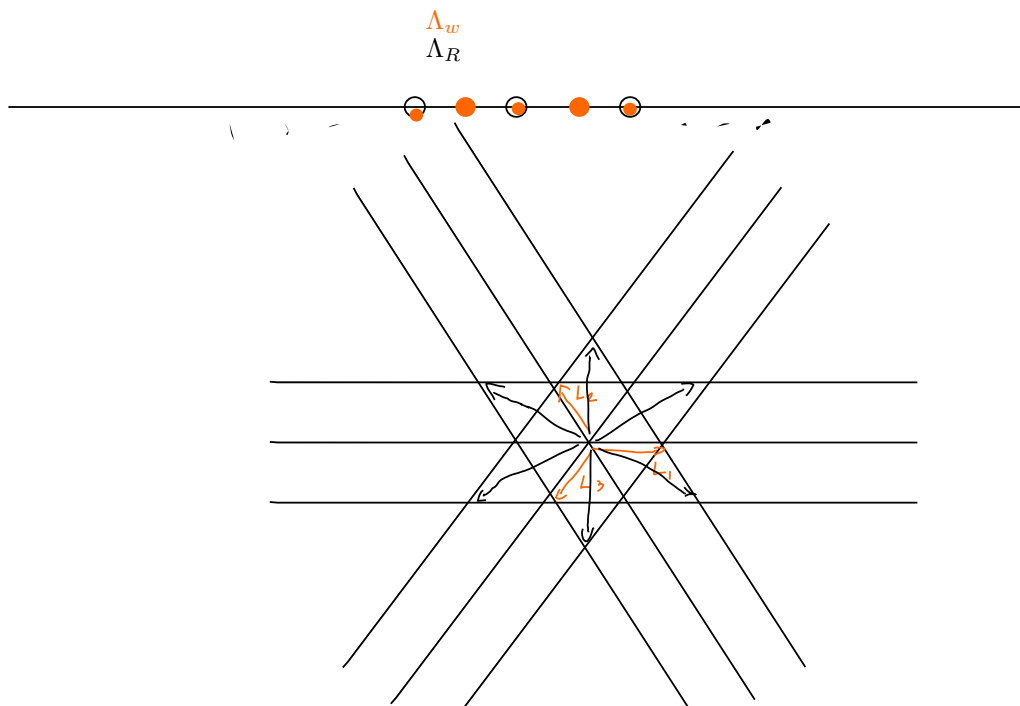


FIGURE 1 – Resaux

Dém :

...

(ii) W est aussi engendré par V et ses images successives par $\{X_{-\alpha}\}_{\alpha \in S}, S \subseteq R^+ : \text{ racins simples}$

- W est stable par $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in R^-}$ - W est stable par $H \in \mathfrak{h}$

Reste à montrer que W est stable par $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in S}$

$W_n \subseteq W$ sous-espace où on applique des monts de longueur $\leq n$

Par récurrence on montre que $X_{\alpha}W_n \subseteq W_n \quad \alpha \in S$

Soit $u \in W_n$ un générateur

$$\Rightarrow u = X_{\beta}u' \quad \text{où} \quad u' \in W_{n-1} \\ -\beta \in S$$

Soit

$$X_{\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \in S$$

$$\text{Alors } X_{\alpha}u = X_{\alpha}X_{\beta}u' = (X_{\beta}X_{\alpha} + [X_{\alpha}, X_{\beta}])u'$$

$$= X_{\beta}X_{\alpha}u' + [X_{\alpha}, X_{\beta}]u'$$

Étape 8 :

Classifier les représentations irréductibles

Dans le sous-espace réel de h^* engendré par R , on note $\mathcal{C} = \{\beta \mid \beta(H_\alpha) \geq 0 \forall \alpha \in R\}$

On appelle cela une chambre de Weyl

Théorème :

Pour tout poids $\alpha \in \mathcal{C} \cap \Lambda_W$ il existe une unique représentation irréductible de \mathfrak{g} ayant α comme plus haut poids.

