Matemáticas: la pérdida de la certidumbre

Capítulos IV-VII

Morris Kline

Gauss (1777-1855)

- Interés en astronomía
- Predijo la trayectoria de varios planetas
- Desarrolló ideas de geometría diferencial al realizar trabajos de geodesia
- Trabajos en magnetismo
- Revivió el interés por la óptica

Cauchy (1789-1857)

- Contraparte francesa de Gauss
- Fundó la teoría de funciones de una variable compleja
- Ondas en medio acuático, estudios en física matemática
- Estudios sobre la luz

Fourier (1768-1830)

- Estudios sobre la conducción del calor (pensando aplicarlos para estimar la edad de la Tierra)
- Teoría de series trigonométricas infinitas

Los matemáticos de la época no se interesaban en la matemática per-se, sino que sus investigaciones eran de índole físico matemáticas

Cambio de perspectiva

Dios pasó a “segundo plano”; las leyes matemáticas se convirtieron en el centro de atención.

Laplace (1749-1827)

Su obra *Mecánica celeste* fue criticada por Napoleón: “es un libro sobre el sistema del universo sin mencionar nunca a su Creador".

"No tuve necesidad de esa hipótesis".

Diderot (1713-1784)

“Si quereis que crea en Dios debéis conseguir que lo toque”.

Pensamientos sobre la interpretación de la naturaleza

¿Cómo sabemos siquiera que hay un mundo externo por estudiar?

Lo único que conocemos son sensaciones

¿Quién nos garantiza que existe un mundo permanente de objetos sólidos?

¿De dónde provienen las sensaciones que percibimos? ¿de ese mundo externo?, ¿de nosotros mismos?, ¿de Dios?

Leyes: resumenes de sensaciones

Los teoremas son repeticiones elaboradas de los axiomas, nada más que tautologías (no nuevas verdades). Además, los axiomas son consecuencia de nuestras sensaciones; no son “verdades evidentes”

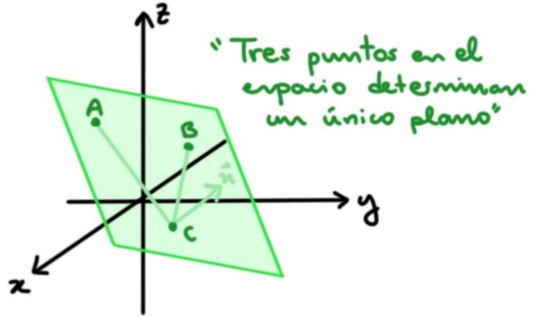
Muchos refutaron sus ideas; las matemáticas estaban demostrando en la práctica ser un medio exitoso para la descripción de la naturaleza.

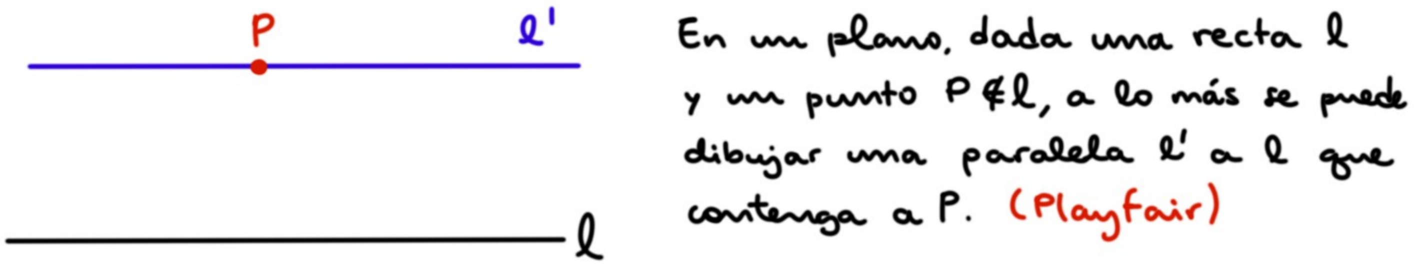
Hume (1711-1776)

