Contents

Chapter 1

Espacios vectoriales

1.1 Espacios vectoriales de funciones

Sean $X \neq \varnothing$ un conjunto no vacío cualquiera y $(F, +, 0, \cdot, 1)$ un campo. Consideremos al conjunto

$$F^X := \{f : X \longrightarrow F : \ f \ \textit{es función}\}$$

de funciones de X en F; aprovechando la estructura de campo en F, vamos a dotar al conjunto F^X de estructura de F–espacio vectorial.

- **Definición de suma de funciones:** Definimos a la operación binaria suma

  $$\hat{+} : F^X \times F^X \longrightarrow F^X \tag{1.1}$$

  como sigue: dadas $f, g \in F^X$ cualesquiera, la función $f \hat{+} g \in F^X$ se define puntualmente como

  $$(f \hat{+} g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X. \tag{1.2}$$

  Nota que, en la ecuación anterior, el signo $\hat{+}$ que aparece a la izquierda es la operación binaria que estamos definiendo en (1.1), mientras que el signo $+$ de la derecha es la suma del campo F: *a partir de la operación suma en F estamos diciendo cómo sumar elementos de F^X.*

- **Definición de producto por escalares:** Definimos a un producto por escalares

  $$\star : F \times F^X \longrightarrow F^X \tag{1.3}$$

  como sigue: si $a \in F$ y $f \in F^X$, la función $a \star f \in F^X$ se define puntualmente como

  $$(a \star f)(x) = af(x), \quad x \in X. \tag{1.4}$$

  Nota cómo estamos usando la operación producto del campo para definir el producto por escalares.

- **Neutro aditivo:** Proponemos como neutro para la operación suma de funciones (c.f. (1.1)) a la función $\hat{0} : X \longrightarrow F$ definida como sigue:

  $$\hat{0}(x) = 0, \quad x \in X, \tag{1.5}$$

  es decir, a la función que mapea todo punto de X al neutro aditivo del campo F.

Demostremos que $(F^X, \hat{+}, \star)$ es un F−espacio vectorial.

En lo que sigue, vamos a demostrar igualdades que tienen lugar en F^X, es decir, igualdades entre funciones. Recuerda que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, codominio y misma regla de correspondencia: puesto que todos los elementos de F^X tienen dominio X y codominio F, para demostrar que $f, g \in F^X$ son iguales basta ver que

$$f(x) = g(x) \quad \textit{para toda } x \in X.$$

1. **Asociatividad de $\hat{+}$:** sean $f, g, h \in F^X$. Mostremos que

$$(f\hat{+}g)\hat{+}h = f\hat{+}(g\hat{+}h).$$

   Sea $x \in X$. Usando la definición de suma de funciones dada en (1.2), tenemos que

$$\begin{aligned}((f\hat{+}g)\hat{+}h)(x) =&(f\hat{+}g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)\\ =&f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g\hat{+}h)(x)\\ =&(f\hat{+}(g\hat{+}h))(x).\end{aligned}$$

   La tercera igualdad se da porque la suma en F es asociativa.

2. **Elemento neutro para la suma:** Si $f \in F^X$ cualquiera, veamos que

$$\hat{0}\hat{+}f = f = f\hat{+}\hat{0}.$$

   Probemos la primera igualdad; la otra se tiene de forma análoga. Usaremos la definición (1.5) de la función cero $\hat{0}$ y la definición de suma de funciones dada en (1.2). Para toda $x \in X$,

$$(\hat{0}\hat{+}f)(x) = \hat{0}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$

3. **Existencia de inversos aditivos:** Ejercicio: Dada una función $f \in F^X$, propón una función $g \in F^X$ que sea el neutro aditivo de f, es decir, una función tal que

$$f\hat{+}g = \hat{0} = g\hat{+}f.$$

   Sugerencia: Defínela puntualmente, usa la existencia de inversos aditivos en el campo F. Naturalmente, a tal función g la denotaremos por $-f$.

4. **Conmutatividad de $\hat{+}$:** Ejercicio: Demuestra que la suma de funciones es conmutativa, es decir, que dadas cualesquiera $f, g \in F^X$,

$$f\hat{+}g = g\hat{+}f.$$

5. **(EV-5)** Sea $f \in F^X$ cualquiera; es fácil ver que ocurre

$$1 \star f = f$$

   pues, según la definición del producto por escalares dada en (1.4), para toda $x \in X$ se tiene que

$$(1 \star f)(x) = 1f(x) = f(x).$$

6. **(EV-6)** Si $a, b \in F$ y $f \in F^X$, demostremos que

$$(ab) \star f = a \star (b \star f).$$

Sea $x \in X$.

$$((ab) \star f)(x) = abf(x) = a(bf(x)) = a((b \star f)(x)) = (a \star (b \star (f)))(x).$$

7. **(EV-7)** Ejercicio: Demuestra que, para todo $a \in F$ y cualesquiera $f, g \in F^X$,

$$a \star (f \hat{+} g) = a \star f \hat{+} a \star g.$$

8. **(EV-8)** Ejercicio: Demuestra que, para toda $f \in F^X$ y cualesquiera $a, b \in F$,

$$(a + b) \star f = a \star f \hat{+} b \star f.$$

Ejemplo 1.1.1. *Si $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f$ es continua$\}$, es claro que $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Espacio de funciones de soporte finito $F^{(X)}$

Definición 1.1.2. *Sean $X \neq \varnothing$ un conjunto, F un campo. Dada $f : X \longrightarrow F$ función (i.e. un elemento de F^X), definimos su **soporte** como el conjunto de los puntos del dominio para los que f no se anula:*

$$sop(f) := \{x \in X | \ f(x) \neq 0\}.$$

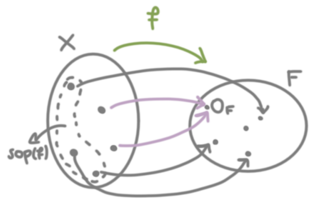


Figure 1.1: Representación gráfica del soporte de una función.

Ejemplo 1.1.3. *Tomemos a $X = \mathbb{N}$. Acostumbramos llamar a los elementos de $F^{\mathbb{N}}$ **sucesiones en** F. De hecho, dada una función $f \in F^{\mathbb{N}}$, es usual identificarla con el conjunto de sus imágenes:*

$$f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad donde\ f_n := f(n).$$

Ejercicio: Demuestre que, si $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tiene soporte finito, entonces $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0$. ¿Se vale la otra implicación? ◇

Definición 1.1.4. *Denotaremos por $F^{(X)}$ al conjunto de las funciones de X en F que tienen soporte finito, es decir,*

$$F^{(X)} := \{f \in F^X | \ |sop(f) < \infty|\}.$$

Para lo que sigue, necesitamos que el lector recuerde (o al menos esté de acuerdo en aceptar como ciertos) los siguientes hechos:

- La cardinalidad del conjunto vacío es 0. El conjunto vacío es el único conjunto de cardinalidad 0.
- Si A y B son dos conjuntos finitos, entonces $A \cup B$ es también finito.
- Si A está contenido en B y B es finito, entonces A también lo es.

Proposición 1.1.5. *Si $X \neq \varnothing$ y F es un campo, entonces $F^{(X)}$ es un subespacio de F^X.*

Demostración. Usemos los criterios dados en la proposición ($\star\!-\!sub$) para mostrar que $F^{(X)} \leq F^X$.

1. Si $\hat{0} : X \longrightarrow F$ es la función cero,

$$sop(\hat{0}) = \{x \in X | \ \hat{0}(x) \neq 0\} = \varnothing,$$

luego, $\hat{0}$ tiene soporte finito, o sea, $\hat{0} \in F^{(X)}$.

2. Sean $f, g \in F^{(X)}$; veamos que $f + g \in F^{(X)}$. Es decir, usando que f y g tienen soporte finito, mostremos que $f + g$ también tiene soporte finito. Si $sop(f + g) = \varnothing$, acabamos. Supongamos ahora que $sop(f + g) \neq \varnothing$. Note que, si $x \in sop(f + g)$, entonces

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) \neq 0,$$

luego, no ocurre $f(x) = 0 = g(x)$, es decir,

$$x \notin (sop(f))^c \cap (sop(g))^c,$$

o sea,

$$x \in sop(f) \cup sop(g).$$

Con esto demostramos la contención

$$sop(f + g) \subseteq sop(f) \cup sop(g).$$

Como $sop(f)$ y $sop(g)$ son, por hipótesis, ambos finitos, su unión también lo es, luego $sop(f + g)$, por ser subconjunto de un conjunto finito, es finito.

3. Sean $f \in F^{(x)}$ y $a \in F$; probemos que $af \in F^{(X)}$. Si $a = 0$, $af = \hat{0} \in F^{(X)}$; supongamos ahora $a \neq 0$. Entonces,

Recuerda que, en un campo, el producto de dos elementos es cero si y sólo si al menos uno de los dos es cero.

$$\begin{aligned} x \in sop(af) &\Leftrightarrow af(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a \neq 0 \ y \ f(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in sop(f). \end{aligned}$$

Así, $sop(af) = sop(f)$, luego, af tiene, al igual que f, soporte finito.

□

1.2 El subespacio generado por un subconjunto y suma de subespacios

Dado V un F−espacio vectorial, sea $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia no vacía de subespacios de V. A partir de esta familia, ¿cómo podemos construir otro subespacio de V? Consideremos a la unión e intersección de la familia, o sea, a los conjuntos

$$\bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha := \{x \in V | \ x \in W_\alpha \ para \ toda \ \alpha \in I\} \subseteq V, \tag{1.6}$$

y

$$\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha := \{x \in V | \ x \in W_\alpha \ para \ algúna \ \alpha \in I\} \subseteq V. \tag{1.7}$$

¿Son estos subespacios de V? Tenemos una respuesta afirmativa y otra negativa.

Proposición 1.2.1. *La intersección* (1.6) *de la familia de subespacios* $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de* V *es un subespacio de* V.

Demostración.

i) Puesto que el cero es elemento de *todo* subespacio de V, claro que $0 \in W_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, luego, $0 \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$

ii, iii) Sean $x, y \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$, $a \in F$; claro que $x + y, ax \in \bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$ pues, dado $\alpha \in I$ un índice cualquiera, $x, y \in W_\alpha$, luego, como W_α es subespacio de V, $x + y, ax \in W_\alpha$.

□

La demostración anterior fue muy sencilla pues, para que un vector sea elemento de la intersección $\bigcap_{\alpha \in I} W_\alpha$, debe estar en *todos* los elementos de la familia a la vez, y todos los W_α cumplen los tres puntos de la proposición (*-sub). La condición que debe cumplir un vector para estár en la unión de la familia es mucho más laxa; es necesario y suficiente que sea elemento de un solo miembro de la familia $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Dados $x, y \in \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tales que $x \in W_{\alpha_1}$ y $y \in W_{\alpha_2}$. Nota que *no podemos decir que x y y son elementos de un mismo subespacio*, luego, esta información no parece implicar que la suma sea elemento de la unión.

Ejemplo 1.2.2. *(Que muestra que la unión de subespacios puede no ser un subespacio). Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto cualquiera. Considere al $\mathbb{R}-$espacio vectorial*

$$\mathbb{R}^{(a,b)} = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} |\ \ f \text{ es función.}\}$$

Sean

$$\mathcal{B}_{a,b} = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} |\ \ f \text{ es acotada}\}, \quad \mathcal{C}_{a,b} = \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} |\ \ f \text{ es continua}\}.$$

Como sabes por tus cursos de cálculo, estos son subespacios de $\mathbb{R}^{(a,b)}$. En la imagen se muestran la gráfica de una función continua f y una acotada g en (a, b) para las que la suma no es ni continua ni acotada (i.e. tales que $f, g \in \mathcal{B}_{a,b} \cup \mathcal{C}_{a,b}$ pero $f + g \notin \mathcal{B}_{a,b} \cup \mathcal{C}_{a,b}$).

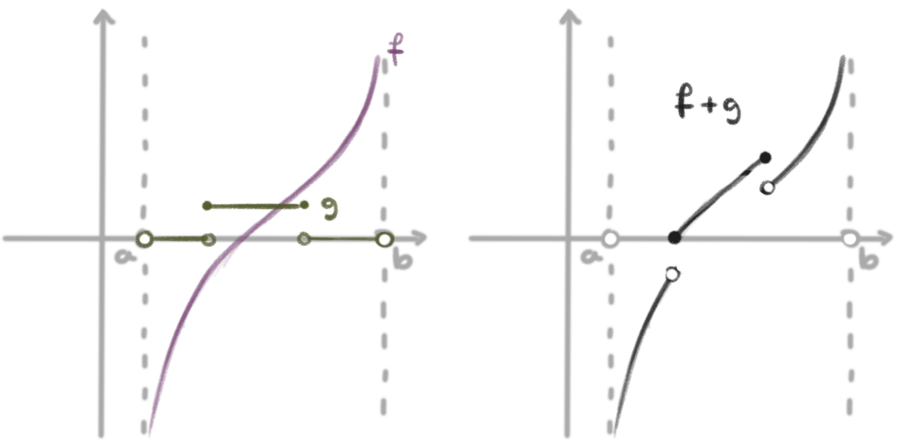


Figure 1.2: Con el sumando continuo rompemos la acotación, y con el sumando acotado, la continuidad.

◇

Ejercicio: Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una colección de subespacios de V tal que

$$(\forall i, j \in I)(\exists k \in I) : \ \ W_i, W_j \subseteq W_k,$$

entonces $\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ es un subespacio de V.

— * * * —

Ahora, dado V un F−espacio vectorial, a veces nos interesará limitarnos a trabajar no con todo el espacio V, sino con un subconjunto X de este. Como también queremos aprovechar la estructura algebráica, nos interesará que tal colección X sea, más que subconjunto, subespacio de V. Esto puede ocurrir o no: lo que siempre podemos hacer es considerar a la familia $\{W \leq V : \ X \subseteq W\}$ de subespacios más pequeños (en el sentido que están propiamente contenidos en V) que contienen a nuestro conjunto de interés de X, y "condensar" a esta familia via su intersección.

Definición 1.2.3. *Sean V un F−espacio vectorial, $X \subseteq V$. El subespacio*

$$\langle X \rangle := \bigcap \{W \leq V : \ X \subseteq W\}, \tag{1.8}$$

*o sea, la intersección de la familia de todos los subespacios de V que contienen a X, es llamado el **subespacio de V generado por X**.*

Proposición 1.2.4. *$\langle X \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a X, es decir,*

$$\forall\ W \leq V : \ X \subseteq W \Rightarrow \langle X \rangle \leq W.$$

Estamos considerando a la contención de conjuntos como orden; el que un conjunto A sea menor que un conjunto B significa que A está contenido en B.

Demostración. Es clara pues, $\langle X \rangle$, al ser por definición la intersección de la familia de subespacios que contienen a X, está contenido en cada uno de sus integrantes.

□

En resumen: si X no es subespacio, siempre podemos considerar a $\langle X \rangle$, *el menor* subespacio de V que contiene al conjunto de interés.

Ejercicio: Demuestre que, si $X \leq V$, entonces $X = \langle X \rangle$.

Observación 1.2.5. *Por definición, $\langle \varnothing \rangle$ es la intersección de la familia de subespacios que contienen a $\varnothing$ - o sea, es la intersección de todos los subespacios de V. Como $\{0\}$ es el menor subespacio de V, concluimos que*

$$\langle \varnothing \rangle = \{0\}.$$

En (1.8) decimos cómo construir a tal $\langle X \rangle$; el objetivo ahora es dar una descripción completa de sus elementos, es decir, dar un criterio concreto en base al cual determinar cuándo un vector x del espacio pertenece a $\langle X \rangle$.

Según la proposición (*-sub), X puede no ser subespacio por cumplirse al menos una de las tres razones siguientes:

- $\hat{0} \notin X$; corregimos esto agregando al vector cero.
- Existen $x, y \in X$ tales que $x + y \notin X$; esto se puede arreglar agregando sumas de elementos de X.
- Existen $a \in F$ y $x \in X$ para los que $ax \notin X$. Para que esto no ocurra, podemos agregar los múltiplos escalares de los elementos de X.

Parece que el problema de no ser subespacio se arregla si agregamos sumas finitas de múltiplos escalares de elementos de X (pues así estamos forzando a que los tres puntos de la proposición (*-sub) ocurran). Demos un nombre a tales sumas de elementos de X.

Definición 1.2.6. *Sea V un $F-$espacio vectorial, $X \subseteq V$. Una* ***combinación lineal*** *en V de elementos de X es cualquier vector de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad \text{con } n \geq 1 \text{ entero, } x_i \in X, a_i \in F \text{ para toda } 1 \leq i \leq n.$$

Según la discusión anterior, parece que para "extender" a X a un subespacio de la forma mínima, hay que agregar todas las combinaciones lineales de elementos de X, pues con esto parece quedar asegurada la cerradura bajo suma y multiplicación por escalares. Confirmamos nuestras sospechas con el siguiente resultado.

Proposición 1.2.7. *Si $\varnothing \neq X \subseteq V$, entonces $\langle X \rangle$ consta de todas las combinaciones lineales de elementos de X, es decir,*

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \middle| \; n \in \mathbb{N}, x_i \in X, a_i \in F \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq n \right\} \tag{1.9}$$

En inglés, al conjunto de la derecha en (1.9) se le conoce como el "span" de X. La proposición 1.2.7 nos dice que el span de un conjunto X es el menor subespacio que contiene a X.

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \middle| \; n \in \mathbb{N}, x_i \in X, a_i \in F \quad \text{para toda } 1 \leq i \leq n \right\};$$

veamos que $\mathcal{A} = \langle X \rangle$.

$\supseteq$] Claro que $\mathcal{A}$ es subespacio de V (Ejercicio: compruebe los detalles!). Además, $\mathcal{A}$ contiene a X (pues $x = \sum_{i=1}^{1} 1_F x \in \mathcal{A}$). De esto se deduce que $\langle X \rangle \subseteq \mathcal{A}$.

$\subseteq$] Sea ahora $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ un elemento genérico de $\mathcal{A}$; mostremos que este es elemento de *cualquier* subespacio W de V que contenga a X - de esto podremos concluir la contención deseada, pues $\langle X \rangle$ *es* la intersección de tales subespacios W. Sea pues $W \leq V$ con $X \subseteq W$. Como cada x_i es elemento de X, todos serán elementos de W, luego, por el lema REF, $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \in W$.

□

Definición 1.2.8. *Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subespacios de V, definimos a su suma como el subespacio generado por su unión, es decir,*

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in I} W_\alpha &:= \left\langle \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha \right\rangle \\
&= \left\{ a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \middle| \; n \geq 1, a_i \in F, w_i \in \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha \right\} \\
&= \{ a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n | \; n \geq 1, a_i \in F, w_i \in W_\alpha \;\; \text{para alguna } \alpha \in I \}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ejercicio: Demuestre que una forma equivalente de escribir al subespacio (1.10) es como

$$\sum_{\alpha \in I} W_\alpha = \{ w_1 + \cdots + w_n : \; n \geq 1, w_i \in W_i \; \forall 1 \leq i \leq n \}. \tag{1.11}$$

Recapitulemos: dados $W_1, W_2 \leq V$,

- $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V,
- $W_1 \cup W_2$ es subespacio si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$. Nota que el resultado de esta operación no da lugar a un nuevo subespacio de V.

