0.1 Rango y rango Kruskal de una matriz: Tarea 1.1

Amélie Bernès, Primavera 2025.

En tu curso de teoría de ecuaciones ya trataste con el concepto de "rango" de una matriz. A continuación, damos una posible definición.

Definición 1. *(c.f. [Ran]) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el **rango** de A (denotado como $rank(A)$) es la mayor cantidad de columnas linealmente independientes de A.*

Si por A_j denotamos al j–ésimo vector columna de A,

$$A = [A_1|A_2|A_n|\cdots|A_n], \quad A_j \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

para calcular el rango de la matriz A, se busca extraer un subconjunto linealmente independiente de

$$Col(A) = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

de cardinalidad máxima. Entonces, $rank(A) \in \mathbb{N}$ es tal que

- existe un subconjunto de $Col(A)$ de cardinalidad $rank(A)$ que es linealmente independiente, y
- todo subconjunto de $Col(A)$ de cardinalidad mayor a $rank(A)$ es linealmente dependiente.

Definición 2. *(c.f. [WJ90], p. 49) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el **rango Kruskal** de A (denotado como $krank(A)$) es el mayor número $r \in \mathbb{N}$ tal que todo subconjunto de r columnas de A es linealmente independiente.*

O sea, para calcular el rango Kruskal de la matriz (1), debes considerar al subconjunto de los naturales

$$M(A) = \{r \in \mathbb{N} : \quad \textit{todo subconjunto de } Col(A) \textit{ de } r \textit{ elementos es l.i..}\}$$

y calcular su máximo;

$$krank(A) = max(M(A)).$$

Nota que $M(A)$ es un conjunto de números naturales consecutivos;

$$M(A) = \{0, 1, \dots, krank(A)\}.$$

Problema 1. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

calcula $rank(A)$ y $krank(A)$.

Problema 2. *Demuestra que, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz cualquiera, entonces*

$$0 \le krank(A) \le rank(A).$$

Definición 3. *Si $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ y*

$$sop(x) = \{j \in \{1, \dots, n\} : \quad x(j) \neq 0\},$$

*se define la **norma cero** de x como*

$$||x||_0 := |sop(x)|. \tag{2}$$

Entonces, la norma cero de un vector es la cantidad de entradas no cero de este. A pesar del nombre, la expresión (2) no define una norma en $\mathbb{R}^n$ (no se cumple la desigualdad triangluar).

Problema 3. *Demuestra que, para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, son equivalentes*

1. $krank(A) \geq k$
2. *El único vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$ y $\|x\|_0 \leq k$ es el vector cero.*

Sugerencia: Utiliza la ecuación

$$Ax = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n \in \mathbb{R}^m.$$

◇ ◇ ◇

La equivalencia establecida en el Problema 3 se usa para determinar unicidad de soluciones en problemas de optimización del tipo

$$\begin{aligned} \textit{minimizar} \quad & \|x\|_0, \\ \textit{donde} \quad & Ax = y. \end{aligned}$$

Véase, por ejemplo, [WJ90], Teorema 2.6, p. 49.

Bibliography

[Ran] *Rank (Linear Algebra).* `https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra)`. Consultado en: 2025 - 01 -28.

[WJ90] Ma Yi Wright John. *High-Dimensional Data Analysis with Low-Dimensional Models: Principles, Computation, and Applications.* 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1990.

0.2 Tarea 1.2

Amélie Bernès, Primavera 2025.

Problema 4. *Sean* $X \neq \emptyset$ *un conjunto no vacío,* F *un campo. Considere al* $F-$*espacio vectorial* F^X *de funciones de* X *en* F *(como se definió en clase). Seleccione un punto* $x_0 \in X$ *y defina a* W *como el conjunto de funciones de* X *en* F *que mapean el punto* x_0 *al cero del campo, es decir,*

$$W = \{f \in F^X : \ f(x_0) = 0\} \subseteq F^X.$$

Demuestra que W *es subespacio de* F^X*.*

Problema 5. *Considere al* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*. Si*

$$X = \{v_1, v_2, v_3\},$$

donde

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (1,0,2),$$

demuestra que el vector

$$u = (4,2,1) \in \mathbb{R}^3$$

no *es elemento del generado de* X*.*