Amélie Bernès

Contents

1 Secciones y retracciones, monomorfismos y epimorfismos

Porque en teoría de conjuntos se usan indistíntamente los términos "monomorfismo" e "inyección" junto con "epimorfismo" y "suprayección", pero en teoría de categorías no necesariamente coinciden.

1.1 Secciones y retracciones

Definición 1. *Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es una* ***sección en $\mathcal{C}$*** *si existe otro morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$.*

Secciones: morfismos con inverso izquierdo.

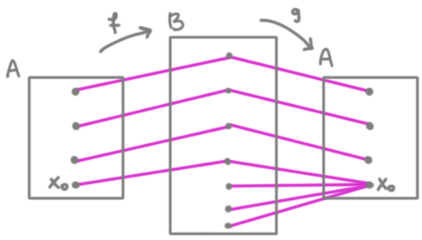
Proposición 1.1

*Las secciones en **Set** con dominio $A \neq \emptyset$ son exactamente las inyecciones $f : A \longrightarrow B$.*

Demostración. Claro que se pide $A \neq \emptyset$ pues, si $f : \emptyset \longrightarrow B$ es sección, entonces $B = \emptyset$, pues no existe una función de $B \neq \emptyset$ al vacío.

$\Rightarrow$] Sea $f : A \longrightarrow B$ inyectiva, y escójase un punto $x_0 \in A$. Si $y \in f(A)$, el que f sea inyectiva significa que su fibra bajo f tiene un solo elemento; $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Sea pues la función $g : B \longrightarrow A$ definida como

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & si\ y \in f(A) \\ x_0 & si\ y \notin f(A). \end{cases}$$



Claro que $g \circ f = 1_A$ pues, dado $x \in A$ cualquiera, como $f(x) \in f(A)$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x.$$

$\Leftarrow$] Si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$, entonces, si $x_1, x_2 \in A$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, los puntos son iguales pues

$$x_1 = 1_A(x_1) = (g \circ f)(x_1)g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = 1_A(x_2) = x_2.$$

□

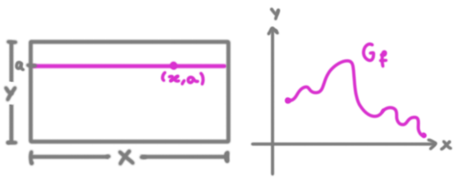
El ejemplo canónico en **Set** de secciones (y las motivaciones del nombre “sección”) es el de la gráfica de una función: si X, Y son conjuntos y $a \in Y$ fijo, entonces $f : X \longrightarrow X \times Y$ definida como

$$f(x) = (x, a)$$

es una sección. En general, si $f : X \longrightarrow Y$ es función, entonces $\hat{f} : X \longrightarrow X \times Y$ definida como

$$\hat{f}(x) = (x, f(x))$$

es sección.



Observación 1.2

Si f, g son morfismos tales que $g \circ f$ es sección, entonces f es sección.

Claro, pues

$$1_A = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definición 2. *Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es una* ***retracción en $\mathcal{C}$*** *si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$.*

Retracciones: morfismos con inverso derecho.

Proposición 1.3

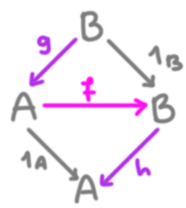
Las retracciones en Set son las funciones suprayectivas $f : A \longrightarrow B$.

Demostración. Esta demostración usa el axioma de elección (de hecho, el enunciado de la proposición es equivalente al axioma de elección). Terminar. Hugo Rincón p.103., Hernández p.57 □

Definición 3. *Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ que sea tanto sección como retracción (i.e. que tenga inversa izquierda y derecha) es llamado un* ***isomorfismo****.*

Claro que si f es un isomorfismo y si $g, h : B \longrightarrow A$ son una inversa izquierda y derecha, o sea, si $g \circ f = 1_A$ y $f \circ h = 1_B$, entonces g y h coinciden, pues

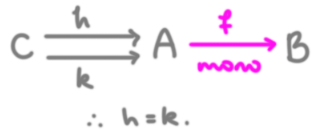
$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = 1_A \circ h = h.$$



1.2 Monomorfismos y epimorfismos

Definición 4. *Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un* ***monomorfismo*** *si*

$$\forall h, k \in Mor(\mathcal{C}) : \quad f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k.$$



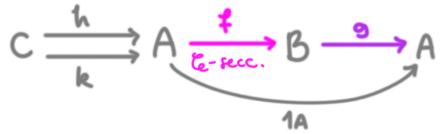
Monomorfismo: cancelable por la izquierda

Proposición 1.4

Toda $\mathcal{C}-$sección es un monomorfismo.

