

Równanie ciepła, analiza efektywności różnych metod ogrzewania wnętrz.

1 Wstęp

Celem projektu jest zastosowanie równania ciepła do analizy efektywności różnych metod ogrzewania pomieszczeń. Przeprowadziłam serię symulacji komputerowych, podczas których starałam się zastanowić, w jaki sposób efektywnie ogrzać mieszkanie. Głównym kryterium efektywności ogrzewania była całkowita energia zużyta w ciągu dnia oraz ocena wizualna map ciepła w interesujących przedziałach czasowych. Skupiłam się na dwóch problemach badawczych, które przedstawię w późniejszej części projektu.

Już na wstępie chciałabym zauważyć, że jest to uproszczona wersja projektu. Przede wszystkim ogranicza nas wymiar 2D, w którym wykonywane są symulacje, oraz szereg czynników i założeń, które nie zawsze będą zgodne z rzeczywistymi prawami fizyki. Moje wnioski i obserwacje są oparte na symulacjach komputerowych i mogą odbiegać od tego, co rzeczywiście ma miejsce.

2 Analiza matematyczno-fizyczna

Rozpatrujemy zagadnienie przewodnictwa cieplnego w domu opisanym przez obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gdzie $u = u(x, t)$ to temperatura w punkcie x i czasie t . Temperatura w mieszkaniu podlega równaniu przewodnictwa cieplnego:

$$u_t = \alpha \Delta u + f_i(x, u), \quad x \in R_i, \quad t > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{rooms}}\}$$

gdzie α to współczynnik przewodnictwa cieplnego, a $f_i(x, u)$ to źródło ciepła u nas to będą grzejniki.

Na granicach obszarów (okna, ściany, drzwi) przyjmujemy odpowiednie warunki brzegowe:

- $u = T_{\text{out}}(t), \quad x \in W_i, \quad t > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{windows}}\},$
- $\nabla u \cdot n = 0, \quad x \in W_i, \quad t > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{walls}}\},$
- $u = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} u(x, t) dx, \quad x \in D_i, \quad t > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{doors}}\}$

Temperatura początkowa w mieszkaniu jest dana jako:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Obszar Ω jest podzielony na rozłączne zbiory:

$$\Omega = \left(\bigcup_{i=1}^{N_{\text{rooms}}} R_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N_{\text{windows}}} W_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N_{\text{walls}}} W_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N_{\text{doors}}} D_i \right).$$

Funkcja źródła ciepła dla grzejników jest opisana wzorem:

$$f_i(x, u) = \frac{P}{\rho \cdot |R_i| \cdot c} \cdot 1_{\{x \in R_i\}}(x) \cdot 1_{\left\{\frac{1}{|R_i|} \int_{R_i} u(x, t) dx < S_i\right\}}(u),$$

gdzie:

- P to moc grzejnika (zakładamy, że wszystkie grzejniki w domu mają tę samą moc),
- ρ to gęstość powietrza,
- c to pojemność cieplna powietrza,
- R_i to temperatura w pokoju R_i ,
- S_i to temperatura graniczna ustawiona na pokrętle grzejnika.

Wzór ten oznacza, że ciepło jest produkowane tylko w obszarze, w którym znajduje się grzejnik ($x \in R_i$), oraz gdy średnia temperatura w pokoju R_i jest poniżej ustawionej temperatury granicznej S_i .

Na odpowiednie elementy mieszkania nakładamy warunki brzegowe, zakładając kilka założeń, które w rzeczywistości mogą się różnić. Dla okien stosujemy warunek Dirichleta z temperaturą opartą na archiwalnych danych pogodowych we Wrocławiu, przy czym przyjmujemy, że okna nie izolują mieszkania. Ściany traktujemy jako idealne izolatory, i stosujemy względem nich warunek brzegowy Neumanna. Z kolei w przypadku drzwi między pokojami, temperatura jest uśredniana z obu pomieszczeń, między którymi się znajdują.

3 Analiza numeryczna

Analiza numeryczna została przeprowadzona zgodnie z instrukcjami podanymi podczas laboratoriów. Posługując się rozwiązaniami z *listy 3*, możemy zapisać następujący schemat numeryczny:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^{k+1} &= \mathbf{L}_1 \vec{u}_1^k + \vec{f}_1 \\ \vec{u}_2^{k+1} &= \mathbf{L}_2 \vec{u}_2^k + \vec{f}_2 \\ \vec{u}_3^{k+1} &= \mathbf{L}_3 \vec{u}_3^k + \vec{f}_3 \\ \vec{u}_4^{k+1} &= \mathbf{L}_4 \vec{u}_4^k + \vec{f}_4 \\ \vec{u}_{i,j}^{k+1} \Big|_{(i,j) \in I_{\text{Łączenie}}} &= \frac{1}{4} (\vec{u}_{1,i,j}^{k+1} + \vec{u}_{2,i,j}^{k+1} + \vec{u}_{3,i,j}^{k+1} + \vec{u}_{4,i,j}^{k+1}) \\ \vec{u}_{i,j}^{k+1} \Big|_{(i,j) \in I_{\text{Dirichlet}}} &= 0 \\ \vec{u}_{i,j}^{k+1} \Big|_{(i,j) \in I_{\text{Neumann}}} &= \vec{u}_{i,j}^{k+1} \Big|_{(i,j) \in S_{\text{Neumann}}} \end{aligned}$$

UWAGA: \vec{f}_i dla pokoju i będzie zawierała moce wszystkich grzejników

4 Dyskretyzacja danych

Ustalamy: Czas ewolucji $T=24=86400$. Oś czasu dyskretyzujemy za pomocą siatki równoodległej w kroku $\Delta t = 0.5s$ Krok odległości: $h_x = 0.5m$ Zauważamy, że tym samym mamy spełniony warunek stabilności schematu numerycznego:

$$\frac{\Delta t}{h_x^2} = \frac{0.5}{0.25} = 2 < \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 0.025} = 20$$

5 Dane wykorzystane w symulacji

Źródła, z których korzystałam, są podane na końcu raportu. Poniżej znajdują się dane wykorzystywane w symulacji:

- Współczynnik przewodnictwa ciepła: $\alpha = 0.025 \frac{W}{m \cdot K}$
- Gęstość powietrza na poziomie morza (powietrze suche): $\rho \approx 1.2 \frac{kg}{m^3}$
- Ciepło właściwe powietrza: $c = 1005 \frac{J}{kg \cdot K}$

5.1 Dobór mocy grzejnika

Według ekspertów zaleca się, aby moc grzejnika wynosiła od 70 do 80 W na 1 m^2 powierzchni pomieszczenia. Jeśli pomieszczenie posiada więcej niż jedno okno lub więcej niż jedną ścianę zewnętrzną, należy przyjąć zakres 80-100 $\frac{W}{m^2}$

Po konsultacjach z innymi studentami oraz analizie dostępnych źródeł internetowych poświęconych mocy grzejników, zdecydowałam się na dobór mocy grzejnika na poziomie 1200 W. Wybór ten oparty jest na danych polecanych przez portale dla pasjoatów energetyki oraz specyfice modelowanego pomieszczenia.

