$1\overline{{}_{2[expre]}}$

Contents

Chapter 1

Información general del curso

Intentaremos acordar al menos una hora a la semana en la que podamos tener asesorías grupales, para poder discutir con los alumnos que así lo deseen las dudas que tengan respecto al curso.

1.1 Forma de evaluación

- **Examen: 70%**. Se realizarán dos exámenes parciales a lo largo del semestre. El promedio de la calificación de estos será el 70% de la calificación final del alumno (i.e. un promedio perfecto de 10 le da 7 puntos de 10 en su calificación final). Por posibles cuestiones de salud no se prohíben las salidas breves al sanitario durante el examen, pero se exhorta a los alumnos a evitar este tipo de situaciones y permanecer en el salón mientras responden su examen. No se permitirá el uso de celulares durante el examen.

- **Tareas: 20%**. Antes de cada parcial, se dará un ejercicio que el alumno deberá redactar pulcramente para entregar en una fecha acordada. Antes del examen se les regresará su ejercicio calificado. El alumno obtendrá 2 puntos de su calificación si entrega ambos ejercicios y 1 si entrega uno solo. Se les pide encarecidamente no copiar o usar modelos de lenguaje para hacer sus tareas, ya que el objetivo principal de esta actividad es, de mi parte, dar la mayor retroalimentación posible para ayudarlos a identificar posibles errores en su razonamiento y redacción, en resumen, hacerles comentarios que puedan tomar en cuenta para cuando presenten su examen.

- **Participación: 10%**. El alumno deberá participar voluntariamente al menos una vez durante el semestre para conseguir 1 punto correspondiente al rubro de participación. Se tomarán en cuenta las participaciones realizadas fuera del horario de clase durante las tutorías.

Las calificaciones reprobatorias (i.e. menores a 6) no se redondean. Si la calificación es reprobatoria, el alumno tiene derecho a presentar un examen extraordinario al final del semestre. La calificación obtenida en este será la final y definitiva del curso. Si el alumno había aprobado el curso, pero quiere presentar el examen extraordinario para subir su calificación, podrá presentarse para resolverlo, sin embargo, si lo entrega para su revisión, acepta que renuncia a su calificación aprobatoria inicial, y que su nota final será la que obtenga en el examen extraordinario (aún cuando esta sea reprobatoria).

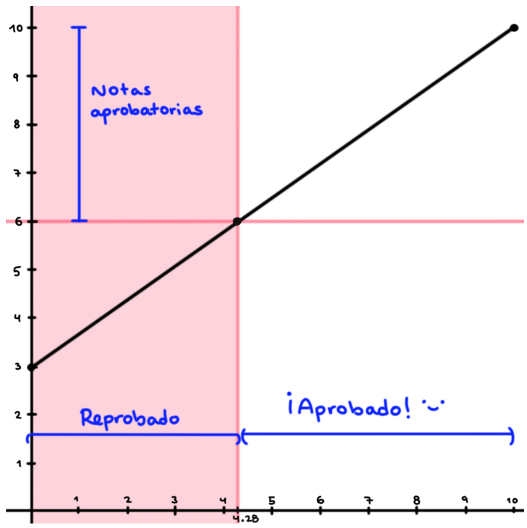


Figure 1.1: En el eje x se marca el promedio de ambos exámenes parciales, y en el eje y la calificación final del curso: la recta muestra la calificación final que obtendrías suponiendo que participaste y entregaste tus dos tareas.

1.2 Bibliografía

Los textos principales del curso serán

- *Friedberg S. H., Insel A. J., Spence L. E., Linear Algebra, Fourth Edition, Prentice Hall, 2003*, y
- *Hugo Alberto Rincón Mejía, Álgebra Lineal, Editorial: Las prensas de ciencias, 2011*,

pero para algunos temas particulares me apoyaré de los libros

- *William C. Brown, A second course in linear algebra, John Wiley & Sons.*,
- *Jonathan S. Golan, Foundations of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers*, y
- *Roger Godement, Cours d'algèbre, Hermann éditeurs.*

Chapter 2

Espacios vectoriales

Mejor usa notación de span para subespacios. No quiero que se confunda eso con producto punto.

¿Qué entiendes por un *vector*?

En clases previas de física, usabas estos objetos para representar *fuerzas* pues, para modelarlas, necesitabas representar tanto su *magnitud* como su *dirección*.

Algunos aspectos implícitos eran que

- los vectores eran elementos de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, y que
- podías "sumar vectores" usando la ley del paralelogramo,
- además, podías "multiplicar vectores por números reales" para cambiar su magnitud y, dependiendo del signo del número real, mantener la dirección o invertirla.

Estas manipulaciones geométricas además satisfacen ciertas propiedades; por ejemplo, termina!

2.1 Algunas estructuras algebráicas

Ya comentamos antes que sabíamos sumar vectores en el plano o en el espacio; empecemos pues por abstraer el concepto de operación. Estamos acostumbrados a sumar números reales: dados $a, b \in \mathbb{R}$, conocemos una *regla* para asignarle a la pareja (a, b) un número real llamado su suma, que solemos denotar por $a + b$. También hablamos de la resta de los números a, b. Observe que estas operaciones tienen distintas propiedades, por ejemplo, la suma es asociativa y conmutativa, pero la resta no.

Definición 2.1.1. *Dado $X \neq \varnothing$ un conjunto no vacío, una **operación binaria** en X es una función con dominio $X \times X$ y codominio X.*

O sea, una operación binaria $* : X \times X \longrightarrow X$ es una regla que a cada para ordenado (x_1, x_2) le asigna un único elemento x_3 de X. Por ser este elemento único, puede dársele un nombre; es usual denotar a x_3 por $x_1 * x_2$.

Es decir, con $x_1 * x_2$ estamos abreviando a $*(x_1, x_2)$.

Definición 2.1.2. *Dado $X \neq \varnothing$ y $* : X \times X \longrightarrow X$ una operación binaria en X, la pareja $(X, *)$ es un **grupo** si*

GR-1) (asociatividad) Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$,

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3). \tag{2.1}$$

La asociatividad de la operación $*$ significa en la práctica que los paréntesis en (2.1) pueden omitirse.

GR-2) (existencia de elemento neutro) Existe $e \in X$ tal que

$$\forall x \in X: \quad e * x = x = x * e. \tag{2.2}$$

GR-3) (existencia de inversos) Se cumple que

$$\forall x \in X \ \exists x^{-1} \in X: \quad x * x^{-1} = e = x^{-1} * x. \tag{2.3}$$

Es fácil demostrar la unicidad del elemento neutro y de los inversos - por eso es legítimo darles un nombre particular a estos en la definición de grupo. Si la operación binaria $*$ se entiende por el contexto, al grupo $(X, *)$ se le denota por X.

Definición 2.1.3. *A todo grupo $(X, *)$ que satisfaga que*

GR-4) (conmutatividad)

$$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \tag{2.4}$$

*se le llamará **abeliano**.*

Ejemplo 2.1.4. *Considera al conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.*

- *Si $+$ denota a la suma usual de números enteros, comprueba que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.*
- *Muestra que, si $\cdot$ denota al producto usual de enteros, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo.*
- *Si ahora $+$ y $\cdot$ denotan, respectivamente, la suma y producto de números racionales, demuestra que tanto $(\mathbb{Q}, +)$ como $(\mathbb{Q}, \cdot)$ son grupos abelianos.*

Este último punto muestra que frases del tipo "el conjunto X es un grupo" son ambiguas. Puede ser posible definir dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ en X de tal forma que tanto $(X, +)$ como $(X, \cdot)$ sean grupos. Los conjuntos subyacentes de estos grupos son los mismos, pero estos no son el mismo grupo.

Definición 2.1.5. *Dado $X \neq \varnothing$ un conjunto no vacío y dos operaciones binarias $+ : X \times X \longrightarrow X$ y $\cdot : X \times X \longrightarrow X$, $(X, +, 0, \cdot, 1)$ con $0 \neq 1$ es un **campo** si*

- *$(X, +)$ es un grupo abeliano con neutro 0*
- *$(X - \{0\}, \cdot)$ es un grupo abeliano con neutro 1*
- *(distributividad) Para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$:*

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3. \tag{2.5}$$

La distributividad es la propiedad que relaciona las estructuras $(X, +)$ y $(X, \cdot)$ que conforman un campo. Por costumbre, al neutro de $(X, +)$ se le suele llamar el **neutro aditivo** del campo, y al neutro de $(X - \{0\}, \cdot)$ se le llama el **neutro multiplicativo**.

Por tener la ley distributiva, si $x \in X$ cualquiera,

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0,$$

luego,

$$x \cdot 0 = 0.$$

Así, no existe $x \in X$ tal que $x \cdot 0 = 1$; por eso se debe quitar el cero para hablar del grupo multiplicativo $(X - \{0\}, \cdot)$.

