2024-03-11

Rappels

$\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) = h \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ osti, je suis deja done

...

On a montré que les poids diffèrent par une combinaison de racines :
Si $v \in V_\alpha, C \in g_\beta$ β-racine, α-poids
alors $X \cdot v \in V_{\alpha+\beta}$

Le *poids le plus haut* est une poids maximal pour l'ordre induit l'évaluation sur $\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & b_0 & \\ & & c_0 \end{pmatrix} \in h$ t.q. $a_0 > b_0 > C_0$

Il existe un vecteur de plus haut poids v qui satisfait

— $v \in V_\alpha$ pour $\alpha \in h^*$

— $E_{23}v = E_{13}v = E_?v = 0$

Proposition :

V est engendré par v (vecteurs de plus haut poids) et toutes ses images par tout les mots possible en $E_{2,1}, E_{3,2}, E_{3,1}$

Démonstration

W le sous-espace engendré par v et tout les motes possibles en $E_{2,1}, E_{32}, E_{31}$ appliqué à V

$$W = \langle v, E_{21}v, e_{32}v, E_{31}v, E_{21}E_{32}v, \cdots \rangle$$

On veur montrer que W est $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$-invarient

Partie facile, W est invariant par h et par E_{21}, E_{31}, E_{32}

Reste à montrer que W est invarient par $E_{1,2}, E_{2,3}$

$E_{1,3} = [E_{1,2}, E_{2,3}]$, il suffit donc de vérifier $E_{1,2}W \subseteq W$ et $E_{23}W \subseteq W$

Posons W_n le sous-espace engendré par va et tout les mots en E_{21}, E_{32} de la longeure $\leq n$ appliqué à v

Par récurence, on montre $E_{12} \cdot W_n \subseteq W_{n-1}$, $E_{2,3} \cdot W_{n \subseteq} W_{n-1}$

Soit $w \in W_n$

$$\implies w = E_{21} \cdot w' \quad \text{pour} \quad w' \in W_n - 1$$

ou

$$w = E_{32} \cdot w'$$

1. $$E_{1,2} \cdot w = E_{1,2} \cdot E_{2,1} \cdot w' = ([E_{12}, E_{21}] + E_{21} \cdot E_{12})\, w'$$

$$E_{1,2} \in g_{L_1-L_2}$$
$$E_{21} \in G_{L_2-L_1}$$
$$\implies [E_{1,2}, E_{21}] \in h = g_e$$

$$= \in W_{n-1} + \in W_{n-1}$$

$$\begin{aligned} E_{2,3} \cdot w &= E_{2,3} \cdot E_{1,2} \cdot w' \\ &= \left(\underbrace{[E_{23}, E_{21}]}_{0} + E_{2,1} + E_{23} \right) \cdot w' \\ &= \underbrace{E_{21} \cdot \underbrace{(E_{21} \cdot w')}_{W_{n-2}}}_{W_{n-1}} \end{aligned}$$

2. même chose

Puisque $W = \bigcup_n W_n$, W est stable par $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C}) \implies W = V$ ■

De la preuve, on déduit :

Pour V une représentation (pas nécéssairement irréductible), si v est un vecteur de plus haut poidsm alors le sous espace engendré par v est ses images par E_{21} et $E_{3,2}$ est une sous représentation irréductible

Il existe un n pour lequel $(E_{2,1})^n \cdot v = 0$ mais $(E_{2,1})^{n-1} \cdot v \neq 0$

Observation : $V_{\alpha+m(L_2-L_1)}$ est de dim 1 ou 0 (car il existe un seul *chemin* entre α et $\alpha + m(L_2 - L_1)$

$$\begin{array}{ccc} E_{21} & E_{12} & E_{11} - E_{22} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y & X & H \end{array}$$

engendrent une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(3\mathbb{C})$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$

En restreignant à cette sous-algèbre, on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur V (par nécéssairement irréductible)

Rappel Les valeurs propres pour H dans un représentation de $\mathfrak{sl}(2\mathbb{C})$ sont entière et symétriques par rapport à 0

Les valeurs propres de "H" $= E_{11} - E_{22}$ sont $\alpha(H), (\alpha + L_2 - L_1)(H), \cdots, (\alpha + n(L_2 - L_1))(H)$

on réécrit $\alpha(H), \alpha(H) - 2, \alpha(H) - 4, \cdots, \alpha(H) - 2n$

$$\implies \alpha(H) - 2n = -\alpha(H)$$

$$\implies n = \alpha(H)$$

L'arrête entre α et $\alpha + n(L_2 - L_1)$ est symétrique par rapport à la droite $\beta(H_{12}) = 0$

Posons $\alpha + \alpha\left(J_{1,2}\right)\left(L_2 - L_1\right) = \alpha_2$ et $v_2 = E_{2,1}^{???} \cdot v \in V_{\alpha_2}$

On a $E_{21} \cdot v_2 = 0$, $E_{2,3} \cdot v_2 = 0$, $E_{1,2} \cdot v_2 = 0$

v_2 est une *vecteur de plus haut poids* pour l'ordre définis par $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$, $b > a > c$