6 Temperatura zewnętrzna

W symulacjach przyjąłam temperaturę zewnętrzną, zmieniającą się co godzinę. Ponieważ projekt dotyczy typowego polskiego mieszkania, więc temperatury zewnętrzne nie są ekstremalnie niskie. Przygotowane przeze mnie temperatury pochodzą z archiwalnych danych jednego z portali meteorologicznych. Przeglądając dane z ostatnich 5 lat, W raporcie nie uwzględniam symulacji, w których temperatura zewnętrzna miałaby znaczący wpływ na ogrzewanie mieszkania, Założyłam, że w pomieszczeniach jest wystarczająco zimno, by wymagały one ogrzewania, jednak wpływ temperatury zewnętrznej uznaję za marginalny i przyjmuję standardową rozpiskę temperatury dla typowego zimowego dnia.

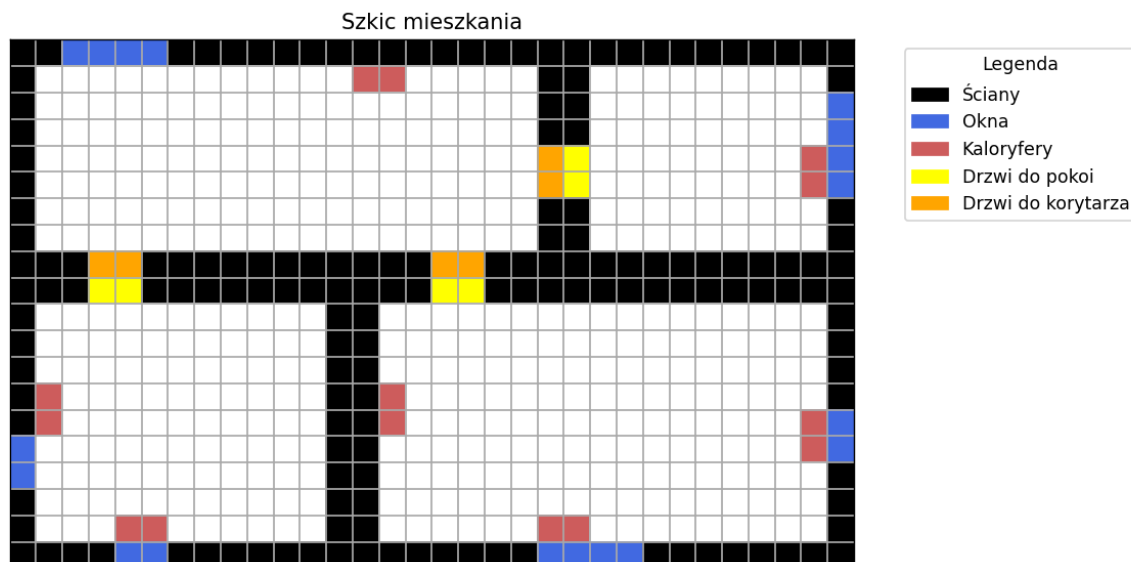
7 Ustawienie termostatu

Termostat w systemie grzewczym pozwala na ustawienie różnych temperatur, w zależności od potrzeb i rodzaju pomieszczenia.

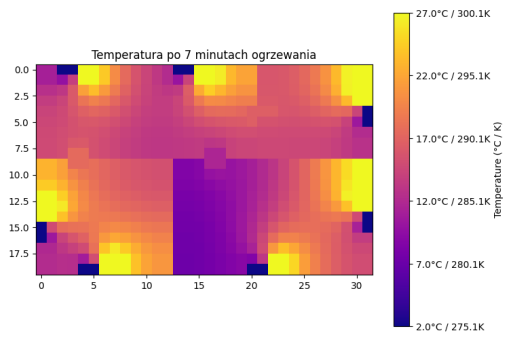
- Ustawienie 0 (0°C / 273.15K) - tu zakładam, że grzejnik jest całkowicie wyłączony
- Ustawienie 1 (12°C / 285.15K)
- Ustawienie 2 (16°C / 289.15K)
- Ustawienie 3 (20°C / 293.15K)
- Ustawienie 4 (24°C / 297K)
- Ustawienie 5 (28°C / 301K)

8 Pierwsza symulacja, idea projektu

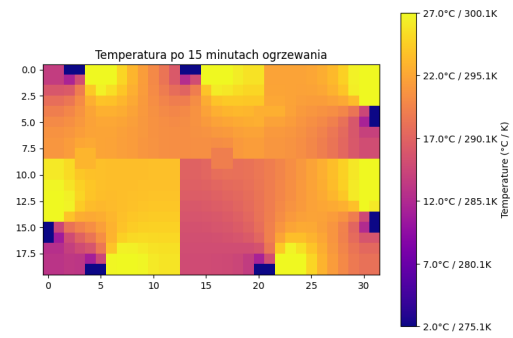
Na początku, chciałbym przedstawić na czym będzie polegała symulacja i dodać kilka uwag technicznych, żeby dalsza część projektu była bardziej zrozumiała. Zaczniemy od przedstawienia szkicu pewnego mieszkania o wymiarach 32×20 m. Każda kratka jest kwadratem o wymiarach 0.5m czyli o wymiarach równym krokowi h_x . Na szkicu zaznaczone są szczególne obiekty w mieszkaniu. W całym raporcie te oznaczenia będą jednakowe przy każdym pojawiającym się tego typu szkicu.



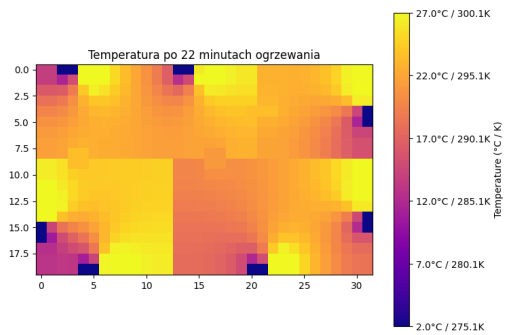
Szkic mieszkania z nieregularnym ustawieniem okien i grzejników