2.2 Definición de espacio vectorial

a poner ejemplo shift left para caso infinito dimensional, una inyectiva que no es biyectiva.1

2.3 Espacios vectoriales de funciones

Sean $X \neq \varnothing$ un conjunto no vacío cualquiera y $(F, +, 0, \cdot, 1)$ un campo. Consideremos al conjunto

$$F^X := \{f : X \longrightarrow F : \quad f \text{ es función}\}$$

de funciones de X en F; aprovechando la estructura de campo en F, vamos a dotar al conjunto F^X de estructura de F–espacio vectorial.

- **Definición de suma de funciones:** Definimos a la operación binaria suma

$$\hat{+} : F^X \times F^X \longrightarrow F^X \tag{2.6}$$

  como sigue: dadas $f, g \in F^X$ cualesquiera, la función $f \hat{+} g \in F^X$ se define puntualmente como

$$(f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X. \tag{2.7}$$

  Nota que, en la ecuación anterior, el signo $\hat{+}$ que aparece a la izquierda es la operación binaria que estamos definiendo en (2.6), mientras que el signo $+$ de la derecha es la suma del campo F: *a partir de la operación suma en F estamos diciendo cómo sumar elementos de F^X.*

- **Definición de producto por escalares:** Definimos a un producto por escalares

$$\star : F \times F^X \longrightarrow F^X \tag{2.8}$$

  como sigue: si $a \in F$ y $f \in F^X$, la función $a \star f \in F^X$ se define puntualmente como

$$(a \star f)(x) = af(x), \quad x \in X. \tag{2.9}$$

  Nota cómo estamos usando la operación producto del campo para definir el producto por escalares.

- **Neutro aditivo:** Proponemos como neutro para la operación suma de funciones (c.f. (2.6)) a la función $\hat{0} : X \longrightarrow F$ definida como sigue:

$$\hat{0}(x) = 0, \quad x \in X, \tag{2.10}$$

  es decir, a la función que mapea todo punto de X al neutro aditivo del campo F.

Demostremos que $(F^X, \hat{+}, \star)$ es un F–espacio vectorial.

En lo que sigue, vamos a demostrar igualdades que tienen lugar en F^X, es decir, igualdades entre funciones. Recuerda que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, codominio y misma regla de correspondencia: puesto que todos los elementos de F^X tienen dominio X y codominio F, para demostrar que $f, g \in F^X$ son iguales basta ver que

$$f(x) = g(x) \quad \textit{para toda } x \in X.$$

1. **Asociatividad de $\hat{+}$:** sean $f, g, h \in F^X$. Mostremos que
$$(f \hat{+} g) \hat{+} h = f \hat{+} (g \hat{+} h).$$
Sea $x \in X$. Usando la definición de suma de funciones dada en (2.7), tenemos que
$$\begin{aligned}((f \hat{+} g) \hat{+} h)(x) =& (f \hat{+} g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)\\ =& f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g \hat{+} h)(x)\\ =& (f \hat{+} (g \hat{+} h))(x).\end{aligned}$$
La tercera igualdad se da porque la suma en F es asociativa.

2. **Elemento neutro para la suma:** Si $f \in F^X$ cualquiera, veamos que
$$\hat{0} \hat{+} f = f = f \hat{+} \hat{0}.$$
Probemos la primera igualdad; la otra se tiene de forma análoga. Usaremos la definición (2.10) de la función cero $\hat{0}$ y la definición de suma de funciones dada en (2.7). Para toda $x \in X$,
$$(\hat{0} \hat{+} f)(x) = \hat{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

3. **Existencia de inversos aditivos:** Ejercicio: Dada una función $f \in F^X$, propón una función $g \in F^X$ que sea el neutro aditivo de f, es decir, una función tal que
$$f \hat{+} g = \hat{0} = g \hat{+} f.$$
Sugerencia: Defínela puntualmente, usa la existencia de inversos aditivos en el campo F. Naturalmente, a tal función g la denotaremos por $-f$.

4. **Conmutatividad de $\hat{+}$:** Ejercicio: Demuestra que la suma de funciones es conmutativa, es decir, que dadas cualesquiera $f, g \in F^X$,
$$f \hat{+} g = g \hat{+} f.$$

5. **(EV-5)** Sea $f \in F^X$ cualquiera; es fácil ver que ocurre
$$1 \star f = f$$
pues, según la definición del producto por escalares dada en (2.9), para toda $x \in X$ se tiene que
$$(1 \star f)(x) = 1f(x) = f(x).$$

6. **(EV-6)** Si $a, b \in F$ y $f \in F^X$, demostremos que
$$(ab) \star f = a \star (b \star f).$$
Sea $x \in X$.
$$((ab) \star f)(x) = abf(x) = a(bf(x)) = a((b \star f)(x)) = (a \star (b \star (f)))(x).$$

7. **(EV-7)** Ejercicio: Demuestra que, para todo $a \in F$ y cualesquiera $f, g \in F^X$,
$$a \star (f \hat{+} g) = a \star f \hat{+} a \star g.$$

8. **(EV-8)** Ejercicio: Demuestra que, para toda $f \in F^X$ y cualesquiera $a, b \in F$,
$$(a + b) \star f = a \star f \hat{+} b \star f.$$

Ejemplo 2.3.1. *Si $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f$ es continua$\}$, es claro que $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

2.3.1 Espacio de funciones de soporte finito $F^{(X)}$

Definición 2.3.2. *Sean $X \neq \varnothing$ un conjunto, F un campo. Dada $f : X \longrightarrow F$ función (i.e. un elemento de F^X), definimos su* ***soporte*** *como el conjunto de los puntos del dominio para los que f no se anula:*

$$sop(f) := \{x \in X|\ \ f(x) \neq 0\}.$$

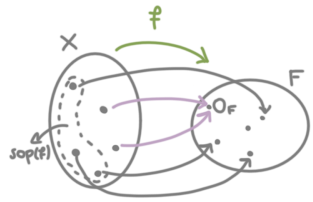


Figure 2.1: Representación gráfica del soporte de una función.

Ejemplo 2.3.3. *Tomemos a $X = \mathbb{N}$. Acostumbramos llamar a los elementos de $F^{\mathbb{N}}$* ***sucesiones en*** *F. De hecho, dada una función $f \in F^{\mathbb{N}}$, es usual identificarla con el conjunto de sus imágenes:*

$$f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad donde\ f_n := f(n).$$

Ejercicio: Demuestre que, si $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tiene soporte finito, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. *¿Se vale la otra implicación?* ⋄

Definición 2.3.4. *Denotaremos por $F^{(X)}$ al conjunto de las funciones de X en F que tienen soporte finito, es decir,*

$$F^{(X)} := \{f \in F^X|\ \ |sop(f) < \infty|\}.$$

Para lo que sigue, necesitamos que el lector recuerde (o al menos esté de acuerdo en aceptar como ciertos) los siguientes hechos:

- La cardinalidad del conjunto vacío es 0. El conjunto vacío es el único conjunto de cardinalidad 0.
- Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es también finito.
- Si A está contenido en B y B es finito, entonces A también lo es.

Proposición 2.3.5. *Si $X \neq \varnothing$ y F es un campo, entonces $F^{(X)}$ es un subespacio de F^X.*

Demostración. Usemos los criterios dados en la proposición ($*-sub$) para mostrar que $F^{(X)} \leq F^X$.

1. Si $\hat{0} : X \longrightarrow F$ es la función cero,

$$sop(\hat{0}) = \{x \in X|\ \ \hat{0}(x) \neq 0\} = \varnothing,$$

luego, $\hat{0}$ tiene soporte finito, o sea, $\hat{0} \in F^{(X)}$.

2. Sean $f, g \in F^{(X)}$; veamos que $f + g \in F^{(X)}$. Es decir, usando que f y g tienen soporte finito, mostremos que $f + g$ también tiene soporte finito. Si $sop(f + g) = \varnothing$, acabamos. Supongamos ahora que $sop(f + g) \neq \varnothing$. Note que, si $x \in sop(f + g)$, entonces

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) \neq 0,$$

luego, no ocurre $f(x) = 0 = g(x)$, es decir,

$$x \notin (sop(f))^c \cap (sop(g))^c,$$

o sea,

$$x \in sop(f) \cup sop(g).$$

Con esto demostramos la contención

$$sop(f+g) \subseteq sop(f) \cup sop(g).$$

Como $sop(f)$ y $sop(g)$ son, por hipótesis, ambos finitos, su unión también lo es, luego $sop(f+g)$, por ser subconjunto de un conjunto finito, es finito.

3. Sean $f \in F^{(x)}$ y $a \in F$; probemos que $af \in F^{(X)}$. Si $a = 0$, $af = \hat{0} \in F^{(X)}$; supongamos ahora $a \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in sop(af) &\Leftrightarrow af(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \ y \ f(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in sop(f). \end{aligned}$$

Así, $sop(af) = sop(f)$, luego, af tiene, al igual que f, soporte finito.

Recuerda que, en un campo, el producto de dos elementos es cero si y sólo si al menos uno de los dos es cero.

