پروژه درس اصول شبیه سازی

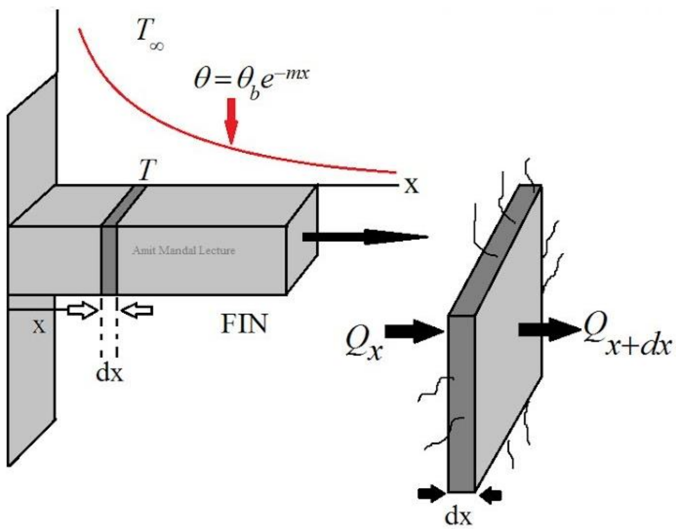
نویسنده : امیرحسین فروزنده نژاد

مقدمه

هدف از انجام این پروژه تفهیم بهتر مباحث تدریس شده در این فصل و همچنین مقایسه انواع روشهای حل معادلات PDE از منظر دقت و هزینه محاسباتی است. که در ادامه به حل معادله انتقال حرارت کانداکشن دوبعدی گذرا خواهیم پرداخت.

معادله حاکم

معادله انتقال حرارت کانداکشن دو بعدی گذرا یکی از معادلات پرکاربرد در صنعت است که به عنوان مثال میتوان به محاسبه انتقال حرارت به وسیله پره (fin) اشاره کرد.



شکل 1. نمایی از نحوه انتقال حرارت کانداکشن در پره

معادله حاکم بر انتقال حرارت دو بعدی کانداکشن گذرا (با صرف نظر از منبع گرمایی و فرض ثابت بودن خواص)به شرح زیر است:

$$\boldsymbol{K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)=\dot{\rho} c\frac{\partial T}{\partial t}}$$ معادله 1

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)=\frac{\dot{1}}{\propto}\frac{\partial T}{\partial t}}$$ معادله 2

برای حل این معادله با روش های عددی نیازمند تولید شبکه برای حل هستیم که با فرض همگن بودن شبکه حل و $g \dot{=} 0$ میتوان با تعریف $r=\frac{\propto .dt}{dx^2}$ معادله 2 را برای سه روش حل به صورت زیر باز نویسی کرد.

Explicit

$$T_{i,j}^{n+1} = r\left(T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n}\right) + (1-4r)T_{i,j}^{n}$$

معادله 3

Implicit

$$T_{i,j}^{n+1} = r\left(T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}\right) + T_{i,j}^{n}$$

معادله 4

Crank Nicholson

(1+4r).$T_{i,j}^{n+1} = r\left(T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}\right) + r\left(T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n}\right) + (1-4r)T_{i,j}^{n}$

معادله 5

بررسی فیزیکی مسئله

بررسی فیزیکی این مسئله در سه بخش انجام شده است که در بخش اول به بررسی تاثیر وجود منبع گرمایی پرداخت شده است و در قدم بعدی به بررسی تاثیر شرایط مرزی و در آخر به بررسی تاثیر جنس مادهپرداخته شده است.

تاثیر وجود منبع گرمایی

وجود منبع گرمایی باعث تغییر معادلات ۳تا۵ میشود که در ادامه به اصلاح معادله ۳ برداخته خواهد شد.

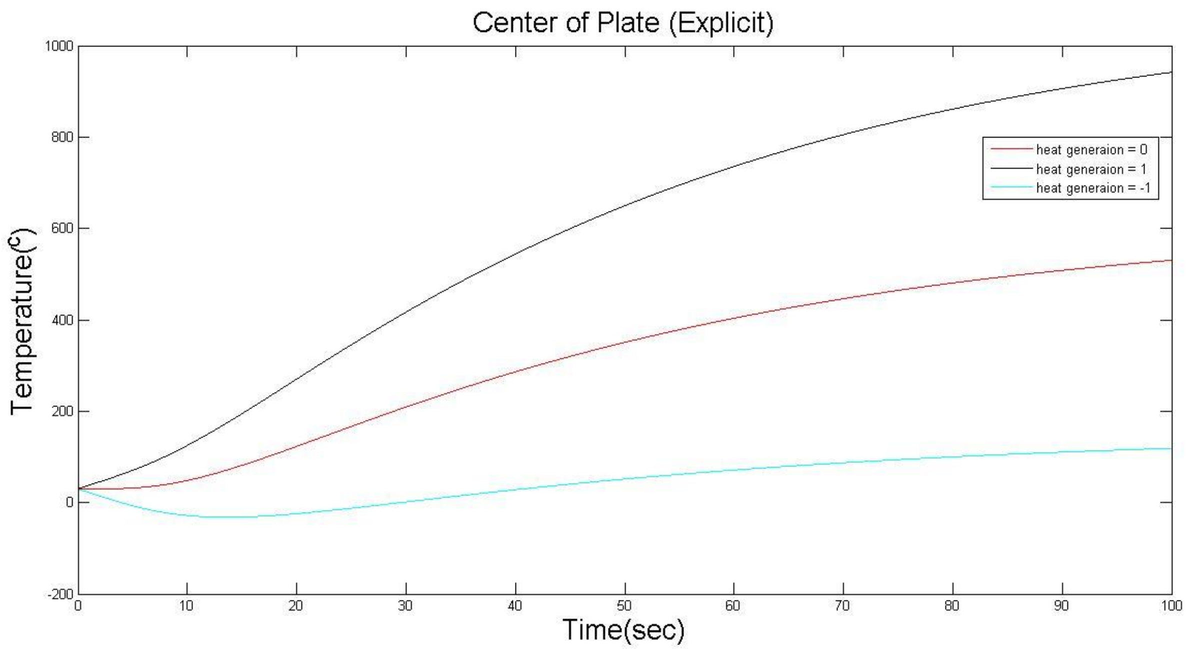
$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}^2}\right) + \frac{\dot{\mathbf{g}}}{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{1}}{\propto}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{t}}$$

معادله 6

$$T_{i,j}^{n+1} = r\left(T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n}\right) + (1-4r)T_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{c*\rho} * \dot{g}$$

معادله 7

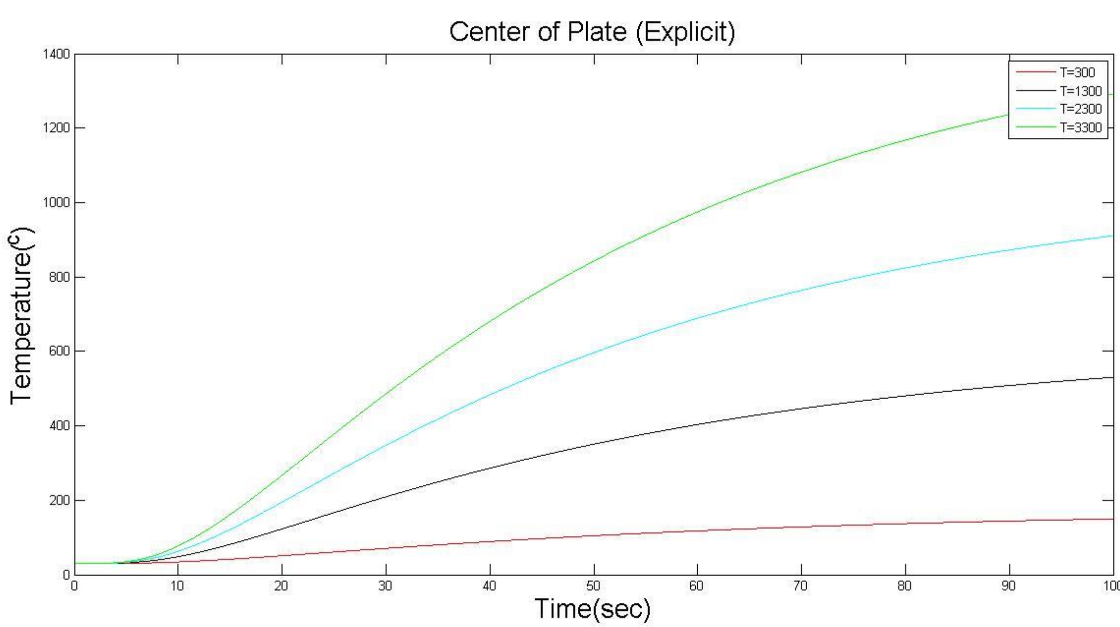
حال میتوانیم به حل معادله 7 برای شرایط تعریف شده در صورت پروژه با توانهای متفاوت منبع گرمایی بپردازیم که برای فهم راحت تر این موضوع بررسی دمای نقطهی مرکزی هندسه حل به جای کل مساحت صفحه خواهیم پرداخت.



شکل1: تاثیر تولید حرارت بر واحد سطح نحوه تغییر دما

تاثیر شرایط مرزی

بررسی این عامل نشان داد که شرایط مرزی تاثیر فراوانی روی شرایط تعادل و همچنین نحوه تغییر دما دارد که نمومه از این تغییرات در شکل 2 قابل مشاهده است.



