Contents

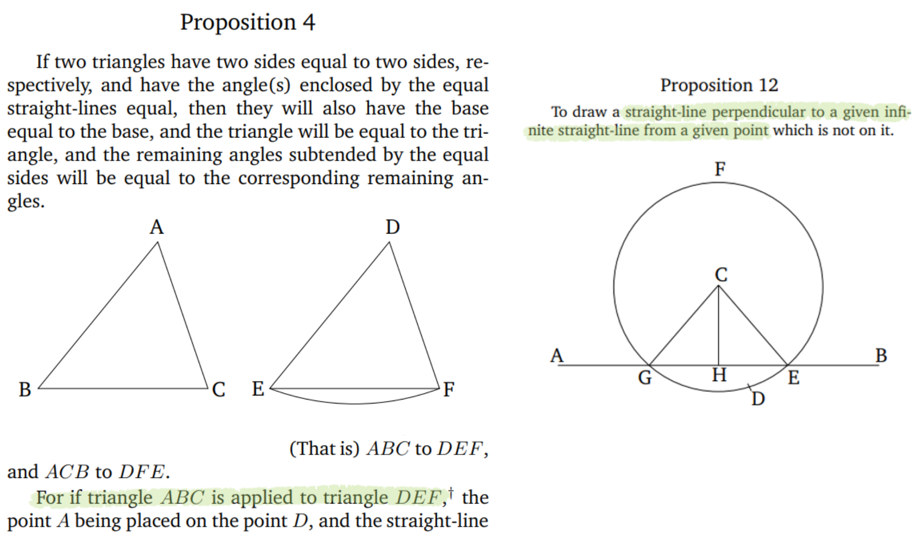
Chapter 1

Transformaciones lineales

Ya definimos y estudiamos el concepto de espacio vectorial, dimos también unos ejemplos que ilustran lo útil que puede ser considerar espacios vectoriales como marcos teóricos para modelar situaciones prácticas. Lo que queremos hacer ahora es establecer relaciones entre espacios vectoriales; más formalmente, queremos trabajar con funciones de un espacio vectorial a otro que preserven la estructura algebráica de estos. Como veremos, algunos de los conceptos matemáticos más usados pueden verse de forma natural como transformaciones lineales, por ejemplo,

- las operaciones de integración y diferenciación del cálculo, o
- las proyecciones, reflexiones y proyecciones de la geometría.

Explicaremos además cómo codificar la información de una transformación lineal entre espacios vectoriales finito dimensionales en una matríz (que dependerá de las bases escogidas para el dominio y codominio), habilidad indudablemente útil para las aplicaciones del álgebra lineal.


Proposition 4

If two triangles have two sides equal to two sides, respectively, and have the angle(s) enclosed by the equal straight-lines equal, then they will also have the base equal to the base, and the triangle will be equal to the triangle, and the remaining angles subtended by the equal sides will be equal to the corresponding remaining angles.

(That is) ABC to DEF, and ACB to DFE.

For if triangle ABC is applied to triangle DEF,† the point A being placed on the point D, and the straight-line

Proposition 12

To draw a straight-line perpendicular to a given infinite straight-line from a given point which is not on it.

Figure 1.1: Euclides usa en sus argumentos transformaciones lineales como las traslaciones, rotaciones y proyecciones.

1.1 Transformaciones lineales

Definición 1.1.1. *Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un mismo campo F. Toda función $T : V \longrightarrow W$ tal que*

$$(\forall x, y \in V)(\forall a \in F): \quad T(ax + y) = aT(x) + T(y) \tag{1.1}$$

*será llamada una **transformación lineal** de V en W.*

Nota que V y W deben ser espacios vectoriales sobre un campo común para que ambos lados de la ecuación 1.1 tengan sentido.

Observación 1.1.2. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces*

- *$T(0_V) = T(0_W)$, y*
- *Para cualesquiera $n \geq 1$ entero, $a_1, \ldots, a_n \in F$ y $x_1, \ldots, x_n \in V$,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i).$$

Demostración. En efecto, tenemos la siguiente ecuación en el grupo abeliano W

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$

luego, $T(0_V) = 0_W$. El segundo punto se demuestra por inducción, usando a la condición (1.1) como base de inducción. □

Ejercicio: demuestra que la condición 1.1 es equivalente a las siguientes dos condiciones:

1. (**aditividad**) Para cualesquiera $x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$,
2. (**homogeneidad**) Para cualesquiera $x \in V$, $a \in F$, $T(ax) = aT(x)$.

Estas condiciones dicen que, no importa si primero se realiza la suma o multiplicación escalar en el espacio V y luego se aplica la transformación lineal, o si primero se llevan los vectores a W via T y luego se efectua la suma o multiplicación escalar en W, el resultado es el mismo.

1.1.1 Ejemplos de transformaciones lineales

Tenemos la siguiente lista de ejemplos canónicos de transformaciones lineales.

- Dados V y W F−espacios vectoriales, las funciones $I_V : V \longrightarrow V$ y $T_0 : V \longrightarrow W$ definidas como

  $$\forall x \in V: \quad I_V(x) = x,\ T_0(x) = 0_W$$

  son transformaciones lineales, llamadas respectivamente la **transformación identidad** y la **transformación cero** en V.

- La función $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = f'$$

  es una transformación lineal.

- La función $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = \int_a^b f(t)dt$$

  es una transformación lineal.

- Sea $0 \leq \theta < 2\pi$. La función $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ \ T_\theta(a,b) = (acos(\theta) - bsen(\theta), asen(\theta) + bcos(\theta))$$

  es una transformación lineal llamada **rotación de θ radianes**.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ \ T_\theta(a,b) = (a, -b)$$

  es llamada la **reflexión sobre el eje** x, y es una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \ \ T_\theta(a,b) = (a, 0)$$

  es una transformación lineal, que llamamos **proyección sobre el eje-x**.

Profundicemos un poco más la definición de proyección. Claramente, $W_1 = \{(a,0) : \ a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,b) : \ b \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$. Se definió arriba a la proyección sobre el eje-x a la función que, a cada $v \in \mathbb{R}^2$, le asigna su sumando correspondiente al espacio W_1. Definamos en general el término proyección.

Definición 1.1.3. *Sea V un $F-$espacio vectorial, $W_1 \leq V$. Si $W_2 \leq V$ es tal que $W_1 \oplus W_2 = V$, la función $T : V \longrightarrow V$ definida como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \ \ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2 \tag{1.2}$$

es llamada una ***proyección sobre*** *W_1.*

Observe que, como se usa una suma directa para definir una proyección, la expresión (1.2) en efecto define una función T, de hecho lineal, pues, si $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ y $a \in F$, entonces,

$$T(ax + y) = T((ax_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = ax_1 + x_2 = aT(x_1) + T(x_2).$$

Note que $W_1 = \{x \in V | \ T(x) = x\}$, es decir, el conjunto de puntos fijos de una proyección en W_1 coincide con W_1. En la definición 1.1.3 hablamos de "una" proyección a W_1; esto es porque, como mostramos a continuación, hay tantas transformaciones lineales que satisfacen la definición de proyección a W_1 como subespacios cuya suma directa con W_1 es todo el espacio.

Proposición 1.1.4. *Sea $W_1 \leq V$. Si $W_2, \tilde{W_2}$ son dos subespacios de V distintos entre si tales que $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus \tilde{W_2}$, entonces las transformaciones lineales $T, \tilde{T} : V \longrightarrow V$ definidas como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \ \ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

y

$$\tilde{T}(x) = \tilde{x}_1, \quad x = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \ \ \tilde{x}_1 \in W_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{W_2}$$

son distintas entre si.

Demostración. Busquemos un punto en el que T y $\tilde{T}$ difieren. Como $W_2 \neq \tilde{W}_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $y \in \tilde{W}_2 - W_2$. Se tiene que

$$x_1 + x_2 = y = 0 + y,$$

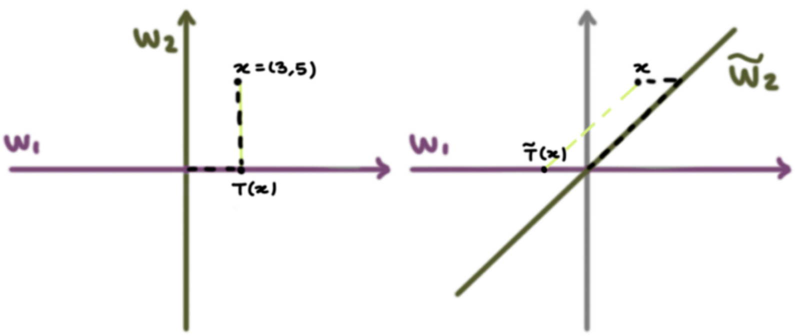
con $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ y $y \in \tilde{W}_2$. Note que x_1 no es cero, de lo contrario, se tendría

$$y = x_2 \in W_2 \quad ↯$$

Así,

$$T(y) = x_1 \neq 0 = \tilde{T}(y).$$

□



Ejemplo 1.1.5. Poner este ejemplo mucho antes. *Sea V un $F-$espacio vectorial con $dim(V) = n$. Si β es una base de V, dividámosla en dos subconjuntos α, γ ajenos cuya unión sea β. Entonces, $V = \langle\alpha\rangle \oplus \langle\gamma\rangle$, pues*

- *$V = \langle\alpha \cup \gamma\rangle = \langle\alpha\rangle + \langle\gamma\rangle$, y*
- *la suma es directa, pues*

$$\begin{aligned} dim(V) = dim(\langle\alpha\rangle + \langle\gamma\rangle) &= dim(\langle\alpha\rangle) + dim(\langle\gamma\rangle) - dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle) \\ &= dim(V) + dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle), \end{aligned}$$

luego, $dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle) = 0$, o sea, $\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle = \{0\}$.

1.2 El teorema fundamental de las transformaciones lineales

La condición (1.1) significa que la función T preserva la estructura algebráica de V. Como veremos a continuación, toda transformación lineal también preserva subespacios.

