Chapter 1

Ideas de problemas para tarea o examen

- Demuestra que, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de subespacios de V, entonces $\cup U_\alpha$ contiene al vector cero y es cerrada bajo multiplicaciones escalares. Da un ejemplo en el que $\cup U_\alpha$ no sea subespacio de V.
- Si U, V, W son subespacios de un $F-$espacio vectorial tales que $U \oplus V = U \oplus W$, ¿necesariamente se tiene que $V = W$? Si la respuesta es afirmativa, demuéstrelo; si es negativa, de un contraejemplo.
- ¿El krank de una matriz es preservado bajo operaciones elementales de matrices?
- Demuestra que $U \subseteq V$ es subespacio de V si y sólo si es no vacío, es cerrado bajo multiplicaciones escalares y bajo sumas.
- que te demuestren que $M(A)$ es un segmento inicial de los naturales (como lo pones en la tarea de abajo).
- Sea C una colección l.d.. Se define el spark como ... demuestra que si entonces es la única con la propiedad. Pista: la función $||\cdot||_0$ desigualdad triangular.
- Que completen la fórmula $dim(W+V)$. Que la usen para demostrar que dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ tienen suma directa, y que su suma es todo el espacio.

1.1 Rango y rango Kruskal de una matriz: Tarea 1.1

Amélie Bernès, Primavera 2025.

En tu curso de teoría de ecuaciones ya trataste con el concepto de "rango" de una matriz. A continuación, damos una posible definición.

Definición 1. *(c.f. [Ran]) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el* ***rango*** *de A (denotado como $rank(A)$) es la mayor cantidad de columnas linealmente independientes de A.*

Si por A_j denotamos al $j-$ésimo vector columna de A,

$$A = [A_1|A_2|A_n|\cdots|A_n], \quad A_j \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

para calcular el rango de la matriz A, se busca extraer un subconjunto linealmente independiente de

$$Col(A) = \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

de cardinalidad máxima. Entonces, $rank(A) \in \mathbb{N}$ es tal que

- existe un subconjunto de $Col(A)$ de cardinalidad $rank(A)$ que es linealmente independiente, y
- todo subconjunto de $Col(A)$ de cardinalidad mayor a $rank(A)$ es linealmente dependiente.

Definición 2. *(c.f. [WJ90], p. 49) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el* ***rango Kruskal*** *de A (denotado como $krank(A)$) es el mayor número $r \in \mathbb{N}$ tal que todo subconjunto de r columnas de A es linealmente independiente.*

O sea, para calcular el rango Kruskal de la matriz (1.1), debes considerar al subconjunto de los naturales

$$M(A) = \{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \quad \textit{todo subconjunto de } Col(A) \textit{ de } r \textit{ elementos es l.i.}.\}$$

y calcular su máximo;

$$krank(A) = max(M(A)).$$

Nota que $M(A)$ es un conjunto de números naturales consecutivos;

$$M(A) = \{0, 1, \dots, krank(A)\}.$$

Problema 1. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

calcula $rank(A)$ y $krank(A)$.

Solución: Sean A_1, A_2, A_3 las columnas de A. Claro que

$$A_3 = 2A_2. \tag{1.2}$$

- Por (1.2), el rango de A no puede ser 3 (el único subconjunto de $Col(A)$ de tres elementos contiene a A_2 y A_3). Como A_1 y A_2 son l.i., entonces

$$rank(A) = 2.$$

- Por (1.2),

$$krank(A) = 1,$$

pues sí hay singuletes de columnas l.i., pero hay un conjunto de dos columnas l.d..

Problema 2. *Demuestra que, si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz cualquiera, entonces*

$$0 \leq krank(A) \leq rank(A).$$

Solución: Si $r = krank(A)$, entonces todo subconjunto de $Col(A)$ de cardinalidad r es l.i., luego, un l.i. de cardinalidad maximal no puede tener menos de r elementos.