□

2.4 El subespacio generado por un subconjunto y suma de subespacios

Dado V un $F-$espacio vectorial, sea $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia no vacía de subespacios de V. A partir de esta familia, ¿cómo podemos construir otro subespacio de V? Consideremos a la unión e intersección de la familia, o sea, a los conjuntos

$$\bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha := \{x \in V|\ \ x \in W_\alpha \ \textit{para toda}\ \alpha \in I\} \subseteq V, \tag{2.11}$$

y

$$\bigcup_{\alpha\in I} W_\alpha := \{x \in V|\ \ x \in W_\alpha \ \textit{para algúna}\ \alpha \in I\} \subseteq V. \tag{2.12}$$

¿Son estos subespacios de V? Tenemos una respuesta afirmativa y otra negativa.

Proposición 2.4.1. *La intersección* (2.11) *de la familia de subespacios* $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *de* V *es un subespacio de* V*.*

Demostración.

i) Puesto que el cero es elemento de *todo* subespacio de V, claro que $0 \in W_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, luego, $0 \in \bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$

ii, iii) Sean $x, y \in \bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$, $a \in F$; claro que $x+y, ax \in \bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$ pues, dado $\alpha \in I$ un índice cualquiera, $x, y \in W_\alpha$, luego, como W_α es subespacio de V, $x+y, ax \in W_\alpha$.

□

La demostración anterior fue muy sencilla pues, para que un vector sea elemento de la intersección $\bigcap_{\alpha\in I} W_\alpha$, debe estar en *todos* los elementos de la familia a la vez, y todos los W_α cumplen los tres puntos de la proposición (*-sub). La condición que debe cumplir un vector para estár en la unión de la familia es mucho más laxa; es necesario y suficiente que sea elemento de un solo miembro de la familia $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Dados $x, y \in \bigcup_{\alpha\in I} W_\alpha$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tales que $x \in W_{\alpha_1}$ y $y \in W_{\alpha_2}$. Nota que *no podemos decir que x y y son elementos de un mismo subespacio*, luego, esta información no parece implicar que la suma sea elemento de la unión.

Ejemplo 2.4.2. *(Que muestra que la unión de subespacios puede no ser un subespacio). Sea $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto cualquiera. Considere al $\mathbb{R}-$espacio vectorial*

$$\mathbb{R}^{(a,b)} = \{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} | \ f \ \textit{es función.}\}$$

Sean

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} | \ f \ \textit{es acotada}\}, \quad \mathcal{C}_{a,b} = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} | \ f \ \textit{es continua}\}.$$

Como sabes por tus cursos de cálculo, estos son subespacios de $\mathbb{R}^{(a,b)}$. En la imagen se muestran la gráfica de una función continua f y una acotada g en (a,b) para las que la suma no es ni continua ni acotada (i.e. tales que $f,g \in \mathcal{B}_{a,b} \cup \mathcal{C}_{a,b}$ pero $f+g \notin \mathcal{B}_{a,b} \cup \mathcal{C}_{a,b}$).

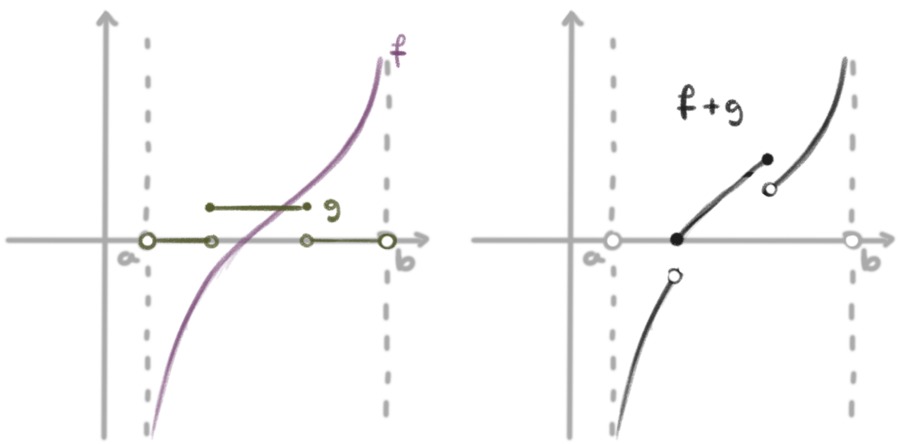


Figure 2.2: Con el sumando continuo rompemos la acotación, y con el sumando acotado, la continuidad.

◇

Ejercicio: Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de subespacios de V tal que

$$(\forall i, j \in I)(\exists k \in I) : \ W_i, W_j \subseteq W_k,$$

entonces $\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ es un subespacio de V.

— * * * —

Ahora, dado V un $F-$espacio vectorial, a veces nos interesará limitarnos a trabajar no con todo el espacio V, sino con un subconjunto X de este. Como también queremos aprovechar la estructura algebráica, nos interesará que tal colección X sea, más que subconjunto, subespacio de V. Esto puede ocurrir o no: lo que siempre podemos hacer es considerar a la familia $\{W \leq V : \ X \subseteq W\}$ de subespacios más pequeños (en el sentido que están propiamente contenidos en V) que contienen a nuestro conjunto de interés de X, y "condensar" a esta familia via su intersección.

Definición 2.4.3. *Sean V un $F-$espacio vectorial, $X \subseteq V$. El subespacio*

$$\langle X \rangle := \bigcap \{W \leq V : \ X \subseteq W\}, \tag{2.13}$$

*o sea, la intersección de la familia de todos los subespacios de V que contienen a X, es llamado el **subespacio de V generado por X**.*

Proposición 2.4.4. *$\langle X \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a X, es decir,*

$$\forall\ W \leq V: \quad X \subseteq W \Rightarrow \langle X \rangle \leq W.$$

Estamos considerando a la contención de conjuntos como orden; el que un conjunto A sea menor que un conjunto B significa que A está contenido en B.

Demostración. Es clara pues, $\langle X \rangle$, al ser por definición la intersección de la familia de subespacios que contienen a X, está contenido en cada uno de sus integrantes.

□

En resumen: si X no es subespacio, siempre podemos considerar a $\langle X \rangle$, *el menor* subespacio de V que contiene al conjunto de interés.

Ejercicio: Demuestre que, si $X \leq V$, entonces $X = \langle X \rangle$.

Observación 2.4.5. *Por definición, $\langle \varnothing \rangle$ es la intersección de la familia de subespacios que contienen a $\varnothing$ - o sea, es la intersección de todos los subespacios de V. Como $\{0\}$ es el menor subespacio de V, concluimos que*

$$\langle \varnothing \rangle = \{0\}.$$

En (2.13) decimos cómo construir a tal $\langle X \rangle$; el objetivo ahora es dar una descripción completa de sus elementos, es decir, dar un criterio concreto en base al cual determinar cuándo un vector x del espacio pertenece a $\langle X \rangle$.

Según la proposición (*-sub), X puede no ser subespacio por cumplirse al menos una de las tres razones siguientes:

- $\hat{0} \notin X$; corregimos esto agregando al vector cero.
- Existen $x, y \in X$ tales que $x + y \notin X$; esto se puede arreglar agregando sumas de elementos de X.
- Existen $a \in F$ y $x \in X$ para los que $ax \notin X$. Para que esto no ocurra, podemos agregar los múltiplos escalares de los elementos de X.

Parece que el problema de no ser subespacio se arregla si agregamos sumas finitas de múltiplos escalares de elementos de X (pues así estamos forzando a que los tres puntos de la proposición (*-sub) ocurran). Demos un nombre a tales sumas de elementos de X.

Definición 2.4.6. *Sea V un $F-$espacio vectorial, $X \subseteq V$. Una* ***combinación lineal*** *en V de elementos de X es cualquier vector de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \textit{con } n \geq 1 \textit{ entero, } x_i \in X, a_i \in F \textit{ para toda } 1 \leq i \leq n.$$

Según la discusión anterior, parece que para "extender" a X a un subespacio de la forma mínima, hay que agregar todas las combinaciones lineales de elementos de X, pues con esto parece quedar asegurada la cerradura bajo suma y multiplicación por escalares. Confirmamos nuestras sospechas con el siguiente resultado.

Proposición 2.4.7. *Si $\varnothing \neq X \subseteq V$, entonces $\langle X \rangle$ consta de todas las combinaciones lineales de elementos de X, es decir,*

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | \ n \in \mathbb{N}, x_i \in X, a_i \in F \quad \textit{para toda } 1 \leq i \leq n \right\} \tag{2.14}$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | \ n \in \mathbb{N}, x_i \in X, a_i \in F \quad \textit{para toda } 1 \le i \le n \right\};$$

veamos que $\mathcal{A} = \langle X \rangle$.

En inglés, al conjunto de la derecha en (2.14) se le conoce como el "span" de X. La proposición 2.4.7 nos dice que el span de un conjunto X es el menor subespacio que contiene a X.

$\supseteq$] Claro que $\mathcal{A}$ es subespacio de V (Ejercicio: compruebe los detalles!). Además, $\mathcal{A}$ contiene a X (pues $x = \sum_{i=1}^{1} 1_F x \in \mathcal{A}$). De esto se deduce que $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{A}$.