El hombre no puede obtener verdades

Kant: el mundo real no es cognoscible

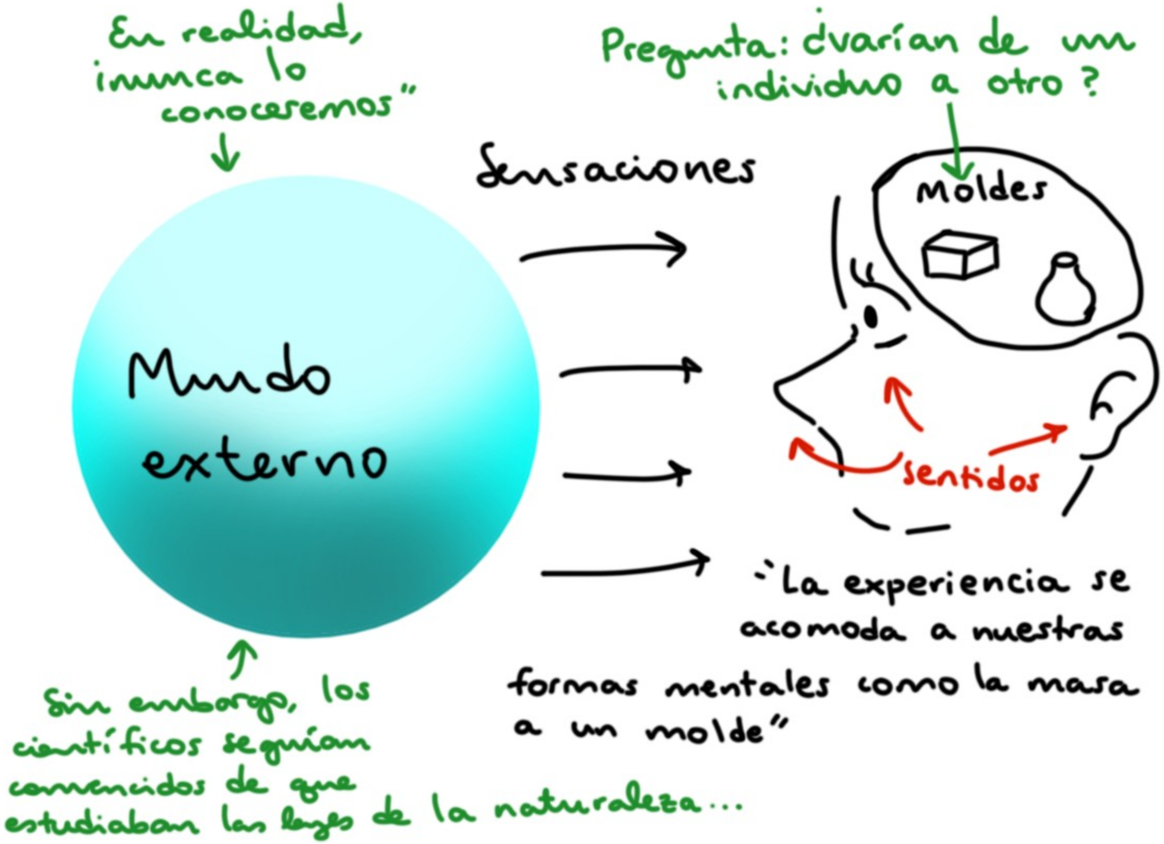
- En su *Crítica de la razón pura* (1781), Kant afirma que los axiomas y teoremas de la física eran verdades.
- Nuestras mentes poseen las formas del espacio y el tiempo
- Puesto que la intuición del espacio tiene su origen en la mente, ésta acepta automáticamente ciertas propiedades del espacio.
- Axiomas: verdades sintéticas a priori
- Se exploran las consecuencias lógicas de estos principios
- El orden y la racionalidad que creemos percibir en el mundo externo son impuestos a ese mundo por nuestras mentes y modos de pensamiento
- las leyes eran un mecanismo del hombre para organizar y racionalizar sus sensaciones





La incapacidad de Kant de concebir una geometría no euclidea le convenció de que no podía haberla.

