2022-09-07

# Transport parallèle

Le concept de transport parallèle permet de comparer des vecteurs qui sont définis à des points différents (qui viennent de différents espaces tangents).

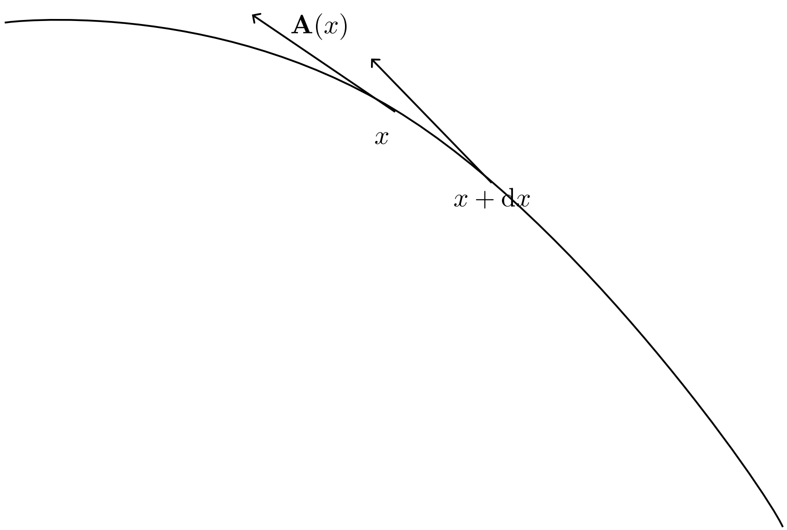


FIGURE 1 – transport parallèle

$$A_i(x) = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x)$$

$$\begin{aligned} A_i + \partial A_i &= \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{e}_i(x + \mathrm{d}x) \\ &= \mathbf{A}(x) \cdot \big(\mathbf{e}_i(x) + \partial_j \mathbf{e}_i(x) \mathrm{d}x^j\big) \\ &= A_i(x) + A_k \underbrace{\mathbf{e}^k \cdot \partial_j \mathbf{e}_i(x)}_{\Gamma^k_{ij}(x)} \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta A_i = \Gamma^k_{ij} A_k \mathrm{d}x^i}$$

$$\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{X} \quad \mathbf{e}^k = \partial^k \mathbf{X} = g^{kj} \partial_j \mathbf{X}$$

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{X} = \partial_i \mathbf{e}_j$$
$$\Gamma^k_{ij} = \partial^k \mathbf{X} \cdot \partial_i \partial_j \mathbf{X} = \Gamma^k_{ji}$$

$$\boxed{\partial A^i = -\Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j}$$

$$\delta(A^i B_i) = 0 = \delta^i B_i + A^i \delta B_i = \left(\delta A^i + \Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j\right) B_i = 0$$

Dérivé covariante

$$\begin{aligned} DA^i &= \text{changement "réel" du vecteur} \\ &= \mathrm{d}A^i - \partial A^i \\ &= \partial_j A^i \mathrm{d}x^j + \Gamma^i_{kj} A^k \mathrm{d}x^j \\ &= \underbrace{\nabla_j A^i}_{\partial_j A^i + \Gamma^i_{kj} A^k} \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

$$\underbrace{\boxed{\nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^k_{ij} A_k}}_{\text{tenseur de rang 2}}$$

$$\nabla_i \mathbf{A} = \mathrm{proj} \partial_i \mathbf{A}$$

Les symbols de Christoffel semblent requérir $\mathbf{X}$ et donc de travailler dans l'espace hôte. Ce n'est pas de cas. On peut tout ré-exprimer en fonction du tenseur métrique.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{kij} = g_{kl} \Gamma^l_{ij} = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_j \mathbf{X}$$

$$\partial_k g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$$
$$\partial_i g_{jk} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \partial_j \mathbf{X} \cdot \partial_k \mathbf{X}$$
$$\partial_j g_{ki} = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i = \partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_i \mathbf{X}$$

