2022-35-09

Géométrie de Kerr

La géométrie de Kerr est celle d'un *objet* tournant uniformément.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 &= g_{tt}\mathrm{d}t^2 + g_{rr}\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\mathrm{d}\varphi^2 + 2g_{t\varphi}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&= \left(g_{tt} - \frac{g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi}\varphi}\right)\mathrm{d}t^2 + g_{rr}\mathrm{d}r^2 + g_{\theta\theta}\mathrm{d}\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\left(\mathrm{d}\varphi^2 - \underbrace{\omega}_{-\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}}\mathrm{d}t\right)^2
\end{aligned}
$$

La métrique est indépendante de t et φ

$$
\begin{aligned}
p_t = k = g_{tt}\dot{t} = g_{t\varphi}\dot{\varphi} \\
p_\varphi = h = g_{t\varphi}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

Entraînement des repères

$$h = 0 \to \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Roy Kerr à dit

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{\gamma r_s}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{2arr_s\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2 - \left[r^2 - a^2\frac{a^2rr_s\sin^2\theta}{\rho^2}\right]\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^{2\theta} \qquad \delta r^2 + a^2 - rr_s$$

Cas limite : $a \to 0$: On retrouve la métrique de Schwarzschild.

$$Ma = \text{moment cinétique de l'objet}$$

Autre cas limite $r_s \to 0$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2}\mathrm{d}r^2 - p^2\mathrm{d}\theta^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2 - \left(r^2 - r^a\right)\sin^{2\theta}\mathrm{d}\varphi$$

$$\Delta = r^2 + a^2$$

Ces coordonnées décrivent un espace temps plat. Ce sont les coordonnées Boyer–Lindquist