- El menor subespacio de V que contiene a W_1 y W_2 es su suma, o sea,

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | \ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Definición 1.2.9. *Si $X \subseteq V$ es tal que $\langle X \rangle = V$, decimos que X* ***genera al espacio*** *V.*

Es decir, X genera a a V si no hay subespacios propios de V que contengan a X; esto, según la proposición 1.2.7, significa que *todo elemento de V puede expresarse como combinación lineal finita de elementos de X.*

1.2.1 Suma directa de subespacios

Sean V un F-espacio vectorial, $\{W_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subespacios de V. Por la proposición 1.2.7 sabemos que *todo* elemento de su suma es de la forma $w_1 + \ldots + w_n$, con $W_i \in W_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo 1.2.10. *Sea el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Considere a los subespacios*

$$W_1 = \{(a, b, 0) | \ a, b \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3,$$

$$W_2 = \{(0, c, d) | \ c, d \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3.$$

Es claro que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$; de hecho, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera del espacio, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(x, y, z) = (x, \alpha y, 0) + (0, (1 - \alpha) y, z). \tag{1.12}$$

Las entradas cero de los elementos de W_1 y W_2 determinan las entradas x y z en la ecuación (1.12), pero en las entradas centrales tenemos libertad de elección -esto se ve reflejado por el parámetro α.

Esto muestra que hay una infinidad de formas de expresar a un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como suma de elementos de $W_1 \cup W_2$.

Considere ahora a los subespacios

$$V_1 = \{(a, 0, 0) | \ a \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{(0, b, 0) | \ b \in \mathbb{R}\},$$

$$V_1 = \{(0, 0, c) | \ c \in \mathbb{R}\}.$$

Claro que $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2 + V_3$; dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera,

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z).$$

Una representación de esta forma es única. Por ejemplo, el que las primeras entradas de los últimos dos sumandos deban ser cero (por definición de V_1 y V_2) forza que la primera entrada del primer sumando sea x. ◇

Definición 1.2.11. *Sea $\{W_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subespacios de V. El subespacio suma $\sum_{i=1}^n W_i$ es llamada una* ***suma directa*** *si cada uno de sus elementos tiene una única representación de la forma*

$$w_1 + \cdots + w_n, \quad \text{con } w_i \in W_i.$$

En este caso, al subespacio $\sum_{i=1}^n W_i$ se le denota por

$$W_1 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

El símbolo $\oplus$ es usado para representar una propiedad del espacio suma $\sum_{i=1}^n W_i$, a saber, la unicidad de las representaciones de sus elementos como sumas de vectores en $\bigcup_{i=1}^n W_i$.

Proposición 1.2.12. *Sean U, W subespacios de V. La suma $U + W$ es directa si y sólo si $U \cap W = \{\hat{0}\}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$] Si existe $x \in U \cap W$ con $x \neq \hat{0}$, entonces,

$$x = \hat{0} + x, \quad con\ \hat{0} \in U, x \in W,$$

y

$$x = x + \hat{0}, \quad con\ x \in U, \hat{0} \in W,$$

luego, la suma $U + W$ no es directa.

$\Leftarrow$] Sea $x \in U + W$; sean $u_1, u_2 \in U$ y $w_1, w_2 \in W$ tales que

$$u_1 + w_1 = x = u_2 + w_2.$$

Entonces,

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\},$$

o sea, $u_1 = u_2$ y $w_1 = w_2$.

□

Note lo siguiente: según la proposición (*-sub), todos los subespacios tienen en común al neutro $\hat{0}$ del espacio, luego, no tiene sentido buscar subespacios disjuntos. Lo más disimiles que pueden llegar a ser $U, W \leq V$ es que su intersección sea $\{0\}$. Esto, según la proposición 1.2.12, equivale a que la suma $U + W$ sea directa.

Suma de subespacios ~ Unión de subconjuntos
Suma directa de subespacios ~ Unión disjunta de subconjuntos

Note que en la proposición 1.2.12 estamos lidiando sólo con dos subespacios. ¿Podemos generalizar este resultado para la suma de n-subespacios? ¿Será cierto que la suma $\sum_{i=1}^{n} W_i$ es directa si y sólo si la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ es $\{\hat{0}\}$? La respuesta es **no** (c.f. ejercicio 10).

1.3 Caso práctico: Representación de información nutricional

Veamos cómo los conceptos introducidos pueden ser de utilidad para modelar y resolver una problemática de la vida real.

Supongamos que a una nutrióloga le interesa la ingesta de

- calorías
- agua
- hidratos de carbono
- fibra
- grasas, y
- proteinas

que un paciente puede obtener al consumir frutas de cierto grupo de interés (por ejemplo, las frutas que puede encontrar a precio accesible en su entorno). Sus datos iniciales son los valores de dichos componentes presentes en las frutas de interés, datos presentados en forma de tabla como se muestra a continuación.

ENERGÍA Y COMPONENTES MAYORITARIOS DE ALGUNAS FRUTAS DE CONSUMO FRECUENTE EN ESPAÑA

Fruta	Energía (kcal)	Agua (g)	Hidratos de carbono (g)	Fibra dietética (g)	Grasas (g)	Proteínas (g)
Aguacate	134	79	1,3	2,4	13,8	1,3
Albaricoque	40	86	9,5	2,1	0,1	0,8
Cerezas	58	82	13,5	1,5	0,5	0,8
Ciruela	45	84	11	2,1	0,15	0,6
Fresas	34	88	7	2,2	0,5	0,7
Kiwi	53	83	12.1	1,5	0,44	1
Limón	39	87	9	1	0,3	0,7
Mandarina	39	86	9	1,9	0,19	0,8
Manzana (Golden)	41	85	10,5	2,3	Trazas	0,3
Melocotón	37	86	9	2,3	0,1	0,6
Melón	37	88	8,4	0,8	0,28	0,9
Naranja	38	86	8,6	2,3	0,3	0,8
Pera	48	84	11,7	2,2	0,3	0,4
Piña	46	85	11,5	1,2	0,1	0,5
Plátano	85	73	20,8	2,5	0,27	1,2
Sandia	22	93	4,5	0,3	0,3	0,5
Uvas (blancas)	63	81	16,1	0,9	Trazas	0,6
Uvas (negras)	67	81	15,5	0,4	0,7	0,6

Figure 1.3: Fuente: `gruporem-ucam.com`

Algunos de sus pacientes son alérgicos a las frutas de su lista; digamos que su nuevo paciente no puede comer manzanas. La nutrióloga se pregunta si es posible sustituir los nutrientes aportados por una manzana con otras frutas de la lista y, si la respuesta es afirmativa, quisiera dar explícitamente combinaciones de frutas que aporten lo mismo que aportaba una cierta cantidad de manzanas (que no pueden ser incluidas en la dieta del paciente). ¿Cómo podemos modelar esta situación?

Podemos representar nuestros datos iniciales como vectores de $\mathbb{R}^6$; por ejemplo, el vector nutricional de una manzana sería

$$x_{manzana} = (41, 85, 10.5, 2.3, 0, 0.3) \in \mathbb{R}^6.$$

Definamos a $\mathcal{A}$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^6$ que consta de todos los vectores fruta,

$$\mathcal{A} = \{x_{aguacate}, x_{albaricoque}, \dots, x_{uvasB}, x_{uvasN}\}.$$

Nota que, en este contexto, las combinaciones lineales con coeficientes naturales tienen una interpretación física; por ejemplo, el vector

$$2x_{pera} + 5x_{fresa} + 3x_{cereza}$$

representa la información nutrimental de 2 peras, 5 fresas y 3 cerezas (luego, la cantidad de calorías y componentes que alguien estaría obteniendo al consumir esta cantidad de frutas).

El problema de la nutrióloga queda expresado en términos de álgebra lineal como sigue: ¿es $x_{manzana}$ elemento del subespacio de $\mathbb{R}^6$ generado por los vectores $x_{aguacate}, x_{albaricoque}, \dots, x_{uvaB}, x_{uvaN}$? Nota que, implícitamente, el problema nos permite limitarnos al conjunto de las combinaciones lineales finitas de los vectores fruta (menos el vector manzana) y no considerar a todo $\mathbb{R}^6$ (para este problema, no nos interesan vectores que no sean combinaciones lineales de vectores fruta). La teoría estudiada antes nos asegura que

- Tal conjunto de combinaciones de vectores fruta es un subespacio de $\mathbb{R}^6$ y,
- de hecho, es el menor subespacio de $\mathbb{R}^6$ que contiene a los vectores fruta menos el manzana.

La pregunta de la nutrióloga queda entonces expresada en ver si ocurre

$$x_{manzana} \in \langle \mathcal{A} - \{x_{manzana}\} \rangle$$

o no.

Observa que los vectores son mucho más que una forma conveniente de almacenar información: podemos hacer operaciones de ellos e interpretarlas en el contexto del problema físico planteado.

No nos interesan todos los elementos de $\mathbb{R}^6$, sino sólo aquellos que sean combinaciones lineales de vectores fruta; estamos reemplazando a nuestro espacio de trabajo $\mathbb{R}^6$ por $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Con las definiciones e ideas que planteamos en los siguientes capítulos, podremos

- Determinar cuándo existen combinaciones de frutas que aporten lo mismo que cierta cantidad de manzanas,
- Decir si hay una única forma o varias de expresar manzanas en términos de combinaciones lineales de frutas específicas
- Usar argumentos de dimensionalidad para determinar cuándo subconjuntos de frutas son suficientes para sustituir a todas las demás

Es fácil pensar requerimientos razonables que complicarían aún más la situación; por ejemplo, considera que, en un escenario realista,

- Un paciente podría tener no solo posibles alergias como limitantes para definir una dieta, sino también un presupuesto mensual al que deba apegarse, presupuesto que podría reducir aún más las opciones o cantidades de fruta que puede consumir (por ejemplo, esto podría implicar que combinaciones lineales que contengan al vector $x_{aguacate}$ sólo sean consideradas cuando su coeficiente -i.e. el escalar por el que se multiplica a $x_{aguacate}$ - no sea mayor a cierto valor).

Figure 1.4: *Cada paciente tiene sus necesidades personales, por ejemplo, las frutas a las que es alérgico (o que no le gustan, y quiere evitar en su dieta) y su presupuesto mensual. Esto cambia el espacio de combinaciones lineales a considerar para cada uno, y las combinaciones lineales aceptables.*

Incluso en esta situación tan simplificada, vemos la utilidad de usar el marco teórico ofrecido por el álgebra lineal para modelar la situación; con los conocimientos de los próximos capítulos seremos capaces de resolver los problemas aquí planteados.

1.4 Ejercicios I

En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, V es un F−espacio vectorial. Los ejercicios marcados con el símbolo son obligatorios para los estudiantes de matemáticas, pero opcionales para los de actuaría.

Ejercicio 1. *Demuestre que*

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \quad a_1 + \cdots + a_n = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$*, pero que*

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \quad a_1 + \cdots + a_n = 1\}$$

no lo es.

Ejercicio 2. *Demuestre que un subconjunto* W *de un espacio vectorial* V *es un subespacio de* V *si y sólo si*

1. $0 \in W$*, y*

2. *para todo* $a \in F$ *y* $x, y \in W$*, se tiene que* $ax + y \in W$*.*

Ejercicio 3. ***El*** F***−espacio vectorial de polinomios con coeficientes en un campo*** F***:*** *Sea* F *un campo. Un **polinomio con coeficientes en el campo*** F *es una función* $f : F \longrightarrow F$ *de la forma*

$$\begin{aligned} f(x) =& a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ =& \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \end{aligned} \tag{1.13}$$

donde $n \geq 1$ *entero y* $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$*. A los* a_i *se les conoce como **coeficientes del polinomio**. Si todos los coeficientes son cero, decimos que* f *es el **polinomio cero**, y definimos a su **grado** como* -1*. Si* $a_n \neq 0$*, decimos que el grado del polinomio es* n *y* a_n *es su **coeficiente principal**. Todo polinomio cuyo coeficiente principal sea* 1 *será llamado **mónico**.*

Haciendo $F = \mathbb{R}$*, el polinomio* $f(x) = x^2 - 1$ *tiene grado dos y es mónico,* $f(x) = 4$ *tiene grado cero.*

Dos polinomios $f(x)$ *y* $g(x)$ *son iguales si y sólo si tienen el mismo grado y sus correspondientes coeficientes son iguales.*

Sea

$$F[x] := \{f \in F^F \mid \ f \text{ es un polinomio}\}$$

el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en F*. Definimos*

Puedes encontrar esta definición del espacio vectorial de polinomios en el Friedberg, p.10. Te recomiendo que estudies también cómo $F[x]$ *es esencialmente igual al espacio* $F^{(\mathbb{N})}$ *de sucesiones en* F *con soporte finito.*

1. *La suma de dos polinomios*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \quad a_n, b_m \neq 0$$

como sigue; sin pérdida de generalidad, supongamos que $n \leq m$*. La suma de* f *con* g *es*

$$(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i,$$

donde, para $n \leq i \leq m$*, definimos* $a_i = 0$*.*

2. *La multiplicación escalar de un polinomio cualquiera* (1.13) *por un escalar* $\alpha \in F$ *como el polinomio*

$$(\alpha f)(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i$$

- *Demuestre que* $F[x]$ *es, con la suma y la multiplicación escalar definida arriba, un* F*-espacio vectorial.*

- *Sea*

$$M[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \quad f \text{ es mónico}\}.$$

  ¿Es $M[x] \leq \mathbb{R}[x]$*?*

- *¿Es* $\mathbb{R}[x] - M[x] \leq \mathbb{R}[x]$*?*

- *Para* $n \geq 0$*, Sea*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] | \text{ el grado de } f \text{ es menor o igual a } n\}.$$

  Demuestre que $\mathbb{R}_n[x] \leq \mathbb{R}[x]$*. Muestre además que* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *genera a* $\mathbb{R}_n[x]$*.*

Ejercicio 4. ***El*** $F-$***espacio vectorial de matrices de dimensión*** $m \times n$ ***con coeficientes en*** F*:*

Dado un campo F*, una* ***matriz*** $m \times n$ ***dimensional con coeficientes en*** F *es una función de la forma*

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow F.$$

Normalmente abreviamos

$$A(i,j) = a_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n,$$

y representamos a la matriz A *como un arreglo rectangular*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definimos tanto la suma de matrices como la multiplicación escalar entrada a entrada: para cualesquiera $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$*,* $\alpha \in F$*,*

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}), \quad \alpha A := (\alpha a_{ij}).$$

- *Demuestre que el conjunto* $M_{m \times n}(F)$ *de las matrices* $m \times n$ *dimensionales con entradas en* F *y las operaciones definidas arriba es un* $F-$*espacio vectorial.*

- *Demuestre que las matrices*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  generan a $M_{2 \times 2}(F)$*.*

- *Demuestre que*

$$D_n := \{A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(F) |\ \ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

  el conjunto de las matrices diagonales $n-$dimensionales, es un subespacio de $M_{n\times n}(F)$.

- *Si*

$$TS_{m,n} := \{A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F) |\ \ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$$

  es el conjunto de las matrices triangulares superiores de dimensión $m \times n$, demuestre que $TS_{m,n} \leq M_{m\times n}(F)$.

Ejercicio 5. *Demuestre que un subconjunto W de V es subespacio de V si y sólo si coincide con el subespacio que genera en V, es decir, que*

$$W \leq V \Leftrightarrow W = \langle W \rangle$$

Ejercicio 6. *Si X y Y son subespacios1 de V, demuestre que*

$$\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle \langle X \rangle \cup \langle Y \rangle \rangle$$

Pista: para la segunda igualdad, simplemente use la definición de suma de subespacios.

Ejercicio 7. *(🦇) De un ejemplo de un subconjunto no vacío U de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado bajo multiplicación escalar, pero que no sea subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

Ejercicio 8. *(🦇) Si W es un subespacio de V, describa al subespacio $W + W$.*

Ejercicio 9. *Si $\{W_i\}_{i=1}^n$ es una familia de subespacios de V, demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *La suma $\sum_{i=1}^n W_i$ es directa.*
- *Si los vectores $w_i \in W_i$ $(1 \leq i \leq n)$ son tales que $w_1 + \cdots + w_n = 0$, entonces toda w_i es cero.*

Es decir, demuestre que determinar si representaciones de la forma $w_1 + \cdots + w_n$ con $w_i \in W_i$ son únicas equivale a ver la unicidad de la representación sólo del vector cero como suma de elementos de $\cup W_i$.

Ejercicio 10. *Use a los subespacios*

$$W_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$W_2 = \{(0, 0, x) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x \in \mathbb{R}\},$$

$$W_1 = \{(0, x, x) \in \mathbb{R}^3 :\ \ x \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^3$ para dar un ejemplo de una familia de subespacios para la que, a pesar de que la intersección es $\{0\}$, la suma no es directa. Pista: para facilitarle el trabajo, use el ejercicio 9.

Ejercicio 11. *Si*

$$W_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n |\ \ a_1 = 0\},$$

$$W_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in F^n |\ \ a_2 = \cdots = a_n = 0\},$$

demuestre que $F^n = W_1 \oplus W_2$.

Ejercicio 12. *Sean $X, Y \subseteq V$. Demuestre que*

- *Si $X \subseteq Y$ entonces $\langle X \rangle \leq \langle Y \rangle$.*
- *Si $X \subseteq Y$ y $\langle X \rangle = V$, entonces $\langle Y \rangle = V$.*
- *$\langle X \cap Y \rangle \subseteq \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$. Busque un ejemplo en el que se de la igualdad y otro en el que la contención sea propia.*

Ejercicio 13. *(🦇) Sea $b \in \mathbb{R}$. Defina a la familia*

$$\mathcal{I}_b := \left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \quad \int_0^1 f(x)dx = b \right\}.$$

Demuestre que $\mathcal{I}_b$ es subespacio de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ si y sólo si $b = 0$.

Ejercicio 14. *(🦇) Sea $A \neq \varnothing$ un conjunto cualquiera, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ el campo de los enteros módulo 2.*

Podemos identificar a todo subconjunto $B \subseteq A$ con su ***función característica****, es decir, la función $\chi_B : A \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definida como*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in B, \\ 0 & si\ x \notin B; \end{cases}$$

recíprocamente, toda función $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ induce un subconjunto de A como

$$B = \{x \in A : \quad f(x) = 1\}.$$

Note que estos procesos son uno el inverso del otro, y que ellos nos permiten establecer una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ -el conjunto potencia de A- y el conjunto $\mathbb{Z}_2^A$ de funciones de A en $\mathbb{Z}_2$. En la sección 1.1 vimos cómo dotar a $\mathbb{Z}_2^A$ de estructura de $\mathbb{Z}_2-$espacio vectorial.

Dados $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, $f, g \in \mathbb{Z}_2^A$, si B y C son los subconjuntos de A que estas funciones inducen,

- *¿Qué subconjunto de A induce la función suma $f + g$?*
- *¿Cuál es el subconjunto de A inducido por la función cero $\hat{0} : A \longrightarrow \mathbb{Z}_2$?*
- *¿Qué subconjunto de A induce $-f$?*
- *¿Cuál induce αf?*
- *Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios de A tal que $\{\chi_{B_i} | \ i \in I\}$ genera al $\mathbb{Z}_2-$espacio vectorial $\mathbb{Z}_2^A$, demuestre que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$.*

1.5 Dependencia e independencia lineal

Definición 1.5.1. *Sea V un $F-$espacio vectorial. Decimos que $S \subseteq V$ es* ***linealmente dependiente*** *si existe un número finito de vectores distintos entre si $x_1, \ldots, x_n \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_n \in F$ no todos cero tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \hat{0}.$$

Abreviamos los términos linealmente dependiente (resp. independiente) como ***l.d.*** *(resp.* ***l.i.****).*

Si S no es linealmente dependiente, diremos que es ***linealmente independiente****.*

En la definición 1.5.1 pedimos

- que los vectores x_i sea distintos entre sí, y
- que al menos uno de los escalares a_i sea no cero,

pues las igualdades

$$1_F x + (-1_F)x = x - x = \hat{0}$$

y

$$0_F x = \hat{0},$$

son ciertas *para todo* $x \in V$, ¡no las vamos a usar para definir un nuevo concepto!