Recuerda que, si $f : A \longrightarrow B$ es una función cualquiera y $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, definimos

$$f(X) := \{y \in B| \;\; \exists x \in X : f(x) = y\},$$

y

$$f^{-1}(B) = \{x \in A| \;\; f(x) \in B\}$$

Proposición 1.2.1. *Sean V y W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre estos.*

- *La imagen de todo subespacio de V bajo T es un subespacio de W, es decir,*

$$\forall X \subseteq V : \;\; X \leq V \Rightarrow T(X) \leq W.$$

- *La preimagen de todo subespacio de W bajo T es un subespacio de V, es decir,*

$$\forall Y \subseteq W: \quad Y \leq V \Rightarrow T^{-1}(Y) = \{x \in V |\ T(x) \in Y\} \leq V.$$

Demostración. En efecto, si X es un subespacio de V, entonces $0_V \in X$, luego, $0_W = T(0_V) \in T(X)$. Además, si a es un escalar cualquiera y $y_1, y_2 \in T(X)$, entonces existen $x_1, x_2 \in V$ tales que $y_i = T(x_i)$, con $i = 1, 2$. Así,

$$ay_1 + y_2 = aT(x_1) + T(x_2) = T(ax_1 +_2)$$

es elemento de $T(X)$ pues X, al ser subespacio de V, contiene a $ax + y$. La demostración del segundo punto es dual. □

Vamos ahora a asociar a una transformación lineal dos espacios vectoriales (uno será un subespacio del dominio, otro del codominio) de gran importancia.

Definición 1.2.2. *Sean V, W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.*

- *Se define al* ***espacio nulo*** *de T o* ***kernel*** *de T como*

$$Ker(T) := T^{-1}(\{0_W\}) \leq V. \tag{1.3}$$

- *La* ***imagen*** *de T es*

$$T(V) \leq W. \tag{1.4}$$

Si $Ker(T)$ es finito dimensional, a su dimensión se le denomina la ***nulidad de*** *T. Si $T(V)$ es finito dimensional, su dimensión se conoce como el* ***rango de*** *T.*

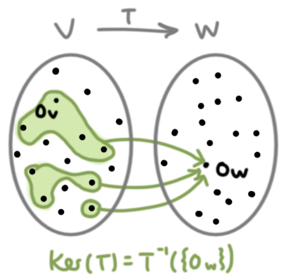
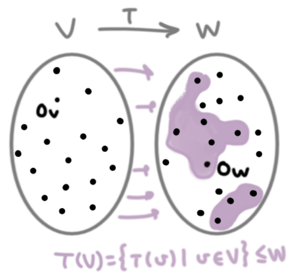


Figure 1.2: Etimológicamente, “kernel” significa semilla, centro, esencia.

Observa que el “tamaño” del kernel de una transformación lineal parece ser inversamente proporcional al de la imagen de esta; en efecto, si muchos vectores pertenecen al kernel, entonces no habrá muchos vectores en la imagen de T que no sean cero, lo que achica a $T(V)$. El siguiente teorema, pilar del álgebra lineal, da forma a esta intuición.



Teorema 1.2.3. ***(fundamental de las transformaciones lineales)*** *Sean V, W $F-$ espacios vectoriales, con V finito dimensional. Para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$,*

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)), \tag{1.5}$$

es decir, la dimensión del espacio de origen V es igual a la nulidad de T más el rango de T.

Demostración. Como V es finito dimensional, el kernel de T también lo es. Sea pues $\{n_1, \ldots, n_k\}$ una base de $Ker(T)$. Extendamos este subconjunto l.i. de V a una base de V; sea $\{v_1, \ldots, v_l\}$ tal que

$$\beta := \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_1, \ldots, v_l\}$$

es base de V. Entonces, $dim(V) = k + l$. Afirmamos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ es base de la imagen $T(V)$.

El Teorema 1.2.3 es también conocido como el “Teorema de la dimensión”.

- Sean $a_1, \ldots, a_l$ escalares tales que

$$a_1 T(v_1) + \cdots + a_l T(v_l) = 0_W$$

Supongamos que alguno de ellos no es cero; sin pérdida de generalidad, digamos que $a_1 \neq 0$. Por la linealidad de T, la ecuación anterior se reescribe como

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l) = 0_W,$$

es decir,

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l \in Ker(T) = \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \rangle,$$

por lo tanto,

$$v_1 \in \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_2, \ldots, v_l\} \rangle.$$

Esto, según el lema **??**, contradice la independencia lineal de β.

- Claro que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ genera a $T(V)$ pues, dado $y \in T(V)$, existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. Como β es base de V, existen escalares a_i, b_j tales que

$$x = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k + b_1 v_1 + \cdots b_l v_l;$$

evaluando ambos lados de la igualdad bajo T y recordando que los vectores n_i son mapeados al cero (pues son elementos del kernel de T), concluimos que

$$y = T(x) = b_1 T(v_1) + \cdots + b_l T(v_l).$$

Así,

$$dim(V) = k + l = dim(Ker(V)) + dim(T(V)).$$

□

Corolario 1.2.4. *Sean V y W son $F-$espacios vectoriales con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineal. Para toda $\beta \subseteq V$ base de V se tiene que $T(\beta)$ genera a $T(V)$.*

1.2.1 No ejemplos de transformaciones lineales

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^x$$

no es lineal, pues $f(0) \neq 0$ (de hecho, la exponencial es una función estríctamente positiva).

- La función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es lineal. Por ejemplo,

$$|2 + (-1)| = |1| = 1 \neq 3 = |2| + |-1|.$$

- El polinomio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x^2$ no es una transformación lineal pues, en general, no se cumple que $(x+y)^2$ coincida con $x^2 + y^2$. De hecho, lo que ocurre es $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, 0) & si\ y = 0 \\ (x, y) & si\ y \neq 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que, a pesar de que f es homogenea, no es lineal. Por ejemplo,

$$f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = (1,1),$$

pero

$$f(1,0)+f(0,1) = (2,0)+(0,1) = (2,1).$$

- La función coseno evaluada en cero vale uno, luego, no es lineal.

- Según el teorema 1.2.3, si $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, entonces

$$1 = dim(Ker(T)) + dim(T(V)),$$

luego, tenemos dos casos:

1. $dim(T(V)) = 1$, luego, como $T(V)$ es subespacio de $\mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ uno dimensional, tenemos que $T(V)$ es suprayectiva.
2. $dim(T(V)) = 0$, es decir, $dim(Ker(T)) = 1$. Puesto que $Ker(T) \leq \mathbb{R}$ y $dim(\mathbb{R}) = 1$, se tiene que $Ker(T) = \mathbb{R}$, luego, T es la transformac ión lineal cero.

Puesto que la función seno

$$sen(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

no es ni la función cero no suprayectiva, no puede ser lineal.

1.3 Inyectividad y suprayectividad de transformaciones lineales

Recuerda que, en general, si $f : V \longrightarrow W$ es una función de un conjunto V a otro conjunto W, f se dice

- **inyectiva** si

$$\forall x, y \in V : \quad T(x) = T(y) \Rightarrow x = y,$$

o, equivalentemente, si las imágenes de puntos distintos son distintas

- **suprayectiva** si

$$(\forall z \in W)\ (\exists x \in V) : \quad T(x) = z.$$

Resulta que, si V y W son $F-$espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ es, no sólo una función, sino una transformación lineal entre ellos, entonces podemos encontrar equivalencias de ser inyectiva o suprayectiva usando propiedades del Kernel y la preservación de la generación o inyectividad de subconjuntos de V.

Veremos que, en el contexto de transformaciones lineales, los conceptos de inyectividad e independencia lineal están íntimamente ligados, así como los de suprayectividad y generación.

Proposición 1.3.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*

2. *$Ker(T) = \{0\}$*

3. *Si $X \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $T(X) \subseteq W$ es también linealmente independiente.*

Demostración.

1) ⇒ 2) Si $x \in Ker(T)$ entonces, por definición del kernel, $T(x) = 0$. Además, como T es lineal, también se tiene $T(0) = 0$, luego, como T es inyectiva, tenemos que $x = 0$. Así, $Ker(T) = \{0\}$.

2) ⇒ 1) Sean $x, y \in V$ tales que $T(x) = T(y)$. Entonces, por la linealidad de T, $T(x - y) = T(x) - T(y) = 0$, así, $x - y \in Ker(T) = \{0\}$, es decir, $x - y = 0$, o sea, $x = y$.

2) ⇒ 3) Sean $v_1, \dots, v_n \in X$ cualesquiera; mostremos que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Sean $a_i \in F$ escalares tales que

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = \hat{0}_W.$$

Por ser T lineal, podemos reescribir el lado izquierdo de la igualdad anterior;

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \hat{0}_W.$$

Esto muestra que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in Ker(T) = \{0\}$, luego,

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V.$$

Como X es l.i., esto implica que todos los escalares a_i son cero.

En la implicación 2) ⇒ 3), estamos mostrando que un subconjunto finito arbitrario de $T(X)$ es l.i. suponiendo que X es l.i.. Recuerda que esto es necesario y suficiente para demostrar la independencia lineal de todo $T(X)$.

3) ⇒ 2) Supongamos que existe $x \in Ker(T) - \{0\}$. Como x no es el vector cero, el singulete $\{x\}$ es l.i. y, sin embargo, $\{T(x)\} = \{0_W\}$ es l.d.. Esto contradice nuestra hipótesis.

□

Proposición 1.3.2. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

1. *T es suprayectiva*
2. *Si $X \subseteq V$ genera a V entonces $T(X)$ genera a W.*

Se demuestra que si $f : A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva, entonces, para todo $Y \subseteq B$, se tiene $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Demostración.

1) ⇒ 2) Sea X un generador de V, es decir, un subconjunto tal que $\langle X \rangle = V$. Esto significa que el único subespacio de V que contiene a X es el mismo V. Puesto que $X \subseteq T^{-1}(\langle T(X) \rangle)$ (pues, dado $x \in X$, $T(x) \in T(X) \subseteq \langle T(X) \rangle$), se tiene entonces $T^{-1}(\langle T(X) \rangle) = V$. Evaluando ambos lados de la igualdad bajo la función suprayectiva T concluimos que

$$W = T(V) = T(T^{-1}(\langle T(X) \rangle)) = \langle T(X) \rangle,$$

o sea, que $T(X)$ genera a W.

