

Задание

1. Написать программу, которая обращает симметричную матрицу методом LDL^T -разложения. Кроме матрицы A^{-1} программа должна выводить матрицу L и главную диагональ матрицы D . Применить программу к следующим ниже входным данным и вывести результат
2. Число обусловленности матрицы из третьего задания в матричной максимум-норме равно $1.0996545413425 \cdot 10^{12}$. Попробуйте вычислить это число по определению с помощью вашей программы. Сколько точных цифр вам удалось получить? Почему?
3. Проведите экспериментальное исследование скорости работы вашей программы в зависимости от размерности матрицы, используя для тестов матрицу со случайными числами. Постройте график зависимости времени работы от размерности. Матрицу какой размерности ваша программа на вашем компьютере может обработать за одну минуту?

Матрица 1:

$$\begin{bmatrix} 9 & 9 & -12 & 12 & 15 \\ 9 & 18 & -27 & 0 & 30 \\ -12 & -27 & 25 & -8 & -57 \\ 12 & 0 & -8 & 19 & -9 \\ 15 & 30 & -57 & -9 & 66 \end{bmatrix}$$

Матрица 2:

$$\begin{bmatrix} 25 & 0 & -5 & 5 & 25 & -10 & -10 & -20 & 5 \\ 0 & 9 & -6 & 3 & -6 & 9 & 3 & 9 & 6 \\ -5 & -6 & 21 & -15 & 19 & -20 & -8 & 18 & -9 \\ 5 & 3 & -15 & 12 & -8 & 12 & 1 & -20 & 7 \\ 25 & -6 & 19 & -8 & 34 & -58 & -38 & -11 & -12 \\ -10 & 9 & -20 & 12 & -58 & -15 & 43 & 10 & -5 \\ -10 & 3 & -8 & 1 & -38 & 43 & -7 & 13 & -10 \\ -20 & 9 & 18 & -20 & -11 & 10 & 13 & 100 & 8 \\ 5 & 6 & -9 & 7 & -12 & -5 & -10 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

Матрица 3:

81	-3240	41580	-249480	810810	-1513512	1621620
-3240	172800	-249480	15966720	-54054000	103783680	-113513400
41580	-249480	38419920	-256132800	891891000	-1748106360	1942340400
-249480	15966720	-256132800	1756339200	-6243237000	12430978560	-13984850880
810810	-54054000	891891000	-6243237000	22545022500	-45450765360	51648597000
-1513512	103783680	-1748106360	12430978560	-45450765360	92554285824	-106051785840
1621620	-113513400	1942340400	-13984850880	51648597000	-106051785840	122361785840
-926640	65894400	-1141620480	8302694400	-30918888000	63930746880	-74202694400
218790	-15752880	275675400	-2021619600	7581073500	-15768632880	1839675400

Ответы

1. Выводы программы для каждой матрицы из условия
Для матрицы первой:

```

output.txt
1  Matrix L :
2      1      0      0      0      0
3      1      1      0      0      0
4     -1.33333    -1.66667      1      0      0
5      1.33333    -1.33333     0.75      1      0
6      1.66667     1.66667     0.75     -0      1
7
8  Diagonal of Matrix D :
9      9      9     -16     -4     25
10
11 Reversed Matrix A :
12     -1.24229    -0.0552083    -0.439792     0.604167     0.01
13     -0.0552083     0.276042    -0.00104167    -0.0208333    -0.116667
14     -0.439792    -0.00104167    -0.180625     0.1875     -0.03
15     0.604167    -0.0208333     0.1875     -0.25      0
16      0.01    -0.116667     -0.03      0     0.04
17
18 Condition number = 81.9912
19

```

Для второй матрицы:

```

amdron@Andron-laptop:~/bsu/num-methods/gauss_ldlt$ ./build/gauss_ldlt input2.txt output.txt
terminate called after throwing an instance of 'std::runtime_error'
what():  determinant of matrix = 0
Aborted (core dumped)