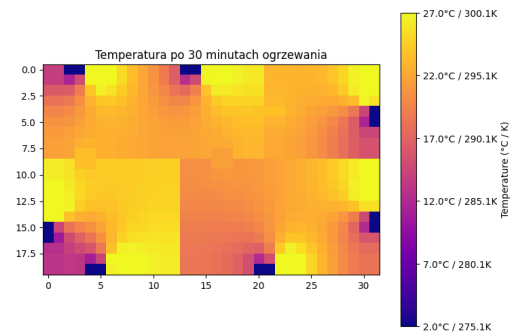
Temp. po 7 pierwszych minutach



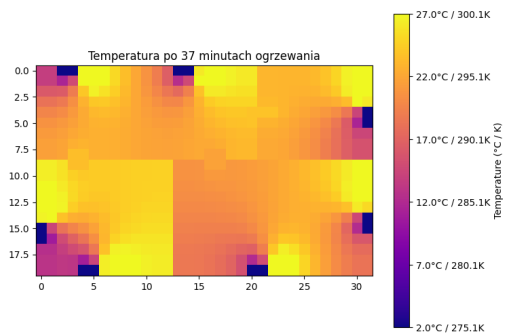
Temp. po 15 pierwszych minutach



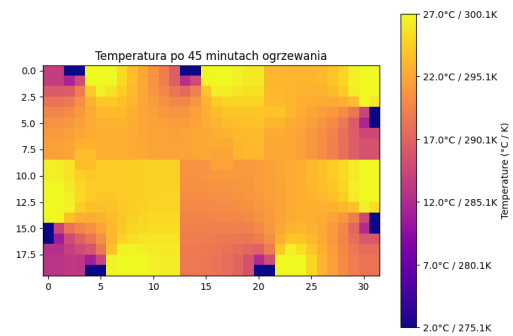
Temp. po 22 pierwszych minutach



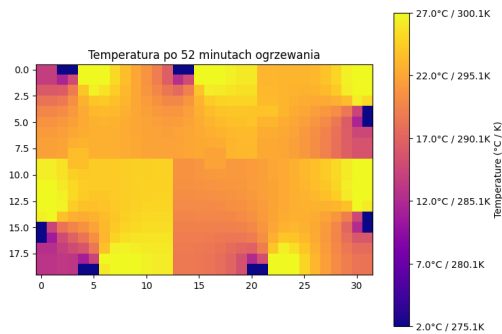
Temp. po 30 pierwszych minutach



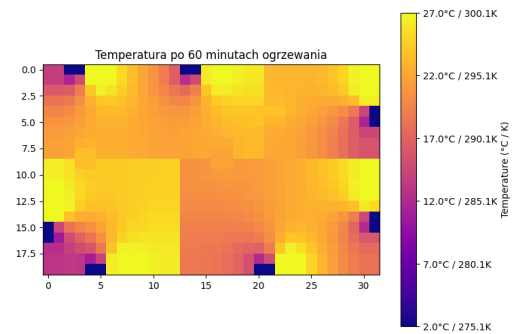
Temp. po 37 pierwszych minutach



Temp. po 45 pierwszych minutach



Temp. po 52 pierwszych minutach



Temp. po 1 godzinie

Żeby ułatwić analizę zmian temperatury zachodzących w mieszkaniu, w kolejnej części projektu ograniczę się tylko do wstawienia paska kolorów ('cbar') przy końcowym obrazku. Jest on dostosowany do wszystkich map ciepła, które pojawią się w tym projekcie, i przyjmuje wartości od 2°C (czyli 275.15 K) do 27°C (czyli 300.15 K).

Dodatkowo, już przy pierwszej symulacji (gdzie domyślnie ustawiony jest termostat na 5. ustawieniu, czyli takim, że kaloryfer grzeje do momentu, aż w jego pobliżu, czyli w okolicach kaloryfera, temperatura osiągnie wartość 24°C), widzimy, że znaczące zmiany zachodzą w trakcie pierwszych 30–45 minut, dlatego będę zwracała uwagę głównie na zmiany temperatury w pokoju w trakcie początkowego etapu grzania.

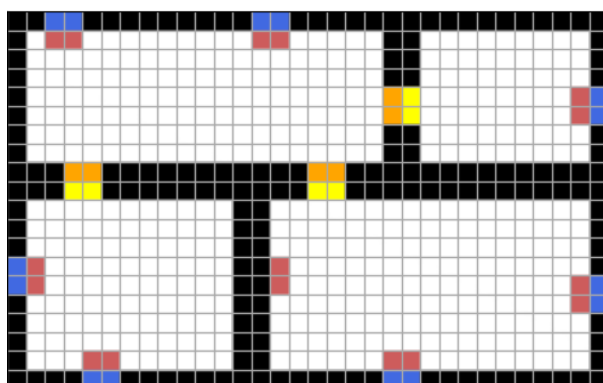
9 Problemy badawcze

W raporcie zajmiemy się analizą problemów związanych z efektywnością ogrzewania. Miarą jakości efektywnego ogrzewania oraz optymalnego rozwiązania będzie ilość zużywanego energii oraz odpowiemy na następujące pytania:

- Czy grzejniki powinny znajdować się bezpośrednio pod oknami?
- Czy warto całkowicie skrecać kaloryfery, gdy wychodzimy z domu?

10 Gdzie najlepiej ustawić grzejniki?

Rozpatrzmy trzy sytuacje, w każdej z nich będziemy badać, jak efektywnie ogrzewane jest mieszkanie w zależności od umiejscowienia grzejników względem okna. Istotne zmiany zachodzą w ciągu pierwszej godziny od rozpoczęcia nagrzewania mieszkania. Później mapa ciepła w zasadzie nie ulega zmianie. Zaczniemy od grzejników ustawionych bezpośrednio pod oknami, przez te znajdujące się w niewielkiej odległości od okien, aż po grzejniki umieszczone z dala od okien, aby ocenić, w jakim przypadku uzyskujemy najlepsze efekty.



Grzejniki ustawione bezpośrednio pod oknami

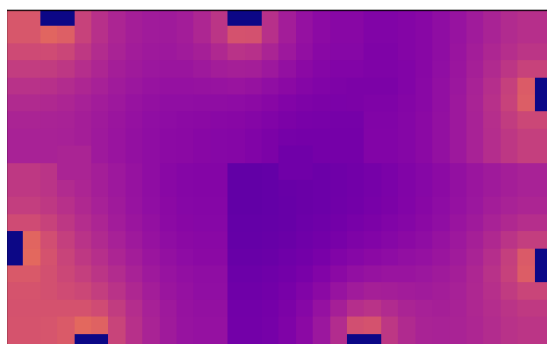


Grzejniki ustawione w małej odległości od okien



Grzejniki ustawione daleko od okien

10.1 Grzejniki ustawione bezpośrednio pod oknem



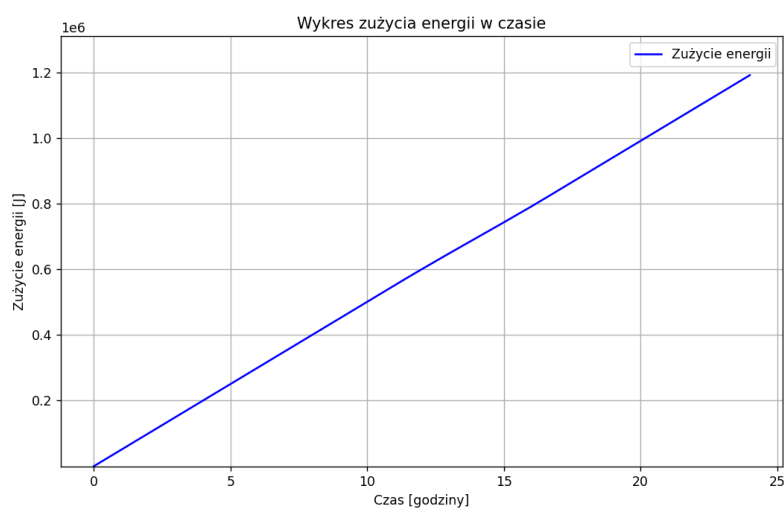
Temperatura po 7 minutach



Temperatura po 15 minutach



Temperatura w mieszkaniu po 45 minutach ogrzewania



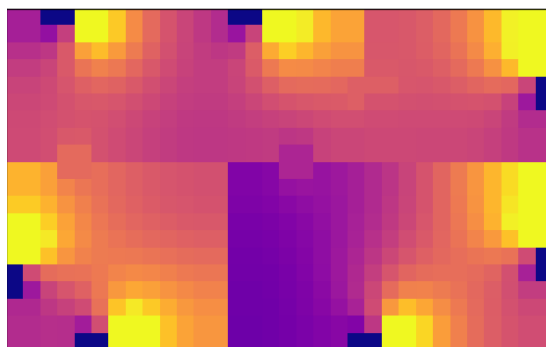
Wykres energii zużytej przez grzejniki

Wnioski:

