Contents

1 ¿Qué es esto? 1

2 2. Random variable generation 2

2.1 Introduction 2

2.1.1 The inverse transformation 2

2.1.2 2.2: General transformation methods 6

2.1.3 2.2.1 A normal generator 7

2.1.4 2.2.2 Discrete distributions 9

3 Notación 11

Chapter 1

¿Qué es esto?

Los ejercicios, desarrollos de argumentos y códigos realizados por mí mientras estudio el libro *Introducing Monte Carlo Methods with R* de Christian P. Robert y George Casella.

Chapter 2

2. Random variable generation

2.1 Introduction

2.1.1 The inverse transformation

Teorema 2.1.1

*(**p.44**) Sea X una variable aletoria continua, con funciones de densidad f_X y F_X, respectivamente, con $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ invertible. La variable aleatoria*

$$U = F_X \circ X$$

tiene distribución $\mathcal{U}(0,1)$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "F_X \circ X"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "F_X"] \\ & (0,1) \end{tikzcd}$$

$F_X \circ X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

Demostración. En efecto, sea $u \in (0,1)$. Puesto que por hipótesis F_X es invertible (o, equivalentemente, biyectiva), existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) = u$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(U \leq u) = P(F_X(X) \leq F_X(x)) = P(F_X^{-1}(F_X(X)) \leq F_X^{-1}(F_X(X))) \\ = P(X \leq x) = F_X(x) = u. \end{aligned}$$

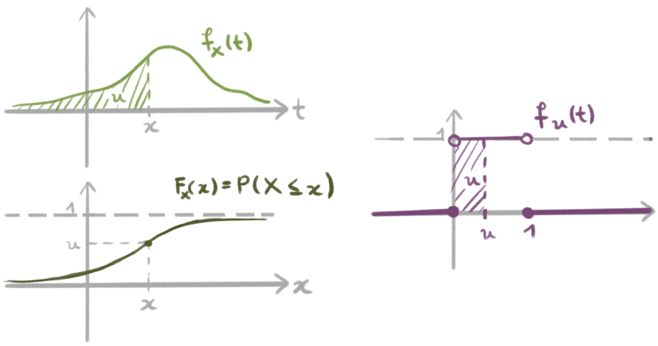
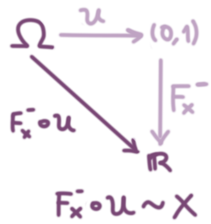


Figure 2.1: a

$\square$

El resultado dual se da a continuación.



Ejercicio 1

*(**2.1, p.44**) Si X es una variable aleatoria con función de acumulación F_X, defina a la **inversa generalizada de** F_X como sigue:*

$$\forall u \in (0,1): \quad F_X^-(u) := inf\{x \ : \ F_X(x) \geq u\}. \tag{2.1}$$

Demuestre que si U es una variable aleatoria con distribución $U(0,1)$, entonces

$$F_X^- \circ U \sim X.$$

Demostración.

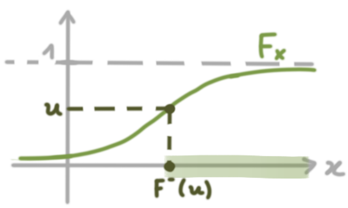


Figure 2.2: Definición de F_X^-.

Sea $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la composición $F_X^- \circ U$. Debemos demostrar que

$$\forall z \in \mathbb{R}: \quad P(Y \leq z) = P(X \leq z).$$

Sea pues $z \in \mathbb{R}$.

a) Por ser F_X una función de acumulación, es una función creciente, luego, los eventos

$$(X \leq z) \ \text{ y } \ (F_X(X) \leq F_X(z))$$

son iguales; además, según el teorema 2.1.1, $F \circ X \sim U$; así,

$$P(X \leq z) = P(F_X(X) \leq F_X(z)) = P(U \leq F_X(z)). \tag{2.2}$$

b) Por la definición de F^- en términos de un ínfimo, se sigue de inmediato que

$$\begin{aligned} P(Y \leq z) = P(F_X^-(U) \leq z) =& P(\{w \in \Omega \ : \ F_X^-(U(w)) \leq z\}) \\ =& P(\{w \in \Omega \ : \ U(w) \leq F_X(z)\}) = P(U \leq F_X(z)), \end{aligned}$$

o sea, que

$$P(Y \le z) = P(U \le F_X(z)); \tag{2.3}$$

de (2.2) y (2.3) se sigue, como queríamos, que $P(X \le z) = P(Y \le z)$.