Demostración. En efecto, si g es una inversa izquierda para la $\mathcal{C}-$sección f, i.e. $g \circ f = 1_A$, y $h, k : C \longrightarrow A$ son morfismos tales que $f \circ h = f \circ k$, entonces

$$h = 1_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k = 1_A \circ k = k.$$



□

Proposición 1.5

En cualquier categoría $\mathcal{C}$, son equivalentes:

1. *f es un isomorfismo*
2. *f es un monomorfismo y una retracción.*

Demostración. El que 1) implica 2) es claro por la Proposición 1.4.

Como f es retracción, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$.Buscamos que también ocurra $g \circ f = 1_A$.

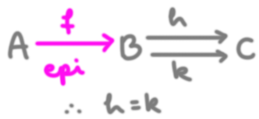
$$f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f = 1_B \circ f = f = f \circ 1_A,$$

luego, como f es cancelable por la izquierda, $g \circ f = 1_A$.

□

Definición 5. *Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un* ***epimorfismo*** *si*

$$\forall h, k \in Mor(\mathcal{C}) : \quad h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k.$$



Epimorfismo: cancelable por la derecha.

Proposición 1.6

Toda $\mathcal{C}-$retracción es un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "1_B"] & A \arrow[r, "f", "\mathcal{C}\text{-retr.}"'] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

Definición 6. *Un* ***bimorfismo*** *es un morfismo que es epi y mono (i.e. es cancelable por ambos lados).*

$$\text{ISO}\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}\text{-sección: inverso izqu.} \Rightarrow \mathcal{C}\text{-mono: cancelable por izqu.} \\ \mathcal{C}\text{-retracción: inverso der.} \Rightarrow \mathcal{C}\text{-epi: cancelable por derecha} \end{array}\right\}\text{BIMOR.}$$

ISO $\downarrow$ Morf. con inversa

BIMOR. $\downarrow$ morfismo cancelable

2 Igualadores (Equalizers)

En una categoría $\mathcal{A}$, un **igualador** $(Z, h : Z \longrightarrow X)$ para dos morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$ es una pareja tal que

- $f \circ h = g \circ h$
- Si W es otro objeto y $k : W \longrightarrow X$ es tal que $f \circ k = g \circ k$, entonces existe un único morfismo $\phi : W \longrightarrow Z$ tal que $k = h \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ W \arrow[u, dotted, "\exists!\ \phi"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.1

Si $h : Z \longrightarrow X$ es el igualador de un par de morfismos, entonces h es un monomorfismo (i.e. cancelable por la izquierda).

Demostración. En efecto, sean $p, q : A \longrightarrow Z$ morfismos tales que $h \circ q = h \circ p$. Entonces, como $f \circ h = g \circ h$, también

$$f \circ (h \circ p) = (f \circ h) \circ p = (g \circ h) \circ p = g \circ (h \circ p).$$

Luego, existe un único $\phi : A \longrightarrow Z$ tal que

$$h \circ \phi = h \circ p.$$

Tanto $\phi = p$ como $\phi = q$ funcionan, luego, $p = q$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ W \arrow[u, shift left, "q"] \arrow[u, shift right, "p"'] \arrow[ur, "h\ \circ p"'] & & \end{tikzcd}$$

□

Definición 7. *A todo monomorfismo que sea un igualador para dos morfismos (con el mismo dominio) en su categoría se le llama un* ***monomorfismo regular***.

monomorfismo extremal?

3 Categorías reflexivas, Nakagawa (Categorical Topology)

Estamos suponiendo que en la categoría $\mathcal{A}$ existen todos los límites pequeños (p.ej. productos, igualadores) y que $\mathcal{B}$ es cerrada bajo isomorfismos.

Lema 3.1

(Lema 7.10, Nakagawa) *Si $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo igualadores, entonces $\mathcal{B}$ es cerrada en $\mathcal{A}$ bajo intersecciones de monomorfismos regulares.*

Demostración. Sea $(h_i : Z \longrightarrow X)_{i\in I}$ una familia de monomorfismos regulares con $X \in Obj(\mathcal{B})$; queremos demostrar que su intersección está en $\mathcal{B}$. Para cada $i \in I$, sean $f_i, g_i : X \longrightarrow Y_i$ tales que

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

es un diagrama igualador. Entonces

$$\forall i \in I : \quad f_i \circ h_i = g_i \circ h_i. \tag{1}$$

Sea $Y = \Pi_{i\in I} Y_i$, $p_i : Y \longrightarrow Y_i$ el producto de la familia $(Y_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{A}$ - que existe por ser la categoría $\mathcal{A}$ completa. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ los únicos morfismos tales que

$$\forall i \in I : \quad p_i \circ f = f_i, \ p_i \circ g = g_i. \tag{2}$$

Por ser $\mathcal{A}$ completa, existe un monomorfismo igualador $h : W \longrightarrow X$ para f y g;

$$f \circ h = g \circ h. \tag{3}$$

Por ser $\mathcal{B}$ fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo igualadores y como $X \in Obj(\mathcal{B})$, entonces $W \in Obj(\mathcal{B})$.