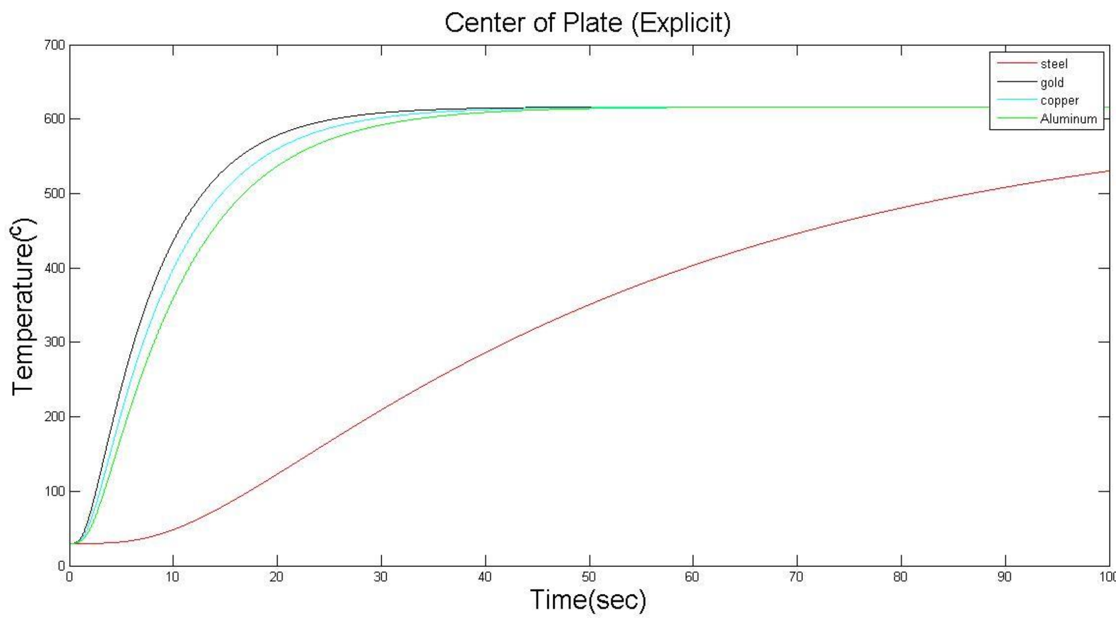
شکل2: تاثیر تغییر شرایط مرزی وجه بالایی در نحوه تغییر دما

تاثیر جنس ماده

با بررسی جنس سه ماده متفاوت که در جدول 1 شرح داده شده است به این نتیجه رسیدیم که برای این مسئله جنس مواد در شرایط تعادل تاثیری ندارند بلکه در مدت زمان رسیدن به تعادل ماثرند.

	c (J/kg/ K)	k(w/m/k)	ρ(kg/m3)	alpha(در مقیاس cm)
Aluminum	795	143	2800	0.97
Copper	386	388	8940	1.11
Gold	126	318	19320	1.27
steel(0.5%c)	465	54	7850	0.188