2) ⇒ 1) V trivialmente se genera a sí mismo, luego, por hipótesis debe ocurrir que $T(V)$ genere a W, o sea, que

$$W = \langle T(V) \rangle = T(V),$$

por lo tanto T es supra.

□

Proposición 1.3.3. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales.*

- *Si $dim(V) > dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W inyectivas.*
- *Si $dim(V) < dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W suprayectivas.*

Demostración. En efecto,

- si existe $T : V \longrightarrow W$ inyectiva, entonces, según la proposición 1.3.1, $Ker(T) = \{0\}$, luego, la ecuación (1.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(T(V)) \leq dim(W).$$

- Si existe $T : V \longrightarrow W$ suprayectiva, entonces $T(V) = W$, luego, (1.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(W) \geq dim(W).$$

□

1.4 Isomorfismos

Definición 1.4.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ que sea biyectiva (i.e. inyectiva y suprayectiva) será llamada un* ***isomorfismo****. Si existe un isomorfismo entre dos espacios vectoriales V y W decimos que V y W son* ***isomorfos****.*

Es decir, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si $Ker(T) = \{0_V\}$ y $T(V) = W$.

El teorema 1.2.3 de hecho implica que, si V es finito dimensional, entonces puede establecerse un isomorfismo entre V y otro $F-$espacio vectorial W sólo si W tiene la misma dimensión que V.

Proposición 1.4.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ lineal, con V de dimensión finita. Si T es un isomorfismo, entonces W también es finito dimensional y, de hecho, $dim(W) = dim(V)$.*

Demostración. Digamos que $dim(V) = n$. Por ser T un isomorfismo, se tiene que

$$Ker(T) = \{0_V\} \quad y \quad T(V) = W.$$

Además, como V es finito dimensional, podemos usar el teorema 1.2.3 para deducir que

$$\begin{aligned} n = dim(V) &= dim(Ker(T)) + dim(T(V)) \\ &= dim(\{0_V\}) + dim(W) \\ &= 0 + dim(W) = dim(W). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.3. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales, ambos de dimensión n. Entonces, para cualquier transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, son equivalentes*

1. *T es inyectiva*
2. *T es suprayectiva*
3. *T es biyectiva (i.e. un isomorfismo).*

Demostración. Basta demostrar que 1) implica 2) y que 2) implica 3).

1) $\Rightarrow$ 2) Si T es inyectiva entonces $Ker(T) = \{0\}$, luego, por el teorema 1.2.3,

$$n = dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)) = 0 + dim(T(V)) = dim(T(V)),$$

luego, como $dim(W) = n$ y $T(V) \leq W$ tiene dimensión n, concluimos que $T(V) = W$, o sea, que T es suprayectiva.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $T(V) = W$, entonces

$$n = dim(Ker(T)) + dim(T(V)) = dim(Ker(T)) + dim(W) = dim(Ker(T)) + n,$$

luego, $dim(Ker(T)) = 0$ o, equivalentemente, $Ker(T) = \{0_V\}$, i.e. T es inyectiva.

□

Ejemplo 1.4.4. *Sea la función $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida como*

$$T(f)(u) = 2f'(u) + \int_0^u 3f(x)dx. \text{ (polinomio en la variable)}u.$$

Puesto que T es combinación lineal de transformaciones lineales, es también lineal. Según el corolario 1.2.4, $\{T(1), T(x), T(x^2)\}$ genera al rango de T. Se calcula que

$$T(1)(u) = 2 \cdot 0 + \int_0^u 3dx = 3u,$$

$$T(x)(u) = 2 + \int_0^u 3xdx = 2 + \frac{3}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=u} = 2 + \frac{3u^2}{2},$$

$$T(x^2)(u) = 4u + \int_0^u 3x^2dx = 4u + x^3\Big|_{x=0}^{x=u} = 4u + u^3.$$

Tenemos entonces que

$$\{g_1(u) = 3u, g_2(u) = 2 + (3/2)u^2, g_3(u) = 4u + u^3\}$$

genera a $T(P_2(\mathbb{R}))$; puesto que los elementos de este generador son polinomios de grados distintos, de hecho son linealmente independientes, luego, esta es una base del rango de T. Así, como $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, se debe tener que T es inyectiva. ⋄

Recuerde que toda función biyectiva es invertible. Sea pues $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo; sabemos que existe la función inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$. Como establecemos a continuación, tal función es, al igual que T, una transformación lineal.

Proposición 1.4.5. *Si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa T^{-1} es también un isomorfismo.*

Demostración. Basta probar la linealidad de T^{-1}. Sean pues $y, z \in W$, $\lambda \in F$. Puesto que T es lineal y $u := T^{-1}(y)$, $v := T^{-1}(z)$ son vectores de V, se tiene que

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda y + z,$$

luego,

$$T^{-1}(\lambda y + z) = \lambda u + v = \lambda T^{-1}(y) + T^{-1}(z).$$

□

1.5 La propiedad universal de las bases

Recuerda que, dados V y W dos $F-$ espacios vectoriales, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es una función que además "abre" combinaciones lineales. Como cualquier función, T está completamente determinada por los valores que toma en su dominio V. Como veremos a continuación, en el caso de las transformaciones lineales, estas de hecho quedan determinadas por su definición en una base cualquiera del espacio V; conocer los valores de T en una base de V nos permite saber los valores de T en *cualquier* punto de V.

Al teorema 1.5.1 también se le llama el teorema fundamental de las bases. Se usará en repetidas ocasiones para desarrollar la teoría de las siguientes secceiones, por lo que se recomienda entenderlo bien.

Teorema 1.5.1. *(propiedad universal de las bases) Sea V un $F-$ espacio vectorial, con V finito-dimensional. Son equivalentes para $\beta \subseteq V$ las siguientes:*

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, dotted, "\exists!\ T"] \\
W &
\end{tikzcd}$$

- *β es base de V*
- *Si W es un $F-$espacio vectorial cualquiera, toda función $f : \beta \longrightarrow W$ se puede extender linealmente de forma única a todo V, es decir, existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T_{|\beta} = f$.*

Nota: en realidad, este teorema es cierto aún cuando V es infinito dimensional (c.f. Hugo Rincón p. 84). Sin embargo, como en el curso no hemos demostrado los resultados necesarios para probar esto cuando se trabaja en un espacio infinito dimensional (no estudiamos el lema de Zorn, por lo que no pudimos demostrar hechos fundamentales como la existencia de bases para cualquier espacio vectorial o el hecho de que un l.i. de un espacio ininito dimensional puede extenderse a una base de este), nos limitaremos a establecer y probar la propiedad universal de las bases en dimensión finita - que en realidad son los tipos de espacios que se usan siempre en las aplicaciones.
Demostración.

⇒) Sea $f : \beta \longrightarrow W$ una función de la base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V escogida a W. Sean $x, y \in V$ cualesquiera; digamos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i v. \tag{1.6}$$

Observe que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal que extiende a f (i.e. tal que $T \circ \iota = f$), entonces, deberá ocurrir

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i),$$

es decir, T *tiene que ser* la función definida como

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i). \tag{1.7}$$

Observe que la ecuación (1.7) en efecto define una función T de V en W, pues, por ser β base de V, la representación de x dada en (1.6) como combinaciones lineales de elementos de β son únicas

Esta es en efecto una transformación lineal, pues

$$\begin{aligned} T(ax+y) =& T\left(a\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (aa_i + b_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (aa_i + b_i)\beta(v_i) = a\sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i \beta(v_i) = aT(x) + T(y), \end{aligned}$$

y, en efecto, $T \circ \iota = f$, pues, dado $v_i \in \beta$ cualquiera,

$$(T \circ \iota)(v_i) = T(v_i) = T(0v_1 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_n) = f(v_i).$$

⇐) Mostremos que un subconjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V con tal propiedad es base de V.

- Independencia lineal: Supongamos que $v_1 \in \langle \beta - \{v_1\} \rangle$, o sea, que existen escalares c_i tales que $v_1 = \sum_{i=2}^{n} c_i v_i$. Sea la función $f : \beta \longrightarrow F$ definida como

  $$f(v_1) = 1, \quad f(v_i) = 0, \quad 2 \le i \le n.$$

  Sea T la única extensión lineal de esta función. Se tiene que

  $$1 = T(v_1) = T\left(\sum_{i=2}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=2}^{n} c_i T(v_i) = \sum_{i=2}^{n} c_i 0_W = 0 \;\lightning$$

- Generación: Supongamos que β no genera a V. Como ya mostramos que β es l.i., podemos extender β a una base de V (c.f. corolario **??**). Sea pues $\gamma \subseteq V$ tal que $\beta \cup \gamma$ es base de V. Si $f : \beta \longrightarrow V$ se define como $f(v_i) = v_i$, observe que la función identidad $I_V : V \longrightarrow V$ es tal que $I_V \circ \iota = f$, pero también la proyección $T : V = \langle \beta \rangle \oplus \langle \gamma \rangle \longrightarrow V$ definida como

  $$T(x) = b, \quad x = b + c, b \in \beta, c \in \gamma$$

  satisface que $T \circ \iota = f$. Como $T \neq I_V$, esto contradice la unicidad de la extensión lineal que suponemos por hipótesis.

□

Es decir, para demostrar la igualdad entre transformaciones lineales basta comprobar que sus definiciones en una base cualquiera del dominio coinciden.

Corolario 1.5.2. *Sea V, W $F-$espacios vectoriales, con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$, $U : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Si para una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se tiene que*

$$T(v_i) = U(v_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

entonces $T = U$.

Terminemos mostrando que todo $F-$espacio vectorial de dimensión n es esencialmente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.5.3. *Sea V un $F-$ espacio vectorial. V es $n-$dimensional si y sólo si V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Inmediata de notar que $dim(\mathbb{R}^n) = n$ y la proposición 1.4.2.

