Amélie Bernès

Estamos suponiendo que en la categoría $\mathcal{A}$ existen todos los límites pequeños (p.ej. productos, igualadores) y que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo isomorfismos.

Lema 7.10: Si $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo igualadores, entonces $\mathcal{B}$ es cerrada en $\mathcal{A}$ bajo intersecciones de monomorfismos regulares.

Demostración. Sea $(h_i : Z \longrightarrow X)_{i\in I}$ una familia de monomorfismos regulares con $X \in Obj(\mathcal{B})$; queremos demostrar que su intersección está en $\mathcal{B}$. Para cada $i \in I$, sean $f_i, g_i : X \longrightarrow Y_i$ tales que

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador. Entonces

$$\forall i \in I : \quad f_i \circ h_i = g_i \circ h_i. \tag{1}$$

Sea $Y = \Pi_{i\in I} Y_i$, $p_i : Y \longrightarrow Y_i$ el producto de la familia $(Y_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{A}$ - que existe por ser la categoría $\mathcal{A}$ completa. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ los únicos morfismos tales que

$$\forall i \in I : \quad p_i \circ f = f_i, \ p_i \circ g = g_i. \tag{2}$$

Por ser $\mathcal{A}$ completa, existe un monomorfismo igualador $h : W \longrightarrow X$ para f y g;

$$f \circ h = g \circ h. \tag{3}$$

Por ser $\mathcal{B}$ fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo igualadores y como $X \in Obj(\mathcal{B})$, entonces $W \in Obj(\mathcal{B})$.

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\ W \arrow[ur, "h"] & Y = \Pi_{i\in I} Y_i \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Si $i \in I$, entonces, de (2) y (3) se sigue que

$$f_i \circ h = (p_i \circ f) \circ h = (p_i \circ g) \circ h = g_i \circ h,$$

luego, por ser (Z_i, h_i) igualador de f_i, g_i, se tiene que existe $\omega_i : W \longrightarrow Z_i$ tal que

$$h = h_i \circ \omega_i, \quad i \in I. \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\ W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y = \Pi_{i\in I} Y_i \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Si mostramos que $[W, ((\omega)_{i\in I}, h)]$ es una intersección de la familia de monomorfismos regulares $(h_i)_{i\in I}$, puesto que ya vimos que $W \in Obj(\mathcal{B})$, habremos acabado.

Sean pues para $i \in I$, $\omega'_i : U \longrightarrow Z_i$ y $h' : U \longrightarrow X$ monomorfismos tales que

$$\forall i \in I : \quad h_i \circ \omega'_i = h'. \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y \arrow[ur, "p_i"'] & \\
U \arrow[uu, bend left, "\omega'_i"] \arrow[uur, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces, para toda $i \in I$, por (1),

$$f_i \circ h' = (f_i \circ h_i) \circ \omega'_i = (g_i \circ h_i) \circ \omega'_i = g_i \circ h', \tag{6}$$

por lo tanto,

$$f \circ h' = g \circ h'. \tag{7}$$

Como (W, h) es un igualador para f y g, existe un único morfismo $\phi : U \longrightarrow W$ tal que

$$h' = h \circ \phi \tag{8}$$

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y \arrow[ur, "p_i"'] & \\
U \arrow[u, "\phi"] \arrow[uu, bend left, "\omega'_i"] \arrow[uur, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Veamos que ϕ es un morfismo conector entre los dos límites. Sea $i \in I$. Por (6), como (Z_i, h_i) es un igualador para f_i y g_i, existe un único morfismo de U en Z_i que con h_i factoriza a h'. Pero

$$h' = h \circ \phi = (h_i \circ \omega_i) \circ \phi = h_i \circ (\omega_i \circ \phi),$$

y también se tiene (5), luego, por unicidad concluimos que $\omega'_i = \omega_i \circ \phi$.

$\square$

Recordatorio de algunas definiciones: si $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$, entonces

- $\mathcal{B}$ es **llena** ("full") si, para cualesquiera $X, Y \in Obj(\mathcal{B})$, todo morfismo en $\mathcal{A}$ de X en Y es también un morfismo en $\mathcal{B}$, es decir, si $\mathcal{B}$ contiene a dos objetos X y Y de $\mathcal{A}$, entonces contiene a todos los morfismos entre ellos.
- Si $\mathcal{K}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama, se dice que este es **inicial en** $\mathcal{B}$ si
$$(\forall i \in Obj(\mathcal{K}))(\exists j \in Obj(\mathcal{K}))(\exists a : j \longrightarrow i \in Mor(\mathcal{K})) : \mathcal{D}(j) \in \mathcal{B}.$$
- $\mathcal{B}$ es **fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo $\mathcal{K}-$límites** si para cualquier diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ inicial en $\mathcal{B}$ se tiene que el límite $(X, (\alpha_i)_{i \in Obj(\mathcal{K})})$ para $\mathcal{D}$ cumple que $X \in Obj(\mathcal{B})$.