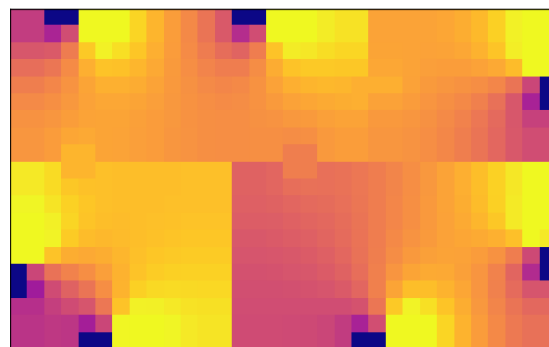
Wykresy przedstawiające zmiany temperatury w czasie w różnych punktach pomieszczenia pokazują, jak temperatura wyrównuje się w wyniku działania grzejników. Po 7 minutach od ich włączenia temperatura w mieszkaniu osiąga wartość około 7°C , a różnice temperatury pomiędzy pokojami zaczynają się wyrównywać. Po 15 minutach od

uruchomienia grzejników temperatura wynosi już około 17°C w całym mieszkaniu. Po 45 minutach temperatura w mieszkaniu stabilizuje się, jest równomiernie rołożona wewnątrz całego mieszkania na poziomie powyżej 22°C , możemy z dużą pewnością powiedzieć, że jest na oczekiwanym poziomie 24°C co jest zgodne z ustawieniami termostatu, który został przyjęty w tej symulacji. Chociaż mieszkanie mamy całkowicie ogrzane już po pierwszych 45 minutach, grzejnik działa przez całą dobę, co wiąże się z ciągłym zużyciem energii. Pod koniec dnia całkowite zużycie energii osiąga wartość 1 192 334 J.

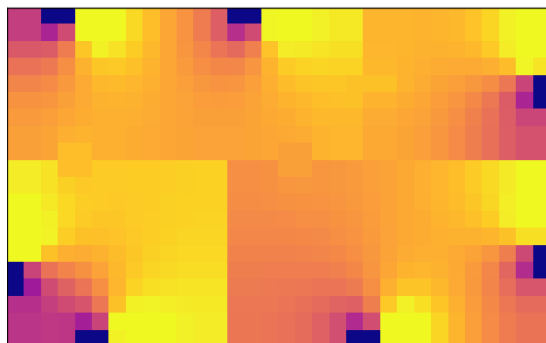
10.2 Grzejniki ustawione w małej odległości od okien



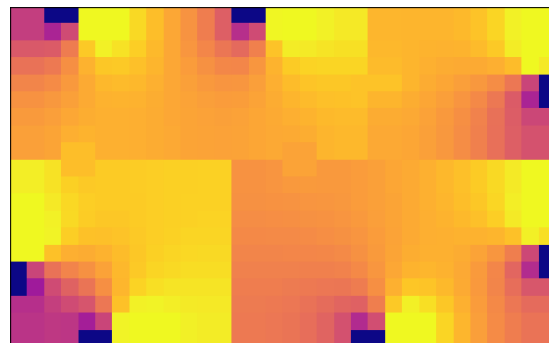
Temperatura po 7 minutach



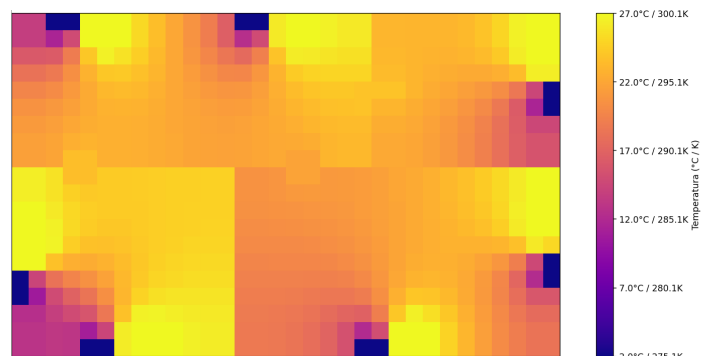
Temperatura po 15 minutach



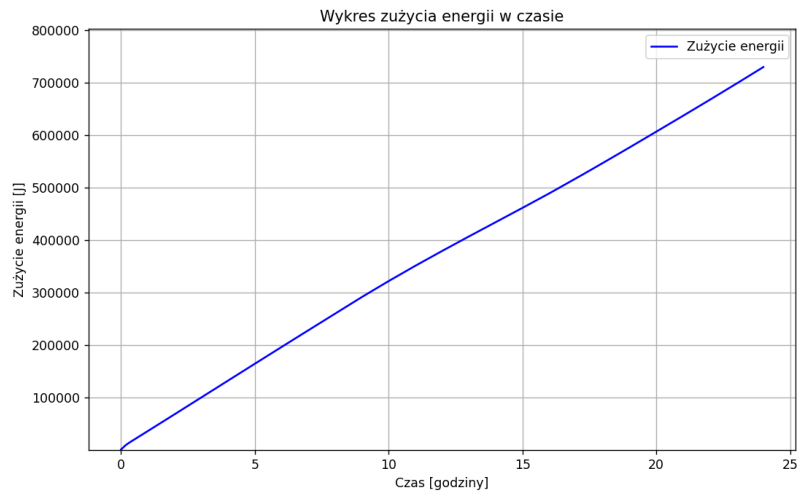
Temperatura po 30 minutach



Temperatura po 1 godzinie



Rysunek 1: Temperatura po całym dniu ogrzewania

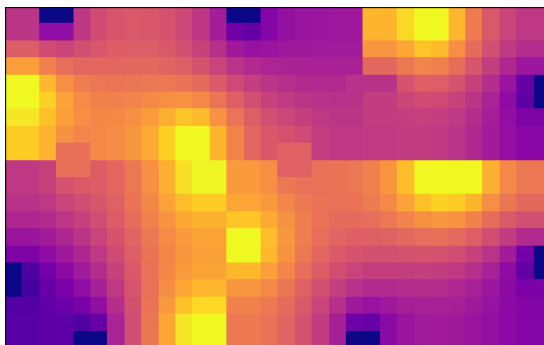


Rysunek 2: Wykres energii zużytej przez grzejniki

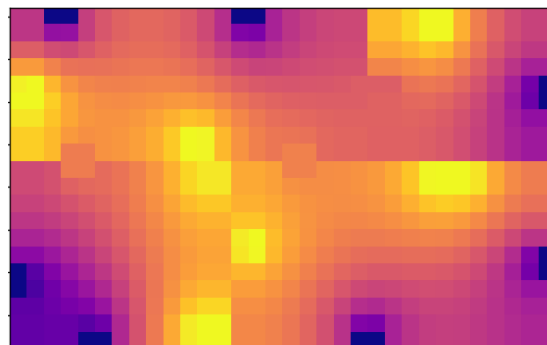
Wnioski:

