

پروژه درس اصول شبیه سازی

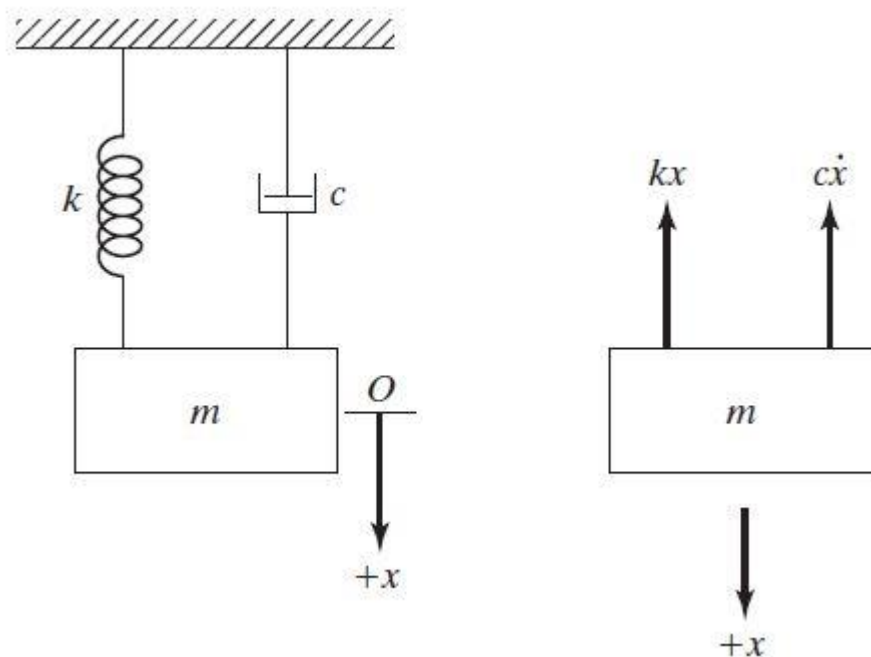
نویسنده : امیرحسین فروزنده نژاد

مقدمه

هدف از انجام این پروژه تفهیم بهتر مباحث تدریس شده در این فصل و همچنین مقایسه انواع روش‌های حل معادلات ODE از دو منظر همگرایی و سرعت همگرایی است. که در ادامه به حل یک مسئله جرم و فنر و دمپر خواهیم پرداخت.

معادله حاکم

یکی از مثال‌های معروف از معادلات ODE معادلات ارتعاشات آزاد با دمپر ویسکوز (Free Vibration with Viscous Damping) است که در ادامه به بررسی آن خواهیم پرداخت.



شکل 1. نمایی از سیستم ارتعاشاتی و دیاگرام آزاد آن

که این مسئله دارای حل تحلیلی به شرح زیر است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = Ce^{st}$$

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \\ &= C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \end{aligned}$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$$

$$\zeta = c/c_c$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1 e^{i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t} \right\}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \right\}$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C'_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + C'_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \right\}$$

$$= X_0 e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \phi_0 \right)$$

که برای آن داریم:

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0} \right)$$

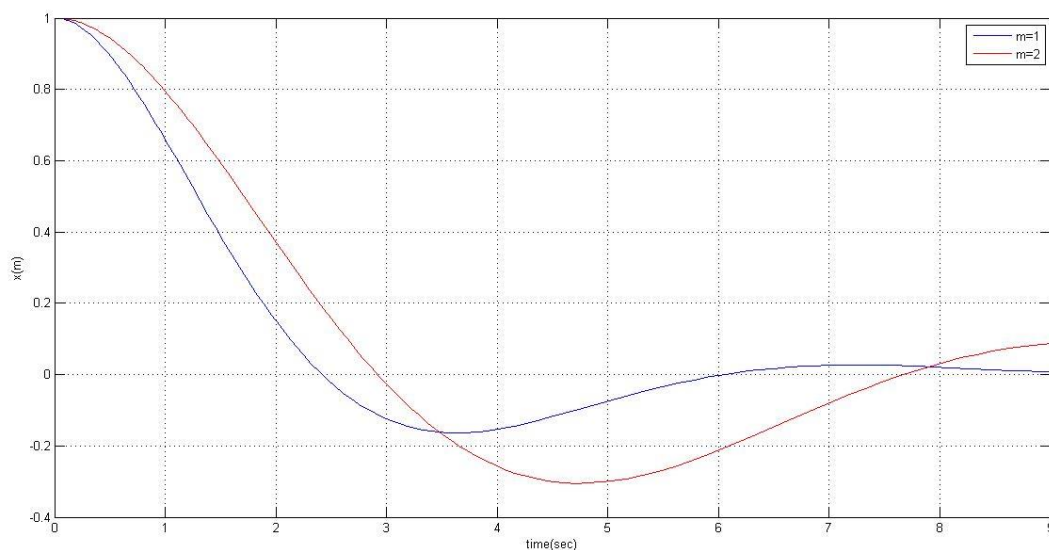
$$X_0 = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_n^2 + \dot{x}^2 + 2x_0 \dot{x} \zeta \omega_n}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

حال با توجه به حل تحلیلی میتوان به بررسی تاثیر پارامترهای مسئله $(m, k, c, x(0), \dot{x}(0))$ پردازیم.