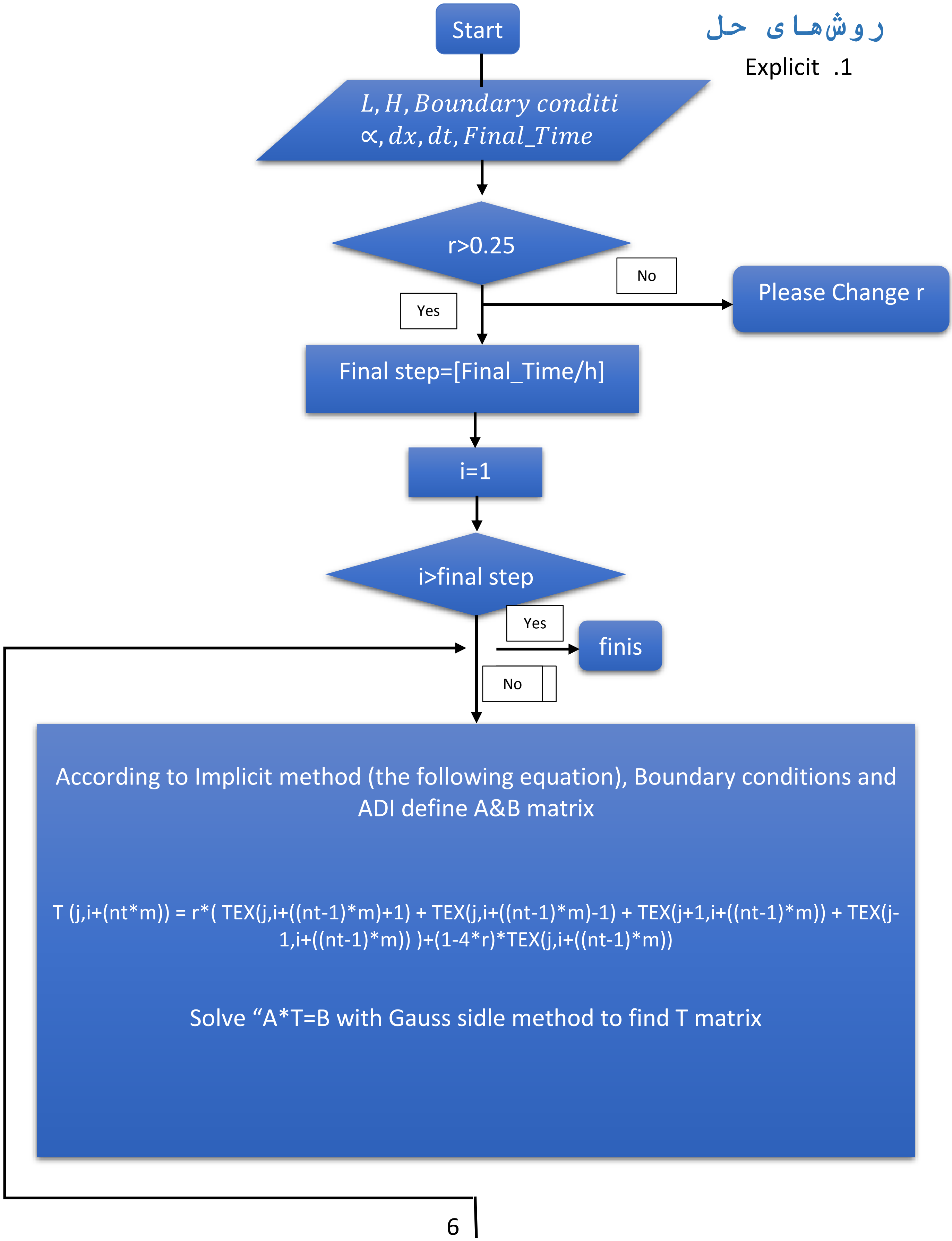
جدول1: مشخصات حرارتی مواد



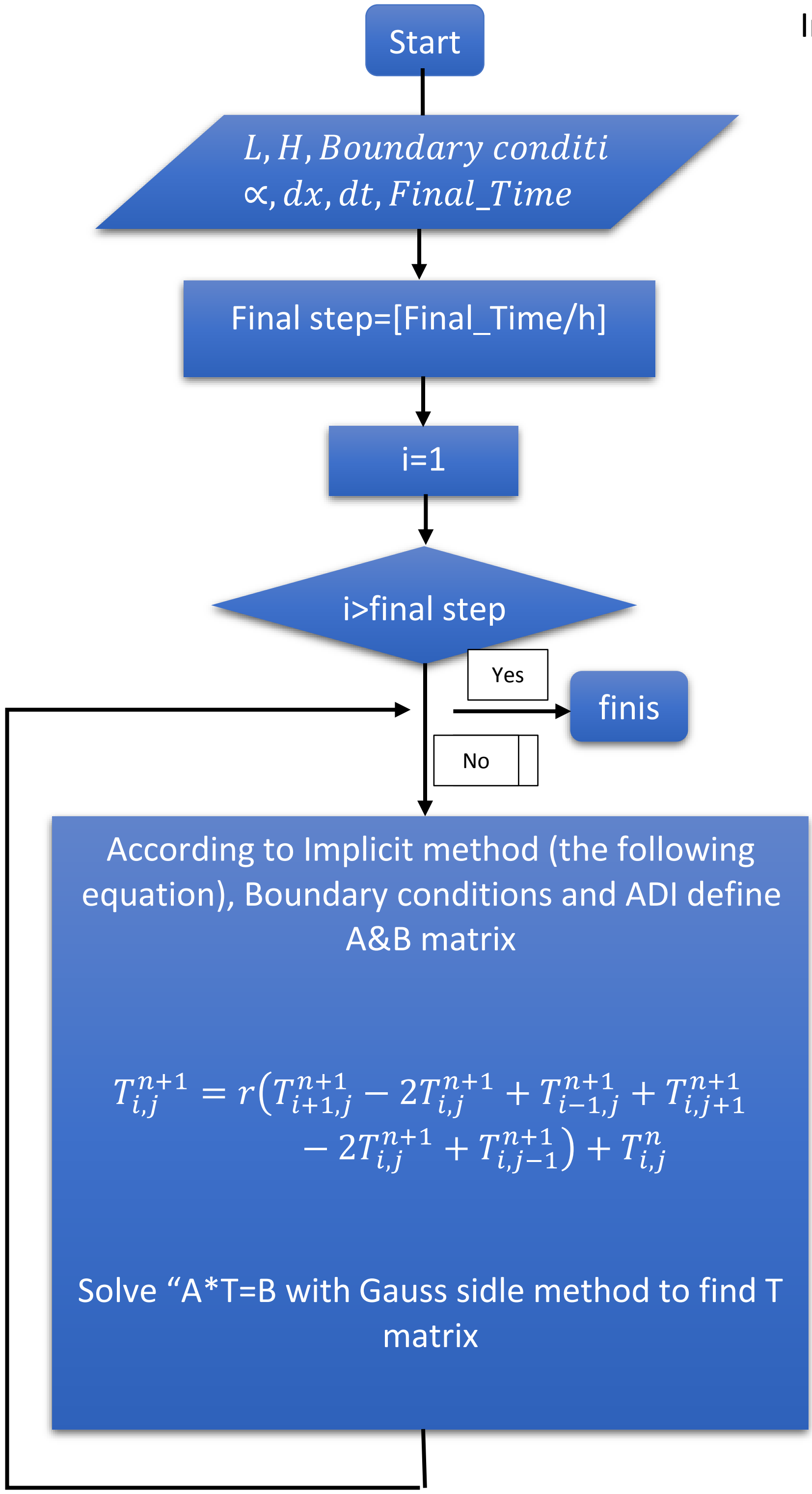
شکل3: تاثیر جنس بر تغییر دما

روش‌های حل

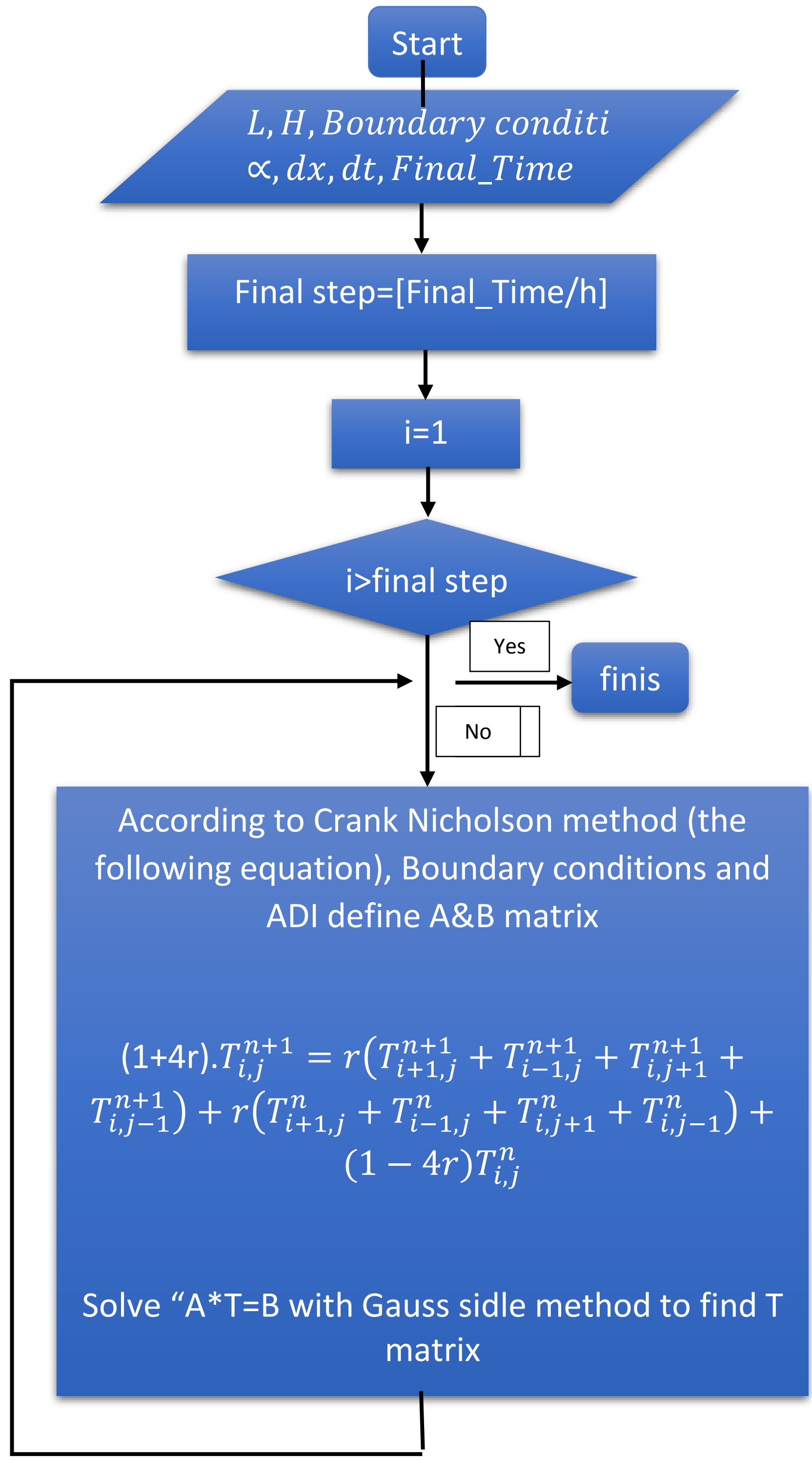
1. Explicit



2. Implicit

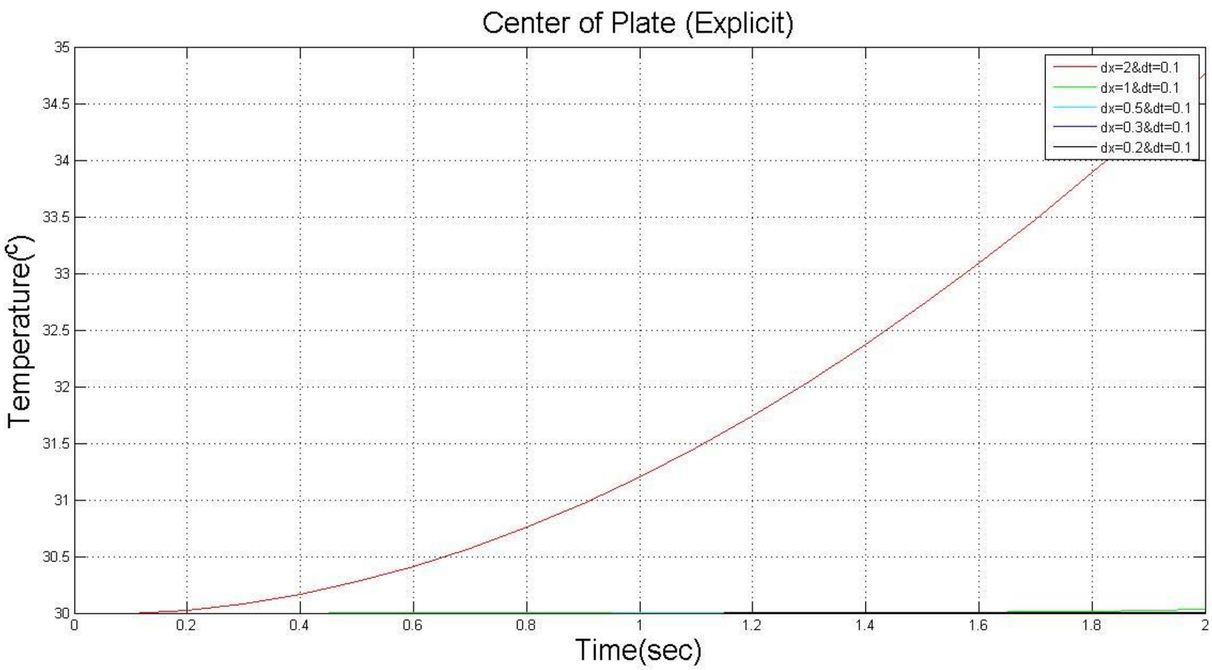

Start
$L, H, Boundary\ conditi$
$\propto, dx, dt, Final\_Time$
Final step=[Final_Time/h]
i=1
i>final step
Yes
finis
No
According to Implicit method (the following equation), Boundary conditions and ADI define A&B matrix
$$T_{i,j}^{n+1} = r\left(T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}\right) + T_{i,j}^{n}$$
Solve “A*T=B with Gauss sidle method to find T matrix

3. Crank Nicholson

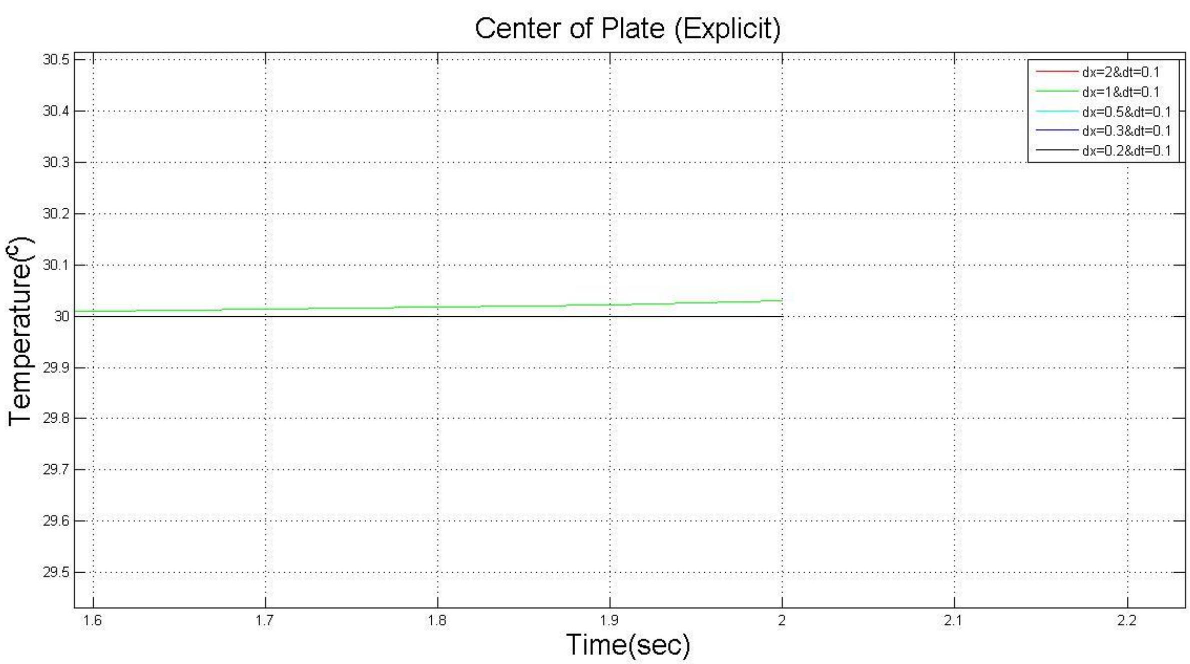


استقلال از اندازه شبکه

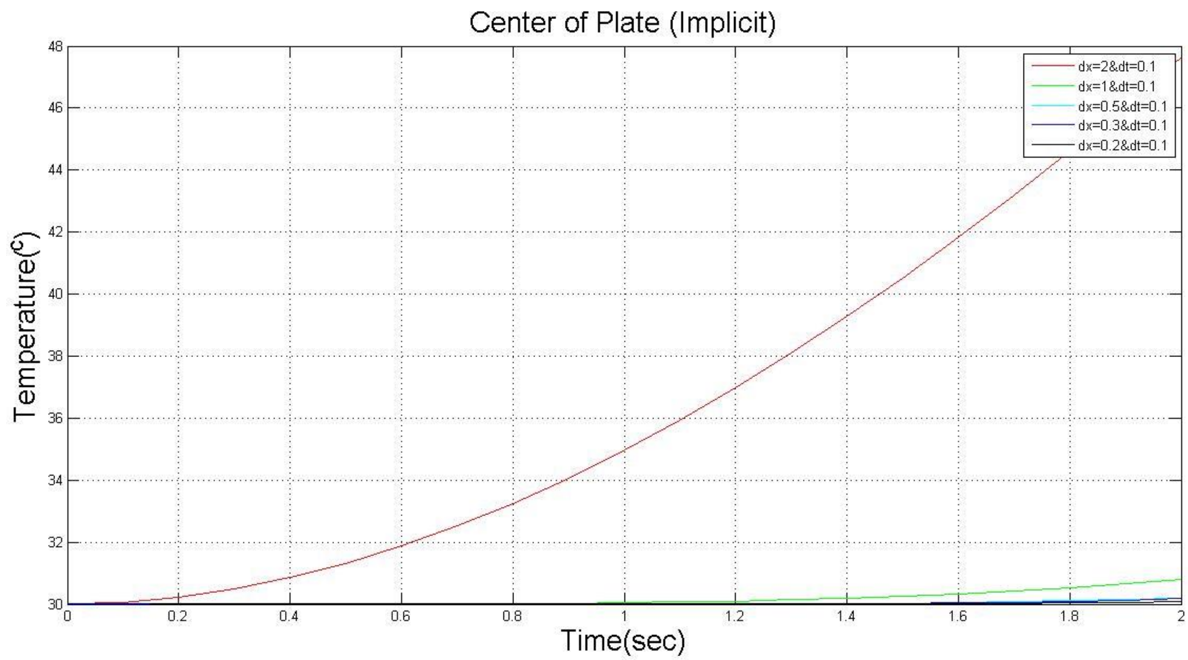
برای این منظور برای هر سه روش به طور جداگانه مسئله در اندازه های مختلف شبکه حل شده است که نتایج آن در شکل‌های 4 تا 9 آماده است.



