

Relativité générale

Rappels sur la relativité restreinte (vecteurs et tenseurs)

* On prend comme exemple une espace euclidien de dimension 2 mais la théorie est générale

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = A^i \mathbf{e}_i$$

les A^i sont les composantes *contravariantes*

Changement de base : $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{e}_i = \Lambda_i^j \mathbf{e}'_j = \Lambda_i^1 \mathbf{e}'_1 + \Lambda_i^2 \mathbf{e}'_2 + \Lambda_i^3 \mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}'_i = (\Lambda^{-1})^j_i \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{A} = A^j \mathbf{e}_j = \underbrace{A^j \Lambda_j^i}_{A^{i'}} \mathbf{e}'_i$$

$$A^{i'} = \Lambda_j^i A^j$$

Base duale

ayant une base B On peut définir une base duale $\tilde{B} = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} | \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_j^i$

$$\mathbf{A} = \underbrace{A^i}_{\text{contravariante}} \quad \mathbf{e}_i = \underbrace{A_j}_{\text{covariantes}} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^i = A^i$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = A_i$$

On veut démontrer que $\mathbf{e}^{i'} = A_j^{i'} \mathbf{e}^j$

Tenseurs :

base : $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j$$

Il y a des représentation covariantes contravariantes et mixtes au tenseurs.

$$T'^{ij} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j T^{kl}$$

$$T_j'^i = \Lambda_k^i (\Lambda^{-1})_j^l T_l^k$$

$$T_i^i = \text{tr}(T) = \cdot = \text{tr}(T')$$

Tenseur Métrique

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \iff \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ik} \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j}_{\delta_j^k} = g_{ij}$$

de même :

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = A^i \mathbf{e}_i B^j \mathbf{e}_j = g_{ij} A^i B^j$$

$$A^i = \mathbf{A} \mathbf{e}^i = \mathbf{A} \cdot (g^{ij} \mathbf{e}_j) = g^{ij} A_j$$

$$A^i = g^{ij} A_j$$

$$A_i = g_{ij} A^j$$

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$$

Espace-Temps (1908)

Un concept définis par Minkowski après avoir lu le papier de Einstein de 1905. Ce dernier n'aimait pas du tout ce concept.

Quadrivecteur

$$x^i = (ct, x, y, z)$$

Transformation de Lorentz

$$x'^i = \Lambda_j^i x^j$$

Intervalle

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

unités Géométriques

$$G = 1 \quad c = 1$$

Transformation de Lorentz

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

On a 16 variables dans une matrice 4x4. On a une contrainte sur 10 d'entre elles. Il reste donc 6 degrés de libertés. Celles ci représente l'alignement des axes et la vitesse.

Rapacité

$$\tanh \psi = v$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -x \sinh \psi & t \cosh \psi & 0 & 0 \\ x \cosh \psi & -t \sinh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quadrigradiant

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\partial_{i'} = (\Lambda^{-1})^j_i \partial_j : q$$

2022-09-02

Espace-temps

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = d\tau^2$$

Temps propre

Temps qui s'écoule dans le référentielle de l'objet

$$\implies x(\tau)$$

Si on connaît $x^i(t)$, alors que vaut le temps propre ?

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \\ &= \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2} \\ &= dt \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2} \\ &= dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \frac{dt}{\gamma} \end{aligned}$$

Action

$$\begin{aligned} S &= -m \int_A^B d\tau = -m \int_A^B dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &\approx -m \int_A^B dt \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{v}^2\right) \\ &= -m \int_A^B dt \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