¿Cuál es el objeto de estudio de las matemáticas?



La filosofía de Kant glorificaba la razón; sin embargo, asignaba a ésta la misión de explorar no la naturaleza, sino **los recovecos de la mente humana**

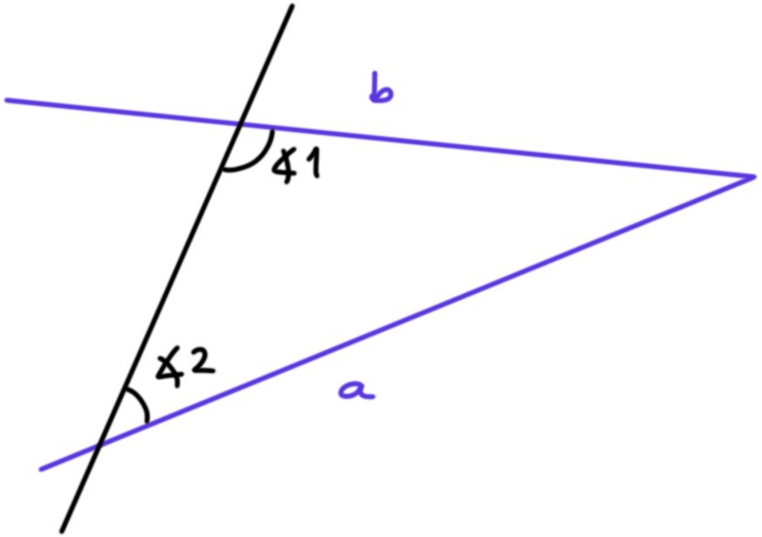
"La naturaleza de Dios cae fuera del conocimiento racional, pero debemos creer en Él."

La ciencia es un mundo de impresiones sensoriales ordenado y controlado por la mente de acuerdo con categorías innatas (ex. espacio, tiempo, causa y efecto, sustancia)

La geometría Euclidea

Era una de las ramas más veneradas – fue la primera en ser establecida deductivamente. Sin embargo, la complejidad del quinto axioma de Euclides molestaba a algunos.

Quinto axioma de la geometría euclidea: si una línea recta que corta a otras dos líneas rectas produce ángulos internos del mismo lado que sean menores que dos rectos, entonces las dos líneas rectas se encontrarán, si se prolongan, del mismo lado de la línea recta en que los ángulos son menores que dos ángulos rectos. Nota: se habla de rectas FINITAS.



Euclides fue capaz de probar la existencia de rectas paralelas, pero retrasó lo más que pudo el usar el quinto axioma (lo que sugiere que incluso él encontraba algo raro en él)

Dos direcciones de trabajo

1.- Sustituir el axioma de las paralelas por un enunciado "más evidente". Ex:

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos (i.e. 180°)
- Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada (Gauss, 1799).
- Dados tres puntos no alineados, siempre será posible construir un círculo que pase por todos ellos (Legendre, 1824)

2.- Tratar de deducir el quinto axioma de los demás -es decir, cambiar su estatus de "axioma" a "teorema"

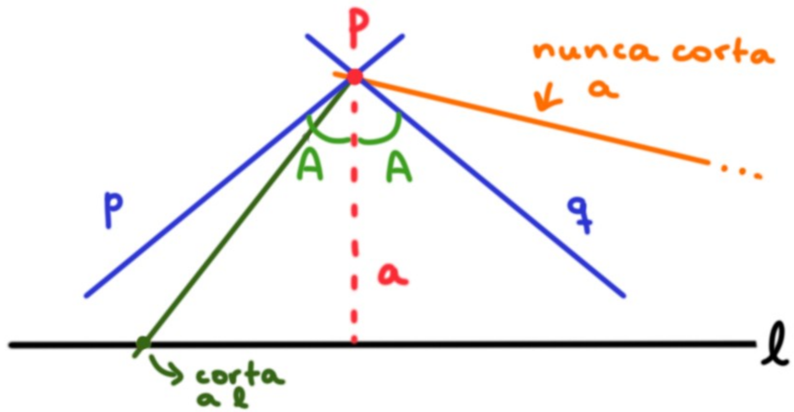
- Gauss (1813): “geometría antieuclídea”
- G.Saccheri (1667-1733): si se adopta un axioma que difiera esencialmente del de Euclides, se debe llegar a un teorema que contradiga otro de los teoremas de Euclides.