Si un conjunto finito $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ es l.d.(resp. l.i.), acostumbramos decir que los vectores $x_1, \dots, x_n$ son l.d. (resp. l.i.).

Ejercicio: Niegue la definición de dependencia lineal dada en 1.5.1 para obtener la definición de independencia lineal.

Ejemplo 1.5.2.

- *Por vacuidad, el conjunto vacío es linealmente independiente*
- *Todo subconjunto de S que que contenga al cero es linealmente dependiente*

◇

Ejercicio: demuestre a detalle los puntos del ejemplo anterior.

Ejercicio: demuestre que, dados $S \subseteq T \subseteq V$,

- si T es l.i., entonces S es l.i.
- si S es l.d., entonces T es l.d.

Ejercicio: demuestre que si $x_1, \dots, x_n$ distintos entre sí son l.i. y $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \hat{0}$, entonces todos los escalares a_i son iguales a cero.

Proposición 1.5.3. *$S \subseteq V$ es linealmente dependiente si y sólo si existe $x \in S$ tal que $x \in \langle S - \{x\} \rangle$.*

El enunciado dado en la proposición 1.5.3 es la definición de dependencia lineal manejada por Hugo Rincón (REF).

Demostración.

$\Rightarrow$] Sean $x_1, \dots, x_n \in S$ distintos entre sí y $a_1, \dots, a_n$ escalares no cero tales que $\sum_{i=1}^n a_ix_i = \hat{0}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 \neq 0$. Entonces,

$$a_1x_1 = -\sum_{i=2}^n a_ix_i \in \langle S - \{x_1\} \rangle,$$

luego, $x_1 \in \langle S - \{x_1\} \rangle$.

$\Leftarrow$] Sea $x \in S$ tal que $x \in \langle S - \{x\} \rangle$. Sean pues $x_1, \dots, x_n \in S - \{x\}$ distintos entre si tales que $x = \sum_{i=1}^n a_ix_i$. Restando x de ambos lados de la igualdad llegamos a que

$$\hat{0} = \sum_{i=1}^n a_ix_i - x = \sum_{i=1}^n a_ix_i + (-1_F)x.$$

(c.f. prop REF). Como $-1_F \neq 0_F$, esta última igualdad muestra que S es linealmente dependiente.

□

Proposición 1.5.4. *Un singulete* $\{x\} \subseteq V$ *es linealmente independiente en* V *si y sólo si* $x \neq \hat{0}$.

Demostración. En efecto, según la proposición 1.5.3, $\{x\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $x \in \langle \{x\} - \{x\} \rangle = \langle \varnothing \rangle = \{0\}$, o sea, si y sólo si x es el vector cero. □

Proposición 1.5.5. $S \subseteq V$ *es linealmente dependiente si y sólo si existe* $x \in S$ *tal que* $\langle S \rangle = \langle S - \{x\} \rangle$.

Demostración. Usaremos la equivalencia probada en la proposición 1.5.3.

$\Rightarrow$] Sea $x \in S$ tal que $x \in \langle S - \{x\} \rangle$. Como $S - \{x\}$ está contenido en S, trivialmente $\langle S - \{x\} \rangle$ está contenido en $\langle S \rangle$. La otra contención se da también pues, por poder x expresarse como combinación lineal de elementos de $S - \{x\}$, en cualquier combinación lineal de elementos de S se puede reemplazar a x con múltiplos escalares de $S - \{x\}$, es decir, todo elemento de $\langle S \rangle$ es elemento de $\langle S - \{x\} \rangle$.

$\Leftarrow$] Si existe $x \in S$ tal que $\langle S \rangle = \langle S - \{x\} \rangle$, entonces

$$x \in S \subseteq \langle S \rangle = \langle S - \{x\} \rangle.$$

□

Este resultado nos indica que, cuando un conjunto S es l.d., hay al menos un vector que es **redundante**, en el sentido en que hay otros vectores en S que pueden reemplazar a x para generar al span de S; el quitar a x de S no implica una pérdida de información.

Proposición 1.5.6. *Dado* $S \subseteq V$, *son equivalentes las siguientes proposiciones:*

- S *es linealmente independiente*
- *Todo subconjunto finito de* S *es linealmente independiente.*

La proposición 1.5.6 dice que ser l.i. es una ***propiedad de carácter finito*** *(ref wiki).*

Demostración.

$\Rightarrow$] En general, todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es también linealmente independiente.

$\Leftarrow$] Por contrapuesta. Sea S linealmente dependiente; sean pues $x_1, \ldots, x_n \in S$ distintos entre sí y $a_1, \ldots, a_n \in F$ no todos cero tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \hat{0};$$

esta ecuación muestra que el subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de S es linealmente dependiente.

□

Ejemplo 1.5.7. *En el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$, *considere a los vectores*

$$x_1 = (2, -1, 4), x_2 = (1, -1, 3), x_3 = (1, 1, -1), x_4 = (1, -2, -1).$$

¿Son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$? Para que lo fuesen, deben existir escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = \hat{0}.$$

Podemos desglosar esta igualdad en tres (una para cada entrada de los vectores), y llegar a las tres condiciones equivalentes

Aquí estamos reescribiendo nuestro problema original - que consiste de una ecuación en $\mathbb{R}^3$ - en términos de tres ecuaciones en $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = 0, \\ -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4 & = 0, \\ 4a_1 + 3a_2 - a_3 - a_4 & = 0. \end{cases}$$

Usando operaciones elementales, podemos encontrar un sistema de ecuaciones diagonal y equivalente (en el sentido que tenga exactamente las mismas soluciones que el sistema inicial);

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Buscamos entonces soluciones no cero del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 + 2a_4 & = 0, \\ -a_2 + 3a_3 - 3a_4 & = 0, \\ 6a_4 & = 0. \end{cases}$$

La última ecuación implica $a_4 = 0$. La segunda entonces da la relación $3a_3 = a_2$; para asegurarnos de encontrar una solución no trivial, hagamos a_2 no cero, digamos, $a_2 = 3$. Entonces, $a_3 = 1$. La primera ecuación se reescribe entonces como $a_1 + 3 - 1 = 0$, luego, $a_1 = -2$.

Note que, en efecto, ocurre

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = \hat{0}.$$

Con esto concluimos que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es linealmente dependiente. ◇

Ejemplo 1.5.8. *Sean los vectores*

$$\hat{x} = (2,3,1),\ \hat{y} = (1,-1,2),\ ,\hat{z} = (7,3,\alpha) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinemos para qué valores de α esta colección es linealmente independiente. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = \hat{0}.$$

a, b, c son soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2a + b + 7c & = 0, \\ 3a - b + 3c & = 0, \\ a + 2b + \alpha c & = 0. \end{cases}$$

Busquemos un sistema de ecuaciones diagonal equivalente a este;

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & -3 & 7-2\alpha & 0 \\ 0 & -7 & 3-3\alpha & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{3} + \frac{5}{3}\alpha & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, el sistema a resolver equivale a

$$\begin{cases} a + 2b + \alpha c & = 0, \\ b + \left(-\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\alpha\right) c & = 0, \\ \left(-\frac{40}{3} + \frac{5}{3}\alpha\right) c & = 0. \end{cases}$$

Esta forma nos permite ver que el que la solución trivial $a = b = c = 0$ sea la única solución del sistema -es decir, el que la colección de vectores dada al inicio sea linealmente independiente - equivale a que $-\frac{40}{3} + \frac{5}{3}\alpha$ sea cero, o sea, a que $\alpha = 8$. (¿por qué?). ◇

Ejemplo 1.5.9. *¿Verdadero o falso?*

- *"Si S es un conjunto l.d., entonces cada elemento de S es combinación lineal de otros elementos de S." Falso. Ejercicio: construye un ejemplo.*
- *"Subconjuntos de conjuntos l.d. son l.d." Falso. Toma un conjunto l.d. que contenga al menos un vector x no cero; $\{x\}$ es un subconjunto de este que es l.i..*

1.6 Bases y dimensión

Definición 1.6.1. *Sea V un $F-$espacio vectorial. Un subconjunto de V que sea linealmente independiente y que genere a V será llamado una* ***base*** *del espacio.*

Ejemplo 1.6.2. *Ejercicio: demuestre las siguientes afirmaciones.*

- *El vacío es la única base del $F-$espacio vectorial $\{0\}$.*
- *En F^n, si e_i es el vector de F_n cuyas entradas son cero menos la $i-$ésima, que es uno, entonces*
$$\{e_1, \dots, e_n\}$$
es una base de F^n. A esta se le conoce como la ***base canónica de*** *F^n.*
- *En $F[x]$ - el $F-$espacio vectorial de polinomios con coeficientes en F - el conjunto*
$$\{x^k : \ k \in \mathbb{N}\}, \ \ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$
es una base de este espacio.
- *El conjunto*
$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$
es una base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Teorema 1.6.3. *Sea V un $F-$espacio vectorial distinto de $\{0\}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *$\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq V$ una base del espacio.*
- *Todo vector $\hat{x} \in V$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$.*

En este sentido los conjuntos generadores linealmente independientes son los elementos constructivos de los espacios vectoriales.

Demostración. Antes de comenzar, recuerde que, según la proposición 1.2.7,

$$\langle\mathcal{B}\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \middle|\ n \in \mathbb{N}, v_i \in \mathcal{B}, a_i \in F \quad \textit{para toda } 1 \leq i \leq n\right\}$$

Además, el que un vector $\hat{x} \in V$ pueda expresarse de forma única como combinación lineal de elementos de S significa que cualesquiera dos combinaciones lineales de S iguales a x tendrán los mismos coeficientes.

⇒) Supongamos que $\mathcal{B}$ es base de V. Sea $\hat{x} \in V$. Puesto que $V = \langle\mathcal{B}\rangle$, sabemos que $\hat{x}$ es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Sean dos representaciones (véase la nota [✭])

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i, \tag{1.14}$$

con $v_i \in \mathcal{B}$ para toda $1 \leq i \leq n$ Entonces,

$$\hat{0} = \hat{x} - \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i;$$

por ser $\mathcal{B}$ linealmente independiente, esto último implica que, para toda i, $a_i - b_i = 0$, luego, que $a_i = b_i$, y que las representaciones (1.14) son iguales.

⇐) El que todo vector del espacio pueda expresarse como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ ya significa que $\mathcal{B}$ genera a todo el espacio V. Para demostrar que $\mathcal{B}$ es también l.i., tomemos un subconjunto finito arbitrario $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de él y mostremos que es l.i. (c.f. proposición 1.5.6). Si los escalares $a_1, \ldots, a_n$ son tales que

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = \hat{0},$$

puesto que también se tiene

$$0 x_1 + \cdots + 0 x_n = \hat{0},$$

por unicidad concluimos que $a_i = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

□

Nota [✭:]En realidad, debíamos de partir de dos representaciones de $\hat{x}$ de la forma

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{l} c_i w_i, \quad \hat{x} = \sum_{k=1}^{m} d_k u_k, \qquad c_i, d_k \in F, w_i, u_k \in \mathcal{B} \tag{1.15}$$

y demostrar que $l = m$, que los w_i son una permutación de los u_k (i.e. un reordenamiento) y que los correspondientes coeficientes c_i y d_k son iguales entre sí. Sin embargo, podemos limitarnos a usar representaciones como las dadas en (1.14) - que tienen el mismo número de sumandos n y consideran a los mismos vectores v_i - sin pérdida de generalidad, pues podemos convertir dos representaciones (1.15) a unas de la forma (1.14) sumando ceros y renombrando los vectores.

Por ejemplo, si $F = \mathbb{R}$ y tenemos las representaciones

$$\hat{x} = 2w_1 + 3u_1 - 7w_3 + 4u_3 \qquad (w_2 = u_1, w_4 = u_3)$$

y

$$\hat{x} = 1u_1 - 0.3u_2 + 5u_3,$$

podemos reemplazarlas por

$$\hat{x} = 3u_1 + 0u_2 + 4u_3 + 2w_1 - 7w_3$$

y

$$\hat{x} = 1u_1 - 0.3u_2 + 5u_3 + 0w_1 + 0w_3.$$

respectivamente

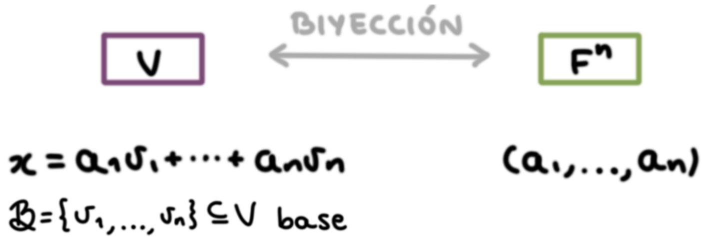


Figure 1.5: Si se tiene una base finita $\mathcal{B}$ de V, el teorema 1.6.3 da una biyección entre V y F^n. Más adelante que esta es más que una biyección, pues también preserva la estructura algebráica de los subespacios.

Lema 1.6.4. *Sean S un subconjunto l.i. de V, $x \in V - S$. Entonces, $S \cup \{x\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $x \in \langle S \rangle$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Suponiendo que x no está en el generado por S, mostremos que $S \cup \{x\}$ es l.i. o, equivalentemente, que todo subconjunto finito de él lo es. Sea $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x\}$ un subconjunto finito de $S \cup \{x\}$ (¿por qué sólo interesa el caso en el que el subconjuto contiene a x?). Sean a_i escalares tales que

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x = \hat{0}.$$

Si a_n fuese distinto de cero, despejando tendríamos que

$$x = -\frac{a_1}{a_n} x_1 + \cdots + -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_{n-1} \in \langle S \rangle \qquad ↯$$

Así, $a_n = 0$. Luego,

$$a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} = \hat{0}$$

y, como S es l.i., esto último implica la igualdad a cero de todos los coeficientes.

$\Leftarrow$) Puesto que

$$x \in \langle S \rangle = \langle (S \cup \{x\}) - \{x\} \rangle,$$

según la proposición 1.5.3, $S \cup \{x\}$ es l.d..

□

Teorema 1.6.5. *Si un espacio vectorial V es generado por un conjunto finito S_0, entonces un subconjunto de S_0 es base para V.*

El teorema consiste en extrar bases de conjuntos generadores finitos.

Demostración. Si $S_0 = \varnothing, \{0\}$, entonces $V = \{0\}$, y en ambos casos puede extrarse del conjunto generador S_0 al vacío, que es una base del espacio.

Supongamos ahora que $V \neq \{0\}$ o, equivalentemente, que S_0 contiene al menos un vector no cero x_1. Según el ejercicio REF, $\{x_1\}$ es linealmente independiente. Continue escogiendo vectores $x_2, \dots, x_n \in S_0$ tales que $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ sigue siendo linealmente independiente y

$$x \in S_0 - S \Rightarrow S \cup \{x\} \quad \textit{es l.d.}. \tag{1.16}$$

Según el lema 1.6.4, esto puede hacerse escogiendo $x_i \in (V - \langle\{x_1, \dots, x_{i-1}\}\rangle) \cap S_0$.

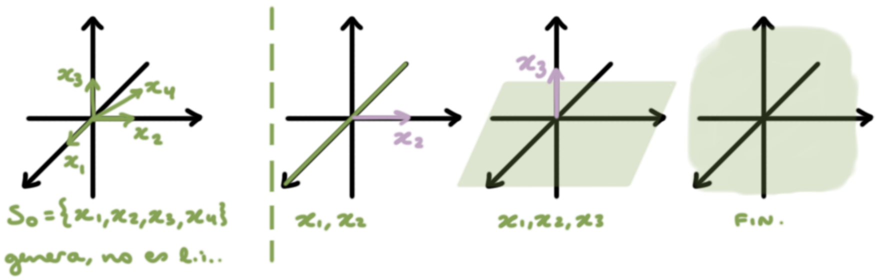


Figure 1.6: Figura que ilustra el proceso para la colección de cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$ que se muestra en el diagrama.

Como S es finito, este proceso en efecto debe acabar, es decir, no podemos ampliar indefinidamente a nuestro subconjunto l.i. de S_0.

Aformamos que el l.i. S es base del espacio V. Para demostrar esto, bastará ver que $S_0 \subseteq \langle S\rangle$ pues, en ese caso,

$$V = \langle S_0\rangle \leq \langle\langle S\rangle\rangle = \langle S\rangle \leq V.$$

Sea pues $x \in S_0$. Si $x \in S$, claramente $x \in \langle S\rangle$. En caso contrario, según 1.16, $S \cup \{x\}$ es l.d., luego, por el lema 1.6.4, $x \in \langle S\rangle$. □

Corolario 1.6.6. *Si un espacio vectorial tiene un subconjunto finito que lo genera, entonces tiene base (finita).*

La ventaja de la demostración del teorema 1.6.5 es que es *constructiva*, es decir, no sólo muestra la existencia de tales bases, sino que explica cómo construirlas.

Nota que hasta el momento no hemos dicho nada sobre la existencia de bases en un espacio vectorial; nos vamos a limitar en esta sección a hacer inferencias sobre espacios vectoriales que, por hipótesis, tengan bases.

Teorema 1.6.7. *Sean V un $F-$espacio vectorial, β una base V con n elementos, $n \in \mathbb{N}$. Sea $S = \{y_1, \dots, y_m\}$ un subconjunto linealmente independiente con $m \leq n$. Entonces, existe S_1 subconjunto de β con $n - m$ elementos tal que $\langle S \cup S_1\rangle = V$.*

Demostración. Vamos a proceder por inducción sobre $m \leq n$.

- *Base de inducción:* si $m = 0$, o sea, si $S = \varnothing$, entonces $S_1 = \beta$ funciona.

- *Paso inductivo:* supongamos el teorema cierto para $m < n$ y demostremos que el teorema también se cumple para $m + 1$. Sea pues $S = \{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}\}$ un subconjunto l.i. de $m + 1$ elementos. Como $\{y_1, \dots y_m\}$ es un l.i. de m elementos, por hipótesis de inducción existe $\{x_1, \dots, x_{n-m}\} \subseteq \beta$ tal que

$$\langle\{y_1, \dots, x_m\} \cup \{x_1, \dots, x_{n-m}\}\rangle = V. \tag{1.17}$$

Existen pues escalares $a_i, b_j \in F$ tales que

$$y_{m+1} = a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m + b_1 x_1 + \cdots + b_{n-m} x_{n-m}.$$

Como S es l.i., y_{m+1} no puede ponerse como combinación lineal de otros elementos de S, luego, al menos algún b_j debe no ser cero; sin pérdida de generalidad, digamos que $b_1 \neq 0$. Entonces, podemos despejar a x_1 de la ecuación anterior y llegar a que

$$x_1 \in \langle \{y_1, \ldots, y_{m+1}\} \cup \{x_2, \ldots, x_{n-m}\} \rangle;$$

de esto se sigue que

$$\{y_1, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}\} \subseteq \langle y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, x_2, \ldots, x_{n-m} \rangle.$$

Tomando generados a ambos lados de la igualdad y usando (1.17), llegamos a que el subconjunto $\{x_2, \ldots, x_{n-m}\}$ de $n - (m+1)$ elementos de β es tal que

$$\langle \{y_1, \ldots, y_{m+1}\} \cup \{x_2, \ldots, x_{n-m}\} \rangle = V.$$

$\square$

Corolario 1.6.8. *Sea V un $F-$espacio vectorial que tiene una base β con n elementos. Entonces, cualquier subconjunto l.i. de V con n elemenos es base de V.*

Demostración. Según el teorema 1.6.7, si S es un tal subconjunto l.i., entonces existe $S_1 \subseteq \beta$ tal que $S \cup S_1$ genera a V y S_1 tiene $n - n = 0$ elementos; entonces, tal S_1 debe ser el vacío, y $S = S \cup \varnothing$, además de ser l.i., genera a V, luego, es base del espacio.