$\Rightarrow$) Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $f : \beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función que a v_i le asigna $\hat{e}_i$. Según la propiedad universal de las bases (c.f. teorema 1.5.1), podemos extender a β linealmente. Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal extensión lineal. Puesto que $T(V)$ contiene a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $T(V) = \mathbb{R}^n$, o sea, T es suprayectiva. De esto, según el teorema 1.4.3, se deduce que T es un isomorfismo.

□

1.6 Caracterización de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Es gracias a la propiedad universal de las bases establecida en el teorema 1.5.1 que vamos a poder caracterizar a las transformaciones lineales entre $F-$espacios vectoriales finito dimensionales. Como veremos más adelante, esto nos permitirá capturar toda la información de una transformación lineal a partir de una cantidad finita de números, que almacenaremos en un arreglo numérico rectangular - i.e. en una matriz. Antes de abordar la teoría en general, para familiarizarnos con la ideas que vamos a estudiar más adelante para el caso de transformaciones lineales de un $\mathbb{R}^n$ a un $\mathbb{R}^m$.

Para simplificar la notación, conviente introducir la noción de producto punto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6.1. *Para $\hat{x} = (a_i)_{i=1}^n, \hat{y} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, definimos su* ***producto punto*** *como*

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Recordando la definición de producto de matrices, podemos reinterpretar al producto puntos de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ como producto de matrices;

Este es un buen momento para recordar que, por lo general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i bi \right).$$

Claro que estamos haciendo un abuso de notación identificando a una matriz de 1×1 con su única entrada. También vamos a estar identificando a "vectores fila" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con "vectores columna"

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

I) Sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal. Consideremos a la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$. Según el teorema 1.5.1, T queda completamente determinada por su valor en 1; digamos que $T(1) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Entonces, para toda $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$T(a) = T(a \cdot 1) = aT(1) = a(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (a).$$

II) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal. Ahora vamos a considerar a la base canónica $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nuevamente, el teorema 1.5.1 nos asegura que, con conocer los valores

$$c_i = T(\hat{e}_i), \quad 1 \le i \le n,$$

conocemos los valores de la transformación lineal T en todo punto de $\mathbb{R}^n$; en efecto, si $\hat{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T(\hat{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \langle \hat{x}, \hat{c} \rangle = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

donde $\hat{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

II) Ahora si consideremos el caso más general de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. De nuevo tomamos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ compuesta por los vectores $\hat{e}_i$. Si

$$T(e_i) = (c_{1i}, c_{2i} \ldots, c_{mi}), \quad 1 \le i \le n,$$

entonces, para cualquier $\hat{x} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} T(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_{1i}, a_i c_{2i}, \ldots, a_i c_{ni}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_{1i}, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{2i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{mi} \right). \end{aligned}$$

Nota que cada entrada es entonces un producto punto.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

1.7 Ejercicios III

Demos un repaso de los conceptos estudiados.

I) Construyamos una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $v_1 = (4,5,9)$.

Para esta construcción estamos usando el lema **??**.

- Para que v_2 sea tal que $\{v_1, v_2\}$ sea l.i., debe cumplirse que

$$v_2 \in \mathbb{R}^3 - \langle\{v_1\}\rangle,$$

es decir, que v_2 no sea múltiplo escalar de v_1. Pongamos pues a $v_2 = (5,3,7)$.

- Para que v_3 sea tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea l.i., se deberá tener

$$\begin{aligned} v_3 \in \mathbb{R}^3 - \langle\{v_1, v_2\}\rangle =& \mathbb{R}^3 - \{a(4,5,9) + b(5,3,7) : \ a, b \in \mathbb{R}\} \\ =& \mathbb{R}^3 - \{(4a+5b, 5a+3b, 9a+7b) | \ a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Haciendo $a = 1$, $b = -1$, tenemos que el vector $(-1,2,2)$ es elemento de $\langle\{v_1, v_2\}$; cambiando una de las tres entradas obtendremos un vector que no está en este espacio (pues el sistema planteado para expresar a este nuevo vector como combinación lineal de v_1 y v_2 no tendría solución, recuerde el teorema de Cramer). Tomemos pues a $v_3 = (-1,2,0)$.

Obtuvimos así al subconjunto linealmente independiente

$$\beta = \{v_1 = (4,5,9), v_2 = (5,3,7), v_3 = (-1,2,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$; como este tiene tres elementos y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, tenemos que es una base de $\mathbb{R}^3$.

II) Encontremos ahora, usando el argumento de la demostración del teorema fundamental de las bases 1.5.1, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(v_1) = (1,0), \ \ T(v_2) = (2,5), \ \ T(v_3) = (-3,1). \tag{1.8}$$

Tenemos primero que ver cómo expresar a cualquier vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de elementos de la base β. Estamos buscando entonces a los únicos escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} (x,y,z) =& a(4,5,9) + b(5,3,7) + c(-1,2,0) \\ =& (4a+5b-c, 5a+3b+2c, 9a+7b). \end{aligned}$$

Esta igualdad en $\mathbb{R}^3$ es equivalente al sistema de ecuaciones que resolvemos a continuación:

En este argumento, x, y y z son las constantes, mientras que las incógnitas son los escalares a, b y c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -1 & x \\ 5 & 3 & 2 & y \\ 9 & 7 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 5 & 3 & 2 & y \\ 9 & 7 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & -13/4 & 13/4 & y - 5x/4 \\ 0 & -17/4 & 9/4 & z - 9x/4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & 1 & -1 & -4y/13 + 5x/13 \\ 0 & -17 & 9 & 4z - 9x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & 1 & -1 & -4y/13 + 5x/13 \\ 0 & 0 & 8 & -4z + 68y/13 - 32x/13 \end{array}\right).$$

Tenemos entonces que

Ejercicio: sustituyendo algunos valores para x, y y z compruebe que las fórmulas (1.9), (1.10) y (1.11) son correctas.

$$c = -\frac{1}{8}\left(4z - \frac{68}{13}y - \frac{32}{13}x\right) = \frac{4}{13}x + \frac{17}{26}y - \frac{1}{2}z, \tag{1.9}$$

$$b = c - \frac{4}{13}y + \frac{5}{13}x = \frac{9}{13}x + \frac{9}{26}y - \frac{1}{2}z, \tag{1.10}$$

y

$$a = \frac{1}{4}(x + c - 5b) = -\frac{7}{13}x - \frac{7}{26}y + \frac{1}{2}z. \tag{1.11}$$

Usando estas tres expresiones, tenemos que la única transformación que extiende la definición (1.8) en la base β es

Ejercicio: compruebe que la transformación lineal propuesta cumple las condiciones (1.8).

$$\begin{aligned} T(x,y,z) =& T(av_1 + bv_2 + cv_3) \\ =& aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) \\ =& \left(-\frac{7}{13}x - \frac{7}{26}y + \frac{1}{2}z\right)(1,0) + \left(\frac{9}{13}x + \frac{9}{26}y - \frac{1}{2}z\right)(2,5) + \left(\frac{4}{13}x + \frac{17}{26}y - \frac{1}{2}z\right)(-3,1) \\ =& \left(-\frac{1}{13}x - \frac{20}{13}y + z, \frac{49}{13}x + \frac{31}{13}y - 3z\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 1. *Sean U, V y W tres $F-$espacios vectoriales, $a \in F$. Demuestra que*

- *Si $f, g : V \longrightarrow W$ son transformaciones lineales, entonces $f + g$ y af son transformaciones lineales.*
- *Si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ son transformaciones lineales, la función composición $g \circ f : V \longrightarrow U$ es también lineal.*

Ejercicio 2. *Argumente por qué existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(2,5) = (1,0,1), \;\; T(-1,4) = (2,5,7)$$

y de su fórmula explícitamente.

Ejercicio 3. *Argumente por qué existe una única transformación lineal $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$T(1) = x^2, \;\; T(1+x) = 2x, \;\; T(x^2-1) = 2.$$

y de su fórmula explícitamente.

Chapter 2

Representaciones matriciales de transformaciones lineales

Desarrollada la teoría de transformaciones lineales en el capítulo anterior, nos proponemos ahora usar la propiedad universal de las bases (c.f. teorema 1.5.1) para representar transformaciones lineales entre espacios vectoriales finito dimensionales como matrices.

Mostraremos que

- fijando bases en los espacios de salida y de llegada, podremos establecer una biyección (que de hecho será un isomorfismo) que identificará una transformación lineal entre estos espacios con una matríz.
- Puesto que esta asociación preserva estructura, podremos realizar operaciones con matrices (que son objetos sencillos de almacenar y operar en una computadora) e interpretarlas como operaciones entre transformaciones lineales.

Antes de explicar cómo almacenar la información de una transformación lineal en una matriz - situación que implicará trabajar con un $F-$ espacio vectorial de matrices con coeficientes en F - estudiemos la estructura del espacio de transformaciones lineales.

2.1 El espacio $\mathcal{L}(V, W)$

A partir de ahora vamos a considerar dos $F-$espacios vectoriales V y W, con

$$dim(V) = n, \quad dim(W) = m,$$

y

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V, \quad \gamma = \{w_1, \ldots, v_m\} \subseteq W$$

bases de estos.

Proposición 2.1.1. *Definiendo la suma y multiplicación escalar puntualmente,*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \longrightarrow W | \quad T \text{ es lineal}\}$$

es un $F-$espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio. Como sugerencia, considere a

$$X = \{T : V \longrightarrow W | \quad T \text{ es función}\}.$$

Por herencia de W, X es un $F-$espacio vectorial. Si demuestra que el subconjunto $\mathcal{L}(V, W)$ de X es no vacío, cerrado bajo sumas y multiplicación escalar (c.f. ejercicio 1), entonces tendrá que es subespacio de X - luego, espacio vectorial en sí mismo. □

En W no se tiene definida una multiplicación, por lo que no tendría sentido definir el produco de transformaciones lineales puntualmente, sin embargo, siempre podemos componer funciones: si $T : V_1 \longrightarrow V_2$, $U : V_2 \longrightarrow V_3$, su composición $U \circ T : V_1 \longrightarrow V_3$ se define como

$$(U \circ T)(v) = U(T(v)), \quad v \in V_1.$$

Se demuestra que esta es una transformación lineal.