On addition les deux derniers et on isole $\partial_k \mathbf{X} \cdot \partial_j \partial_i \mathbf{X}$

pour avoir

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right)}$$

Exemple : $S^2$( rayon $a$ )

Coordonnées sphériques $\theta, \varphi$

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left( \partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_i g_{jk} \right)$$

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \partial_1 g22 = 2a^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

Dérivée covariante

$$\nabla_\theta A_\theta = \partial_\theta A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} A^\varphi = \partial_\theta A^\theta$$

$$_\varphi A^\theta = \partial_\varphi A^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} A^\varphi = \partial_\varphi A^\theta - \sin\theta\cos\theta A^\varphi$$

$$\dots$$

## Les géodésique

La géodésique est une courbe (trajectoire sur un variété) $x^i(\lambda)$

vecteur tangenant $\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathbf{X}(x(\lambda)) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} = \mathbf{e}_i \dot{x}^i = \mathbf{e}_i u^i$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ij} u^i u^j} = \sqrt{g_{ij} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}dx^j}{\mathrm{d}\lambda}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\lambda^2}} = \left| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} \right|$$

$$\boldsymbol{\nabla}_\lambda \phi = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \partial_i \varphi \frac{\partial x^i}{\partial \lambda} = u^i \partial_i \phi$$

$$\nabla_\lambda A^j = u^i_i A^j = u^i \partial_i A^j + \Gamma^j_{ki} A^k u^i$$

Géodésique

1) Minimise (rend stationaire) la distance entre deux points.

$$S_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s \quad \mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j$$

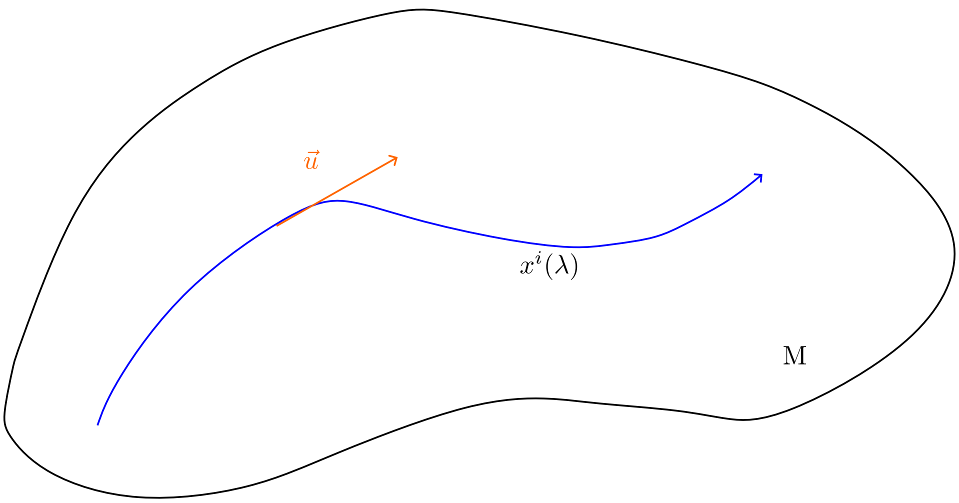


Figure 2 – géodésique

$$\delta S_{AB} = 0 \quad x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

2) courbe telle que **u** est transporté parallèlement

$$Du^i = du^i - \delta^i = du^i + \Gamma^i_{kj} u^k \mathrm{d}x^k \mathrm{d}x^j \propto u^i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(u_i u^i\right) = 2 u_i \dot{u}^i$$

où $\dot{} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}$

$$= 2 u_i u^i f(\lambda) - \Gamma^i_{jk} u^k u^j u_i$$

$$\boxed{\Gamma^{k\prime}_{ij} = \frac{\partial x^{k\prime}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i\prime}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j\prime}} \Gamma^l_{mn} - \cdots}$$

On va demander que $f(\lambda) = 0 \implies |\mathbf{u}| = \text{cst}$

$$\dot{u}^i + \Gamma^i_{kj} u^k u^i = 0$$