

Estamos suponiendo que en la categoría \mathcal{A} existen todos los límites pequeños (p.ej. productos, igualadores) y que \mathcal{B} es cerrada bajo isomorfismos.

Lema 7.10: Si \mathcal{B} es fuertemente cerrada en \mathcal{A} bajo igualadores, entonces \mathcal{B} es cerrada en \mathcal{A} bajo intersecciones de monomorfismos regulares.

Demostración. Sea $(h_i : Z \rightarrow X)_{i \in I}$ una familia de monomorfismos regulares con $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$; queremos demostrar que su intersección está en \mathcal{B} . Para cada $i \in I$, sean $f_i, g_i : X \rightarrow Y_i$ tales que

$$Z_i \xrightarrow{h_i} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f_i} \\ \xrightarrow{g_i} \end{array} Y_i$$

es un diagrama igualador. Entonces

$$\forall i \in I : f_i \circ h_i = g_i \circ h_i. \quad (1)$$

Sea $Y = \prod_{i \in I} Y_i$, $p_i : Y \rightarrow Y_i$ el producto de la familia $(Y_i)_{i \in I}$ de objetos de \mathcal{A} - que existe por ser la categoría \mathcal{A} completa. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ los únicos morfismos tales que

$$\forall i \in I : p_i \circ f = f_i, p_i \circ g = g_i. \quad (2)$$

Por ser \mathcal{A} completa, existe un monomorfismo igualador $h : W \rightarrow X$ para f y g ;

$$f \circ h = g \circ h. \quad (3)$$

Por ser \mathcal{B} fuertemente cerrada en \mathcal{A} bajo igualadores y como $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, entonces $W \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.

$$\begin{array}{ccccc} Z_i & \xrightarrow{h_i} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_i} \\ \xrightarrow{g_i} \end{array} & Y_i \\ & \nearrow h & \downarrow f & \downarrow g & \nearrow p_i \\ W & & Y = \prod_{i \in I} Y_i & & \end{array}$$

Si $i \in I$, entonces, de (2) y (3) se sigue que

$$f_i \circ h = (p_i \circ f) \circ h = (p_i \circ g) \circ h = g_i \circ h,$$

luego, por ser (Z_i, h_i) igualador de f_i, g_i , se tiene que existe $\omega_i : W \rightarrow Z_i$ tal que

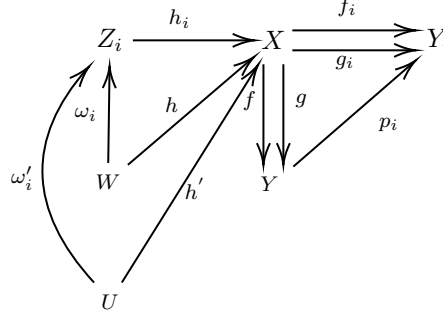
$$h = h_i \circ \omega_i, \quad i \in I. \quad (4)$$

$$\begin{array}{ccccc} Z_i & \xrightarrow{h_i} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_i} \\ \xrightarrow{g_i} \end{array} & Y_i \\ \omega_i \uparrow & \nearrow h & \downarrow f & \downarrow g & \nearrow p_i \\ W & & Y = \prod_{i \in I} Y_i & & \end{array}$$

Si mostramos que $[W, ((\omega)_{i \in I}, h)]$ es una intersección de la familia de monomorfismos regulares $(h_i)_{i \in I}$, puesto que ya vimos que $W \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, habremos acabado.

Sean pues para $i \in I$, $\omega'_i : U \longrightarrow Z_i$ y $h' : U \longrightarrow X$ monomorfismos tales que

$$\forall i \in I : h_i \circ \omega'_i = h'. \quad (5)$$



Entonces, para toda $i \in I$, por (1),

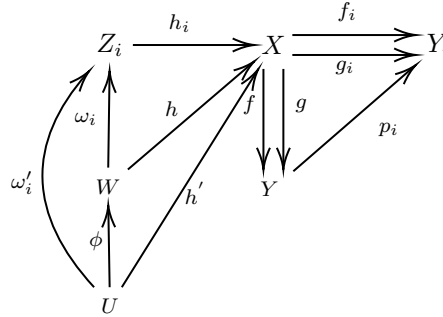
$$f_i \circ h' = (f_i \circ h_i) \circ \omega'_i = (g_i \circ h_i) \circ \omega'_i = g_i \circ h', \quad (6)$$

