Rappels :

- Parmamétrisation orthogonale $F = 0 \quad (p_u \perp p_v)$
- $e_1 = \frac{p_v}{\sqrt{E}} \quad e_2 = \frac{p_u}{\sqrt{G}}$. $e_1(u,v)$ et $e_2(u,v)$ forment une base othonormée de $T_{p(u,v)}$

Étant donnée une courbe α dans S, on définit

$$\varphi_{12} = (\nabla_\alpha \cdot e_1) \cdot e_2 \text{ (mesure de la rotation du repère le long de } \alpha)$$

Remarque

$$\varphi_{21} = (\nabla_\alpha e_2) \cdot e_1 = -\varphi_{12}$$

car

$$\begin{aligned} 0 &= D_{\alpha'}(e_1 \cdot e_2) \\ &= D_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + D_{\alpha'}(e_2) \cdot e_2 \\ \nabla_{\alpha'}(e_1) \cdot e_2 + \nabla_{\alpha'}(e_2) \cdot e_1 &= \varphi_{12} + \varphi_{21} \end{aligned}$$

Car la composante en n disparait avec le produit scalaire
De manière semblable, on montre que $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$

Proposition : Pour un chemin $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$,

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}(-u'E_v + VG_u)$$

Démonstation :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = (\nabla_{\alpha'} \cdot e_1) \cdot e_2 &= \left(\nabla_{\alpha'} \frac{p_u}{\sqrt{E}}\right) \cdot \frac{p_v}{\sqrt{G}} \\ &= \left(p_u \cdot D_\alpha \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{1}{\sqrt{E}\nabla_{alpha'} \cdot p_u}\right) \cdot \frac{p_V}{\sqrt{G}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (\nabla_{\alpha'} \cdot p_u) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (u \cdot \nabla_{p_u} p_u + v' \nabla_{p_v} p_v) \cdot p_v \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} (u' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v) \end{aligned}$$

paralléllisme

$$p_{uu} \cdot p_v : \quad 0 = F_u = (p_u \cdot p_v)_u = p_{uu} \cdot p_v + p_v \cdot p_{vv} \iff p_{uu} \cdot p_v = -p_u \cdot p_{vv} = -\frac{E_v}{2}$$

$$P_{vu} \cdot p_v : \quad \text{" "} \iff p_{uv} \cdot p_v = \frac{G_u}{2}$$

donc $\varphi_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}} (?' p_{uu} \cdot p_v + v' p_{uv} \cdot p_v) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} = (-u'E_v + v'G_u)$

Proposition :

Si $\alpha(s)$ est une courbe fermée qui entoure la région R (à gauche selon règle de la main droite) alors

$$\int_0^L \varphi_{12} \mathrm{d}S = -\iint \kappa(u,v) \mathrm{d}S$$

Rappel : Théroème de G ? ?

$$\int_{\mathrm{d}R} \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

R paramétré par $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$

$$\int_o^L \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \mathrm{d}S = \iint_R (g_u - f_u) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Démonstration de la propriété

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-u'E_v + v'G_u) \mathrm{d}S \\
&= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \mathrm{d}S \\
&= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{EG}} \begin{pmatrix} -E_v \\ G_u \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \iint_R \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \iint_R \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left(\frac{-E_v}{2\sqrt{EG}} \right) \right) \underbrace{\sqrt{EG}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}_{\mathrm{d}S} \\
&= -\iint_R \kappa(u,v) \mathrm{d}S
\end{aligned}$$

Proposition :

$$\int_o^L \varphi_{12} \mathrm{d}S = -\iint_R \kappa(u,v) \mathrm{d}S$$

On veut exprimer le terme de gauche différement.

$k_g = \varphi_{12} + \theta'$ pour une courbe $\alpha'(s) = p(u(s), v(s))$ paramétré par longeur d'arc et ou θ est défini par $\alpha'(s) = T(s) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$. α est une géodésique

Démonstration :

$$k_g = T' \cdot (m \times T)$$

comme $T = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ $n \times T = -\sin\theta e_1 \cos\theta e_2$

$$k_g = (\cos\theta e_1 + \sin\theta e_{2)} \cdot (-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2) = [-sin\theta\theta' e_1 + \cos\theta \nabla_{alpha'} e_1 + \cos\theta\theta' e_2 + \sin\theta \nabla_{\alpha'} e_2] \cdot (-\sin\theta e_1 + cos\theta e_2)$$

$$= \sin^2\theta\theta' + \cos^2\theta\theta' + \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\varphi_{21} = \theta' + \varphi_{12}$$