Lagrangien :

$$L = -m \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}$$

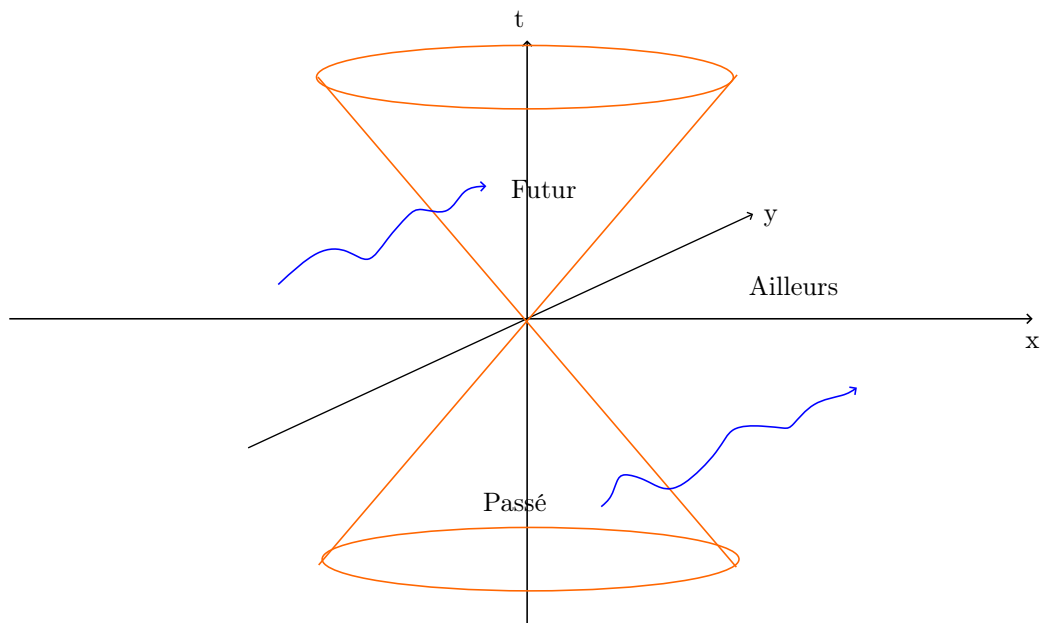


FIGURE 1 – Espace-temps

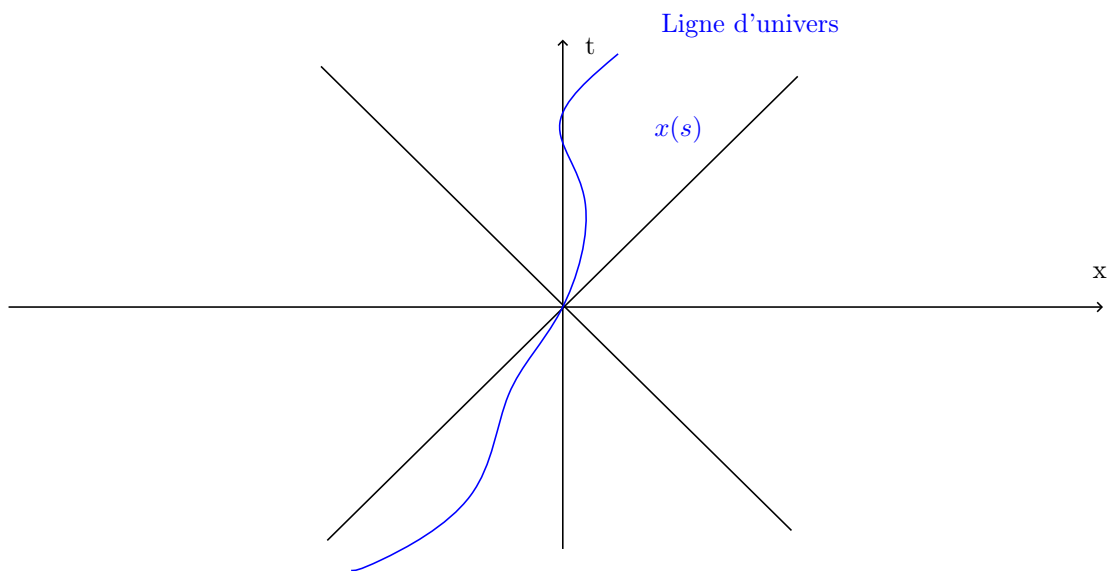


FIGURE 2 – Minkowski 2D

Hamiltonien

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = L = H$$

Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + m\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \{ \mathbf{v}^2 + 1 - \mathbf{v}^2 \} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \end{aligned}$$

$$H^2 = \frac{m^2}{1 - \mathbf{v}^2} \quad \mathbf{p}^2 = \frac{m^2 \mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2}$$

