

Jakub Żuk

February 1, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>1</b>
1.1	Wstęp do projektu . . . . .	1
1.2	Opis matematyczny problemu . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Podejście numeryczne</b>	<b>2</b>
2.1	Dyskretyzacja danych . . . . .	2
2.2	Symulacja . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Jak ustawienie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania mieszkania?</b>	<b>3</b>
3.1	Opis doświadczenia i plan mieszkania . . . . .	3
3.2	Wyniki symulacji . . . . .	5
3.3	Wnioski . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Czy wyłączenie kaloryferów przed wyjściem do pracy pozwoli oszczędzić na ogrzewaniu?</b>	<b>7</b>
4.1	Opis doświadczenia i plan mieszkania . . . . .	7
4.2	Wyniki symulacji dla mieszkania z równomiernym układem grzejników . . . . .	9
4.3	Wnioski . . . . .	13
4.4	Kaloryfery pod oknami . . . . .	13
4.5	Wyniki symulacji dla mieszkania z grzejnikami pod oknami . . . . .	14
	<b>References</b>	<b>20</b>

## 1 Wprowadzenie

### 1.1 Wstęp do projektu

Celem projektu było zbadanie metodami numerycznymi rozchodzenia się ciepła w mieszkaniu. Zagadnienie to zostało zamodelowane przy użyciu równania ciepła z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Projekt sprowadza się do rozważań na temat dwóch problemów:

1. Jak ustawienie grzejników wpływa na efektywność ogrzewania?
2. Czy wyłączenie grzejników przed wyjściem do pracy pozwala oszczędzić na ogrzewaniu?

## 1.2 Opis matematyczny problemu

Najważniejsze założenia:

- ściany są doskonałymi izolatorami (warunek Neumanna na ścianach)
- okna wcale nie izolują (warunek Dirichleta na oknach)
- włączenie grzejnika o godzinie 0:00 jest pierwszym uruchomieniem grzejnika (temperatura początkowa jest równa temperaturze otoczenia)
- współczynnik dyfuzji wyrażony w jednostkach SI wynosi  $0.025 \frac{m^2}{s}$
- temperatura w przejściach między pokojami jest ustalana jako średnia temperatura w przejściu
- mieszkanie jest dwuwymiarowe (nie bierzemy pod uwagi objętości, tylko powierzchnię)
- grzejniki działają jak ogrzewanie podłogowe, zależą tylko od powierzchni podłogi jaką zajmują
- termostat mierzy średnią temperaturę w pobliżu kaloryfera i działa zgodnie z koncepcją histerezy [1]

Powyższe założenia zapisujemy matematycznie w poniższej postaci:

$$\begin{cases} u_t = \alpha \Delta u + f_i(x, u), & x \in R_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ u = T_{out}(t), & x \in W_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{windows}\} \\ \nabla u \cdot n = 0, & x \in S_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{walls}\} \\ u = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} u \, dx, & x \in D_i, t \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{doors}\} \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

gdzie  $u$  jest temperaturą w punkcie  $x$  i czasie  $t$ . Dolny indeks ( $u_t$  oznacza pochodną cząstkową  $u$  po  $t$ ).

## 2 Podejście numeryczne

### 2.1 Dyskretyzacja danych

Do numerycznego wyrażenia naszego zagadnienia będziemy potrzebowali zmienić notację ciągłą na dyskretną co zaczniemy od wyrażenia rozkładu temperatury w domu w postaci macierzy. Ustalmy parametry symulacji:

- Krok odległości:  $h_x = 0.5m$
- Krok czasu:  $h_t = 0.5s$
- Wymiary domu:  $20 \times 15m$
- Rozważany okres czasu:  $24h = 86400s$

W związku z tym, przy tak ustalonym kroku, rozkład temperatury będzie w czasie  $t$  macierzą o wymiarach  $40 \times 30$ . Macierz tę zapiszemy w postaci długiego wektora w większej macierzy  $u = [u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}]$ , której kolumny  $u_{t_i}$  będą reprezentowały temperaturę w całym układzie w czasie  $t_i = t_1 + (i - 1)h_t$ .

Żeby pracować na tak zdyskretyzowanych danych, potrzebujemy wyrazić laplasjan jako macierz drugich pochodnych. Robimy to przy pomocy metody opisanej dokładnie na stronie [3]. Teraz możemy przejść do symulacji.

## 2.2 Symulacja

Program wykonujący symulacje został napisany obiektowo:

Sama symulacja od strony matematycznej jest przeprowadzona w oparciu o metodę różnic skończonych opisaną również na stronie [3].

## 3 Jak ustawienie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania mieszkania?

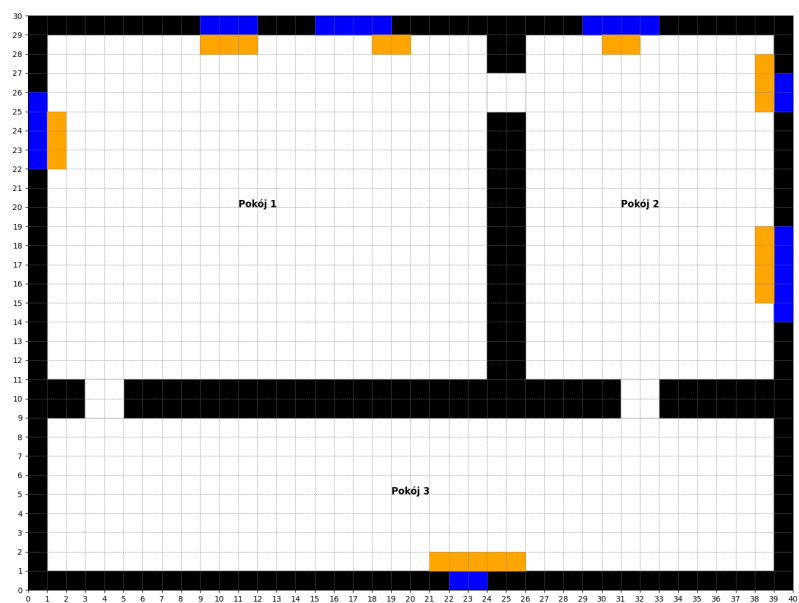
### 3.1 Opis doświadczenia i plan mieszkania

Pierwsze doświadczenie polega na określeniu jakościowym (równomierność i stopień ogrzania mieszkania) i ilościowym (zużyta energia) czy i w jaki sposób położenie źródeł ciepła wpływa na efektywność ogrzewania. Rozważamy dwa przypadki:

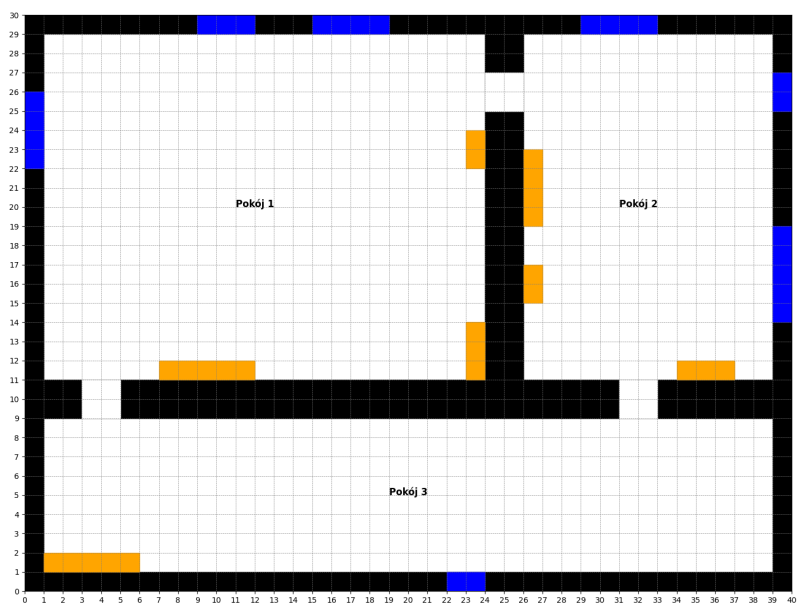
1. Ustawienie grzejników przy oknach
2. Ustawienie grzejników z dala od okien

