

# 1 Chapitre 0

On s'intéresse à qualifier des courbes sans étudier les propriétés des fonctions. Par exemple, on veut considérer  $y = x^2$  et  $y^2 = x$  comme identiques à rotation près malgré le fait qu'elles soient définies comme deux équations assez différentes.

On va distinguer les propriétés intrinsèques et extrinsèques d'une surface.

Une propriété intrinsèque pourrait être détectée par quelqu'un vivant dans la surface.

La distance de longueur d'arc est une quantité intrinsèque à la sphère tandis que la *longueur cordale* est une quantité extrinsèque.

La courbure gaussienne est la plus importante quantité intrinsèque associée à une surface.

La courbure gaussienne ne change pas si on la déforme de manière rigide.

## 1.1 Courbure d'un polyèdre

Défaut d'angle :

$$c(s) = 2\pi - \sum_{T \text{ face}} \theta_T(s)$$

La caractéristique d'Euler d'un polytope  $P$  est la quantité

$$\chi(P) = V - E + F$$

## 1.2 Théorème de Gauss-Bonnet discret

$$\sum_{s \in P} c(s) = 2\pi\chi(P)$$

Dém On compte le défaut d'angle total de deux manières différentes

— Défaut d'angle total  $\sum_{s \in P} c(s)$

— Dans chaque face triangulaire de  $P$ , la somme des angles  $= \pi$ . Le défaut d'angle total :  $2\pi V - \pi F$

Chaque arête à 2 faces

Chaque face à 3 arêtes

$$2E = 3F$$

On compte la cardinalité des  $\{(a, f) | a \in f\}$

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(P) &= 2\pi(V - E + F) \\ &= 2\pi(V - \frac{3}{2}F + F) \\ &= 2\pi V - \pi F \end{aligned}$$

Ex : En utilisant le théorème démontré plus haut, et le fait que toute triangulation d'une sphère satisfait  $\chi(P) = 2$  classifie les solides réguliers. (Les faces sont des polygones réguliers. Même nombre de faces à chaque sommet)

# 2 Chapitre 2

Définition : Une fonction vectorielle  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $C^k$  si  $f$  et ses  $k$  premières dérivées existent et sont continues sur  $(a, b)$ . On dit que  $f$  est lisse si c'est vrai pour tout  $k > 0$

Une courbe paramétrée est une application  $C^3$

$$\alpha I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Ex :

—  $p \neq q \in \mathbb{R}^3$ , on définit  $V = q - p$  et  $\alpha(t) = p + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$

- $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  (le cerclce de rayon  $a$ )
- Courbe cubique sigulière :  $\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad \alpha'(t) = (2t, 3t^2) \implies \alpha'(0) = (0, 0)$  non-régilère en  $t = 0$

# Cours 2

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

Courbe du jour : Cycloïde : Trajectoire d'un point sur une roue qui tourne sans glisser

Paramétrisation :  $\alpha(t) = \underbrace{(tr, r)}_{\text{Centre du cercle}} + (-r \sin t, -r \cos t)$

Def : La longueur d'arc d'une courbe  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{\neq}$  est  $l(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)|| dt$

$\tilde{\alpha} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  est une reparamétrisation de  $\alpha$

# Cours 3

Jean-Baptiste Bertrand

December 2021

courbe régulière :  $\alpha' \neq 0 \forall t$

longueur d'arc

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Approximation avec une partition

$$P = (t_0, t_1, \dots, t_n)$$

$$\mathcal{L}(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})\|$$

Prop

Si  $\alpha$  est  $C^1$  alors  $\alpha$  est rectifiable et

$$\mathcal{L}(\alpha) = \sup_P \mathcal{L}(\alpha, P)$$

On a montré que pour toute partition  $P$  :  $\mathcal{L}(\alpha, P) \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Lemme :  $\|\int_a^b \alpha'(t) dt\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Reste à montrer que  $\forall \epsilon > 0 \exists P$  t.q.

$$\mathcal{L}(\alpha, P) \geq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \epsilon$$

Continuité uniforme de  $\alpha$

$\exists \delta > 0$  t.q. si

Proposition : Une courbe paramétrée  $\alpha$  admettant une reparamétrisation par longueur d'arc ssi elle est régulière

Dem (  $\implies$  )

Si  $\alpha$  admet une reparamétrisation par longueur d'arc  $\tilde{\alpha}$

et  $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(t) &= \alpha(\varphi(t)) \\
\tilde{\alpha}'(t) &= \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) \\
\underbrace{\|\tilde{\alpha}'(t)\|}_1 &= \|\alpha'(\varphi(t))\|\|\varphi'(t)\| \\
&\implies \|\alpha'(\varphi(t))\| \neq 0
\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ )

Trop long, trop loin

Exemple : Calculer la paramétrisation par longueur d'arc d'une hélice

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad (a, b > 0)(t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx \\
&= \int_0^t (-a \sin x, a \cos x, b) dx \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dx \\
&= t\sqrt{a^2 + b^2} \\
\implies \Psi^{-1}(s) &= \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
\implies \tilde{\alpha}(s) &= (a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}})
\end{aligned}$$

Courbe du jour : Caténoïde

Repère de Frenet

Un repère adapté à la courbe.

Le premier vecteur est le vecteur tangent.

Le second vecteur est le vecteur *accélération*. En effet, il est toujours perpendiculaire au déplacement dans le cas d'une courbe paramétré par longueur d'arc (vitesse constante)

Le troisième est celui qui reste ( $\times$ )

Lemme : Soient  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Si  $f(t) \circ g(t)$  est constante alors  $f'(t) \circ g(t) = -f(t) \circ g'(t)$

Dem  $(f(t) \circ g(t))' = 0 \implies f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g'(t) = 0 \blacksquare$

Soit  $\alpha$  paramétré par longueur d'arc

$$T(s) := \alpha'(s)$$

$$k(s) := \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

est la courbure de  $\alpha$  au point  $\alpha(s)$

$$N(s) := \frac{T'(s)}{k(s)}$$

On dit que  $\alpha$  est birégulière si  $k(s) \neq 0 \forall s$

$$B(s) := T(s) \times N(s)$$

$T, N, B$  est le repère de Frenet de  $\alpha$

$$\|T(s)\| = 1 \implies T(s) \cdot T(s) = 1 \implies T(s) \cdot T'(s) = 0 \implies k(s)T(s) \cdot N(s) = 0$$

$T, N, B$  sont  $\perp$

$$\|B\| \|T \times N\| = \|T\| \|N\| \sin(\phi) = 1$$

Orthonormé!

On a, par définition que

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

$$N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) = -k(s)N(s) \cdot N(s) = 0 \implies N'(s) \cdot B(s) =: \tau(s)$$

$\tau$  : torsion

...

On obtiens les Équations de Frenet-Serra

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

# Cours 4

Jean-Baptiste Bertrand

19 janvier 2022

## Rappel

- Une courbe est régulière ( $\alpha'(t) \neq 0 \iff$ ) elle peut être paramétrisée par longueur d'arc ( $\|\tilde{\alpha}(s)\| \equiv 1$ )
- Repère de Frenet de  $\alpha$  paramétré par longueur d'arc

$$T = \alpha'(s), \quad N = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} (\|T'(s)\| = k(s)), \quad B = T \times N$$

- Courbe birrégulière  $\rightarrow k(s) \neq 0$
- Équations de Frenet-Serret

$$\begin{array}{rcl} T' & = & kN \\ N' & = & -kT + \tau B \\ B' & = & -\tau N \end{array}$$

- $N'(s) \cdot B(s) = \tau(s)$

La torsion ( $\tau$ ) mesure à quel point on sort d'un plan. La courbure ( $k$ ) mesure à quel point on dévie d'une droite.

Exemple : Hélice

$$\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right)$$

où  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

est paramétrisé par longueur d'arc

$$T(s) = \alpha'(s) = \left( -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right)$$

$$T'(s) = \left( -\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| \frac{a}{c^2}$$

$$N = \left( -\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$B = T \times N = \left( \frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right)$$

$$N'(s) = \left( \frac{1}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{1}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\tau(s) = N' \cdot B = \frac{b}{c^2} \sin^2\left(\frac{s}{c}\right) + \frac{b}{c^2} \cos^2\left(\frac{s}{c}\right) + 0 = \frac{b}{c^2}$$

#### Remarque

La courbure d'une courbe de  $\mathbb{R}^3$  est toujours positive (C'est une norme) mais la torsion a un signe. La torsion renseigne sur la chiralité.

$$T' = \kappa N \checkmark$$

...

#### Courbes non-paramétrées par longueur d'arc

Soit  $\alpha$  une courbe birrégulière. On note  $s(t)$  la reparamétrisation par longueur d'arc.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{dt} = \frac{d\alpha(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (*)$$

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = 1 \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

la fonction  $\frac{ds}{dt} = v(t)$  est la vitesse de  $\alpha$

$$\frac{d\alpha}{dt} = T(s(t))v(t)$$

Pour calculer  $N$

$$\frac{dT(s(t))}{dt} = \frac{dT(s(t))}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)$$

$$\implies N(s(t)) = \frac{1}{v(t)} \frac{dT(s(t))}{dt}$$

On peut ensuite calculer  $B$  et  $\tau$



Exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^3, 3t + t^3)$$

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$v(t) = \|\alpha'(t)\| = \dots = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$T = \frac{\alpha'}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)}(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\kappa N(t) = \frac{1}{v(t)}T'(t) = \dots = \frac{1}{6}\left(\frac{-4t}{1 + t^2}, \frac{2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2}\right)$$

$$\kappa(t) = \|k(t)N(t)\| = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

On calcul B, pas le temps de retranscrire

# Cours 5

Jean-Baptiste Bertrand

24 janvier 2022

La dernière fois, on s'intéressait à ce qui se passe quand une courbe n'est pas paramétrisée par longueur d'arc. On suppose qu'il existe une paramétrisation par longueur d'arc :  $\alpha(s(t))$  où  $s$  est la longueur d'arc

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\| dx$$

$$s'(t) = \|\alpha'(s(t))\| = v(t)$$

$$\begin{aligned}\alpha(s(t))' &= \alpha'(s(t))s'(t) = T(s(t))v(t) \\ \alpha(s(t))'' &= T'(s(t))v(t)^2 + T(s(t))v'(t) = \kappa(s(t))N(s(t))v(t)^2 + v'(t)T(s(t))\end{aligned}$$

Pour calculer  $N$  et  $\kappa$  sans passer par la longueur d'arc, on utilise

$$\kappa(s(t))N(s(t)) = \frac{\alpha(s(t))'' - v'(t)T(s(t))}{v(t)^2}$$

Exercice : Finir l'exemple

$$\alpha(t) = (3t - t^2, 3t^2, 3t + t^2)$$

On devrait trouver

$$\kappa(s(t)) = \tau(s(t)) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

Proposition : La courbure d'une courbe  $\alpha$  (non-paramétrisée par longueur d'arc) est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|^3}$$

Démonstration

On a, par ce qu'on a fait ci-haut

$$\begin{aligned}\alpha(s(t)) &= vT \\ \alpha(s(t))'' &= v'T + \kappa v^2 N\end{aligned}$$

$$\alpha' \times \alpha'' = v^3 \kappa (T \times N) = v^3 \kappa B$$

$$\begin{aligned}\implies \|\alpha' \times \alpha''\| &= v^3 \kappa \\ \implies \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} &= \kappa \quad \text{car } v = \|\alpha'\|\end{aligned}$$

Conséquence des formules de Frenet-Serret

Prop : Une courbe est une droite  $\iff \kappa = 0$

Démonstration (  $\implies$  ) Si  $\alpha$  est une droite

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \rho_0 + sV \\ \alpha'(s) &= v - T(s) \implies T'(s) = 0 \implies \kappa = 0\end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) si  $\kappa(s) = 0 \forall s$

$$T'(s) = 0 \implies T(s) = T_0$$

$$\alpha(s) = \int_0^s T * (x) dx = sT_0 + \rho_0$$

Exemple : Que peut-on dire d'une courbe  $\alpha$  dont toutes les tangentes passent par un même point ?

Sans perte de généralité, les tangentes passent par  $\vec{O} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\implies \alpha(s) + \lambda(s)T(s) &= 0 \\ \implies T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) &= 0 \\ \implies (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s) + \lambda(s)(\kappa(s)N(s)) &= 0\end{aligned}$$

$$\implies 1 + \lambda'(s) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(s)\kappa(s) = 0$$

$$\lambda(s) = -s + c$$

$$\lambda = 0 \text{ si } s = c \implies \kappa = 0 \text{ sauf si } \dots$$

Prop 1) Une courbe birrégulière  $\alpha$  est planaire  $\iff \tau \equiv 0$ . 2) Les courbes planes de courbure constante sont des cercles.