$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

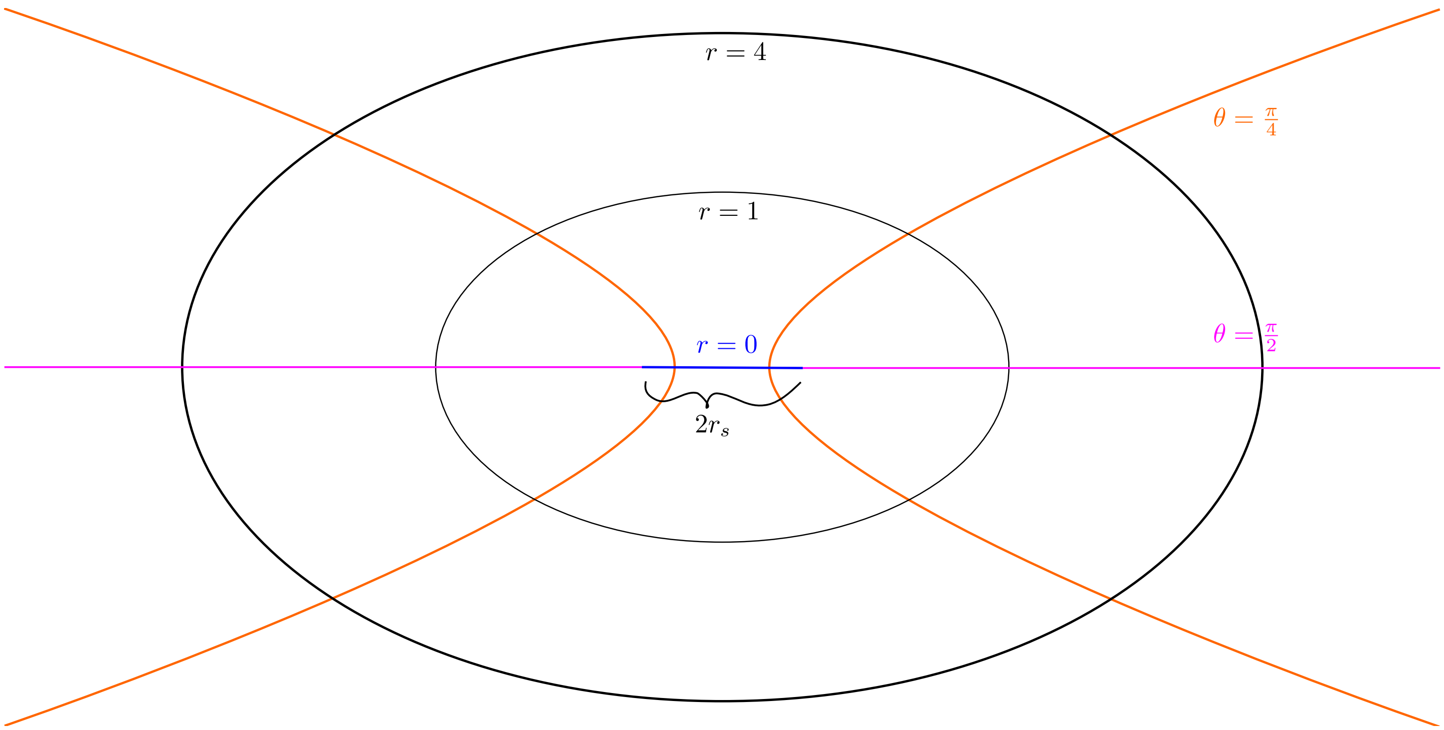

Figure 1 – Boyer–Lindquist

Singularités intrinsèques $\rho = 0 \to r = 0 \qquad \theta = \frac{1}{2}$

Pour être immobile, on doit avoir

$$u^i = \left(\dot{t}, 0, 0, 0\right)$$

$$\implies g_{tt}\dot{t}^2 = 1 \implies g_{tt} > 0$$

Lorsque g_{tt} deviens négatif, donc, être immobile deviens impossible.

Il est possible d'extraire de l'énérgie d'un trou noir en rotation.

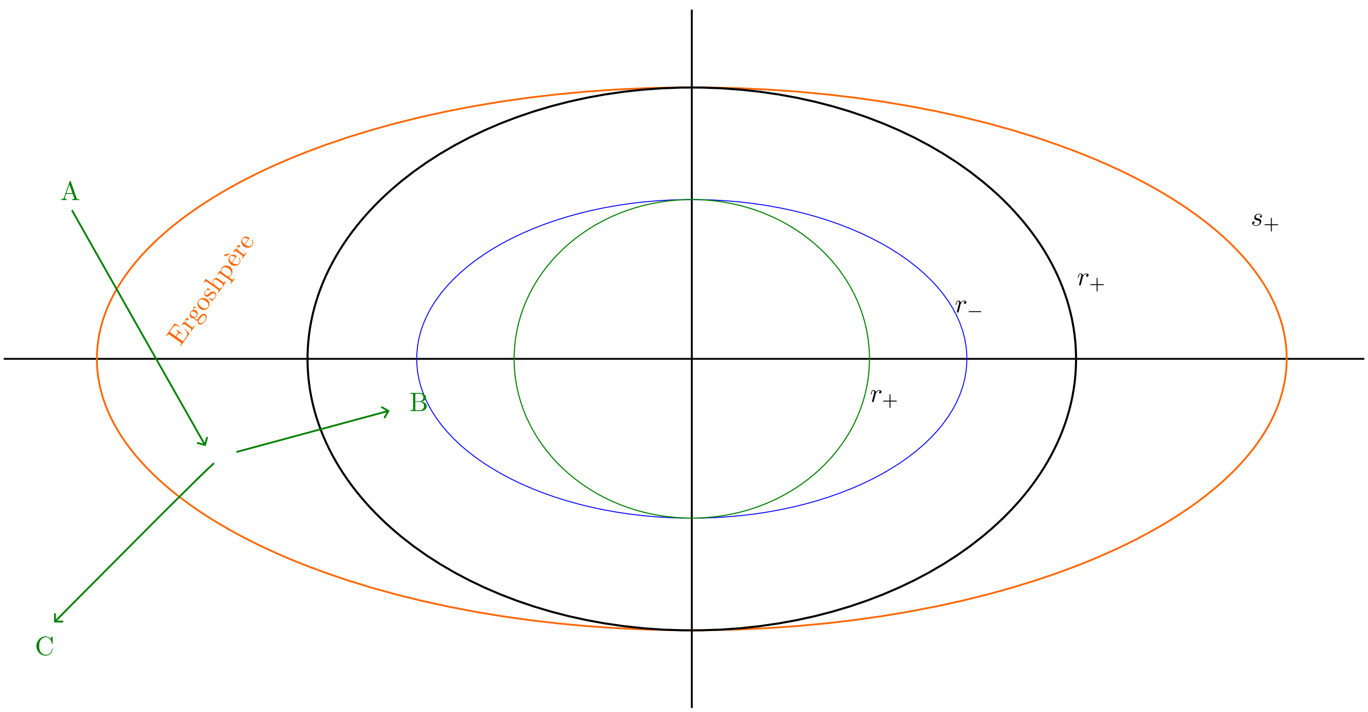

FIGURE 2 – surfaces. Le processus de d'extraction d'énérgie est représenté en vert (Penrose)