Podobnie jak w poprzednim przypadku, pierwsze zmiany zauważamy już po 7 minutach. Poziom temperatury staje się stały po 30 minutach. Nie możemy tutaj, tak jak w poprzednim przypadku, zauważyć, aby temperatura wyrównała się w całym mieszkaniu. Do końca dnia, mimo pełnego grzania, w mieszkaniu pozostają miejsca, szczególnie te blisko grzejników, w których temperatura osiąga wartość prawie 27°C . Są również miejsca, głównie blisko okien, gdzie temperatura przez cały dzień pozostaje dość niska, osiągając wartość między 10 a 12°C . Pod koniec dnia całkowite zużycie energii osiąga wartość 730032 J , co stanowi mniej niż w sytuacji, kiedy grzejniki znajdują się bezpośrednio przed oknami.

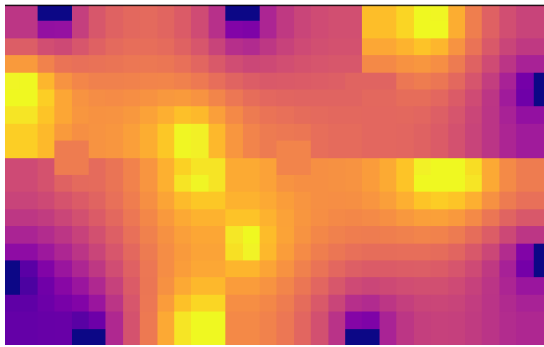
10.3 Grzejniki ustawione w dużej odległości od okien



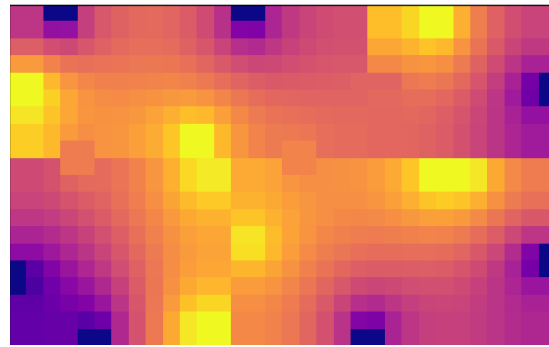
Temperatura po 7 minutach



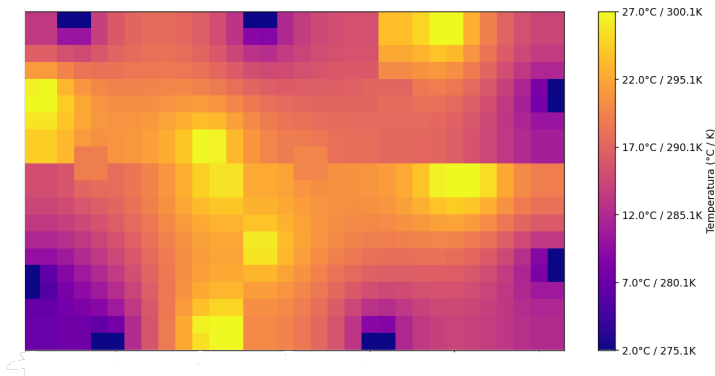
Temperatura po 15 minutach



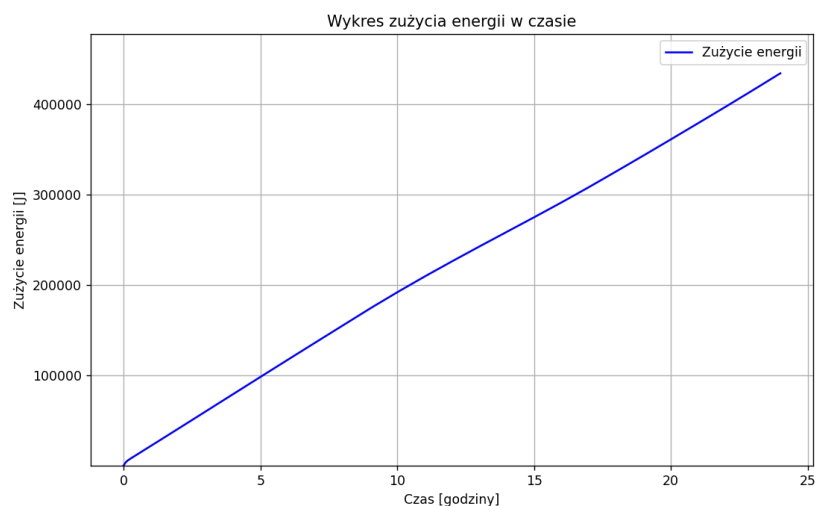
Temperatura po 30 minutach



Temperatura po 1 godzinie



Temperatura po całym dniu ogrzewania



Wykres energii zużytej przez grzejniki

Wnioski:

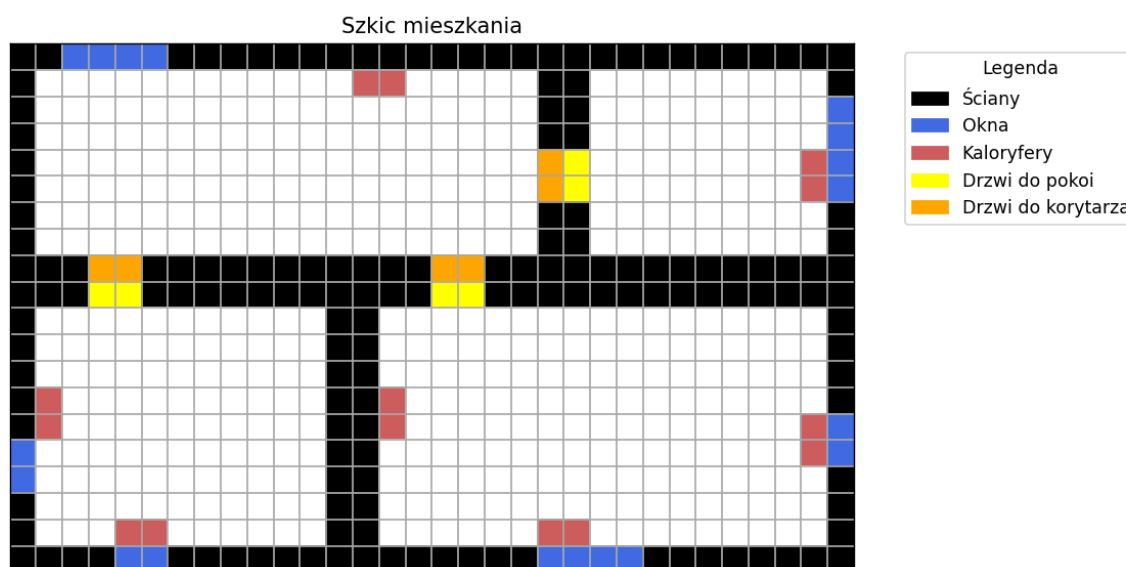
W tej sytuacji, już po 7 minutach grzejniki ogrzewają w taki sposób wnętrze, który utrzymuje się do końca dnia. W obrębie grzejników temperatura przyjmuje oczekiwaną wartość 24°C , jednak zauważamy tutaj jeszcze więcej miejsc, gdzie mieszkanie wcale nie jest ogrzewane. W szczególności w pokoju w lewym dolnym rogu, gdzie dwa okna znajdują się blisko siebie i dominują w całym narożniku pokoju. Pod koniec dnia całkowite zużycie energii osiąga wartość 434762 J, co oznacza, że zużycie jest mniejsze niż w dwóch poprzednich sytuacjach.