2.2 El isomorfismo $[\cdot]_\beta$

base ordenada def.

Definición 2.2.1. *Sea V un $F-$espacio vectorial $n-$dimensional, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de este. Para $x \in V$, si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ es la única representación de x como combinación lineal de elementos de β, entonces, al vector de $\mathbb{R}^n$*

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

*se le llamará el **vector coordenado de** x **respecto a** β.*

Para no complicar la notación seguiremos denotando a bases ordenadas como conjuntos, pero a partir de ahora se debe entender que el orden en el que se enlistan los elementos de una base importa. Por "base" entenderemos "base ordenada".

Observe que la asignación

$$x \mapsto [x]_\beta$$

de V en F^n es una función, pues la representación de cada vector en V como combinación lineal de elementos de β es única (luego, a cada vector le estamos asignando una y sólo una columna ordenada). De hecho, $[\cdot]_\beta$ es la transformación lineal usada en la demostración de la proposición 1.5.3 para demostrar que, si V tiene dimensión n, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Usando entonces a la base β de V, estamos identificando a cada vector de V con una $n-$tupla via este isomorfismo. Esto es útil pues, aunque los elementos del espacio original V no sean vectores, si V es de dimensión finita, los podemos identificar como tal.

Proposición 2.2.2. *Sea $\beta = v_1, v_2, \dots, v_n$ base de V, $[\cdot]_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por* (2.1)*.*

- *$[\cdot]_\beta$ es un isomorfismo. En particular,*

$$[x]_\beta = [y]_\beta \Rightarrow x = y.$$

- *Para toda $1 \leq i \leq n$, $[v_i]_\beta = e_i$, el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.*

Note que la identificación (2.1) de un vector del espacio con un elemento de $\mathbb{R}^n$ depende de la base β fijada. Es decir, si γ es otra base del espacio, $[x]_\beta \neq [x]_\gamma$, y el que $[x]_\beta = [y]_\gamma$ no implica que x y y sean iguales. Ejercicio: de un ejemplo que ejemplifique esta situación.

Terminar de poner aquí lo de las fotos. Prefiero hablar en términos de este isomorfismo en lo que sigue, entonces tengo que completar esta sección.

2.3 Representación matricial de una transformación lineal

Vamos a considerar ahora a dos F−espacios vectoriales finito dimensionales

$$V, \;\; dim(V) = n, \beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V \;\; base\ de\ V,$$

$$W, \;\; dim(V) = n, \gamma = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W \;\; base\ de\ W.$$

Recuerde que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

- Por el teorema fundamental de las bases 1.5.1, la transformación T queda completamente determinada por los valores que toma en la base β de V, es decir, a partir de los valores

$$T(v_i), \;\; 1 \leq i \leq n$$

podemos recuperar la definición de T *en todo el espacio V*.

En esta discusión, “i” es la variable con la que contamos a los elementos de la base β, y com “j” contamos a los elementos de la base γ.

- Por ser γ base de W, cada $T(v_i)$ puede expresarse de forma única como combinación lineal de los vectores $w_1, \dots, w_m$, es decir, para cada $1 \leq i \leq n$, existen únicos escalares a_{ji} tales que

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j, \;\; 1 \leq i \leq n. \tag{2.2}$$

Nota que en la ecuación (2.2) se fija el segundo índice de los escalares, es decir, el índice columna.

Así, una vez fijadas las bases β y γ, **la transformación lineal T queda completamente determinada por los $m \times n$ escalares a_{ji}, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.** Almacenamos esta información en la siguiente matriz:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \end{tikzcd}$$

$\beta \subseteq V$ base, $dim(V) = n$ $\quad$ $\gamma \subseteq W$ base, $dim(W) = m$

$[T]_\beta^\gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Note que la i−ésima columna de $[T]_\beta^\gamma$ es el vector columna $[T(v_i)]_\gamma$. Entonces,

- La matriz $[T]_\beta^\gamma$ tiene n columnas, pues hay una por cada elemento de la base β de V, y
- tiene m filas, pues cada vector columna tiene m entradas, a saber, los coeficientes de las combinaciones lineales de las imágenes $T(v_i)$ respecto a γ.

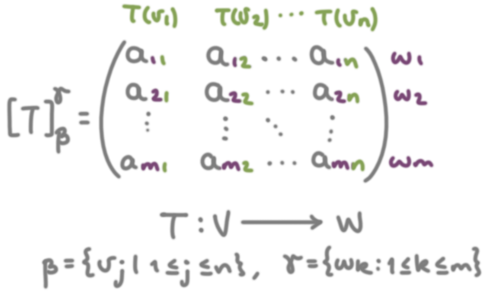


Figure 2.1: Este diagrama puede ayudarte a recordar cómo se construye la matriz $[T]_\beta^\gamma$

2.4 El isomorfismo Φ_β^γ

Fijadas bases $\beta = \{v_j |\ 1 \le j \le n\} \subseteq V$ y $\gamma = \{w_k |\ 1 \le k \le n\} \subseteq W$ de dos $F-$espacios finito dimensionales, se puede establecer una biyección entre

- el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de transformaciones lineales de V en W y
- el espacio de matrices $M_{m\times n}(F)$;

vamos a denotar por Φ_β^γ a la función que a cada transformación lineal de V en W le asigna su representación matricial respecto a β y γ, i.e.

$$\Phi_\beta^\gamma : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$$

$$\Phi_\beta^\gamma(T) = [T]_\beta^\gamma.$$

Del teorema fundamental de las bases se sigue fácilmente el que Φ_β^γ sea biyectiva.

Proposición 2.4.1. *La función Φ_β^γ es una biyección.*

Demostración.

- **Inyectividad de Φ_β^γ:** Sean $T, U : V \longrightarrow W$ lineales tales que

  $$[T]_\beta^\gamma = \Phi_\beta^\gamma(T) = \Phi_\beta^\gamma(T) = [U]_\beta^\gamma.$$

  El que las matrices $[T]_\beta^\gamma$ y $[U]_\beta^\gamma$ sean iguales significa que

  $$\forall v \in \beta : \quad T(v) = U(v)$$

  pues la $j-$ésima columna de esta matriz da los coeficientes de la combinación lineal en términos de γ igual a T evaluada en el $j-$ésimo vector de la base β. Así, T y U coinciden en la base β de V, luego, según el corolario 1.5.2, coinciden.

- **Suprayectividad de Φ_β^γ:** sea $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$. Por el teorema fundamental de las bases, existe una única transformación lineal tal que

  $$T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_j, \quad 1 \le j \le n.$$

  Dicha T es tal que $[T]_\beta^\gamma = A$.

□

Corolario 2.4.2. *Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal tal que $[T]_\beta^\beta = Id_n$, entonces T es la función identidad.*

Nota: se pidió a partir de ahora que las bases de los espacios vectoriales considerados fuesen ordenadas pues, para la construcción de las representaciones matriciales $[T]_\beta^\gamma$, la $j-$ésima columna corresponde al $j-$ésimo vector de la base β, luego, el orden en el que se enlistan los elementos de β importa (es cierto que un cambio de orden en los elementos de un conjunto no afecta su identidad, pero el cambiar el orden de las filas o columnas de una matriz la altera).

En la siguiente sección desarrollaremos la teoría suficiente para demostrar que, más que una biyección, Φ_β^γ es un isomorfismo. Esto implica que el espacio $\mathcal{L}(V,W)$ de transformaciones lineales entre dos espacios finito dimensionales es (salvo isomorfismo) un espacio de matrices. En lo que sigue seguiremos estudiando y explotando la relación entre dos espacios, para interpretar las operaciones que realicemos en uno en términos de operaciones en el otro espacio (pues, para las aplicaciones, es muchísimo más sencillo trabajar con matrices a lidiar con transformaciones lineales entre espacios que, a pesar de ser finito dimensionales, pueden ser complicados).

2.5 Operaciones entre transformaciones lineales con sus representaciones matriciales

Proposición 2.5.1. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales con $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq W$ bases de estos. Para cualesquiera $T, U : V \longrightarrow W$,*

$$[T+U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma. \tag{2.4}$$

Nota que el lado izquierdo de (2.4) involucra una suma de funciones, mientras que el lado derecho es una suma de matrices.

Proposición 2.5.2. *Sean V, W y Z tres $F-$espacios vectoriales, con $\beta = \{v_j : 1 \leq j \leq n\} \subseteq V$, $\gamma = \{w_k : 1 \leq k \leq m\} \subseteq W$ y $\delta = \{z_i : 1 \leq i \leq r\}$ bases de estos. Si $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ son lineales, entonces*

$$[U \circ T]_\beta^\delta = [U]_\gamma^\delta \cdot [T]_\beta^\gamma. \tag{2.5}$$

Nota que el lado izquierdo de (2.5) involucra una composición de funciones, mientras que el lado derecho es un producto de matrices. De hecho, el producto de matrices se definió de tal forma que la ecuación (2.5) fuese cierta.