Démonstration 1)  $\implies$  Si  $\alpha$  est plane,  $T$  et  $N$  engendrent le plan qui contient  $\alpha$ . Cela signifie que  $T \times N = B$  est constant. C'est le vecteur normal au plan qui contient la courbe  $\alpha$ .

$$\implies B'(s) = 0 = -\tau N \implies \tau = 0$$

Donc la torsion est nulle ■

( $\impliedby$ ) Inversement, si  $\tau \equiv 0$

$$\begin{aligned} B'(s) = 0 &\implies B(s) = B_0(\text{est constant}) \\ \implies (\alpha(s) \cdot B(s))' &= T(s) \cdot B(s) + \alpha(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha(s) \cdot B(s) = \alpha(s) \cdot B_0 = C$$

C'est l'équation d'un plan dans  $\mathbb{R}^3$  ■

2)  $\impliedby$

Un cercle est paramétré par longueur d'arc avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left( r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ \alpha'(s) &= T(s) = \left( -\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ T'(s) &= \left( -\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right) \\ \implies \kappa &= \|T'(s)\| = \frac{1}{r} \text{ est constante} \end{aligned}$$

Cela donne une interprétation à la courbure qui est que en chaque point, il existe un cercle de rayon  $r$  qui est une meilleure approximation de la courbe.

$$\implies$$

Soit  $\alpha(s)$  une courbe plane avec

$$\kappa_s = \kappa_0$$

Comme on sait déjà que cela doit être un cercle, on s'aide en cherchant le centre du cercle.

On pose  $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_0} N(s)$

$$\beta'(s) = T(s) = \frac{1}{\kappa_0}(-\kappa T + \tau B)$$

$$\|\alpha(s) - \beta(s)\| = \left\| \frac{1}{k_0} N(s) \right\| = \frac{1}{k_0}$$

$\implies \alpha(s)$  est sur le cercle de rayon  $\frac{1}{k_0}$  centré en  $B_0$

Courbe du jour : Tractrice UN chien enterre un os à  $(0, 1)$ , son maître à  $(0, 0)$  la tire par une laisse en le déplaçant vers  $x > 0$ . Comme le chien tire très fort, la laisse est toujours tangente à la trajectoire du chien.

Soit  $\theta$  l'angle formé par la laisse et l'axe des  $x$

$$\alpha(t) = (t + \cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

$$\alpha'(t) = (1 - (\sin \theta)\theta', \cos \theta\theta')$$

La laisse est dans la direction  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Comme la trajectoire  $\alpha$  est tangente à la laisse.

$$\frac{\cos \theta\theta'}{1 - (\sin \theta)\theta'} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\cos \theta\theta' = \sin \theta - (\sin^2 \theta)\theta'$$

$$\theta' = \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin \theta$$

$$-\ln(\csc \theta + \tan \theta) = t + c \quad t = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow c = 0$$

$$\alpha = (-\ln(\csc \theta + \tan \theta) + \cos(\theta), \sin \theta) \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

En reparamétrisant

$$\alpha(t) = (t - t \sinh(t), \sinh(t))$$

Forme locale canonique d'une courbe

Proposition : Soit  $\alpha$  une courbe birrégulière paramétrée par longueur d'arc t.q.  $\alpha(0) = 0$  alors

$$\alpha(s) = (s - \frac{k_0^2}{6}s^2 + o(s^2))T(o) + \left(\frac{k_0}{2}s^2 + \dots\right) \dots$$

C'est vraiment laid, c'est loin pis il y a du soleil, sorry.

Démonstration Le théorème de Taylor nous dit

$$\alpha(s) = s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + O(s^4)$$

$$\alpha'(0) = T(0) \quad \alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad \alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa'(0)N(0) + \kappa_0\tau_0B(0)$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \left(s - \frac{s^2}{6}\kappa_0^2 + O(s^3)\right)T(0) + \left(k_0\frac{s^3}{2} + k_0'\frac{s^2}{6} + o(s^3)\right)N(0) + \left(\kappa_0\tau_0\frac{s^3}{6} + O(s^3)\right)B(0)$$

Le théorème fondamentale des courbes dans  $\mathbb{R}^3$

Si j'ai deux courbes donc je connais la même courbure est la même torsion en tout point alors c'est la même courbe à une isométrie près.

Montrons d'abord que les isométries de  $\mathbb{R}^3$  préservent la courbure est la torsion.

Rappel Une isométrie de  $\mathbb{R}^3$  est de la forme  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  où  $A \in O(3) \iff AA = \text{id}, b \in \mathbb{R}^3$

Une isométrie est directe où une transformation directe si  $A \in SO(3) \iff \det A = 1$

Soit  $\alpha$  une courbe paramétré par longueur d'arc

On définit

$$\alpha^*(s) = A\alpha(s) + b$$

$$\alpha^{*\prime}(s) = A\alpha'(s)$$

$$T'(s) = AT'(S)$$

$$T^{*\prime}(s) = AT'(s)$$

$$\|\kappa^*N^*(s)\| = \|\kappa(s)AAN(s)\|$$

$$\kappa^* = \kappa$$

$$B^* = T^* \times N(AT) \times (AN) = A(T \times N) = AB$$

$$(B^*)' = -\tau^*N^*$$

$$(AB)' = AB' = - \implies \tau = \tau^*$$

## Rappels

Formule de la courbure  $\frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$

$\kappa(s) = 0 \iff$  segment de droite

$\tau = 0 \iff$  la courbe est plane

$\tau(s) = 0$  et  $\kappa(s) \equiv c \iff \alpha$  portion de cercle de rayon  $1/c$

Forme locale canonique (Taylor)

Isométrie  $x \mapsto Ax + b$   $AA^t = 1$

La courbure et la torsion sont invariantes par isométries

Pour  $A$  une isométrie directe  $A\vec{u} \times A\vec{v} = A(\vec{u} \times \vec{v})$  En général  $A\vec{u} \times A\vec{v} = \det(A)A(\vec{u} \times \vec{v})$

## Théorème fondamentale des courbes dans $\mathbb{R}^3$

Deux courbes  $C, C^*$  dans  $\mathbb{R}^3$  de courbure non-nulle diffèrent par une isométrie directe  $\iff$  elles ont la même courbure et torsion ( $\kappa = \kappa^*$  et  $\tau = \tau^*$ )

Dém Soit  $\alpha, \alpha^*$  des courbes paramétrées par longueurs d'arc de  $C, C^*$

Prenons  $A$ , l'unique matrice orthogonale t.q.

$$AT(0) = T^*(0)$$

$$AN(0) = N^*(0)$$

$$AB(0) = B^*(0)$$

Rappel : si  $A$  envoie une base orthonormée vers une base orthonormée alors  $A$  est orthogonale.  
Si  $A$  envoie une base positivement orientée à une base positivement orientée alors  $\det\{A\} > 0$

Soit  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $A \cdot \alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Définissons  $I(x) = Ax + \vec{b}$  et  $\tilde{\alpha}(s) = I(\alpha(s)) = A\alpha(s) + \vec{b}$

reste à montrer que  $\tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) \forall s$

On a  $\tilde{\alpha}(0) = A\alpha(0) + \vec{b} = \alpha^*(0)$

Et comme  $I$  est une isométrie

$$\tilde{T}(0) = AT(0) = T^*(0)\tilde{N}(0) = AN(0) = N^*(0)\tilde{B}(0) = AB(0) = B^*(0)$$

Comme  $\kappa, \tau$  sont invariants par isométries directe

$$\kappa^*(s) = \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)\tau^*(s) = \tau(s) = \tilde{\tau}(s)$$

Définissons une fonction  $f(s) = \tilde{T}(s) \cdot T^*(s) + \tilde{N} \cdot N^* + \tilde{B} \cdot b^*$

$f'(s) = 0$  C'est vraiment long à écrire, fuck ça, règle de chaîne mdr  $= 0$

$$\implies f(s) \equiv C \text{ mais } f(0) = 1 + 1 + 1 = 3 \implies f(s) = 3$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (  $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$  )

$$\tilde{T}(s) \cdot T^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{N}(s) \cdot N^*(s) \leq 1$$

$$\tilde{B}(s) \cdot B^*(s) \leq 1$$

On en conclut que les vecteur du repère de Frenet tilde et étoile sont les mêmes

En particulier  $\tilde{\alpha}'(s) = \alpha^*(s) \implies \tilde{\alpha}(s) = \alpha^*(s) + \vec{v}_0$  mais  $\vec{v}_0 = 0$  car  $\tilde{\alpha}(0) = \alpha^*(0)$

Question : Étant donné deux fonctions  $\kappa(s), \tau(s)$ , existe-t-il une courbe  $\alpha$  ayant  $\kappa, \tau$  comme courbure et torsion ?

Oui ! (avec suffisamment de régularité)

Pour trouver  $\alpha$ , on résout le système

$$\begin{array}{rcl} T' & = & \kappa T \\ N' & = & -\kappa T \quad \tau B \\ B' & = & \tau B \end{array}$$

puis on intègre  $T$ . On sait qu'une solution existe grâce au théorème d'existence des solutions d'équation différentielles.

## Courbes planes

Théorème [inégalité isopérimétrique] :

Soit  $C$  une courbe plane simple fermée de longueur  $l$  et  $A$  est l'aire de la région bornée par  $C$ . Alors  $l^2 - 4\pi A \leq 0$  Avec  $= \iff C$  est un cercle

Rappel

Théorème de Green :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \text{rot}(\mathbf{F}) dA$$

En particulier,  $\text{aire}(R) = \int_C = \frac{1}{2} \int_C (yx) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int xy' - yx' dt$

$\alpha$  paramétrée par longueur d'arc de  $C$   $\bar{\alpha}$  paramétré du cercle



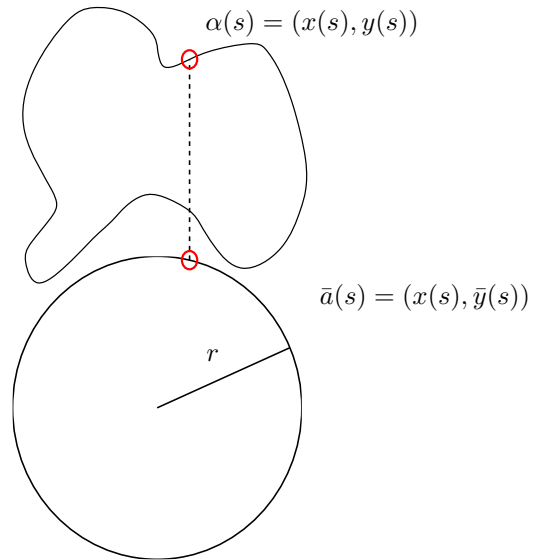


FIGURE 1 – paramétrisation isopérimétrique

Calculons

$$A + \bar{A} = A + \pi r^2 = \int_0^l x(s)y'(s)ds + \int_0^l -\bar{y}(s)x'(s)dy$$

Fuck les notes ; dodo. Aussi, criss que mon schéma est laid, faut vraiment que j'apprenne à utiliser inkscape

## Indice de rotation et Umlaufsatz

$\alpha$  une courbe plane

On peut assigner un signe à la courbe.

On définit  $T$  comme d'habitude soit  $T(s) \equiv \alpha'(s)$  mais  $N(s) := R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

Où  $R_{\frac{\pi}{2}}$  est une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ . ON a donc

$$T(s) = (x(s), y(s)) \implies N(s) = (-y(s), x(s))$$

et

$$\kappa(s) := T'(s) \cdot N(s)$$

Frenet-Serret dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s)$$

autres interprétation de  $\kappa(s)$  : Dans  $\mathbb{R}^2$ , on peut toujours écrire  $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$

$$T'(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s), \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \theta'(s)M(s)$$

On comprend donc que  $\theta'(s) = \kappa(s)$

On peut donc définir  $\theta(s)$  comme

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(t)dt + \theta(0) \implies \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s \kappa(t)dt$$

Si  $\alpha$  est une courbe fermée (  $\alpha(s+L) = \alpha(s)$  ) alors on a que

$$\theta(L) - \theta(0) = 2k\pi$$

On appelle  $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t)dt = R$  l'indice de rotation

## Rappels

Pour une courbe de  $\mathbb{R}^2$ , la courbure à un signe

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s)$$

où  $N(s) = R_{\frac{\pi}{2}} T(s)$

L'indice de rotation d'une courbe fermée (periodique) est

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$$

où  $R \in \mathbb{Z}$

Umlaufsatz (tangententes tournantes). Si  $\alpha$  est simple (pas d'auto-intersection)  $\mathcal{R}(\alpha) = 1$

Si on écrit  $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ , alors  $\kappa(s) = \theta'(s)$

## Chapitre 2 : Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

On va maintenant parler des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$

Rappels :  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$Df \Big|_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \Big|_p$$

La différentiel de  $f$  en  $p$

$U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert ssi  $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$  t.q.  $B_\epsilon(\vec{x}) \subseteq U$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ . UN sous-ensemble  $U \subseteq S$  est ouvert dans  $S$  ssi  $\forall \vec{x} \in U \exists \epsilon \geq 0$  t.q  $B_\epsilon(\vec{x}) \cap S \subseteq U$

Exemple  $S^2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

ON peut paramétriser une partie de  $S^2$  à l'aide de coordonn.es sphériques

$$(0, \cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Rotation autour de  $\theta$

$$R_\theta = \dots$$

Les pôles ne sont pas dans notre paramétrisation

Déf Une application  $p : I \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow U$  ( $U$  Ouvert) est une carte de surface lisse si elle est lisse, bijective et  $Df$  est de plein range  $\forall p \in U$

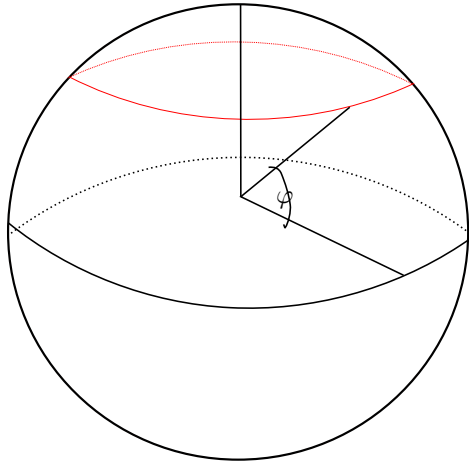


FIGURE 1 – paramétrisation sphérique

Déf Une surface lisse  $S \subset \mathbb{R}^3$  est un sous-ensemble t.q tout point  $\vec{x} \in S$  est contenue dans l'image d'une carte de surface lisse  $p : U \rightarrow S$  t.q.  $p$  est une homéomorphisme (application bijective continue d'inverse continu) entre  $U$  et un ouvert de  $S$

Une collection de paramétrisation  $p_i : U_i \rightarrow S$  t.q.  $p_i(U_i)$  recouvrent  $S$  s'appelle un atlas

Exemple Pour la sphère, on peut construire un atlas avec 2 cartes de surfaces lisses

On peut aussi construire un atlas de  $S^2$  en utilisant des "projections inverses"

$$p_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

On doit prendre un total de 6 hémisphères pour couvrir toute la sphère de cette manière. Sinon il manque toujours des points sur l'équateur.