Poniżej przedstawiamy najważniejsze założenia towarzyszące doświadczeniu:

- temperatura dobową zmienia się nieznacznie (amplituda wynosi  $4^\circ\text{C}$ )
- zmieniamy jedynie położenie grzejników, ich parametry i rozmiar pozostają niezmiennione
- cały dzień staramy się utrzymać temperaturę pokojową w każdym pokoju (termostat działa zgodnie z założeniami całego projektu)

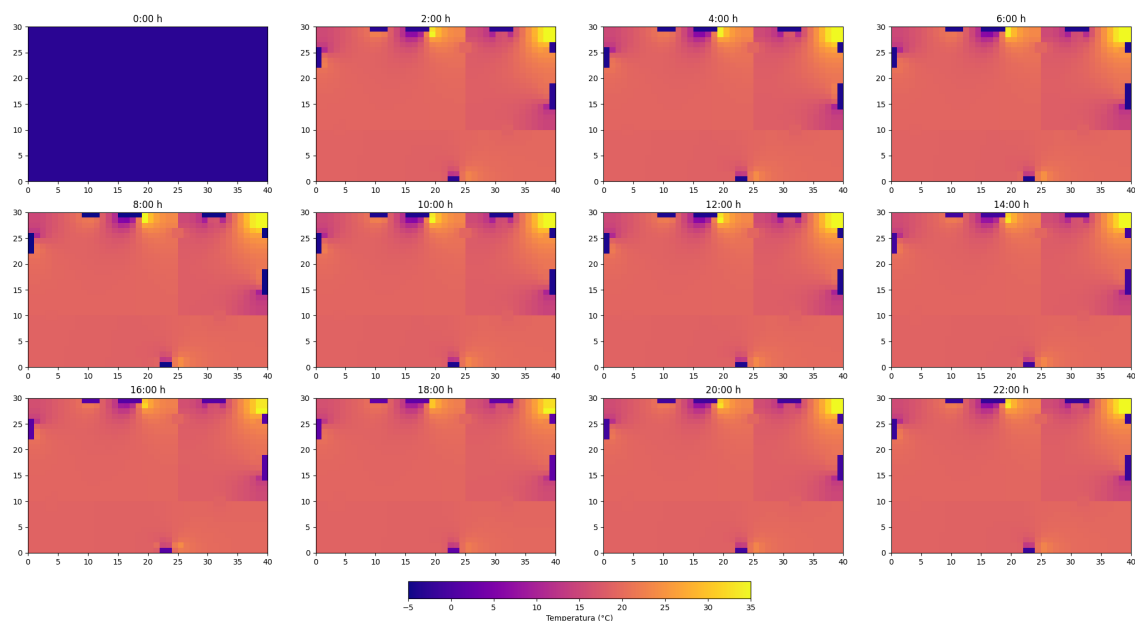


Plan mieszkania gdy kaloryfery znajdują się przy oknach

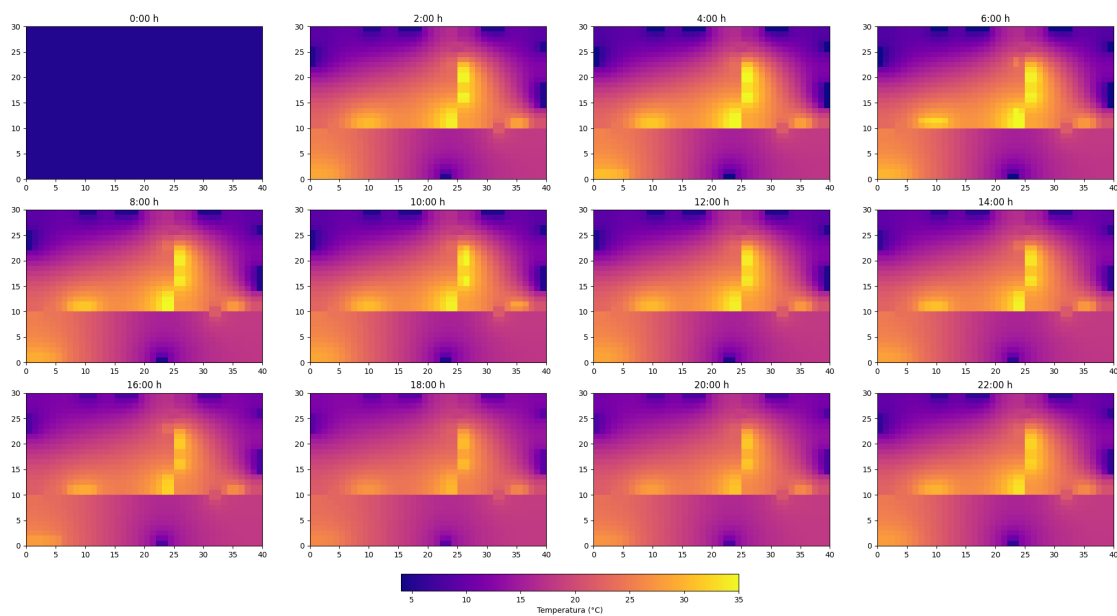


Plan mieszkania gdy kaloryfery znajdują się dalej od okien

## 3.2 Wyniki symulacji



Mapy ciepła mieszkania przez całą dobę dla przypadku ustawienia kaloryferów pod oknami

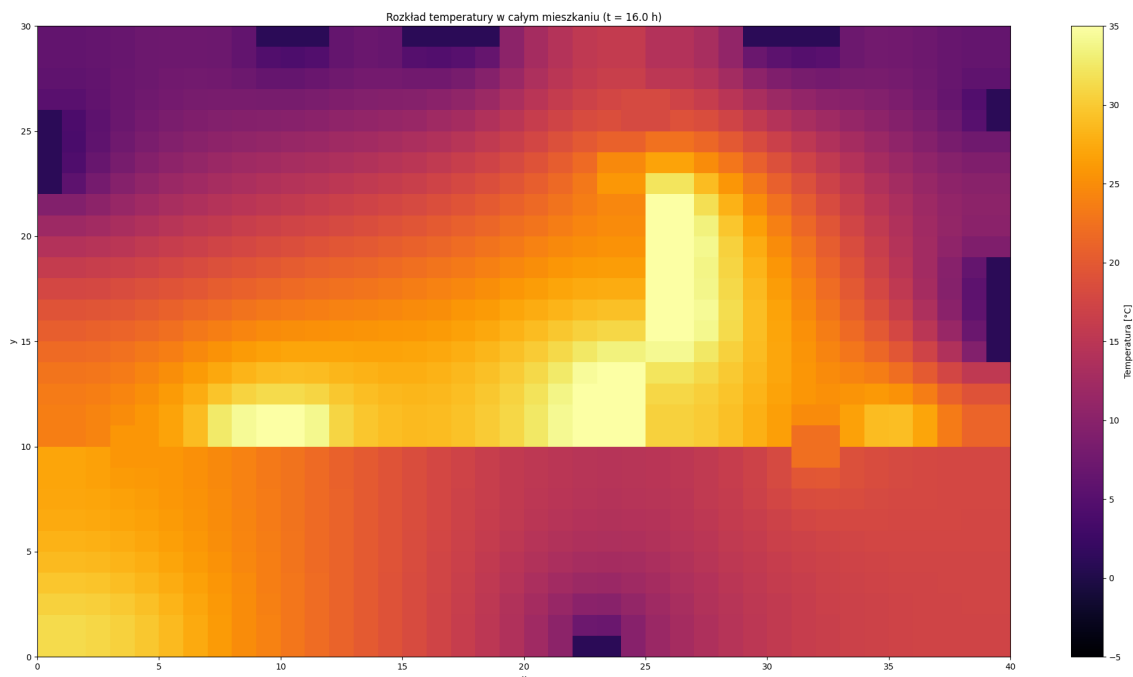


Mapy ciepła mieszkania przez całą dobę dla przypadku ustawienia kaloryferów daleko od okien

Położenie kaloryferów	Temperatura średnia [ $^{\circ}\text{C}$ ]	Zużycie energii [kJ]
pod oknami	18.60	8164
dalej od okien	19.01	2353

### 3.3 Wnioski

Jak widać po mapach ciepła, bardziej pożądane efekty otrzymujemy w przypadku gdy kaloryfery znajdują się pod oknami. Rozkład temperatury jest wówczas niemal jednostajny w całym mieszkaniu. W przypadku grzejników z dala od okien mamy bardzo dużą amplitudę temperatur w każdym z pokoi. Korzystniejsze dla rozkładu temperatury położenie kaloryferów jest jednak okupione dużo większym kosztem.