Électromagnétisme

4-vecteur potentiel :

$$A^i = (\Phi, \mathbf{A}), \quad A_i = (\Phi, -\mathbf{A})$$

$$S = \underbrace{S_0}_{-m \int d\tau} - e \int_A^B \underbrace{A_i dx^i}_{\text{invariant}} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$$

Tenseur de Faraday

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i \\ F_i^i &= 0 \quad F_{ij} F^{ij} : \text{invariant} \\ \mathbf{E} &= -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

→ principe de moindre action :

$$m\ddot{x}^i = eF_j^i \dot{x}^j$$

$$m\dot{u}^i = eF_j^i u^j$$

Chapitre 2 : géométrie différentielle

Théorème du plongement

Nash

Ne vaut que pour des espace euclidien (pas pour l'espace-temps donc) mais le théorème se généralise

On définit un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ comme un point de la surface. Où \mathbb{R}^3 est *l'espace hôte*

$$\mathbf{X}(x^i) \quad i \in \{1, \dots, d\}$$

Par exemple, la sphère :

$$\mathbf{X} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$x^1 = \theta \quad x^2 = \phi$$

Il n'existe pas de vecteur position

Il est impossible en général de représenter un variété différentiel avec une seule carte

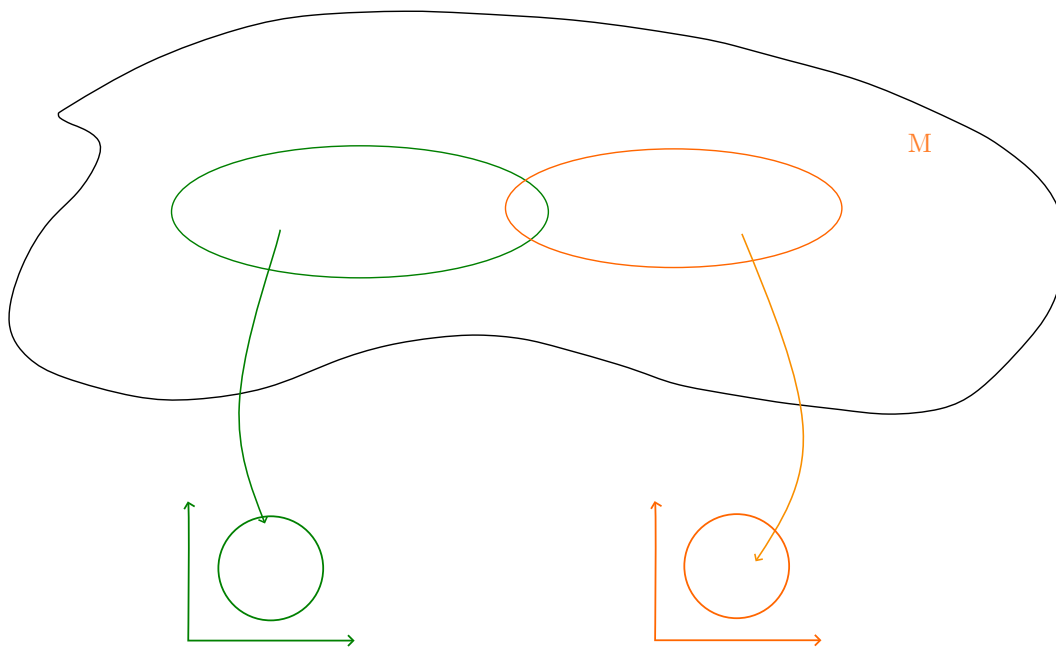


FIGURE 3 – Atlas

Espace tangent

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \mathbf{e}'_j \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}}_{\Lambda^j_i}$$

tenseur métrique

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^j} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$

$$ds^2 = d\mathbf{X}d\mathbf{X} = (\partial_i \mathbf{X} dx^i) \cdot (\partial_j \mathbf{X} dx^j) = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij}(x) dx^1 dx^2$$

fonction : $\phi(x)$

$$\partial_{i\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

$$\partial'_i = \frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \dots$$

$$\partial_i \phi = \partial'_j \phi \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}$$

(vecteur covariant)

Transport parallèle

Le concept de transport parallèle permet de comparer des vecteurs qui sont définis à des points différents (qui viennent de différents espaces tangents).