On obtiens une bijection entre les représentations irréductibles de \mathfrak{g} et $\mathcal{C} \cap \Lambda_W$

Démonstration : ON démontre l'unicité seulement

Soient U, V deux représentations irréductibles ayant α comme plus haut poids. Soient $u \in U_\alpha, v \in V_\alpha$ comme plus haut poids. Alors $(u, v) \in U \oplus V$ est un vecteur de plus haut poids α dans $U \oplus V$

$\implies (u, v)$ engendre un sous-espace

$$W \subseteq U \oplus V$$

irréductible

$$\pi_u : W \rightarrow U$$

$$\pi_v : W \rightarrow V$$

sont des isomorphismes de représentation (par le lemme de Schur)

$$\implies U \cong V$$

La forme de Killing

On définit $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$

Par la formule $B(x, y) = \text{tr}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)$

Observation :

$$X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$$

avec $\beta \neq \pm\alpha$

Alors, pour tout $Z \in \mathfrak{g}_\gamma$

on a $(\text{ad}X \circ \text{ad}Y)(Z)$

$$= [X, [Y, Z]] \in \mathfrak{g}_{\gamma+\alpha+\beta} \neq \mathfrak{g}_\gamma$$

En particulier $[X, [Y, Z]]$ n'a pas de composante en Z

$$\implies B(X, Y) = 0$$

Autrement dit $g_\alpha \perp g_\beta$ si $\beta \neq -\alpha$

La décomposition $g = h \oplus (\bigoplus_{\alpha \in R^+} (g_\alpha \oplus g_{-\alpha}))$

est orthogonale pour B

Si $X, Y \in h$ alors $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$(\text{ad} X \circ \text{ad} Y)(Z) = [X, [Y, Z]] = \alpha(Y)[X, Z] = \alpha(X)\alpha(Y)Z$$

$$\implies \text{tr}(\text{ad} X \text{ad} Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X)\alpha(Y)$$

sur le sous-espace réel engendré par les H_α

B est définie positive

$$B(H_\alpha, H_\beta) = \underbrace{\sum_{\gamma \in R} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta)}_{\in \mathbb{Z}}$$

si $H \in \mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle_{\alpha \in R}$

alors $B(H, H) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H)^2 \geq 0$

si $B(H, H) = 0$

$\alpha(H) = 0 \forall \alpha \in R$

$$H = 0$$

car R engendre h^*

Prop : $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$

Démonstration :

...

Proposition : si g est simple alors B est non dégénéré

(rappel : B est dégénérée si $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$ $\text{Ker}(B) = \{X \in g \mid B(x, y) = 0 \forall y \in g\}$)

Démonstration : Supposons qu'il existe $X \in B, X \neq 0$

Alorsm pour tout Y et tout $Z \in g$

$$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]) = 0$$

$$\implies [X, Y] \in \ker B$$

$$\implies B \subseteq g$$

est un ideal

Rappel

Forme de Killing

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(X, Y) \mapsto \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

Propriétés : α, β avec $\beta \neq \alpha$ alors si $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta, B(X, Y) = 0$ (autrement dit, si $\beta \neq \alpha, \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_{-\alpha}$)

cas spéciaux

1. si $\alpha = 0, \beta \neq 0, \mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\beta$
2. si $\alpha = \beta \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha$ est isotrope ($\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\alpha$)

Si on restreint à $\mathfrak{h} (X, Y \in \mathfrak{h})$

$$B(X, Y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(X) \alpha(Y)$$

\implies sur $\mathbb{R} \langle H_\alpha \rangle, B$ est défini positive (non-dégénéré)

Rappel d'algèbre linéaire

V espace vectoriel, b forme bilinéaire symétrique

$$\varphi_b : V \rightarrow V^*$$

$$v \mapsto b(v, -)$$

b est non dégénéré $\iff \varphi_b$ est un isomorphisme

On définit la forme bilinéaire duale de b, b^* donné par

$$b^*(\alpha, \beta) = b(\varphi_b^{-1}(\alpha), \varphi_b^{-1}(\beta))$$

Autrement dit, si $\alpha = b(u, -), \beta = b(v, -)$ alors $b^*(\alpha, \beta) = b(u, v) = \alpha(v) = \beta(u)$

Proposition : Si $\alpha(H) = 0 (\alpha \in R)$ alors $B(H, H_\alpha) = 0$

Autrement dit $H_\alpha^\perp = \text{Ker}(\alpha)$

Démonstration :

$$H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$$

Supposons $\alpha(H) = 0$

$$B(H, H_\alpha) = B(H, [X_\alpha, Y_\alpha]) = B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H) B(X_\alpha, Y_\alpha) = 0$$