$\subseteq$] Sea ahora $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ un elemento genérico de $\mathcal{A}$; mostremos que este es elemento de *cualquier* subespacio W de V que contenga a X - de esto podremos concluir la contención deseada, pues $\langle X \rangle$ *es* la intersección de tales subespacios W. Sea pues $W \le V$ con $X \subseteq W$. Como cada x_i es elemento de X, todos serán elementos de W, luego, por el lema REF, $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \in W$.

□

Definición 2.4.8. *Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subespacios de V, definimos a su suma como el subespacio generado por su unión, es decir,*

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in I} W_\alpha :=& \left\langle \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha \right\rangle \\ =& \left\{ a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n | \ n \ge 1, a_i \in F, w_i \in \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha \right\} \\ =& \{ a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n | \ n \ge 1, a_i \in F, w_i \in W_\alpha \ \ \textit{para alguna } \alpha \in I \}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ejercicio: Demuestre que una forma equivalente de escribir al subespacio (2.15) es como

$$\sum_{\alpha \in I} W_\alpha = \{ w_1 + \cdots + w_n : \ \ n \ge 1, w_i \in W_i \ \forall 1 \le i \le n \}. \tag{2.16}$$

Recapitulemos: dados $W_1, W_2 \le V$,

- $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V,
- $W_1 \cup W_2$ es subespacio si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$. Nota que el resultado de esta operación no da lugar a un nuevo subespacio de V.
- El menor subespacio de V que contiene a W_1 y W_2 es su suma, o sea,

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 | \ \ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \}.$$

Definición 2.4.9. *Si $X \subseteq V$ es tal que $\langle X \rangle = V$, decimos que X* ***genera al espacio*** *V.*

Es decir, X genera a a V si no hay subespacios propios de V que contengan a X; esto, según la proposición 2.4.7, significa que *todo elemento de V puede expresarse como combinación lineal finita de elementos de X.*

2.4.1 Suma directa de subespacios

Sean V un F-espacio vectorial, $\{W_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subespacios de V. Por la proposición 2.4.7 sabemos que *todo* elemento de su suma es de la forma $w_1 + \ldots + w_n$, con $W_i \in W_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo 2.4.10. *Sea el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Considere a los subespacios*

$$W_1 = \{(a,b,0) | \ a,b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3,$$

$$W_2 = \{(0,c,d) | \ c,d \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3.$$

Es claro que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$; de hecho, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera del espacio, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(x,y,z) = (x, \alpha y, 0) + (0, (1-\alpha)y, z). \tag{2.17}$$

Las entradas cero de los elementos de W_1 y W_2 determinan las entradas x y z en la ecuación (2.17), pero en las entradas centrales tenemos libertad de elección -esto se ve reflejado por el parámetro α.

Esto muestra que hay una infinidad de formas de expresar a un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como suma de elementos de $W_1 \cup W_2$.

Considere ahora a los subespacios

$$V_1 = \{(a,0,0) | \ a \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{(0,b,0) | \ b \in \mathbb{R}\},$$

$$V_1 = \{(0,0,c) | \ c \in \mathbb{R}\}.$$

Claro que $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2 + V_3$; dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera,

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z).$$

Una representación de esta forma es única. Por ejemplo, el que las primeras entradas de los últimos dos sumandos deban ser cero (por definición de V_1 y V_2) forza que la primera entrada del primer sumando sea x. ◇

Definición 2.4.11. *Sea $\{W_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subespacios de V. El subespacio suma $\sum_{i=1}^n W_i$ es llamada una* ***suma directa*** *si cada uno de sus elementos tiene una única representación de la forma*

$$w_1 + \cdots + w_n, \quad \text{con } w_i \in W_i.$$

En este caso, al subespacio $\sum_{i=1}^n W_i$ se le denota por

$$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

El símbolo $\oplus$ es usado para representar una propiedad del espacio suma $\sum_{i=1}^n W_i$, a saber, la unicidad de las representaciones de sus elementos como sumas de vectores en $\bigcup_{i=1}^n W_i$.

Proposición 2.4.12. *Sean U, W subespacios de V. La suma $U + W$ es directa si y sólo si $U \cap W = \{\hat{0}\}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Si existe $x \in U \cap W$ con $x \neq \hat{0}$, entonces,

$$x = \hat{0} + x, \quad con \ \hat{0} \in U, x \in W,$$

y

$$x = x + \hat{0}, \quad con \ x \in U, \hat{0} \in W,$$

luego, la suma $U + W$ no es directa.

$\Leftarrow$] Sea $x \in U + W$; sean $u_1, u_2 \in U$ y $w_1, w_2 \in W$ tales que

$$u_1 + w_1 = x = u_2 + w_2.$$

Entonces,

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\},$$

o sea, $u_1 = u_2$ y $w_1 = w_2$.

□

Note lo siguiente: según la proposición (*-sub), todos los subespacios tienen en común al neutro $\hat{0}$ del espacio, luego, no tiene sentido buscar subespacios disjuntos. Lo más disimiles que pueden llegar a ser $U, W \leq V$ es que su intersección sea $\{0\}$. Esto, según la proposición 2.4.12, equivale a que la suma $U + W$ sea directa.

Suma de subespacios ~ Unión de subconjuntos
Suma directa de subespacios ~ Unión disjunta de subconjuntos

Note que en la proposición 2.4.12 estamos lidiando sólo con dos subespacios. ¿Podemos generalizar este resultado para la suma de n-subespacios? ¿Será cierto que la suma $\sum_{i=1}^{n} W_i$ es directa si y sólo si la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ es $\{\hat{0}\}$? La respuesta es **no** (c.f. ejercicio **??**).

2.5 Caso práctico: Representación de información nutricional

Veamos cómo los conceptos introducidos pueden ser de utilidad para modelar y resolver una problemática de la vida real.

Supongamos que a una nutrióloga le interesa la ingesta de

- calorías
- agua
- hidratos de carbono
- fibra
- grasas, y
- proteinas

que un paciente puede obtener al consumir frutas de cierto grupo de interés (por ejemplo, las frutas que puede encontrar a precio accesible en su entorno). Sus datos iniciales son los valores de dichos componentes presentes en las frutas de interés, datos presentados en forma de tabla como se muestra a continuación.

ENERGÍA Y COMPONENTES MAYORITARIOS DE ALGUNAS FRUTAS DE CONSUMO FRECUENTE EN ESPAÑA

Fruta	Energía (kcal)	Agua (g)	Hidratos de carbono (g)	Fibra dietética (g)	Grasas (g)	Proteínas (g)
Aguacate	134	79	1,3	2,4	13,8	1,3
Albaricoque	40	86	9,5	2,1	0,1	0,8
Cerezas	58	82	13,5	1,5	0,5	0,8
Ciruela	45	84	11	2,1	0,15	0,6
Fresas	34	88	7	2,2	0,5	0,7
Kiwi	53	83	12.1	1,5	0,44	1
Limón	39	87	9	1	0,3	0,7
Mandarina	39	86	9	1,9	0,19	0,8
Manzana (Golden)	41	85	10,5	2,3	Trazas	0,3
Melocotón	37	86	9	2,3	0,1	0,6
Melón	37	88	8,4	0,8	0,28	0,9
Naranja	38	86	8,6	2,3	0,3	0,8
Pera	48	84	11,7	2,2	0,3	0,4
Piña	46	85	11,5	1,2	0,1	0,5
Plátano	85	73	20,8	2,5	0,27	1,2
Sandia	22	93	4,5	0,3	0,3	0,5
Uvas (blancas)	63	81	16,1	0,9	Trazas	0,6
Uvas (negras)	67	81	15,5	0,4	0,7	0,6

Figure 2.3: Fuente: `gruporem-ucam.com`

Algunos de sus pacientes son alérgicos a las frutas de su lista; digamos que su nuevo paciente no puede comer manzanas. La nutrióloga se pregunta si es posible sustituir los nutrientes aportados por una manzana con otras frutas de la lista y, si la respuesta es afirmativa, quisiera dar explícitamente combinaciones de frutas que aporten lo mismo que aportaba una cierta cantidad de manzanas (que no pueden ser incluidas en la dieta del paciente). ¿Cómo podemos modelar esta situación?

Podemos representar nuestros datos iniciales como vectores de $\mathbb{R}^6$; por ejemplo, el vector nutricional de una manzana sería

$$x_{manzana} = (41, 85, 10.5, 2.3, 0, 0.3) \in \mathbb{R}^6.$$

Definamos a $\mathcal{A}$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^6$ que consta de todos los vectores fruta,

$$\mathcal{A} = \{x_{aguacate}, x_{albaricoque}, \dots, x_{uvasB}, x_{uvasN}\}.$$

Nota que, en este contexto, las combinaciones lineales con coeficientes naturales tienen una interpretación física; por ejemplo, el vector

$$2x_{pera} + 5x_{fresa} + 3x_{cereza}$$

representa la información nutrimental de 2 peras, 5 fresas y 3 cerezas (luego, la cantidad de calorías y componentes que alguien estaría obteniendo al consumir esta cantidad de frutas).