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\ W \arrow[ur, "h"'] & Y = \Pi_{i\in I} Y_i \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

Si $i \in I$, entonces, de (2) y (3) se sigue que

$$f_i \circ h = (p_i \circ f) \circ h = (p_i \circ g) \circ h = g_i \circ h,$$

luego, por ser (Z_i, h_i) igualador de f_i, g_i, se tiene que existe $\omega_i : W \longrightarrow Z_i$ tal que

$$h = h_i \circ \omega_i, \quad i \in I. \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y = \Pi_{i\in I} Y_i \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Si mostramos que $[W, ((\omega)_{i\in I}, h)]$ es una intersección de la familia de monomorfismos regulares $(h_i)_{i\in I}$, puesto que ya vimos que $W \in Obj(\mathcal{B})$, habremos acabado.

Sean pues para $i \in I$, $\omega_i' : U \longrightarrow Z_i$ y $h' : U \longrightarrow X$ monomorfismos tales que

$$\forall i \in I : \quad h_i \circ \omega_i' = h'. \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y \arrow[ur, "p_i"'] & \\
U \arrow[uu, bend left=60, "\omega_i'"] \arrow[uur, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces, para toda $i \in I$, por (1),

$$f_i \circ h' = (f_i \circ h_i) \circ \omega_i' = (g_i \circ h_i) \circ \omega_i' = g_i \circ h', \tag{6}$$

por lo tanto,

$$f \circ h' = g \circ h'. \tag{7}$$

Como (W, h) es un igualador para f y g, existe un único morfismo $\phi : U \longrightarrow W$ tal que

$$h' = h \circ \phi \tag{8}$$

$$\begin{tikzcd}
Z_i \arrow[r, "h_i"] & X \arrow[r, shift left, "f_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & Y_i \\
W \arrow[u, "\omega_i"] \arrow[ur, "h"] & Y \arrow[ur, "p_i"'] & \\
U \arrow[u, "\phi"] \arrow[uu, bend left=60, "\omega_i'"] \arrow[uur, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Veamos que ϕ es un morfismo conector entre los dos límites. Sea $i \in I$. Por (6), como (Z_i, h_i) es un igualador para f_i y g_i, existe un único morfismo de U en Z_i que con h_i factoriza a h'. Pero

$$h' = h \circ \phi = (h_i \circ \omega_i) \circ \phi = h_i \circ (\omega_i \circ \phi),$$

y también se tiene (5), luego, por unicidad concluimos que $\omega_i' = \omega_i \circ \phi$.

$\square$

Recordemos estas definiciones; si $\mathcal{B}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$, entonces

- $\mathcal{B}$ es **llena** ("full") si, para cualesquiera $X, Y \in Obj(\mathcal{B})$, todo morfismo en $\mathcal{A}$ de X en Y es también un morfismo en $\mathcal{B}$, es decir, si $\mathcal{B}$ contiene a dos objetos X y Y de $\mathcal{A}$, entonces contiene a todos los morfismos entre ellos.

- Si $\mathcal{K}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama, se dice que este es **inicial en** $\mathcal{B}$ si
$$(\forall i \in Obj(\mathcal{K}))(\exists j \in Obj(\mathcal{K}))(\exists a : j \longrightarrow i \in Mor(\mathcal{K})) : \mathcal{D}(j) \in \mathcal{B}.$$

- $\mathcal{B}$ es **fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo $\mathcal{K}-$límites** si para cualquier diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ inicial en $\mathcal{B}$ se tiene que el límite $(X, (\alpha_i)_{i \in Obj(\mathcal{K})})$ para $\mathcal{D}$ cumple que $X \in Obj(\mathcal{B})$.

Teorema 3.2

(Implicación 6) $\Rightarrow$ 1) del Teorema de Caracterización de Subcategorías Epireflexivas) Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa, bien potenciada y co-bien potenciada y sea $\mathcal{B}$ una sub-categoría de $\mathcal{A}$ llena y cerrada bajo isomorfismos. Si

6) *: $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo productos e igualadores, y*

1) *: $\mathcal{B}$ es fuertemente cerrada en $\mathcal{A}$ bajo $K-$límites para cualquier categoría pequeña $\mathcal{K}$,*

entonces 6) $\Rightarrow$ 1).