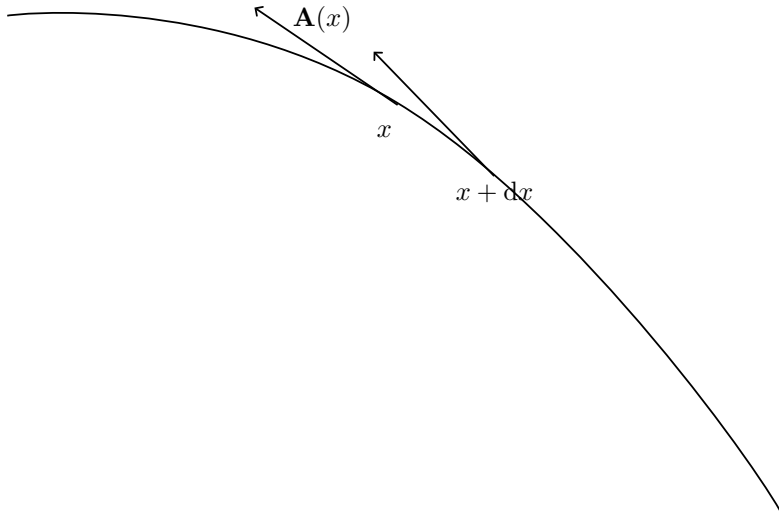


FIGURE 1 – transport parallèle

$$A_i(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x)$$

$$\begin{aligned} A_i + \partial A_i &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x + dx) \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot (\mathbf{e}_i(x) + \partial_j \mathbf{e}_i(x) dx^j) \\ &= A_i(x) + A_k \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \partial_j \mathbf{e}_i(x)}_{\Gamma_{ij}^k(x)} dx^j \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta A_i = \Gamma_{ij}^k A_k dx^j}$$

$$\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{X} \quad \mathbf{e}^k = \partial^k \mathbf{X} = g^{kj} \partial_j \mathbf{X}$$

$$\begin{aligned}\partial_j \mathbf{e}_i &= \partial_j \partial_i \mathbf{X} = \partial_i \mathbf{e}_j \\ \Gamma_{ij}^k &= \partial^k \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{X} = \Gamma_{ji}^k\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial A^i = -\Gamma_{kj}^i A^k dx^j}$$

$$\delta(A^i B_i) = 0 = \delta^i B_i + A^i \delta B_i = (\delta A^i + \Gamma_{kj}^i A^k dx^j) B_i = 0$$

Dérivé covariante

$$\begin{aligned}DA^i &= \text{changement "réel" du vecteur} \\ &= dA^i - \partial A^i \\ &= \partial_j A^i dx^j + \Gamma_{kj}^i A^k dx^j \\ &= \underbrace{\nabla_j A^i}_{\partial_j A^i + \Gamma_{kj}^i A^k} dx^i\end{aligned}$$

$$\underbrace{\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma_{ij}^k A_k}_{\text{tenseur de rang 2}}$$

$$\nabla_i \mathbf{A} = \text{proj} \partial_i \mathbf{A}$$

Les symboles de Christoffel semblent requérir \mathbf{X} et donc de travailler dans l'espace hôte. Ce n'est pas de cas. On peut tout ré-exprimer en fonction du tenseur métrique.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij})$$

$$\Gamma_{kij} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_i \mathbf{X}$$

$$\partial_k g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$

$$\partial_i g_{jk} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \partial_j \mathbf{X} \cdot \partial_k \mathbf{X}$$

$$\partial_j g_{ki} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \mathbf{X}$$

On addition les deux derniers et on isole $\partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_i \mathbf{X}$

pour avoir

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij})}$$

Exemple : S^2 (rayon a)

Coordonnées sphériques θ, φ

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk})$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

$$\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \partial_1 g_{22} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

Dérivée covariante

$$\nabla_\theta A_\theta = \partial_\theta A^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta A^\varphi = \partial_\theta A^\theta$$

$${}_\varphi A^\theta = \partial_\varphi A^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta A^\varphi = \partial_\varphi A^\theta - \sin \theta \cos \theta A^\varphi$$

...