Mapa ciepła mieszkania po ustabilizowaniu się dla przypadku ustawienia kaloryferów daleko od okien

Chociaż średnia temperatura w mieszkaniu jest wyższa, znaczna część pomieszczeń jest zbyt zimna, zdecydowanie poniżej pożądanej temperatury. Wynika z tego, że wybór umiejscowienia kaloryferów pod oknami, chociaż znacząco droższy, jest zwyczajnie lepszy, gdyż drugie rozwiązanie nie spełnia jakościowo wymagań stawianych ogrzewaniu w mieszkaniach.

## 4 Czy wyłączanie kaloryferów przed wyjściem do pracy pozwoli oszczędzić na ogrzewaniu?

### 4.1 Opis doświadczenia i plan mieszkania

Następujące doświadczenie będzie polegało na porównaniu zużycia energii (czyli zarazem kosztu ogrzewania) gdy wyłączymy kaloryfer przed wyjściem do pracy/na uczelnię, czy zostawimy włączony. Interesować nas będzie całkowite zużycie energii oraz moment, w którym po powrocie do domu, średnia temperatura wróci do oczekiwanej przez nas temperatury pokojowej przy jednoczesnym zagwarantowaniu minimalnej średniej temperatury  $17^{\circ}\text{C}$  w każdym pomieszczeniu. Poniżej sformułowane zostały najważniejsze założenia towarzyszące doświadczeniu:

- wychodzimy z domu o godzinie 7:00 i wtedy obniżamy maksymalną temperaturę w termostacie
- wracamy do domu o godzinie 17:00 i wtedy przywracamy domyślny tryb na termostacie
- doświadczenie trwa do spełnienia równocześnie dwóch warunków:
  - średnia temperatura w całym domu jest wyższa niż  $18^{\circ}\text{C}$
  - średnia temperatura w każdym pokoju jest wyższa niż  $19^{\circ}\text{C}$

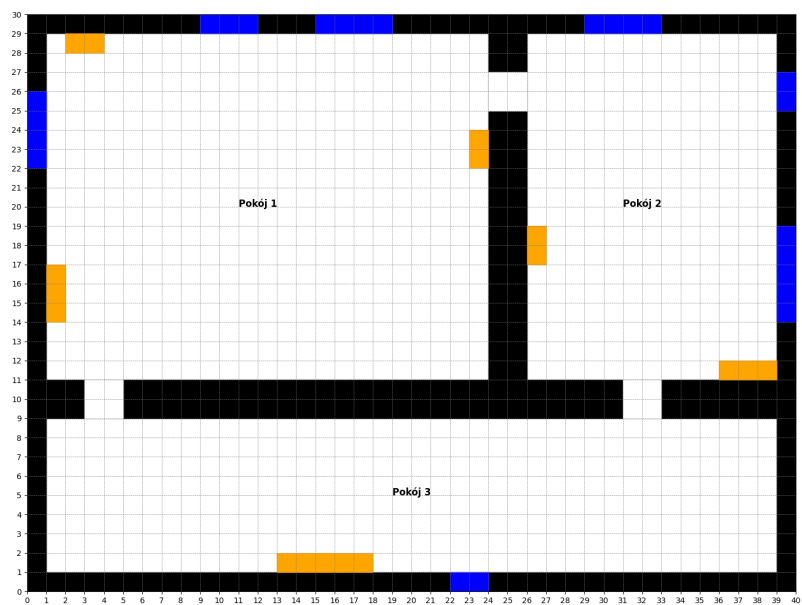
Doświadczenie przeprowadzimy w trzech różnych warunkach pogodowych. Dla uzyskania większych amplitud dobowych temperatury oraz większego zróżnicowania zakresu temperatur, posłużyłem się danymi z Jekaterynburga w dniach 17.04, 27.02 i 17.02 roku 2024. Mają one obrazować kolejno: dzień chłodny, zimny i bardzo zimny.

Mieszkanie wygląda jednakowo w temperaturach chłodnych i zimnych. Z racji bardzo zimnych nocy w Jekaterynburgu, dla bardzo niskich temperatur w rogu drugiego pokoju umieszczamy dodatkowe źródło ciepła (na przykład farelkę).

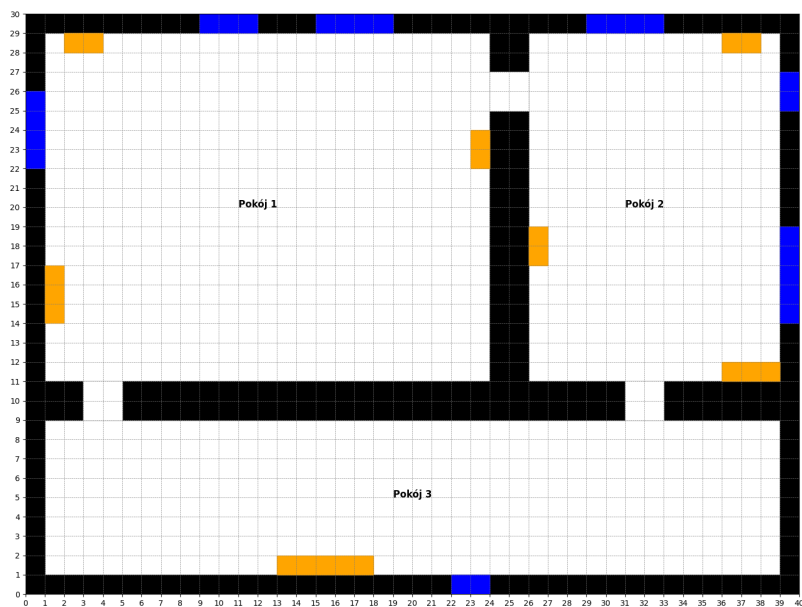
Ustawienia termostatu są następujące:

Pokrętko	Temperatura maksymalna [ $^{\circ}\text{C}$ ]
0	7
1	12
2	15
3	19
4	23
5	28

Na potrzeby doświadczenia przyjmujemy temperaturę pokojową  $19^{\circ}\text{C}$  i takie wybieramy początkowe ustawienie grzejników (trzecie pokrętko). Temperatura początkowa w każdym przypadku jest równa temperaturze otoczenia.



