2024-02-12

Rappels

- Groupe de Lie matriciel $G \ni I \to$ sous-groupe fermé de $\mathrm{GL(n\mathbb{C})}$
- G est une sous-variété
- Exemples $\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}$ $\mathrm{Sl(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{O(n), O(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{SO(n), SO(n,\mathbb{C})}$ $\mathrm{U(n), SU(j)}$ $\mathrm{Sp(2n,\mathbb{R})}$ $\mathrm{Sp(2n,\mathbb{C})}$ Groupe des matrice triangulaire superieur $\mathrm{(S)O(p,q) = \{M \in GL(p+q,\mathbb{R}) | M^t I_{pq} M^t = I_{pq}\}}$ $\mathrm{(S)U(p,q) = \{M \in GL(p+q,\mathbb{C}) | M^* I_{pq} M = I_{pq}\}}$
- G Connexe si $\exists \gamma : [0,1] \to G$ avec $\gamma(0) = I, \quad \gamma(1) = A \quad \forall A \in G$
- $G^0 \subseteq G$ (composantes connexe de I) est un sous-groupe normal exemple :

$$\mathrm{O(1,1) = \{M = }\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |\mathrm{M^t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \}$$

On résous le système d'équations :

$$M = \begin{pmatrix} a & \pm c \\ c & \pm a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 - c^2 = 1$$

Exercice :
O(2)

Étant donné $f : G \to H$ un morphisme de groupe de Lie. On lui associe une application linéaire

$$\mathrm{d}f\Big|_I : T_I G \to T_I H$$

. En fait cette application détermine uniquement f.

$\boxed{\text{Un voisinage arbitrairement petit autour de } I \text{ engendre } G}$

Attention

Pas tout les applications linéaires $L : T_I G \to T_I H$ sont la dérivé d'un morphisme

On cherche une condition pour que

$$L = \mathrm{d}f\Big|_I$$

Étant donnée $g \in G$, on définit la multiplication à gauche $L_g :\to G$ c'est une application lisse mais

$$\mathrm{d}\, L_g\Big|_I : T_I G \to T_g G$$

On va plutôt regarder la conjugaison par $g \in G$

$$\mathrm{Ad(g) : G \to G}$$
$$h \to ghg^{-1}$$

$$\mathrm{d}\ \mathrm{Ad(g)}\Big|_I : T_IG \to T_IG$$
$$X \to gXg^{-1}$$

$$\gamma(t) \in G | \gamma(0) = I \quad \gamma'(0) = X$$
$$\mathrm{Ad(g)(\gamma(t)) = g\gamma(t)g^{-1}}$$

$$\mathrm{d}\ \mathrm{Ad(G)}\Big|_I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gXg^{-1}$$

Pour obenir une condition sur T_IG uniquement, on dérive Ad(f) par rapport à g en fixant X

$$G \to T_IG$$
$$g \mapsto gXg^{-1}$$

pour dériver cette appilcation on prend

$\gamma(-\epsilon, \epsilon) \to G$

$$\gamma(0) = I$$
$$\gamma'(0) = U \in T_IG$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \gamma(t)X\gamma(t)^{-1} = \left[\gamma'(t)X\gamma(t)^{-1} + \gamma(t)X(\gamma(t)^{-1})'\right]_{t=0}$$

$$= YXI^{-1} + -IXI^{-1}YI^{-1}$$
$$= YX - XY \in T_IG$$

L'opération sur T_Ig
$$[X, Y] = XY - YX$$
s'appelle le <u>crochet</u>

Comme le crocher est définit en termes de la multiplication dans G et ses dérivées, pour tout morphisme de groupe de Lie $f : G \to H$ la dérivé $\mathrm{d}f\ \big|_I : T_IG \to T_IH$ satisfaisant $\mathrm{d}f\ \big|_I [X, Y] = [\mathrm{d}f\ \big|_I X, \mathrm{d}f\ \big|_I Y]$

En fait $L : T_IG \to T_IH$ est la dérivé d'un morphisme de groupe de Lie $\iff$ $L([X, Y]) = [L(X), L(Y)] \forall X, Y \in T_IG$

Le crochet a toutes les propriétés suivantes

1. Bilinéaire
2. antisymétrique
3. Identité de Jacobi

<u>Définition</u> : Une algèbre de Lie complexe est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ complexe muni d'une application sur $\mathbb{C}$

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

<u>Exemple</u> : Si G est une groupe de lie matriciel, $g = T_I G$ muni de $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de lie

Si $f : G \to H$ est un morphisme d'algèbre de Lie (linéaire et $\mathrm{d}f\,\big|_I [X, Y] = [\mathrm{d}\,f\big|_I X, \mathrm{d}\,f\big|_I Y]$)

<u>Exemple</u> :

$$G = \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C}) \quad \mathfrak{g} = \mathrm{M_n}(\mathbb{C})$$

$G = \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$

$$\gamma(t) \in \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

$$\gamma(0) = 1$$

$$\det(\gamma(t)) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \det(\gamma(t)) = 0 = \mathrm{d}\det(0)\bigg|_{\gamma(0)} = \mathrm{tr} \circ \gamma'(0) = \mathrm{tr}(\gamma'(0))$$

$$\mathrm{tr}(\gamma'(0)) = 0 \quad \forall \gamma'(0) \in T_I \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$$

$$T_I \mathrm{SL}(\mathrm{n}\mathbb{C}) \subseteq \{\mathrm{X} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C}) |\, \mathrm{tr}\, \mathrm{X} = 0\}$$

En fait on a l'égalité