por lo tanto,

$$f \circ h' = g \circ h'. \quad (7)$$

Como (W, h) es un igualador para f y g , existe un único morfismo $\phi : U \longrightarrow W$ tal que

$$h' = h \circ \phi \quad (8)$$



Veamos que ϕ es un morfismo conector entre los dos límites. Sea $i \in I$. Por (6), como (Z_i, h_i) es un igualador para f_i y g_i , existe un único morfismo de U en Z_i que con h_i factoriza a h' . Pero

$$h' = h \circ \phi = (h_i \circ \omega_i) \circ \phi = h_i \circ (\omega_i \circ \phi),$$

y también se tiene (5), luego, por unicidad concluimos que $\omega'_i = \omega_i \circ \phi$.

□

Recordatorio de algunas definiciones: si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} , entonces

- \mathcal{B} es **llena** (“full”) si, para cualesquiera $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, todo morfismo en \mathcal{A} de X en Y es también un morfismo en \mathcal{B} , es decir, si \mathcal{B} contiene a dos objetos X y Y de \mathcal{A} , entonces contiene a todos los morfismos entre ellos.
- Si \mathcal{K} es una categoría pequeña y $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama, se dice que este es **inicial en \mathcal{B}** si

$$(\forall i \in \text{Obj}(\mathcal{K}))(\exists j \in \text{Obj}(\mathcal{K}))(\exists a : j \longrightarrow i \in \text{Mor}(\mathcal{K})) : \mathcal{D}(j) \in \mathcal{B}.$$

- \mathcal{B} es **fuertemente cerrada en \mathcal{A} bajo \mathcal{K} –límites** si para cualquier diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ inicial en \mathcal{B} se tiene que el límite $(X, (\alpha_i)_{i \in \text{Obj}(\mathcal{K})})$ para \mathcal{D} cumple que $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.

Teorema 0.1. (Implicación 6) \Rightarrow 1) del Teorema de Caracterización de Subcategorías Epireflexivas) Sea \mathcal{A} una categoría completa, bien potenciada y co-bien potenciada y sea \mathcal{B} una sub-categoría de \mathcal{A} llena y cerrada bajo isomorfismos. Si

6) : \mathcal{B} es fuertemente cerrada en \mathcal{A} bajo productos e igualadores, y

1) : \mathcal{B} es fuertemente cerrada en \mathcal{A} bajo \mathcal{K} –límites para cualquier categoría pequeña \mathcal{K} ,

entonces 6) \Rightarrow 1).

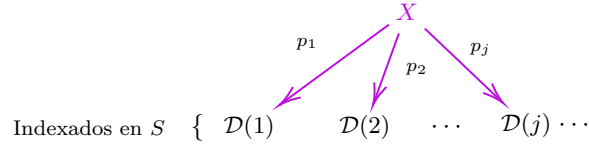
Demostración.

Sea $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama inicial en \mathcal{B} ; construyamos un límite para este y mostremos que el objeto del que parte el límite es un objeto de \mathcal{B} .

Sea

$$S := \{j \in \text{Obj}(\mathcal{K}) \mid \mathcal{D}(j) \in \text{Obj}(\mathcal{B})\},$$

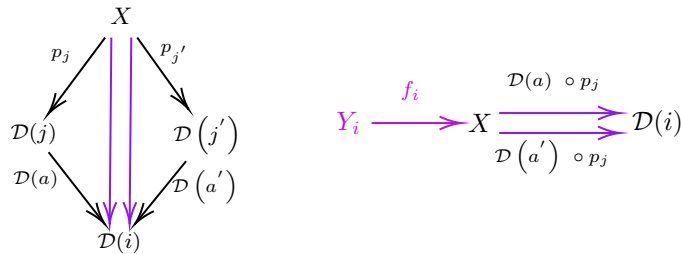
y sea $(X, (p_i : X \longrightarrow \mathcal{D}(i))_{i \in S})$ un producto en \mathcal{A} de la familia $(\mathcal{D}(i))_{i \in S}$. **¿A qué se refieren? Sólo sé la definición de producto de monomorfismos con un mismo codominio, no producto de objetos.**