Exemple 2 le graph d'une fonction lisse  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une carte de surface lisse

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \end{pmatrix}$$

toujours de premier rang

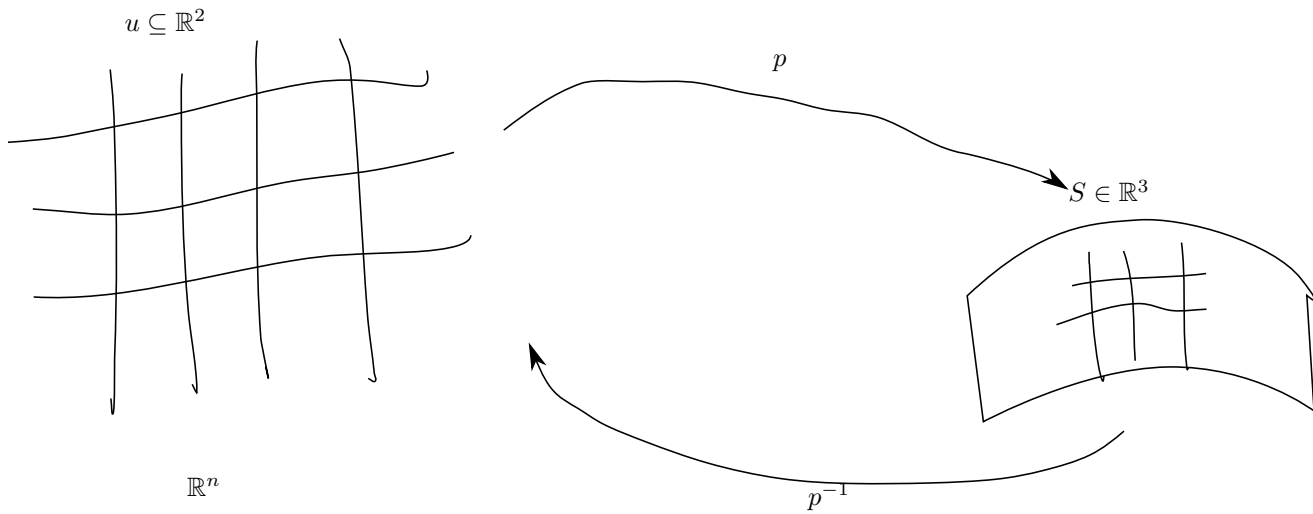


FIGURE 2 – mapping d'une surface

Exemple 3 : l'hélicoïde est une hélice dans  $\mathbb{R}^3$  à laquelle on ajoute des segments horizontaux

$$p(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), bv) \quad (b \geq 0)$$

Domaine  $U \geq 0, v \in \mathbb{R}$

Une seule carte forme un atlas

$$Dp = \begin{pmatrix} \cos(v) & -u \sin(v) \\ \sin(v) & u \cos(v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note les colonnes de  $Dp$  par  $p_u$  et  $p_v$

Exemple 4 : Le tore

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b \cos u) \cos v \\ (a + b \cos u) \sin v \\ b \sin u \end{pmatrix}$$

Peut être couvert avec 4 cartes en changeant le domaine de  $p$  de  $\pm\pi$

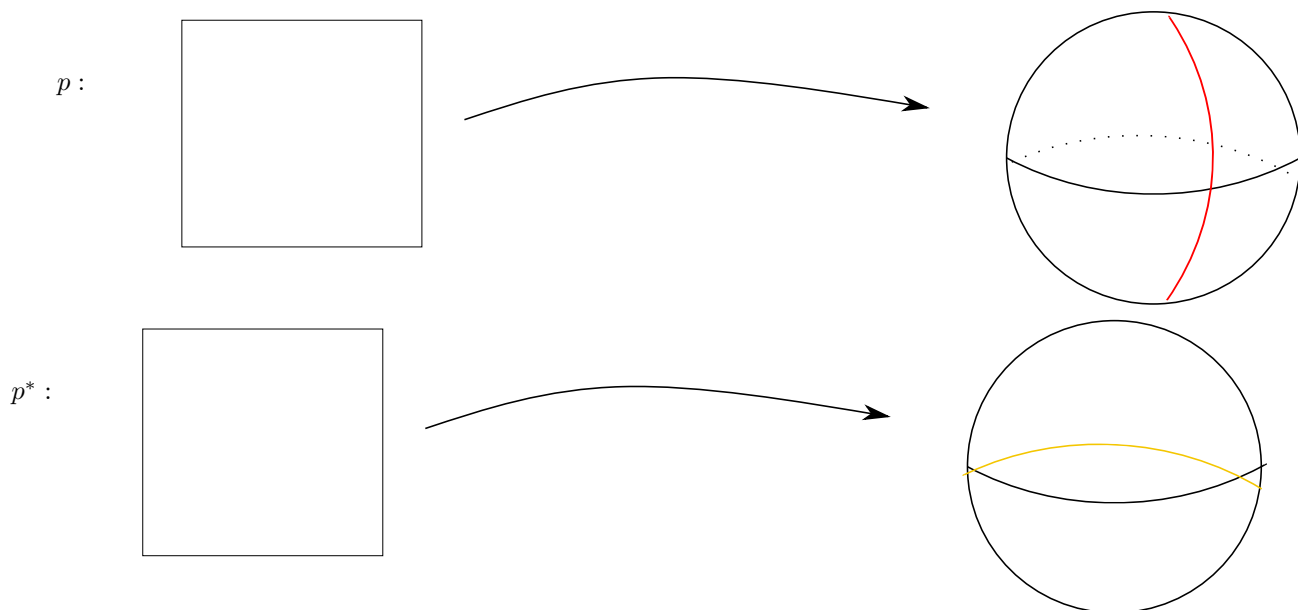


FIGURE 3 – mapping de la sphère

Plus généralement, si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe régulière dans le plan  $y, z$  avec  $y(0) = 0$ . La surface de révolution associée est une surface lisse.

Si  $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$

$$p(t, \theta) = \begin{pmatrix} f(t) \cos \theta \\ f(t) \sin \theta \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Déf : Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Un point  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $Df|_{\vec{x}} = 0$  est un point critique et la valeur associée  $a = f(\vec{x})$  est une valeur critique. Une valeur  $a \in \mathbb{R}$  est régulière si elle n'est pas critique.

Exemple :  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

le seul point critique est  $(0, 0, 0)$ . La seule valeur critique est  $f(0, 0, 0) = 0$ . Toutes les valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sont des valeurs régulières.

On a  $S^2 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)^T\} \quad \text{pas une surface lisse}$$

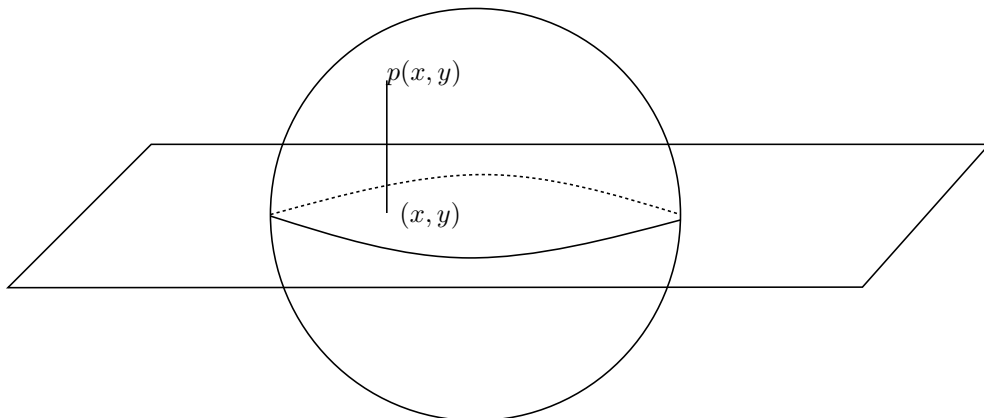


FIGURE 4 – projection inverses

Proposition Si  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse et  $a \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $S = f^{-1}(a)$  est une surface lisse  $= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | f(\vec{x}) = a\}$  Rappel Théorème de la fonction inverse Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable  $\mathcal{C}^K$  et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  t.q.  $Df|_{\vec{x}}$  est inversible. Alors il existe des ouverts  $U \ni \vec{x}$   $V \ni F(\vec{x})$  t.q.  $F : U \rightarrow V$  est inversible d'inverse de classe  $\mathcal{C}^k$

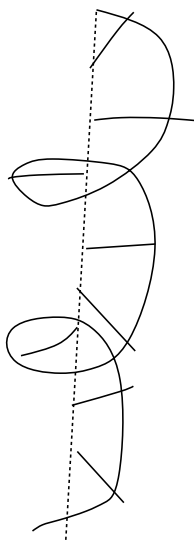


FIGURE 5 – helicoid

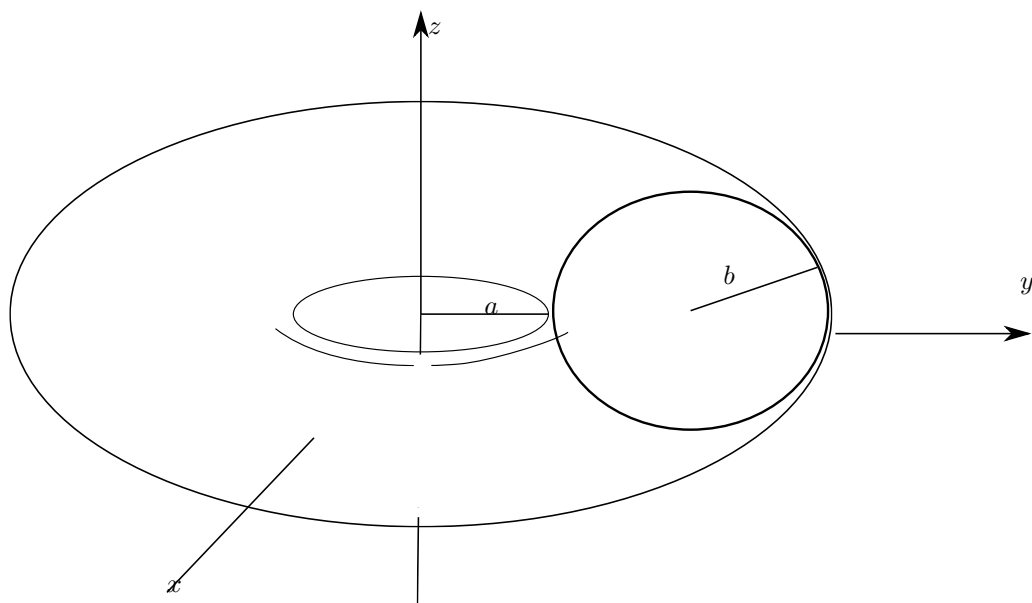


FIGURE 6 – paramétrisation du tore



## Rappels

- Carte de Surface :  $p : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ 
  - lisse
  - homéomorphisme entre  $U$  et  $p(U)$
  - $Dp = (p_u | p_v)$  rang maximal
- Surface  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 
  - tout point est contenu dans la carte de surface
- Point régulier  $p$  de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : Df|_p \neq 0$ 
  - valeur régulière :  $f(p)$
  - valeur critique  $\iff$  non-régulière

Proposition Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière. alors  $f^{-1}(\alpha)$  est une surface lisse

Dém : Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  t.q.  $f(\vec{x}) = \alpha$

Comme  $\alpha$  est une valeur régulière,  $Df|_{\vec{x}} \neq 0$

$\implies$  un des dérivé partiel est non-nulle

Sans perte de généralité, disons

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{\vec{x}} \neq 0$$

Définissons  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$\implies Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(DF)|_{\vec{x}} = \left. \frac{df}{dz} \right|_{\vec{x}} \neq 0$$

on peut applique le thm de la fonction inverse

$$\exists U, V \text{ ouverts, } U \ni \vec{x}, \quad V \ni F(\vec{x}) = (x_0, y_0, z_0)^T$$

t.q.  $F : U \rightarrow V$  est inversible et  $F^{-1}$  est lisse.