El problema de la nutrióloga queda expresado en términos de álgebra lineal como sigue: ¿es $x_{manzana}$ elemento del subespacio de $\mathbb{R}^6$ generado por los vectores $x_{aguacate}, x_{albaricoque}, \dots, x_{uvaB}, x_{uvaN}$? Nota que, implícitamente, el problema nos permite limitarnos al conjunto de las combinaciones lineales finitas de los vectores fruta (menos el vector manzana) y no considerar a todo $\mathbb{R}^6$ (para este problema, no nos interesan vectores que no sean combinaciones lineales de vectores fruta). La teoría estudiada antes nos asegura que

- Tal conjunto de combinaciones de vectores fruta es un subespacio de $\mathbb{R}^6$ y,
- de hecho, es el menor subespacio de $\mathbb{R}^6$ que contiene a los vectores fruta menos el manzana.

La pregunta de la nutrióloga queda entonces expresada en ver si ocurre

$$x_{manzana} \in \langle \mathcal{A} - \{x_{manzana}\} \rangle$$

o no.

No nos interesan todos los elementos de $\mathbb{R}^6$, sino sólo aquellos que sean combinaciones lineales de vectores fruta; estamos reemplazando a nuestro espacio de trabajo $\mathbb{R}^6$ por $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Observa que los vectores son mucho más que una forma conveniente de almacenar información: podemos hacer operaciones de ellos e interpretarlas en el contexto del problema físico planteado.

Con las definiciones e ideas que planteamos en los siguientes capítulos, podremos

- Determinar cuándo existen combinaciones de frutas que aporten lo mismo que cierta cantidad de manzanas,

- Decir si hay una única forma o varias de expresar manzanas en términos de combinaciones lineales de frutas específicas

- Usar argumentos de dimensionalidad para determinar cuándo subconjuntos de frutas son suficientes para sustituir a todas las demás

Es fácil pensar requerimientos razonables que complicarían aún más la situación; por ejemplo, considera que, en un escenario realista,

- Un paciente podría tener no solo posibles alergias como limitantes para definir una dieta, sino también un presupuesto mensual al que deba apegarse, presupuesto que podría reducir aún más las opciones o cantidades de fruta que puede consumir (por ejemplo, esto podría implicar que combinaciones lineales que contengan al vector $x_{aguacate}$ sólo sean consideradas cuando su coeficiente -i.e. el escalar por el que se multiplica a $x_{aguacate}$ - no sea mayor a cierto valor).

Figure 2.4: *Cada paciente tiene sus necesidades personales, por ejemplo, las frutas a las que es alérgico (o que no le gustan, y quiere evitar en su dieta) y su presupuesto mensual. Esto cambia el espacio de combinaciones lineales a considerar para cada uno, y las combinaciones lineales aceptables.*

Incluso en esta situación tan simplificada, vemos la utilidad de usar el marco teórico ofrecido por el álgebra lineal para modelar la situación; con los conocimientos de los próximos capítulos seremos capaces de resolver los problemas aquí planteados.

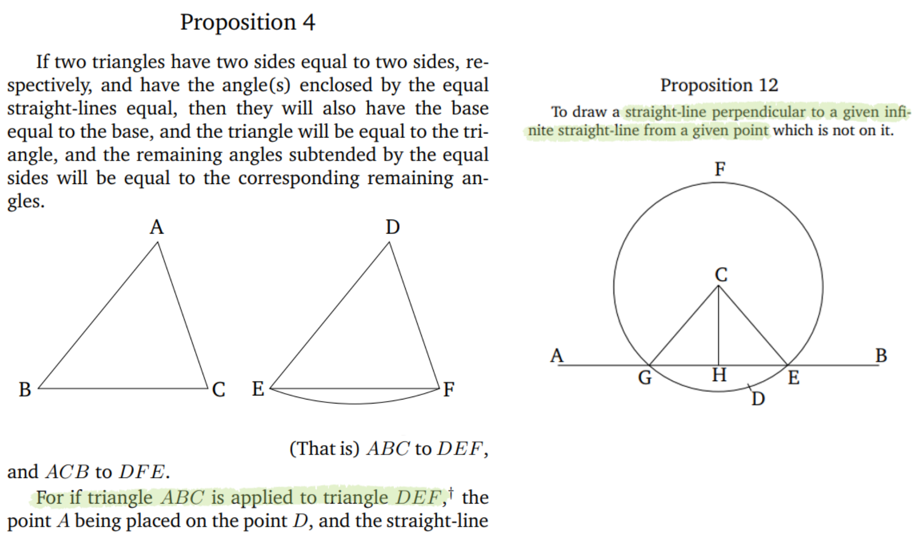
Chapter 3

Transformaciones lineales

Ya definimos y estudiamos el concepto de espacio vectorial, dimos también unos ejemplos que ilustran lo útil que puede ser considerar espacios vectoriales como marcos teóricos para modelar situaciones prácticas. Lo que queremos hacer ahora es establecer relaciones entre espacios vectoriales; más formalmente, queremos trabajar con funciones de un espacio vectorial a otro que preserven la estructura algebráica de estos. Como veremos, algunos de los conceptos matemáticos más usados pueden verse de forma natural como transformaciones lineales, por ejemplo,

- las operaciones de integración y diferenciación del cálculo, o
- las proyecciones, reflexiones y proyecciones de la geometría.

Explicaremos además cómo codificar la información de una transformación lineal entre espacios vectoriales finito dimensionales en una matríz (que dependerá de las bases escogidas para el dominio y codominio), habilidad indudablemente útil para las aplicaciones del álgebra lineal.


Proposition 4

If two triangles have two sides equal to two sides, respectively, and have the angle(s) enclosed by the equal straight-lines equal, then they will also have the base equal to the base, and the triangle will be equal to the triangle, and the remaining angles subtended by the equal sides will be equal to the corresponding remaining angles.

(That is) ABC to DEF, and ACB to DFE.

For if triangle ABC is applied to triangle DEF,† the point A being placed on the point D, and the straight-line

Proposition 12

To draw a straight-line perpendicular to a given infinite straight-line from a given point which is not on it.

Figure 3.1: Euclides usa en sus argumentos transformaciones lineales como las traslaciones, rotaciones y proyecciones.

3.1 Transformaciones lineales

Definición 3.1.1. *Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un mismo campo F. Toda función $T : V \longrightarrow W$ tal que*

$$(\forall x, y \in V)(\forall a \in F): \quad T(ax + y) = aT(x) + T(y) \tag{3.1}$$

*será llamada una **transformación lineal** de V en W.*

Nota que V y W deben ser espacios vectoriales sobre un campo común para que ambos lados de la ecuación 3.1 tengan sentido.

Observación 3.1.2. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces*

- *$T(0_V) = T(0_W)$, y*
- *Para cualesquiera $n \geq 1$ entero, $a_1, \ldots, a_n \in F$ y $x_1, \ldots, x_n \in V$,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i).$$

Demostración. En efecto, tenemos la siguiente ecuación en el grupo abeliano W

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$

luego, $T(0_V) = 0_W$. El segundo punto se demuestra por inducción, usando a la condición (3.1) como base de inducción. □

Ejercicio: demuestra que la condición 3.1 es equivalente a las siguientes dos condiciones:

1. (**aditividad**) Para cualesquiera $x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$,
2. (**homogeneidad**) Para cualesquiera $x \in V$, $a \in F$, $T(ax) = aT(x)$.

Estas condiciones dicen que, no importa si primero se realiza la suma o multiplicación escalar en el espacio V y luego se aplica la transformación lineal, o si primero se llevan los vectores a W via T y luego se efectua la suma o multiplicación escalar en W, el resultado es el mismo.

3.1.1 Ejemplos de transformaciones lineales

Tenemos la siguiente lista de ejemplos canónicos de transformaciones lineales.

- Dados V y W F−espacios vectoriales, las funciones $I_V : V \longrightarrow V$ y $T_0 : V \longrightarrow W$ definidas como

  $$\forall x \in V: \quad I_V(x) = x, \; T_0(x) = 0_W$$

  son transformaciones lineales, llamadas respectivamente la **transformación identidad** y la **transformación cero** en V.

- La función $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = f'$$

  es una transformación lineal.

- La función $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = \int_a^b f(t)dt$$

  es una transformación lineal.

- Sea $0 \leq \theta < 2\pi$. La función $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad T_\theta(a,b) = (acos(\theta) - bsen(\theta), asen(\theta) + bcos(\theta))$$

es una transformación lineal llamada **rotación de θ radianes**.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad T_\theta(a,b) = (a, -b)$$

es llamada la **reflexión sobre el eje** x, y es una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \quad T_\theta(a,b) = (a, 0)$$

es una transformación lineal, que llamamos **proyección sobre el eje-x**.

Profundicemos un poco más la definición de proyección. Claramente, $W_1 = \{(a,0) : \ a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,b) : \ b \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$. Se definió arriba a la proyección sobre el eje-x a la función que, a cada $v \in \mathbb{R}^2$, le asigna su sumando correspondiente al espacio W_1. Definamos en general el término proyección.

