Projet Maths

Matthias Zdravkovic, Ameen Mohd Fairuz

Mai 2023

1 Développements mathématiques

1. a) On part de la loi normale bidimensionnelle :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} exp(-\frac{1}{2}(z-\mu)^T\Sigma^{-1}(z-\mu))$$

On pose

$$\Sigma = U \cdot \Lambda \cdot U^T$$

$$\Leftrightarrow \det\Sigma = \det U \cdot \det\Lambda \cdot \det(U^T)$$

$$(\det U)^2 = 1 \text{ car c'est une matrice orthogonale}$$

$$\Leftrightarrow \det\Sigma = \det\Lambda$$

avec $\Sigma \in M_2(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive définie, $U \in M_2(\mathbb{R})$ matrice orthogonale et $\Lambda \in M_2(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients positifs.
On pose

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec

$$\Sigma^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b\cos^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} & \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} \\ \frac{b\sin\theta\cos\theta - a\sin\theta\cos\theta}{ab} & \frac{b\sin^2\theta + a\sin^2\theta}{ab} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(x-\mu_1)\cdot\cos(\theta)+(y-\mu_2)\cdot\sin(\theta)]^2}{2a\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}+\frac{[(x-\mu_1)\cdot\sin(\theta)-(y-\mu_2)\cdot\cos(\theta)]^2}{2b\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi\sqrt{ab}}exp(\frac{[(x-\mu_1)\cdot\cos(\theta)+(y-\mu_2)\cdot\sin(\theta)]^2}{2a\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}+\frac{[(x-\mu_1)\cdot\sin(\theta)-(y-\mu_2)\cdot\cos(\theta)]^2}{2b\cdot\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})})=1$$

Ici, le centre de l'ellipse est donné par $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\sqrt{2a\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ est la demi-longueur de l'axe principal et $\sqrt{2b\log(\frac{1}{2\pi K\sqrt{ab}})}$ la demi-longueur de l'axe secondaire, K est la constante de normalisation et θ est l'angle de rotation de l'ellipse.

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy}\\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{pmatrix}$$