Corollaire :

Une racine $\alpha \in R$ est orthogonale à l'hyperplan

$$\Omega_\alpha = \{\beta \in h^* | \beta(H_\alpha) = 0\}$$

Démonstration. Soit $\beta \in \Omega_\alpha$

$$\implies \beta(H_\alpha) = 0$$

$$\exists X, Y \in \mathfrak{h} \text{ t.q. } \alpha = B(X, -), \beta = B(Y, -)$$

$$0 = \beta(H_\alpha) = B(Y, H_\alpha)$$

$$\begin{aligned} Y &\in H_\alpha^\perp \\ \alpha(Y) = 0 &= B(X, Y) = B(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

□

Proposition :

$$\varphi_B^{-1}(\alpha) = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha$$

$$\varphi_B(H_\alpha) = \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha$$

$$\text{où } \varphi_\beta(H) = B(H, -)$$

Démonstration : Par définition, si $\varphi_B^{-1}(\alpha) = T_\alpha$

$$B(T_\alpha, -) = \alpha(-)$$

$$\text{n a } \forall H \in \mathfrak{h},$$

$$B(H_\alpha, H) = B([X_\alpha, Y_\alpha], H) = B(X_\alpha, [Y_\alpha, H]) = B(X_\alpha, -[H, Y_\alpha]) = B(X_\alpha, -(-\alpha(H))Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, Y_\alpha)$$

$$\text{De plus, } B(H_\alpha, H_\alpha) = \alpha(H_\alpha)B(X_\alpha, Y_\alpha) = 2B(X_\alpha, Y_\alpha)$$

$$\implies B(H_\alpha, H) = \alpha(H) \frac{B(H_\alpha, H_\alpha)}{2}$$

$$\implies B\left(\frac{2}{B(H, H_\alpha)} H_\alpha, H\right) = \alpha(H)$$

$$\implies T_\alpha = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)}$$

2) exercice !

ON peut donc réécrire les générateurs du groupe de Weyl

$$W_\alpha(\beta) = \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha = \beta - 2\frac{B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}\alpha$$

Réflexion dans l'hyperplan α^\perp

Exemple :

Calculons B sur $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

$$\text{ad} : \mathfrak{sl}(2\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$$

$$H \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(dans la base H, X, Y)

$$B(H, H) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}^2 \right) = 8$$

$$B(H, X) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(X, X) = B(Y, Y) = 0$$

$$B(X, Y) = \text{tr} \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots \\ \dots & 2 & \dots \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

B sur $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$B(H_1, H_1) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 12$$

$$B(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H_1)\alpha(H_2) = 2[2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 + -1 \cdot 2] = 2 \cdot -3 = -6$$

$$B(H_2, H_2) = 12$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définie positive

On peut alors vérifier que les racines sont orthogonales à leur plans de réflexion, $L_1 - L_2$ est la racine qui pointe vers le haut (comme on le dessine habituellement). En se fiant au dessin habituel, cette racine devrait être orthogonale à L_1 .

Rappel d'algèbre linéaire

si b est donné par une matrice, $b(u, v) = u^t b v$

$$\varphi_b = V \mapsto V^*$$

$$V \mapsto kb$$

$$b(u, v) = u^t b v = b^*(\alpha^t b, v^t b) = u^t b (b^*)^t v \implies b^t = (b^t)^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

La base duale de H_1, H_2 est $L_1, -L_3$ la matrice dans cette base est $\frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

On calcule $B(L_1, L_2 - L_3) = B(L_1, -L_1 + 2(-L_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

jazz hands

On a également

$$B(L_2 - L_3, L_2 - L_3) = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{108} \begin{pmatrix} 0 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$$

$$\implies \|L_2 - L_3\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Corollaire de

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}$$

Si α, β deux racines alors

$$\frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

Classification des algèbres de Lie simples complexes

soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ sous algèbre de Cartan.

Notons \mathbb{E} le sous-espace euclidien de \mathfrak{h}^* engendré par R munie de B^* qui (dual de Killing) qu'on va noter $(\ , \)$

$$B(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$$

On

— R est finie et engendre \mathbb{E}

— ...