```

Третья матрица:

```

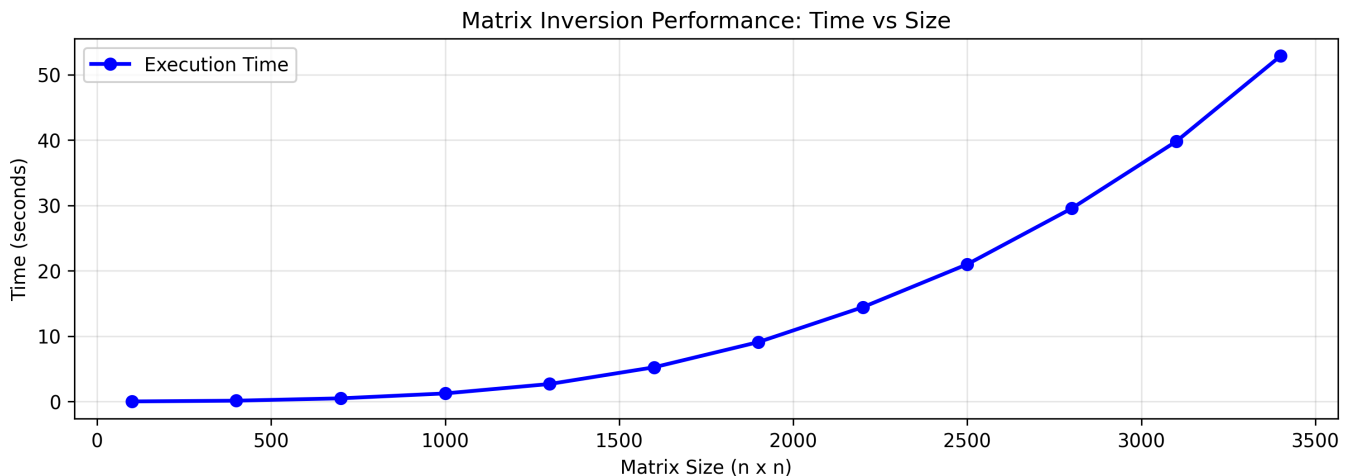
output.txt
1 Matrix L :
2      1      0      0      0      0      0      0      0      0
3     -40      1      0      0      0      0      0      0      0
4    513.333    32.725      1      0      0      0      0      0      0
5   -3080     138.6    11.1005      1      0      0      0      0      0
6    10010    -500.5    -40.538   -3.69768      1      0      0      0      0
7   -18685.3     1001     81.755    7.52786   -3.72733      1      0      0      0
8    20020    -1126.12   -92.5686   -8.58662    5.87424   -2.89225      1      0      0
9   -11440     667.333     55.1371    5.14492    -4.3471    2.96592   -1.90469      1      0
10   2701.11   -162.067    -13.4464   -1.26084    1.23974   -1.04791    0.942234   -0.92757      1
11
12 Diagonal of Matrix D :
13      81    43200   -2.91885e+07   3.75474e+09   2.35499e+08   3.19174e+07   1.85952e+06   34569.7    116.62
14
15 Reversed Matrix A :
16      0.111099   -1.48467e-06   1.78156e-06   0.00555852   0.0095272   0.0119083   0.013231   0.0138922   0.0141446
17   -1.48467e-06   -1.58693e-11   4.45383e-07   5.9385e-07   6.3627e-07   6.36271e-07   6.18597e-07   5.93854e-07   5.66861e-07
18   1.78156e-06   4.45383e-07   -9.52156e-12   -1.78166e-07   -2.54518e-07   -2.86331e-07   -2.96935e-07   -2.96934e-07   -2.91535e-07
19   0.00555852   5.9385e-07   -1.78166e-07   0.000634445   0.00118988   0.00158666   0.00185121   0.00201957   0.0021206
20   0.0095272   6.3627e-07   -2.54518e-07   0.00118988   0.00226685   0.00306045   0.00360672   0.00396749   0.00419506
21   0.0119083   6.36271e-07   -2.86331e-07   0.00158666   0.00306045   0.00417358   0.00495949   0.0054937   0.00584337
22   0.013231   6.18597e-07   -2.96935e-07   0.00185121   0.00360672   0.00495949   0.0059346   0.00661295   0.00706992
23   0.0138922   5.93854e-07   -2.96934e-07   0.00201957   0.00396749   0.0054937   0.00661295   0.00740661   0.00795378
24   0.0141446   5.66861e-07   -2.91535e-07   0.0021206   0.00419506   0.00584337   0.00706992   0.00795378   0.00857485
25
26 Condition number = 1.35949e+10
27

```

код:

https://github.com/Amdronm/num-methods/tree/main/gauss_ldlt

- В третьем задании число обусловленности по матричной максимум норме (максимальная сумма модулей элементов строки) получилась равной $69721112136.237548828 = (6.9721112136 \cdot 10^{10})$, что сильно отличается от данного даже порядком. Точных цифр получается только 15, т. к. тип `double` в C++ имеет именно такую точность.
- За минуту получилось обратить матрицу размерности 3400



Running program

```

mkdir build
cd build
cmake ..
./build/gauss_ldlt <input.txt> <output.txt>

```

Where input.txt and output.txt are optional filenames for data

By default program takes input.txt is stdin and stdout

create_matrix.py - Python script for generating random input and benchmarking program

collect_stats.py - Python script that runs some benches and saves plot of performance in