Plan mieszkania w temperaturach chłodnych i zimnych



Plan mieszkania w temperaturach bardzo zimnych z dostawioną farelką



## 4.2 Wyniki symulacji dla mieszkania z równomiernym układem grzejników

**Chłodny dzień:**

Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.05	8.00	391	1164
1	19.05	12.04	247	1427
2	19.05	15.07	139	1594
3	19.05	19.05	0	1819

**Zimny dzień:**

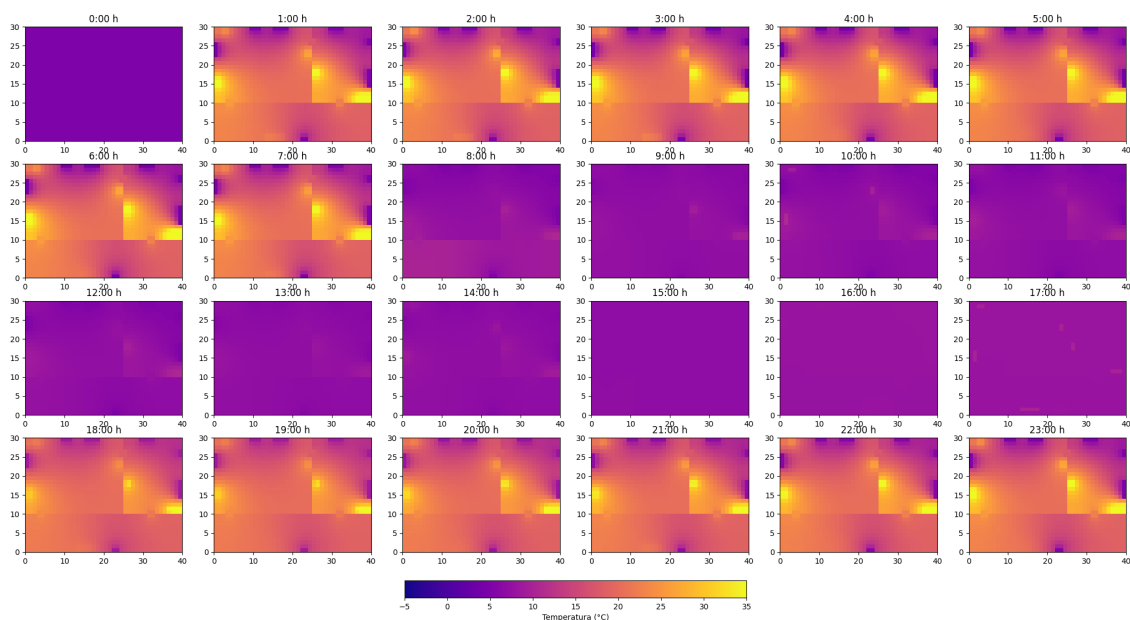
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.07	7.06	479	2240
1	19.07	12.07	278	2518
2	19.07	15.09	158	2687
3	19.07	19.07	0	2913

**Bardzo zimny dzień:**

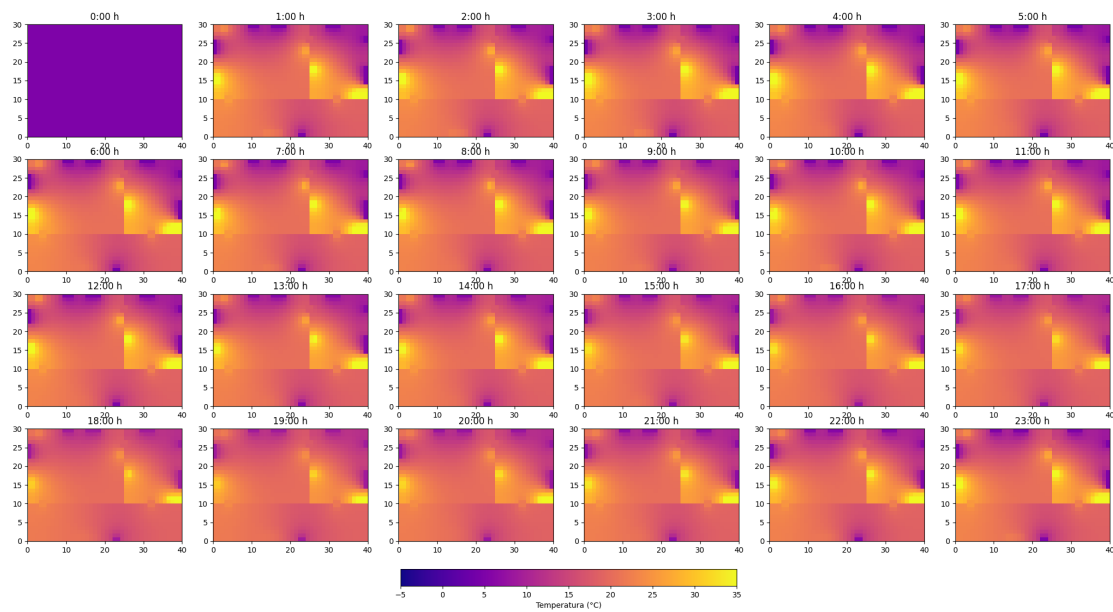
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.13	7.10	632	4667
1				
2				
3			0	

**Bardzo zimny dzień z dostawioną farelką:**

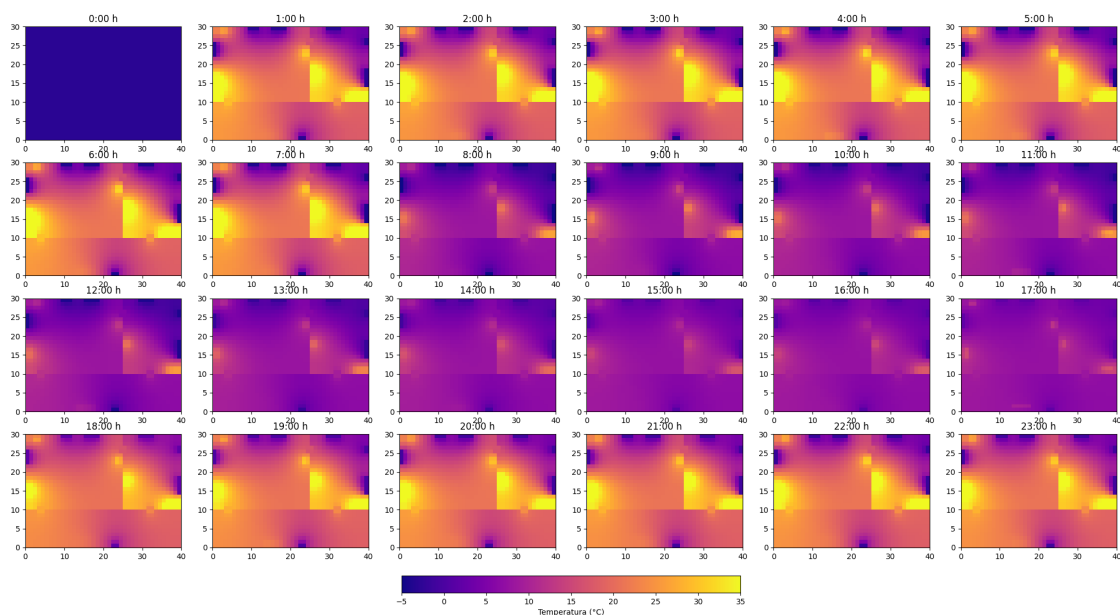
Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	19.15	7.10	629	5012
1	19.15	12.12	368	5315
2	19.15	15.11	210	5497
3	19.15	19.12	0	5740