$\square$

Ejemplo 1.6.9. *En los ejercicios mostraste que $\mathbb{R}^3$ tiene a $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ como base. Sean los vectores $x_1 = (1,-3,2)$, $x_2 = (4,1,0)$ y $x_3 = (0,2,-1)$. Es fácil ver que estos son linealmente independientes. Según el corolario 1.6.8, esto implica que ellos conforman una base para $\mathbb{R}^3$.*

Este Corolario nos indica que la cardinalidad de una base finita de V acota la cardinalidad de los subconjuntos l.i. del espacio.

Corolario 1.6.10. *Sea V un $F-$espacio vectorial. Si existe β base de V con n elementos, entonces cualquier subconjunto de V con más de n elementos es l.d..*

Demostración. Sea $S \subseteq V$ con $|S| > n$. Supongamos que S es l.i.. Si S_1 es un subconjunto de S con al menos n elementos, entonces al igual que S es l.i., luego, por el corolario 1.6.8 es una base del espacio, entonces, $\langle S_1 \rangle = V$. Si $x \in S - S_1$, como $x \in V = \langle S_1 \rangle$, por el lema 1.6.4, $S_1 \cup \{x\} \subseteq S$ es l.d., luego, S es l.d. ↯

$\square$

Corolario 1.6.11. *Sea V un $F-$espacio vectorial. Si existe $\beta \subseteq V$ base de n elementos, entonces cualquier otra base de V tendrá n elementos.*

Demostración. Sea $\gamma \subseteq V$ otra base de V. Como γ (respectivamente, β) es linealmente independiente y β (respectivamente, γ) es base del espacio, por el corolario 1.6.10 $|\gamma| \leq |\beta|$ (respectivamente, $|\beta| \leq |\gamma|$).

□

Este último resultado nos permite introducir la noción de dimensión.

Definición 1.6.12. *Un espacio vectorial se dice **finito dimensional** si tiene una base que consta de un número finito de elementos. El único número de elementos en cada base del espacio se llama la **dimensión de** V, y se denotará por $dim(V)$. Todo espacio vectorial que no sea finito dimensional será llamado **infinito dimensional**.*

Nota que hasta el momento hemos encontrado resultados válidos para cuando el espacio vectorial tiene una base finita; aunque con lo visto hasta ahora no podemos asegurar que cualquier espacio vectorial tiene base, esto es cierto y puede demostrarse usando el Lema de Zorn. Puedes consultar los detalles en Friedberg, sección 1.7. En la práctica, casi siempre se usarán espacios de dimensión finita (de hecho, algún $\mathbb{R}^n$).

Ejemplo 1.6.13. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

- *El espacio vectorial $\{0\}$ tiene dimensión cero.*
- *El espacio vectorial F^n tiene dimensión n.*
- *El espacio vectorial $M_{m\times n}(F)$ tiene dimensión $m \times n$.*
- *El espacio vectorial $P_n(F)$ tiene dimensión $n + 1$.*
- *El espacio vectorial $P(F)$ es infinito dimensional.*

Ejemplo 1.6.14. *Ilustramos a continuación el que la dimensión de un $F-$espacio vectorial V depende no solo del grupo abeliano V, sino también del campo F.*

- *El $\mathbb{C}-$ espacio vectorial $\mathbb{C}$ tiene dimensión 1. En efecto, $\{1\}$ es base para él, pues*
  - *el singulete $\{1\}$ es l.i., y,*
  - *dado $z \in \mathbb{C}$, $z = 1 \cdot z \in \langle\{1\}\rangle$, luego, $\langle\{1\} = \mathbb{C}$.*
- *El $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{C}$ tiene dimensión 2, pues una base de este espacio es $\{1, i\}$;*
  - *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$), $z = a \cdot 1 + b \cdot i \in \langle\{1, i\}\rangle$, y*
  - *no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = i$, luego, i no es múltiplo escalar de 1, por lo que $\{1, i\}$ es l.i..*

Corolario 1.6.15. *Sea V un $F-$espacio vectorial de dimensión n. Si $S \subseteq V$ genera a V y tiene a lo más n elementos, entonces S es base de V (luego, $|S| = n$).*

Demostración. Por el teorema 1.6.5, sabemos que existe $S_1 \subseteq S$ base de V. Entonces, como V es $n-$dimensional, $|S_1| = n$; entonces, $|S| \leq n$ y S tiene un subconjunto S_1 de n elementos, luego S tiene n elementos y coincide con S_1, por lo tanto, es base de V. □

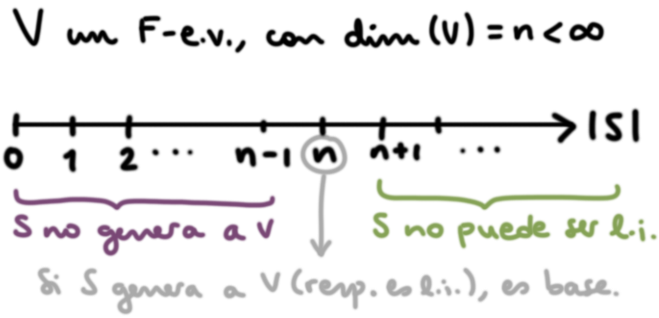


Figure 1.7: Según lo estudiado ahora, la cardinalidad de un subconjunto de un espacio vectorial n−dimensional nos indica si puede o no ser l.i. o generador.

Corolario 1.6.16. *Sea β una base de un espacio vectorial V de dimensión n. Sea $S \subseteq V$ linealmente independiente. Existe $S_1 \subseteq \beta$ tal que $S \cup S_1$ es base de V.*

Este corolario nos explica cómo extender l.i.'s a bases finitas.

Demostración. Por el corolario 1.6.10, $m := |S| \leq n$, entonces, por el teorema 1.6.7, existe $S_1 \subseteq \beta$ con $|S_1| = n - m$ tal que $S \cup S_1$ genera a V. Claro que $|S \cup S_1| \leq n$; así, por el corolario 1.6.15, $S \cup S_1$ es base de V. □

Resumimos lo deducido hasta ahora:

- Una base de un espacio vectorial es un subconjunto de este que lo genera y es linealmente independiente.
- Si V tiene una base finita, entonces cualquier base de V tiene el mismo número de vectores. A este número n se le llama la dimensión de V.
- En este caso, todo subconjunto linealmente independiente o generador de n elementos es base del espacio,
- todo subconjunto l.i. contiene a lo más n vectores (c.f. corolario 1.6.10), y en caso de tener menos de n vectores (i.e. en caso de no ser base) puede completarse a una base del espacio (c.f. corolario 1.6.16).
- Recíprocamente, si $dim(V) = n$, entonces todo subconjunto generador contiene por lo menos n elementos y de él se puede extraer una base de V eliminando vectores que hagan al generador redundante (recuerda este proceso explicado en la demostración del teorema 1.6.5).

Agregar el proceso para extender un l.i. a una base de un espacio finito dimensional con la ayuda del lema 1.6.4. Poner el ejemplo práctico en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1.7 Caso práctico: Interpolación con polinomios de Lagrange

La situación es la siguiente: se tiene un conjunto de $n + 1$ datos

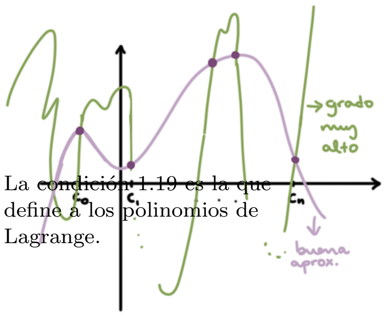
$$\{(c_0, b_0), (c_1, b_1), \ldots, (c_n, b_n)\},$$

Interpolación: obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto de puntos.

con $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$, y se requiere hacer una interpolación de estos con un polinomio del menor grado posible.

- Nos gustaría usar un polinomio, pues es una función con la que es muy fácil trabajar, tanto teórica como prácticamente.

- Además, no queremos que el grado sea alto (relativo a la cantidad de datos) para evitar situaciones como las de la figura: el aumentar el grado del polinomio aumenta el número de ceros de este, luego, la cantidad de oscilaciones, por lo que usar un grado demasiado alto hace que, a pesar de que el polinomio coincida con los puntos b_i en los valores c_i, no modele bien su patrón de comportamiento.



La condición 1.19 es la que define a los polinomios de Lagrange.

Para $0 \leq i \leq n$, definamos

$$f_i(x) := \frac{(x-c_0)(x-c_1)\cdots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\cdots(x-c_n)}{(c_i-c_0)(c_i-c_1)\cdots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\cdots(c_i-c_n)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}. \tag{1.18}$$

A estos $n+1$ polinomios se les llama los **polinomios de Lagrange asociados a** $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Por supuesto que

$$f_i(c_j) = \begin{cases} 0 & si\ j \neq i, \\ 1 & si\ j = i. \end{cases} \tag{1.19}$$

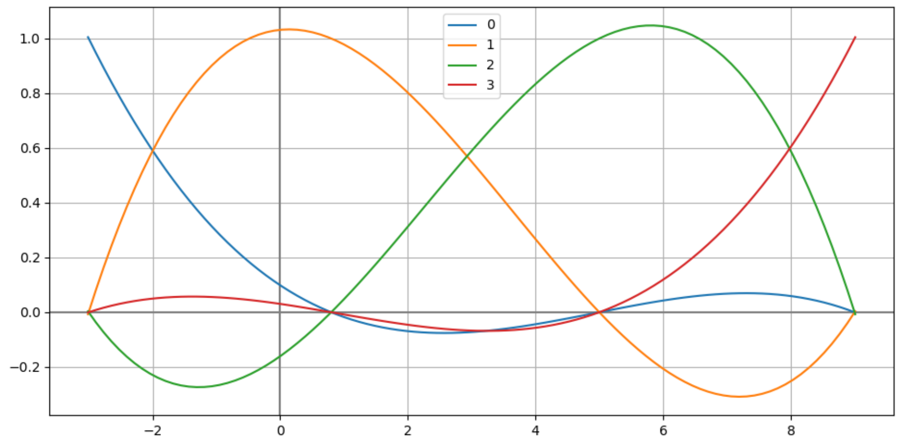


Figure 1.8: Polinomios de Lagrange asociados a la malla $[-3, 0.8, 5, 9]$.

Proposición 1.7.1. *Sean $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ números reales. Si $\beta = \{f_0, \ldots, f_n\}$ es el conjunto de los polinomios de Lagrange* (1.18) *asociados a estos números, entonces β es una base del F espacio vectorial $P_n(F)$.*

Demostración. Si demostramos que el conjunto de $n+1$ vectores β es l.i. podremos concluir que es base de $P_n(F)$ (¿por qué?). Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$ tales que $a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n$ es el polinomio ero. Entonces, para toda $0 \leq j \leq n$, usando la propiedad (1.19) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \hat{0}(c_j) =& (a_0 f_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n)(c_j) \\ =& \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(c_j) = a_j \cdot 1 = a_j. \end{aligned}$$

□

Así, dado $g \in P_n(F)$ cualquiera, existen únicos $b_i \in F$ tales que $g = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i$; de hecho, la propiedad (1.19) nos permite dar explícitamente a tales coeficientes b_i; para toda $0 \leq j \leq n$,

$$g(c_j) = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i f_i\right)(c_j) = b_j.$$

Así,

$$g = \sum_{i=0}^{n} g(c_i) f_i. \quad \textit{(Ecuación de interpolación de Lagrange)} \tag{1.20}$$

Regresando a la situación planteada al inicio, dada la colección de datos

$$\{(c_0, b_0), (c_1, b_1), \ldots, (c_n, b_n)\},$$

el único polinomio g de grado a lo más n tal que $g(c_i) = b_i$ para toda i es (1.20).

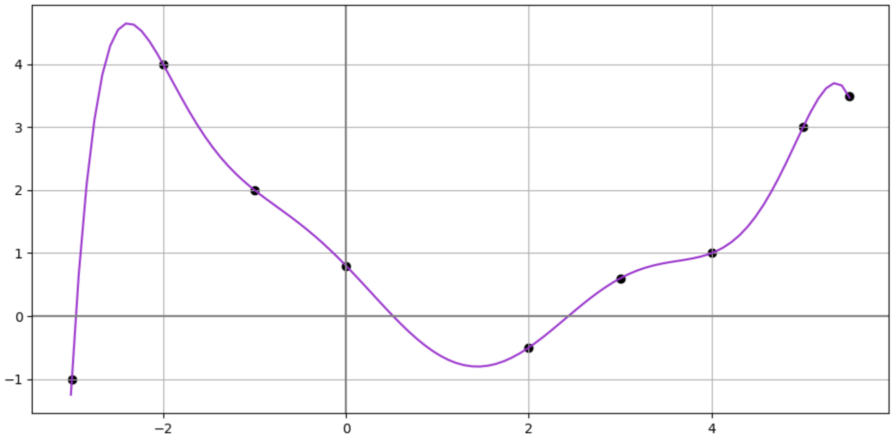


Figure 1.9: Polinomio de interpolación de Lagrange para los datos $(-3,-1), (-2,4), (-1,2), (0,0.8)$, $(2,-0.5), (3,0.6), (4,1)$, $(5,3), (5.5,3.5)$.

1.8 Algunos resultados de dimensión

Teorema 1.8.1. *Sea V un $F-$espacio vectorial de dimensión n. Todo subespacio de V será también finito dimensional, y si dimensión será menor o igual a n; si es igual a n, entonces coincide con todo el espacio V.*

Demostración. Sea $W \leq V$. Si $W = \{0\}$, entonces $dim(W) = 0 \leq n$. Supongamos ahora que W tiene al menos un elemento no cero x_1. El singulete $\{x_1\}$ es entonces l.i. (c.f. proposición 1.5.4). Podemos continuar de esta forma tomando elementos $x_1, \ldots, x_k$ de W tales que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es l.i. pero, adjuntando otro vector de W, se pierde la independencia lineal (esto porque en V no puede haber subconjuntos linealmente independientes de más de elementos, luego, de hecho ocurre $k \leq n$). Según el lema 1.6.4, esto implica que

$$\forall x \in W - \{x_1, \ldots, x_k\} : \quad x \in \langle \{x_1, \ldots, x_k\} \rangle,$$

luego,

$$W = \langle \{x_1, \ldots, x_k\} \rangle.$$

Así, el l.i. $\{x_1, \ldots, x_k\}$ genera a W, por lo tanto, es base de W. Entonces, $dim(W) = k \leq n$.

Si ocurriese $dim(W) = n$, entonces una base β de W es un subconjunto l.i. de V de $n = dim(V)$ elementos, por lo tanto, es también una base de V (c.f. corolario 1.6.8), luego,

$$W = \langle \beta \rangle = V.$$

□

Corolario 1.8.2. *Si V es finito dimensional, entonces toda base β de un subespacio de W puede extenderse a una base de V.*

Demostración. Si β es base de W, en particular es un subconjunto l.i. de V, luego, según el corolario 1.6.16, puede extenderse a una base de V. $\square$

Teorema 1.8.3. *Si W_1, W_2 son dos subespacios de V finito dimensionales, entonces $W_1 + W_2$ es también finito dimensional, y*

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2).$$

Demostración. Note primero que $W_1 \cap W_2$ es subespacio de un espacio finito dimensional (por ejemplo, de W_1), luego, es también finito dimensional. Sea pues $\beta_0 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ base de $W_1 \cap W_2$, y sean $\beta_1 = \{y_1, \ldots, y_r\}$, $\beta_2 = \{z_1, \ldots, z_m\}$ tales que

$$\beta_0 \cup \beta_i \qquad \textit{es base de } W_i,\ i = 1, 2.$$

- Veamos que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ es l.i.. Sea escalares a_i, b_j y c_l tales que

  $$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1y_1 + \cdots b_ry_r + c_1z_1 + \cdots + c_mz_m = \hat{0}. \tag{1.21}$$

  Definiendo

  $$v_0 = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k,\ v_1 = b_1y_1 + \cdots b_ry_r,\ v_2 = c_1z_1 + \cdots + c_mz_m,$$

  la ecuación (1.21) se reescribe como

  $$v_0 + v_1 + v_2 = \hat{0}.$$

  Por supuesto que $v_0 \in W_1 \cap W_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$. Despejando a v_2 de esta última ecuación, se tiene que $v_2 = v_0 + v_1 \in W_1$, luego, $v_2 \in W_1 \cap W_2$. Puesto que β_0 es base de este espacio, existen escalares d_i tales que

  $$v_2 = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n; \tag{1.22}$$

  sustituyendo en (1.21), se llega a que

  $$(a_1 + d_1)x_1 + \cdots + (a_k + d_k)x_k + b_1y_1 + \cdots + b_ky_k = \hat{0};$$

  la independencia lineal de $\beta_0 \cup \beta_1$ implica que todos los escalares de la combinación lineal anterior son cero, en particular, que $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Sustituyendo esto en (1.21), se tiene que

  $$(a_1)x_1 + \cdots + (a_k)x_k + c_1z_1 + \cdots + c_mz_m = \hat{0}.$$

  Ahora la independencia lineal de $\beta_0 \cup \beta_2$ nos permite concluir que también los escalares a_i y c_l son todos cero.

  Con esto demostramos la independencia lineal de $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$. Nota que esto implica que β_0, β_1 y β_2 son ajenos dos a dos, luego,

  $$|\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2| = k + r + m. \tag{1.23}$$

- Mostremos que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ genera a $W_1 + W_2$;

  $$\begin{aligned} \langle \beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2 \rangle =& \langle (\beta_0 \cup \beta_1) \cup (\beta_0 \cup \beta_2) \rangle \\ =& \langle \beta_0 \cup \beta_1 \rangle + \langle \beta_0 \cup \beta_2 \rangle \\ =& W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que, para cualesquiera subconjuntos $A, B \subseteq V$,

$$\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle.$$

Hemos demostrado así que $\beta_0 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ es base de $W_1 + W_2$; de esto y (1.23) se concluye que

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_1) = k + r + m &= (k + r) + (k + m) - k \\ &= dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2). \end{aligned}$$

□

De este teorema y de la proposición 1.2.12 se sigue el siguiente

Corolario 1.8.4. *Si W_1 y W_2 son subespacios de V finito dimensionales, entonces la suma $W_1 + W_2$ es directa si y sólo si*

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2).$$

Ejemplo 1.8.5. *Si U, V son dos subespacios de $\mathbb{R}^9$ ambos de dimensión 5, entonces su suma no puede ser directa, pues*

$$9 \geq dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 10 - dim(U \cap V),$$

luego, $dim(U \cap V) \geq 1$, por lo que no puede ocurrir $U \cap V = \{0\}$.

Ejemplo 1.8.6. *Considere al $\mathbb{R}$ espacio vectorial $P_4(\mathbb{R})$ de los polinomios con coeficientes reales y grado no mayor a cuatro. Sea*

$$U = \{f \in P_4(\mathbb{R}) | \ f(6) = 0\}$$

el conjunto de los polinomios de grado a lo más cuatro que tienen al 6 como raíz. Claro que U es un subespacio (propia) de $P_4(\mathbb{R})$, pues

- *El polinomio cero tiene a 6 como raíz,*
- *Si $f, g \in U$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces 6 es raíz del polinomio $af + g$, pues $(af + g)(6) = a \cdot f(6) + g(6) = a \cdot 0 + 0 = 0$.*

Según el teorema 1.8.1, $0 \leq dim(U) \leq 4$ (pues $dim(P_4) = 5$). Observe que los cuatro polinomios

$$f_i(x) := (x - 6)^i, \quad 1 \leq i \leq 4$$

son todos elementos de U, y además son linealmente independientes (sus grados son todos distintos entre sí), luego, ellos conforman una base para el espacio, y $dim(U) = 4$.