Demostración. Tenemos que $[U]_\gamma^\delta \in M_{r\times m}(\mathbb{R})$ y que $[T]_\beta^\gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, por lo tanto, el producto de matrices en (2.5) está bien definido.

$$[U]_\gamma^\delta \text{ tiene } 1 \leq i \leq r \text{ filas y } 1 \leq k \leq m \text{ columnas,}$$

$$[T]_\beta^\gamma \text{ tiene } 1 \leq k \leq m \text{ filas y } 1 \leq j \leq n \text{ columnas;}$$

entonces,

$$[U \circ T]_\beta^\delta \text{ tiene } 1 \leq i \leq r \text{ filas y } 1 \leq j \leq n \text{ columnas.}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "U \circ T"] & W \arrow[r, "U"] & Z \end{tikzcd}$$

$\beta = \{v_j : 1 \leq j \leq n\}$ $\quad$ $\gamma = \{w_k : 1 \leq k \leq m\}$ $\quad$ $\delta = \{z_i : 1 \leq i \leq r\}$

$dim(V) = n$ $\quad$ $dim(W) = m$ $\quad$ $dim(Z) = r$

Digamos pues que

$$[U]_\gamma^\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rm} \end{pmatrix}, \quad [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix};$$

estas dos ecuaciones matriciales equivalen a los siguientes dos grupos de ecuaciones:

$$\forall 1 \le j \le n: \quad T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k$$

y

$$\forall 1 \le k \le m: \quad U(w_k) = \sum_{i=1}^{r} a_{ik} z_i.$$

Ahora bien, la j–ésima columna de $[U \circ T]_\beta^\delta$ se consigue evaluando a $U \circ T$ en v_j:

$$\begin{aligned} (U \circ T)(v_j) &= U(T(v_j)) = U\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj} U(w_k) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{r} a_{ik} z_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right) z_i; \end{aligned}$$

reconociendo a $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ como la ij–ésima entrada del producto $[U]_\gamma^\delta \cdot [T]_\beta^\gamma$, terminamos.

□

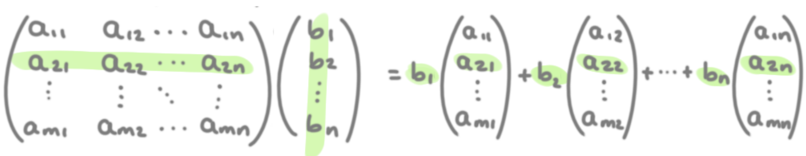
Lema 2.5.3. *Sean* $A = (a_{kj})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m \times n}(F)$, $b = (b_j)_{1 \le j \le n} \in M_{n \times 1}(F)$. *Si por* $A_{\cdot,j}$ *denotamos a la* j*–ésima columna de* A*, entonces*

$$Ab = b_1 A_{\cdot,1} + \dots + b_n A_{\cdot,n}, \tag{2.6}$$

es decir, Ab *es una combinación lineal de las columnas de* A*, donde los escalares de la combinación lineal son las entradas de* b*.*

Nótese que la ecuación (2.6) *tiene sentido, pues tanto* Ab *como los vectores columna de* A *tienen dimensión* $m \times 1$*.*

Demostración. En efecto, la k–ésima entrada tanto de Ab como de $\sum_{j=1}^{n} A_{\cdot,j} b_j$ es $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_j$ (k se mantiene fijo y se itera el índice de columnas j de A).



□

Teorema 2.5.4. *Sean* V *y* W *dos* F*–espacios vectoriales finito dimensionales. Si* $\beta \subseteq V$ *y* $\gamma \subseteq W$ *son bases de estos espacios y* $T : V \longrightarrow W$ *es una transformación lineal, entonces,*

$$\forall x \in V: \quad [T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta.$$

Demostración. En efecto, si $\beta = \{v_j : 1 \leq j \leq n\}$ y

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \textit{i.e. si } x = \sum_{j=1}^{n} x_i v_i,$$

usando el Lema 2.5.3, se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned}
[T]_\beta^\gamma &= x_1[T(v_1)]_\gamma + x_2[T(v_2)]_\gamma + \cdots + x_n[T(v_n)]_\gamma \\
&= [x_1T(v_1) + \cdots + x_nT(v_n)]_\gamma \\
&= [T(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n)] = [T(x)]_\gamma.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5.5. *Si $\beta, \beta' \subseteq V$ son bases de V, entonces*

- $[Id]_\beta^{\beta'} = I_n$ *si y sólo si* $\beta = \beta'$ *Mejor poner esto antes.*
- $([Id]_\beta^{\beta'})^{-1} = [Id]_{\beta'}^{\beta}$.

2.6 Transformaciones lineales de la forma L_A

Sea $A \in M_{m\times n}(F)$ una matriz de m filas y n columnas con coeficientes en F. Definimos a partir de ella una transformación lineal como sigue:

$$\begin{aligned} L_A : F^n &\longrightarrow F^m \\ L_A(x) &= Ax, \end{aligned} \tag{2.7}$$

o sea, L_A es la función "multiplicar a A por la izquierda de vectores de F^n".

Usando esta nueva notación, podemos establecer el teorema 2.5.4 en términos del siguiente diagrama de transformaciones lineales:

Este diagrama representa lo explicado en el Teorema 2.5.4.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_\gamma}"] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]_\beta^\gamma}"'] & F^m
\end{tikzcd}$$

Es decir,

$$[\cdot]_\gamma \circ T = L_{[T]_\beta^\gamma} \circ [\cdot]_\beta.$$

Nótese que partimos de espacios vectoriales V y W *arbitrarios* (siendo la única condición impuesta el que ambos sean finito dimensionales), y que gracias a los isomorfismos $[\cdot]_\beta$ podemos usar transformaciones del tipo (2.7) en lugar de transformaciones $T : V \longrightarrow W$.

Algunas propiedades fáciles de probar sobre transformaciones de la forma (2.7) se enuncian y se dejan como ejercicio.

Proposición 2.6.1. *Si L_A es como se definió en* (2.7)*, entonces*

- *L_A es lineal*
- *Si β y γ son las bases canónicas de F^n y F^m respectivamente, entonces $[L_A]_\beta^\gamma = A$.*
- *$L_A = L_B$ si y sólo si $A = B$.*
- *$L_{A+B} = L_A + L_B$ y $L_{\lambda A} = \lambda L_A$ para toda $\lambda \in F$.*
- *Si $T : F^n \longrightarrow F^m$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz C de $m \times n$ tal que $T = L_C$*
- *Si E es una matriz de $n \times r$, entonces $L_{AE} = L_A \circ L_E$.*

Veremos a continuación que la invertibilidad de una transformación lineal T (i.e. el que sea o no isomorfismo) está relacionada a la de cualquiera de sus representaciones matriciales $[T]_\beta^\gamma$.

Recuerda que una matriz A es invertible si y sólo si A es cuadrada y existe B otra matriz tal que $AB = I_n = BA$.

Teorema 2.6.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales V y W. Si $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ son bases cualesquiera de estos, entonces T es un isomorfismo si y sólo si la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es invertible.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que T es un isomorfismo, es decir, que es invertible. Entonces, según la proposición 1.4.2, $dim(V) = dim(W)$. Sean $\beta = \{v_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ y $\gamma\{w_j |\ 1 \leq j \leq n\}$ bases de V y W, y sea $T^{-1} : W \longrightarrow V$ la inversa de T - que, recuerde, también es una transformación lineal. Entonces, según la proposición 2.5.2,

$$I_n = [I_V]_\beta^\beta = [T^{-1} \circ T]_\beta^\beta = [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma$$

y, análogamente,

$$I_n = [T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta.$$

Así, $[T]_\beta^\gamma$ es invertible y, de hecho,

La ecuación (2.8) es importante en sí misma.

$$([T]_\beta^\gamma)^{-1} = [T^{-1}]_\gamma^\beta. \tag{2.8}$$

$\Leftarrow$) Sea $B \in M_{n \times n}(F)$ tal que

$$[T]_\beta^\gamma B = I_n = B[T]_\beta^\gamma.$$

Entonces, si $U : W \longrightarrow V$ es la única transformación lineal tal que $[U]_\gamma^\beta = B$,

$$[T \circ U]_\gamma^\gamma = [T]_\beta^\gamma [U]_\gamma^\beta = I_n.$$

Esto implica que $T \circ U$ es la identidad en W. De forma análoga se prueba que $U \circ T$ es la identidad en V. Así, T es invertible, luego, un isomorfismo.

□

Proposición 2.6.3. *Fijadas $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ bases de los $F-$espacios vectoriales finito dimensionales V y W, la función*

$$\Phi_\beta^\gamma : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$$

$$\Phi_\beta^\gamma(T) = [T]_\beta^\gamma.$$

es un isomorfismo.

Demostración. Ya vimos en proposciones anteriores la linealidad de Φ_β^γ.

- Inyectividad: si $T : V \longrightarrow W$ es tal que $[T]_\beta^\gamma$ es la matriz cero, entonces T evaluada en cualquier vector de la base β es cero, luego, T debe ser la transformación lineal cero. Así, $Ker(\Phi_\beta^\gamma) = \{0\}$.
- Suprayectividad: se estableció en la proposición **??**.

□

Corolario 2.6.4. *Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, entonces el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de transformaciones lineales de V a W es finito dimensional, de hecho, $dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.*

2.7 Ejemplos

Sea

$$\mathcal{U}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_{2\times 2}$$

el subespacio de matrices triangulares superiores de 2×2. No es difícil convencerse de que este es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial de dimensión 3, de hecho,

$$\delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para $\mathcal{U}_2(\mathbb{R})$. Sean las transformaciones lineales $S : \mathcal{U}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{U}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow U_2(\mathbb{R})$ definidas como

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$U \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, b, c)$$

2.8 Cambio de sistema coordenado

> The proper treatment of calculus for functions of several variables requires vector ideas; the budding statistician and the coming physicist need them; modern analysis is unthinkable without the notion of linear dependence and all that flows from it. Throughout these courses the infusion of a geometrical point of view is of paramount importance. A vector is geometrical; it is an element of a vector space, defined by suitable axioms - whether the scalars be real numbers or elements of a general field. A vector is not an n-tuple of numbers until a coordinate system

has been chosen. Any teacher and any text book which starts with the idea that vectors are n-tuples is committing a crime for which the proper punishment is ridicule. The n-tuple idea is not "easier", it is harder; it is not clearer, it is more misleading. (Mac Lane, 1954)

Ya ha quedado claro el uso de una base en un F−espacio vectorial V; estas actuan como un **sistema de coordenadas**, pues, como se estableción en el teorema **??** (resultado usado una y otra vez en el desarrollo de la teoría anterior), si β es base de V, dado $x \in V$ *cualquiera*, existen

- **únicos** $v_1, \ldots, v_n$ de elementos de β, y
- **únicos** escalares $a_1, \ldots, a_n$ escalares tales que

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_i x_i.$$

Recuerde que es por eso que, en el caso en el que V es finito dimensional (i.e. β es finita), usamos esto para construir el isomorfismo $[\cdot]_\beta$ entre V y F^n (justo asociándole a x su única colección de escalares $a_1, \ldots, a_n$). Note que esta representación **depende de la base** β, es decir, si $\gamma \subseteq V$ es una base de V distinta a β, entonces los isomorfismos $[\cdot]_\beta$ y $[\cdot]_\gamma$ son distintos entre sí. Un caso particular de esta situación es el realizar un cambio de coordenadas en el plano (el espacio vectorial en esta situación es, por supuesto, $\mathbb{R}^2$).