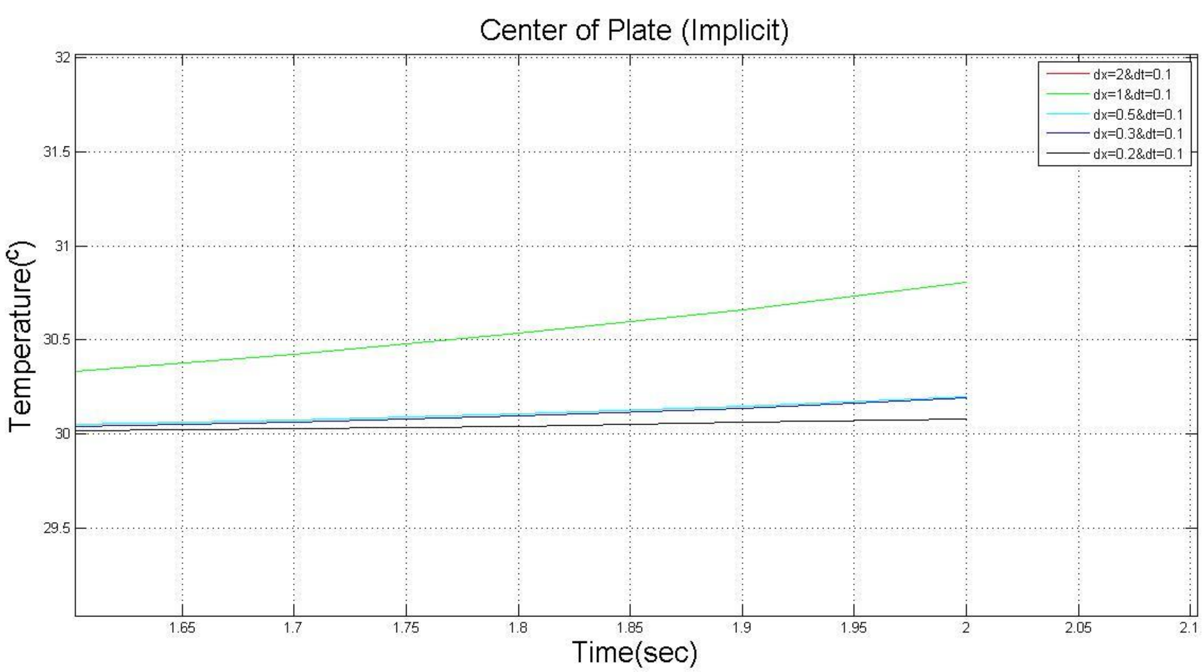
شکل4: بررسی اندازه شبکه برای روش Explicit



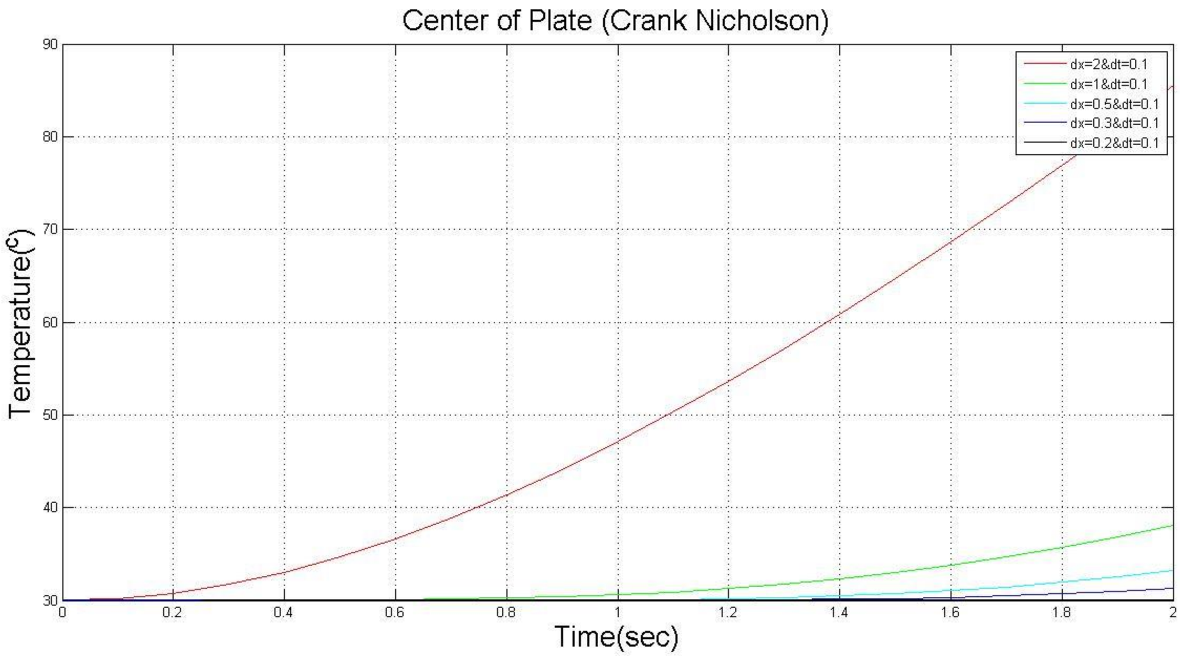
شکل5: بررسی اندازه شبکه برای روش Explicit



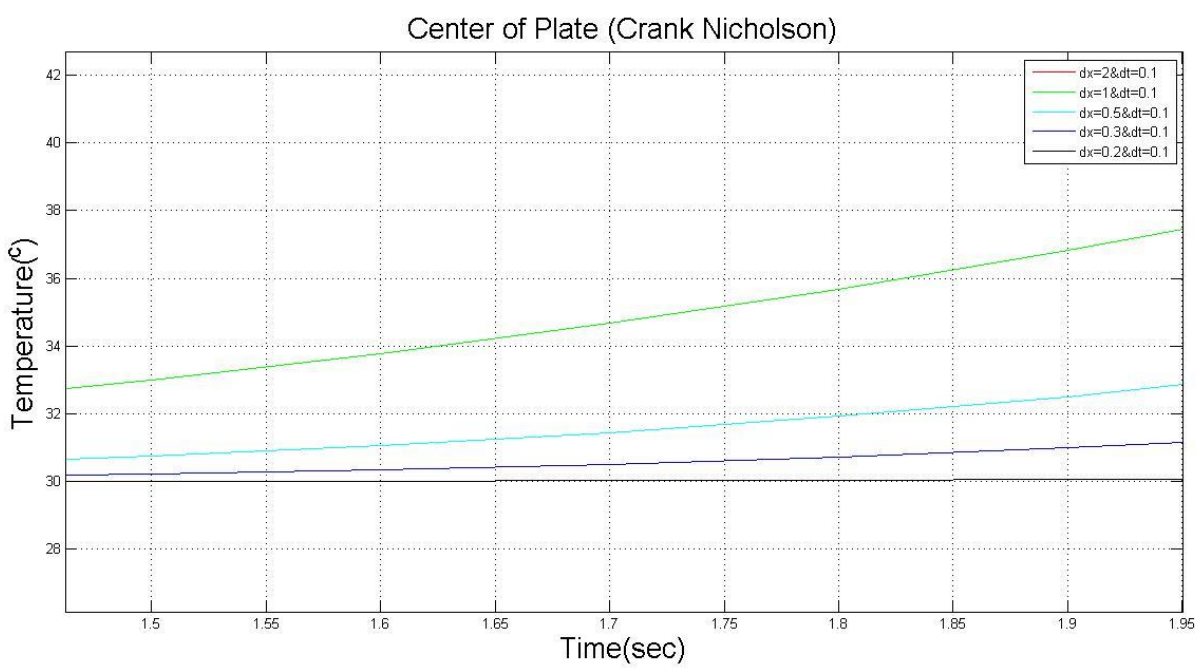
شکل6: بررسی اندازه شبکه برای روش Implicit



شکل7: بررسی اندازه شبکه برای روش Implicit



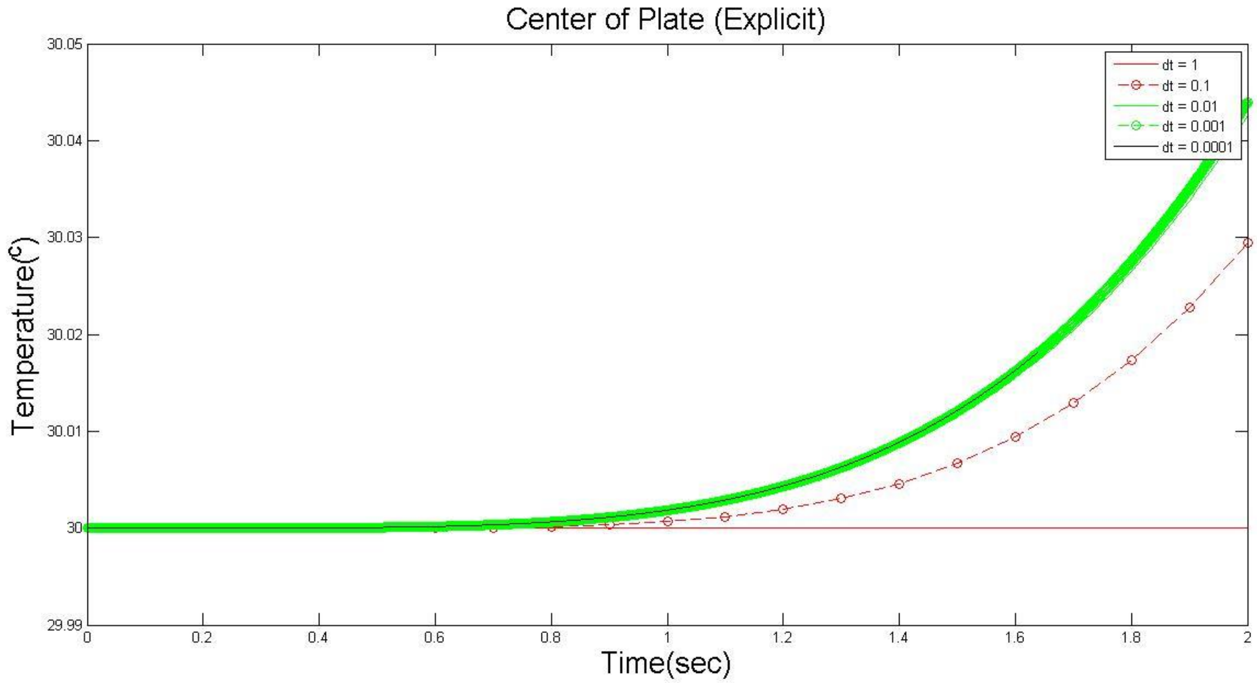
شکل8: بررسی اندازه شبکه برای روش Crank Nicholson