./pictures/benches.png

matrix.h

```
#pragma once

#include <cstdint>
#include <cstdlib>
#include <iomanip>
#include <ostream>
#include <stdexcept>
#include <utility>
#include <vector>

constexpr double kEps = 1e-14;
constexpr size_t kWidth = 15;

class Matrix;

Matrix Identity(size_t dim);
Matrix Transpose(const Matrix& mat);

class Matrix {
public:
    Matrix(size_t rows, size_t cols) {
        data_ = std::vector<std::vector<double>>(rows,
                                                    std::vector<double>(cols,
0));
    }

    Matrix(size_t dim) {
        data_ =
            std::vector<std::vector<double>>(dim, std::vector<double>(dim,
0));
    }

    Matrix(const std::vector<std::vector<double>>& data) : data_(data) {}

    Matrix(const std::vector<double>& diag) {
        Matrix mat = Matrix(diag.size());
        for (size_t i = 0; i < diag.size(); ++i) {
```

```

        mat[i, i] = diag[i];
    }
    *this = mat;
}

size_t Rows() const { return data_.size(); }

size_t Columns() const { return data_.front().size(); }

bool operator==(const Matrix& other) const = default;

double& operator[](size_t row, size_t col) { return data_[row][col]; }

double operator[](size_t row, size_t col) const { return data_[row][col]; }
}

std::vector<double>& operator[](size_t row) { return data_[row]; }

Matrix operator*(const Matrix& other) const {
    Matrix res = Matrix(this->Rows(), other.Columns());
    for (size_t i = 0; i < res.Rows(); ++i) {
        for (size_t j = 0; j < res.Columns(); ++j) {
            double elem = 0.;
            for (size_t k = 0; k < this->Columns(); ++k) {
                elem += (*this)[i, k] * other[k, j];
            }
            res[i, j] = elem;
        }
    }
    return res;
}

Matrix& operator*=(const Matrix& other) {
    Matrix mul = (*this) * other;
    *this = mul;
    return *this;
}

std::vector<double> GetDiagonal() const {
    std::vector<double> res(data_.size());
    for (size_t i = 0; i < data_.size(); ++i) {
        res[i] = data_[i][i];
    }
    return res;
}

```

```

friend std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const Matrix& mat) {
    for (const auto& row : mat.data_) {
        for (const auto& elem : row) {
            out << std::setw(kWidth) << elem << " ";
        }
        out << "\n";
    }
    return out;
}

void MultiplyAddRow(size_t bear_row, double val, size_t row) {
    for (size_t j = 0; j < this->Columns(); ++j) {
        data_[row][j] += data_[bear_row][j] * val;
    }
}

// throws if det(M) == 0
double FindMaxElemInColumn(size_t row, size_t col) {
    size_t idx = row;
    for (size_t i = row; i < this->Rows(); ++i) {
        if (data_[i][col] > data_[idx][col]) {
            idx = i;
        }
    }
    std::swap(data_[idx], data_[row]);
    if (std::abs(data_[row][col]) < kEps) {
        throw std::runtime_error("determinant of matrix = 0");
    }
    return data_[row][col];
}

// returns L matrix, making U from given matrix
Matrix FindLUDecomp() {
    Matrix res = Identity(this->Rows());
    for (size_t j = 0; j < this->Columns(); ++j) {
        double op_elem = data_[j][j];
        if (std::abs(op_elem) < kEps) {
            op_elem = this->FindMaxElemInColumn(j, j);
        }
        for (size_t i = j + 1; i < this->Rows(); ++i) {
            double rev = -data_[i][j] / op_elem;
            this->MultiplyAddRow(j, rev, i);
            res[i, j] = -rev;
        }
    }
    return res;
}

```

```

    }

private:
    std::vector<std::vector<double>> data_;
};

Matrix Transpose(const Matrix& mat) {
    Matrix res = Matrix(mat.Columns(), mat.Rows());
    for (size_t i = 0; i < mat.Rows(); ++i) {
        for (size_t j = 0; j < mat.Columns(); ++j) {
            res[j, i] = mat[i, j];
        }
    }
    return res;
}

Matrix Identity(size_t dim) {
    Matrix res = Matrix(dim);
    for (size_t i = 0; i < res.Rows(); ++i) {
        res[i, i] = 1;
    }
    return res;
}

```

main.cpp

```

#include <cmath>
#include <cstdint>
#include <cstring>
#include <fstream>
#include <iomanip>
#include <ios>
#include <iostream>
#include <istream>
#include <ostream>
#include <vector>

#include "matrix.h"

Matrix ReadMatrix(std::istream& fin) {
    if (fin.bad()) {
        std::cerr << "Wrong file" << std::endl;
        return 0;
    }
    size_t n = 0;