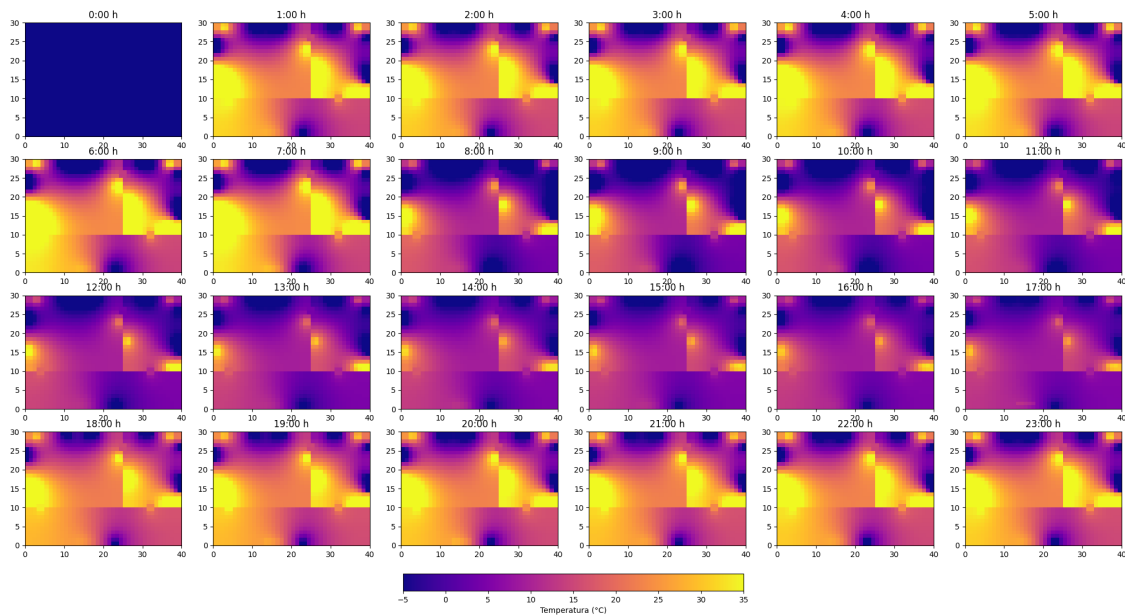
Mapy ciepła mieszkania w chłodny dzień z pokrętleń ustawionym na 0



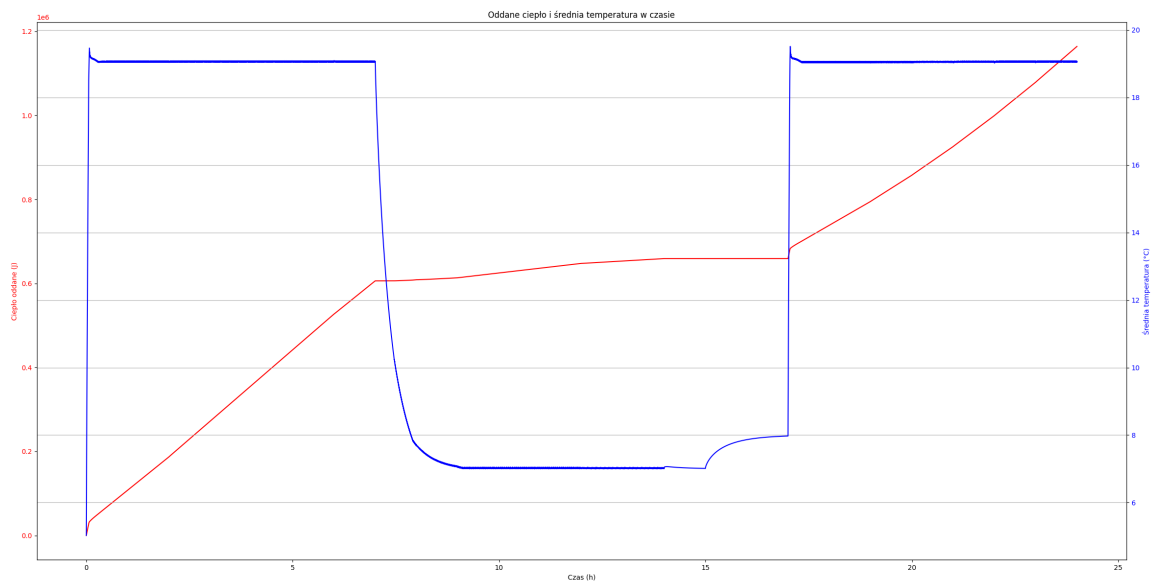
Mapy ciepła mieszkania w chłodny dzień z pokrętleń ustawionym na 3



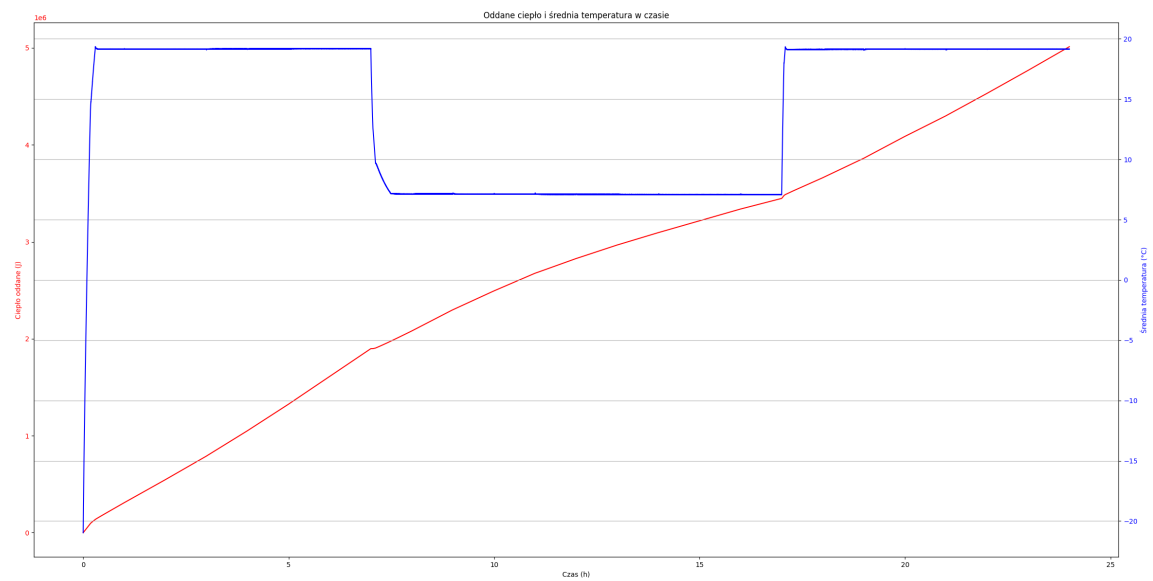
Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętką ustawioną na 0



Mapy ciepła mieszkania w bardzo zimny dzień z pokrętką ustawioną na 0



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w chłodny dzień z pokrętle ustawionym na 0



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w bardzo zimny dzień z pokrętle ustawionym na 0

### 4.3 Wnioski

Jak widać na powyższych tabelach, w warunkach zadanych w doświadczeniu (założenia projektu, projekt mieszkania i temperatury w Jekaterynburgu) zmniejszanie ogrzewania przed wyjściem jest wskazane dla oszczędności energii. Nawet w bardzo zimnych warunkach, czas oczekiwania na nagrzanie pomieszczenia do pożądanej temperatury jest nieduży a różnica w zużyciu energii znacząca. Doskonale izolujące ściany pomagają w utrzymaniu tej tezy, która w rzeczywistej sytuacji i przy mniejszym mieszkaniu może się różnić.

Zgodnie z oczekiwaniami koszt ogrzewania rośnie radykalnie wraz ze spadkiem temperatury otoczenia, jednak przy włączonych kaloryferach temperatura w mieszkaniu utrzymuje się cały czas na podobnym poziomie dzięki działaniu termostatu i jest to niezależne od temperatury zewnętrznej.