Una base de $P_4(\mathbb{R})$ que contiene a esta base de U es

$$\beta = \{1, f_1, f_2, f_3, f_4\}.$$

Nota que el subespacio

$$W = \{f \in P_4(\mathbb{R}) | \ f \text{ es un polinomio constante o el polinomio cero}\}$$

es tal que $P_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$, pues $U \cap W = \{0\}$ - el único elemento de W que tiene a 6 como raíz es el polinomio cero (de hecho, todo número real es raíz del polinomio cero, no hay nada especial en el número 6 tomado para este ejemplo).

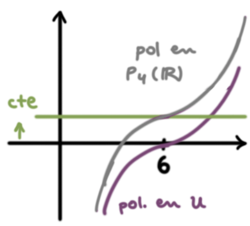


Figure 1.10: Todo polinomio en $P_4(\mathbb{R})$ se expresa de forma única como la suma de un polinomio en U y uno constante.

Terminemos con unos comentarios más sobre el concepto de dimensión: es muy importante no confundir la noción de dimensión con la de cardinalidad: por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$,

- toda recta que pasa por el origen es un subespacio de dimensión uno, y su cardinalidad $|\mathbb{R}|$,
- todo plano que pasa por el origen es un subespacio de dimensión dos, y su cardinalidad es $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Nótese que la dimensión parece ser un mejor indicador del “tamaño” de un subespacio, no la cardinalidad de este.

1.9 Ejercicios II

En lo que sigue, a menos que se indique lo contrario, V es un $F-$espacio vectorial. Los ejercicios marcados con el símbolo son obligatorios para los estudiantes de matemáticas, pero opcionales para los de actuaría.

Ejercicio 15. *Demuestre que si $f \in P_n(f)$ es tal que $f(c_j) = 0$ para $n+1$ elementos distintos $c_0, \ldots, c_n$ del campo F, entonces f es el polinomio cero. Pista: use polinomios de interpolación de Lagrange*

Ejercicio 16. *Usando el teorema 1.8.1, demuestra que*

- *los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, rectas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$, y*
- *los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son $\{0\}$, rectas y planos que pasan por el origen, y $\mathbb{R}^3$.*

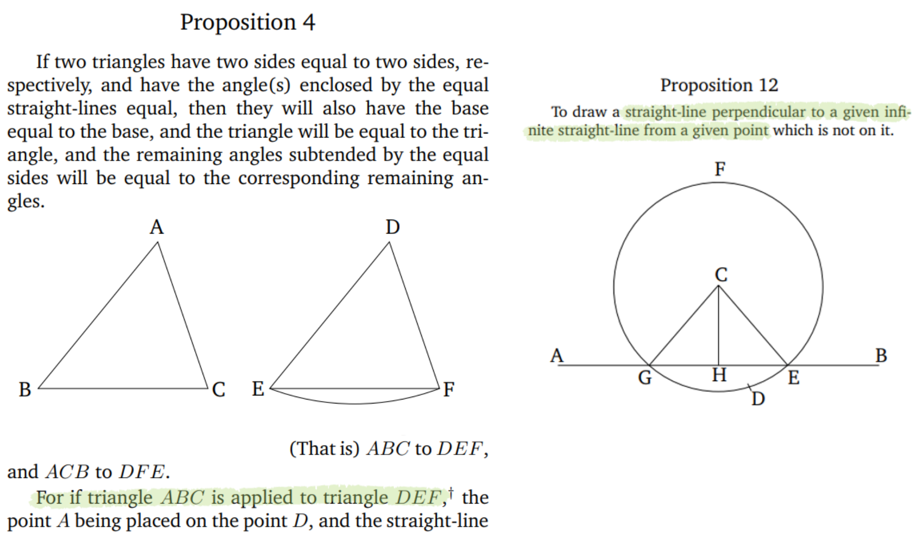
Chapter 2

Transformaciones lineales

Ya definimos y estudiamos el concepto de espacio vectorial, dimos también unos ejemplos que ilustran lo útil que puede ser considerar espacios vectoriales como marcos teóricos para modelar situaciones prácticas. Lo que queremos hacer ahora es establecer relaciones entre espacios vectoriales; más formalmente, queremos trabajar con funciones de un espacio vectorial a otro que preserven la estructura algebráica de estos. Como veremos, algunos de los conceptos matemáticos más usados pueden verse de forma natural como transformaciones lineales, por ejemplo,

- las operaciones de integración y diferenciación del cálculo, o
- las proyecciones, reflexiones y proyecciones de la geometría.

Explicaremos además cómo codificar la información de una transformación lineal entre espacios vectoriales finito dimensionales en una matríz (que dependerá de las bases escogidas para el dominio y codominio), habilidad indudablemente útil para las aplicaciones del álgebra lineal.


Proposition 4

If two triangles have two sides equal to two sides, respectively, and have the angle(s) enclosed by the equal straight-lines equal, then they will also have the base equal to the base, and the triangle will be equal to the triangle, and the remaining angles subtended by the equal sides will be equal to the corresponding remaining angles.

(That is) ABC to DEF, and ACB to DFE.

For if triangle ABC is applied to triangle DEF,† the point A being placed on the point D, and the straight-line

Proposition 12

To draw a straight-line perpendicular to a given infinite straight-line from a given point which is not on it.

Figure 2.1: Euclides usa en sus argumentos transformaciones lineales como las traslaciones, rotaciones y proyecciones.

2.1 Transformaciones lineales

Definición 2.1.1. *Sean V, W dos espacios vectoriales sobre un mismo campo F. Toda función $T : V \longrightarrow W$ tal que*

$$(\forall x, y \in V)(\forall a \in F): \quad T(ax + y) = aT(x) + T(y) \tag{2.1}$$

*será llamada una **transformación lineal** de V en W.*

Nota que V y W deben ser espacios vectoriales sobre un campo común para que ambos lados de la ecuación 2.1 tengan sentido.

Observación 2.1.2. *Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces*

- *$T(0_V) = T(0_W)$, y*
- *Para cualesquiera $n \geq 1$ entero, $a_1, \ldots, a_n \in F$ y $x_1, \ldots, x_n \in V$,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i).$$

Demostración. En efecto, tenemos la siguiente ecuación en el grupo abeliano W

$$T(0_V) = T(0_V + 0_V) = T(0_V) + T(0_V),$$

luego, $T(0_V) = 0_W$. El segundo punto se demuestra por inducción, usando a la condición (2.1) como base de inducción. □

Ejercicio: demuestra que la condición 2.1 es equivalente a las siguientes dos condiciones:

1. (**aditividad**) Para cualesquiera $x, y \in V : T(x + y) = T(x) + T(y)$,
2. (**homogeneidad**) Para cualesquiera $x \in V$, $a \in F$, $T(ax) = aT(x)$.

Estas condiciones dicen que, no importa si primero se realiza la suma o multiplicación escalar en el espacio V y luego se aplica la transformación lineal, o si primero se llevan los vectores a W via T y luego se efectua la suma o multiplicación escalar en W, el resultado es el mismo.

2.1.1 Ejemplos de transformaciones lineales

Tenemos la siguiente lista de ejemplos canónicos de transformaciones lineales.

- Dados V y W F−espacios vectoriales, las funciones $I_V : V \longrightarrow V$ y $T_0 : V \longrightarrow W$ definidas como

  $$\forall x \in V: \quad I_V(x) = x, \; T_0(x) = 0_W$$

  son transformaciones lineales, llamadas respectivamente la **transformación identidad** y la **transformación cero** en V.

- La función $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = f'$$

  es una transformación lineal.

- La función $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

  $$\forall f \in P_n(\mathbb{R}): \quad T(f) = \int_a^b f(t)dt$$

  es una transformación lineal.

- Sea $0 \leq \theta < 2\pi$. La función $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; T_\theta(a,b) = (acos(\theta) - bsen(\theta), asen(\theta) + bcos(\theta))$$

es una transformación lineal llamada **rotación de θ radianes**.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; T_\theta(a,b) = (a, -b)$$

es llamada la **reflexión sobre el eje** x, y es una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

- La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; T_\theta(a,b) = (a, 0)$$

es una transformación lineal, que llamamos **proyección sobre el eje-x**.

Profundicemos un poco más la definición de proyección. Claramente, $W_1 = \{(a,0) : \; a \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(0,b) : \; b \in \mathbb{R}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$. Se definió arriba a la proyección sobre el eje-x a la función que, a cada $v \in \mathbb{R}^2$, le asigna su sumando correspondiente al espacio W_1. Definamos en general el término proyección.

Definición 2.1.3. *Sea V un $F-$espacio vectorial, $W_1 \leq V$. Si $W_2 \leq V$ es tal que $W_1 \oplus W_2 = V$, la función $T : V \longrightarrow V$ definida como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \;\; x_1 \in W_1, x_2 \in W_2 \tag{2.2}$$

es llamada una ***proyección sobre*** *W_1.*

Observe que, como se usa una suma directa para definir una proyección, la expresión (2.2) en efecto define una función T, de hecho lineal, pues, si $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ y $a \in F$, entonces,

$$T(ax + y) = T((ax_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = ax_1 + x_2 = aT(x_1) + T(x_2).$$

Note que $W_1 = \{x \in V | \; T(x) = x\}$, es decir, el conjunto de puntos fijos de una proyección en W_1 coincide con W_1. En la definición 2.1.3 hablamos de "una" proyección a W_1; esto es porque, como mostramos a continuación, hay tantas transformaciones lineales que satisfacen la definición de proyección a W_1 como subespacios cuya suma directa con W_1 es todo el espacio.

Proposición 2.1.4. *Sea $W_1 \leq V$. Si $W_2, \tilde{W_2}$ son dos subespacios de V distintos entre si tales que $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus \tilde{W_2}$, entonces las transformaciones lineales $T, \tilde{T} : V \longrightarrow V$ definidas como*

$$T(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2, \;\; x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

y

$$\tilde{T}(x) = \tilde{x}_1, \quad x = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \;\; \tilde{x}_1 \in W_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{W_2}$$

son distintas entre si.

Demostración. Busquemos un punto en el que T y $\tilde{T}$ difieren. Como $W_2 \neq \tilde{W}_2$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $y \in \tilde{W}_2 - W_2$. Se tiene que

$$x_1 + x_2 = y = 0 + y,$$

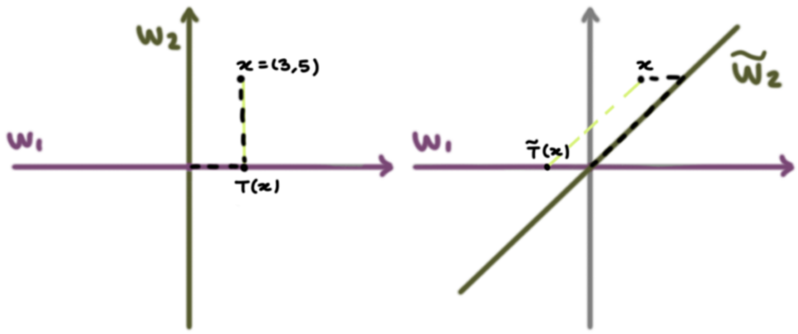
con $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ y $y \in \tilde{W}_2$. Note que x_1 no es cero, de lo contrario, se tendría

$$y = x_2 \in W_2 \quad \lightning$$

Así,

$$T(y) = x_1 \neq 0 = \tilde{T}(y).$$

□



Ejemplo 2.1.5. *Poner este ejemplo mucho antes. Sea V un $F-$espacio vectorial con $dim(V) = n$. Si β es una base de V, dividámosla en dos subconjuntos α, γ ajenos cuya unión sea β. Entonces, $V = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \gamma \rangle$, pues*

- *$V = \langle \alpha \cup \gamma \rangle = \langle \alpha \rangle + \langle \gamma \rangle$, y*
- *la suma es directa, pues*

$$\begin{aligned} dim(V) = dim(\langle \alpha \rangle + \langle \gamma \rangle) &= dim(\langle \alpha \rangle) + dim(\langle \gamma \rangle) - dim(\langle \alpha \rangle \cap \langle \gamma \rangle) \\ &= dim(V) + dim(\langle \alpha \rangle \cap \langle \gamma \rangle), \end{aligned}$$

luego, $dim(\langle \alpha \rangle \cap \langle \gamma \rangle) = 0$, o sea, $\langle \alpha \rangle \cap \langle \gamma \rangle = \{0\}$.

2.2 El teorema fundamental de las transformaciones lineales

La condición (2.1) significa que la función T preserva la estructura algebráica de V. Como veremos a continuación, toda transformación lineal también preserva subespacios.

Recuerda que, si $f : A \longrightarrow B$ es una función cualquiera y $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, definimos

$$f(X) := \{y \in B| \ \exists x \in X : f(x) = y\},$$

y

$$f^{-1}(B) = \{x \in A| \ f(x) \in B\}$$

Proposición 2.2.1. *Sean V y W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre estos.*

- *La imagen de todo subespacio de V bajo T es un subespacio de W, es decir,*

$$\forall X \subseteq V : \quad X \leq V \Rightarrow T(X) \leq W.$$

- *La preimagen de todo subespacio de W bajo T es un subespacio de V, es decir,*

$$\forall Y \subseteq W: \quad Y \leq V \Rightarrow T^{-1}(Y) = \{x \in V | \ T(x) \in Y\} \leq V.$$

Demostración. En efecto, si X es un subespacio de V, entonces $0_V \in X$, luego, $0_W = T(0_V) \in T(X)$. Además, si a es un escalar cualquiera y $y_1, y_2 \in T(X)$, entonces existen $x_1, x_2 \in V$ tales que $y_i = T(x_i)$, con $i = 1, 2$. Así,

$$ay_1 + y_2 = aT(x_1) + T(x_2) = T(ax_1 +_2)$$

es elemento de $T(X)$ pues X, al ser subespacio de V, contiene a $ax + y$. La demostración del segundo punto es dual. □

Vamos ahora a asociar a una transformación lineal dos espacios vectoriales (uno será un subespacio del dominio, otro del codominio) de gran importancia.

Definición 2.2.2. *Sean V, W $F-$espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.*

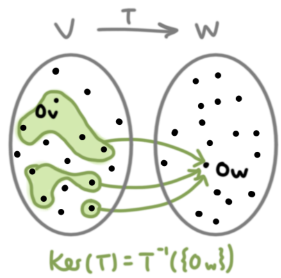


Figure 2.2: Etimológicamente, "kernel" significa semilla, centro, esencia.

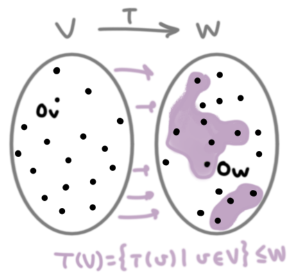
- *Se define al **espacio nulo** de T o **kernel** de T como*

$$Ker(T) := T^{-1}(\{0_W\}) \leq V. \tag{2.3}$$

- *La **imagen** de T es*

$$T(V) \leq W. \tag{2.4}$$

*Si $Ker(T)$ es finito dimensional, a su dimensión se le denomina la **nulidad de** T. Si $T(V)$ es finito dimensional, su dimensión se conoce como el **rango de** T.*



Observa que el "tamaño" del kernel de una transformación lineal parece ser inversamente proporcional al de la imagen de esta; en efecto, si muchos vectores pertenecen al kernel, entonces no habrá muchos vectores en la imagen de T que no sean cero, lo que achica a $T(V)$. El siguiente teorema, pilar del álgebra lineal, da forma a esta intuición.

Teorema 2.2.3. ***(fundamental de las transformaciones lineales)*** *Sean V, W $F-$ espacios vectoriales, con V finito dimensional. Para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$,*

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)), \tag{2.5}$$

es decir, la dimensión del espacio de origen V es igual a la nulidad de T más el rango de T.

Demostración. Como V es finito dimensional, el kernel de T también lo es. Sea pues $\{n_1, \ldots, n_k\}$ una base de $Ker(T)$. Extendamos este subconjunto l.i. de V a una base de V; sea $\{v_1, \ldots, v_l\}$ tal que

$$\beta := \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_1, \ldots, v_l\}$$

es base de V. Entonces, $dim(V) = k + l$. Afirmamos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ es base de la imagen $T(V)$.

- Sean $a_1, \ldots, a_l$ escalares tales que

$$a_1 T(v_1) + \cdots + a_l T(v_l) = 0_W$$

Supongamos que alguno de ellos no es cero; sin pérdida de generalidad, digamos que $a_1 \neq 0$. Por la linealidad de T, la ecuación anterior se reescribe como

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l) = 0_W,$$

es decir,

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l \in Ker(T) = \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \rangle,$$

por lo tanto,

$$v_1 \in \langle \{n_1, \ldots, n_k\} \cup \{v_2, \ldots, v_l\} \rangle.$$

Esto, según el lema 1.6.4, contradice la independencia lineal de β.

- Claro que $\{T(v_1), \ldots, T(v_l)\}$ genera a $T(V)$ pues, dado $y \in T(V)$, existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. Como β es base de V, existen escalares a_i, b_j tales que

$$x = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k + b_1 v_1 + \cdots b_l v_l;$$

evaluando ambos lados de la igualdad bajo T y recordando que los vectores n_i son mapeados al cero (pues son elementos del kernel de T), concluimos que

$$y = T(x) = b_1 T(v_1) + \cdots + b_l T(v_l).$$

Así,

$$dim(V) = k + l = dim(Ker(V)) + dim(T(V)).$$

□

Corolario 2.2.4. *Sean V y W son $F-$espacios vectoriales con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineal. Para toda $\beta \subseteq V$ base de V se tiene que $T(\beta)$ genera a $T(V)$.*

2.2.1 No ejemplos de transformaciones lineales

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^x$$

no es lineal, pues $f(0) \neq 0$ (de hecho, la exponencial es una función estríctamente positiva).

- La función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es lineal. Por ejemplo,

$$|2 + (-1)| = |1| = 1 \neq 3 = |2| + |-1|.$$

- El polinomio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x^2$ no es una transformación lineal pues, en general, no se cumple que $(x+y)^2$ coincida con $x^2 + y^2$. De hecho, lo que ocurre es $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, 0) & si\ y = 0 \\ (x, y) & si\ y \neq 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que, a pesar de que f es homogenea, no es lineal. Por ejemplo,

$$f((1,0)+(0,1)) = f(1,1) = (1,1),$$

pero

$$f(1,0)+f(0,1) = (2,0)+(0,1) = (2,1).$$

- La función coseno evaluada en cero vale uno, luego, no es lineal.
- Según el teorema 2.2.3, si $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es lineal, entonces

$$1 = dim(Ker(T)) + dim(T(V)),$$

luego, tenemos dos casos:

1. $dim(T(V)) = 1$, luego, como $T(V)$ es subespacio de $\mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ uno dimensional, tenemos que $T(V)$ es suprayectiva.
2. $dim(T(V)) = 0$, es decir, $dim(Ker(T)) = 1$. Puesto que $Ker(T) \leq \mathbb{R}$ y $dim(\mathbb{R}) = 1$, se tiene que $Ker(T) = \mathbb{R}$, luego, T es la transformac ión lineal cero.

Puesto que la función seno

$$sen(x):\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

no es ni la función cero no suprayectiva, no puede ser lineal.