Les géodésique

La géodésique est une courbe (trajectoire sur un variété) $x^i(\lambda)$

vecteur tangent $\mathbf{u} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{X}(x(\lambda)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} = \mathbf{e}_i \dot{x}^i = \mathbf{e}_i u^i$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} = \sqrt{\frac{ds^2}{d\lambda^2}} = \left| \frac{ds}{d\lambda} \right|$$

$$\nabla_\lambda \phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \partial_i \varphi \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} = u^i \partial_i \phi$$

$$\nabla_\lambda A^j = u^i A^j = u^i \partial_i A^j + \Gamma_{ki}^j A^k u^i$$

Géodésique

1) Minimise (rend stationaire) la distance entre deux points.

$$S_{AB} = \int_A^B ds \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

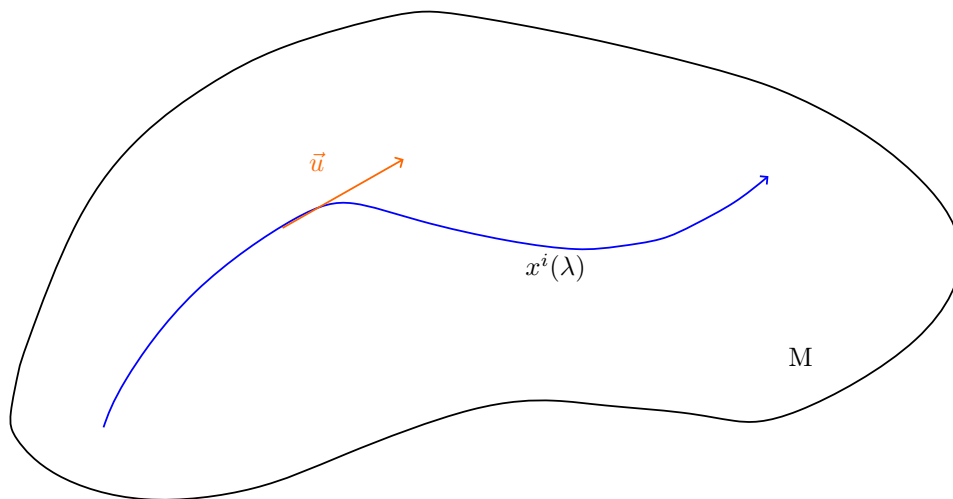


FIGURE 2 – géodésique

$$\delta S_{AB} = 0 \quad x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

2) courbe telle que \mathbf{u} est transporté parallèlement

$$Du^i = du^i - \delta^i = du^i + \Gamma_{kj}^i u^k dx^k \propto u^i$$

$$\frac{d}{d\lambda} (u_i u^i) = 2u_i \dot{u}^i$$

où $\dot{} \equiv \frac{d}{d\lambda}$

$$= 2u_i u^i f(\lambda) - \Gamma_{jk}^i u^k u^j u_i$$

$$\Gamma_{ij}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \Gamma_{mn}^l - \dots$$

On va demander que $f(\lambda) = 0 \implies |\mathbf{u}| = \text{cst}$

$$\dot{u}^i + \Gamma_{kj}^i u^k u^j = 0$$

À l'épisode précédent :

$$\partial_i A_j, \partial_i A^j$$

$$\nabla_i A_j = \partial_i A_j - \Gamma_{ji}^k A_k$$

$$\nabla_i A^j = \partial_i A^j + \Gamma_{kj}^j A^k$$

Γ est la connection affine ou symbole de Christoffel

$$\Gamma_{ik}^k(x) = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

Γ_{ij}^k **n'est pas un tenseur**
 Γ_{ij}^j en est un !

Il est toujours possible de choisir un référentiel tel que $\Gamma_{ij}^k = 0 \forall i, j, k$!