Lambert: “cualquier colección de hipótesis que no condujera a contradicciones ofrecería una posible geometría”

Geometría hiperbólica: Lobachevski, Bolyai y Gauss

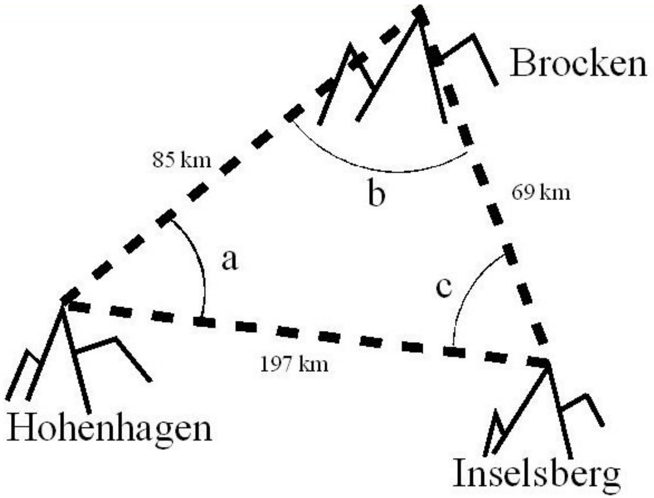
La geometría no euclídea significa el desarrollo de las consecuencias de un sistema de axiomas que contiene una alternativa al axioma de las paralelas de Euclides.

Nicolai Lobachevski (1793-1856)



- El ángulo A se llama ángulo de paralelismo
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a 180°

Gauss notó que esta geometría en realidad no estaba tan despegada de la realidad (particularmente para el estudio de figuras grandes)



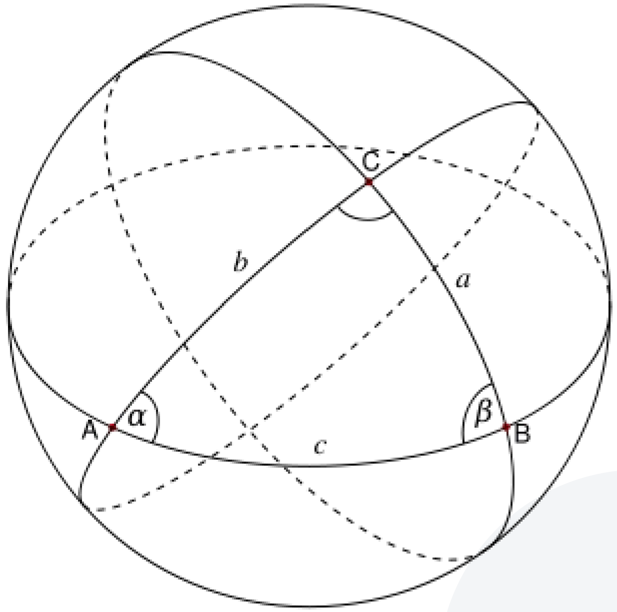
Geometría elíptica: Riemann

Gauss asignó a Riemann el tema de los fundamentos de la geometría para la conferencia que éste debía pronunciar para obtener el título de *Privatdozent. ¿Cuál es la estructura del espacio?*

Axiomas de Euclides: verdades empíricas, no ciertas per se.