2.3 Inyectividad y suprayectividad de transformaciones lineales

Recuerda que, en general, si $f:V\longrightarrow W$ es una función de un conjunto V a otro conjunto W, f se dice

- **inyectiva** si

$$\forall x,y\in V:\quad T(x)=T(y)\Rightarrow x=y,$$

o, equivalentemente, si las imágenes de puntos distintos son distintas

- **suprayectiva** si

$$(\forall z\in W)\ (\exists x\in V):\quad T(x)=z.$$

Resulta que, si V y W son $F-$espacios vectoriales y $T:V\longrightarrow W$ es, no sólo una función, sino una transformación lineal entre ellos, entonces podemos encontrar equivalencias de ser inyectiva o suprayectiva usando propiedades del Kernel y la preservación de la generación o inyectividad de subconjuntos de V.

Veremos que, en el contexto de transformaciones lineales, los conceptos de inyectividad e independencia lineal están íntimamente ligados, así como los de suprayectividad y generación.

Proposición 2.3.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T:V\longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*
2. *$Ker(T)=\{0\}$*
3. *Si $X\subseteq V$ es linealmente independiente, entonces $T(X)\subseteq W$ es también linealmente independiente.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $x \in Ker(T)$ entonces, por definición del kernel, $T(x) = 0$. Además, como T es lineal, también se tiene $T(0) = 0$, luego, como T es inyectiva, tenemos que $x = 0$. Así, $Ker(T) = \{0\}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sean $x, y \in V$ tales que $T(x) = T(y)$. Entonces, por la linealidad de T, $T(x - y) = T(x) - T(y) = 0$, así, $x - y \in Ker(T) = \{0\}$, es decir, $x - y = 0$, o sea, $x = y$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean $v_1, \ldots, v_n \in X$ cualesquiera; mostremos que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente. Sean $a_i \in F$ escalares tales que

$$a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) = \hat{0}_W.$$

Por ser T lineal, podemos reescribir el lado izquierdo de la igualdad anterior;

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = \hat{0}_W.$$

Esto muestra que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in Ker(T) = \{0\}$, luego,

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0_V.$$

Como X es l.i., esto implica que todos los escalares a_i son cero.

En la implicación 2) $\Rightarrow$ 3), estamos mostrando que un subconjunto finito arbitrario de $T(X)$ es l.i. suponiendo que X es l.i.. Recuerda que esto es necesario y suficiente para demostrar la independencia lineal de todo $T(X)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existe $x \in Ker(T) - \{0\}$. Como x no es el vector cero, el singulete $\{x\}$ es l.i. y, sin embargo, $\{T(x)\} = \{0_W\}$ es l.d.. Esto contradice nuestra hipótesis.

□

Proposición 2.3.2. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Si $T : V \longrightarrow W$ es lineal, las siguientes son equivalentes:*

Se demuestra que si $f : A \longrightarrow B$ es una función suprayectiva, entonces, para todo $Y \subseteq B$, se tiene $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

1. *T es suprayectiva*
2. *Si $X \subseteq V$ genera a V entonces $T(X)$ genera a W.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea X un generador de V, es decir, un subconjunto tal que $\langle X \rangle = V$. Esto significa que el único subespacio de V que contiene a X es el mismo V. Puesto que $X \subseteq T^{-1}(\langle T(X) \rangle)$ (pues, dado $x \in X$, $T(x) \in T(X) \subseteq \langle T(X) \rangle$), se tiene entonces $T^{-1}(\langle T(X) \rangle) = V$. Evaluando ambos lados de la igualdad bajo la función suprayectiva T concluimos que

$$W = T(V) = T(T^{-1}(\langle T(X) \rangle)) = \langle T(X) \rangle,$$

o sea, que $T(X)$ genera a W.

2) $\Rightarrow$ 1) V trivialmente se genera a sí mismo, luego, por hipótesis debe ocurrir que $T(V)$ genere a W, o sea, que

$$W = \langle T(V) \rangle = T(V),$$

por lo tanto T es supra.

$\square$

Proposición 2.3.3. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales.*

- *Si $dim(V) > dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W inyectivas.*
- *Si $dim(V) < dim(W)$, entonces no existen transformaciones lineales de V en W suprayectivas.*

Demostración. En efecto,

- si existe $T : V \longrightarrow W$ inyectiva, entonces, según la proposición 2.3.1, $Ker(T) = \{0\}$, luego, la ecuación (2.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(T(V)) \leq dim(W).$$

- Si existe $T : V \longrightarrow W$ suprayectiva, entonces $T(V) = W$, luego, (2.5) se reescribe como

$$dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(W) \geq dim(W).$$

$\square$

2.4 Isomorfismos

Definición 2.4.1. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales. Toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ que sea biyectiva (i.e. inyectiva y suprayectiva) será llamada un **isomorfismo**. Si existe un isomorfismo entre dos espacios vectoriales V y W decimos que V y W son **isomorfos**.*

Es decir, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo si $Ker(T) = \{0_V\}$ y $T(V) = W$.

El teorema 2.2.3 de hecho implica que, si V es finito dimensional, entonces puede establecerse un isomorfismo entre V y otro $F-$espacio vectorial W sólo si W tiene la misma dimensión que V.

Proposición 2.4.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ lineal, con V de dimensión finita. Si T es un isomorfismo, entonces W también es finito dimensional y, de hecho, $dim(W) = dim(V)$.*

Demostración. Digamos que $dim(V) = n$. Por ser T un isomorfismo, se tiene que

$$Ker(T) = \{0_V\} \quad y \quad T(V) = W.$$

Además, como V es finito dimensional, podemos usar el teorema 2.2.3 para deducir que

$$\begin{aligned} n = dim(V) =& dim(Ker(T)) + dim(T(V)) \\ =& dim(\{0_V\}) + dim(W) \\ =& 0 + dim(W) = dim(W). \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.4.3. *Sean V, W dos $F-$espacios vectoriales, ambos de dimensión n. Entonces, para cualquier transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, son equivalentes*

1. *T es inyectiva*
2. *T es suprayectiva*
3. *T es biyectiva (i.e. un isomorfismo).*

Demostración. Basta demostrar que 1) implica 2) y que 2) implica 3).

1) $\Rightarrow$ 2) Si T es inyectiva entonces $Ker(T) = \{0\}$, luego, por el teorema 2.2.3,

$$n = dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(T(V)) = 0 + dim(T(V)) = dim(T(V)),$$

luego, como $dim(W) = n$ y $T(V) \leq W$ tiene dimensión n, concluimos que $T(V) = W$, o sea, que T es suprayectiva.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $T(V) = W$, entonces

$$n = dim(Ker(T))+dim(T(V)) = dim(Ker(T))+dim(W) = dim(Ker(T))+n,$$

luego, $dim(Ker(T)) = 0$ o, equivalentemente, $Ker(T) = \{0_V\}$, i.e. T es inyectiva.

$\square$

Ejemplo 2.4.4. *Sea la función $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ definida como*

$$T(f)(u) = 2f'(u) + \int_0^u 3f(x)dx. \text{ (polinomio en la variable)}u.$$

Puesto que T es combinación lineal de transformaciones lineales, es también lineal. Según el corolario 2.2.4, $\{T(1), T(x), T(x^2)\}$ genera al rango de T. Se calcula que

$$T(1)(u) = 2 \cdot 0 + \int_0^u 3dx = 3u,$$

$$T(x)(u) = 2 + \int_0^u 3xdx = 2 + \frac{3}{2}x^2\Bigg|_{x=0}^{x=u} = 2 + \frac{3u^2}{2},$$

$$T(x^2)(u) = 4u + \int_0^u 3x^2dx = 4u + x^3\Bigg|_{x=0}^{x=u} = 4u + u^3.$$

Tenemos entonces que

$$\{g_1(u) = 3u, g_2(u) = 2 + (3/2)u^2, g_3(u) = 4u + u^3\}$$

genera a $T(P_2(\mathbb{R}))$; puesto que los elementos de este generador son polinomios de grados distintos, de hecho son linealmente independientes, luego, esta es una base del rango de T. Así, como $dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, se debe tener que T es inyectiva. $\diamond$

Recuerde que toda función biyectiva es invertible. Sea pues $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo; sabemos que existe la función inversa $T^{-1} : W \longrightarrow V$. Como establecemos a continuación, tal función es, al igual que T, una transformación lineal.

Proposición 2.4.5. *Si $T : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces su función inversa T^{-1} es también un isomorfismo.*

Demostración. Basta probar la linealidad de T^{-1}. Sean pues $y, z \in W$, $\lambda \in F$. Puesto que T es lineal y $u := T^{-1}(y)$, $v := T^{-1}(z)$ son vectores de V, se tiene que

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda y + z,$$

luego,

$$T^{-1}(\lambda y + z) = \lambda u + v = \lambda T^{-1}(y) + T^{-1}(z).$$

□

2.5 La propiedad universal de las bases

Recuerda que, dados V y W dos $F-$ espacios vectoriales, una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es una función que además "abre" combinaciones lineales. Como cualquier función, T está completamente determinada por los valores que toma en su dominio V. Como veremos a continuación, en el caso de las transformaciones lineales, estas de hecho quedan determinadas por su definición en una base cualquiera del espacio V; conocer los valores de T en una base de V nos permite saber los valores de T en *cualquier* punto de V.

Al teorema 2.5.1 también se le llama el teorema fundamental de las bases. Se usará en repetidas ocasiones para desarrollar la teoría de las siguientes secceiones, por lo que se recomienda entenderlo bien.

Teorema 2.5.1. *(propiedad universal de las bases) Sea V un $F-$ espacio vectorial, con V finito-dimensional. Son equivalentes para $\beta \subseteq V$ las siguientes:*

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, dotted, "\exists!\, T"] \\ W & \end{tikzcd}$$

- *β es base de V*
- *Si W es un $F-$espacio vectorial cualquiera, toda función $f : \beta \longrightarrow W$ se puede extender linealmente de forma única a todo V, es decir, existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T_{|\beta} = f$.*

Nota: en realidad, este teorema es cierto aún cuando V es infinito dimensional (c.f. Hugo Rincón p. 84). Sin embargo, como en el curso no hemos demostrado los resultados necesarios para probar esto cuando se trabaja en un espacio infinito dimensional (no estudiamos el lema de Zorn, por lo que no pudimos demostrar hechos fundamentales como la existencia de bases para cualquier espacio vectorial o el hecho de que un l.i. de un espacio ininito dimensional puede extenderse a una base de este), nos limitaremos a establecer y probar la propiedad universal de las bases en dimensión finita - que en realidad son los tipos de espacios que se usan siempre en las aplicaciones.
Demostración.

⇒) Sea $f : \beta \longrightarrow W$ una función de la base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V escogida a W. Sean $x, y \in V$ cualesquiera; digamos que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i v. \tag{2.6}$$

Observe que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal que extiende a f (i.e. tal que $T \circ \iota = f$), entonces, deberá ocurrir

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i),$$

es decir, T *tiene que ser* la función definida como

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) := \sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i). \tag{2.7}$$

Observe que la ecuación (2.7) en efecto define una función T de V en W, pues, por ser β base de V, la representación de x dada en (2.6) como combinaciones lineales de elementos de β son únicas

Esta es en efecto una transformación lineal, pues

$$\begin{aligned} T(ax+y) =& T\left(a\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n}(a a_i + b_i) v_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{n}(a a_i + b_i)\beta(v_i) = a\sum_{i=1}^{n} a_i \beta(v_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i \beta(v_i) = aT(x) + T(y), \end{aligned}$$

y, en efecto, $T \circ \iota = f$, pues, dado $v_i \in \beta$ cualquiera,

$$(T \circ \iota)(v_i) = T(v_i) = T(0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n) = f(v_i).$$

⇐) Mostremos que un subconjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V con tal propiedad es base de V.

- Independencia lineal: Supongamos que $v_1 \in \langle \beta - \{v_1\} \rangle$, o sea, que existen escalares c_i tales que $v_1 = \sum_{i=2}^{n} c_i v_i$. Sea la función $f : \beta \longrightarrow F$ definida como
$$f(v_1) = 1, \quad f(v_i) = 0, \;\; 2 \le i \le n.$$
Sea T la única extensión lineal de esta función. Se tiene que
$$1 = T(v_1) = T\left(\sum_{i=2}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=2}^{n} c_i T(v_i) = \sum_{i=2}^{n} c_i 0_W = 0 \;\; \lightning$$

- Generación: Supongamos que β no genera a V. Como ya mostramos que β es l.i., podemos extender β a una base de V (c.f. corolario 1.6.16). Sea pues $\gamma \subseteq V$ tal que $\beta \cup \gamma$ es base de V. Si $f : \beta \longrightarrow V$ se define como $f(v_i) = v_i$, observe que la función identidad $I_V : V \longrightarrow V$ es tal que $I_V \circ \iota = f$, pero también la proyección $T : V = \langle \beta \rangle \oplus \langle \gamma \rangle \longrightarrow V$ definida como
$$T(x) = b, \quad x = b + c, b \in \beta, c \in \gamma$$
satisface que $T \circ \iota = f$. Como $T \neq I_V$, esto contradice la unicidad de la extensión lineal que suponemos por hipótesis.

□

Es decir, para demostrar la igualdad entre transformaciones lineales basta comprobar que sus definiciones en una base cualquiera del dominio coinciden.

Corolario 2.5.2. *Sea V, W $F-$espacios vectoriales, con V finito dimensional, $T : V \longrightarrow W$, $U : V \longrightarrow W$ dos transformaciones lineales. Si para una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V se tiene que*

$$T(v_i) = U(v_i), \quad 1 \le i \le n,$$

entonces $T = U$.

Terminemos mostrando que todo $F-$espacio vectorial de dimensión n es esencialmente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.5.3. *Sea V un $F-$ espacio vectorial. V es $n-$dimensional si y sólo si V es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Inmediata de notar que $dim(\mathbb{R}^n) = n$ y la proposición 2.4.2.

$\Rightarrow$) Sea $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $f : \beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función que a v_i le asigna $\hat{e}_i$. Según la propiedad universal de las bases (c.f. teorema 2.5.1), podemos extender a β linealmente. Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal extensión lineal. Puesto que $T(V)$ contiene a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $T(V) = \mathbb{R}^n$, o sea, T es suprayectiva. De esto, según el teorema 2.4.3, se deduce que T es un isomorfismo.

$\square$

2.6 Caracterización de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Es gracias a la propiedad universal de las bases establecida en el teorema 2.5.1 que vamos a poder caracterizar a las transformaciones lineales entre $F-$espacios vectoriales finito dimensionales. Como veremos más adelante, esto nos permitirá capturar toda la información de una transformación lineal a partir de una cantidad finita de números, que almacenaremos en un arreglo numérico rectangular - i.e. en una matriz. Antes de abordar la teoría en general, para familiarizarnos con la ideas que vamos a estudiar más adelante para el caso de transformaciones lineales de un $\mathbb{R}^n$ a un $\mathbb{R}^m$.

Para simplificar la notación, conviente introducir la noción de producto punto en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.6.1. *Para $\hat{x} = (a_i)_{i=1}^n, \hat{y} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, definimos su* ***producto punto*** *como*

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Recordando la definición de producto de matrices, podemos reinterpretar al producto puntos de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ como producto de matrices;

Este es un buen momento para recordar que, por lo general, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i bi \right).$$

Claro que estamos haciendo un abuso de notación identificando a una matriz de 1×1 con su única entrada. También vamos a estar identificando a "vectores fila" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con "vectores columna"

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

I) Sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal. Consideremos a la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$. Según el teorema 2.5.1, T queda completamente determinada por su valor en 1; digamos que $T(1) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Entonces, para toda $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$T(a) = T(a \cdot 1) = aT(1) = a(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (a).$$

II) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal. Ahora vamos a considerar a la base canónica $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nuevamente, el teorema 2.5.1 nos asegura que, con conocer los valores

$$c_i = T(\hat{e}_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

conocemos los valores de la transformación lineal T en todo punto de $\mathbb{R}^n$; en efecto, si $\hat{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$T(\hat{x}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \langle \hat{x}, \hat{c} \rangle = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

donde $\hat{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

II) Ahora si consideremos el caso más general de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. De nuevo tomamos a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ compuesta por los vectores $\hat{e}_i$. Si

$$T(e_i) = (c_{1i}, c_{2i} \ldots, c_{mi}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

entonces, para cualquier $\hat{x} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} T(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n} a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_{1i}, a_i c_{2i}, \ldots, a_i c_{ni}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_{1i}, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{2i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i c_{mi} \right). \end{aligned}$$

Nota que cada entrada es entonces un producto punto.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2.7 Ejercicios III

Demos un repaso de los conceptos estudiados.

I) Construyamos una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $v_1 = (4,5,9)$.

- Para que v_2 sea tal que $\{v_1, v_2\}$ sea l.i., debe cumplirse que

$$v_2 \in \mathbb{R}^3 - \langle \{v_1\} \rangle,$$

es decir, que v_2 no sea múltiplo escalar de v_1. Pongamos pues a $v_2 = (5,3,7)$.

Para esta construcción estamos usando el lema 1.6.4.

- Para que v_3 sea tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea l.i., se deberá tener

$$\begin{aligned} v_3 \in \mathbb{R}^3 - \langle\{v_1, v_2\}\rangle =& \mathbb{R}^3 - \{a(4,5,9) + b(5,3,7) : \ a, b \in \mathbb{R}\} \\ =& \mathbb{R}^3 - \{(4a + 5b, 5a + 3b, 9a + 7b) |\ a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Haciendo $a = 1$, $b = -1$, tenemos que el vector $(-1,2,2)$ es elemento de $\langle\{v_1, v_2\}$; cambiando una de las tres entradas obtendremos un vector que no está en este espacio (pues el sistema planteado para expresar a este nuevo vector como combinación lineal de v_1 y v_2 no tendría solución, recuerde el teorema de Cramer). Tomemos pues a $v_3 = (-1,2,0)$.

Obtuvimos así al subconjunto linealmente independiente

$$\beta = \{v_1 = (4,5,9), v_2 = (5,3,7), v_3 = (-1,2,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$; como este tiene tres elementos y la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, tenemos que es una base de $\mathbb{R}^3$.

II) Encontremos ahora, usando el argumento de la demostración del teorema fundamental de las bases 2.5.1, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(v_1) = (1,0), \ \ T(v_2) = (2,5), \ \ T(v_3) = (-3,1). \tag{2.8}$$

Tenemos primero que ver cómo expresar a cualquier vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de elementos de la base β. Estamos buscando entonces a los únicos escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} (x,y,z) =& a(4,5,9) + b(5,3,7) + c(-1,2,0) \\ =& (4a + 5b - c, 5a + 3b + 2c, 9a + 7b). \end{aligned}$$

Esta igualdad en $\mathbb{R}^3$ es equivalente al sistema de ecuaciones que resolvemos a continuación:

En este argumento, x, y y z son las constantes, mientras que las incógnitas son los escalares a, b y c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -1 & x \\ 5 & 3 & 2 & y \\ 9 & 7 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 5 & 3 & 2 & y \\ 9 & 7 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & -13/4 & 13/4 & y - 5x/4 \\ 0 & -17/4 & 9/4 & z - 9x/4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & 1 & -1 & -4y/13 + 5x/13 \\ 0 & -17 & 9 & 4z - 9x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/4 & -1/4 & x/4 \\ 0 & 1 & -1 & -4y/13 + 5x/13 \\ 0 & 0 & 8 & -4z + 68y/13 - 32x/13 \end{array}\right).$$

Tenemos entonces que

$$c = -\frac{1}{8}\left(4z - \frac{68}{13}y - \frac{32}{13}x\right) = \frac{4}{13}x + \frac{17}{26}y - \frac{1}{2}z, \tag{2.9}$$

Ejercicio: sustituyendo algunos valores para x, y y z compruebe que las fórmulas (2.9), (2.10) y (2.11) son correctas.

$$b = c - \frac{4}{13}y + \frac{5}{13}x = \frac{9}{13}x + \frac{9}{26}y - \frac{1}{2}z, \tag{2.10}$$

y

$$a = \frac{1}{4}(x + c - 5b) = -\frac{7}{13}x - \frac{7}{26}y + \frac{1}{2}z. \tag{2.11}$$

Usando estas tres expresiones, tenemos que la única transformación que extiende la definición (2.8) en la base β es

Ejercicio: compruebe que la transformación lineal propuesta cumple las condiciones (2.8).

