Rappels

Les symbols de Christoffel sont intrinsèques

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uu}\\ \Gamma^u_{uu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_u/2\\ F_u/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{uv}\\ \Gamma^v_{uv}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_v/2\\ G_u/2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma^u_{vv}\\ \Gamma^u_{vv}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_v - G_u/2\\ G_v/2\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} \cdot M_{II}$$

$$M_I = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} = (p_u|p_v)^t(p_u|p_v)$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{uu}\cdot n & p_{uv}\cdot n\\ p_{vu}\cdot n & p_{vv}\cdot n\end{pmatrix}$$

Les équations de Gauss-Cedazzi (que je ne réécrirais pas ici !)

Théorème fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Soit $p, p^* : U \to \mathbb{R}^3$ deux cartes de surfaces. Alors $I = I^*$ et $II = II^*$ ssi $\exists$ une isométrie directe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $p^* = T \circ p$

$(\Longleftarrow)$

Écrivons $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$

$$p^*_u = (T \circ p)_u = (Ap + b)_u$$
$$p^*_v = Ap_v$$

Comme A est orthogonale,

$$Ap_u \times Ap_v = A(p_u \times p_v)$$

$$n^* = \frac{p^*_u \times p^*_v}{\|p^*_u \times p^*_v\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|A(p_u \times p_v)\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|p_u \times p_v\|} = A \cdot n$$

$$E^* = p^*_u \cdot^*_u = Ap_u \cdot Ap_u = p_u \cdot p_u = E$$

même chose pour F et $G \implies I = I^*$

On a

$$p^*_{uu} = (Ap_u)_u = Ap_uu$$
$$p^*_{uv} = Ap_{uv}$$
$$p^*_{vv} = Ap_vv$$

$\implies L^* = n^* \cdot p^*_{uu} = (An) \cdot (Ap_uu) = n \cdot p_{uu} = L$, de même pour M et N

$$\implies II = II^*$$

$(\implies)$

Fixons $u_0 \in U$

Soit T l'isométrie $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ t.q. $T(p(u_0)) = p^*(u_0)$

$$A \cdot p_u\Big|_{u_0} = p^*_u\Big|_{u_0}$$
$$A \cdot p_v\Big|_{u_o} = p^*_v\Big|_{u_0}$$
$$A \cdot n\Big|_{u_0} = n^*\Big|_{u_0}$$

Si e, f, g e^*, f^*, g^* sont deux bases de $\mathbb{R}^3$ avec les mêmes produits scalaires entre les vecteur de base, alors $\exists A$ orthogonale t.q. $A : e \to e^*, \cdots$

Définissons $\tilde{p} = T \circ p$ et montrons que $\tilde{p} = p^*$

Soint $\mathbf{u} \in U$ quelquonque et : $[0,1] \to U$ un chemin t.q. $\gamma(0) = \mathbf{u}_0$ et $\gamma(1) = \mathbf{u}$

Considérons la la famille de bases de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)} \qquad \tilde{p}_v\Big|_{\gamma(t)} \qquad \tilde{n}\Big|_{\gamma(t)}$$

$$\tilde{E}(t) = \left(\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}\Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^t \tilde{E}(t) = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même, si

$$\tilde{E}^*(t) = \left(\tilde{p}^*_u\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}^*_v\Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}^*\Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^{t*}\tilde{E}(t)^* = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{p}_u\Big|_{\gamma(t)}\right) = \tilde{p}_{uv}\Big|_{\gamma(t)}\gamma_1'(t) + \tilde{p}_{uv}\Big|_{\gamma(t)}\gamma_2'(t) = (\Gamma^u_{uu}\tilde{p}_u + \Gamma^v_{uv}\tilde{p}_v + L\tilde{n})\gamma_1'(t) + (\gamma^u_{uv}\tilde{p}_u + \Gamma^v_{uv}\tilde{p}_v + M\tilde{n})\gamma_2'(t) = \cdots$$

Nottons que les coefficients dépendent seulement de E, F, G, L, M, N

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{E}(t) = \tilde{E}(t)\cdot M(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E^*(t) = E^*(t)M(t)$$

<u>Lemme</u> :

Soient $B(t) = (e_1|e_2|e_3)$ et $B^*(t) = (e_1^*|e_2^*|e_3^*)$ deux familles de de bases dans $\mathbb{R}^3$ t.q.

$B^tB = B^{*t}B^*\forall t\ B'(t) = B(t)M(t)\ B^{*\prime}(t) = B^*(t)M(t)$

$$B(0) = B^*(0)??? \quad B = B^*$$

Par le lemme appliqueé à $\tilde{E}(t), E(t) \implies \tilde{E}(t) = E^*(t)\forall t$

$$\tilde{p}_{u/v}\Big|_{\gamma(t)} = p^*_{u/v}\Big|_{\gamma(t)}$$

$$\cdots\blacksquare$$

<u>Démonstration du lemme</u>

(La matrice $G = B^*B$ s'appelle la matrice de Gram)

Comme $G\cdot G^{-1} = I$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G\cdot^{-1} + G\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G^{-1}\right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G^{-1}\right) = -G^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}GG^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B^*B)(B^t)'B + B^tB' = (B^{*t})'B + (B^*t)B^{*\prime}$$

Calculons la dérivée de
$$(B^*)^t G^{-1} B$$
par rapport à t

$$(B^{*t} G^{-1} B)' = (B^* t G^{-1})' B + B \cdots$$

Fuck that, c'est le cambodge

Dérivées covariantes et parallélisme

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on dit que 2 vecteurs sont parallèles. si, quand on translate au point de base ils sont multiples/égaux.

Sur une surface, les plans tangeants à des points distincs sont différents.

Définition : Soit X un champ de vecteur sur une surface S $(X_p \in T_p S) \forall p \in S$ et $V \in T_{pS}$. La dérivée covariante de X dans la direction V est $\nabla_v X := \pi^{\perp}_{T_p S}(D_V X)$