Definición 3.1.3. *Sea V un $F-$espacio vectorial, $W_1 \leq V$. Si $W_2 \leq V$ es tal que $W_1 \oplus W_2 = V$, la función $T : V \longrightarrow V$ definida como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \ \ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2 \tag{3.2}$$

*es llamada una **proyección sobre** W_1.*

Debo agregar suma directa en general para el tema de diagonalización. Observe que, como se usa una suma directa para definir una proyección, la expresión (3.2) en efecto define una función T, de hecho lineal, pues, si $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ y $a \in F$, entonces,

$$T(ax + y) = T((ax_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = ax_1 + x_2 = aT(x_1) + T(x_2).$$

Note que $W_1 = \{x \in V | \ T(x) = x\}$, es decir, el conjunto de puntos fijos de una proyección en W_1 coincide con W_1. En la definición 3.1.3 hablamos de "una" proyección a W_1; esto es porque, como mostramos a continuación, hay tantas transformaciones lineales que satisfacen la definición de proyección a W_1 como subespacios cuya suma directa con W_1 es todo el espacio.

Proposición 3.1.4. *Sea $W_1 \leq V$. Si $W_2, \tilde{W}_2$ son dos subespacios de V distintos entre si tales que $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus \tilde{W}_2$, entonces las transformaciones lineales $T, \tilde{T} : V \longrightarrow V$ definidas como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \ \ x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

y

$$\tilde{T}(x) = \tilde{x}_1, \quad x = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \ \ \tilde{x}_1 \in W_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{W}_2$$

son distintas entre si.

Demostración. Busquemos un punto en el que T y $\tilde{T}$ difieren. Como $W_2 \neq \tilde{W}_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $y \in \tilde{W}_2 - W_2$. Se tiene que

$$x_1 + x_2 = y = 0 + y,$$

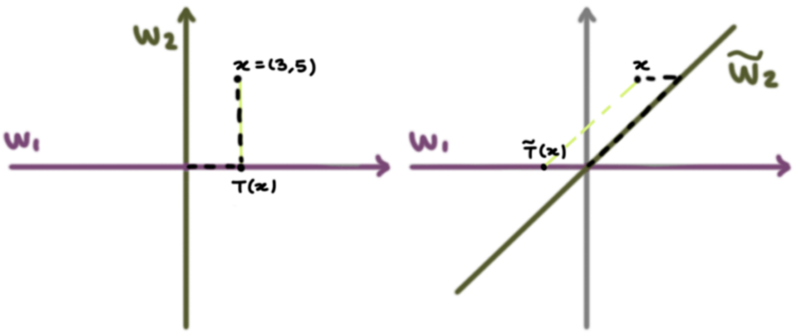
con $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ y $y \in \tilde{W}_2$. Note que x_1 no es cero, de lo contrario, se tendría

$$y = x_2 \in W_2 \quad \lightning$$

Así,

$$T(y) = x_1 \neq 0 = \tilde{T}(y).$$

□



Ejemplo 3.1.5. *Poner este ejemplo mucho antes. Sea V un $F-$espacio vectorial con $dim(V) = n$. Si β es una base de V, dividámosla en dos subconjuntos α, γ ajenos cuya unión sea β. Entonces, $V = \langle\alpha\rangle \oplus \langle\gamma\rangle$, pues*

- *$V = \langle\alpha \cup \gamma\rangle = \langle\alpha\rangle + \langle\gamma\rangle$, y*
- *la suma es directa, pues*

$$\begin{aligned} dim(V) = dim(\langle\alpha\rangle + \langle\gamma\rangle) &= dim(\langle\alpha\rangle) + dim(\langle\gamma\rangle) - dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle) \\ &= dim(V) + dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle), \end{aligned}$$

  luego, $dim(\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle) = 0$, o sea, $\langle\alpha\rangle \cap \langle\gamma\rangle = \{0\}$.

3.2 El teorema fundamental de las transformaciones lineales

La condición (3.1) significa que la función T preserva la estructura algebráica de V. Como veremos a continuación, toda transformación lineal también preserva subespacios.

Recuerda que, si $f : A \longrightarrow B$ es una función cualquiera y $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, definimos

$$f(X) := \{y \in B | \ \exists x \in X : f(x) = y\},$$

y

$$f^{-1}(B) = \{x \in A | \ f(x) \in B\}$$

Proposición 3.2.1. *Sean V y W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre estos.*

- *La imagen de todo subespacio de V bajo T es un subespacio de W, es decir,*

$$\forall X \subseteq V : \ X \leq V \Rightarrow T(X) \leq W.$$

- *La preimagen de todo subespacio de W bajo T es un subespacio de V, es decir,*

$$\forall Y \subseteq W: \quad Y \leq V \Rightarrow T^{-1}(Y) = \{x \in V| \ T(x) \in Y\} \leq V.$$

Demostración. En efecto, si X es un subespacio de V, entonces $0_V \in X$, luego, $0_W = T(0_V) \in T(X)$. Además, si a es un escalar cualquiera y $y_1, y_2 \in T(X)$, entonces existen $x_1, x_2 \in V$ tales que $y_i = T(x_i)$, con $i = 1, 2$. Así,

$$ay_1 + y_2 = aT(x_1) + T(x_2) = T(ax_1 +_2)$$

es elemento de $T(X)$ pues X, al ser subespacio de V, contiene a $ax + y$. La demostración del segundo punto es dual. □

Vamos ahora a asociar a una transformación lineal dos espacios vectoriales (uno será un subespacio del dominio, otro del codominio) de gran importancia.

Definición 3.2.2. *Sean V, W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.*

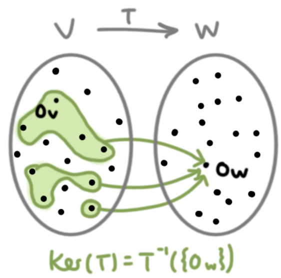


Figure 3.2: Etimológicamente, “kernel” significa semilla, centro, esencia.

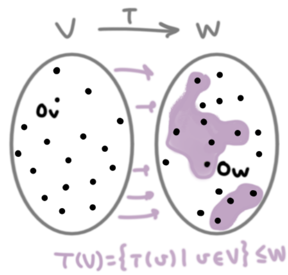
- *Se define al* ***espacio nulo*** *de T o* ***kernel*** *de T como*

$$Ker(T) := T^{-1}(\{0_W\}) \leq V. \tag{3.3}$$

- *La* ***imagen*** *de T es*

$$T(V) \leq W. \tag{3.4}$$

Si $Ker(T)$ es finito dimensional, a su dimensión se le denomina la ***nulidad de*** *T. Si $T(V)$ es finito dimensional, su dimensión se conoce como el* ***rango de*** *T.*



Observa que el “tamaño” del kernel de una transformación lineal parece ser inversamente proporcional al de la imagen de esta; en efecto, si muchos vectores pertenecen al kernel, entonces no habrá muchos vectores en la imagen de T que no sean cero, lo que achica a $T(V)$. El siguiente teorema, pilar del álgebra lineal, da forma a esta intuición.

Teorema 3.2.3. ***(fundamental de las transformaciones lineales)*** *Sean V, W $F-$ espacios vectoriales, con V finito dimensional. Para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$,*

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)), \tag{3.5}$$

es decir, la dimensión del espacio de origen V es igual a la nulidad de T más el rango de T.

Demostración. Como V es finito dimensional, el kernel de T también lo es. Sea pues $\{n_1, \ldots, n_k\}$ una base de $Ker(T)$. Extendamos este subconjunto l.i. de V a una base de V; sea $\{v_1, \ldots, v_l\}$ tal que

$$\beta := \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_1, \ldots, v_l\}$$

es base de V. Entonces, $dim(V) = k + l$. Afirmamos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ es base de la imagen $T(V)$.

El Teorema 3.2.3 es también conocido como el “Teorema de la dimensión”.

- Sean $a_1, \ldots, a_l$ escalares tales que

$$a_1 T(v_1) + \cdots + a_l T(v_l) = 0_W$$

Supongamos que alguno de ellos no es cero; sin pérdida de generalidad, digamos que $a_1 \neq 0$. Por la linealidad de T, la ecuación anterior se reescribe como

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l) = 0_W,$$

es decir,

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l \in Ker(T) = \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \rangle,$$

por lo tanto,

$$v_1 \in \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_2, \ldots, v_l\} \rangle.$$

Esto, según el lema **??**, contradice la independencia lineal de β.

- Claro que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ genera a $T(V)$ pues, dado $y \in T(V)$, existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. Como β es base de V, existen escalares a_i, b_j tales que

$$x = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k + b_1 v_1 + \cdots b_l v_l;$$

evaluando ambos lados de la igualdad bajo T y recordando que los vectores n_i son mapeados al cero (pues son elementos del kernel de T), concluimos que

$$y = T(x) = b_1 T(v_1) + \cdots + b_l T(v_l).$$

Así,

$$dim(V) = k + l = dim(Ker(V)) + dim(T(V)).$$

□

Poner una nota para que ya no confundan el rango de T con el codominio de T.