En este caso, "fijar el plano/sistema coordenado" y "fijar la base" significan lo mismo. Discusión del pizarrón. Fijar sistema de referencia, y usar nuevas bases en ese sitema.

Ejemplo 2.8.1. *Mostremos cómo en ocasiones es conveniente cambiar de sistema de coordenadas. En $\mathbb{R}^2$, considere a la base canónica $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. Todo punto del espacio (x,y) se expresa de forma única como combinación lineal de elementos de β;*

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Esta representación es muy sencilla - por eso resulta ventajoso en muchas ocasiones trabajar con la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Considere al lugar geométrico $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ de puntos del plano que consta de los puntos que satisfacen la siguiente relación:

$$w = (x,y) \in \mathcal{E} \quad \text{si y sólo si} \quad 2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1. \tag{2.9}$$

Puesto que en la ecuación para definir $\mathcal{E}$ están involucrados cuadrados de las variables, parece que este lugar geométrico es una cónica, sin embargo, el término mixto $-4xy$ dificulta su identificación. Cambiemos de sistema coordenado; considérese a la base

$$\beta' = \left\{ u = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right), v = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}.$$

Si $w = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *entonces*

$$\begin{aligned} w = (x,y) =& xe_1 + ye_2 \\ =& x'u + y'v \\ =& x'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + y'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \\ =& x'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}e_1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}e_2\right) + y'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}e_2\right) \\ =& \left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)e_1 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)e_2. \end{aligned}$$

De la igualdad de los coeficientes al representar vectores respecto a una base se deduce que

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y', \quad y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y'. \tag{2.10}$$

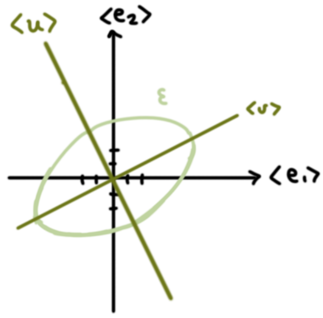
A esta situación se le conoce en geometría analítica como "eliminación del término mixto".

Si usamos ahora el sistema coordenado β', *debemos sustituir los cambios* (2.10) *en la condición de definición* (2.9). *Haciendo esto, llegamos a que*

$$w = x'u + y'v \in \mathcal{E} \quad \text{si y sólo si} \quad 6(x')^2 + (y')^2 = 1. \tag{2.11}$$

Ahora sí reconocemos al lugar geométrico como una elipse, pero ***no*** *respecto al sistema coordenado* β, *sino respecto a* β'.

Al dibujar el nuevo sistema coordenado en el plano (i.e. a las rectas $\langle\{u\}\rangle$ *y* $\langle\{v\}\rangle$, *que son subespacios uno dimensionales de* $\mathbb{R}^2$*), notamos que este se obtiene rotando el sistema original* β.



Observa que la relación (2.10) *(que nos permitió pasar de una base a otra) puede representarse en forma matricial como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

nota que

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad [Id]^\beta_{\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad [w]_{\beta'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Usando el que la transformación lineal identidad es el neutro de la composición y que multiplicación de matrices es la operación correspondiente a composición de funciones, se establece fácilmente cómo hacer cambios de base.

Teorema 2.8.2. *Sean* β, β' *dos bases de un* $F-$*espacio vectorial finito dimensional* V. *Sea* $Q = [Id_V]^\beta_{\beta'}$.

- *La matriz* Q *es invertible.*
- *Para toda* $v \in V$,

$$[v]_\beta = Q[v]_{\beta'}. \tag{2.12}$$

Demostración. Claro que Q es invertible, pues la transformación identidad Id_V es un isomorfismo (c.f. cita). Además, según el Teorema 2.5.4,

$$[v]_\beta = [Id_V(v)]_\beta = [Id]^\beta_{\beta'}[v]_{\beta'}.$$

□

La ecuación (2.12) nos explica cómo obtener las coordenadas de un vector v en términos de β cuando se tienen sus coordenadas en términos de β'.

Definición 2.8.3. *Si β y β' son dos bases de un $F-$espacio vectorial finito dimensional V, a la matriz $[Id]^{\beta}_{\beta'}$ se le conoce como* ***matriz de cambio de base*** *de β' a β.*

Poner ejemplo numérico.

Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales, y considere dos pares de bases

$$\beta \subseteq V, \gamma \subseteq W; \quad \beta' \subseteq V, \gamma' \subseteq W$$

de estos. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, según el Teorema 2.5.4, tenemos los siguientes dos cuadrados conmutativos;

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_\gamma}"] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]^\gamma_\beta}"'] & F^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\beta'}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_{\gamma'}}"] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]^{\gamma'}_{\beta'}}"'] & F^m
\end{tikzcd}$$

Ambos diagramas hacen referencia a T (su objetivo de hecho es decir cómo evaluar a T en vectores de V en términos de multiplicaciones de matrices). ¿Qué relación hay entre estos? En otras palabras, ¿Cómo conociendo la representación matricial $[T]^\gamma_\beta$ encontramos a $[T]^{\gamma'}_{\beta'}$?

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"] \arrow[dd, bend right, "{[\cdot]_{\beta'}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_\gamma}"'] \arrow[dd, bend left, "{[\cdot]_{\gamma'}}"] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]^\gamma_\beta}"'] \arrow[d, dotted, "L_Q"] & F^m \arrow[d, dotted, "L_P"'] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]^{\gamma'}_{\beta'}}"'] & F^m
\end{tikzcd}$$

Podemos usar matrices de cambio de base para pasar fácilmente de una representación matricial a la otra. En efecto, si

$$P = [Id_W]^{\gamma'}_{\gamma}, \quad Q = [Id_V]^{\beta'}_{\beta},$$

entonces, para toda $v \in V$,

$$P[T]^\gamma_\beta[v]_\beta = ([Id_W]^{\gamma'}_\gamma[T]^\gamma_\beta)[v_\beta] = [Id_W \circ T]^{\gamma'}_\beta[v]_\beta = [T]^{\gamma'}_\beta[v]_\beta = [T(v)]_\gamma,$$

y también

$$[T]^{\gamma'}_{\beta'}Q[v]_\beta = ([T]^{\gamma'}_{\beta'}[Id_V]^{\beta'}_\beta)[v]_\beta = [T \circ Id_V]^{\gamma'}_\beta[v]_\beta = [T]^{\gamma'}_\beta[v]_\beta = [T(v)]_\gamma.$$

De esto se deduce que

$$P[T]^\gamma_\beta = [T]^{\gamma'}_{\beta'}Q. \tag{2.13}$$

Puesto que P es invertible, podemos despejar a $[T]^\gamma_\beta$ de (2.13). Hemos demostrado así el siguiente

En efecto, toma a $[v]_\beta$ como un vector de la base canónica de F^n para probar que las correspondientes columnas de las matrices en (2.13) en efecto coinciden entre sí.

Teorema 2.8.4. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre ellos. Si $\beta, \beta' \subseteq V$ y $\gamma, \gamma' \subseteq W$ son bases para estos espacios,*

- *$P = [Id_W]_{\gamma}^{\gamma'}$ es la matriz que transforma las coordenadas de γ en γ', y*
- *$Q = [Id_V]_{\beta}^{\beta'}$ es la matriz que transforma las coordenadas de β en β',*

entonces,

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = P^{-1}[T]_{\beta'}^{\gamma'}Q. \tag{2.14}$$

Observación 2.8.5. *Si V es un $F-$espacio vectorial finito dimensional y $\beta, \beta' \subseteq V$ son bases de V, entonces*

$$([Id_V]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [Id_V]_{\beta'}^{\beta}. \tag{2.15}$$

Ejemplo numérico con observaciones.

Vale la pena escribir el Teorema 2.8.4 para el caso particular en el que el espacio de dominio coincide con el de codominio.

Corolario 2.8.6. *Si V es un $F-$espacio vectorial finito dimensional y $\beta, \beta' \subseteq V$ son bases de V, entonces*

$$[T]_{\beta}^{\beta} = Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\beta'}Q, \tag{2.16}$$

donde $Q = [Id_V]_{\beta}^{\beta'}$.

2.8.1 Matrices similares

Sigue discusión y salta a p. 239 Friedb.

Definición 2.8.7. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(F)$. Decimos que las matrices A y B son **similares** si existe $Q \in M_{n\times n}(F)$ invertible tal que*

$$A = Q^{-1}BQ.$$

En términos de esta definición, el Corolario 2.8.6 se resume como sigue:

Las representaciones matriciales de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ respecto a una misma base son todas similares entre sí.

No es difícil demostrar que la relación "ser similar con" es de equivalencia: Ejercicio: Demuestra que la relación en el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ dada por

$$\forall A, B \in M_{n\times n}(F): \quad A \sim B \quad \Leftrightarrow \exists Q \in M_{n\times n}(F) \text{ invertible tal que } A = Q^{-1}BQ \tag{2.17}$$

es de equivalencia, es decir, que

- es reflexiva: $\forall A \in M_{n\times n}(F) : A \sim A$,
- simétrica: $\forall A, B \in M_{n\times n}(F) : A \sim B \Rightarrow B \sim A$, y
- transitiva: $\forall A, B, C \in M_{n\times n}(F) : A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Como toda relación de equivalencia, esta induce una partición en el conjunto $M_{n\times n}(F)$.