Teorema 0.1. *(Implicación* 6) $\Rightarrow$ 1) *del Teorema de Caracterización de Subcategorías Epireflexivas) Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa, bien potenciada y co-bien potenciada y sea $\mathcal{B}$ una sub-categoría de $\mathcal{A}$ llena y cerrada bajo isomorfismos. Si*

6) *: $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo productos e igualadores, y*

1) *: $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo $K-$límites para cualquier categoría pequeña $\mathcal{K}$,*

entonces 6) $\Rightarrow$ 1).

Demostración.
Sea $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama inicial en $\mathcal{B}$; construyamos un límite para este y mostremos que el objeto del que parte el límite es un objeto de $\mathcal{B}$.

Sea
$$S := \{j \in Obj(\mathcal{K}) | \ \mathcal{D}(i) \in Obj(\mathcal{B})\},$$
y sea $(X, (p_i : X \longrightarrow \mathcal{D}(i))_{i \in S})$ un producto en $\mathcal{A}$ de la familia $(D(i))_{i \in S}$. ¿A qué se refieren? Sólo sé la definición de producto de monomorfismos con un mismo codominio, no producto de objetos.

Indexados en S $\{$
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[drr, "p_j"] & & \\ \mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(2) & \cdots & \mathcal{D}(j) \cdots \end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $X \in Obj(\mathcal{B})$. Sea la familia
$$\Lambda = \{(a, a') \in Mor(\mathcal{K}) \times Mor(\mathcal{K}) | \ a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i, \ con \ j, j' \in S\}.$$

Nótese que, por ser el diagrama $\mathcal{D}$ inicial en $\mathcal{B}$, para toda $i \in Obj(\mathcal{K})$ existe una pareja $(a, a') \in \Lambda$ de flechas con codominio i (puede ser $a = a'$). Para cada $\lambda = (a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i) \in \Lambda$, sea (f_i, Y_i) un igualador de los morfismos $D(a) \circ p_j$ y $D(a') \circ p(j')$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_{j'}"] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & \\ \mathcal{D}(j) \arrow[dr, "\mathcal{D}(a)"'] & & \mathcal{D}\left(j'\right) \arrow[dl, "\mathcal{D}\left(a'\right)"] \\ & \mathcal{D}(i) & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "f_i"] & X \arrow[r, shift left, "\mathcal{D}(a) \circ p_j"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{D}\left(a'\right) \circ p_j"'] & \mathcal{D}(i) \end{tikzcd}$$

Entonces, como $X \in Obj(\mathcal{B})$, por hipótesis se sigue que

$$\forall i : Y_i \in Obj(\mathcal{B}). \tag{9}$$

Sea ahora $(Z, ((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, f))$ una intersección de los monomorfismos f_i.

$$\begin{tikzcd}
& & & Z \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \arrow[dr, "g_l"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] & & \\
\text{Indexados en } \Lambda \quad \{ & Y_1 \arrow[drr, "f_1"'] & Y_2 \arrow[dr, "f_2"] & \cdots & Y_l \arrow[dl, "f_l"'] & \cdots \\
& & & X & &
\end{tikzcd}$$

Según el Lema 7.10, (9) implica que

$$Z \in Obj(\mathcal{B}).$$

Para todo $i \in Obj(\mathcal{K})$, vamos a constuir un morfismo $\alpha_i : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i)$ como sigue:

- Si $i \in S$, entonces
$$\alpha_i := p_i \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \tag{10}$$

- Si $i \notin S$, es decir, si $\mathcal{D}(i) \notin Obj(\mathbb{B})$, por hipótesis existen un $\mathcal{K}-$objeto $j \in S$ y un $\mathcal{K}$ morfismo $a : j \longrightarrow i$. Defínase entonces
$$\alpha_i := \mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \tag{11}$$

$$\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \arrow[dr, "g_l"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] & & & \\
Y_1 \arrow[drr, "f_1"'] & Y_2 \arrow[dr, "f_2"] & \cdots & Y_l \arrow[dl, "f_l"'] & \cdots & \\
& & X \arrow[dr, "p_j"] & & & \\
\mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(2) & \cdots & \mathcal{D}(j) \arrow[d, "\mathcal{D}(a)"] & \cdots & \} \text{Indexados en } S \\
& & & \mathcal{D}(i) & &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que la definición (11) de α_i cuando $i \notin S$ no depende de la elección de j, es decir, que si existe otro $j' \in S$ y otro morfismo $a' : j' \longrightarrow i$, entonces

$$\mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f = \mathcal{D}(a') \circ p_{j'} \circ f.$$

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "g_\lambda"'] \arrow[dr, "f"] & & \mathcal{D}(j) \arrow[dr, "\mathcal{D}(a)"] & \\
& X \arrow[ur, "p_j"] \arrow[dr, "p_{j'}"'] & & \mathcal{D}(i) \\
Y_\lambda \arrow[ur, "f_\lambda"'] & & \mathcal{D}(j') \arrow[ur, "\mathcal{D}(a')"'] &
\end{tikzcd}
$$

¿Cómo? Supongo que tengo que usar que, para toda $\lambda \in \Lambda$, (f_λ, Y) es igualador de las composiciones marcadas.

Si mostramos que $(Z, (\alpha_i)_{i \in Obj(\mathcal{K})})$ es un límite para el diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$, puesto que ya expusimos a Z como un objeto de $\mathcal{B}$, habremos terminado. Me falta esto... $\square$