Corolario 3.2.4. *Sean V y W son F−espacios vectoriales con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineal. Para toda $\beta \subseteq V$ base de V se tiene que $T(\beta)$ genera a $T(V)$.*

3.2.1 No ejemplos de transformaciones lineales

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^x$$

no es lineal, pues $f(0) \neq 0$ (de hecho, la exponencial es una función estríctamente positiva).

- La función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es lineal. Por ejemplo,

$$|2 + (-1)| = |1| = 1 \neq 3 = |2| + |-1|.$$

- El polinomio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x^2$ no es una transformación lineal pues, en general, no se cumple que $(x + y)^2$ coincida con $x^2 + y^2$. De hecho, lo que ocurre es $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x,0) & si\ y = 0 \\ (x,y) & si\ y \neq 0. \end{cases}$$

  Es fácil comprobar que, a pesar de que f es homogenea, no es lineal. Por ejemplo,

$$f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = (1,1),$$

  pero

$$f(1,0)+f(0,1) = (2,0)+(0,1) = (2,1).$$

- La función coseno evaluada en cero vale uno, luego, no es lineal.

- Según el teorema 3.2.3, si $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, entonces

$$1 = dim(Ker(T)) + dim(T(V)),$$

  luego, tenemos dos casos:

  1. $dim(T(V)) = 1$, luego, como $T(V)$ es subespacio de $\mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ uno dimensional, tenemos que $T(V)$ es suprayectiva.
  2. $dim(T(V)) = 0$, es decir, $dim(Ker(T)) = 1$. Puesto que $Ker(T) \leq \mathbb{R}$ y $dim(\mathbb{R}) = 1$, se tiene que $Ker(T) = \mathbb{R}$, luego, T es la transformac ión lineal cero.

  Puesto que la función seno

$$sen(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

  no es ni la función cero no suprayectiva, no puede ser lineal.

3.3 Inyectividad y suprayectividad de transformaciones lineales

Recuerda que, en general, si $f : V \longrightarrow W$ es una función de un conjunto V a otro conjunto W, f se dice

- **inyectiva** si

$$\forall x,y \in V : \ \ T(x) = T(y) \Rightarrow x = y,$$

  o, equivalentemente, si las imágenes de puntos distintos son distintas

- **suprayectiva** si

$$(\forall z \in W)\ (\exists x \in V) : \ \ T(x) = z.$$

Resulta que, si V y W son $F-$espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ es, no sólo una función, sino una transformación lineal entre ellos, entonces podemos encontrar equivalencias de ser inyectiva o suprayectiva usando propiedades del Kernel y la preservación de la generación o inyectividad de subconjuntos de V.

Veremos que, en el contexto de transformaciones lineales, los conceptos de inyectividad e independencia lineal están íntimamente ligados, así como los de suprayectividad y generación.

Proposición 3.3.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*

2. $Ker(T) = \{0\}$

3. *Si $X \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $T(X) \subseteq W$ es también linealmente independiente.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $x \in Ker(T)$ entonces, por definición del kernel, $T(x) = 0$. Además, como T es lineal, también se tiene $T(0) = 0$, luego, como T es inyectiva, tenemos que $x = 0$. Así, $Ker(T) = \{0\}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sean $x, y \in V$ tales que $T(x) = T(y)$. Entonces, por la linealidad de T, $T(x - y) = T(x) - T(y) = 0$, así, $x - y \in Ker(T) = \{0\}$, es decir, $x - y = 0$, o sea, $x = y$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean $v_1, \dots, v_n \in X$ cualesquiera; mostremos que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Sean $a_i \in F$ escalares tales que

$$a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) = \hat{0}_W.$$

Por ser T lineal, podemos reescribir el lado izquierdo de la igualdad anterior;

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \hat{0}_W.$$

Esto muestra que $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in Ker(T) = \{0\}$, luego,

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0_V.$$

Como X es l.i., esto implica que todos los escalares a_i son cero.

En la implicación 2) $\Rightarrow$ 3), estamos mostrando que un subconjunto finito arbitrario de $T(X)$ es l.i. suponiendo que X es l.i.. Recuerda que esto es necesario y suficiente para demostrar la independencia lineal de todo $T(X)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existe $x \in Ker(T) - \{0\}$. Como x no es el vector cero, el singulete $\{x\}$ es l.i. y, sin embargo, $\{T(x)\} = \{0_W\}$ es l.d.. Esto contradice nuestra hipótesis.

□

Proposición 3.3.2. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

1. *T es suprayectiva*

2. *Si $X \subseteq V$ genera a V entonces $T(X)$ genera a W.*

Se demuestra que si $f : A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva, entonces, para todo $Y \subseteq B$, se tiene $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea X un generador de V, es decir, un subconjunto tal que $\langle X \rangle = V$. Esto significa que el único subespacio de V que contiene a X es el mismo V. Puesto que $X \subseteq T^{-1}(\langle T(X) \rangle)$ (pues, dado $x \in X$, $T(x) \in T(X) \subseteq \langle T(X) \rangle$), se tiene entonces $T^{-1}(\langle T(X) \rangle) = V$. Evaluando ambos lados de la igualdad bajo la función suprayectiva T concluimos que

$$W = T(V) = T(T^{-1}(\langle T(X) \rangle)) = \langle T(X) \rangle,$$

o sea, que $T(X)$ genera a W.

2) $\Rightarrow$ 1) V trivialmente se genera a sí mismo, luego, por hipótesis debe ocurrir que $T(V)$ genere a W, o sea, que

$$W = \langle T(V) \rangle = T(V),$$

por lo tanto T es supra.

$\square$

Proposición 3.3.3. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales.*

- *Si $dim(V) > dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W inyectivas.*
- *Si $dim(V) < dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W suprayectivas.*

Demostración. En efecto,

- si existe $T : V \longrightarrow W$ inyectiva, entonces, según la proposición 3.3.1, $Ker(T) = \{0\}$, luego, la ecuación (3.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(T(V)) \leq dim(W).$$

- Si existe $T : V \longrightarrow W$ suprayectiva, entonces $T(V) = W$, luego, (3.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(W) \geq dim(W).$$

$\square$

3.4 Isomorfismos

Definición 3.4.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ que sea biyectiva (i.e. inyectiva y suprayectiva) será llamada un **isomorfismo**. Si existe un isomorfismo entre dos espacios vectoriales V y W decimos que V y W son **isomorfos**.*

Es decir, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si $Ker(T) = \{0_V\}$ y $T(V) = W$.

El teorema 3.2.3 de hecho implica que, si V es finito dimensional, entonces puede establecerse un isomorfismo entre V y otro $F-$espacio vectorial W sólo si W tiene la misma dimensión que V.

Proposición 3.4.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ lineal, con V de dimensión finita. Si T es un isomorfismo, entonces W también es finito dimensional y, de hecho, $dim(W) = dim(V)$.*

Demostración. Digamos que $dim(V) = n$. Por ser T un isomorfismo, se tiene que

$$Ker(T) = \{0_V\} \quad y \quad T(V) = W.$$

Además, como V es finito dimensional, podemos usar el teorema 3.2.3 para deducir que

$$\begin{aligned} n = dim(V) =& dim(Ker(T)) + dim(T(V)) \\ =& dim(\{0_V\}) + dim(W) \\ =& 0 + dim(W) = dim(W). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.3. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales, ambos de dimensión n. Entonces, para cualquier transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, son equivalentes*

1. *T es inyectiva*
2. *T es suprayectiva*
3. *T es biyectiva (i.e. un isomorfismo).*

Demostración. Basta demostrar que 1) implica 2) y que 2) implica 3).

1) ⇒ 2) Si T es inyectiva entonces $Ker(T) = \{0\}$, luego, por el teorema 3.2.3,

$$n = dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)) = 0 + dim(T(V)) = dim(T(V)),$$

luego, como $dim(W) = n$ y $T(V) \leq W$ tiene dimensión n, concluimos que $T(V) = W$, o sea, que T es suprayectiva.

2) ⇒ 3) Si $T(V) = W$, entonces

$$n = dim(Ker(T)) + dim(T(V)) = dim(Ker(T)) + dim(W) = dim(Ker(T)) + n,$$

luego, $dim(Ker(T)) = 0$ o, equivalentemente, $Ker(T) = \{0_V\}$, i.e. T es inyectiva.