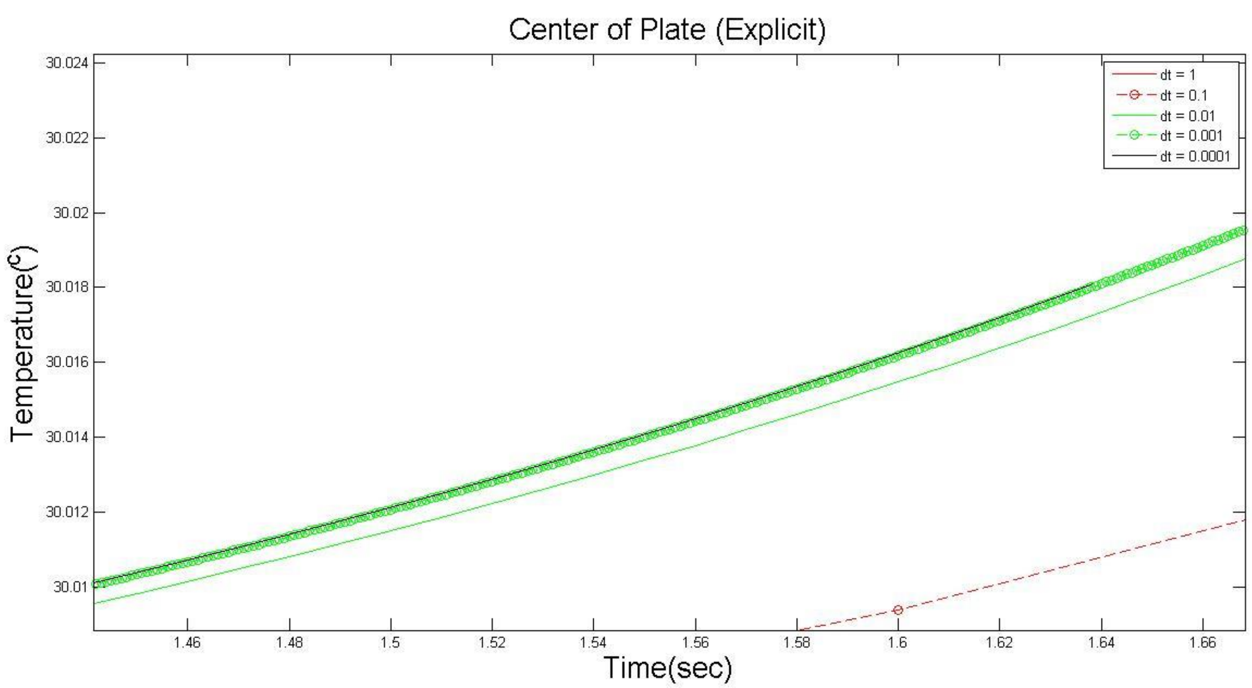
شکل9: بررسی اندازه شبکه برای روش Crank Nicholson

استقلال از گام زمانی

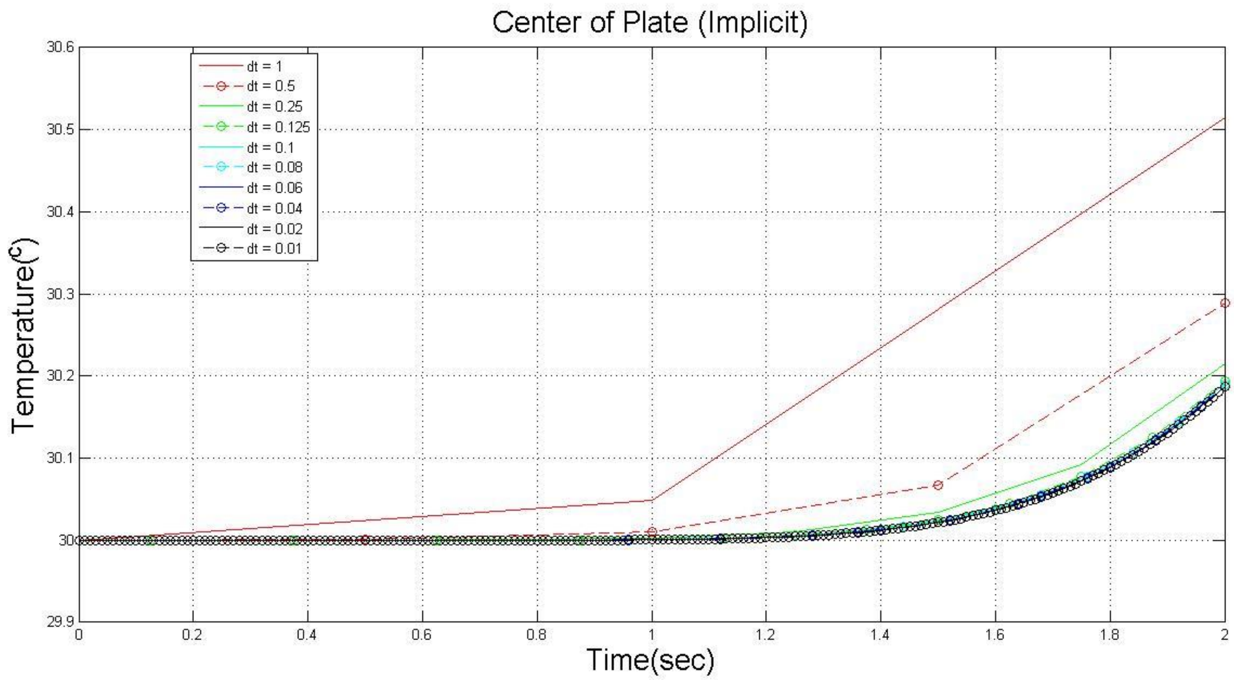
برای این منظور برای هر سه روش به طور جداگانه مسئله در اندازه های مختلف شبکه حل شده است که نتایج آن در شکل‌های 10 تا 14 آماده است.



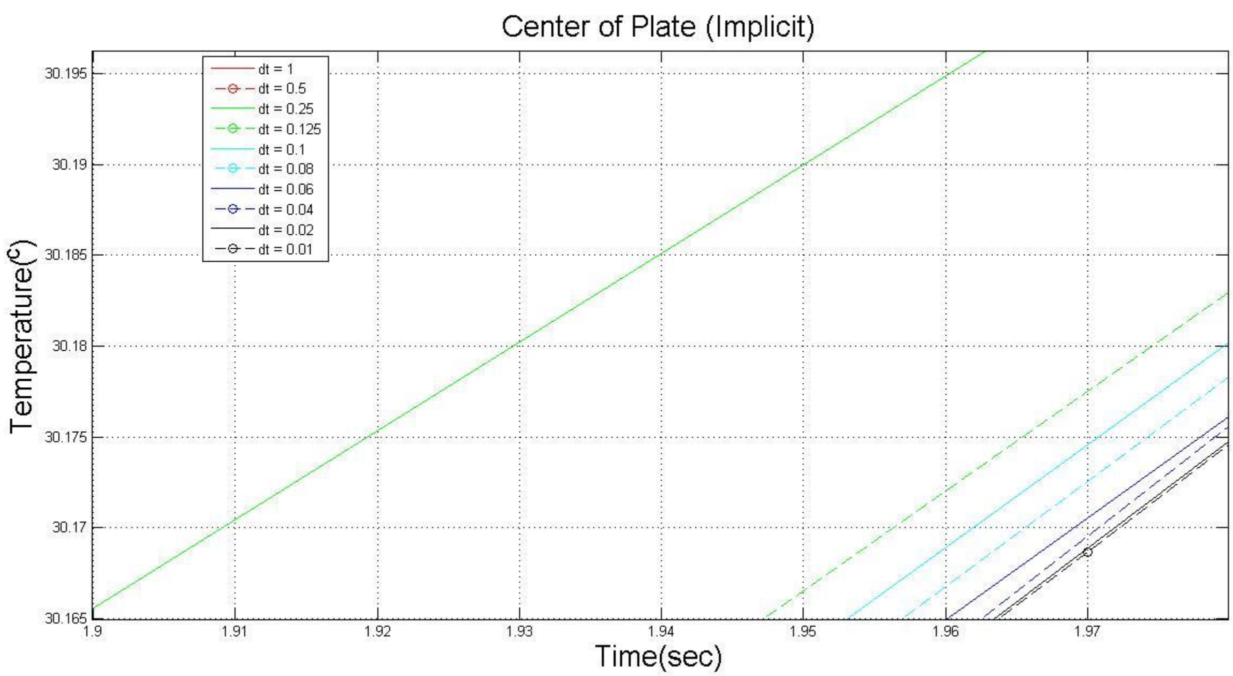
شکل10: بررسی گام زمانی شبکه برای روش Explicit