Demostración.
Sea $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama inicial en $\mathcal{B}$; construyamos un límite para este y mostremos que el objeto del que parte el límite es un objeto de $\mathcal{B}$.
Sea
$$S := \{j \in Obj(\mathcal{K}) |\ \ \mathcal{D}(i) \in Obj(\mathcal{B})\},$$
y sea $(X, (p_i : X \longrightarrow \mathcal{D}(i))_{i \in S})$ un producto en $\mathcal{A}$ de la familia $(D(i))_{i \in S}$. ¿A qué se refieren? Sólo sé la definición de producto de monomorfismos con un mismo codominio, no producto de objetos.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[drr, "p_j"] & & \\
\text{Indexados en } S \ \{ & \mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(2) & \cdots & \mathcal{D}(j) \cdots
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, $X \in Obj(\mathcal{B})$. Sea la familia
$$\Lambda = \{(a, a') \in Mor(\mathcal{K}) \times Mor(\mathcal{K}) |\ \ a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i,\ \ con\ j, j' \in S\}.$$

Nótese que, por ser el diagrama $\mathcal{D}$ inicial en $\mathcal{B}$, para toda $i \in Obj(\mathcal{K})$ existe una pareja $(a, a') \in \Lambda$ de flechas con codominio i (puede ser $a = a'$). Para cada $\lambda = (a : j \longrightarrow i, a' : j' \longrightarrow i) \in \Lambda$, sea (f_i, Y_i) un igualador de los morfismos $D(a) \circ p_j$ y $D(a') \circ p(j')$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_{j'}"] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & \\
\mathcal{D}(j) \arrow[dr, "\mathcal{D}(a)"'] & & \mathcal{D}\left(j'\right) \arrow[dl, "\mathcal{D}\left(a'\right)"] \\
& \mathcal{D}(i) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, "f_i"] & X \arrow[r, shift left, "\mathcal{D}(a)\ \circ p_j"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{D}\left(a'\right)\ \circ p_j"'] & \mathcal{D}(i)
\end{tikzcd}$$

Entonces, como $X \in Obj(\mathcal{B})$, por hipótesis se sigue que

$$\forall i : Y_i \in Obj(\mathcal{B}). \tag{9}$$

Sea ahora $(Z, ((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, f))$ una intersección de los monomorfismos f_i.

$$\begin{tikzcd}
& & & Z \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \arrow[d, "g_l"] \arrow[dd, bend left, "f"] & \\
\text{Indexados en } \Lambda \quad \{ & Y_1 \arrow[drr, "f_1"'] & Y_2 \arrow[dr, "f_2"] \quad \cdots & Y_l \arrow[d, "f_l"] & \cdots \\
& & & X &
\end{tikzcd}$$

Según el Lema 7.10, (9) implica que

$$Z \in Obj(\mathcal{B}).$$

Para todo $i \in Obj(\mathcal{K})$, vamos a constuir un morfismo $\alpha_i : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i)$ como sigue:

- Si $i \in S$, entonces
$$\alpha_i := p_i \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \tag{10}$$

- Si $i \notin S$, es decir, si $\mathcal{D}(i) \notin Obj(\mathbb{B})$, por hipótesis existen un $\mathcal{K}-$objeto $j \in S$ y un $\mathcal{K}$ morfismo $a : j \longrightarrow i$. Defínase entonces

$$\alpha_i := \mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f : Z \longrightarrow \mathcal{D}(i). \tag{11}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dll, "g_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \arrow[dr, "g_l"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] & & & \\
Y_1 \arrow[drr, "f_1"'] & Y_2 \arrow[dr, "f_2"] & \cdots & Y_l \arrow[dl, "f_l"'] & \cdots & \\
 & & X \arrow[dr, "p_j"] & & & \\
\mathcal{D}(1) & \mathcal{D}(2) & \cdots & \mathcal{D}(j) \arrow[d, "\mathcal{D}(a)"] & \cdots & \} \text{Indexados en } S \\
 & & & \mathcal{D}(i) & &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que la definición (11) de α_i cuando $i \notin S$ no depende de la elección de j, es decir, que si existe otro $j' \in S$ y otro morfismo $a' : j' \longrightarrow i$, entonces

$$\mathcal{D}(a) \circ p_j \circ f = \mathcal{D}(a') \circ p_{j'} \circ f.$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g_\lambda"'] & & \mathcal{D}(j) \arrow[dr, "\mathcal{D}(a)"] & \\
 & X \arrow[ur, "p_j"] \arrow[dr, "p_{j'}"'] & & \mathcal{D}(i) \\
Y_\lambda \arrow[ur, "f_\lambda"'] & & \mathcal{D}(j') \arrow[ur, "\mathcal{D}(a')"'] &
\end{tikzcd}$$

¿Cómo? Supongo que tengo que usar que, para toda $\lambda \in \Lambda$, (f_λ, Y) es igualador de las composiciones marcadas.

Si mostramos que $(Z, (\alpha_i)_{i \in Obj(\mathcal{K})})$ es un límite para el diagrama $\mathcal{D} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$, puesto que ya expusimos a Z como un objeto de $\mathcal{B}$, habremos terminado. Me falta esto... $\square$