□

Ejercicio 2

> *(**2.2, p. 45**) Se dan algunas funciones de probabilidad. Calcule las correspondientes funciones de acumulación, y en base a estas y los resultados anteriores, simule via una transformación de variables aleatorias uniformes la distribución dada. Comparar el resultado obtenido con las gráficas hechas llamando a la distribución en R.*

Solución

a) **Distribución logística**: la pdf es

$$f(x) = \frac{1}{\beta}\frac{e^{-(x-\mu)/\beta}}{(1+e^{-(x-\mu)/\beta})^2} \tag{2.4}$$

(al parámetro μ se le llama **localización**, y al β **escala**). Integrando, calculamos que

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad F(x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/\beta}};$$

la inversa de esta función es

$$F^{-1}(u) = ln\left(\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\beta}\right) + \mu,$$

luego, según el ejercicio 1, si $U \sim U(0,1)$, la variable aleatoria

$$Y = ln\left(\left(\frac{U}{1-U}\right)^{\beta}\right) + \mu$$

tiene a la función (2.4) como función de distribución.

Los valores de default de los parámetros de la distribución logística en `rstudio` son

$$\mu = 0, \quad \beta = 1;$$

a continuación comprobamos con un experimento numérico en `rstudio` que las variables aleatorias

$$X = logistic(\mu = 0, \beta = 1) \text{ y } Y = ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \tag{2.5}$$

parecen tener la misma distribución.

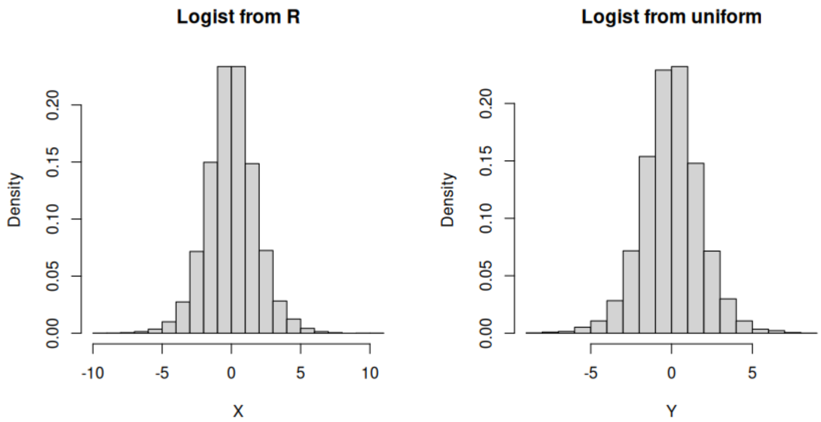


Figure 2.3: Histogramas de distribuciones logísticas (tamaño de muestra: 10^4) usando las variables aleatorias (2.5).

Código de R empleado para generar la imagen:

```
> Nsim=10^4
> U=runif(Nsim)
> X=rlogis(Nsim)
> Y=log(U/(1-U))
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(X, freq=FALSE, main='Logist from R')
> hist(Y, freq=FALSE, main='Logist from uniform')
```

b) **Distribución de Cauchy**: la pdf es

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Después de integrar se llega a que

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

La inversa de esta transformación es

$$F^{-1}(u) = \mu + \sigma tan\left(\pi u - \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 < u < 1,$$

luego, según el ejercicio 1, si $U \sim U(0,1)$, la variable aleatoria

$$F^{-1}(U) = \mu + \sigma tan\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right)$$

tiene distribución de Cauchy con parámetros μ y σ.

Haciendo $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, podemos graficar los histogramas de 10^4 variables aleatorias

$$X \sim Cauchy(\mu, sigma), \quad \text{y} \quad Z = \mu + \sigma tan\left(\pi U - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.6}$$

y compararlos; como se ve en la figura, resultado de correr el código de más abajo, estos histogramas son casi idénticos.