Geometría elíptica:

- *No hay lineas paralelas (dos lineas cualesquiera se intersecan)*
- *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor a 180°*



La poca aceptación de las geometrías no Euclideanas

Ley de la conservación de la ignorancia de Cantor: una falsa conclusión, una vez que se ha llegado a ella y ha sido generalmente aceptada, es muy difícil de desalojar, y cuanto menos comprendida es con mayor tenacidad defendida.

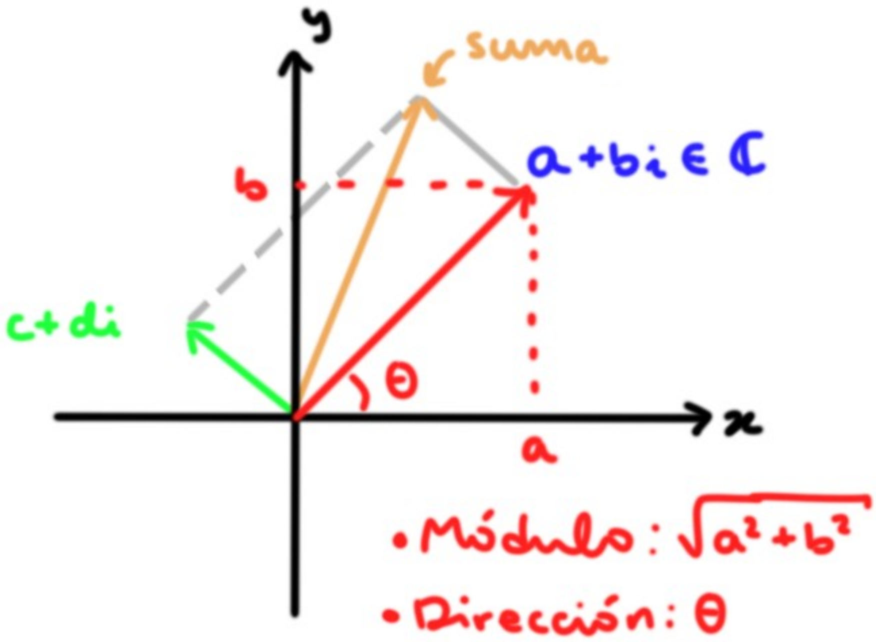
Muchos matemáticos creían que debía de haber una inconsistencia lógica en las geometrías no euclídeas

La idea de que una geometria contraria a la de Euclides fuese útil para describir el mundo era rechazada con fuerza

El hecho de que hombres ilustres como Gauss y Riemann las defendiesen cambió el panorama para mejor

La rama matemática que tenía mayor solidez ya no era la geometría, sino la aritmética.

Vectores (geometría) y números complejos (álgebra)



Dualidad entre el concepto de vectores (usados para modelar problemas físicos) en el plano y de números complejos (1830)

Para hacer modelos más fieles a la realidad, sería preferible usar no vectores bidimensionales, sino tridimensionales.

En la búsqueda de números complejos tridimensionales

Hamilton (1805-1865) trabajó por más de 15 años en esa construcción. Llego a un sistema de cuatro coordenadas en el que no se valía la conmutatividad de la multiplicación (los cuaterniones).

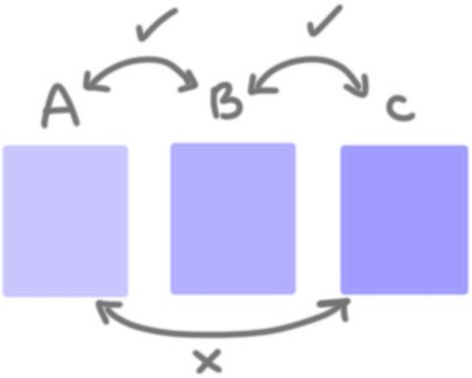
El hecho de que pudiesen definirse sistemas con propiedades extrañas minaba la confianza que ahora se tenía en la aritmética y el álgebra

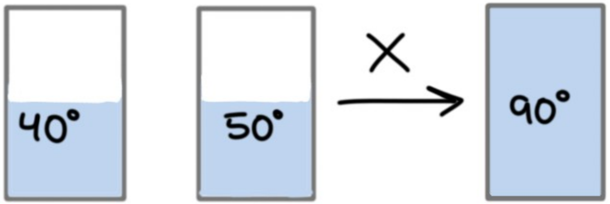
Cayley (1821-1895) desarolló otro sistema algebraico útil en el que no se valia la conmutatividad; el anillo de las matrices. Este ni siquiera es un dominio entero.