Les espaces de poids sont contenus dans l'hexagone des sommets α et ses réflexions dans les 3 droites

Les espace de poids sur les arêtes sont de dimension 1

On déduit que $\alpha(H)_{i,j} \in \mathbb{Z} \forall H \in h$

$$\implies \alpha = aL_1 + bL_2 + cL_3 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2024-03-14

2eme heure

$$sym^n(\mathbb{C}^3 = \left\langle e_1^i e_2^j e_3^k | i+j+k=n \right\rangle$$

les poids sonts $H \cdot \left(e_1^i e_2^j e_3^k\right) = (iL_1 + jL_2 + kL_3)(H) e_1^i e_2^j e_3^k$

Chaque espace de poids est de dimension 1. Les plus haut est nL

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0$$

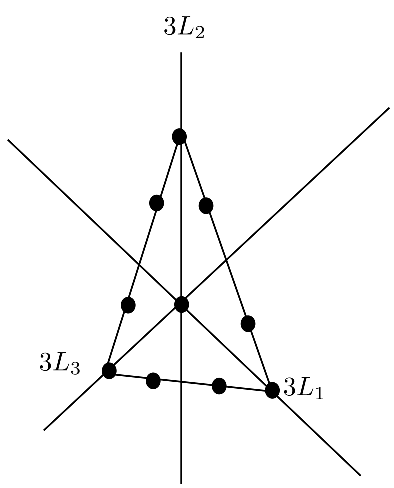

FIGURE 1 – triangle

$\mathrm{Sym^n}(\mathbb{C}^3)$ par le même argument a pour plus haut poids nL_3 est est irréductible

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$$

a un poids de $2L_1 - L_3$

$V = e_1^2 \otimes e_3^*$ est un vecteur de plus haut poids.

Elle n'est pas irréductible car on peut définir un morphisme

$$\varphi : \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$
$$(uv) \otimes \alpha \mapsto \alpha(u)v + \alpha(v)u$$

$$\varphi(X \cdot ((uv) \otimes \alpha)) = \varphi(X \cdot (uv) \otimes \alpha + uv \otimes \varphi(X \cdot \alpha))$$

$$= \varphi((Xu + Xv) \otimes \alpha - (uv) \otimes \alpha(x)$$

$$\alpha(xu)v + \alpha(v)Xu + \alpha(u)Xv + \alpha(xv)u - \alpha(xu)v - \alpha(xv)u = X(\alpha(v)u + \alpha(u)v + X \cdot \varphi(uv \otimes \alpha)$$

$\mathrm{Her}(\varphi) \subseteq \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes \mathbb{C}^{3*}$ est une sous-représentation de dimension 15. Montrons qu'elle est irréductible

$$e_1^2 \otimes e_3^* \in \mathrm{Ker}\varphi(\varphi(e_2 \otimes e_3^*) = e_3^*(e)1 + e_3^*(e_{1)}e_1$$

$$2L_1 - L_3) + (L_2 - L_1) = L_1 + L_2 - L_3 = -2L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + (L_3 - L_{2)} = 2L_1 - L{-}_2 = 3L_1 + L_3$$

$$(2L_1 - L_3) + L_3 - L_1 = L_1$$

Dans $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^3) \otimes (\mathbb{C}^3)^*$

$$\dim(V_{L_1} = 3)$$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^*, e_1e_2 \otimes e_2^*, e_1e_3 \otimes e_3^*$

Dans $\mathrm{Ker}(\varphi), \dim(V_{L_1)} = 2$

engendré par $e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_2 \otimes e_2^*$

$$e_1^2 \otimes e_1^* - 2e_1e_3 \otimes e_3^*$$

Montrons que V_{L_1} est engendré par $E_{3,2}E_{2,1}(e_1^2 \otimes e_3^*)$ et $E_{2,1}E_{3,2}(e_1^2 \otimes e_3^*$

$$E_{32}E_{21}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right) = E_{32}\left((2e_1e_3) \otimes e_3^* + e_1^2 \otimes (-0)\right)$$
$$= E_{32}\left(2e_1e_2 \otimes e_3^*\right)$$

$$= 2(e_1e_3 \otimes e_3^* + e_1e_2 \otimes e_2^*)$$

$$E_{21}E_{32}\left(e_1^2 \otimes e_3^*\right)$$

$$= E_{21}le0 - e_1^2 \otimes e_2^*$$

$$= -e_{21}\left(e_1^2 \otimes e_2^*\right)$$

$$= -2e_1e_2 \otimes e_2^* - e - 1^2 - e_1^2 \otimes e_1^*$$

Plus généralement

$$\mathrm{Sym}^a(\mathbb{C}^3) \otimes \mathrm{Sym}^b\mathbb{C}^{3*}$$

a une sous-représentation irréductible de plus haut poids $aL_1 - bL_3$ On peut décrire la décrire comme le noyaux du morphimse

$$\varphi : \mathrm{Sym}^a\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^b \to \mathrm{Sym}^{a-1}\mathbb{C}^3 \otimes \mathrm{Sym}^{b-1}$$