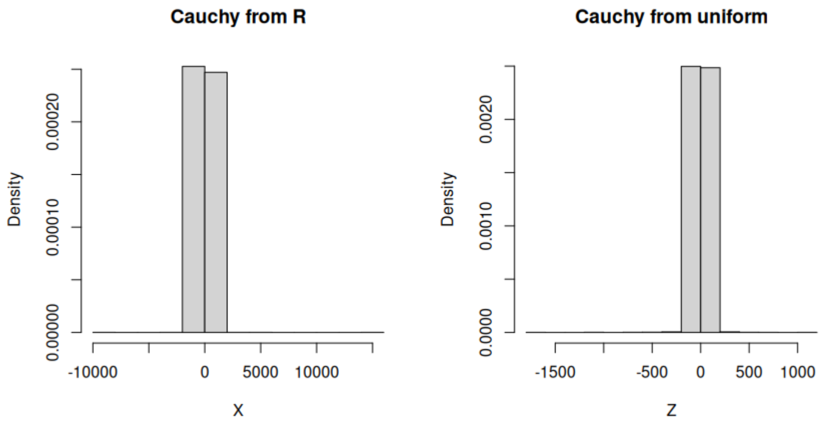


Figure 2.4: Histogramas de distribuciones Cauchy (tamaño de muestra: 10^4) usando las variables aleatorias (2.6).

Código de R empleado para generar la imagen:

```
> Nsim=10^4
> U=runif(Nsim)
> X=rcauchy(Nsim)
> Z=tan(3.1416*(U-0.5))
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(X, freq=FALSE, main='Cauchy from R')
> hist(Z, freq=FALSE, main='Cauchy from uniform')
```

2.1.2 2.2: General transformation methods

Según un ejemplo del libro, si $U \sim U(0,1)$, entonces $-ln(U) \sim Exp(1)$. Se establecen además las siguientes relaciones:

Teorema 2.1.2

Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ iid $Exp(1)$ variables aleatorias. Para cualesquiera $a, b, v \in \mathbb{N}2^*$,

$$Y = 2\sum_{j=1}^{v} X_j \sim \chi^2_{2v}, \tag{2.7}$$

$$Y = \beta\sum_{j=1}^{a} X_j \sim \mathcal{G}(a,\beta), \tag{2.8}$$

$$Y = \frac{\sum_{j=1}^{a} X_j}{\sum_{j=1}^{a+b} X_j} \sim Beta(a,b). \tag{2.9}$$

Comprobemos las fórmulas (2.7), (2.8) y (2.9) con algunas simulaciones en R.

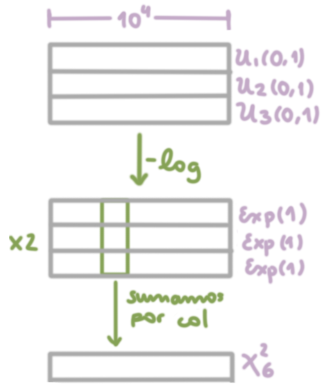


Figure 2.5: Explicación gráfica del proceso de simulación.

```
> U=runif(3*10^4)
> U=matrix(data=U, nrow=3)
```

```
> X=-log(U)
> Y=2*apply(X, 2, sum)
> Z=rchisq(10^4, df=6)
> par(mfrow=c(1,2))
> hist(Z, freq=FALSE, main='Chi df=6 from R')
> hist(Y, freq=FALSE, main='Chi df=6 from Exp')
```