10.4 Ostateczna odpowiedź na pytanie badawcze

Na podstawie wykresów zużytej energii w ciągu dnia i map ciepła, które zostały wygenerowane w wyniku przeprowadzonych przeze mnie symulacji, patrząc tylko na zużycie energii, mogłoby się wydawać, że najlepszym rozwiązaniem jest ustawienie grzejników w dużej odległości od okien. Jednak analiza map ciepła szybko odwołuje nas od tego pomysłu. Im dalej od okien znajdują się grzejniki, tym więcej części mieszkania pozostaje nieogrzanych. Więc aby zapewnić sobie komfort ciepła w całym mieszkaniu w mroźny dzień, najlepiej sprawdzają się grzejniki ustawione bezpośrednio pod oknami, przyjmując wyższy koszt energii.

11 Czy warto skręcać grzejniki zanim wyjdziemy z domu?

Na to pytanie odpowiemy, posługując się pierwotnie przygotowanym szkicem mieszkania. Tym razem zbadamy, czy jeśli rano nagrzemy mieszkanie, a w pewnym momencie wyjdziemy z domu, to czy warto całkowicie wyłączyć ogrzewanie grzejników, czy zostawić je całkowicie włączone, a może najbardziej optymalna będzie wersja pośrednia, czyli taka, że zmniejszamy ustawienie termostatu (w mojej symulacji zmniejszam ustawienie na poziom 2, czyli grzejniki grzeją do momentu, aż temperatura blisko nich osiągnie poziom 16°C / 289.15 K). Fajnym pomysłem byłoby połączenie tego punktu z poprzednim problemem badawczym, np. sprawdzenie tych trzech wariantów w momencie, gdy grzejniki stoją bezpośrednio pod oknami. Na tym etapie pozostaniemy przy pierwotnym szkicu mieszkania.

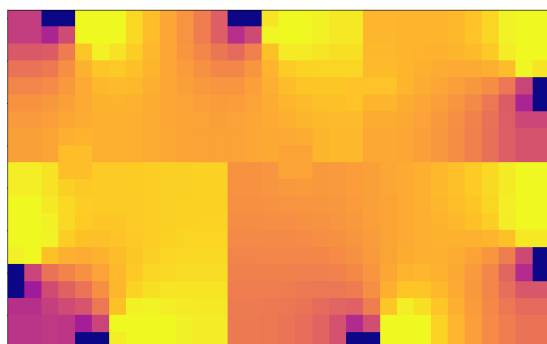


Szkic mieszkania z nieregularnym ustawieniem okien i grzejników

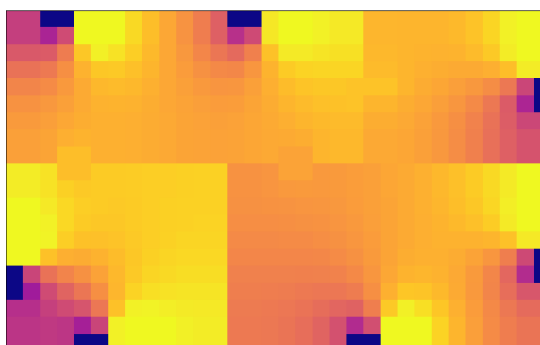
Tutaj już obliczyliśmy na początku projektu ile wynosi całkowite zużycie energii, dla przypomnienia 730032.84

11.1 Grzejniki wyłączone na czas wyjścia z domu

Pierwsza sytuacja wygląda tak, że o północy nagrzewamy mieszkanie, następnie o 8:00 wychodzimy z domu i w tym czasie całkowicie skręcamy ogrzewanie, pozwalając, aby mieszkanie wychłodziło się. Później wracamy o godzinie 15:00 i ponownie włączamy ogrzewanie.



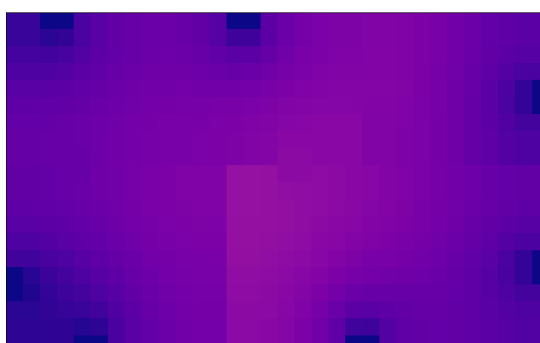
Temp. o godzinie 7:00



Temp. o godzinie 8:00. Czas wyjścia z domu



Temp. po 7 minutach od wyjścia



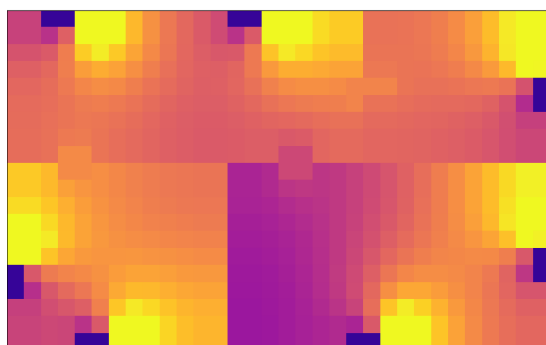
Temp po 15 minutach od wyjścia



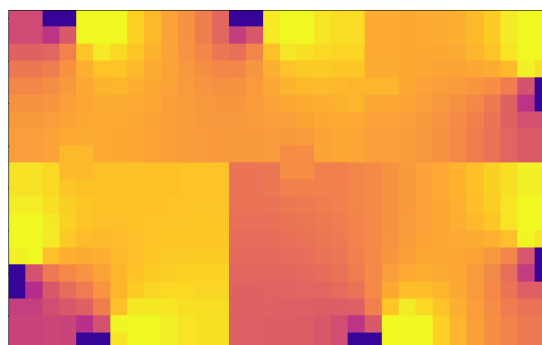
Temp. po 30 minuatcach od wyjścia



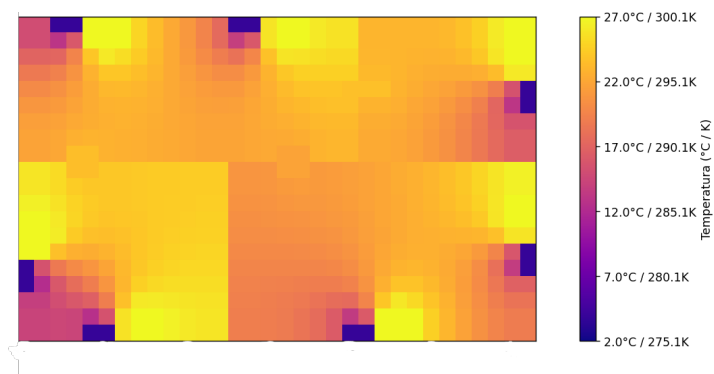
Temp. o godzinie 15:00. Czas powrotu do domu