Théorème du quotient

si $B^{ij} A_j$ est un vecteur $\forall A_j$ qui est un vecteur alors B^{ij} est un tenseur.

Équation géodésique

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0$$

Cette équation est équivalente à

$$\dot{u}^i \Gamma_{jk}^i u^j u^k$$

$$Du^i = du^i + \Gamma_{jk}^i u^j dx^k = 0$$

$$Du_i = du_i - \Gamma_{ij}^k u_k dx^j = 0$$

On divise par $d\lambda$

$$\begin{aligned} \implies \dot{u}_i - \Gamma_{ij}^k u_k u^i &= 0 \\ &= \dot{u}_i - \Gamma_{kij} u^k u^j \\ &= \dot{u}_i - \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) u^k u^j \end{aligned}$$

$$A_{kj} = -A_{jk} \quad S^{kj} = -S^{jk}$$

$$A_{ki}S^{kj} = A_{jk}S^{jk} = -A_{kj}S_{kj} = 0$$

comme les deux derniers termes forment ensemble un tenseur antisymétrique et qu'ils multiplient un tenseur symétrique la contribution de ces termes s'annulent

$$0 = \dot{u}_i g_{kj} u^k u^j$$

Si g_{kj} ne dépend pas de x^i alors $u_i = \text{cst}$

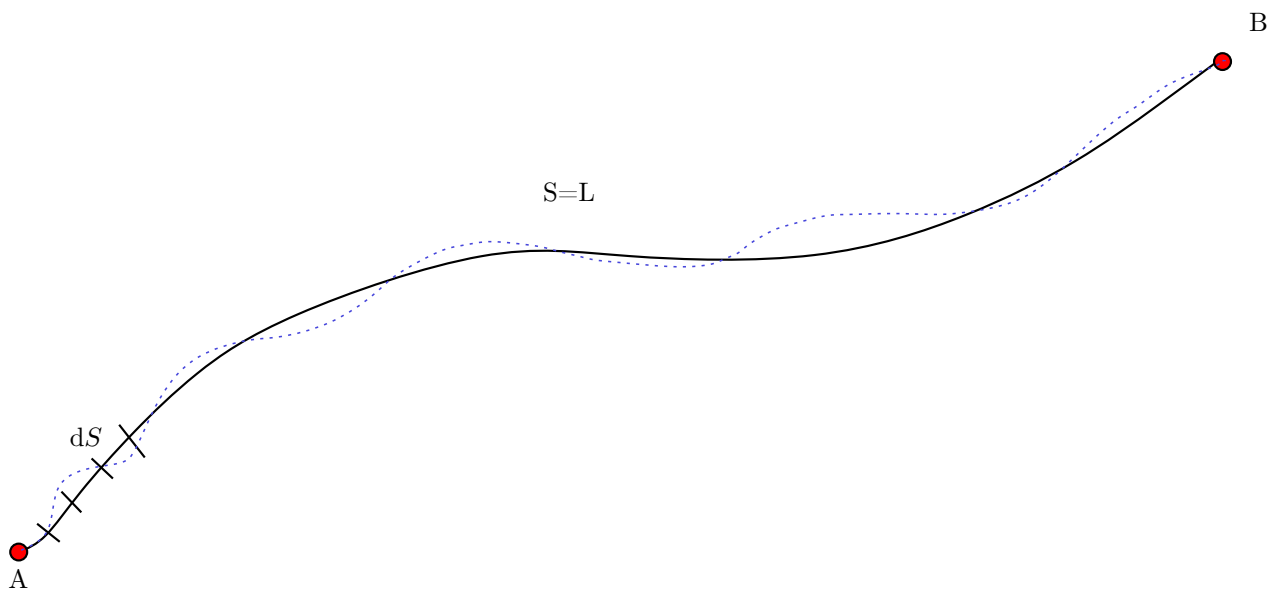


FIGURE 1 – Géodésique 2

$$S_{AB} = \int_A^B d\lambda L(x, \dot{x}) = \int_A^B d\lambda \underbrace{\sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}}_{|\mathbf{u}|} = \int_A^B \sqrt{g_{ij} dx^j dx^j} = \int_A^B ds$$

$$x^i(\lambda) \rightarrow x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

$$\delta S_{AB} = \int_A^B d\lambda \frac{1}{2L} \delta(g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = \int_A^B d\lambda \left\{ \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \delta x^k + \dot{g}_{ij} \dot{x}^i \delta x^j \right\}$$

$$g_{ij}\dot{x}^i \frac{d}{d\lambda} x^j = \frac{d}{d\lambda} (g_{ij}\dot{x}^i \delta x^j) - \frac{d}{d\lambda} (g_{ik}\dot{x}^k) \delta x^l$$

...