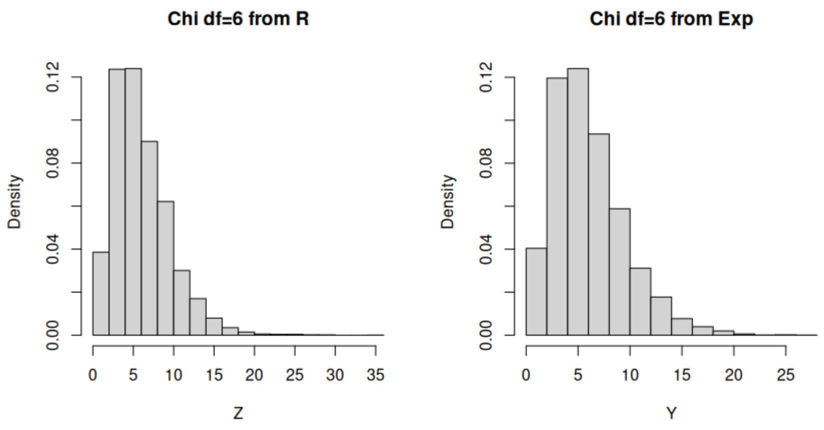


Figure 2.6: Histogramas de $Y = 2(X_1 + X_2 + X_3)$, con X_i, $1 \leq i \leq 3$ iid $Exp(1)$ y de $Z \sim \chi^2_6$.

No pude simular correctamente las otras dos distribuciones!

2.1.3 2.2.1 A normal generator

Teorema 2.1.3

(Box-Muller) *if U_1 and U_2 are iid uniforms in $]0,1[$, then the variables*

$$X_1 := \sqrt{-2log(U_1)}cos(2\pi U_2)$$

and

$$X_2 := \sqrt{-2log(U_1)}sen(2\pi U_2)$$

are iid N(0,1).

```
> n = 10**4
> U1 = runif(n)
> U2 = runif(n)
> X1 = sqrt(-2*log(U1))*cos(2*pi*U2)
> X2 = sqrt(-2*log(U1))*sin(2*pi*U2)
> N = rnorm(n,0,1)
> par(mfrow=c(1,3))
> hist(X1, freq=FALSE, main='Primera normal de BM')
> hist(X2, freq=FALSE, main='Segunda normal de BM')
> hist(N, freq=FALSE, main='Normal de R')
```

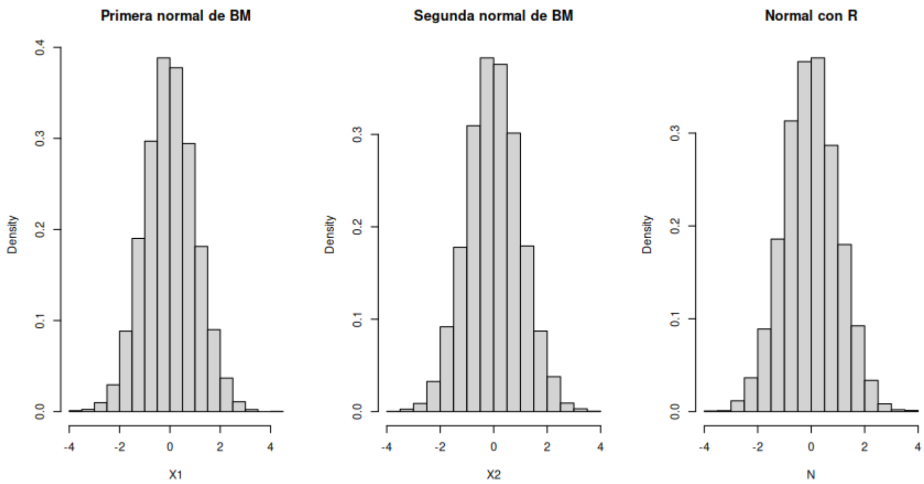


Figure 2.7: Usamos el algoritmo de Box-Muller para generar dos normales estandar. Comparamos sus histogramas con el de una normal generada por R.