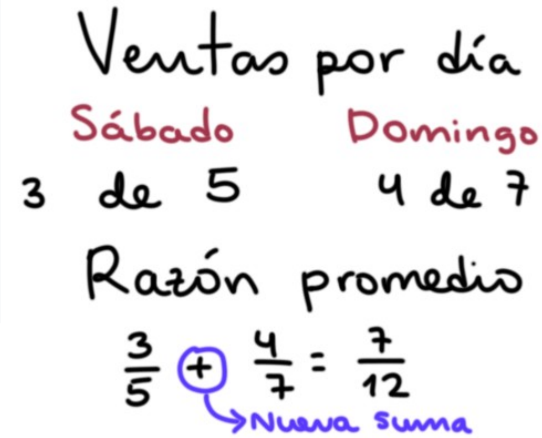
Se llega de nuevo al problema que enfrentaba la geometría Euclidiana; el concepto de número (base de la aritmética) es empírico.

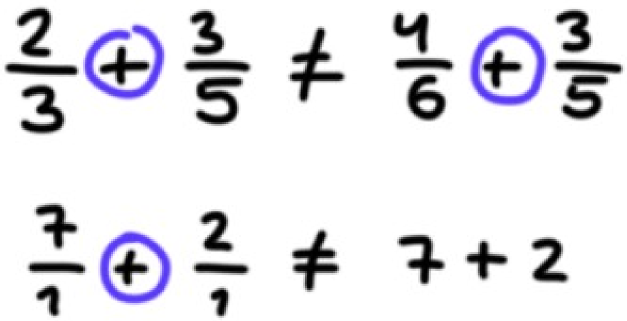
En realidad, las leyes de la aritmética no parecen respetarse en la vida real

Si A se asemeja a B y be se asemeja a C, ¿A se asemeja a C?









¿Hay más de una aritmética?

Así como es posible construir geometrías distintas a la de Euclides, existen muchas otras aritméticas en matemáticas.

Cada aritmética está diseñada para representar algún tipo de fenómeno del mundo físico.

Dado que el álgebra y el análisis son desarrollos de la aritmética, esas ramas no son tampoco cuerpos de verdades.

En matemáticas, no existe la verdad en el sentido de unas leyes del mundo real. Los axiomas de las estructuras básicas de la geometría y la aritmética son sugeridos por la experiencia.

Resistencia

El hecho de que las matemáticas no sean un cuerpo de verdades fue demasiado difícil de digerir

Hamilton: “Ninguna persona inteligente y sincera puede dudar de la verdad de las principales propiedades de las rectas paralelas, tal y como fueron enunciadas por Euclides en sus Elementos hace dos mil años; aunque bien pudiera ser que le gustara verlas tratadas con un método más claro y mejor. La doctrina no implica oscuridad ni confusión de pensamiento, y no deja en la mente base razonable para la duda, aunque se pueda ejercitar con provecho el ingenio para mejorar la forma de razonamiento”

Cayley: “el axioma de las paralelas en la forma de Playfair no necesita demostración, sino que forma parte de nuestra noción de espacio, del espacio físico de nuestra experiencia, que no conoce mediante la experiencia, pero que es la representación que subyace en la base de toda expe riencia externa.

(…) No que las proposiciones de la geometría sean sólo aproximadamente verdaderas, sino que siguen siendo absolutamente verdaderas en relación a ese espacio euclídeo que ha sido durante tanto tiempo considerado como el espacio físico de nuestra experiencia.