Soit  $W$  la projection de  $V$  sur le plan  $(x, y)$

$$p : W \rightarrow S \quad (x, y, z)^T \rightarrow F^{-1}(x, y, z)^T \in f^{-1}(\alpha)$$

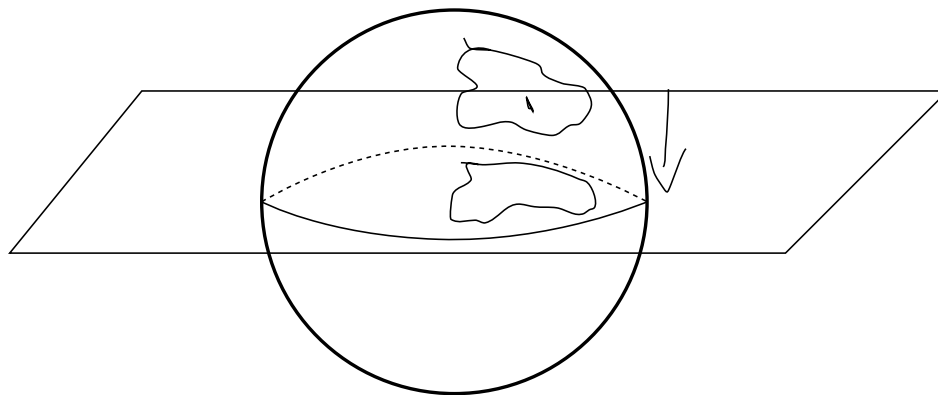


FIGURE 1 – bingobong

comme  $DF^{-1} \big|_{F(\vec{x})} = (DF \big|_{\vec{x}})^{-1}$

$Dp$  = deux premières colonnes de  $DF^{-1}$  est de range maximal ■

Exemple

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Df = (2x, 2y, 2z)$$

Le seul point critique est  $(0, 0, 0)$

La seule valeur critique est  $f(0, 0, 0) = 0$

$$f^{-1} = \{(x, y, z)^T | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

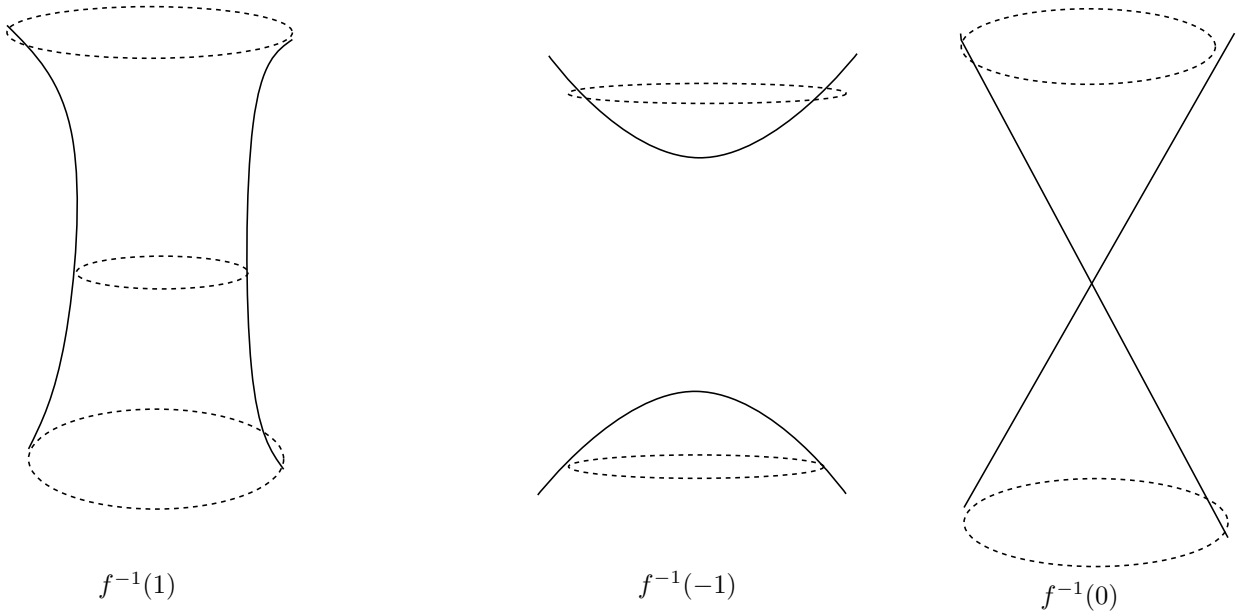


FIGURE 2 – Exemples de fonctions

## première forme fondamentale

Définition Étant donnée une carte de surface lisse  $p$ , la première forme fondamentale ou métrique est

$$I_{u,v} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \Big|_{(u,v)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Définition : Deux surfaces  $S, S^*$  sont localement isométrique s'il existe un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  et des paramétrisation  $p, p^*$  t.q.  
 $I|_{(u,v)} = I^*|_{(u,v)}$

Exemple : Considérons  $S$  Le plan  $x, y$  paramétrisé par  $p_{(u,v)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

et le cylindre  $S^*$  paramétrisé par  $p^*(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)^T$

ON a

$$p_u = (1, 0, 0), p_v = (0, 1, 0), p_u^* = (-\sin(u), \cos(u), 0), p_v^* = (0, 0, 1)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^*$$

$\implies S$  est localement isométrique à  $S^*$

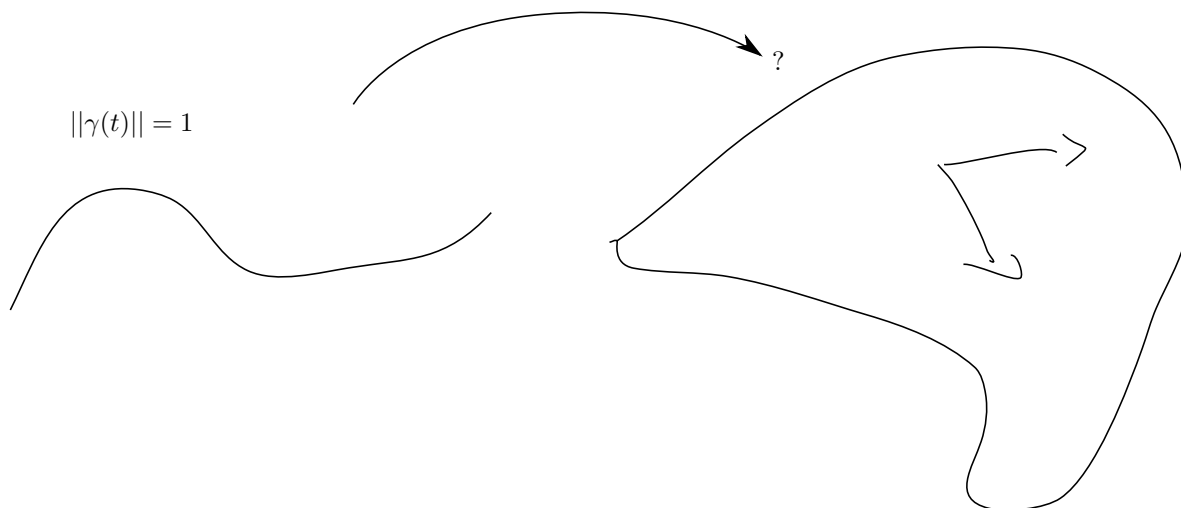


FIGURE 3 – forme fondamentale

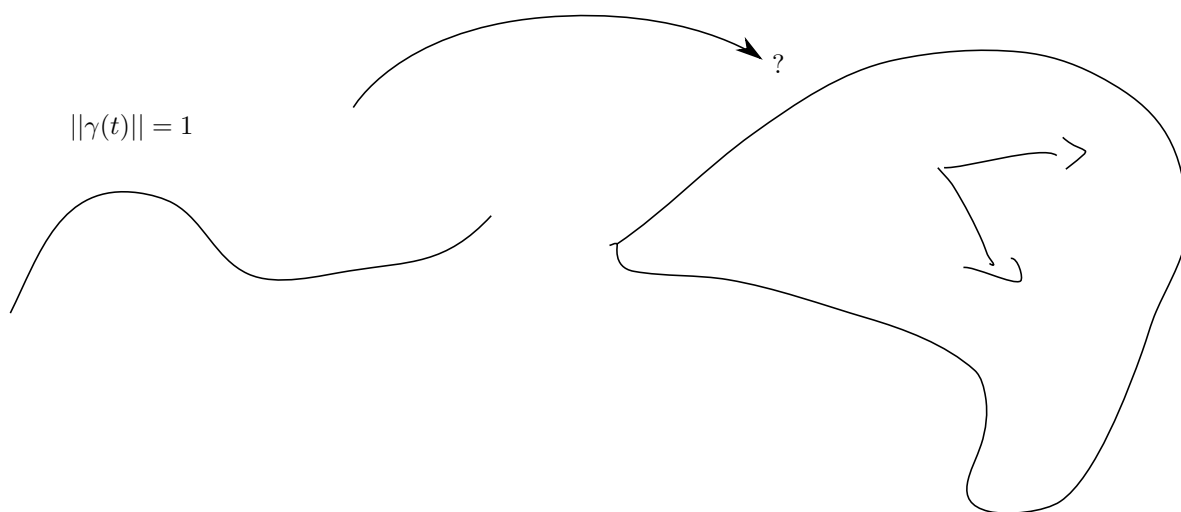


FIGURE 4 – forme fondamentale

## Rappels

Première forme fondamentale

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale est une forme bilinéaire symétrique définie positive (produit scalaire) sur  $T_x S$  : l'espace tangent au point  $x \in S$ .

C'est  $X, Y \in T_x S$

$$I_x(X.Y) = X \cdot Y$$

Dans la base  $p_u, p_v$  la matrice de  $I$  est

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si  $X = ap_u + bp_v$   $Y = cp_u + dp_v$

$$I_x(X, Y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

## Rappels (encore)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$Df \Big|_x = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$$

$$D_v f \Big|_x = Df \Big|_x \cdot v$$

est la dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction  $v$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Règle de chaîne :

$$D(g \circ f) \Big|_x = Dg \Big|_{f(x)} \cdot Df \Big|_x$$

### Remarque

Soit un chemin  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  t.q.  $\gamma(0) = x$ ;  $\gamma'(0) = v$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D(f \circ \gamma) \Big|_0 = Df \Big|_{\gamma(0)} \cdot D\gamma \Big|_0 = Df \Big|_{\gamma(0)} \gamma'(0) = Df \Big|_x \cdot v = D_v f \Big|_x$$

Dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction  $v$ . Dépend uniquement de  $\gamma(0)$  et  $\gamma'(0)$

Si  $p : U \rightarrow S$  est une carte locale de surface et que  $\gamma$  est un chemin dans  $U$ , alors  $p \circ \gamma$  est un chemin dans  $S$ .

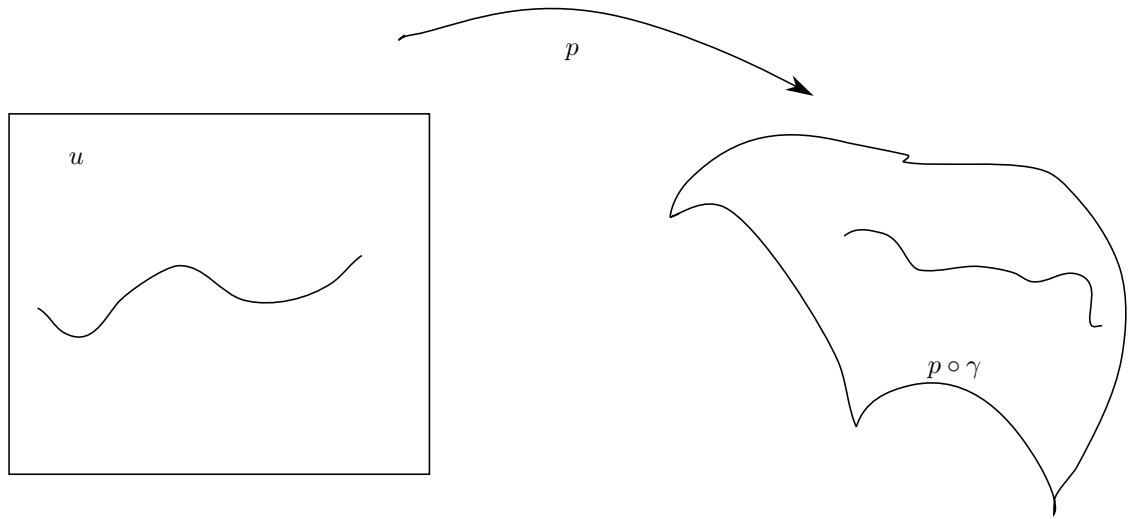


FIGURE 1 – chemin dans une surface

### Définition

Soit  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . ON dit que  $f$  est différentiable en  $x \in S$  si pour une carte  $p : U \rightarrow S$  t.q.  $p(u_0, v_0) = x$ ,  $f \circ p$  est différentiable en  $(u_0, v_0)$ . Dans ce cas la dérivée de  $f$  est  $x_i$  notée  $df \Big|_x$  est définie par

$$df \Big|_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R} \quad X \rightarrow D_x f \Big|_x$$

La composition  $F = f \circ p$ , s'appelle l'expression de  $f$  en coordonnées locales

Sans la base  $p_u, p_v$  de  $T_x S$  la dérivé  $d f \Big|_x$  a pour matrice :

$$Df \Big|_{u_0, v_0} = \left( \frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v} \right) \Big|_{(u_0, v_0)}$$

$$\gamma(t) = (u_0 v_0 \circ t(a, b))$$

alors

$$D(p \circ \gamma) \Big|_? = D p \Big|_? \cdot D \gamma \Big|_? = Df \Big|_? \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (p_u | p_v) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Big|_{u_0, v_0}$$

Si  $X = ap_u + bp_v$

$$Df \Big|_x = D(f \circ p \circ \gamma) \Big|_0 = D(F \circ \gamma) \Big|_0 = Df \Big|_{\gamma(0)} D\gamma \Big|_0 = D F \Big|_{(u_0, v_0)} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice de  $df \Big|_x$  dans la base  $p_u, p_v$  est bien  $DF \Big|_x$ .