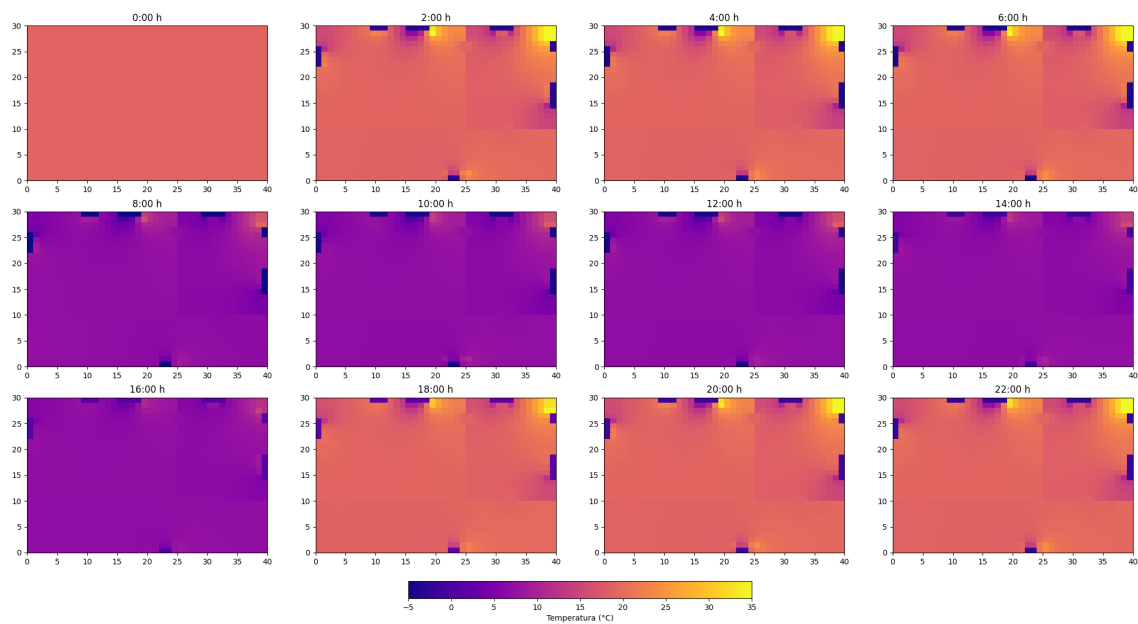
Na wykresie zużytej energii i średniej temperatury w mieszkaniu można zauważyć jak ostro rośnie zużywana energia w krótkich momentach niemal skokowego wzrostu temperatury. Utrzymanie już osiągniętej temperatury ma koszt będący w przybliżeniu funkcją liniową z nachyleniem zależnym od tego jak wysoki poziom temperatury chcemy utrzymać.

### 4.4 Kaloryfery pod oknami

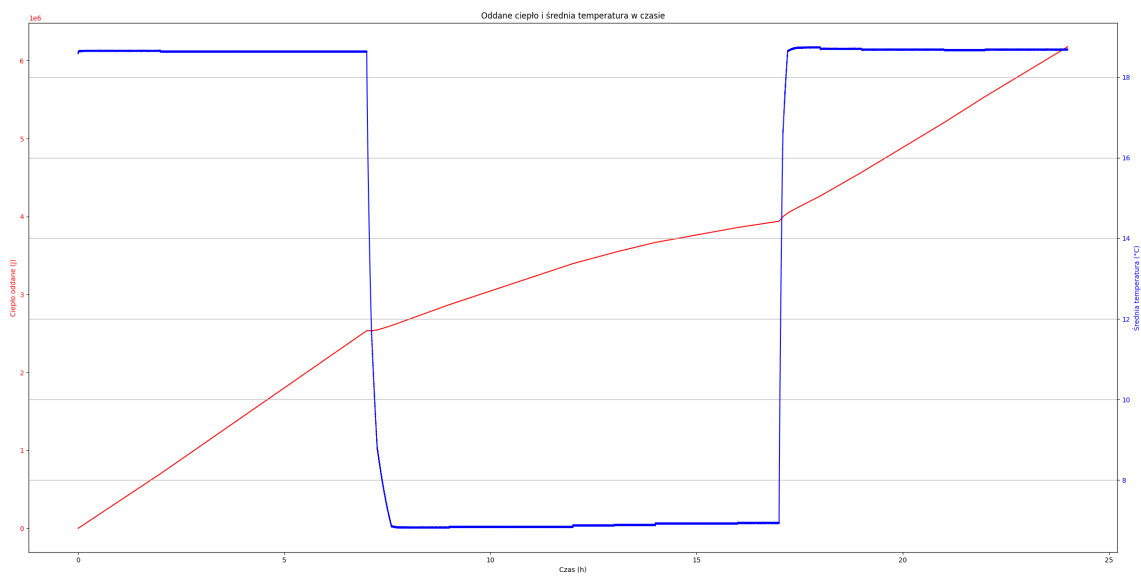
W powyższych przypadkach właściwie za każdym razem, zwłaszcza w najzimniejsze dni, rozkład temperatury jest bardzo niekorzystny. Z poprzedniego doświadczenia wiemy jednak jak spróbować zaradzić takiemu problemowi. Bardzo często w mieszkaniach, zwłaszcza w blokach, kaloryfery znajdują się pod oknami. W pierwszym doświadczeniu wykazaliśmy czemu tak jest. Jednostajny rozkład temperatur w mieszkaniu jest ważniejszy dla użytkownika pomimo niemal czterokrotnie wyższych kosztów.

Rozważmy więc ponownie ustawienie kaloryferów pod oknami i przeprowadźmy na takim przypadku doświadczenie z wyciszeniem termostatu na czas nieobecności domowników. Tym razem przypuśćmy, że rozpoczynamy od temperatury pokojowej ( $19^{\circ}C$ ).

## 4.5 Wyniki symulacji dla mieszkania z grzejnikami pod oknami



Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętle ustawionym na 0



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokrętle ustawionym na 0

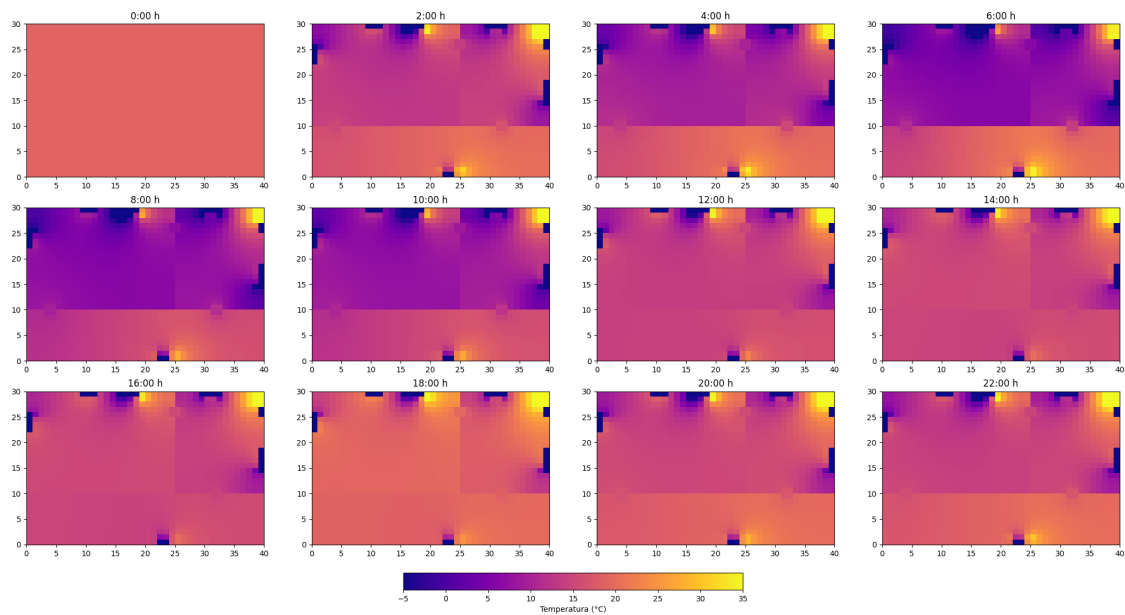
**Chłodny dzień:**

Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	18.62	6.95	751	6179
1	18.62	11.88	441	6972
2	18.62	14.82	240	7450
3	18.62	18.74	0	8088