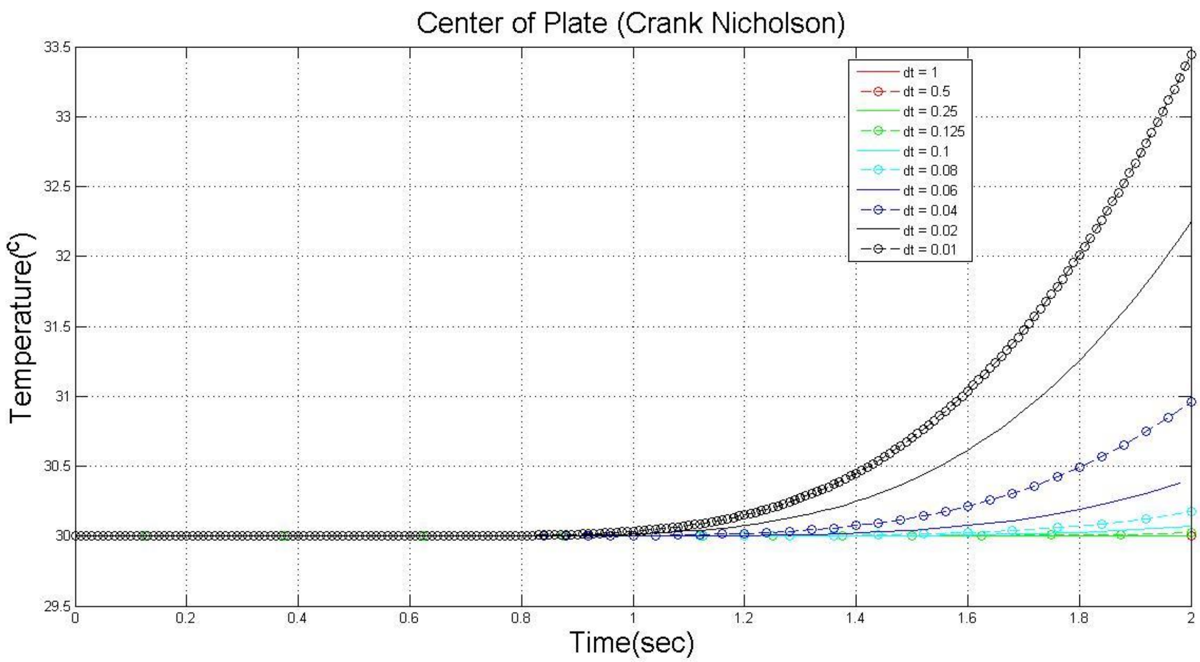
شکل11: بررسی گام زمانی شبکه برای روش Explicit



شکل12: بررسی گام زمانی شبکه برای روش Implicit



شکل13: بررسی گام زمانی شبکه برای روش Implicit



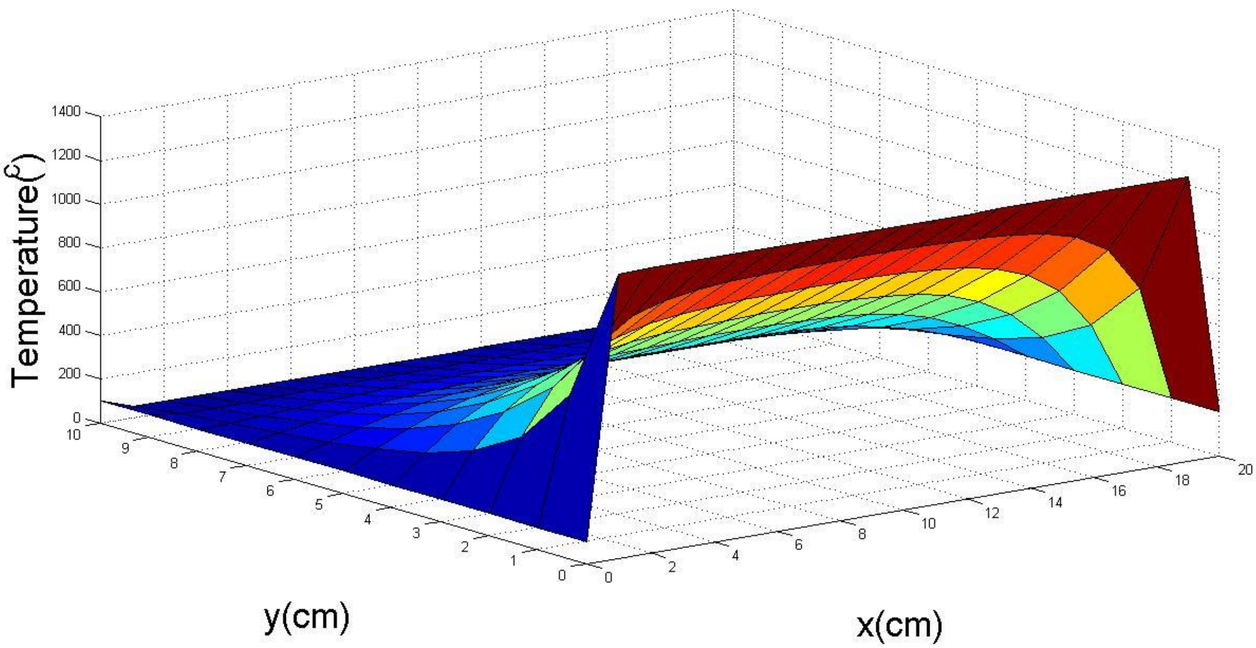
شکل14: بررسی گام زمانی شبکه برای روش Crank Nicholson

	dx	dt
Explicit	1	0.001
Implicit	0.3	0.02
Crank Nicholson	0.2	0.01

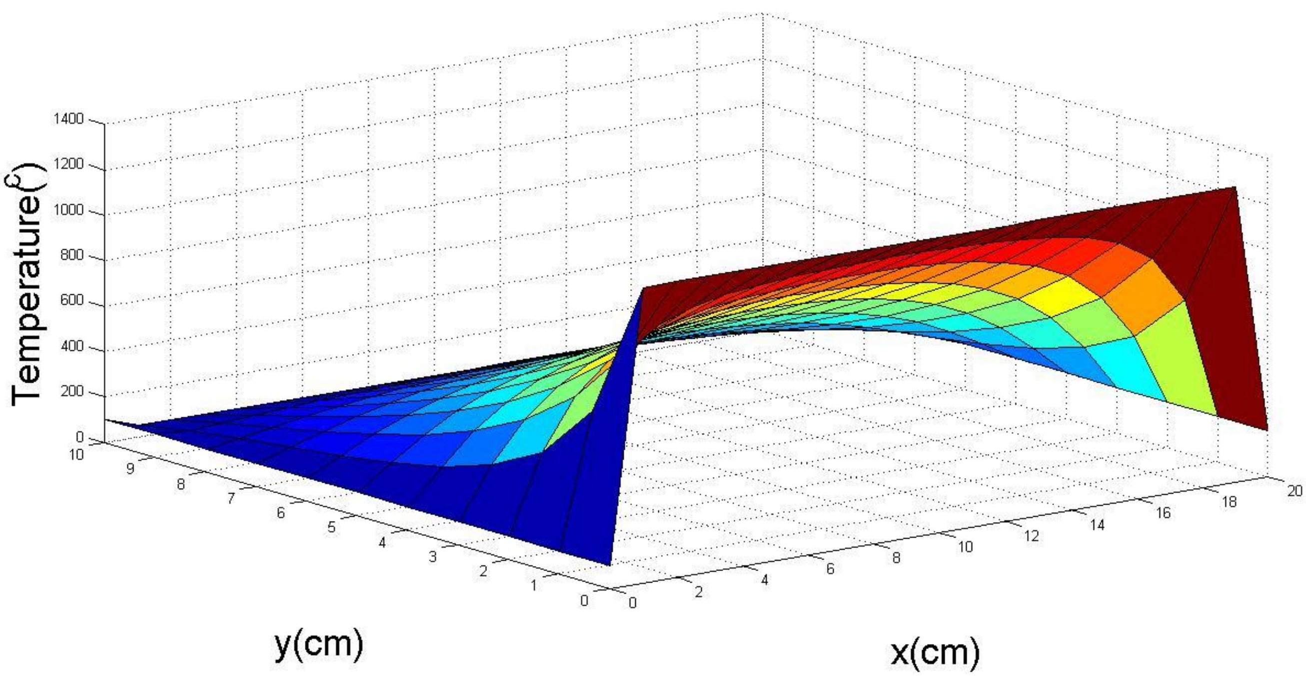
جدول2: مقدار بهینه گام زمانی و اندازه شبکه