Exemple

$$p(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$f : S \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \cdot x = \|x\|^2$$

En coordonnées locales  $f(x)$  est donnée par  $F = f \circ p$

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$f(p(0, z)) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + z^2 = 1 + z^2$$

$$DF = \left( \frac{dF}{d\theta}, dvFz \right) = (0 \quad 2z)$$

est la matrice de  $df$  en coordonnées locales

Définition

Soit  $S, S^*$  deux surfaces et  $f : S \rightarrow S^*$

On dit que  $f$  est dérivable/différentiable en  $x \in S$  si, pour des cartes  $p$  de  $S$ ,  $p^*$  de  $S^*$ , la composition

On appelle  $F = p \circ g \circ p$ , l'expression en coordonnées locales de  $f$

La dérivée de  $f$  est  $df \Big|_x T_x S \rightarrow T_{f(x)} S^*$  dont la matrice ?? les bases  $p_u, p_v$  de  $T_x S$  et  $p^*, p^*$  de  $T_{f(x)} S^*$  est  $DF \Big|_{f(x)?}$

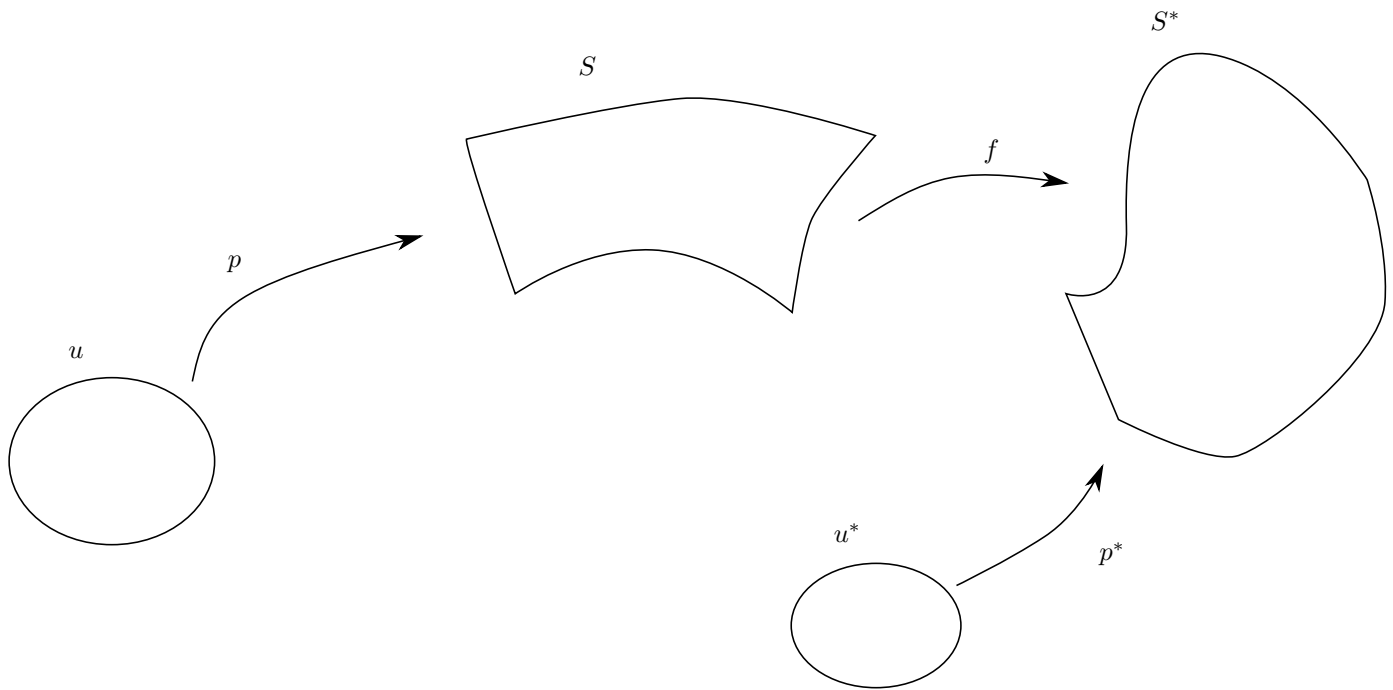


FIGURE 2 – Le même dessin que d'habitude

## Application de Gauss

Étant donné une surface  $S$  un choix ? de vecteurs unitaires normales s'appelles une orientation sur  $S$

L'application de Gauss est la fonction

$$n : S \rightarrow S^2$$

qui associe à un point  $x \in S$  le vecteur normal en  $x$ . (défini sur une surface orientée)

par exemple, si  $S = S^2$ ,  $n : S^2 \rightarrow S^2$  est l'identité.

Si  $S$  est un plan  $n$  est constant ?

Si  $S$  est un cylindre, l'image de  $S$  est un grand cercle

Si on a plutôt une scelle :

Définition L'opérateur de forme (shape operator) d'une surface  $S$  est  $\mathcal{S}_x(s) = -dn(x)$

$$\mathcal{S} : T_x S \rightarrow T_{n(x)} S$$

"Demonstaraion"

Déf La seonde forme fondamentale de  $S$  est



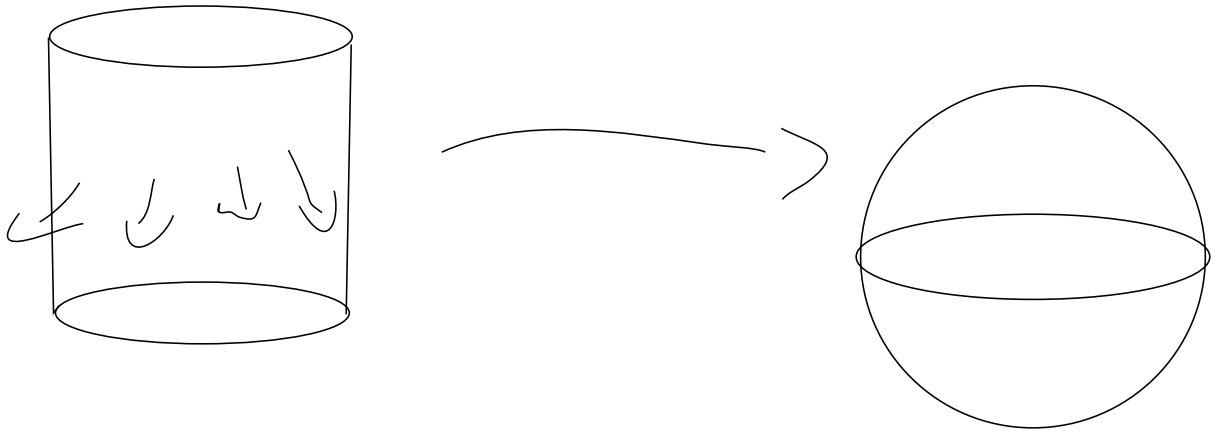


FIGURE 3 – grand cercle à shpère

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}(X) \cdot Y$$

$$(X < y \in T_x S)$$

Prop :  $II_x$  est une forme bilinéaire symétrique

Dém :  $II_x$  est bilinéaire car le produit scalaire est bilinéaire et  $\mathcal{S} = -dn$  est linéaire

Calculons  $II_x$  sur  $p_u, p_v$

ON sait que  $p_u|_{u,v} = n(?) = 0$

On prend  $\frac{d}{dv}$  de chaque côté

Fuck, je vais noter la conclusion quand on ferra le prochain rappel

Je vois pas assez bien :(

.

FIGURE 4 – Scelle vers shpère

## Rappels

La dérivée d'une application  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est l'application linéaire  $df|_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R}$  de matrice  $D(f \circ p)$  dans la base  $p_u, p_v$

Par une application  $f : S \rightarrow S^*$

$$df \Big|_x : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S^*$$

est donné par la matrice  $D \circ p^{-1} \circ f \circ p$  dans la base  $p_u, p_v$  de  $T_x S$  et  $p_u^* p_v^*$

Application de Gauss  $n : S \rightarrow S^2$  vecteur normal unitaire pour  $p$  fixée,  $n = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}$

Opérateur de forme :  $\mathcal{S}_x : T_x S \rightarrow T_x S$

$$\mathcal{S}_x(x) = -dn_x(X)$$

seconde forme fondamentale

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot Y = I(\mathcal{S}_x(X), Y)$$

Exemple :

$$p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \quad p_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

$$p_u p_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|p_u \times p_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a montré, dans la démonstration que  $II$  est symétrique, que

$$II_x = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}$$

Résumé intra

## I Courbes dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Longueur d'arc  $\rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$
- Paramétrisation par longueur d'arc

$$\Psi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\gamma(s) = (\gamma \circ \psi^{-1})(s)$$

- Courbure, torsion, repère de Frenet
- Formules de Frenet-Serret

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa T + \tau B \\ B'(s) &= -\tau N \end{aligned}$$

- Théorème fondamentale des courbes dans  $\mathbb{R}^3$  - isométrie de  $\mathbb{R}^3$  + isométrie discrète
- courbures signées d'une courbe dans  $\mathbb{R}^2$
- Indice de rotation

$$R(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) ds$$

- Umlaufsatz

## II Surfaces dans $\mathbb{R}^3$

- Cartes de surfaces (paramétrisation)
- Surfaces lisses
- Plan tangent  $T_{p(u,v)}S = \langle p_u, p_v \rangle$  (engendré par)
- Théorème des valeurs régulières

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, x) = x$$

est une surface lisse si  $c$  est une valeur régulière  $\iff$  tout les points de  $f^{-1}(c)$  sont réguliers (  $df \neq 0$  )

- Première forme fondamentale

$$X, Y \in T_x S$$

$$I_x(X, Y) = X \cdot Y$$

donné par la matrice

$$I = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

dans la base  $p_u p_v$

- Surfaces localement isométrique (même première forme fondamentale)

## Rappels

Application de Gauss :

—

$$n : S \rightarrow S^2$$

— opérateur de forme  $\mathcal{S}_x T_x S \rightarrow T_x S \quad \mathcal{S}_x(X) = dn(X)$

— Seconde forme fondamentale  $II_x T_x S$ ?????

$$II_x(X, Y) = \mathcal{S}_x(X) \cdot \mathbf{Y}$$

En pratique, pour calculer  $II$  on utilise que sa matrice dans la base  $p_u, p_v$  est  $M_{II} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{uv} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$

Comment trouve-t-on la matrice de  $\mathcal{S}$  maintenant ?

Proposition : Dans la base  $p_u, p_v$

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_{II}$$

Si  $M_{\mathcal{S}}$  est la matrice de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}(ap_u + bp_v) = cp_u + dp_v$  alors

$$M_{\mathcal{S}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

.

On sait que  $II(X, Y) = \mathcal{S}(X) \cdot y = I(\mathcal{S}(X), Y)$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{II} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \left( M_{\mathcal{S}}^T \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^T M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M_{\mathcal{S}}^t M_I \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = M_{\mathcal{S}}^T M_I$$

$$M_{calS}^T = M_{II} M_I^{-1}$$

$$M_{\mathcal{S}} = M_I^{-1} M_{II}$$

En général, on a que  $M_{\mathcal{S}}$  n'est pas symétrique bien que les deux autres le soient

## Interprétation de la seconde forme fondamentale

$\alpha$  : Courbe planaire d'intersection entre le plan engendré par  $X \in T_x S$  et  $n(x)$  et la surface  $S$  paramétré par longueur d'arc et  $\alpha(0) = x$

$$T(0) = \alpha'(0) = X$$

$$N(0) = \pm n(x)$$

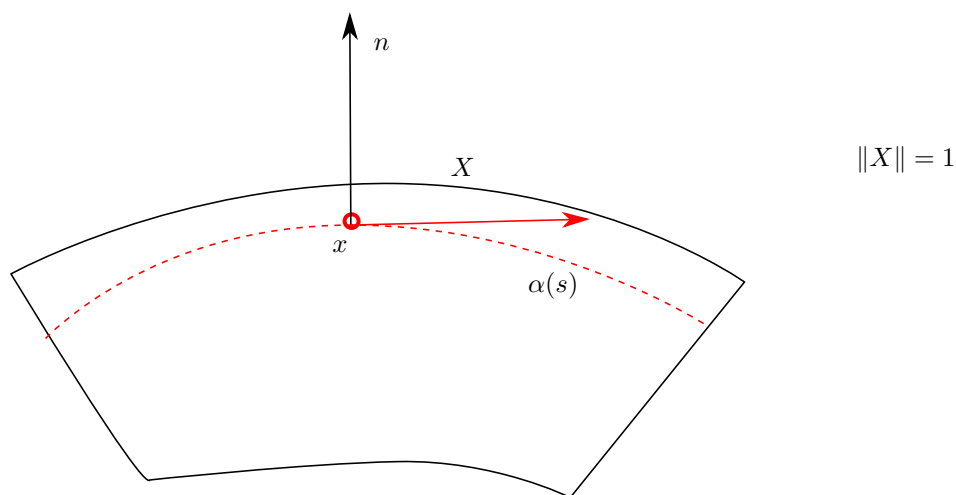


FIGURE 1 – Interprétation de la seconde forme fondamentale

$$N(s) = \pm n(\alpha(s))$$

$$N'(o) = -\kappa(0)T(0) + \underbrace{\tau(0)B(0)}_0 = -\kappa(0)X$$

$$\kappa(0) = -N'(0) = (n(\alpha(s)))' \Big|_0 \cdot X = \pm dn(X) \cdot X = \pm S(X) \cdot X = II(X, X)$$

(Il y a des étapes rajoutées à posteriori que je vois mal... demander à quelqu'un peut-être...)

