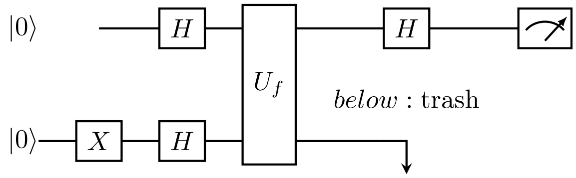
2022-09-20

Deustch



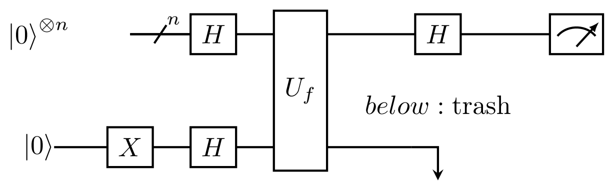
2.8 Problème de Deutsh-Jozsa

On cherche à trouver si

$$f : \mathbb{Z}_2^n \mapsto \mathbb{Z}_2$$

est balancé (la moitié des résultats est 1 et l'autre 0) ou constant (toujours 0 ou 1). On sait que f est un ou l'autre.

Classiquement, on doit calculer f $2^{n/2}+1$ fois (au pire)



On appelle U_f un oracle en informatique quantique

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n+1}$$

$$|\psi_1\rangle = |+\rangle^{\otimes n}|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k 2^{n-k}$$

On applique maintenant U_f. On a un *phase kick-back*

$$|\psi_2\rangle = U_f\,|\psi_1\rangle = \sum_x \frac{(-1)^{f(x)}}{2^{n/2}}|x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

L'infromation sur $f(x)$ est conteny dans la phase des n premiers qubits. On applique les Hadamard $H^{\otimes n}$ pour faire *tomber* les phases vers des probabilité

$n = 1$:

$$H\left|x\right\rangle = \begin{cases} \frac{\left|0\right\rangle+\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \\ \frac{\left|0\right\rangle-\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 1 \end{cases} = \sum_{z=0}^{1} \frac{(-1)^{XZ}}{\sqrt{2^n}} \left|z\right\rangle$$

On généralise à $n1$

$$H^{\otimes n}\left|x_1\, x_2\, \cdots\, x_n\right\rangle = \bigotimes_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_j=0}^{1} (-1)^{x_j z_j} \left|z_j\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z_1,\cdots,z_n=0}^{1} (-1)^{x_1 z_1 + \cdots} \left|z_1\, \cdots\, z_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^(x \cdot z) \left|z\right\rangle$$

Donc

$$\left|\psi_3\right\rangle = H^{\otimes n} \otimes 1 \left|\psi_2\right\rangle = \sum_x \frac{(-1)^{f(x)}}{2^{n/2}} H^{\otimes}$$