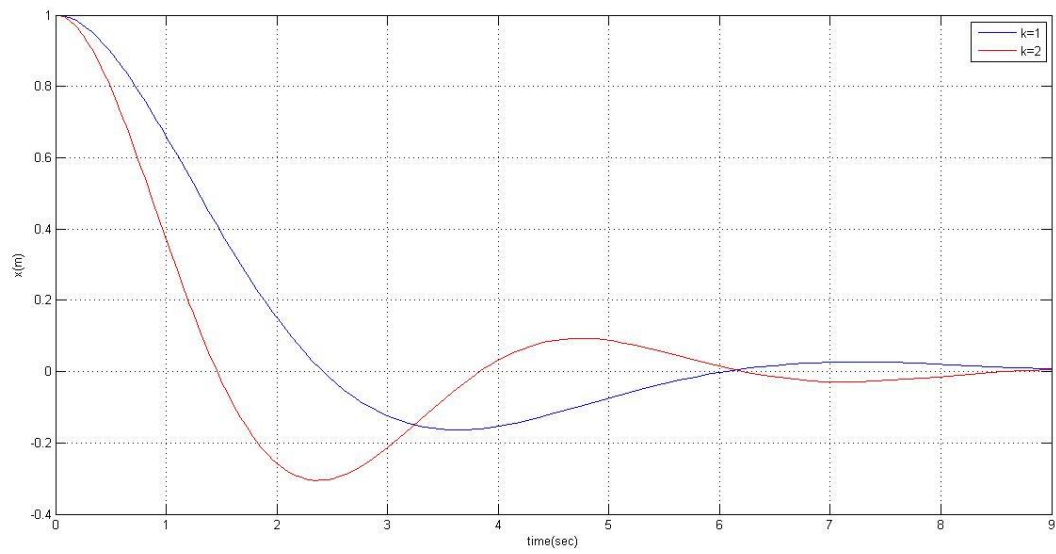
m	k	c	x(0)	dx/dt(0)
1	1	1	1	0

جدول 1: ورودی مسئله

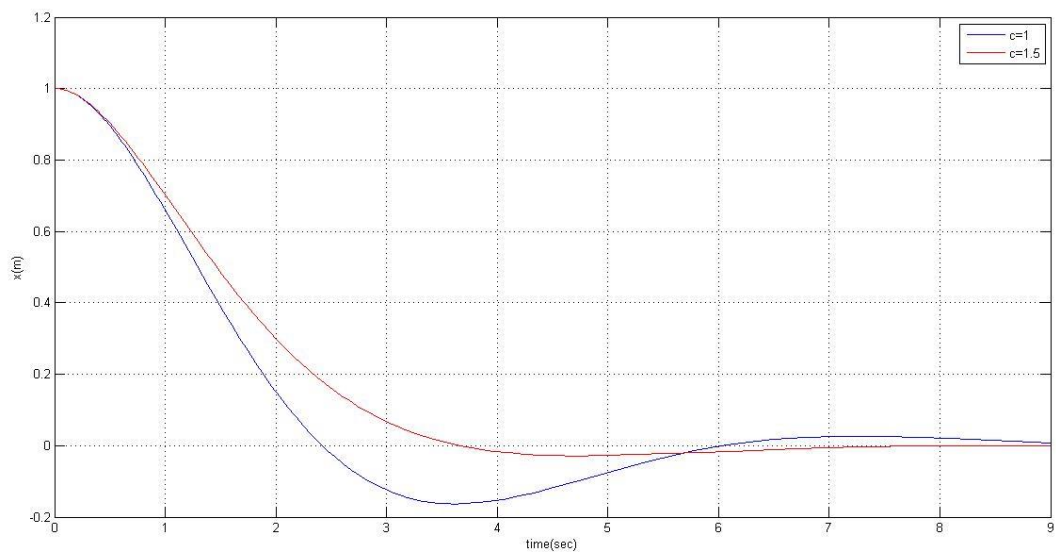
در هر مرحله به بررسی یکی از پارامترهای جدول 1 خواهیم پرداخت.