$II(X, X)$  est la courbure sectionnelle de  $S$  dans la direction  $X$

Parenthèse d'algèbre linéaire

La notion de matrice symétrique dépend de la base :

$$\text{matrice symétrique : } M^T = M$$

Si  $M$  est la matrice de l'application  $T : V \mapsto V$   $T$  est auto-adjoint si :

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v) \forall u, v \in V$$

Un opérateur est auto-adjoint pour un produit scalaire donné. C'est la généralisation de matrice symétrique sans base

L'application de  $\mathcal{S}$  est auto-adjointe par  $I$  :

$$I(\mathcal{S}(X), Y) = I(X, \mathcal{S}(Y))$$

Dans la base  $p_u, p_v$  la matrice de  $\mathcal{S}$  n'est pas symétrique mais dans une base orthogonale, elle le serait.

Un opérateur auto-adjoint est toujours diagonalisable et ses valeurs propres sont réels.

$\Rightarrow$   $\mathcal{S}$  est diagonalisable et a 2 valeurs propres réelles  $k_1, k_2$ . On appelle  $k_1, k_2$  les courbures principales de  $S$  en  $x$ . Les vecteurs propres associés sont les directions principales. Elles s'interprètent comme les courbures sectionnelles max et min.

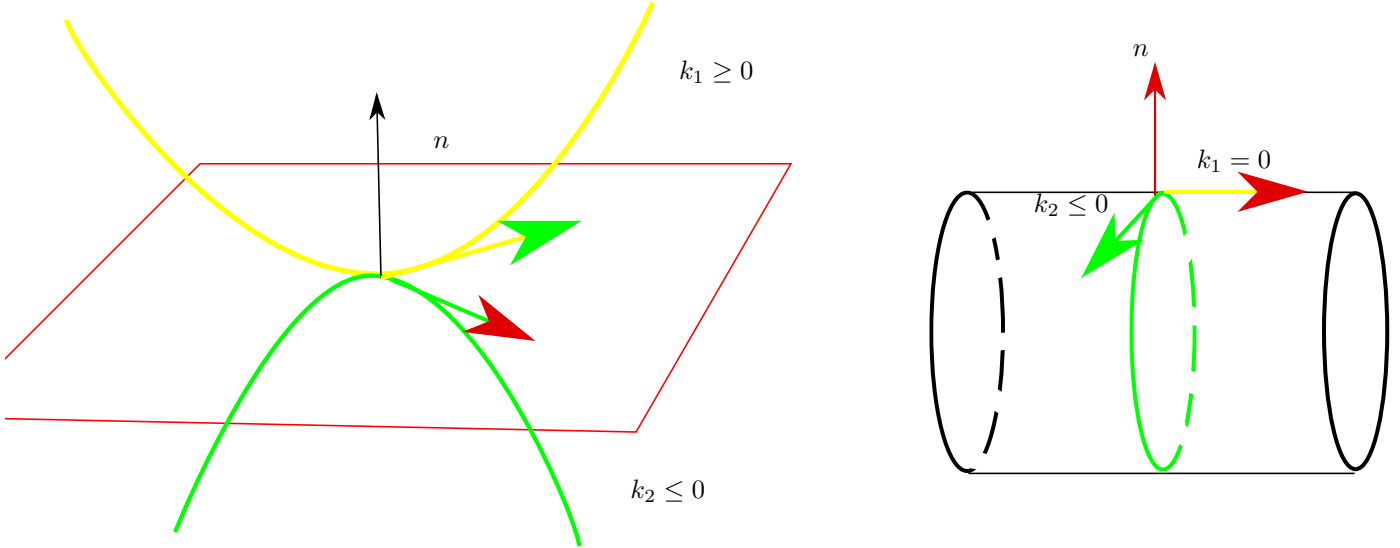


FIGURE 2 – Courbures principales

Le déterminant de  $\mathcal{S} = k_1 k_2$  s'appelle la Courbure de Gauss et sa trace  $= k_1 + k_2$  s'appelle la sourbure moyenne

Exemple : Surface avec un point de selle  $p(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$

$$p_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad p_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$p_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_u \times p_v = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

$$n(p(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = m_I^{-1} M_{II} = \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2) - u^2v^2} \begin{pmatrix} 1+u^2 & -uv \\ -uv & 1+v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\dots}} \\ \frac{1}{\sqrt{\dots}} & 0 \end{pmatrix}$$

au point  $u = v = 0$   $p(u, v) = (0, 0, 0)$

$$M_S \Big|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ses vecteurs propres sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  avec valeurs propres associées 1, -1. La courbure de Gauss est -1

Exercices :

— Si  $S$  est le graph d'une fonction  $f$  t.q.  $f(0, 0) = 0$   $\nabla f|_{(0,0)} = 0$  Alors  $M_S|_{(0,0)} = H_{(0,0)}$

$$p_{x,y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad H_{0,0} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} \\ \dots \end{pmatrix}$$

— Calculer la courbure de Gauss pour

1.  $S^2$

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

2. La pseudo-sphère (surface de révolution d'une tractrice)

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sech} \varphi \cos \theta \\ \operatorname{sech} \varphi \sin \theta \\ \varphi - \tanh \varphi \end{pmatrix}$$

## Symbole de Christoffel et Théorema Egregium

Une quantité sur une surface est intrinsèque si elle est invariante par isométrie locale.  $\iff$  Dépendent uniquement de la première forme fondamentale (et ses dérivées).



L'opérateur de forme et  $II$  dépendent d'autre chose que seulement la première forme fondamentale. Par exemple un cylindre est à une isométrie près d'un plan mais ces deux surface n'ont clairement pas le même  $\mathcal{S}$  et  $II$ . C-à-d qu'en faisant des tranformations localement rigique on présèrve la première forme fondamentale mais on modifie les courbures/direction principales. La courbures de Gauss par contre, bien qu'elle ai été définie par une approche "extrinsèque", est intrinsèque !

Pour le démontrer on veut essayer de définir la courbure de Gauss en passant seulement par la première forme fondamentale. Pour se faire, il va falloir définir les symbols de Christoffel

### Symbols de Christoffel

En tout point de  $S$ , les vecteurs  $p_u p_v, n$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Les coefficients  $L, M, K$  de  $II$  donnet les coordonnées en  $n$  des dérivées secondes  $p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}$

$$\begin{aligned} p_{uu} &= (\Gamma_{uu}^u) p_u + (\Gamma_{uu}^v) p_v + L n \\ p_{uv} &= (\Gamma_{uv}^u) p_u + (\Gamma_{uv}^v) p_v + M n \\ p_{vv} &= (\Gamma_{vv}^u) p_u + (\Gamma_{vv}^v) p_v + N n \end{aligned}$$

$\Gamma_{ij}^k$  = Coordonnées en  $p_u$  de  $p_{ij}$   $i, j, k \in \{u, v\}$

Les  $\Gamma_{ij}^k$  s'appellent symbols de Christofel

Exemple : Calculons  $\Gamma_{ij}^k$  pour  $S^2$

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$p_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$n(\theta, \varphi) = p(\theta, \varphi)$$

$$p_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{\varphi\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$p_{\theta\theta} \cdot n = -\sin^2 \varphi$$

$$p_{\theta\varphi} \cdot n = 0$$

$$p_{\varphi\varphi} \cdot n = -1$$

$$p_{\theta\theta} = 0p_{\theta} + \sin\varphi\cos\varphi p_{\varphi} - \sin^2\varphi n$$

$$p_{\theta\varphi} = 0p_{\theta} + 0p_{\varphi} + 0n$$

$$p_{\varphi\varphi} = 0p_{\theta} + 0p_{\varphi} - n$$

## Rappels

- $M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ G & G \end{pmatrix}$
- $M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$
- $M_{S=M_I^{-1} \cdot M_{II}}$
- $\mathcal{S}$  est diagonalisable
- $k_1, k_2 \rightarrow$  courbure principale
- $\det(\mathcal{S}) \rightarrow$  courbure gaussienne
- $\text{tr}(\mathcal{S}) \rightarrow$  Courbure moyennne
- Symbol de Christoffel

Tentons d'exprimer  $\Gamma_{ij}^k$  en termes de  $E, F, G$

$$p_{uu}p_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F = \frac{E_u}{2}$$

$$p_{uu}p_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G = F_u \frac{E_v}{2}$$

$$p_{uv}p_u = \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F = \frac{E_v}{2}$$

$$p_{uv}p_v = \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G = \frac{G_u}{2}$$

$$p_{vv}p_u \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F + F_v - \frac{G_u}{2}$$

$$p_{vv}p_v = \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G = \frac{G_v}{2}$$

Pour obtenir les équations de Gauss-Codazzi, on compare  $p_{uvv}$  et  $p_{uvu}$

$$p_{uvv} = (\Gamma_{uu}^u)_v p_u + \Gamma_{uu}^u p_{uv} + (\Gamma_{uu}^v)_v p_v + \Gamma_{uu}^v p_{vv} + L_v n + L n_v$$

$$= (\Gamma_{uu}^u)_v p_u + \Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uu}^u (\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uu}^v p_v + M_n) + (\Gamma_{uu}^v)_v p_v + \Gamma_{uu}^v (\Gamma_{vv}^u p + u + \Gamma_{vv}^v p_v + N_n) + L_v n + L(bp_u + dp_v)$$

$$\boxed{D_n = \begin{pmatrix} a & | & b \\ c & | & d \end{pmatrix} = -M_I^{-1} M_{II} \implies n_u = ap_u + cp_v n_v = bp_u + dp_v}$$

$$= ((\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u + Lb) p_u + ((\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^? + Ld) p_v + (\Gamma_{uu}^u M + \Gamma_{uu}^v N + L_v) n$$

De la même manière

$$p_{uvu} = ((\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u + Ma) p_u + ((\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v + Mc) p_v + (\Gamma_{uv}^u + \Gamma_{iv}^v M + M_u) n$$

$$p_{uuv} = p_{uvu}$$

On compare les coefficients de  $p_v$

$$Mc - Ld = (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u = \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v + \Gamma + uu^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v$$

$$Mc - Ld = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - MF & GM - F^2 \\ EM - FL & EN - ?? \end{pmatrix}$$

$$MC = Ld = M \left( \frac{FL - EM}{EF - G^2} \right) - L \left( \frac{FM - EN}{EF - G^2} \right) = \frac{E - M^2 + LN}{EF - G^2} = E \cdot k$$

$$E \cdot k = \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - (\Gamma_{uv}^v)^2 + (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u$$

$k$  est intrinsèque (Peut être calculé avec  $E, F, G$  et leurs 2 premières dérivées

On peut aussi obtenir des équation similaire avec

$$F \cdot k \quad F \cdot K \quad g \cdot k$$

Équations de Cedazzi

$$\begin{aligned} L_v = M_u &= L\Gamma_{uv}^u + M(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - N\Gamma_{uu}^v \\ M_v - N_u &= L\Gamma_{vv}^u + M(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - N\Gamma_{uv}^v \end{aligned}$$

Comme la courbure est une propriété intrinsèque, Si un surface possède un surface de Gauss nul (comme une pizza). On peut forcer sa courbure dans une direction à être nul en la faisant courber dans un autre direction. Si la courbe imposé est *vers le haut*. Il n'y aura aucune courbure vers le bas et la aliments ne tomberons pas.

## Rappels

Les symbols de Christoffel sont intrinsèques

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_u/2 \\ F_u/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_v/2 \\ G_u/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_v - G_u/2 \\ G_v/2 \end{pmatrix}$$

$$M_S = M_I^{-1} \cdot M_{II}$$

$$M_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = (p_u | p_v)^t (p_u | p_v)$$

$$M_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{uu} \cdot n & p_{uv} \cdot n \\ p_{vu} \cdot n & p_{vv} \cdot n \end{pmatrix}$$

Les équations de Gauss-Cedazzi (que je ne réécrirais pas ici !)