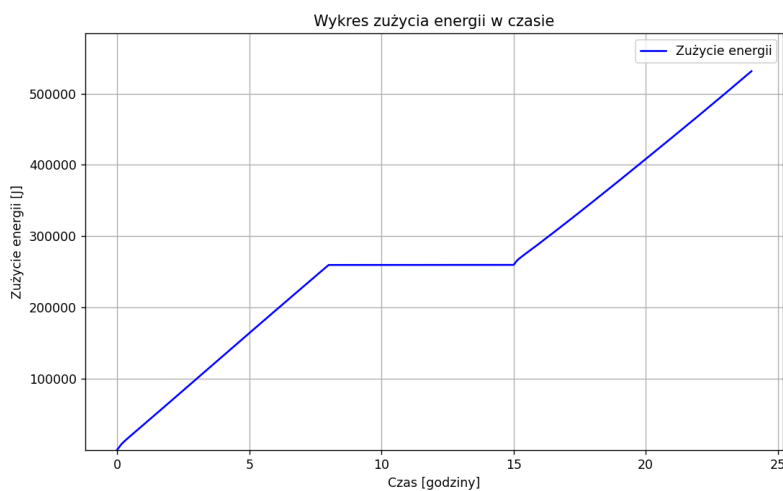
Temp. po 7 minutach od powrotu



Temp. po 15 minutach od powrotu



Rysunek 3: Temp. po 30 minutach od powrotu

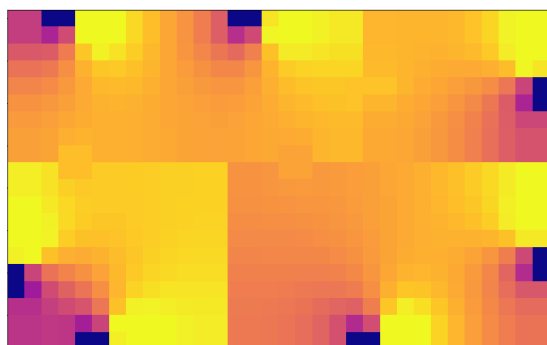


Rysunek 4: Wykres zużycia energii

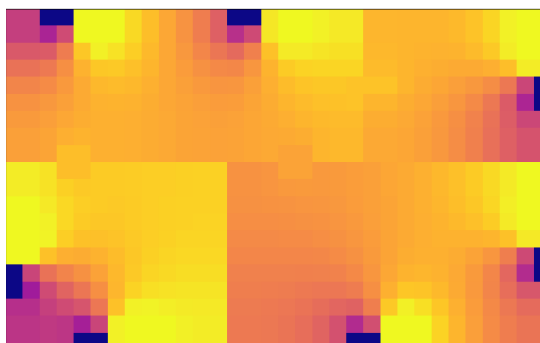
Jak widzimy, już po 7 minutach zauważamy, jak mieszkanie ulega wychłodzeniu i przejmuje temperaturę zewnętrzną, całkowicie po 30 minutach. W tym czasie z wykresu zużycia energii widzimy, że zużyta energia nie zwiększa się. Po powrocie do domu ponownie nagrzewamy mieszkanie i widzimy, że aby osiągnęło stan taki jak przed wyjściem, potrzebujemy 15-30 minut. Całkowita energia zużyta w ciągu dnia wynosi 531463.68 J.

11.2 Grzejniki częściowo wyłączone na czas wyjścia z domu

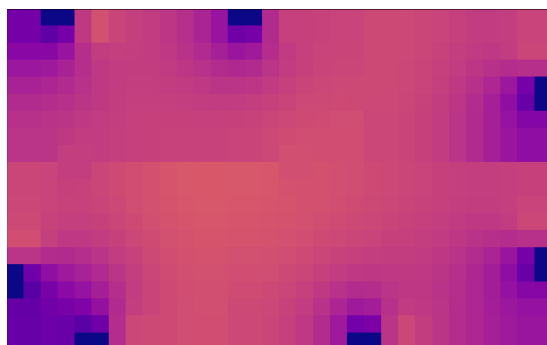
Druga sytuacja wygląda tak, że o północy nagrzewamy mieszkanie, następnie o 8:00 wychodzimy z domu i w tym czasie częściowo skręcamy ogrzewanie, ustawiamy termostat na 2 Ustawienie, czyli maksymalna temperatura wokółkaloryfera jak będzie dopuszczalna to 12°C czyli 285.15K . Później wracamy o godzinie 15:00 i ponownie włączamy ogrzewanie, do grzania na poziomie 24°C czyli ustawiamy termostat na poziom 5



