Tema 1

Las conectivas satisfacen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad
- Asociatividad
- Idempotencia
- Distributiva
- Identidad
- Involución
- De Morgan

No satisfacen ley de contradicción ni de tercio excluso. El conjunto de las $\mathscr{P}(U)$ con el max y el min forma un **lattice** distributivo y complementado, pero no un álgebra de bool por lo comentado antes. También forman un lattice De Morgan.

Automorfismo

$\varphi : [a,b] \to [a,b]$ continua, estrictamente creciente y cumpliendo

$$\varphi(a) = a,\ \varphi(b) = b$$

es automorfismo del intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Negacion

$c : [0,1] \to [0,1]$ es una negación difusa $\iff c(0) = 1 \wedge c(1) = 0$ y $c(x) \leq c(y), si x \geq y$
c estricta $\iff$ creciente estricta (continua y $c(x) < c(y), x > y\ \forall x, y \in [0,1]$)
c involutiva $\iff c(c(x)) = x,\ \forall x \in [0,1]$
Las negaciones involutivas son negaciones fuertes Una negación involutiva es estricta
c fuerte $\iff \exists\varphi$ automorfismo tal que $c(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$

Tnorma

$T : [0,1]^2 \to [0,1]$ es t-norma si cumple:
$T(x,1) = x,\ \forall x \in [0,1]$ Condiciones de contorno
$T(x,y) \leq T(z,u)$ si $x \leq z\ \wedge\ y \leq u$ Monotonia
Además de Conmutativa y Asociativa

T arquimediana si $T(x,x) < x \ \forall x \in (0,1)$
T continua y arquimediana es positiva $\iff$ es estricta
Cualquier T estricta es arquimediana
T continua y arquimediana $\iff \exists f : [0,1] \to [0,\infty]$ con $f(1) = 0$ estrictamente decreciente y continua tal que:

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y))$$

donde

$$f^{(-1)} = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{si } x \leq f(0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplos de funciones generadoras son $f(x) = -log(x)$ y $f(x) = 1 - x$

Si T es continua tal que $T(x,c(x)) = 0 \ \forall x \in [0,1]$ con c estricta entonces T es arquimediana.
Además $T(x,y) = \varphi^{-1}(\text{mín}(\varphi(x) + \varphi(y) - 1, 0))$ con $c(x) \leq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$
T estricta $\iff T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y)), \ x, y \in [0,1]$
La tnorma minimo es la mayor y la unica idempotente. Es continua pero no es arquimediana.
Las tnormas de la familia del producto (P) son continuas, arquimedianas y estrictamente positivas. Las de la familia de Lukasiewicz (W) son continuas y arquimedianas, pero no estrictas o positivas.

$$W(x,y) \leq P(x,y) \leq Min(x,y)$$

Tconorma

$S : [0,1]^2 \to [0,1]$ es t-conorma si cumple:
$S(x,0) = x, \ \forall x \in [0,1]$ Condiciones de contorno
$S(x,y) \leq S(z,u)$ si $x \leq z \ \wedge \ y \leq u$ Monotonia
Además de Conmutativa y Asociativa

S arquimediana si $S(x,x) > x \ \forall x \in (0,1)$
S nilpotente si $\exists x, y \in (0,1)$ tal que $S(x,y) = 1$
S continua y arquimediana $\iff \exists g : [0,1] \to [0,\infty]$ con $g(0) = 0$ estrictamente creciente y continua tal que:

$$S(x,y) = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$$

donde

$$g^{(-1)} = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{si } x \leq g(1) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplos de funciones generadoras son $g(x) = -log(1-x)$ y $g(x) = x$

S cumple $S(x,c(x)) = 1 \ \forall x \in [0,1]$ con c estricta $\iff \exists\varphi$ automrfismo del intervalo unidad tal que $S(x,y) = \varphi^{-1}(\text{máx}(\varphi(x) + \varphi(y), 1))$ y $c(x) \geq \varphi^{-1}(1 - \varphi(x))$

Una t-conorma continua S es estricta $\iff \exists\varphi$ tal que

$$S(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) - \varphi(x)\varphi(y))$$

Dualidad

(T, S, c) es un triple De Morgan $\iff c(S(x, y)) = T(c(x), c(y))$

Tema 2

Composicion

Sea R una relacion en $U \times V$. Sea S en $V \times W. R \circ S$:

$$\mu_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in V}[\mu_R(u, v) * \mu_S(v, w)]$$

Donde sup es una t-conorma y $*$ es una tnorma.