## **Théorème fondamentale des surfaces dans $\mathbb{R}^3$**

Soit  $p, p^* : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux cartes de surfaces. Alors  $I = I^*$  et  $II = II^*$  ssi  $\exists$  une isométrie directe  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  t.q.  
 $p^* = T \circ p$

( $\Leftarrow$ )

Écrivons  $T(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} p_u^* &= (T \circ p)_u = (Ap + b)_u \\ p_v^* &= Ap_v \end{aligned}$$

Comme  $A$  est orthogonale,

$$Ap_u \times Ap_v = A(p_u \times p_v)$$

$$n^* = \frac{p_u^* \times p_v^*}{\|p_u^* \times p_v^*\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|A(p_u \times p_v)\|} = \frac{A(p_u \times p_v)}{\|p_u \times p_v\|} = A \cdot n$$

$$E^* = p_u^* \cdot p_u^* = Ap_u \cdot Ap_u = p_u \cdot p_u = E$$

même chose pour  $F$  et  $G \implies I = I^*$

On a

$$\begin{aligned} p_{uu}^* &= (Ap_u)_u = Ap_u u \\ p_{uv}^* &= Ap_{uv} \\ p_{vv}^* &= Ap_v v \end{aligned}$$

$$\implies L^* = n^* \cdot p_{uu}^* = (An) \cdot (Ap_u u) = n \cdot p_{uu} = L, \text{ de même pour } M \text{ et } N$$

$$\implies II = II^*$$

( $\implies$ )

Fixons  $u_0 \in U$

Soit  $T$  l'isométrie  $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  de  $\mathbb{R}^3$  t.q.  $T(p(u_0)) = p^*(u_0)$

$$\begin{aligned} A \cdot p_u \Big|_{u_0} &= p_u^* \Big|_{u_0} \\ A \cdot p_v \Big|_{u_0} &= p_v^* \Big|_{u_0} \\ A \cdot n \Big|_{u_0} &= n^* \Big|_{u_0} \end{aligned}$$

Si  $e, f, g, e^*, f^*, g^*$  sont deux bases de  $\mathbb{R}^3$  avec les mêmes produits scalaires entre les vecteur de base, alors  $\exists A$  orthogonale t.q.  $A : e \rightarrow e^*, \dots$

Définissons  $\tilde{p} = T \circ p$  et montrons que  $\tilde{p} = p^*$

Soient  $\mathbf{u} \in U$  quelconque et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin t.q.  $\gamma(0) = \mathbf{u}_0$  et  $\gamma(1) = \mathbf{u}$

Considérons la famille de bases de  $\mathbb{R}^3$  donné par

$$\begin{aligned} &\tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} \quad \tilde{p}_v \Big|_{\gamma(t)} \quad \tilde{n} \Big|_{\gamma(t)} \\ \tilde{E}(t) &= \left( \tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n} \Big|_{\gamma(t)} \right) \\ \tilde{E}(t)^t \tilde{E}(t) &= \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, si

$$\tilde{E}^*(t) = \left( \tilde{p}_u^* \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{p}_v^* \Big|_{\gamma(t)} \mid \tilde{n}^* \Big|_{\gamma(t)} \right)$$

$$\tilde{E}(t)^t \tilde{E}(t)^* = \begin{pmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \tilde{p}_u \Big|_{\gamma(t)} \right) = \tilde{p}_{uv} \Big|_{\gamma(t)} \gamma'_1(t) + \tilde{p}_{uv} \Big|_{\gamma(t)} \gamma'_2(t) = (\Gamma_{uu}^u \tilde{p}_u + \Gamma_{uv}^v \tilde{p}_v + L \tilde{n}) \gamma'_1(t) + (\gamma_{uv}^u \tilde{p}_u + \Gamma_{uv}^v \tilde{p}_v + M \tilde{n}) \gamma'_2(t) = \dots$$

Nottons que les coefficients dépendent seulement de  $E, F, G, L, M, N$

$$\implies \frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = \tilde{E}(t) \cdot M(t)$$

$$\frac{d}{dt} E^*(t) = E^*(t) M(t)$$

Lemme :

Soient  $B(t) = (e_1|e_2|e_3)$  et  $B^*(t) = (e_1^*|e_2^*|e_3^*)$  deux familles de bases dans  $\mathbb{R}^3$  t.q.

$$B^t B = B^{*t} B^* \forall t \quad B'(t) = B(t) M(t) \quad B^{*'}(t) = B^*(t) M(t)$$

$$B(0) = B^*(0) \quad B = B^*$$

Par le lemme appliqué à  $\tilde{E}(t), E(t) \implies \tilde{E}(t) = E^*(t) \forall t$

$$\tilde{p}_{u/v} \Big|_{\gamma(t)} = p_{u/v}^* \Big|_{\gamma(t)}$$

... ■

Démonstration du lemme

(La matrice  $G = B^* B$  s'appelle la matrice de Gram)

Comme  $G \cdot G^{-1} = I$

$$\frac{d}{dt} G \cdot^{-1} + G \cdot \frac{d}{dt} (G^{-1}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (G^{-1}) = -G^{-1} \frac{d}{dt} G G^{-1}$$

$$\frac{d}{dt} G = \frac{d}{dt} (B^* B) (B^t)' B + B^t B' = (B^{*t})' B + (B^* t) B^{*'} \quad \square$$

Calculons la dérivée de

$$(B^*)^t G^{-1} B$$

par rapport à  $t$

$$(B^{*t} G^{-1} B)' = (B^{*t} G^{-1})' B + B \cdots$$

Fuck that, c'est le cambodge

#### Dérivées covariantes et parallélisme

Dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , on dit que 2 vecteurs sont parallèles. si, quand on translate au point de base ils sont multiples/égaux.

Sur une surface, les plans tangents à des points distincts sont différents.

Définition : Soit  $X$  un champ de vecteur sur une surface  $S$  ( $X_p \in T_p S$ )  $\forall p \in S$  et  $V \in T_p S$ . La dérivée covariante de  $X$  dans la direction  $V$  est  $\nabla_v X := \pi_{T_p S}^\perp(D_V X)$



Rappels :

Théorème fondamentale des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$I^* = I \wedge II = II^* \iff p^* = T \cdot p, T|T \text{ est une isométrie directe}$$

Champ de vecteurs sur  $S$

$$x : S \rightarrow \mathbb{R}^3 | X(x) \in T_x S$$

$x$  serait la vitesse d'un fluide sur la surface

Dérivé covariante

$$\nabla_v : X = \pi_{T_x S} D_v X = D_v X - (D_v x \cdot u)u$$

Rappels sur les dérivées directionnelles

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$  on peut définir sa dérivée directionnelle dans la direction du vecteur  $v$

$$D_v f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

On peut l'évaluer en utilisant un chemin :

$$D_v f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \quad \text{avec } \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$$

Si  $f$  est définie sur une surface  $s$ , on utilise un chemin de la forme  $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$

Les vecteurs tangents à  $\gamma(t)$  sont  $\frac{d}{dt} \gamma(t) = u'p_u + v'p_v$

Si on connaît les fonctions en coordonnées locales  $(f(u, v))$ , on a :

$$D(u'p_u + v'p_v)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u(t), v(t))$$

Un champ de vecteur sur  $S$  est intrinsèque. Si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $S$ , on peut l'écrire comme

$$X = f(u, v)p_u + g(u, v)p_v$$

$$\begin{aligned} Du'p_u v'p_v X &= u'(f(u, v)p_u + g(u, v)p_v)_u + v'(f(u, v)p_u + g(u, v)p_v)_v \\ &= u'(f_u p_u + f_{uu} + g_u p_v + g p_{uv}) + v'(f_v p_u + f p_{uv} + g_u p_u g p_u u) \end{aligned}$$

Les termes  $p_{uu}, p_{uv}$  et  $p_{vv}$  ont des composantes en  $u$ .  $\implies$  La dérivée directionnelle n'est pas un champ de vecteur sur  $S$  mais la dérivée covariante oui !

Lien avec les symboles de Christoffel :  $p_u$  et  $p_v$  sont des champs de vecteurs sur  $S$

Exemple :

Sur chaque point on peut calculer la dérivée covariante de  $p_u$  par rapport à  $p_v$

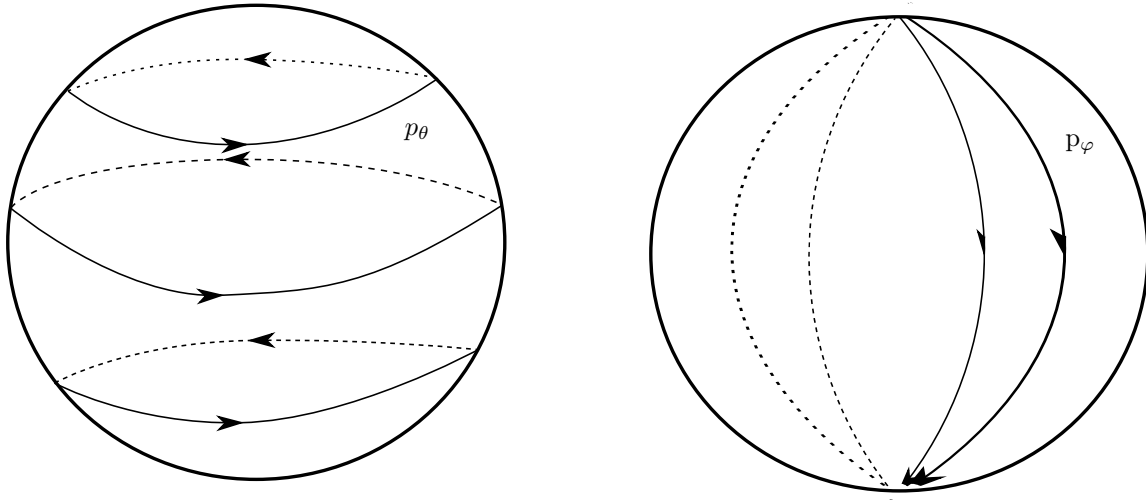


FIGURE 1 – Champ de vecteur

$$\nabla p_u p_u = \pi_{T_x}^\perp S(Dp_u p_u) = \pi_{T_x}^\perp S(\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + Lu) = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v$$

On peut alors trouver les quantités intrinsèques (ignorent les isométries locales)

$$\nabla p_u p_v = \Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v \nabla p_v p_u = \Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v \nabla p_v p_u = \Gamma_{vu}^u p_u + \Gamma_{vu}^v p_v$$

Propriétés de la dérivé covariante

1. Linéarité 1 :

$$\nabla_v(x_1 + x_2) = \nabla_v X_1 + \nabla_v x_1 + \nabla_v x_2$$

2. Règles de Leibnitz :

$$\nabla_v(fX) = (D_v f)X + f \nabla_v X \quad f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

3. linéarité 2 :

$$\nabla_{av_1+bv_2} X = a \nabla_{v_1} X + b \nabla_{v_2} X$$

Démonstation de la deuxième propriété :

$$\begin{aligned}
\nabla_v(fx) &= D_v(fx) - (D_v(fx) \cdot u)n \\
&= (D_v f)x + f(D_v x) - ((D_v f) \underbrace{x \cdot n}_0) + f(D_u x) \cdot n)n \\
&= D_v fx + f(D_v x) = [(D_v x) \cdot n]n \\
&= D_v fx + f\nabla_v x
\end{aligned}$$

En utilisant les trois propriétés on calcule :

$$\begin{aligned}
\nabla_{p_u}(fp_u + gp_v) &= \nabla_{p_u}(fp_u) + \nabla_{p_u}(gp_v) \\
&= (Dp_u f)p_u + (DP_u g)p_v + f\nabla_{p_u}p_u + g\nabla_{p_u}p_v \\
&= (f_u + f\Gamma_{uu}^u + g\Gamma_{uv}^u)p_u + (g_u + \Gamma_{uu}^v + g\Gamma_{uv}^u)p_v
\end{aligned}$$

On fait la même chose pour  $\nabla_{p_v}$  et avec la propriété 3 on peut calculer  $\nabla_v x$  pour n'importe que  $v, x$ .