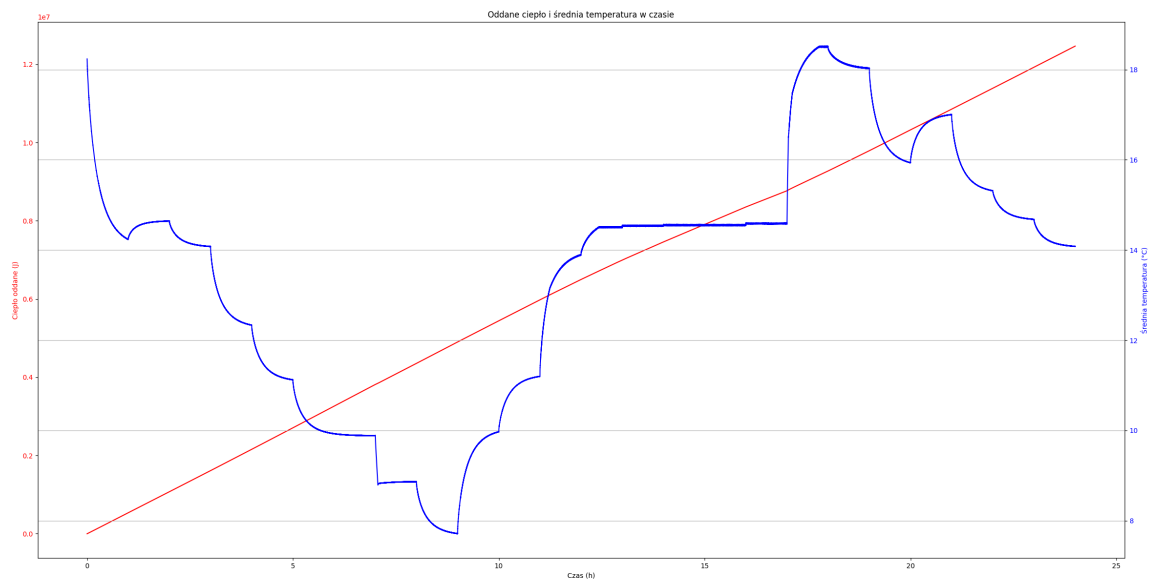
**Zimny dzień:**

Pokrętło	Temperatura o 7:00 [ $^{\circ}C$ ]	Temperatura o 17:00 [ $^{\circ}C$ ]	Czas [s]	Zużyta energia [kJ]
0	18.62	6.95	751	6179
1	18.62	11.88	441	6972
2	18.62	14.82	240	7450
3	18.62	18.74	0	8088

Z powyższej tabeli wnioskujemy, że przy takim ustawieniu kaloryferów, czasy oczekiwania na ustabilizowanie się temperatury stają się uciążliwe i nieakceptowalne. Dla niższych temperatur ten czas rośnie jeszcze bardziej a nawet taki układ kaloryferów w mieszkaniu okazuje się niewystarczający do utrzymania temperatury pokojowej przy bardzo zimnych nocach na Uralu.

