

2024-02-01

### typo devoir 1

2.1

$$\Lambda^n = \{\alpha \in V^{\otimes n} | \sigma \bullet \alpha = ?(\sigma)\alpha\}$$

Exemples :

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1 \ e_2 \rangle$$

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

$$\sigma(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = \sigma(e_1 \otimes e_2) + \sigma(e_2 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

$$\Lambda^2(\mathbb{R}^2) \ni e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

### Rappels

$\rho_1, \rho_2$  reps indestructibles de  $G$   
alors

$$\langle \chi_\rho \rangle$$

...

Corollaire 5 : si  $g \neq e$

$$\sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) = 0$$

Démonstration :

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{\rho_i \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g) \quad (g \neq e)$$

Permet de trouver une caractère manquant dans le table si on connaît tout les autres

### Plus d'algèbre linéaire

$e_1, \dots, e_n$  base de  $V$   $f_1, \dots, f_m$  base de  $W$   $e_i \otimes f_j$  base de  $V \otimes W$

$$M \in \text{GL}(V) \quad N \in \text{GL}(W)$$

$$M \otimes N \in \text{GL}(V \otimes W)$$

Proposition :

$$\text{tr}(M \otimes N) = (\text{tr } M)(\text{tr } N)$$

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$$

Démonstration

$$\text{tr}(M \otimes N) = \sum_{ij} [(M \otimes N)(e_i \otimes f_j)]_{i,j} = \sum_{i,j} M_{i,i} M_{j,j} = \left( \sum_i M_{ii} \right) \sum_j (M_{jj}) = \text{tr } M \text{ tr } N$$

### Définition

L'espace dual de  $V$  est  $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$  noté  $V^*$

Si  $M \in \text{GL}(V)$

$M^* \in \text{GL}(V^*)$

$$M^* \cdot \alpha = \alpha \circ M^{-1}$$

De même, si  $\rho_i G \rightarrow \text{GL}(V)$  est une repr. La repr dual est  $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$

$$g \mapsto \rho(g)^*$$

### Proposition :

$$\chi \rho^* = \bar{\chi}_\rho$$

Démonstration :  $g \in G$ ,  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$  est une matrice d'ordre finie

$$(\exists n | \rho(g)^n = I)$$

$\implies \rho(g)$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de 1

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$$

$$\rho^*(g) = (\rho(g)^{-1})^t$$

$$\text{tr}(\rho^*(g)) = \lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_d^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_d = \bar{\chi}_\rho(g)$$

Corrolaire  $\rho$  est irréductible  $\iff \rho^*$  est irréductible

$$1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_\rho(g) \chi_\rho(g)$$

$$\iff \langle \bar{\chi}_\rho, \bar{\chi}_\rho \rangle = \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \bar{\chi}_\rho(g) = 1$$

$$\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposition :

$$\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$$

Proposition :

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* W$$

Démonstration :

$$f : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$$

$$\alpha \otimes w \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$$

est linéaire

$$e_1^*, \dots, e_n^* \text{ base de } V$$

$$w_1, \dots, w_m \text{ base de } W$$

$$f(e_i^* \otimes w_j) = (v \mapsto e_i^*(v)w_j) = (v)$$

confus

Exemples :  $S_4$  et  $A_4$

Les classes de conjugaisons dans  $S_4$  sont

$$\overbrace{(e)}^1, \overbrace{(12)}^2, \overbrace{(123)}^3, \overbrace{(1234)}^4, \overbrace{(12)(34)}^5$$

(Toutes les traspotitions sont coujugés )

	1 $e$	2 $(12)$	3 $(123)$	4 $(1234)$	5 $(12)(34)$
$\chi_0$	1	1	1	1	1
$\chi_{\text{sym}}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_{\text{std}}$	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\text{sym} \otimes \text{std}}$	3	-1	0	1	-1
$\chi_4$	2	0	-1	0	2

TABLE 1 – char de  $S_4$

Regardons la representation  $\rho_?$  de dim 4

$$\rho_? : S_4 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^4)$$

on sait que  $\rho_?$  se décompose en  $\rho_{\text{triv}} \oplus \rho_{\text{std}}$

$$\chi_{\rho_?} = \chi_{\rho_?} - \chi_0$$

$$\begin{aligned} &= (4\,2\,1\,0\,0) - (1\,1\,1\,1\,1\,1) \\ &= (3\,1\,0\,-1\,-1) \end{aligned}$$

$$\langle \chi_{\text{std}} \chi_{\text{std}} \rangle = \frac{1}{24} \left( 3^2 + 6^2 + \cdots \right) = 1$$

Pour trouver  $\text{di}(\rho_4)$

on utilise  $|G| = \sum_{\rho \text{ irred}} \dim(\rho_i)^2$

$$23=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$$

$$d=2$$

On trouve les autres coeffs avec

$$0=\sum_{g \text{ irred}} \dim(\rho_i) \chi_{\rho_i}(g)$$

Calculons  $\rho_4$

On a  $\rho((12)(34))=I$

$$\text{tr}(\rho((12)(34)))=2$$

$M$  est conjugué à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & (2-x)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$\implies M = \mathbb{1}$$

Quand une representation

a une noyau  $\text{Ker} \rho \subset G$

elle se factorise

$\rho_4$  ne se factorise pas