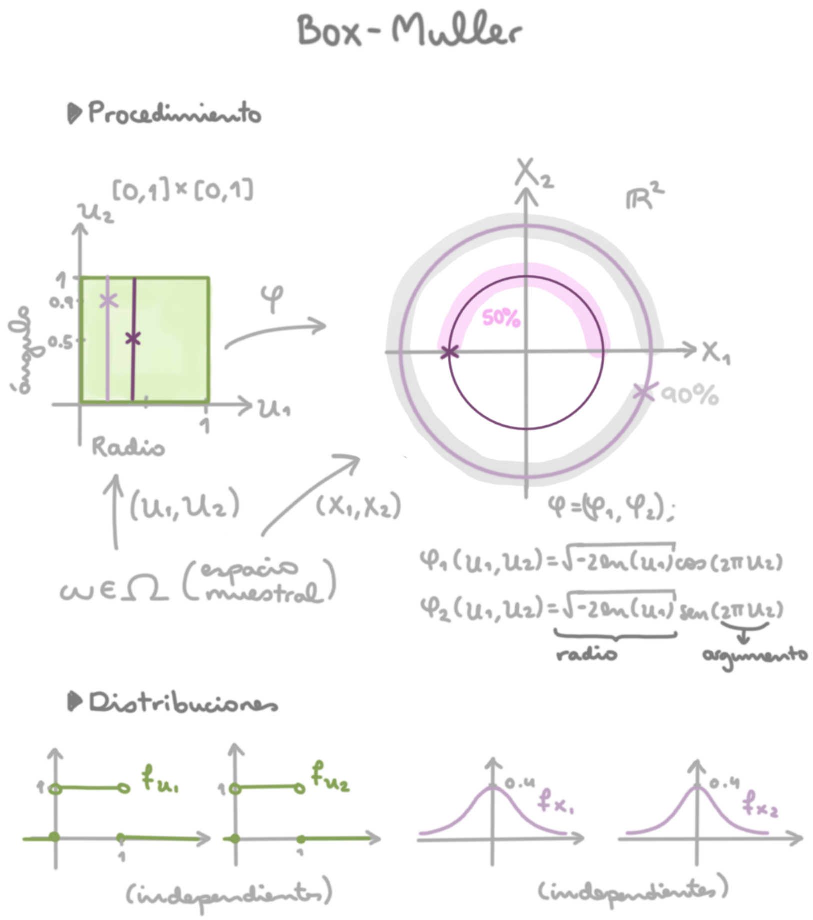


Figure 2.8

Ejercicio 3

> ***(2.3)*** *Podemos usar el* ***teorema del límite central*** *para generar una distribución normal a partir de variables aleatorias uniformes e independientes.*
>
> *Sean* $U_i \sim U[-1/2, 1/2]$, $0 \leq i \leq 12$. *Se calcula que, para toda* i, $E[U_i] = 0$ *y*

$Var[U_i] = 1/12$. Si $Z := \sum_{i=1}^{12} U_1$, entonces

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{12} E(U_i) = 0$$

y

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^{12} Var(U_i) = 1;$$

ahora bien, según el TLC, la variable aleatoira

$$\frac{Z - E(Z)}{\sqrt{Var(Z)}} = Z$$

tiende en probabilidad a $N(0,1)$

```
> n = 10**4
> Z1 = rnorm(n, 0, 1)
> U =runif(12*10**4)
> U = matrix(data = U, nrow=12)
> Z2 = apply(U, 2, sum)
> U1 = runif(n)
> U2 = runif(n)
> Z3 = sqrt(-2*log(U1))*cos(2*pi*U2)
> par(mfrow=c(1,3))
> hist(Z1, freq = FALSE, main = "Normal con R")
> hist(Z2, freq = FALSE, main = "Normal con TLC")
> hist(Z3, freq = FALSE, main = "Normal con BM")
```

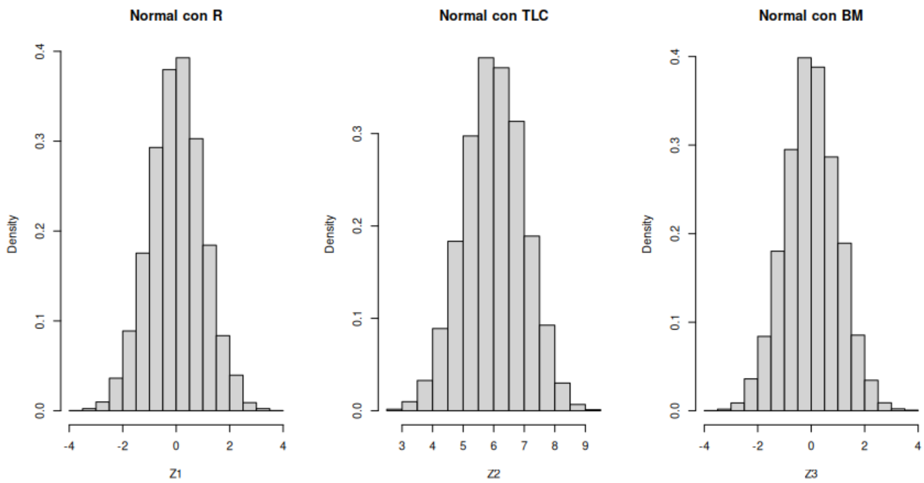


Figure 2.9: Resultados de las simulaciones en R. Por lo general se prefire usar BM a TLC, pues el primero da lugar a v.a. que en efecto tienen distribuciones $N(0,1)$, mientras que el segundo método siempre da aproximaciones.