نتایج

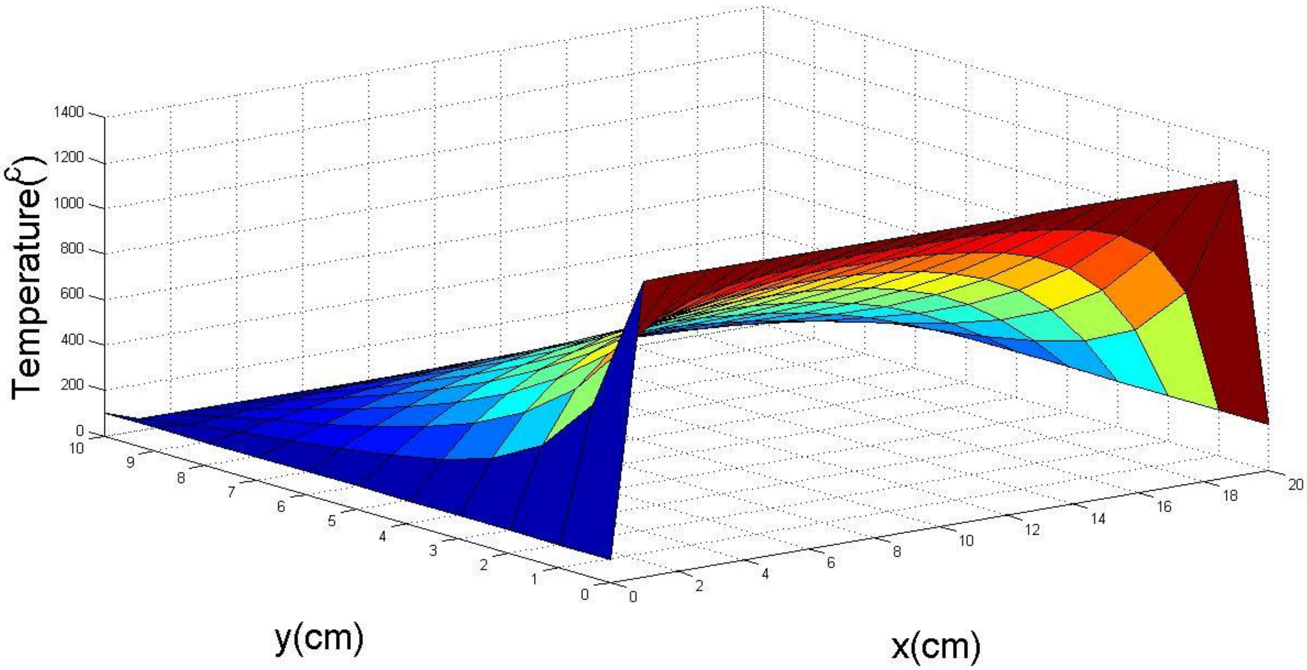
Explicit



شکل15: جواب مسئله برای لحظه t=60sec

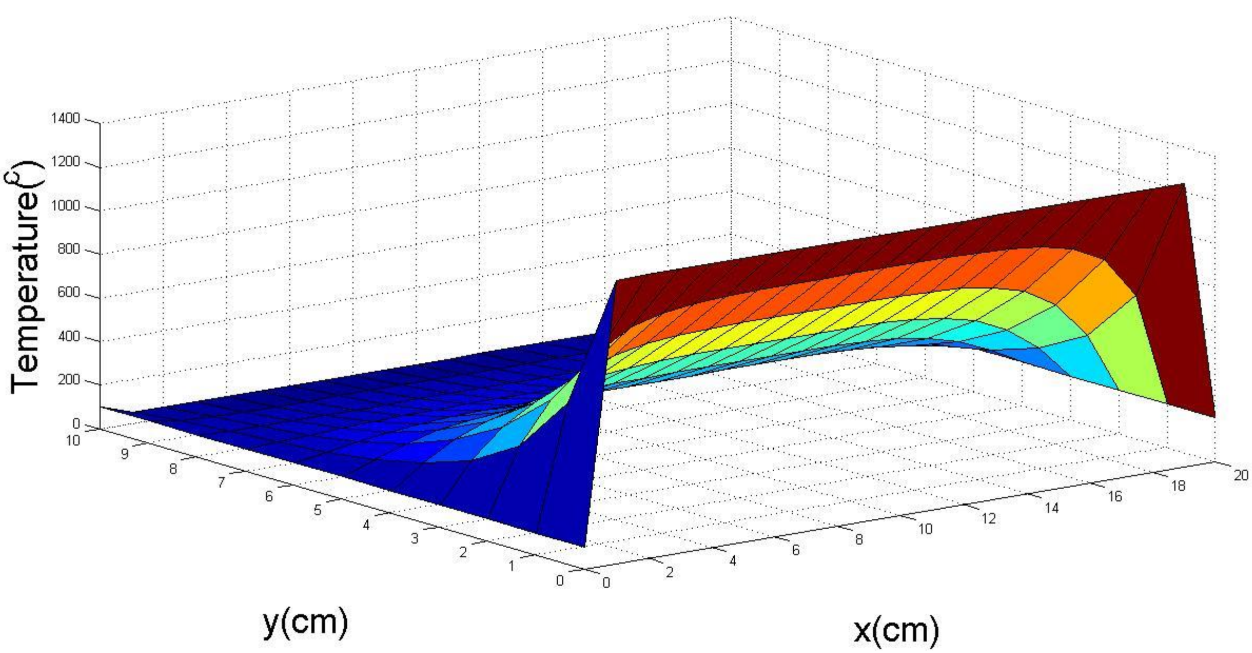


شکل16: جواب مسئله برای لحظه t=140sec

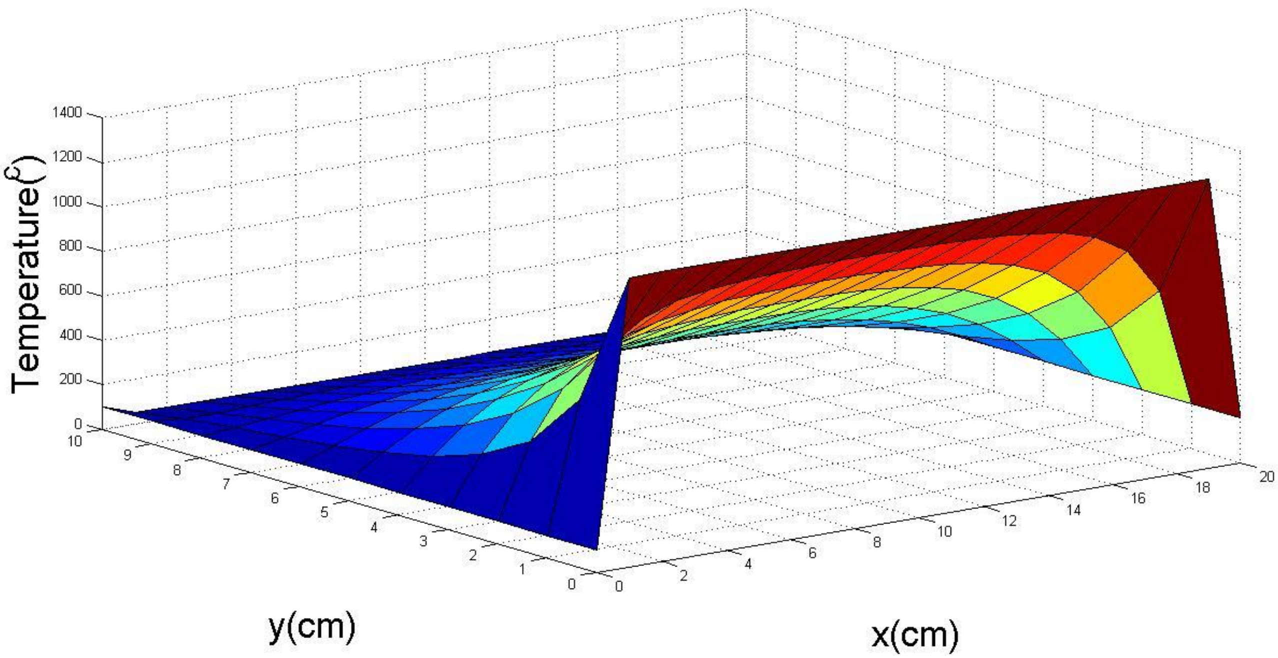


شکل17: جواب مسئله برای شرایط تعادل

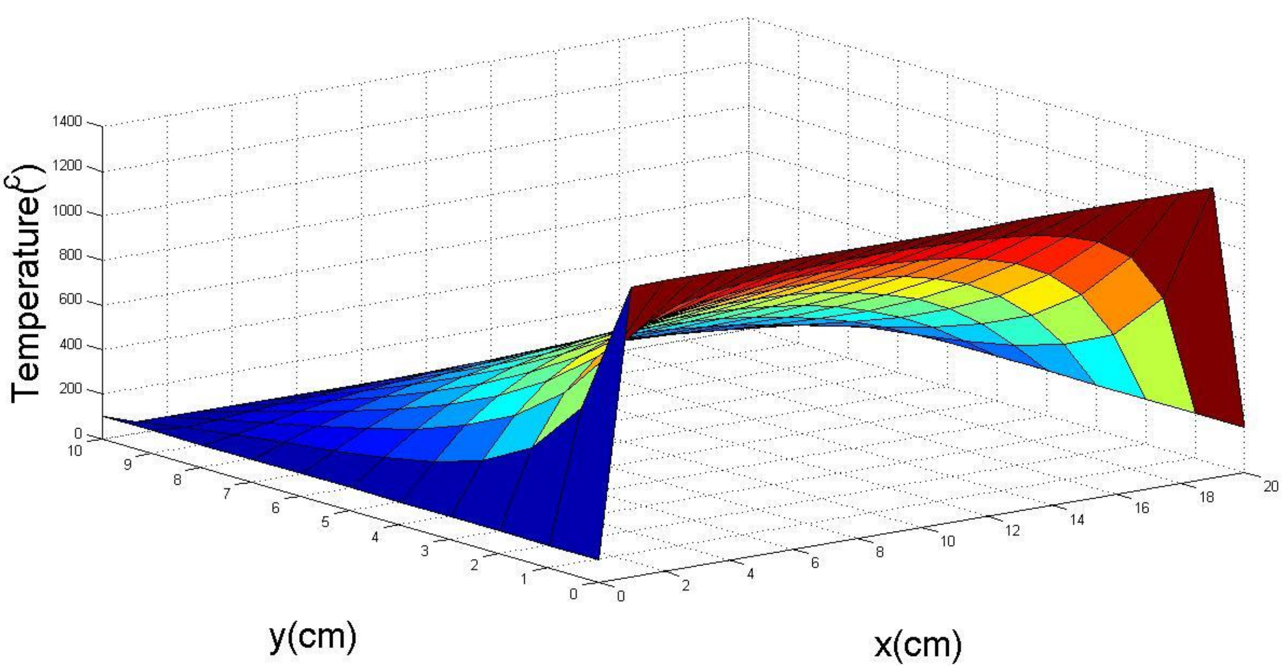
Implicit



شکل18: جواب مسئله برای لحظه t=20sec

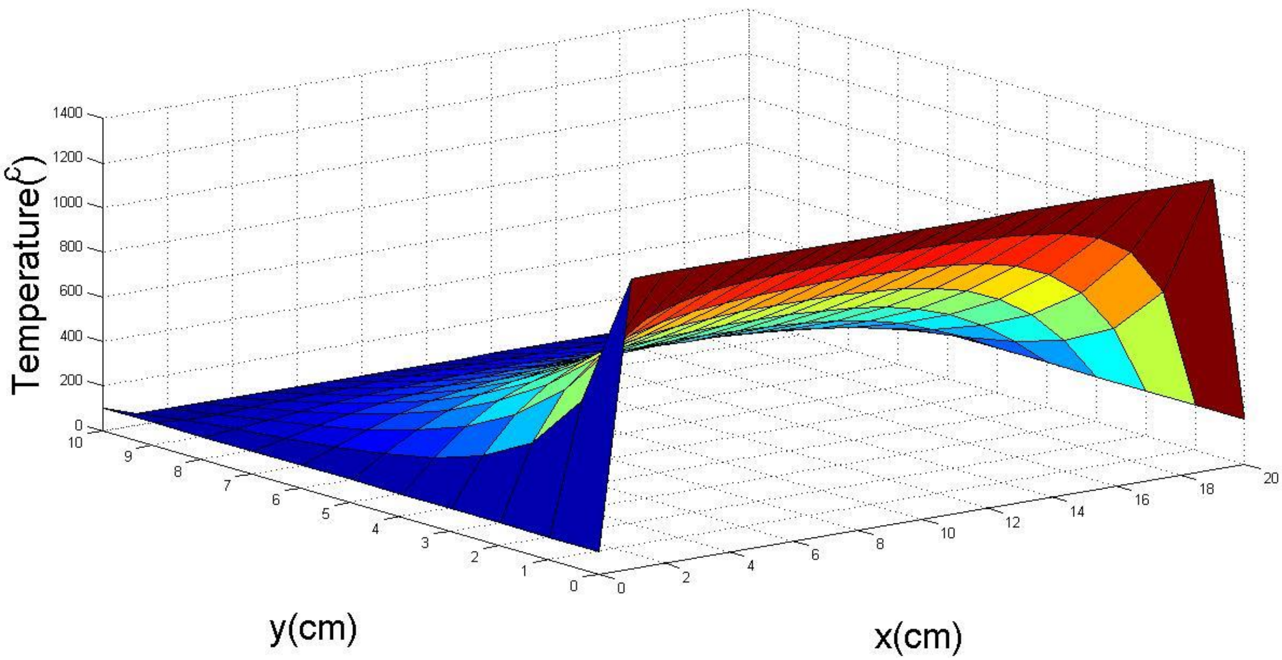