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \partial_k g_{ij} u^i u^j - \left(\frac{1}{2} \partial_j g_{ik} + \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \right) u^j u^i - g_{ki} \dot{u}^j \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk})}_{-\Gamma_{kij}} u^i u^j - g_{kj} \dot{u}^i = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k u^i u^j + \dot{u}^k = 0}$$

Vaisseau en accélération constante

\boxed{A} $v(t), x(t)$ avec t le temps terrestre

4-accélération

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{(1-v^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1-v^2} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{(1-v^2)^2} \right)$$

$$a_i a^i = -\gamma^4 \left(\mathbf{a}^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \right)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-v^2)^{3/2}} \left(-2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{1}{(1-v^2)^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \right)$$

$$= -\gamma^6 a^2$$

$$\gamma^3 a = g$$

$$\frac{1}{(1-v^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = g$$

$$g dt = \frac{dv}{(1-v^2)^{3/2}}$$

Rapidité :

$$\gamma = \cosh \eta$$

$$v\gamma = \sinh \eta$$

$$dv = \frac{1}{\cosh^2 \eta} d\eta = \frac{1}{\gamma^2} d\eta$$

$$\int g dt = \int \gamma d\eta = \int \cosh \eta d\eta$$

$$gt + \text{const} = \sinh \eta$$

$$v(t) = \tanh \eta = \dots = \frac{gt}{\sqrt{1 + (gt)^2}}$$

Comment restaurer les *vrai unités* ?

$$\frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$$

$$gt = \sinh \eta \implies g dt = \cosh \eta d\eta$$

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{1}{g} \int \tanh \eta \cosh \eta d\eta = \frac{1}{g} \int \sinh \eta = \frac{1}{g} \cosh \eta + \text{const} \stackrel{0}{=} \frac{1}{g} (\cosh \eta - 1)$$

B

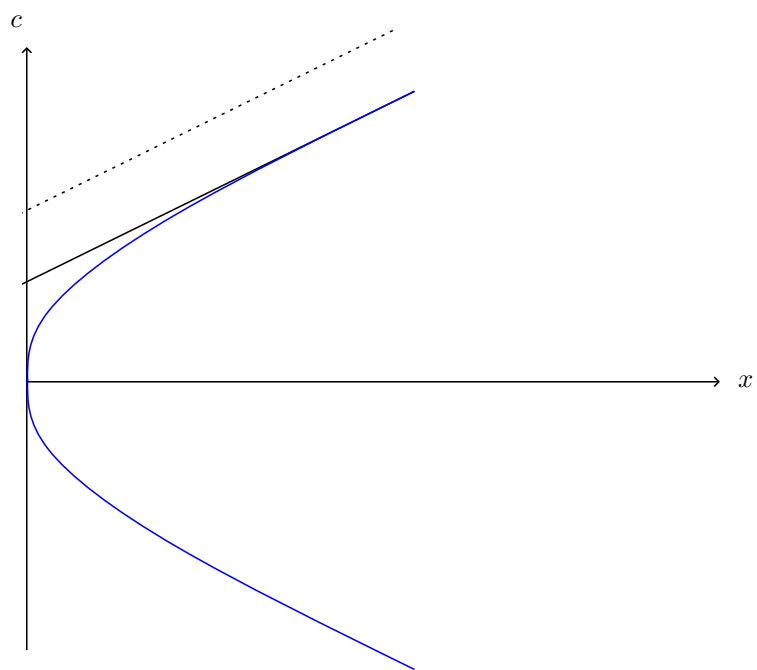


FIGURE 2 – Milles mots

C