Implicacion

$I : [0,1]^2 \to [0,1]$ es implicacion si cumple $I(0, x) = I(x, 1) = I(1, 1) = 1 \ \forall x \in [0,1]$ y $I(1, 0) = 0$.
Además:
$x \leq z \Rightarrow I(x, y) \geq I(z, y) \forall y \in [0,1]$
$y \leq t \Rightarrow I(x, y) \leq I(x, t) \forall x \in [0,1]$
Medida de cuanto de cierto es el consecuente respecto al antecedente. Otras propiedades:
$I(x, 0) = c(x)$ es una negacion fuerte
$I(x, y) = I(c(y), c(x))$
$I(x, y) \geq y \ I(c(x), x) = x$

S-implications

$I(x, y) = S(c(x), y)$

QL-implications

No suelen cumplir $x \leq z \Rightarrow I(x, y) \geq I(z, y) \forall y \in [0,1]$
$I(x, y) = S(c(x), T(x, y))$

R-implications

$I(x, y) = \sup z | T(x, y) \leq y)$

GMP

Tenemos dos premisas:
Si x es A entonces y es B
x es A'
Consecuente: y es B'

GMT

Tenemos dos premisas:
Si x es A entonces y es B
u es B'
Consecuente: x es A'

Tema 3

Gradiente.

Tema 4

Funcion penalty

$P : [a,b]^{n+1} \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty]$ Satisface:
$P(\bar{x}, y) \geq 0,\ \forall \bar{x} \in [a,b]^n, y \in [a,b]$
$P(\bar{x}, y) = 0$ si $x_i = y\ \forall i = 1,...,n$
$P(\bar{x}, y$ es quasiconvexa en y para cualquier $\bar{x}$:

$$P(\bar{x}, \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2) \leq \text{máx}(P(\bar{x}, y_1), P(\bar{x}, y_2))$$

Disimilitud

$d_R : [0,1]^2 \to [0,1]$ es una función de disimilitud restringida si: $d_R(x,y) = d_R(y,x)\ \forall x, y \in [0,1]||$
$d_R(x,y) = 1 \iff x = 0, y = 1 \vee x = 1, y = 0$; es decir, $\{x,y\} = \{0,1\}$
$d_R(x,y) = 0 \iff x = y$
Para cada $x, y, z \in [0,1]$, si $x \leq y \leq z$, entonces $d_R(x,y) \leq d_R(x,z)$ y $d_R(y,z) \leq d_R(x,z)$.

Distancia

Tema 5

Tema 6

Agregacion

$M : [0,1]^n \to [0,1]$
$M(0,...,0) = 0 \wedge M(1,...,1) = 1$
Monotona no decreciente en cada componente

REF

$REF : [0,1]^2 \to [0,1]$
Conmutativa

4= 1 $\iff x = y$
$= 0 \iff x = 1 \wedge y = 0$ ó $x = 0 \wedge y = 1$
$REF(x, y) = REF(c(x), c(y))\ \forall x, y \in [0, 1]$ si c es negacion fuerte
$\forall x, y, z \in [0, 1]$ si $x \leq y \leq \Rightarrow REF(x, y) \geq REF(x, z) \wedge REF(y, z) \geq REF(x, z)$

Normal E_N

Tema 7

Fukami, Baldwin y Pilsworth. Axiomas

Overlap

$G : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ es una funcion de overlap si cumple:
Conmutativa
$= 0 \iff xy = 0$
$= 1 \iff xy = 1$
Creciente y continua
Si es asociativa es una t-norma
Para hablar de indice de overlap se sustituye por conjuntos

Interpolación y regla composicional

Regla composicional En la regla composicional se considera

$$B' = A' \circ R \equiv \mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} T\{\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)\}$$

Donde R la construimos mediante la impliacion $I(\mu_A, \mu_B)$

Interpolacion Primero se calcula el grado de similitud entre A y A' con $c(A, A')$
Con ello se contruye C
Se calcula $B' = \min(B, C)$