□

Ejemplo 3.4.4. *Sea la función $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida como*

$$T(f)(u) = 2f'(u) + \int_0^u 3f(x)dx. \text{ (polinomio en la variable)}u.$$

Puesto que T es combinación lineal de transformaciones lineales, es también lineal. Según el corolario 3.2.4, $\{T(1), T(x), T(x^2)\}$ genera al rango de T. Se calcula que

$$T(1)(u) = 2 \cdot 0 + \int_0^u 3dx = 3u,$$

$$T(x)(u) = 2 + \int_0^u 3xdx = 2 + \frac{3}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=u} = 2 + \frac{3u^2}{2},$$

$$T(x^2)(u) = 4u + \int_0^u 3x^2dx = 4u + x^3\Big|_{x=0}^{x=u} = 4u + u^3.$$

Tenemos entonces que

$$\{g_1(u) = 3u, g_2(u) = 2 + (3/2)u^2, g_3(u) = 4u + u^3\}$$

genera a $T(P_2(\mathbb{R}))$; puesto que los elementos de este generador son polinomios de grados distintos, de hecho son linealmente independientes, luego, esta es una base del rango de T. Así, como $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, se debe tener que T es inyectiva. ⋄

Recuerde que toda función biyectiva es invertible. Sea pues $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo; sabemos que existe la función inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$. Como establecemos a continuación, tal función es, al igual que T, una transformación lineal.

Proposición 3.4.5. *Si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa T^{-1} es también un isomorfismo.*

Demostración. Basta probar la linealidad de T^{-1}. Sean pues $y, z \in W$, $\lambda \in F$. Puesto que T es lineal y $u := T^{-1}(y)$, $v := T^{-1}(z)$ son vectores de V, se tiene que

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda y + z,$$

luego,

$$T^{-1}(\lambda y + z) = \lambda u + v = \lambda T^{-1}(y) + T^{-1}(z).$$

□

3.5 La propiedad universal de las bases

Recuerda que, dados V y W dos $F-$ espacios vectoriales, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es una función que además "abre" combinaciones lineales. Como cualquier función, T está completamente determinada por los valores que toma en su dominio V. Como veremos a continuación, en el caso de las transformaciones lineales, estas de hecho quedan determinadas por su definición en una base cualquiera del espacio V; conocer los valores de T en una base de V nos permite saber los valores de T en *cualquier* punto de V.

Al teorema 3.5.1 también se le llama el teorema fundamental de las bases. Se usará en repetidas ocasiones para desarrollar la teoría de las siguientes secceiones, por lo que se recomienda entenderlo bien.

Teorema 3.5.1. *(propiedad universal de las bases) Sea V un $F-$ espacio vectorial, con V finito-dimensional. Son equivalentes para $\beta \subseteq V$ las siguientes:*

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, dotted, "\exists!\, T"] \\ W & \end{tikzcd}$$

- *β es base de V*
- *Si W es un $F-$espacio vectorial cualquiera, toda función $f : \beta \longrightarrow W$ se puede extender linealmente de forma única a todo V, es decir, existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T_{|\beta} = f$.*

Nota: en realidad, este teorema es cierto aún cuando V es infinito dimensional (c.f. Hugo Rincón p. 84). Sin embargo, como en el curso no hemos demostrado los resultados necesarios para probar esto cuando se trabaja en un espacio infinito dimensional (no estudiamos el lema de Zorn, por lo que no pudimos demostrar hechos fundamentales como la existencia de bases para cualquier espacio vectorial o el hecho de que un l.i. de un espacio ininito dimensional puede extenderse a una base de este), nos limitaremos a establecer y probar la propiedad universal de las bases en dimensión finita - que en realidad son los tipos de espacios que se usan siempre en las aplicaciones.
Demostración.

⇒) Sea $f : \beta \longrightarrow W$ una función de la base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V escogida a W. Sean $x, y \in V$ cualesquiera; digamos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i v. \tag{3.6}$$

Observe que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal que extiende a f (i.e. tal que $T \circ \iota = f$), entonces, deberá ocurrir

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i),$$

es decir, T *tiene que ser* la función definida como

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i). \tag{3.7}$$

Observe que la ecuación (3.7) en efecto define una función T de V en W, pues, por ser β base de V, la representación de x dada en (3.6) como combinaciones lineales de elementos de β son únicas

Esta es en efecto una transformación lineal, pues

$$\begin{aligned} T(ax+y) =& T\left(a\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(aa_i + b_i)v_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n}(aa_i + b_i)\beta(v_i) = a\sum_{i=1}^{n} a_i\beta(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i\beta(v_i) = aT(x) + T(y), \end{aligned}$$

y, en efecto, $T \circ \iota = f$, pues, dado $v_i \in \beta$ cualquiera,

$$(T \circ \iota)(v_i) = T(v_i) = T(0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n) = f(v_i).$$

⇐) Mostremos que un subconjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V con tal propiedad es base de V.

- Independencia lineal: Supongamos que $v_1 \in \langle \beta - \{v_1\} \rangle$, o sea, que existen escalares c_i tales que $v_1 = \sum_{i=2}^{n} c_i v_i$. Sea la función $f : \beta \longrightarrow F$ definida como

  $$f(v_1) = 1, \quad f(v_i) = 0, \ 2 \le i \le n.$$

  Sea T la única extensión lineal de esta función. Se tiene que

  $$1 = T(v_1) = T\left(\sum_{i=2}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=2}^{n} c_i T(v_i) = \sum_{i=2}^{n} c_i 0_W = 0 \ \lightning$$

- Generación: Supongamos que β no genera a V. Como ya mostramos que β es l.i., podemos extender β a una base de V (c.f. corolario **??**). Sea pues $\gamma \subseteq V$ tal que $\beta \cup \gamma$ es base de V. Si $f : \beta \longrightarrow V$ se define como $f(v_i) = v_i$, observe que la función identidad $I_V : V \longrightarrow V$ es tal que $I_V \circ \iota = f$, pero también la proyección $T : V = \langle \beta \rangle \oplus \langle \gamma \rangle \longrightarrow V$ definida como

  $$T(x) = b, \quad x = b + c, b \in \beta, c \in \gamma$$

  satisface que $T \circ \iota = f$. Como $T \neq I_V$, esto contradice la unicidad de la extensión lineal que suponemos por hipótesis.

$\square$

Es decir, para demostrar la igualdad entre transformaciones lineales basta comprobar que sus definiciones en una base cualquiera del dominio coinciden.

Corolario 3.5.2. *Sea V, W $F-$espacios vectoriales, con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$, $U : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Si para una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se tiene que*

$$T(v_i) = U(v_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

entonces $T = U$.

Terminemos mostrando que todo $F-$espacio vectorial de dimensión n es esencialmente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.5.3. *Sea V un $F-$ espacio vectorial. V es $n-$dimensional si y sólo si V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Inmediata de notar que $dim(\mathbb{R}^n) = n$ y la proposición 3.4.2.

$\Rightarrow$) Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $f : \beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función que a v_i le asigna $\hat{e}_i$. Según la propiedad universal de las bases (c.f. teorema 3.5.1), podemos extender a β linealmente. Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal extensión lineal. Puesto que $T(V)$ contiene a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $T(V) = \mathbb{R}^n$, o sea, T es suprayectiva. De esto, según el teorema 3.4.3, se deduce que T es un isomorfismo.

□

3.6 Caracterización de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Es gracias a la propiedad universal de las bases establecida en el teorema 3.5.1 que vamos a poder caracterizar a las transformaciones lineales entre $F-$espacios vectoriales finito dimensionales. Como veremos más adelante, esto nos permitirá capturar toda la información de una transformación lineal a partir de una cantidad finita de números, que almacenaremos en un arreglo numérico rectangular - i.e. en una matriz. Antes de abordar la teoría en general, para familiarizarnos con la ideas que vamos a estudiar más adelante para el caso de transformaciones lineales de un $\mathbb{R}^n$ a un $\mathbb{R}^m$.

Para simplificar la notación, conviente introducir la noción de producto punto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.6.1. *Para $\hat{x} = (a_i)_{i=1}^n, \hat{y} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, definimos su* ***producto punto*** *como*

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Recordando la definición de producto de matrices, podemos reinterpretar al producto puntos de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ como producto de matrices;

Este es un buen momento para recordar que, por lo general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i bi \right).$$

Claro que estamos haciendo un abuso de notación identificando a una matriz de 1×1 con su única entrada. También vamos a estar identificando a "vectores fila" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con "vectores columna"

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

I) Sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal. Consideremos a la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$. Según el teorema 3.5.1, T queda completamente determinada por su valor en 1; digamos que $T(1) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Entonces, para toda $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$T(a) = T(a \cdot 1) = aT(1) = a(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}(a).$$

II) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal. Ahora vamos a considerar a la base canónica $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nuevamente, el teorema 3.5.1 nos asegura que, con conocer los valores

$$c_i = T(\hat{e}_i), \quad 1 \le i \le n,$$

conocemos los valores de la transformación lineal T en todo punto de $\mathbb{R}^n$; en efecto, si $\hat{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T(\hat{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \langle \hat{x}, \hat{c} \rangle = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

donde $\hat{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

II) Ahora si consideremos el caso más general de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. De nuevo tomamos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ compuesta por los vectores $\hat{e}_i$. Si

$$T(e_i) = (c_{1i}, c_{2i} \ldots, c_{mi}), \quad 1 \le i \le n,$$

entonces, para cualquier $\hat{x} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} T(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_{1i}, a_i c_{2i}, \ldots, a_i c_{ni}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_{1i}, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{2i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{mi} \right). \end{aligned}$$

Nota que cada entrada es entonces un producto punto.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$