A study and spectral analysis of the discrete Legendre polynomials

Amélie Bernès Moisés Soto Bajo Javier Herrera Vega

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

ammel.bernes@gmail.com

July 11, 2023

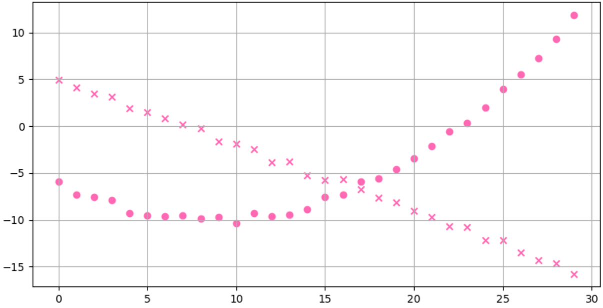
Outline

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \;\; 0 \leq m \leq n-1\}.$$

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \ 0 \leq m \leq n-1\}.$$

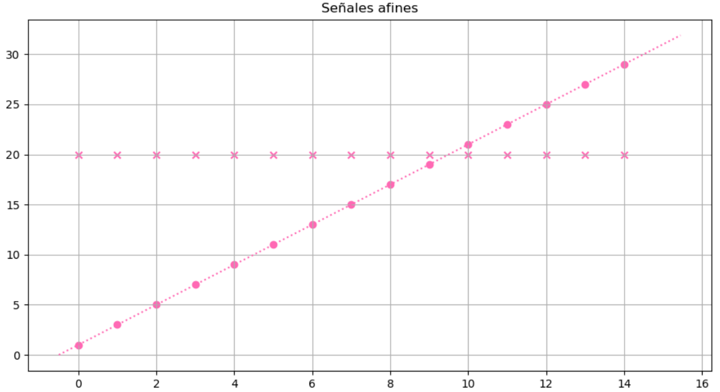


Nos interesa estudiar la forma de la gráfica de una señal, en particular, saber si parece tener forma de recta o parábola.

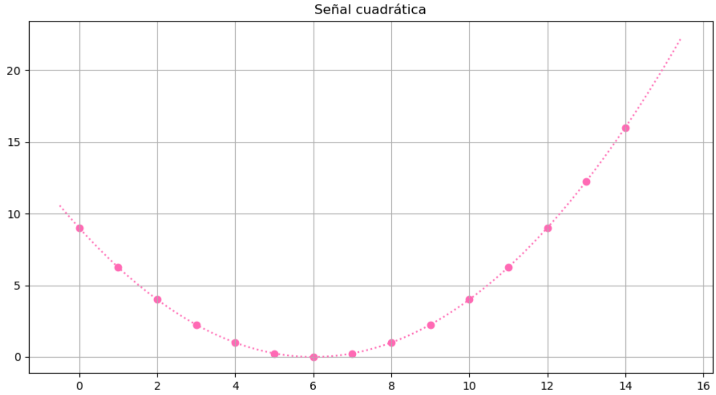
Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **afín** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una recta $l : y = mx + b.$ en la malla

$$\mathcal{P}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Si la recta es de la forma $l : y = b$, diremos que x es **constante.**



Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **cuadrática** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una parábola $l : y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, en la malla $\mathcal{P}_n$.



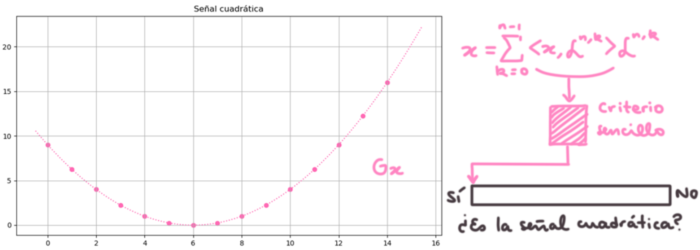
Fijada una dimensión $n \geq 2$, buscamos una base $\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} : \ 0 \leq k \leq n-1\}$ de $\mathbb{R}^n$

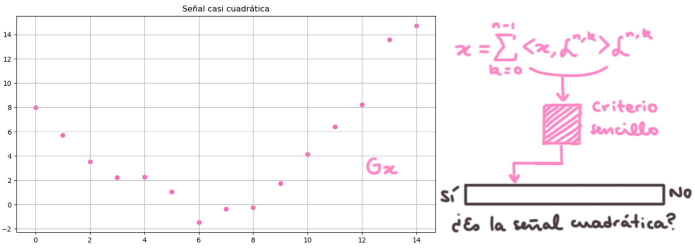
- (Tamaño) que sea ortonormal, pues así se cumplirá que, para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle x \ \ y \ \ ||x||^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2,$$

  y

- (Forma) para la que sea posible establecer criterios sencillos sobre la forma de la gráfica de una señal x en términos de la representación de esta respecto a la base $\mathcal{L}^{n,k}$.


Señal cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?


Señal casi cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?