

Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$ osti, je suis déjà done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :

Si $v \in V_{\alpha}, C \in g_{\beta}$ β -racine, α -poids

alors $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ t.q. $a_0 > b_0 > c_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids v qui satisfait

- $v \in V_{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$
- $E_{23}v = E_{13}v = E_{31}v = 0$

Proposition :

V est engendré par v (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

W le sous-espace engendré par v et tout les mots possibles en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$ appliqué à V

$$W = \langle v, E_{21}v, E_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \dots \rangle$$

On veut montrer que W est $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ -invariant

Partie facile, W est invariant par \mathfrak{h} et par E_{21}, E_{31}, E_{32}

Reste à montrer que W est invariant par $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$, il suffit donc de vérifier $E_{1,2}W \subseteq W$ et $E_{2,3}W \subseteq W$

Posons W_n le sous-espace engendré par v et tout les mots en E_{21}, E_{32} de la longueur $\leq n$ appliqué à v

Par récurrence, on montre $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$, $E_{23} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$

Soit $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour } w' \in W_{n-1}$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1.

$$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12}) w'$$

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &\in g_{L_1-L_2} \\
E_{21} &\in G_{L_2-L_1} \\
\implies [E_{1,2}, E_{21}] &\in \mathfrak{h} = g_e
\end{aligned}$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{2,3} \cdot w &= E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w' \\
&= \left(\underbrace{[E_{23}, E_{21}]}_0 + E_{2,1} + E_{23} \right) \cdot w' \\
&= E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')}_{W_{n-2}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{W_{n-1}}
\end{aligned}$$

2. même chose

Puisque $W = \bigcup_n W_n$, W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$ ■

De la preuve, on déduit :

Pour V une représentation (pas nécessairement irréductible), si v est un vecteur de plus haut poids alors le sous espace engendré par v est ses images par E_{21} et $E_{3,2}$ est une sous représentation irréductible

Il existe un n pour lequel $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$ mais $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation : $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$ est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre α et $\alpha + m(L_2 - L_1)$)

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} E_{21} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y \end{array} &
\begin{array}{c} E_{12} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X \end{array} &
\begin{array}{c} E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H \end{array}
\end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur V (par nécessairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour H dans une représentation de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$ sont entières et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de " H " = $E_{11} - E_{22}$ sont $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \dots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \dots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre α et $\alpha + n(L_2 - L_1)$ est symétrique par rapport à la droite $\beta(H_{12}) = 0$

Posons $\alpha + \alpha(J_{1,2})(L_2 - L_1) = \alpha_2$ et $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a $E_{21} \cdot v_2 = 0$, $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$, $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

v_2 est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets α et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$