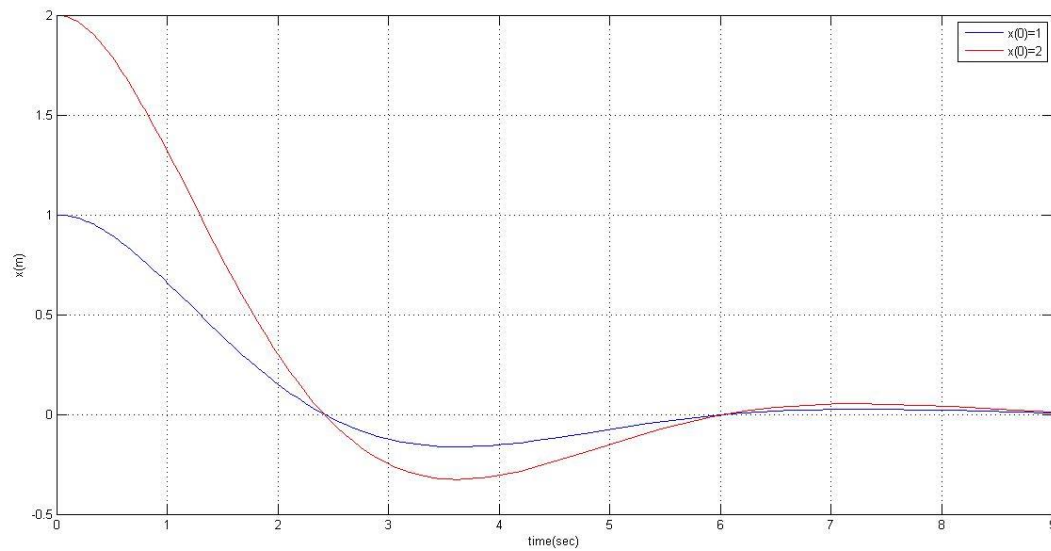
شکل 2. بررسی تاثیر افزایش 100 درصدی جرم



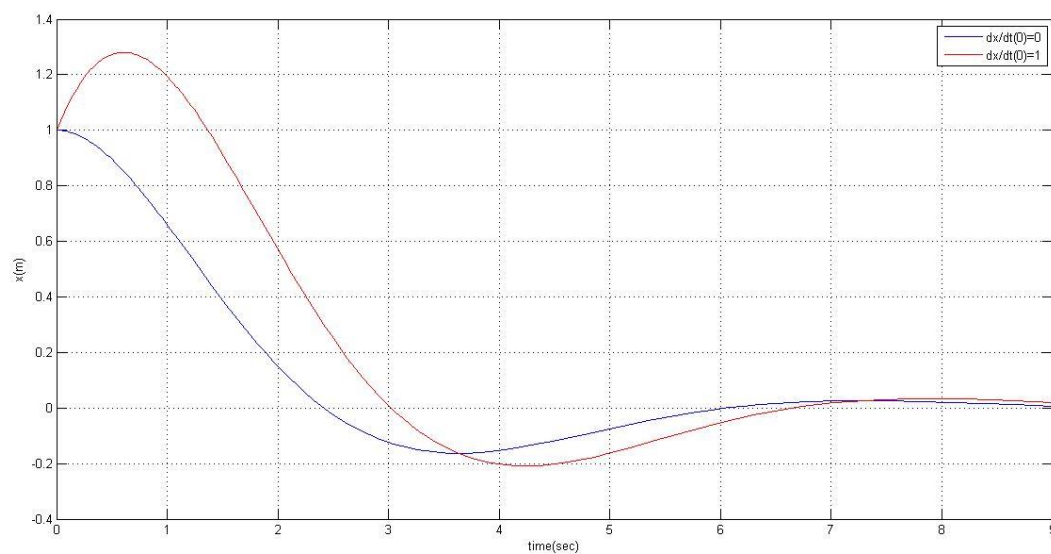
شکل 3. بررسی تاثیر افزایش 100 درصدی ضریب سختی فنر



شکل 4. بررسی تاثیر افزایش 50 درصدی ضریب ویسکوزیتی دمپر



شکل 5. بررسی تاثیر افزایش 100 درصدی دامنه تحریک اولیه (مکان اولیه)



شکل 5. بررسی تغییر سرعت اولیه از 0 به 1

روش‌های حل

از آنجایی که معادله حاکم یک معادله درجه دو خطی است برای حل لازم است آنرا به دو معادله درجه ۱ تقسیم کنیم:

$$\dot{x} = y = f(y)$$

$$\dot{y} = \frac{-c}{m}y - \frac{k}{m}x = g(x, y)$$