```

```

    fin >> n;

    Matrix mat_a = Matrix(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i) {
        for (size_t j = 0; j < n; ++j) {
            fin >> mat_a[i, j];
        }
    }
    return mat_a;
}

// solves mat*x=vec system with bot triangle mat
std::vector<double> SolveBotTriangle(const Matrix& mat,
                                     const std::vector<double>& vec) {
    std::vector<double> sol;
    sol.reserve(vec.size());
    sol.push_back(vec.front());
    for (size_t i = 1; i < vec.size(); ++i) {
        double x = vec[i];
        for (size_t j = 0; j < i; ++j) {
            x -= mat[i, j] * sol[j];
        }
        sol.push_back(x);
    }
    return sol;
}

// solves mat*x=vec system with top triangle mat
std::vector<double> SolveTopTriangle(const Matrix& mat,
                                     const std::vector<double>& vec) {
    std::vector<double> sol(vec.size());
    sol.back() = vec.back();
    for (int i = vec.size() - 2; i >= 0; --i) {
        double x = vec[i];
        for (size_t j = i; j < vec.size(); ++j) {
            x -= mat[i, j] * sol[j];
        }
        sol[i] = x;
    }
    return sol;
}

void MulVector(std::vector<double>& vec, const std::vector<double>& vec_by) {
    for (size_t i = 0; i < vec.size(); ++i) {
        vec[i] *= vec_by[i];
    }
}

```



```

    }
}

template <class T>
std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const std::vector<T>& other) {
    for (const auto& elem : other) {
        out << std::setw(kWidth) << elem << " ";
    }
    out << "\n";
    return out;
}

// returns matrix maximum norm
double FindMaxNorm(const Matrix& mat) {
    double y = 0.;
    for (size_t i = 0; i < mat.Rows(); ++i) {
        double norm = 0.;
        for (size_t j = 0; j < mat.Columns(); ++j) {
            norm += std::fabs(mat[i, j]);
        }
        y = std::max(norm, y);
    }
    return y;
}

void SolveFast(std::istream& in, std::ostream& out);

int main(int argc, char* argv[]) {
    std::ios_base::sync_with_stdio(false);

    std::ifstream fin;
    std::ofstream fout;
    std::istream* in_ptr;
    std::ostream* out_ptr;

    if (argc != 3) {
        fin.open("input.txt");
        in_ptr = &fin;
        out_ptr = &std::cout;
    } else {
        fin.open(argv[1]);
        in_ptr = &fin;

        fout.open(argv[2]);
        out_ptr = &fout;
    }
}

```

```

        if (!fin.is_open() || !fout.is_open()) {
            std::cerr << "wrong filename(s)" << std::endl;
            return 1;
        }
    }
    auto& in = *in_ptr;
    auto& out = *out_ptr;

    SolveFast(in, out);

    return 0;
}

void SolveFast(std::istream& in, std::ostream& out) {
    Matrix mat_a = ReadMatrix(in);
    double norm_a = FindMaxNorm(mat_a);

    Matrix mat_l = mat_a.FindLUDecomp();
    auto diag_d = mat_a.GetDiagonal();

    out << "Matrix L :\n" << mat_l << "\nDiagonal of Matrix D : \n" << diag_d;
    auto diag_d_rev = diag_d;
    for (auto& elem : diag_d_rev) {
        elem = 1. / elem;
    }

    /// here we find  $A^{-1}$  solving
    /// n equations  $Ax=e_i$   $i = 1, 2, \dots, n$ 
    /// where  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots 0)$  1 in  $i$  position
    /// first  $Ly_i=e_i$ 
    ///  $y = D^{-1}$ 
    ///  $L^t * x_i = y_i$ 
    ///  $x_i$  is  $i$  column of  $A^{-1}$ 
    /// thus we solved  $A * A^{-1} = E$  column by column
    size_t dim = diag_d.size();
    Matrix rev_a(dim);
    auto mat_lt = Transpose(mat_l);
    for (size_t i = 0; i < dim; ++i) {
        std::vector<double> vec_e(dim, 0.);
        vec_e[i] = 1.;
        auto y = SolveBotTriangle(mat_l, vec_e);
        MulVector(y, diag_d_rev);
        y = SolveTopTriangle(mat_lt, y);
        rev_a[i] = y;
    }
}

```

```
out << "\nReversed Matrix A : \n" << rev_a;

out << "\nCondition number = "
    // << std::setprecision(15)
    << norm_a * FindMaxNorm(rev_a) << std::endl;
}
```