2.1.4 2.2.2 Discrete distributions

A partir de una variable uniforme $U \sim U(0,1)$, también es posible generar distribuciones discretas. Sea P_θ una distribución cuyo soporte está contenido en $\mathbb{Z}$, y sea $X \sim P_\theta$.

Calcular a F_θ (la función de acumulación de la distribución) se reduce a calcular (**y, en la práctica, guardar en la memoria**) los siguientes números;

$$p_k := P(X \leq k) \tag{2.10}$$

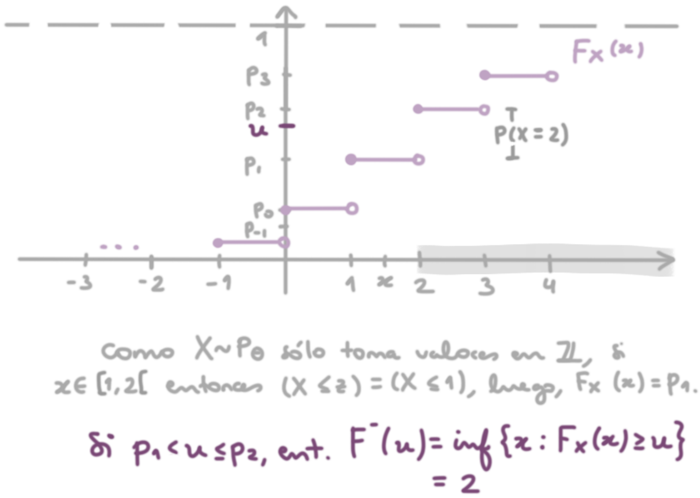


Figure 2.10: Recuerde cómo se define la inversa generalizada de la función de acumulación F en (2.1).

La inversa generalizada F_θ^- de la función de acumulación dada es

$$\begin{array}{rccl} F_\theta^- : &]0,1[& \longrightarrow & \{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \\ & u & \longmapsto & k \;\; si \; p_{k-1} < u \leq p_k. \end{array}$$

Según el ejercicio 1, $X := F_\theta^- \circ U \sim P_\theta$.

Ejemplo 2.1.4

Este es el resultado de usar las ideas de esta sección para, a partir de números aleatorios de una distribución $U(0,1)$, obtener una distribución binomial.

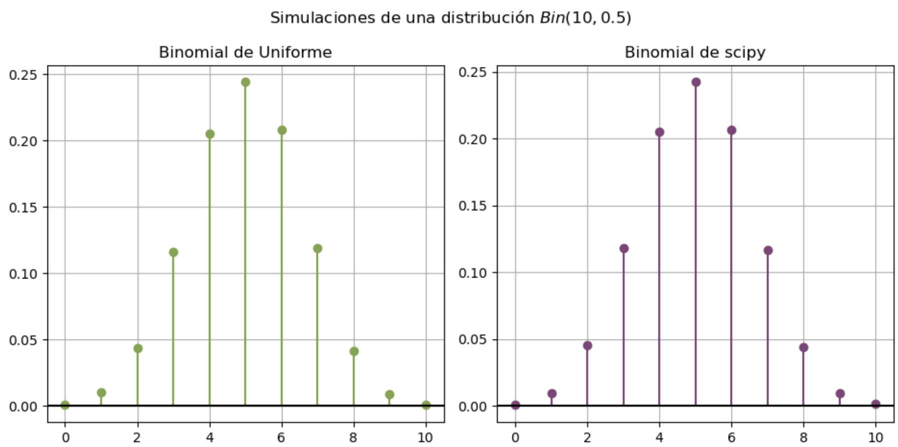


Figure 2.11: Figura generada usando el código de `generar_binomial.py`

Chapter 3

Notación

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$