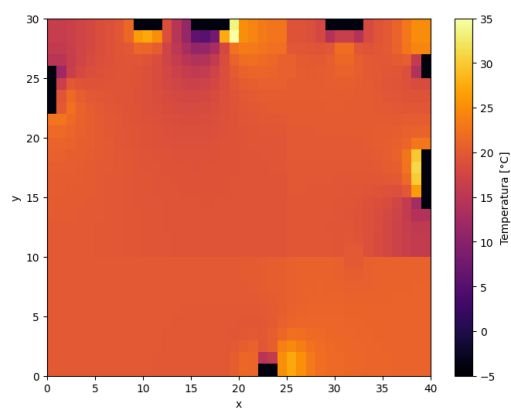


Mapy ciepła mieszkania w zimny dzień z pokrętkiem ustawionym na 2

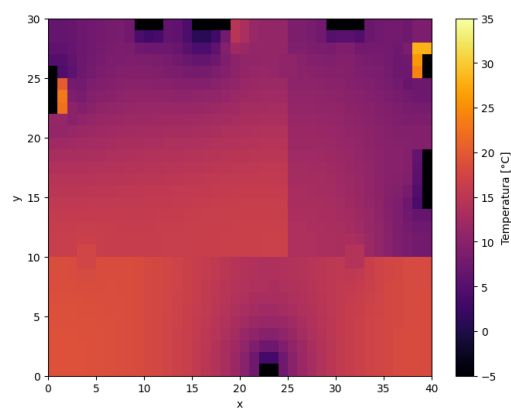


Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokrętkiem ustawionym na 2

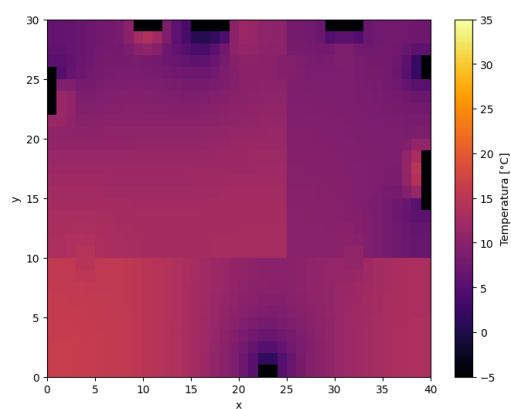




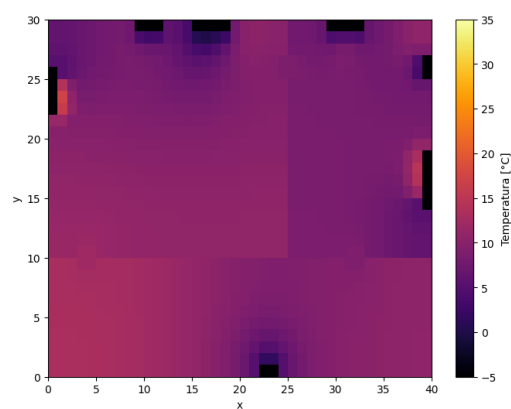
Godzina 7:00



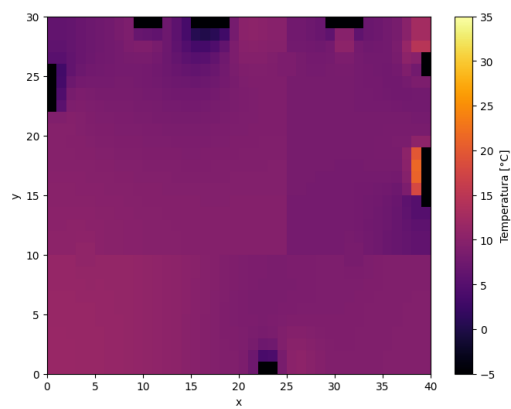
Godzina 7:10



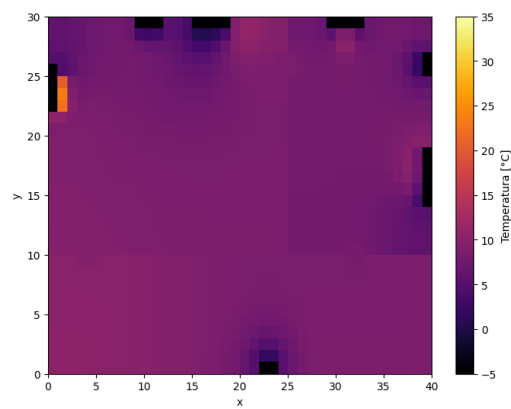
Godzina 7:20



Godzina 7:30

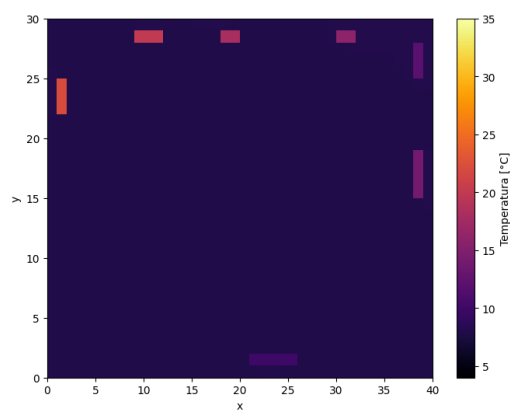


Godzina 7:40

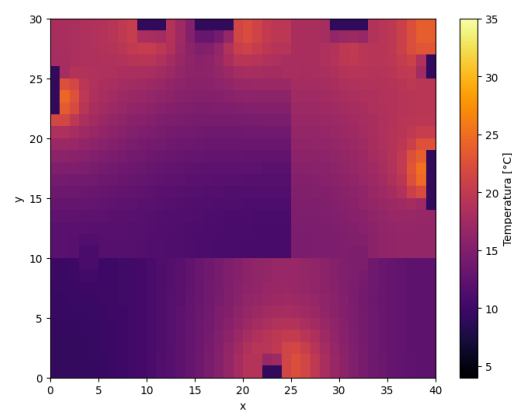


Godzina 7:50

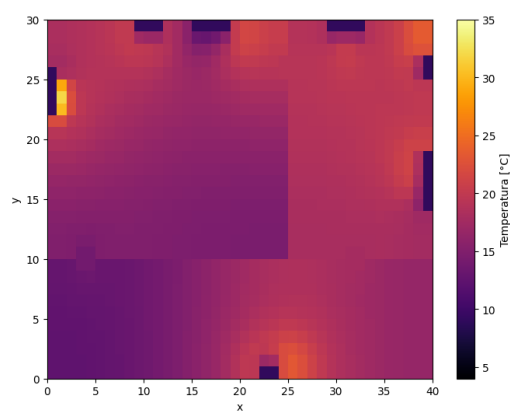
Oziębianie się mieszkania po przekręceniu termostatu na 0



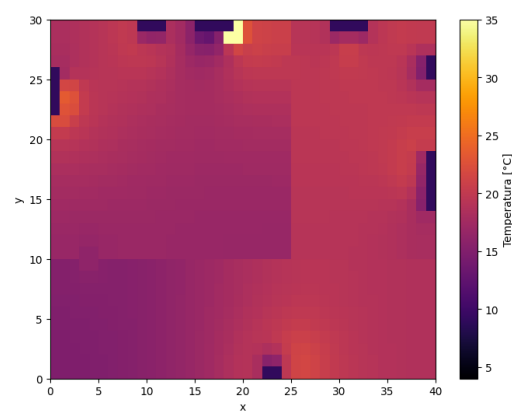
Godzina 17:00



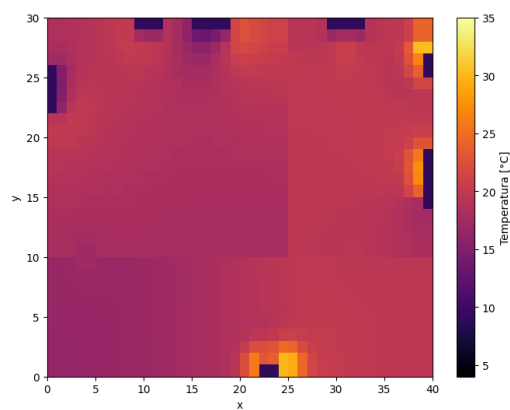
Godzina 17:10



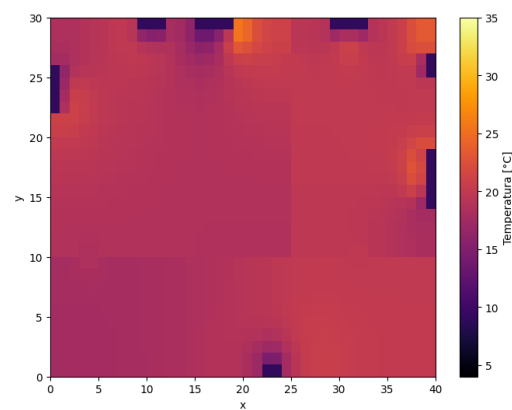
Godzina 17:20



Godzina 17:30



Godzina 17:40

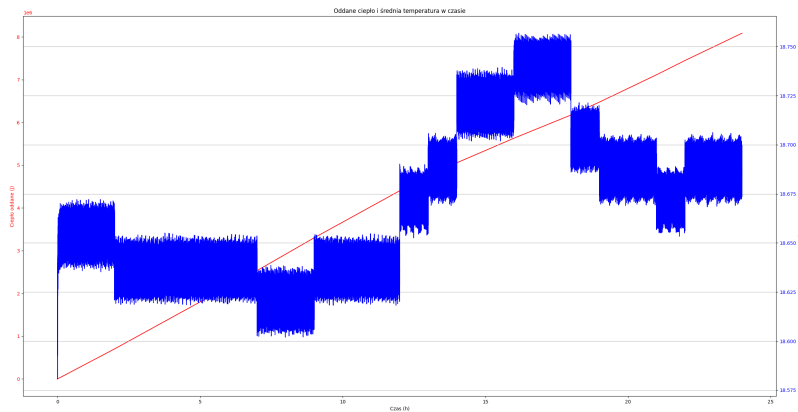


Godzina 17:50

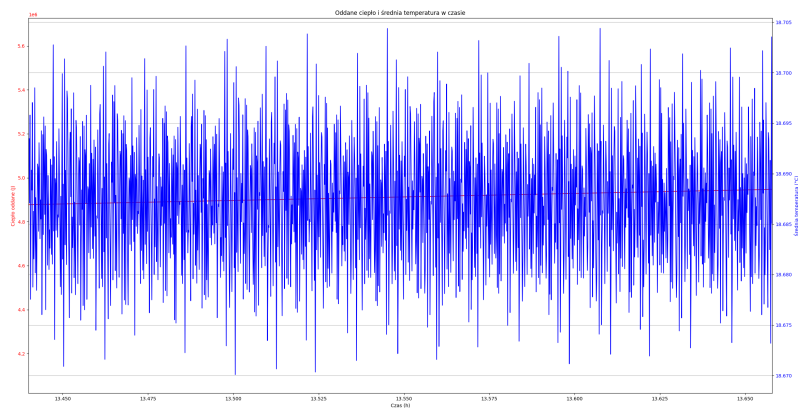
Nagrzewanie się mieszkania po przekręceniu termostatu na 3

Mapy ciepła wskazują na bardzo dobry, niemal jednostajny rozkład temperatury w całym mieszkaniu. Zgodnie z wynikami pierwszego eksperymentu koszty ogrzewania mieszkania z tak ustawionymi kaloryferami są bardzo wysokie. Jest to logiczne, gdyż sąsiedztwo źródła ciepła i źródła zimna wymaga ciągłego dostarczania energii. Przy założeniach projektu o czułości termostatu co pół sekundy w całym pokoju powoduje to co chwila impulsy wszystkich kaloryferów, które w kolejnej chwili natychmiast ustają, żeby włączyć się ponownie w kolejnym kroku.

To zjawisko jest szczególnie wyraźnie widoczne tutaj, jednak występowało w każdym poprzednim przypadku (wahania są nieduże w stosunku do całej skali temperatury). Jest to jedna z wad tego modelu. Symulacje można poprawić lepiej modelując pracę termostatu oraz modyfikując warunki brzegowe (na przykład tak: [2]).



Wykres zużytej energii i średniej temperatury w zimny dzień z pokręteł ustawionym na 3



Ten sam wykres bliżej, termostat próbuje utrzymać stałą temperaturę powodując w każdej zdyskretyzowanej chwili wahania temperatury.

## References

- [1] Dani Schaub James Diebel Jacob Norda. *Działanie termostatu*. 2024. URL: <https://www.elektrobock.cz/pl/wyjasnienie-koncepcji-sterowania/c117>.
- [2] Eduard Marušić-Paloka and Igor Pažanin. “The Robin boundary condition for modelling heat transfer”. eng. In: *Proceedings of the Royal Society. A, Mathematical, physical, and engineering sciences* 480.2286 (2024). ISSN: 1364-5021.
- [3] Maciej Tadej. *Heat equation*. 2024. URL: [https://tadej.math.uni.wroc.pl/teaching/num\\_met-lab-i-2425](https://tadej.math.uni.wroc.pl/teaching/num_met-lab-i-2425).