شکل19: جواب مسئله برای لحظه t=40sec

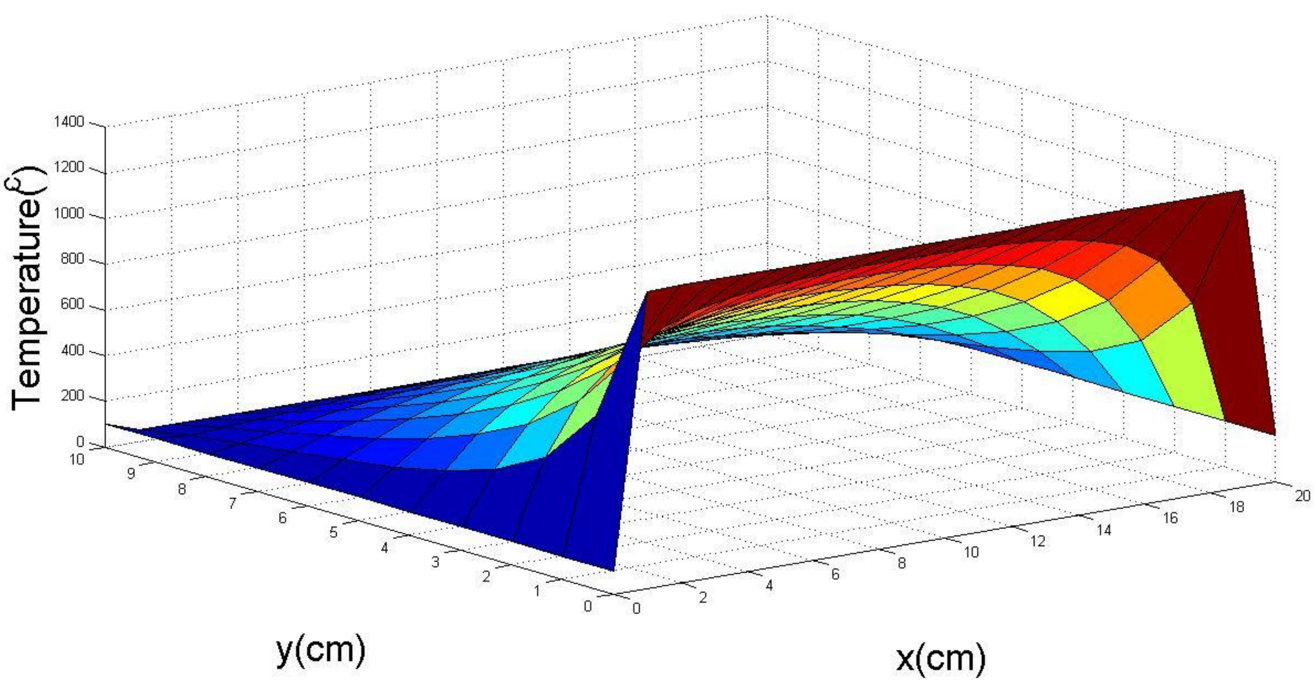


شکل20: جواب مسئله برای شرایط تعادل

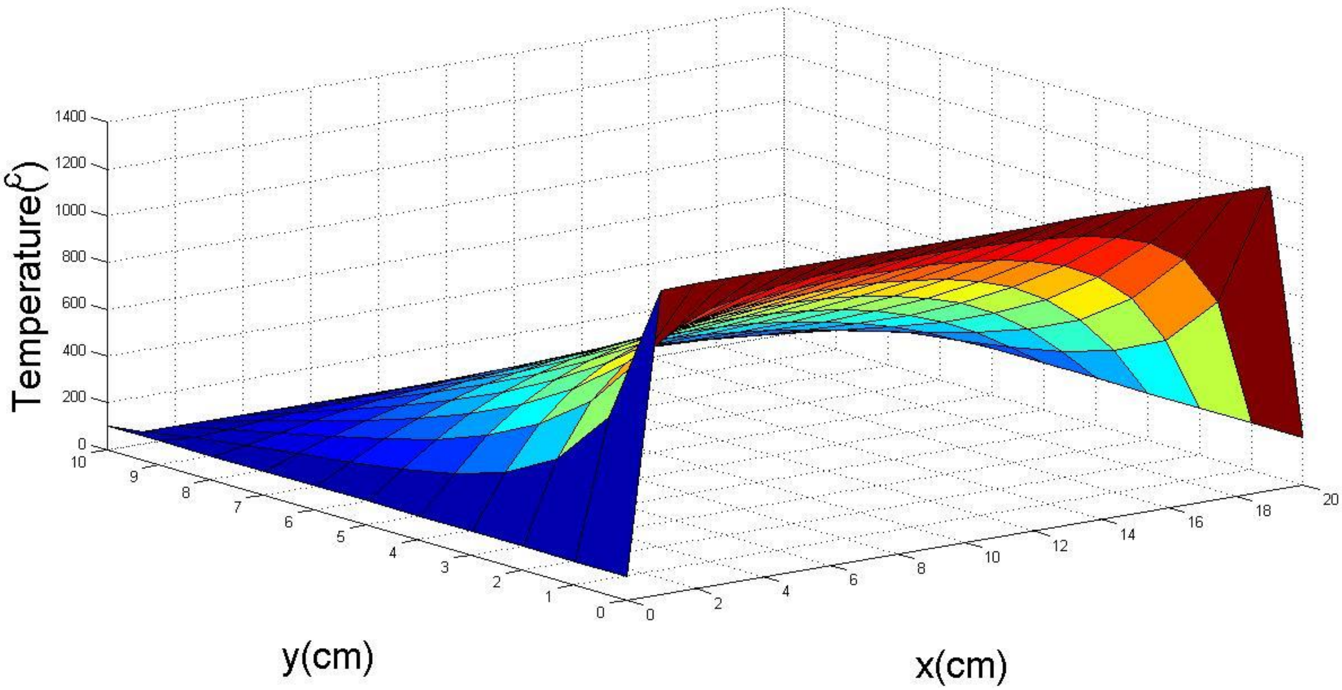
Crank Nicholson



شکل21: جواب مسئله برای لحظه t=20sec

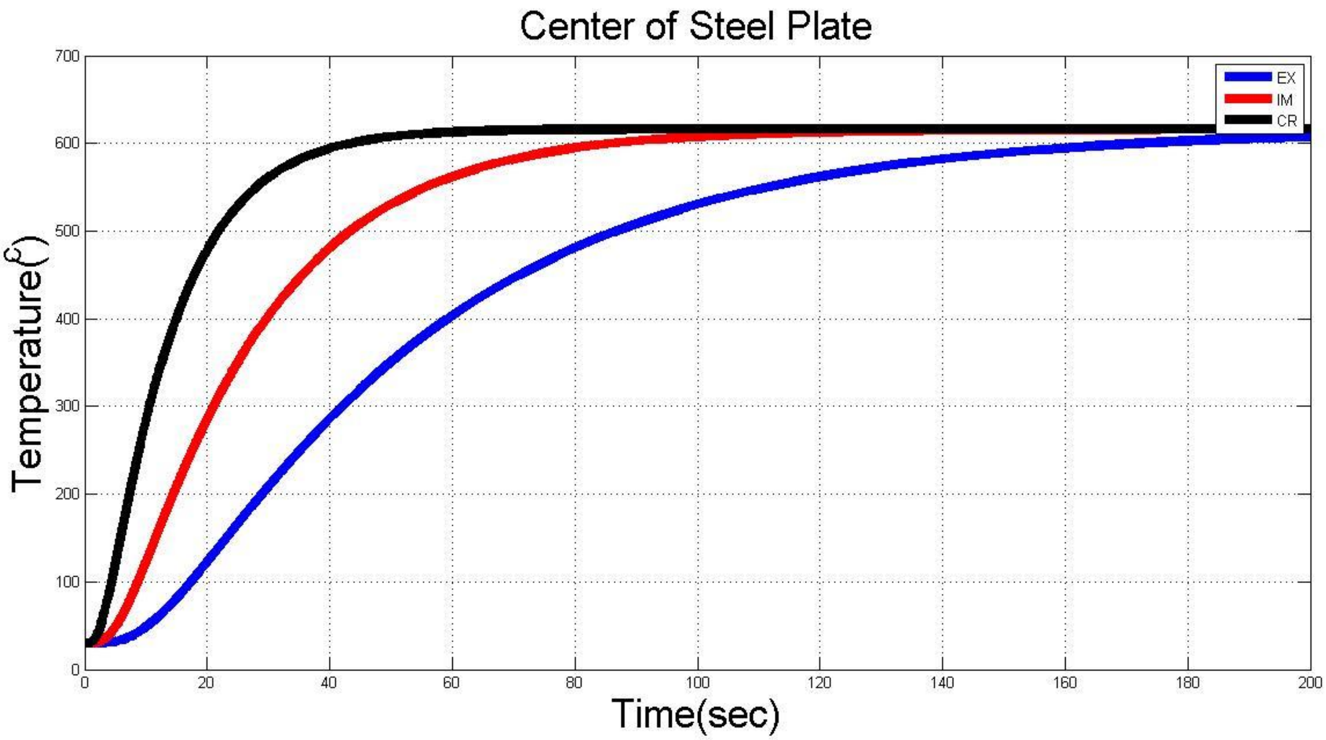


شکل22: جواب مسئله برای لحظه t=40sec



شکل23: جواب مسئله برای شرایط تعادل

مقایسه 3 روش



شکل15: مقایسه سه روش حل تا رسیدن به نقطه تعادل (dx=1,dt=0.02)