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) =& T(av_1 + bv_2 + cv_3) \\
=& aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) \\
=& \left(-\frac{7}{13}x - \frac{7}{26}y + \frac{1}{2}z\right)(1,0) + \left(\frac{9}{13}x + \frac{9}{26}y - \frac{1}{2}z\right)(2,5) + \left(\frac{4}{13}x + \frac{17}{26}y - \frac{1}{2}z\right)(-3,1) \\
=& \left(-\frac{1}{13}x - \frac{20}{13}y + z, \frac{49}{13}x + \frac{31}{13}y - 3z\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 17. *Sean U, V y W tres $F-$espacios vectoriales, $a \in F$. Demuestra que*

- *Si $f, g : V \longrightarrow W$ son transformaciones lineales, entonces $f + g$ y af son transformaciones lineales.*
- *Si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$ son transformaciones lineales, la función composición $g \circ f : V \longrightarrow U$ es también lineal.*

Ejercicio 18. *Argumente por qué existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(2,5) = (1,0,1), \;\; T(-1,4) = (2,5,7)$$

y de su fórmula explícitamente.

Ejercicio 19. *Argumente por qué existe una única transformación lineal $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$T(1) = x^2, \;\; T(1+x) = 2x, \;\; T(x^2-1) = 2.$$

y de su fórmula explícitamente.

Chapter 3

Representaciones matriciales de transformaciones lineales

Desarrollada la teoría de transformaciones lineales en el capítulo anterior, nos proponemos ahora usar la propiedad universal de las bases (c.f. teorema 2.5.1) para representar transformaciones lineales entre espacios vectoriales finito dimensionales como matrices.

Mostraremos que

- fijando bases en los espacios de salida y de llegada, podremos establecer una biyección (que de hecho será un isomorfismo) que identificará una transformación lineal entre estos espacios con una matríz.
- Puesto que esta asociación preserva estructura, podremos realizar operaciones con matrices (que son objetos sencillos de almacenar y operar en una computadora) e interpretarlas como operaciones entre transformaciones lineales.

Antes de explicar cómo almacenar la información de una transformación lineal en una matriz - situación que implicará trabajar con un $F-$ espacio vectorial de matrices con coeficientes en F - estudiemos la estructura del espacio de transformaciones lineales.

3.1 El espacio $\mathcal{L}(V, W)$

A partir de ahora vamos a considerar dos $F-$espacios vectoriales V y W, con

$$dim(V) = n, \quad dim(W) = m,$$

y

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V, \quad \gamma = \{w_1, \ldots, v_m\} \subseteq W$$

bases de estos.

Proposición 3.1.1. *Definiendo la suma y multiplicación escalar puntualmente,*

$$\mathcal{L}(V, W) := \{T : V \longrightarrow W| \quad T \text{ es lineal}\}$$

es un $F-$espacio vectorial.

Demostración. Ejercicio. Como sugerencia, considere a

$$X = \{T : V \longrightarrow W| \quad T \text{ es función}\}.$$

Por herencia de W, X es un $F-$espacio vectorial. Si demuestra que el subconjunto $\mathcal{L}(V,W)$ de X es no vacío, cerrado bajo sumas y multiplicación escalar (c.f. ejercicio 17), entonces tendrá que es subespacio de X - luego, espacio vectorial en sí mismo. □

En W no se tiene definida una multiplicación, por lo que no tendría sentido definir el produco de transformaciones lineales puntualmente, sin embargo, siempre podemos componer funciones: si $T : V_1 \longrightarrow V_2$, $U : V_2 \longrightarrow V_3$, su composición $U \circ T : V_1 \longrightarrow V_3$ se define como

$$(U \circ T)(v) = U(T(v)), \quad v \in V_1.$$

Se demuestra que esta es una transformación lineal.

3.2 El isomorfismo $[\cdot]_\beta$

base ordenada def.

Para no complicar la notación seguiremos denotando a bases ordenadas como conjuntos, pero a partir de ahora se debe entender que el orden en el que se enlistan los elementos de una base importa. Por "base" entenderemos "base ordenada".

Definición 3.2.1. *Sea V un $F-$espacio vectorial $n-$dimensional, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de este. Para $x \in V$, si $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ es la única representación de x como combinación lineal de elementos de β, entonces, al vector de $\mathbb{R}^n$*

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

*se le llamará el **vector coordenado de** x **respecto a** β.*

Observe que la asignación

$$x \mapsto [x]_\beta$$

de V en F^n es una función, pues la representación de cada vector en V como combinación lineal de elementos de β es única (luego, a cada vector le estamos asignando una y sólo una columna ordenada). De hecho, $[\cdot]_\beta$ es la transformación lineal usada en la demostración de la proposición 2.5.3 para demostrar que, si V tiene dimensión n, entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Usando entonces a la base β de V, estamos identificando a cada vector de V con una $n-$tupla via este isomorfismo. Esto es útil pues, aunque los elementos del espacio original V no sean vectores, si V es de dimensión finita, los podemos identificar como tal.

Proposición 3.2.2. *Sea $\beta = v_1, v_2, \ldots, v_n$ base de V, $[\cdot]_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por* (3.1)*.*

- *$[\cdot]_\beta$ es un isomorfismo. En particular,*

$$[x]_\beta = [y]_\beta \Rightarrow x = y.$$

- *Para toda $1 \leq i \leq n$, $[v_i]_\beta = e_i$, el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.*

Note que la identificación (3.1) de un vector del espacio con un elemento de $\mathbb{R}^n$ depende de la base β fijada. Es decir, si γ es otra base del espacio, $[x]_\beta \neq [x]_\gamma$, y el que $[x]_\beta = [y]_\gamma$ no implica que x y y sean iguales. Ejercicio: de un ejemplo que ejemplifique esta situación.

Terminar de poner aquí lo de las fotos. Prefiero hablar en términos de este isomorfismo en lo que sigue, entonces tengo que completar esta sección.

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

Vamos a considerar ahora a dos F–espacios vectoriales finito dimensionales

$$V, \ \ dim(V) = n, \beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V \ \ \textit{base de } V,$$

$$W, \ \ dim(V) = n, \gamma = \{w_1, \dots, w_m\} \subseteq W \ \ \textit{base de } W.$$

Recuerde que, si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

- Por el teorema fundamental de las bases 2.5.1, la transformación T queda completamente determinada por los valores que toma en la base β de V, es decir, a partir de los valores

$$T(v_i), \ \ 1 \le i \le n$$

podemos recuperar la definición de T *en todo el espacio* V.

En esta discusión, "i" es la variable con la que contamos a los elementos de la base β, y com "j" contamos a los elementos de la base γ.

- Por ser γ base de W, cada $T(v_i)$ puede expresarse de forma única como combinación lineal de los vectores $w_1, \dots, w_m$, es decir, para cada $1 \le i \le n$, existen únicos escalares a_{ji} tales que

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j, \ \ 1 \le i \le n. \tag{3.2}$$

Nota que en la ecuación (3.2) se fija el segundo índice de los escalares, es decir, el índice columna.

Así, una vez fijadas las bases β y γ, **la transformación lineal T queda completamente determinada por los $m \times n$ escalares a_{ji}, con $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le m$.** Almacenamos esta información en la siguiente matriz:

$$V \xrightarrow{T} W$$

$\beta \subseteq V$ base $\quad$ $\gamma \subseteq W$ base

$dim(V) = n$ $\quad$ $dim(W) = m$

$[T]_\beta^\gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Note que la i–ésima columna de $[T]_\beta^\gamma$ es el vector columna $[T(v_i)]_\gamma$. Entonces,

- La matriz $[T]_\beta^\gamma$ tiene n columnas, pues hay una por cada elemento de la base β de V, y
- tiene m filas, pues cada vector columna tiene m entradas, a saber, los coeficientes de las combinaciones lineales de las imágenes $T(v_i)$ respecto a γ.

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ \\ w_m \end{array}
$$

$$T : V \longrightarrow W$$

$$\beta = \{v_j \mid 1 \leq j \leq n\}, \quad \gamma = \{w_k : 1 \leq k \leq m\}$$

Figure 3.1: Este diagrama puede ayudarte a recordar cómo se construye la matriz $[T]_\beta^\gamma$

3.4 El isomorfismo Φ_β^γ

Fijadas bases $\beta = \{v_j | \ 1 \leq j \leq n\} \subseteq V$ y $\gamma = \{w_k | \ 1 \leq k \leq n\} \subseteq W$ de dos $F-$espacios finito dimensionales, se puede establecer una biyección entre

- el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de transformaciones lineales de V en W y
- el espacio de matrices $M_{m \times n}(F)$;

vamos a denotar por Φ_β^γ a la función que a cada transformación lineal de V en W le asigna su representación matricial respecto a β y γ, i.e.

$$\Phi_\beta^\gamma : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(F)$$

$$\Phi_\beta^\gamma(T) = [T]_\beta^\gamma.$$

Del teorema fundamental de las bases se sigue fácilmente el que Φ_β^γ sea biyectiva.

Proposición 3.4.1. *La función Φ_β^γ es una biyección.*

Demostración.

- **Inyectividad de Φ_β^γ:** Sean $T, U : V \longrightarrow W$ lineales tales que

$$[T]_\beta^\gamma = \Phi_\beta^\gamma(T) = \Phi_\beta^\gamma(T) = [U]_\beta^\gamma.$$

  El que las matrices $[T]_\beta^\gamma$ y $[U]_\beta^\gamma$ sean iguales significa que

$$\forall v \in \beta : \quad T(v) = U(v)$$

  pues la $j-$ésima columna de esta matriz da los coeficientes de la combinación lineal en términos de γ igual a T evaluada en el $j-$ésimo vector de la base β. Así, T y U coinciden en la base β de V, luego, según el corolario 2.5.2, coinciden.

- **Suprayectividad de Φ_β^γ:** sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(F)$. Por el teorema fundamental de las bases, existe una única transformación lineal tal que

$$T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

  Dicha T es tal que $[T]_\beta^\gamma = A$.

□

Corolario 3.4.2. *Si $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal tal que $[T]_\beta^\beta = Id_n$, entonces T es la función identidad.*

Nota: se pidió a partir de ahora que las bases de los espacios vectoriales considerados fuesen ordenadas pues, para la construcción de las representaciones matriciales $[T]_\beta^\gamma$, la $j-$ésima columna corresponde al $j-$ésimo vector de la base β, luego, el orden en el que se enlistan los elementos de β importa (es cierto que un cambio de orden en los elementos de un conjunto no afecta su identidad, pero el cambiar el orden de las filas o columnas de una matriz la altera).

En la siguiente sección desarrollaremos la teoría suficiente para demostrar que, más que una biyección, Φ_β^γ es un isomorfismo. Esto implica que el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de transformaciones lineales entre dos espacios finito dimensionales es (salvo isomorfismo) un espacio de matrices. En lo que sigue seguiremos estudiando y explotando la relación entre dos espacios, para interpretar las operaciones que realicemos en uno en términos de operaciones en el otro espacio (pues, para las aplicaciones, es muchísimo más sencillo trabajar con matrices a lidiar con transformaciones lineales entre espacios que, a pesar de ser finito dimensionales, pueden ser complicados).

3.5 Operaciones entre transformaciones lineales con sus representaciones matriciales

Proposición 3.5.1. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales con $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq W$ bases de estos. Para cualesquiera $T, U : V \longrightarrow W$,*

$$[T + U]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + [U]_\beta^\gamma. \tag{3.4}$$

Nota que el lado izquierdo de (3.4) involucra una suma de funciones, mientras que el lado derecho es una suma de matrices.

Proposición 3.5.2. *Sean V, W y Z tres $F-$espacios vectoriales, con $\beta = \{v_j : 1 \le j \le n\} \subseteq V$, $\gamma = \{w_k : 1 \le k \le m\} \subseteq W$ y $\delta = \{z_i : 1 \le i \le r\}$ bases de estos. Si $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ son lineales, entonces*

$$[U \circ T]_\beta^\delta = [U]_\gamma^\delta \cdot [T]_\beta^\gamma. \tag{3.5}$$

Nota que el lado izquierdo de (3.5) involucra una composición de funciones, mientras que el lado derecho es un producto de matrices. De hecho, el producto de matrices se definió de tal forma que la ecuación (3.5) fuese cierta.

Demostración. Tenemos que $[U]_\gamma^\delta \in M_{r\times m}(\mathbb{R})$ y que $[T]_\beta^\gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, por lo tanto, el producto de matrices en (3.5) está bien definido.

$$[U]_\gamma^\delta \text{ tiene } 1 \le i \le r \text{ filas y } 1 \le k \le m \text{ columnas,}$$

$$[T]_\beta^\gamma \text{ tiene } 1 \le k \le m \text{ filas y } 1 \le j \le n \text{ columnas;}$$

entonces,

$$[U \circ T]_\beta^\delta \text{ tiene } 1 \le i \le r \text{ filas y } 1 \le j \le n \text{ columnas.}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "U \circ T"] & W \arrow[r, "U"] & Z \\ \beta = \{v_j : 1 \le j \le n\} & \gamma = \{w_k : 1 \le k \le m\} & \delta = \{z_i : 1 \le i \le r\} \\ dim(V) = n & dim(W) = m & dim(Z) = r \end{tikzcd}$$

Digamos pues que

$$[U]_\gamma^\delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rm} \end{pmatrix}, \quad [T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix};$$

estas dos ecuaciones matriciales equivalen a los siguientes dos grupos de ecuaciones:

$$\forall 1 \leq j \leq n : \quad T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k$$

y

$$\forall 1 \leq k \leq m : \quad U(w_k) = \sum_{i=1}^{r} a_{ik} z_i.$$

Ahora bien, la j–ésima columna de $[U \circ T]_\beta^\delta$ se consigue evaluando a $U \circ T$ en v_j:

$$\begin{aligned}(U \circ T)(v_j) =& U(T(v_j)) = U\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k\right) \\ =& \sum_{k=1}^{m} b_{kj} U(w_k) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{r} a_{ik} z_i\right) \\ =& \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right) z_i;\end{aligned}$$

reconociendo a $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ como la ij–ésima entrada del producto $[U]_\gamma^\delta \cdot [T]_\beta^\gamma$, terminamos.

□

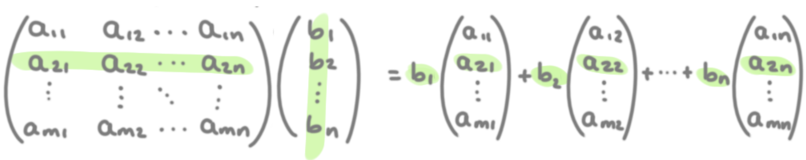
Lema 3.5.3. *Sean $A = (a_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(F)$, $b = (b_j)_{1 \leq j \leq n} \in M_{n \times 1}(F)$. Si por $A_{\cdot,j}$ denotamos a la j–ésima columna de A, entonces*

$$Ab = b_1 A_{\cdot,1} + \ldots + b_n A_{\cdot,n}, \tag{3.6}$$

es decir, Ab es una combinación lineal de las columnas de A, donde los escalares de la combinación lineal son las entradas de b.

Nótese que la ecuación (3.6) tiene sentido, pues tanto Ab como los vectores columna de A tienen dimensión $m \times 1$.

Demostración. En efecto, la k–ésima entrada tanto de Ab como de $\sum_{j=1}^{n} A_{\cdot,j} b_j$ es $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_j$ (k se mantiene fijo y se itera el índice de columnas j de A).



□

Teorema 3.5.4. *Sean V y W dos F–espacios vectoriales finito dimensionales. Si $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ son bases de estos espacios y $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces,*

$$\forall x \in V : \quad [T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta.$$

Demostración. En efecto, si $\beta = \{v_j : 1 \leq j \leq n\}$ y

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad i.e.\ si\ x = \sum_{j=1}^{n} x_i v_i,$$

usando el Lema 3.5.3, se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned} [T]_\beta^\gamma &= x_1[T(v_1)]_\gamma + x_2[T(v_2)]_\gamma + \cdots + x_n[T(v_n)]_\gamma \\ &= [x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)]_\gamma \\ &= [T(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n)] = [T(x)]_\gamma. \end{aligned}$$

□

3.6 Transformaciones lineales de la forma L_A

Sea $A \in M_{m\times n}(F)$ una matriz de m filas y n columnas con coeficientes en F. Definimos a partir de ella una transformación lineal como sigue:

$$\begin{aligned} L_A : F^n &\longrightarrow F^m \\ L_A(x) &= Ax, \end{aligned} \tag{3.7}$$

o sea, L_A es la función "multiplicar a A por la izquierda de vectores de F^n".

Usando esta nueva notación, podemos establecer el teorema 3.5.4 en términos del siguiente diagrama de transformaciones lineales:

Este diagrama representa lo explicado en el Teorema 3.5.4.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"'] & W \arrow[d, dotted, "{[\cdot]_\gamma}"] \\ F^n \arrow[r, "L_{[T]_\beta^\gamma}"'] & F^m \end{tikzcd}$$

Es decir,

$$[\cdot]_\gamma \circ T = L_{[T]_\beta^\gamma} \circ [\cdot]_\beta.$$

Nótese que partimos de espacios vectoriales V y W *arbitrarios* (siendo la única condición impuesta el que ambos sean finito dimensionales), y que gracias a los isomorfismos $[\cdot]_\beta$ podemos usar transformaciones del tipo (3.7) en lugar de transformaciones $T : V \longrightarrow W$.

Algunas propiedades fáciles de probar sobre transformaciones de la forma (3.7) se enuncian y se dejan como ejercicio.

Proposición 3.6.1. *Si L_A es como se definió en* (3.7), *entonces*

- *L_A es lineal*

- *Si β y γ son las bases canónicas de F^n y F^m respectivamente, entonces $[L_A]_\beta^\gamma = A$.*
- *$L_A = L_B$ si y sólo si $A = B$.*
- *$L_{A+B} = L_A + L_B$ y $L_{\lambda A} = \lambda L_A$ para toda $\lambda \in F$.*
- *Si $T : F^n \longrightarrow F^m$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz C de $m \times n$ tal que $T = L_C$*
- *Si E es una matriz de $n \times r$, entonces $L_{AE} = L_A \circ L_E$.*

Veremos a continuación que la invertibilidad de una transformación lineal T (i.e. el que sea o no isomorfismo) está relacionada a la de cualquiera de sus representaciones matriciales $[T]_\beta^\gamma$.

Recuerda que una matriz A es invertible si y sólo si A es cuadrada y existe B otra matriz tal que $AB = I_n = BA$.