Definición 3. *Si $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ y*

$$sop(x) = \{j \in \{1,\dots,n\} : \ x(j) \neq 0\},$$

se define la ***norma cero*** *de x como*

$$||x||_0 := |sop(x)|. \tag{1.3}$$

Entonces, la norma cero de un vector es la cantidad de entradas no cero de este. A pesar del nombre, la expresión (1.3) no define una norma en $\mathbb{R}^n$ (no se cumple la desigualdad triangluar).

Problema 3. *Demuestra que, para $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, son equivalentes*

1. *$krank(A) \geq k$*
2. *El único vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = 0$ y $||x||_0 \leq k$ es el vector cero.*

Sugerencia: Utiliza la ecuación

$$Ax = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \in \mathbb{R}^m. \tag{1.4}$$

Solución:

Claro que $krank(A) \geq k$ si y sólo si todo subconjunto de $Col(A)$ de k elementos es l.i.. (poner en el examen?)

$\Rightarrow$) pon aparte el caso k igual a cero? Supongamos que existe $x = (x_k)_{k=0}^{n-1}$ un vector no cero tal que $Ax = 0$ y $||x||_0 = l \leq k$. Sin pérdida de generalidad, digamos que

$$x = (x_1,\dots,x_l,0,\dots,0),$$

con $x_1,\dots,x_l \neq 0$. Usando el que $Ax = 0$ y la relación (1.4), se tiene que

$$0 = Ax = x_1A_1 + \ldots + x_lA_l, \ \ x_1,\dots,x_l \neq 0;$$

esto contradice el que $\{A_1,\dots,A_l\}$ sea l.i..

$\Leftarrow$) Mostremos que todo subconjunto de k columnas de A es l.i.. Para simplificar la notación, tomemos a $A_1,\dots,A_k$. Sean $x_1,\dots,x_k$ escalares tales que

$$0 = x_1A_1 + \ldots + x_kA_k.$$

Si definimos al vector

$$x = (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n,$$

por la ecuación anterior tenemos que x es solución de la ecuación $Ax = 0$. Además, $||x||_0 \leq k$, pues las únicas entradas de x que pueden no ser cero son $x1,\dots,x_k$. Así, por hipótesis, x es el vector cero, luego, $x_1 = \dots = x_k = 0$. De esto concluimos que $\{A_1,\dots,A_k\}$ es l.i..

⋄ ⋄ ⋄

La equivalencia establecida en el Problema 3 se usa para determinar unicidad de soluciones en problemas de optimización del tipo

$$\begin{aligned} \textit{minimizar} \quad & \|x\|_0, \\ \textit{donde} \quad & Ax = y. \end{aligned}$$

Véase, por ejemplo, [WJ90], Teorema 2.6, p. 49.

Bibliography

[Ran] *Rank (Linear Algebra).* `https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra)`. Consultado en: 2025 - 01 -28.

[WJ90] Ma Yi Wright John. *High-Dimensional Data Analysis with Low-Dimensional Models: Principles, Computation, and Applications.* 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1990.

1.2 Tarea 1.2

Amélie Bernès, Primavera 2025.

Problema 4. *Sean* $X \neq \varnothing$ *un conjunto no vacío,* F *un campo. Considere al* $F-$*espacio vectorial* F^X *de funciones de* X *en* F *(como se definió en clase). Seleccione un punto* $x_0 \in X$ *y defina a* W *como el conjunto de funciones de* X *en* F *que mapean el punto* x_0 *al cero del campo, es decir,*

$$W = \{f \in F^X : \ f(x_0) = 0\} \subseteq F^X.$$

Demuestra que W *es subespacio de* F^X*.*

Problema 5. *Considere al* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*. Si*

$$X = \{v_1, v_2, v_3\},$$

donde

$$v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (1,0,2),$$

demuestra que el vector

$$u = (4,2,1) \in \mathbb{R}^3$$

no *es elemento del generado de* X*.*