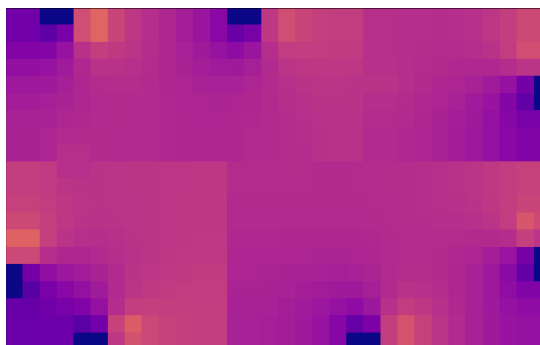
Temp. o godzinie 7:00



Temp. o godzinie 8:00. Czas wyjścia z domu



Temp. po 7 minutach od wyjścia



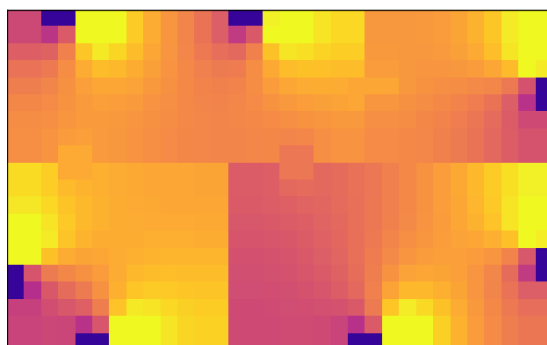
Temp po 15 minutach od wyjścia



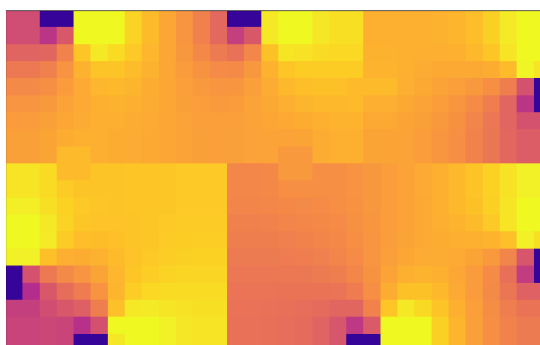
Temp. 30 min po wyjściu



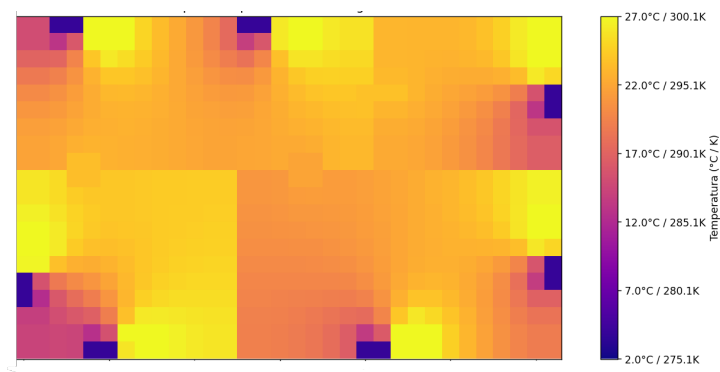
Temp. o godzinie 15:00. Czas powrotu do domu



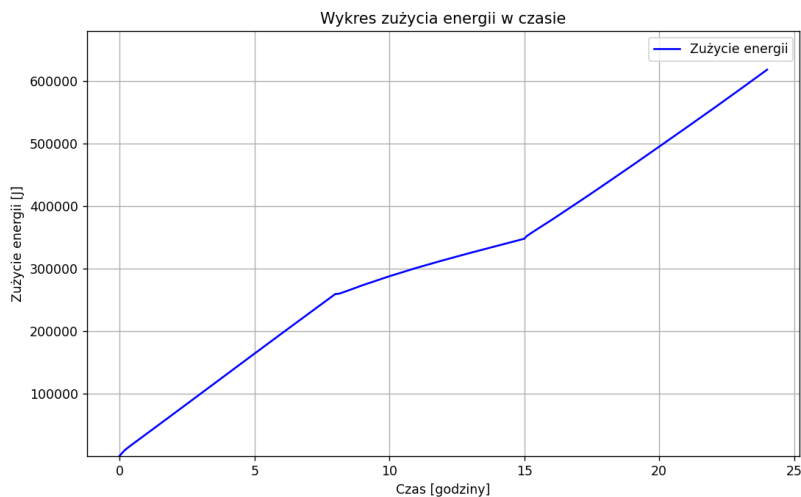
Temp. po 7 minutach od powrotu



Temp. po 15 minutach od powrotu



Rysunek 5: Temp. po 30 minutach od powrotu



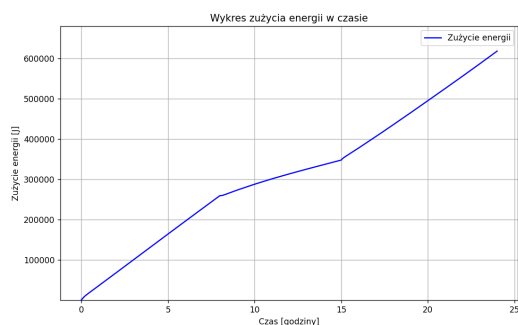
Rysunek 6: Wykres zużycia energii

Jak widzimy, już po 7 minutach zauważamy, jak mieszkanie ulega wychłodzeniu i przejmuje temperaturę zgodną z ustawieniami termostatu. Stan ten utrzymuje się aż do momentu powrotu do domu i ponownego ustawienia termostatu na 5. ustawienie. Nagrzewamy mieszkanie i widzimy, że aby osiągnęło stan taki jak przed wyjściem, potrzebujemy 10–15 minut. Czyli nieco mniej czasu niż w przypadku, gdy całkowicie wyłączyliśmy ogrzewanie. Całkowita energia zużyta w ciągu dnia wynosi 618,711.44 J.

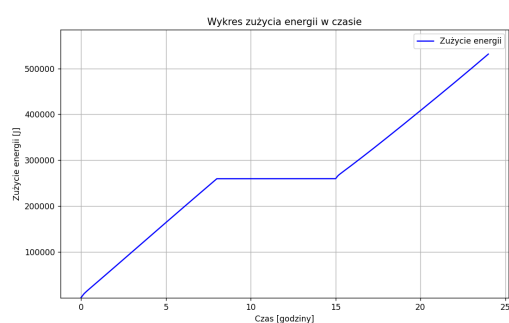
11.3

Opis	Zużycie energii (J)
Grzejniki całkowicie skrócone na czas wyjścia	531463.68
Grzejniki skrócone częściowo na czas wyjścia	618711.44
Grzejniki odkręcone całkowicie przez całą dobę	730032.84

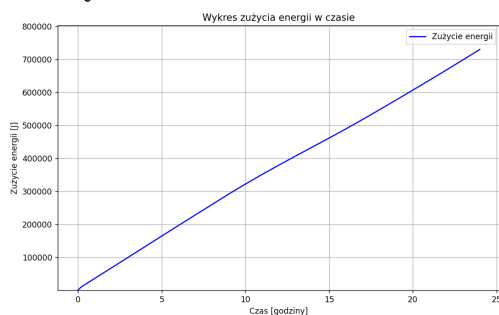
Tabela 1: Porównanie zużycia energii przez grzejniki w różnych wariantach



Grzejniki skrócone częściowo



Grzejniki skrócone całkowicie



Grzanie przez cały dzień

Wnioski:

Zużycie energii jest najmniejsze, gdy po wyjściu z domu całkowicie wyłączymy grzejniki. Czas nagrzewania mieszkania jest akceptowalny w stosunku do ilości zużytej energii. Sytuacja ta będzie się tym bardziej poprawiać, jeśli będziemy wychodzić na dłuższy okres czasu, ponieważ grzejniki będą przez jeszcze dłuższy czas nie pobierały żadnej energii, co w efekcie zmniejszy całkowite zużycie energii w ciągu doby.

12 Podsumowanie

W tym momencie nasuwają się kolejne pytania oraz duże pole do dalszych symulacji, takie jak np. ile kaloryferów powinno być w każdym z pokoi w zależności od ich wielkości, ilości okien, czy jakie jest optymalne rozwiązanie, jak mamy dwa okna obok siebie w rogu. Jeszcze ciekawsze efekty moglibyśmy uzyskać, badając to w przestrzeni 3D, uwzględniając cyrkulację powietrza.

Literatura

- [1] Analiza numeryczna, https://colab.research.google.com/drive/1dpoXDyZifgEY6fBr ofscrrT0LyPE13_qusp = sharingscrollTo = G03aaP1PUk_p.
- [2] Wikipedia, *Przewodność cieplna*, <https://pl.wikipedia.org/wiki/Przewodno>
- [3] Pogodajutro, <https://www.pogodajutro.com>.
- [4] Wikipedia, *Gęstość powietrza*, <https://pl.wikipedia.org/wiki/G>
- [5] Admins, *Termostat*, <https://admins.com.pl/termostat/>.