## Rappels

### — propriétés

—

$$\nabla_v(X + Y) = \nabla_v(X) + \nabla_v(Y)$$

—

$$\nabla_v(fX) - (D_v f)X + (f)\nabla_v X$$

—

$$\nabla_{v_1+v_2}X = a\nabla_{v_1}X + b\nabla_{v_2}X$$

### — Coordonnées

—

$$\nabla_{p_u}p_u = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v$$

—

$$\nabla_{p_u}p_v = \nabla_{p_v}p_u = \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uv}^v p_v$$

—

$$\nabla_{p_v} = \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v$$

. Pour  $X = fp_u gp_v$

$$\nabla_{p_u}X = (f_u + f\Gamma_{uu}^u + g\Gamma_{uv}^u)p_u + (g_u + f\Gamma_{uv}^v + \Gamma_{vv}^v)p_v$$

$$\nabla_{p_v}X = (f_v + f\Gamma_{uv}^u + g\Gamma_{vv}^u)p_u + (g_v + f\Gamma_{uv}^v + g\Gamma_{vv}^v)p_v$$

Proposition : Soit  $\alpha$  un chemin sur  $S$  avec  $\alpha(0) = x_0$  et  $\alpha(1) = x$ . Soit  $X_0 \in T_{x_0}S$ . Alors il existe un unique champ de vecteurs sur  $\alpha$  t.q.  $\nabla_{\alpha'}X \equiv 0$

Démonstration : On écrit  $\alpha(t) = p(u(t), v(t)) \implies \alpha' = u'p_u + v'p_v$  et  $X = f(t)p_u + g(t)p_v$

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}X &= \pi_{T_{\alpha'(t)}}^\perp(D_{\alpha'}X)S = \pi_{T_{\alpha'(t)}S}(f'p_u f(p_{uu}u'p_{uv}v') + g'p_v + g(p_{uv}u'p_{vv}v')) \\ &= (f' + f(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + g(\Gamma_{uv}^u u' + \Gamma_{vv}^u v'))p_u + (g' + f(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + g(\Gamma_{uv}^v u' + \Gamma_{vv}^v v'))p_v = 0 \end{aligned}$$

On réécrit :

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v' & \Gamma_{uv}^u u' + \Gamma_{vv}^u v' \\ \Gamma_{uv}^v u' + \Gamma_{vv}^v v' & \Gamma_{uv}^v u' + \Gamma_{vv}^v v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (*)$$

C'est un système d'équation différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1

$$\implies \exists! \text{ solutions étant donné } f(0), g(0), g'(0), f'(0)$$

Comme l'équation (\*) dépend seulement de  $\Gamma_{ij}^k$ , le transport est parallèle est intrinsèque ■

Exemple : Calculons le transport parallèle d'un vecteur le long d'un cercle de latitude sur la sphère. Sur  $S^2$

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$I_{(\theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = -\sin \varphi \cos \varphi$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\theta = \cot \varphi$$

On prend le cercle de Latitude  $\varphi_0 : \theta(t) = t, \quad \varphi(t) = \varphi_0$  avec  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot \varphi \varphi' & \cot \varphi \theta' \\ \sin \varphi \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$f' = \cot \varphi_0 g$$

$$g' = \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 f$$

$$\implies f'' = -\cot \varphi_0 g' = -\cot \varphi_0 (\sin \varphi_0 \cos \varphi_0) f = \cos^2 \varphi_0 f$$

$$\implies f(t) = c_1 \cos((\cos \varphi_0)t) + c_2 \sin((\cos \varphi_0)t)$$

$$1 = f(0) = c_1$$

$$0 = g(0) - \frac{f'(0)}{\cot \varphi_0} = \frac{c_2 \cos \varphi_0}{-\cos \varphi_0} = -c_2 \sin \varphi_0 \implies c_2 = 0$$

$$\implies f(t) = \cos((\cos \varphi_0)t)$$

$$g(t) = \frac{-\cos(\varphi_0) \sin(\cos \varphi_0 t)}{-\cot \varphi_0} = \sin \varphi_0 \sin(\cos(\varphi_0)t)$$

transport parallèle :

$$X(t) = \cos(kt)p_\theta + \sin \varphi_0 \sin(kt)p_\varphi \quad k = \cos \varphi_0$$

$$\|X(t)\|^2 = \cos^2(kt)p_\theta p_\theta + 2 \sin \varphi_0 \cos^2(kt)p_\theta p_\varphi + \sin^2 \varphi_0 \sin^2(kt)p_\varphi p_\varphi = \cos^2(kt) \sin^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \sin^2(kt) = \sin^2(\varphi_0)$$

On remarque que la norme ne dépend pas de  $t$

Proposition : Le transport parallèle préserve les longueurs et les angles

Démonstration : Soit  $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$  et  $X(t), Y(t)$  deux champs de vecteurs parallèles le long de  $\alpha$ .

$$\nabla_{\alpha'} X = \nabla_{\alpha'} Y = 0$$

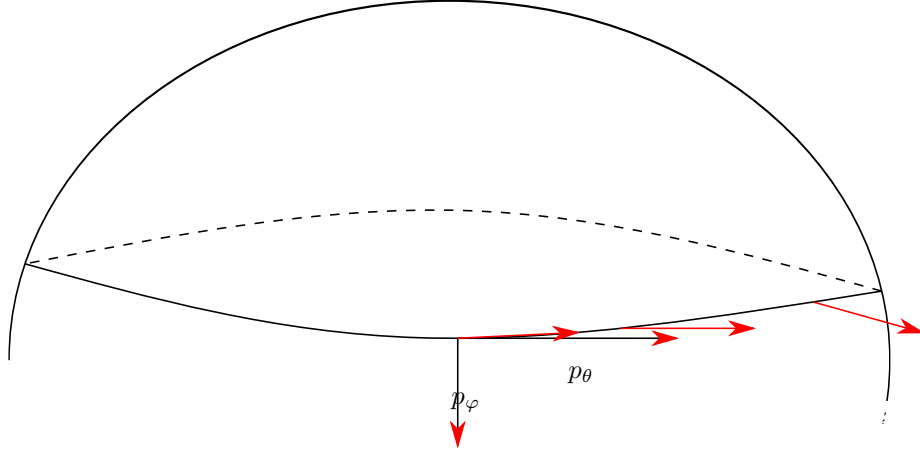


FIGURE 1 – Transport parallèle sur une shpère

Posons  $f(t) = X(T) \cdot Y(t)$

$$f'(t) = X'(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot Y'(t) = D_{\alpha'}(X) \cdot Y + X D_{\alpha'}(Y) = \nabla_{\alpha'}(X) \cdot Y + X \cdot \nabla_{\alpha'}(Y) = 0$$

$\implies f(t)$  est une constante  $\implies$  longeures et angles constants ■

Définition : Une chemin  $\alpha(t)$  sur une surface  $S$  est une géodésique si  $\nabla_{\alpha'(t)}\alpha' = 0 \forall t$

En coordonnées, pour  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  l'équation géodésique s'écrit

$$\alpha; (u'p_u + v'p_v) = u''p_u + u'\nabla_{u'}p_u + v''p_v + v\nabla_{v'}p_v$$

$$= u''p_u + u'(u'(\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v) + v'(\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v)) + v''p_v + v'(u(\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v) + v'(\Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v)) = 0$$

$$\iff \begin{aligned} u'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^u + 2u'v' \Gamma_{uv}^u + (v')^2 \Gamma_{vv}^u &= 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{uu}^v + 2u'v' \Gamma_{uv}^v + (v')^2 \Gamma_{vv}^v &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} u'' + (u'v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= 0 \\ v'' + (u'v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

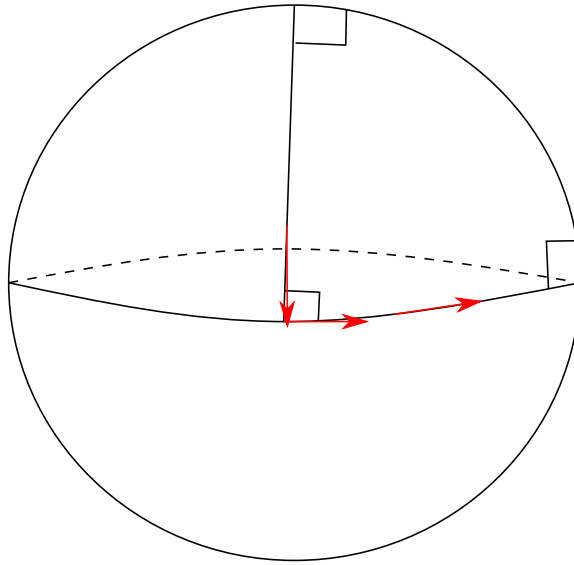


FIGURE 2 – Trois angles de 90

Les géodésiques sont uniques étant donné un point et vecteur tangeant initiaux

Exercice : Trouvez les géodésiques du plan en coordonnées polaires

$$p(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fun fact

On ne sait pas si

$$\pi^{\pi^{\pi^{\pi}}}$$

est un entier ou non !

## Rappels

- Transport parallèle :  $X$  est parallèle le long de  $\alpha$  si  $\nabla_{\alpha'} X \equiv 0$
- Étant donné  $X_0 \in T_{\alpha(0)} S \ni X$  définis sur  $\alpha$  et parallèle
- Géodésique :  $\alpha$  géodésique si  $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$  ( $\alpha'$  est parallèle le long de  $\alpha$ )
- Vitesse constante car parallèle implique longueur constante
- En coordonnées

$$\alpha(r) = p(u(t), v(t))$$

$$u'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

$$v'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{vu}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

Théorème de Clairaut : Si  $\alpha$  est une géodésique sur une surface de révolution alors  $\exists C$  constante t.q. pour tout point de  $\alpha$ ,

$$r \cos \varphi = C \quad (**)$$

Où  $r$  est la distance à l'axe et  $\varphi$  est l'angle entre  $\alpha'(t)$  et le parallèle par  $\alpha(t)$ . Inversement, tout courbe  $\alpha$  à vitesse constante qui satisfait  $(**)$  et n'est pas parallèle est une géodésique.

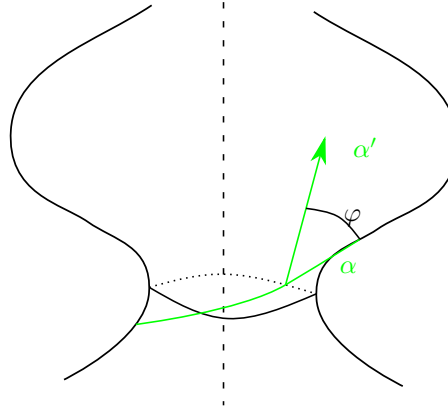


FIGURE 1 – Surface de révolution

$$p(s\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta x(s) \\ \sin \theta x(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$



$$I_{s\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Les seuls symbols de Chritoffel non-nuls sont

$$\Gamma_s^\theta = \frac{x'(s)}{x(s)} \quad \Gamma_{\theta\theta}^s = -x(s)x'(s)$$

Les équations géodésiques sont

$$S'' + (-x(s)x'(s))\theta'^2 = 0 \quad (1)$$

$$\theta'' + 2\frac{x'(s)}{x(s)}s'\theta' = 0 \quad (2)$$

$$(2) \iff \frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{x'(s)}{x(s)}s' \implies \ln \theta' = -2\ln(x(s)) + C \implies \theta' = \frac{C}{x^2} \implies x^2\theta' = C$$

Si  $\alpha(t) = p(s(t), \theta(t))$  est une géodésique, alors  $x^2\theta' = c$ .  $\alpha$  à une vitesse constante

$$\cos \varphi = \frac{\alpha' \cdot p_\theta}{\sqrt{\alpha' \cdot \alpha'} \sqrt{p_\theta \cdot p_\theta}} = \frac{(s'p_s + \theta'p_\theta) \cdot p_\theta}{v \cdot x} = \frac{\theta'x}{v'}$$

$$\cos \varphi = \frac{\theta'x}{v} = \frac{c}{xv} x \cos \varphi = \frac{c}{v} = c'$$

Pour l'autre directions, supposons que  $\alpha$  est à vitesse constante  $v$  est que  $r \cos \varphi = c$

$$r \cos \varphi = x \left( \frac{\theta'x^2}{v \cdot x} \right) = \frac{\theta'x^2}{v} = C \implies \theta'x^2 = Cv \implies \text{equation 2 est satisfaite}$$

Il ne reste qu'à montrer que (1) est satisfaite

$$v^2 = \alpha' \cdot \alpha' = s'^2 + x(s)^2\theta'^2 \implies - = 2s's'' + 2s(s)x'(s)s'\theta'^2 + x(s)^2(2\theta'\theta'')$$

$$0 = s's'' + xx's'\theta'^2 + x^2\theta' \left( -2\frac{x'}{x}s'\theta' \right) = s'(s'' - xx'\theta'^2)$$

Si  $\alpha$  n'est pas parallèle  $s' \neq 0$  alors  $s'' - xx'\theta'^2 = 0 \implies (1)$  est satisfaite donc  $\alpha$  est une géodésique ■

Application :

$$r \cos \varphi = \text{const}$$

Initialement  $\cos \varphi = 1$

$$\implies \text{const} = r_0 \forall t > 0 \quad r > r_0 \quad \text{car} \quad \cos \varphi < 1$$

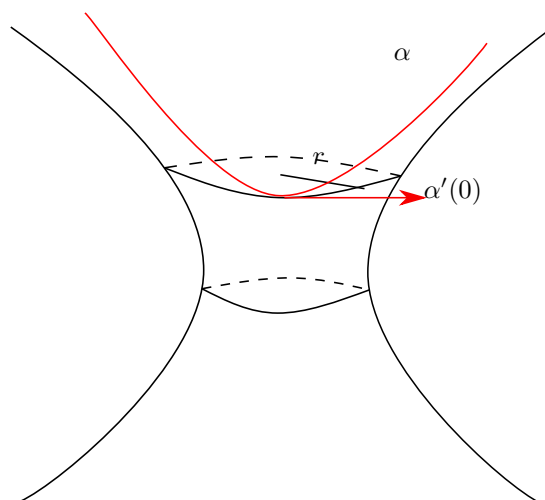


FIGURE 2 – Exemple d'application

## Courbure géodésique & et courbures normales

$\alpha$  paramétré par longueur d'arc sur une surface  $S$

$$T = \alpha'$$

...

(Il a effacé le tableau :( )