Sea V un $F-$espacio vectorial con $dim(V) = n$ (por ejemplo, $V = F^n$). Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal y $\beta \subseteq V$ es una base para V, consideremos

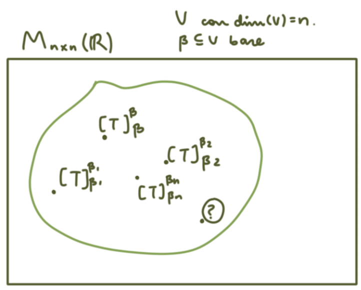


Figure 2.2

a la matriz $A = [T]_\beta^\beta$. Si queremos formar a la clase de equivalencia de A bajo la relación (2.17), según el corolario 2.8.6, debemos considerar a matrices de la forma

$$[T]_{\beta'}^{\beta'}, \quad con\ \beta' \subseteq V\ base\ de\ V. \tag{2.18}$$

La pregunta ahora es, ¿la clase de equivalencia de A consta sólo de las matrices de la forma (2.18)? Damos una respuesta afirmativa en el siguiente resultado.

Teorema 2.8.8. *Sea V un $F-$espacio vectorial $n-$dimensional, $T : V \longrightarrow V$ lineal. Si $\beta \subseteq V$ es base y $A = [T]_\beta^\beta$, entonces,*

$$\forall B \in M_{n\times n}(F): \quad A \sim B \ \ si\ y\ sólo\ si\ existe\ \beta' \subseteq V\ base\ tal\ que\ B = [T]_{\beta'}^{\beta'}.$$

Es decir, la clase de equivalencia de $A = [T]_\beta^\beta$ bajo la relación de equivalencia (2.17) *es*

$$\{[T]_{\beta'}^{\beta'} |\ \ \beta' \subseteq V\ \ es\ base\}.$$

Demostración. en papel.

□

2.9 Cálculo del rango de transformaciones usando representaciones matriciales

Definición 2.9.1. *Sea $A \in M_{m\times n}(F)$ una matriz. Definimos su **rango** como la máxima cantidad de columnas linealmente independientes que tenga.*

Recuerda que el rango de una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ se definió como la dimensión de su imagen.

Proposición 2.9.2. *El rango columna es igual al rango fila. Reformular y demostrar.*

Proposición 2.9.3. *Si $A \in M_{m\times n}(F)$, entonces su rango coincide con el rango de su transformación lineal asociada, o sea,*

$$Rango(A) = dim(L_A(F^n)). \tag{2.19}$$

Demostración. Si e_i es el $i-$ésimo vector de la base canónica de F^n, note que $L_A(e_i) = Ae_i$ es la $i-$ésima columna de A. Además, como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de F^n, $\{L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)\}$ genera a $L_A(F^n)$ (c.f. Corolario 1.2.4). Es decir, los vectores columna generan al espacio imagen de L_A; extraer de este generador una base es lo mismo que encontrar la mayor cantidad de columnas linealmente independientes de A.

□

Proposición 2.9.4. *Si V es finito dimensional y $U : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces, para todo $X \leq V$, $dim(X) = dim(U(X))$.*

Demostración. Claro que la restricción $U_{|X} : X \longrightarrow U(X)$ es, por herencia de U, lineal e inyectiva, y por como hemos definido el codominio, también es suprayectiva, luego, es un isomorfismo, por lo tanto, según la proposición 1.4.2, $dim(X) = dim(U(X))$. □

Proposición 2.9.5. *Sea V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineal. Si $U : Z \longrightarrow V$ es un isomorfismo, entonces*

$$dim(Ker(T \circ U)) = dim(Ker(T)), \quad dim(T \circ U(Z)) = dim(T(V)),$$

es decir, componer por la derecha con un isomorfismo no altera la dimensión del Kernel o de la imagen de una transformación lineal.

Demostración. Como U es un isomorfismo, $dim(Z) = dim(V)$. Obsérvese que $x \in Ker(T \circ U)$ si y sólo si $T(U(x)) = 0$, o sea, si y sólo si $U(x) \in Ker(T)$, entonces,

Nota que, como U es invertible, aquí $U^{-1}(C)$ es la imagen bajo C de la transformación inversa U^{-1}.

$$Ker(T \circ U) = U^{-1}(Ker(T)).$$

Además, U^{-1} es un isomorfismo, luego, según la Proposición 2.9.4,

$$dim(Ker(T)) = dim(U^{-1}(Ker(T))) = dim(Ker(T \circ U)).$$

Usando el teorema de la dimensión, también tenemos que

$$dim((T \circ U)(Z)) = dim(Z) - dim(Ker(T \circ U)) = dim(V) - dim(Ker(T)) = dim(T(V)).$$

□

Ejercicio: Ahora demuestra que componer por la izquierda con un isomorfismo no altera la dimensión del kernel o la imagen de la transformación lineal.

Proposición 2.9.6. *Si $T : V \longrightarrow W$ lineal, $\beta \subseteq V$, $\gamma \subseteq W$ bases, entonces,*

$$Rango(T) = Rango([T]_\beta^\gamma). \tag{2.20}$$

Demostración. Si $A = [T]_\beta^\gamma$, según la Proposición 2.9.3, basta ver que $Rango(T) = Rango(L_A)$. Puesto que $L_A \circ [\cdot]_\beta = [\cdot]_\gamma \circ T$, se tiene que

$$T = [\cdot]_\gamma^{-1} \circ L_A \circ [\cdot]_\beta.$$

Puesto que $[\cdot]_\gamma^{-1}$ y $[\cdot]_\beta$ son ambos isomorfismos, según la proposición anterior, terminamos. También puedes checar esto directamente. □

Así, el calcular el rango de una transformación lineal es lo mismo que calcular el de *cualquiera* de sus representaciones matriciales. Por supuesto que algunas representaciones serán más útiles que otras para este propósito. Nota que el cálculo del rango de una matriz se simplifica mucho si se crean ceros en sus entradas usando operaciones elementales. Tales ceros pueden formarse al efectuar operaciones elementales. Aquí recordamos lo que son operaciones elementales en filas y columnas, y las identificamos como hacer multiplicaciones (dependiendo de fila o col., por derecha o por izquierda) con matrices elementales. Mostremos que estas no afectan el rango de una matriz (ya, pues es composición con iso).

2.10 Ejercicios IV

Cálculo del isomorfismo $[\cdot]_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Si V es un F–espacio vectorial n–dimensional y $\beta = \{v_j : \ 1 \leq j \leq n\}$ es una base de V, entonces, se definió el isomorfismo

$$[\cdot]_\beta : V \longrightarrow F^n$$

como

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \textit{\textbf{para toda }} x = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \in V$$

Es decir, calcular $[\cdot]_\beta$ es lo mismo que expresar a un vector arbitrario x de V como combinación lineal de elementos de β

Si $T : V \longrightarrow V$ es lineal y en V se usa sólo una base β, a $[T]_\beta^\beta$ a veces se le denota como $[T]_\beta$.

Cálculo de representación matricial $[T]_\beta^\gamma : V \longrightarrow W$

Si V y W son F–espacios vectoriales finito dimensionales y

$$\beta = \{v_j : \ 1 \leq j \leq n\} \subseteq V,$$

$$\gamma = \{w_k | \ 1 \leq k \leq m\} \subseteq W$$

son bases de estos, entonces, $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz de m filas con n columnas, donde su j–ésima columna es $[T(v_j)]_\gamma$.
Entonces, $[T]_\beta^\gamma$ tiene

- **n columnas, pues hay una por cada elemento de la base β, y**
- **m filas, ya que cada $T(v_j)$ necesita m escalares para representarse como combinación lineal de elementos de γ.**

Sean

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad \beta' = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}, \tag{2.21}$$

$$\gamma = \{(0,3,5),(1,2,0),(3,4,5)\}, \quad \gamma' = \{(3,4,5),(1,2,0),(0,3,5)\}, \tag{2.22}$$

Nota que β y β' son iguales como conjuntos, pero no como bases ordenadas.

$$\delta = \{(1,2,0),(0,1,1),(1,0,3)\}. \tag{2.23}$$

1. Demuestre que los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ dados en (2.21), (2.22) y (2.23) son bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^3$, exprésela como combinación lineal de elementos de las bases del inciso anterior.
3. Dé las fórmulas de los isomorfismos $[\cdot]_\beta$, $[\cdot]_\gamma$, $[\cdot]_\delta$.

4. Sean $T, U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las funciones

$$T(x,y,z) = (2x, 5y - z, x + y + z), \quad U(x,y,z) = (2x + 3y, -x, -z + y).$$

Calcule las matrices $[T]_\beta^\gamma$, $[T]_\gamma^\beta$, $[T]_\gamma^\delta$, $[T]_\delta^\gamma$, $[U]_\beta^\delta$ y $[U]_\delta^\beta$.

5. Compare a $[T]_\beta^\gamma$ con $[T]_{\beta'}^\gamma$ y a $[U]_\beta^\gamma$ con $[T]_\beta^{\gamma'}$. ¿Qué relación tienen una con otra? ¿Cómo el cambio de orden en una base afecta a las matrices?

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Explique por qué existe$^{(*)}$ una única transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[L]_\beta^\gamma = A$. Encuéntrela.

(∗) Pista: usa el teorema fundamental de las bases 1.5.1

De igual manera, encuentre a la única transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que $[S]_\gamma^\delta = A$. ¿Son S y L iguales?

Sea

$$\phi = \{(1,2),(1,1)\}. \tag{2.24}$$

- Demuestra que ϕ es base de $\mathbb{R}^2$.
- Da explícitamente al isomorfismo $[\cdot]_\phi$.
- Sea $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$K(x,y,z) = (2x + z, -y - z).$$

- Da explícitamente la fórmula de las composiciones $K \circ U$ y $K \circ T$.
- Usa las fórmulas de estas composiciones para calcular las matrices $[K \circ U]_\delta^\phi$ y $[K \circ T]_\beta^\phi$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "K\circ T"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "K"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

- Calcula las matrices del inciso anterior usando representaciones matriciales apropiadas de T, U y K y multiplicándolas entre sí.

Además, revisa los ejercicios del capítulo 2.3 del Friedberg, pero en particular resuelve 3 y 4 de la página 93.