Por hipótesis, $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$. Sea la familia

$$\Lambda = \{(a, a') \in \text{Mor}(\mathcal{K}) \times \text{Mor}(\mathcal{K}) \mid a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i, \text{ con } j, j' \in S\}.$$

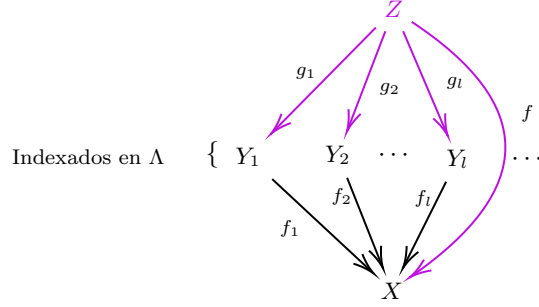
Nótese que, por ser el diagrama \mathcal{D} inicial en \mathcal{B} , para toda $i \in \text{Obj}(\mathcal{K})$ existe una pareja $(a, a') \in \Lambda$ de flechas con codominio i (puede ser $a = a'$). Para cada $\lambda = (a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i) \in \Lambda$, sea (f_i, Y_i) un igualador de los morfismos $\mathcal{D}(a) \circ p_j$ y $\mathcal{D}(a') \circ p_{j'}$.



Entonces, como $X \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, por hipótesis se sigue que

$$\forall i : Y_i \in \text{Obj}(\mathcal{B}). \quad (9)$$

Sea ahora $(Z, ((g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, f))$ una intersección de los monomorfismos f_i .



Según el Lema 7.10, (9) implica que

$$Z \in \text{Obj}(\mathcal{B}).$$

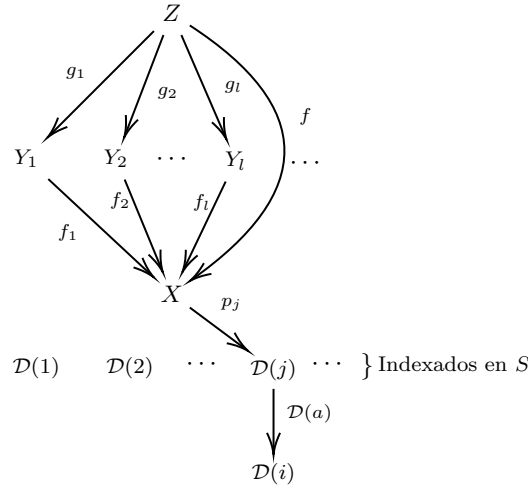
Para todo $i \in \text{Obj}(\mathcal{K})$, vamos a construir un morfismo $\alpha_i : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i)$ como sigue:

- Si $i \in S$, entonces

$$\alpha_i := p_i \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \quad (10)$$

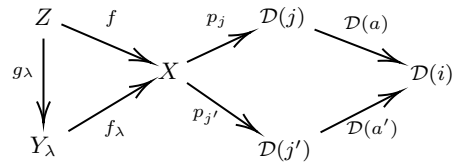
- Si $i \notin S$, es decir, si $\mathcal{D}(i) \notin \text{Obj}(\mathbb{B})$, por hipótesis existen un \mathcal{K} -objeto $j \in S$ y un \mathcal{K} morfismo $a : j \longrightarrow i$. Defínase entonces

$$\alpha_i := \mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \quad (11)$$



Mostremos que la definición (11) de α_i cuando $i \notin S$ no depende de la elección de j , es decir, que si existe otro $j' \in S$ y otro morfismo $a' : j' \longrightarrow i$, entonces

$$\mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f = \mathcal{D}(a') \circ p_{j'} \circ f.$$



¿Cómo? Supongo que tengo que usar que, para toda $\lambda \in \Lambda$, (f_λ, Y) es igualador de las composiciones marcadas.

Si mostramos que $(Z, (\alpha_i)_{i \in \text{Obj}(\mathcal{K})})$ es un límite para el diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$, puesto que ya expusimos a Z como un objeto de \mathcal{B} , habremos terminado. Me falta esto... \square