Teorema 3.6.2. *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales V y W. Si $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ son bases cualesquiera de estos, entonces T es un isomorfismo si y sólo si la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es invertible.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que T es un isomorfismo, es decir, que es invertible. Entonces, según la proposición 2.4.2, $dim(V) = dim(W)$. Sean $\beta = \{v_j | \ 1 \leq j \leq n\}$ y $\gamma\{w_j | \ 1 \leq j \leq n\}$ bases de V y W, y sea $T^{-1} : W \longrightarrow V$ la inversa de T - que, recuerde, también es una transformación lineal. Entonces, según la proposición 3.5.2,

$$I_n = [I_V]_\beta^\beta = [T^{-1} \circ T]_\beta^\beta = [T^{-1}]_\gamma^\beta [T]_\beta^\gamma$$

y, análogamente,

$$I_n = [T]_\beta^\gamma [T^{-1}]_\gamma^\beta.$$

Así, $[T]_\beta^\gamma$ es invertible y, de hecho,

La ecuación (3.8) es importante en sí misma.

$$([T]_\beta^\gamma)^{-1} = [T^{-1}]_\gamma^\beta. \tag{3.8}$$

$\Leftarrow$) Sea $B \in M_{n\times n}(F)$ tal que

$$[T]_\beta^\gamma B = I_n = B[T]_\beta^\gamma.$$

Entonces, si $U : W \longrightarrow V$ es la única transformación lineal tal que $[U]_\gamma^\beta = B$,

$$[T \circ U]_\gamma^\gamma = [T]_\beta^\gamma [U]_\gamma^\beta = I_n.$$

Esto implica que $T \circ U$ es la identidad en W. De forma análoga se prueba que $U \circ T$ es la identidad en V. Así, T es invertible, luego, un isomorfismo.

□

Proposición 3.6.3. *Fijadas $\beta \subseteq V$ y $\gamma \subseteq W$ bases de los $F-$espacios vectoriales finito dimensionales V y W, la función*

$$\Phi_\beta^\gamma : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(F)$$
$$\Phi_\beta^\gamma(T) = [T]_\beta^\gamma.$$

es un isomorfismo.

Demostración. Ya vimos en proposciones anteriores la linealidad de Φ_β^γ.

- Inyectividad: si $T : V \longrightarrow W$ es tal que $[T]_\beta^\gamma$ es la matriz cero, entonces T evaluada en cualquier vector de la base β es cero, luego, T debe ser la transformación lineal cero. Así, $Ker(\Phi_\beta^\gamma) = \{0\}$.
- Suprayectividad: se estableció en la proposición **??**.

□

Corolario 3.6.4. *Si $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, entonces el espacio $\mathcal{L}(V, W)$ de transformaciones lineales de V a W es finito dimensional, de hecho, $dim(\mathcal{L}(V, W)) = mn$.*

3.7 Ejemplos

Sea

$$\mathcal{U}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \leq M_{2\times 2}$$

el subespacio de matrices triangulares superiores de 2×2. No es difícil convencerse de que este es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial de dimensión 3, de hecho,

$$\delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para $\mathcal{U}_2(\mathbb{R})$. Sean las transformaciones lineales $S : \mathcal{U}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{U}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow U_2(\mathbb{R})$ definidas como

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

$$U \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, b, c)$$

3.8 Cambio de sistema coordenado

> The proper treatment of calculus for functions of several variables requires vector ideas; the budding statistician and the coming physicist need them; modern analysis is unthinkable without the notion of linear dependence and all that flows from it. Throughout these courses the infusion of a geometrical point of view is of paramount importance. A vector is geometrical; it is an element of a vector space, defined by suitable axioms - whether the scalars be real numbers or elements of a general field. A vector is not an n-tuple of numbers until a coordinate system has been chosen. Any teacher and any text book which starts with the idea that vectors are n-tuples is committing a crime for which the proper punishment is ridicule. The n-tuple idea is not "easier", it is harder; it is not clearer, it is more misleading. (Mac Lane, 1954)

Ya ha quedado claro el uso de una base en un $F-$espacio vectorial V; estas actuan como un **sistema de coordenadas**, pues, como se establecién en el teorema 1.6.3 (resultado usado una y otra vez en el desarrollo de la teoría anterior), si β es base de V, dado $x \in V$ *cualquiera*, existen

- **únicos** $v_1, \ldots, v_n$ de elementos de β, y
- **únicos** escalares $a_1, \ldots, a_n$ escalares tales que

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_i x_i.$$

Recuerde que es por eso que, en el caso en el que V es finito dimensional (i.e. β es finita), usamos esto para construir el isomorfismo $[\cdot]_\beta$ entre V y F^n (justo asociándole a x su única colección de escalares $a_1, \ldots, a_n$). Note que esta representación **depende de la base** β, es decir, si $\gamma \subseteq V$ es una base de V distinta a β, entonces los isomorfismos $[\cdot]_\beta$ y $[\cdot]_\gamma$ son distintos entre sí. Un caso particular de esta situación es el realizar un cambio de coordenadas en el plano (el espacio vectorial en esta situación es, por supuesto, $\mathbb{R}^2$).

En este caso, "fijar el plano/sistema coordenado" y "fijar la base" significan lo mismo. Discusión del pizarrón. Fijar sistema de referencia, y usar nuevas bases en ese sitema.

Ejemplo 3.8.1. *Mostremos cómo en ocasiones es conveniente cambiar de sistema de coordenadas. En $\mathbb{R}^2$, considere a la base canónica $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. Todo punto del espacio (x,y) se expresa de forma única como combinación lineal de elementos de β;*

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

Esta representación es muy sencilla - por eso resulta ventajoso en muchas ocasiones trabajar con la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Considere al lugar geométrico $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ de puntos del plano que consta de los puntos que satisfacen la siguiente relación:

$$w = (x,y) \in \mathcal{E} \quad \textit{si y sólo si} \quad 2x^2 - 4xy + 5y^2 = 1. \tag{3.9}$$

Puesto que en la ecuación para definir $\mathcal{E}$ están involucrados cuadrados de las variables, parece que este lugar geométrico es una cónica, sin embargo, el término mixto $-4xy$ dificulta su identificación. Cambiemos de sistema coordenado; considérese a la base

$$\beta' = \left\{ u = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right), v = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}.$$

Si $w = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} w = (x,y) =& x e_1 + y e_2 \\ =& x' u + y' v \\ =& x' \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + y' \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \\ =& x' \left(\frac{\sqrt{5}}{5} e_1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} e_2 \right) + y' \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5} e_2 \right) \\ =& \left(\frac{\sqrt{5}}{5} x' + \frac{2\sqrt{5}}{5} y' \right) e_1 + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} x' + \frac{\sqrt{5}}{5} y' \right) e_2. \end{aligned}$$

De la igualdad de los coeficientes al representar vectores respecto a una base se deduce que

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5} x' + \frac{2\sqrt{5}}{5} y', \quad y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} x' + \frac{\sqrt{5}}{5} y'. \tag{3.10}$$

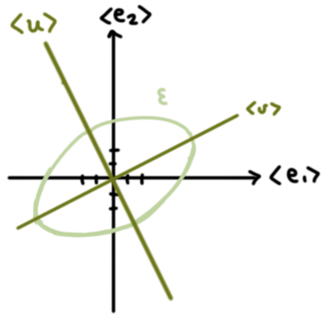
A esta situación se le conoce en geometría analítica como "eliminación del término mixto".

Si usamos ahora el sistema coordenado β', debemos sustituir los cambios (3.10) *en la condición de definición* (3.9)*. Haciendo esto, llegamos a que*

$$w = x'u + y'v \in \mathcal{E} \quad \textit{si y sólo si} \quad 6(x')^2 + (y')^2 = 1. \tag{3.11}$$

*Ahora sí reconocemos al lugar geométrico como una elipse, pero **no** respecto al sistema coordenado β, sino respecto a β'.*

Al dibujar el nuevo sistema coordenado en el plano (i.e. a las rectas $\langle\{u\}\rangle$ y $\langle\{v\}\rangle$, que son subespacios uno dimensionales de $\mathbb{R}^2$), notamos que este se obtiene rotando el sistema original β.



Observa que la relación (3.10) *(que nos permitió pasar de una base a otra) puede representarse en forma matricial como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

nota que

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad [Id]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \quad [w]_{\beta'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Usando el que la transformación lineal identidad es el neutro de la composición y que multiplicación de matrices es la operación correspondiente a composición de funciones, se establece fácilmente cómo hacer cambios de base.

Teorema 3.8.2. *Sean β, β' dos bases de un F−espacio vectorial finito dimensional V. Sea $Q = [Id_V]^{\beta}_{\beta'}$.*

- *La matriz Q es invertible.*
- *Para toda $v \in V$,*

$$[v]_\beta = Q[v]_{\beta'}. \tag{3.12}$$

Demostración. Claro que Q es invertible, pues la transformación identidad Id_V es un isomorfismo (c.f. cita). Además, según el Teorema 3.5.4,

$$[v]_\beta = [Id_V(v)]_\beta = [Id]^{\beta}_{\beta'}[v]_{\beta'}.$$

□

La ecuación (3.12) nos explica cómo obtener las coordenadas de un vector v en términos de β cuando se tienen sus coordenadas en términos de β'.

Definición 3.8.3. *Si β y β' son dos bases de un F−espacio vectorial finito dimensional V, a la matriz $[Id]^{\beta}_{\beta'}$ se le conoce como **matriz de cambio de base** de β' a β.*

Poner ejemplo numérico.

Sean V y W dos F−espacios vectoriales, y considere dos pares de bases

$$\beta \subseteq V, \gamma \subseteq W; \quad \beta' \subseteq V, \gamma' \subseteq W$$

de estos. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, según el Teorema 3.5.4, tenemos los siguientes dos cuadrados conmutativos; cambia flecha punteada

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"'] & W \arrow[d, dotted, "{[\cdot]_\gamma}"] \\ F^n \arrow[r, "L_{[T]^{\gamma}_{\beta}}"'] & F^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\beta'}}"'] & W \arrow[d, dotted, "{[\cdot]_{\gamma'}}"] \\ F^n \arrow[r, "L_{[T]^{\gamma'}_{\beta'}}"'] & F^m \end{tikzcd}$$

Ambos diagramas hacen referencia a T (su objetivo de hecho es decir cómo evaluar a T en vectores de V en términos de multiplicaciones de matrices). ¿Qué relación hay entre estos? En otras palabras, ¿Cómo conociendo la representación matricial $[T]_\beta^\gamma$ encontramos a $[T]_{\beta'}^{\gamma'}$?

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_\beta}"] \arrow[dd, bend right, "{[\cdot]_{\beta'}}"'] & W \arrow[d, "{[\cdot]_\gamma}"'] \arrow[dd, bend left, "{[\cdot]_{\gamma'}}"] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]_\beta^\gamma}"'] \arrow[d, dotted, "L_Q"] & F^m \arrow[d, dotted, "L_P"'] \\
F^n \arrow[r, "L_{[T]_{\beta'}^{\gamma'}}"'] & F^m
\end{tikzcd}$$

Podemos usar matrices de cambio de base para pasar fácilmente de una representación matricial a la otra. En efecto, si

$$P = [Id_W]_\gamma^{\gamma'}, \quad Q = [Id_V]_\beta^{\beta'},$$

entonces, para toda $v \in V$,

$$P[T]_\beta^\gamma[v]_\beta = ([Id_W]_\gamma^{\gamma'}[T]_\beta^\gamma)[v_\beta] = [Id_W \circ T]_\beta^{\gamma'}[v]_\beta = [T]_\beta^{\gamma'}[v]_\beta = [T(v)]_{\gamma'},$$

y también

$$[T]_{\beta'}^{\gamma'}Q[v]_\beta = ([T]_{\beta'}^{\gamma'}[Id_V]_\beta^{\beta'})[v]_\beta = [T \circ Id_V]_\beta^{\gamma'}[v]_\beta = [T]_\beta^{\gamma'}[v]_\beta = [T(v)]_{\gamma'}.$$

De esto se deduce que

$$P[T]_\beta^\gamma = [T]_{\beta'}^{\gamma'}Q. \tag{3.13}$$

Puesto que P es invertible, podemos despejar a $[T]_\beta^\gamma$ de (3.13). Hemos demostrado así el siguiente

En efecto, toma a $[v]_\beta$ como un vector de la base canónica de F^n para probar que las correspondientes columnas de las matrices en (3.13) en efecto coinciden entre sí.

Teorema 3.8.4. *Sean V y W dos $F-$espacios vectoriales finito dimensionales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre ellos. Si $\beta, \beta' \subseteq V$ y $\gamma, \gamma' \subseteq W$ son bases para estos espacios,*

- *$P = [Id_W]_\gamma^{\gamma'}$ es la matriz que transforma las coordenadas de γ en γ', y*
- *$Q = [Id_V]_\beta^{\beta'}$ es la matriz que transforma las coordenadas de β en β',*

entonces,

$$[T]_\beta^\gamma = P^{-1}[T]_{\beta'}^{\gamma'}Q. \tag{3.14}$$

Observación 3.8.5. *Si V es un $F-$espacio vectorial finito dimensional y $\beta, \beta' \subseteq V$ son bases de V, entonces*

$$([Id_V]_\beta^{\beta'})^{-1} = [Id_V]_{\beta'}^\beta. \tag{3.15}$$

Ejemplo numérico con observaciones.

Vale la pena escribir el Teorema 3.8.4 para el caso particular en el que el espacio de dominio coincide con el de codominio.

Corolario 3.8.6. *Si V es un F−espacio vectorial finito dimensional y $\beta, \beta' \subseteq V$ son bases de V, entonces*

$$[T]_{\beta}^{\beta} = Q^{-1}[T]_{\beta'}^{\beta'}Q, \tag{3.16}$$

donde $Q = [Id_V]_{\beta}^{\beta'}$.

3.8.1 Matrices similares

Sigue discusión y salta a p. 239 Friedb.

Definición 3.8.7. *Sean $A, B \in M_{n\times n}(F)$. Decimos que las matrices A y B son* ***similares*** *si existe $Q \in M_{n\times n}(F)$ invertible tal que*

$$A = Q^{-1}BQ.$$

En términos de esta definición, el Corolario 3.8.6 se resume como sigue:

Las representaciones matriciales de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ respecto a una misma base son todas similares entre sí.

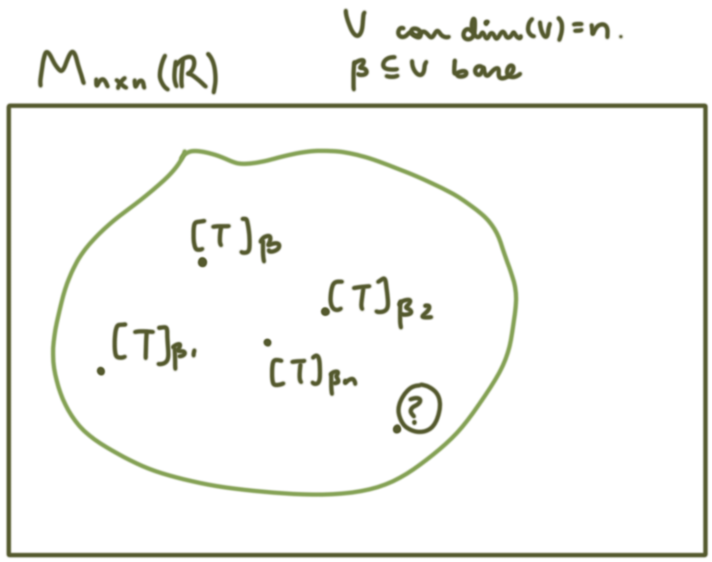
No es difícil demostrar que la relación "ser similar con" es de equivalencia: Ejercicio: Demuestra que la relación en el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ dada por

$$\forall A, B \in M_{n\times n}(F) : \quad A \sim B \quad \Leftrightarrow \exists Q \in M_{n\times n}(F) \text{ invertible tal que } A = Q^{-1}BQ$$

es de equivalencia, es decir, que

- es reflexiva: $\forall A \in M_{n\times n}(F) : A \sim A$,
- simétrica: $\forall A, B \in M_{n\times n}(F) : A \sim B \Rightarrow B \sim A$, y
- transitiva: $\forall A, B, C \in M_{n\times n}(F) : A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Como toda relación de equivalencia, esta induce una partición en el conjunto $M_{n\times n}(F)$. Sea V un F−espacio vectorial con $dim(V) = n$ (por ejemplo, $V = F^n$).



3.9 Ejercicios IV

Cálculo del isomorfismo $[\cdot]_\beta : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Si V es un F–espacio vectorial n–dimensional y $\beta = \{v_j : \ 1 \leq j \leq n\}$ es una base de V, entonces, se definió el isomorfismo

$$[\cdot]_\beta : V \longrightarrow F^n$$

como

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{para toda}}\ x = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \in V$$

Es decir, calcular $[\cdot]_\beta$ es lo mismo que expresar a un vector arbitrario x de V como combinación lineal de elementos de β

Si $T : V \longrightarrow V$ es lineal y en V se usa sólo una base β, a $[T]_\beta^\beta$ a veces se le denota como $[T]_\beta$.

Cálculo de representación matricial $[T]_\beta^\gamma : V \longrightarrow W$

Si V y W son F–espacios vectoriales finito dimensionales y

$$\beta = \{v_j : \ 1 \leq j \leq n\} \subseteq V,$$

$$\gamma = \{w_k | \ 1 \leq k \leq m\} \subseteq W$$

son bases de estos, entonces, $[T]_\beta^\gamma$ es una matriz de m filas con n columnas, donde su j–ésima columna es $[T(v_j)]_\gamma$.
Entonces, $[T]_\beta^\gamma$ tiene

- **n columnas, pues hay una por cada elemento de la base β, y**
- **m filas, ya que cada $T(v_j)$ necesita m escalares para representarse como combinación lineal de elementos de γ.**

Sean

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad \beta' = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}, \tag{3.17}$$

$$\gamma = \{(0,3,5),(1,2,0),(3,4,5)\}, \quad \gamma' = \{(3,4,5),(1,2,0),(0,3,5)\}, \tag{3.18}$$

Nota que β y β' son iguales como conjuntos, pero no como bases ordenadas.

$$\delta = \{(1,2,0),(0,1,1),(1,0,3)\}. \tag{3.19}$$

1. Demuestre que los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ dados en (3.17), (3.18) y (3.19) son bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^3$, expréselo como combinación lineal de elementos de las bases del inciso anterior.
3. Dé las fórmulas de los isomorfismos $[\cdot]_\beta$, $[\cdot]_\gamma$, $[\cdot]_\delta$.

4. Sean $T, U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las funciones

$$T(x,y,z) = (2x, 5y - z, x + y + z), \quad U(x,y,z) = (2x + 3y, -x, -z + y).$$

Calcule las matrices $[T]_\beta^\gamma$, $[T]_\gamma^\beta$, $[T]_\gamma^\delta$, $[T]_\delta^\gamma$, $[U]_\beta^\delta$ y $[U]_\delta^\beta$.

5. Compare a $[T]_\beta^\gamma$ con $[T]_{\beta'}^\gamma$ y a $[U]_\beta^\gamma$ con $[T]_\beta^{\gamma'}$. ¿Qué relación tienen una con otra? ¿Cómo el cambio de orden en una base afecta a las matrices?

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Explique por qué existe$^{(*)}$ una única transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[L]_\beta^\gamma = A$. Encuéntrela.

$(*)$ Pista: usa el teorema fundamental de las bases 2.5.1

De igual manera, encuentre a la única transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que $[S]_\gamma^\delta = A$. ¿Son S y L iguales?

Sea

$$\phi = \{(1,2),(1,1)\}. \tag{3.20}$$

- Demuestra que ϕ es base de $\mathbb{R}^2$.
- Da explícitamente al isomorfismo $[\cdot]_\phi$.
- Sea $K : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como

$$K(x,y,z) = (2x + z, -y - z).$$

- Da explícitamente la fórmula de las composiciones $K \circ U$ y $K \circ T$.
- Usa las fórmulas de estas composiciones para calcular las matrices $[K \circ U]_\delta^\phi$ y $[K \circ T]_\beta^\phi$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "K\circ T"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "K"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

- Calcula las matrices del inciso anterior usando representaciones matriciales apropiadas de T, U y K y multiplicándolas entre sí.

Además, revisa los ejercicios del capítulo 2.3 del Friedberg, pero en particular resuelve 3 y 4 de la página 93.