Estudio y análisis espectral de los polinomios discretos de Legendre

Amélie Bernès Moisés Soto Bajo Javier Herrera Vega

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

ammel.bernes@gmail.com

July 12, 2023

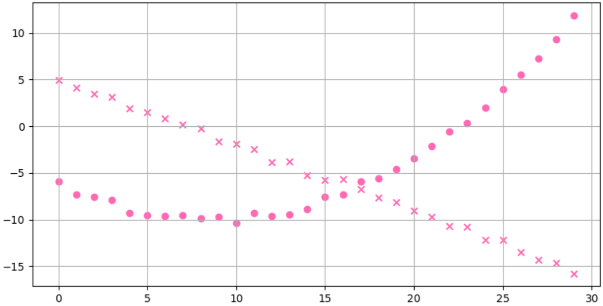
Motivación
Espacios de polinomios discretos
Espacios $W_{n,k}$
Una definición del grado de una señal finita
Polinomios discretos de Legendre
Sobre los PDL en la literatura
Construcción
Simetrías en las entradas de los PDL
Cálculo de los PDL
Análisis de señales finitas en base a los PDL
Análisis espectral
Desarrollo de metodología
Resultados del análisis numérico de algunos PDL
References

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \ \ 0 \leq m \leq n-1\}.$$

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \ \ 0 \leq m \leq n-1\}.$$

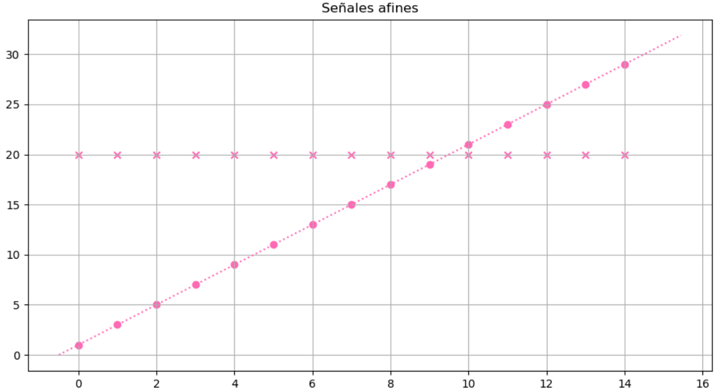


Nos interesa estudiar la forma de la gráfica de una señal, en particular, saber si parece tener forma de recta o parábola.

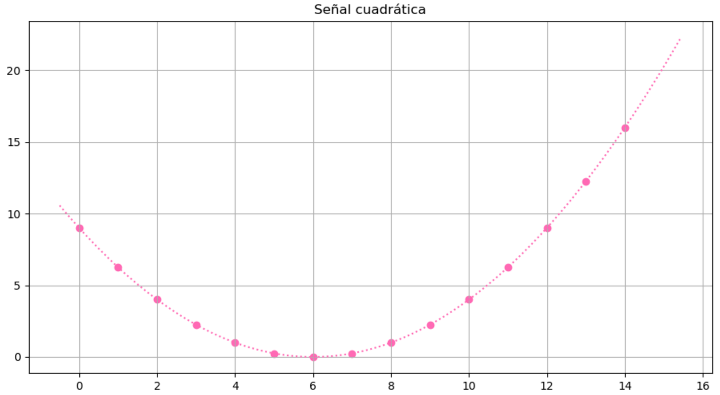
Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **afín** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una recta $l : y = mx + b$. en la malla

$$\mathcal{P}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Si la recta es de la forma $l : y = b$, diremos que x es **constante.**



Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **cuadrática** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una parábola $l : y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, en la malla $\mathcal{P}_n$.



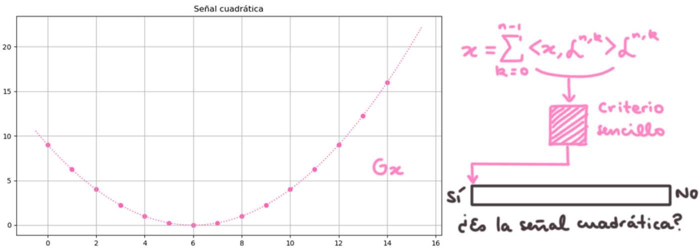
Fijada una dimensión $n \geq 2$, buscamos una base $\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} : \; 0 \leq k \leq n-1\}$ de $\mathbb{R}^n$

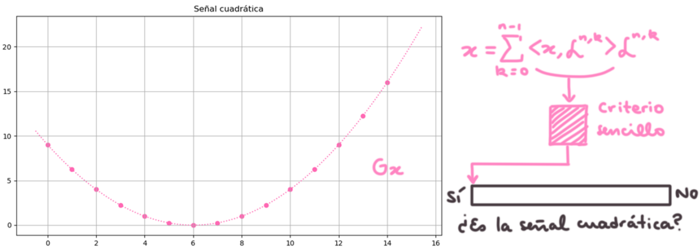
- (Tamaño) que sea ortonormal, pues así se cumplirá que, para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

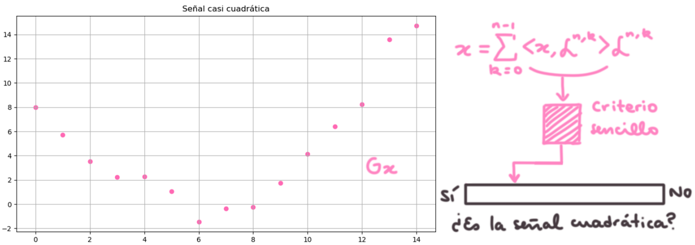
$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle x \;\; y \;\; ||x||^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2,$$

y

- (Forma) para la que sea posible establecer criterios sencillos sobre la forma de la gráfica de una señal x en términos de la representación de esta respecto a la base $\mathcal{L}^{n,k}$.


Señal cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?


Señal cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?


Señal casi cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?

Piensa en cómo introducir esto.

Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \;\; 0 \leq j \leq n-1\}$$

Piensa en cómo introducir esto.

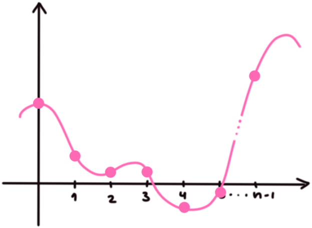
Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \ \ 0 \leq j \leq n-1\}$$

- Discretización puntual:
  dado $f \in \mathbb{R}[t]$ y $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ una malla uniforme,

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) := (f(t_j))_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n.$$



Espacios de polinomios discretos

Piensa en cómo introducir esto.

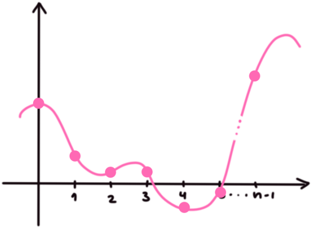
Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \quad 0 \leq j \leq n-1\}$$

- Discretización puntual: dado $f \in \mathbb{R}[t]$ y $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ una malla uniforme,

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) := (f(t_j))_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n.$$



$$\omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un operador lineal.

La siguiente consecuencia directa del Teorema fundamental del Álgebra es de mayor importancia para el desarrollo del trabajo. parafrasea.

Proposición 1

Sean $n \geq 2$ entero y $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Si $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio de grado menor a n y $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ es el vector cero de $\mathbb{R}^n$, entonces f es el polinomio cero.

$$\forall n \geq 2, \forall \mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}, \forall f \in \mathbb{R}[t] : \quad \partial(f) \leq n \wedge \Omega_{n,\mathcal{P}} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Aquí definición de los Wnk. Caracterización de las bases? o lo dejo implicito en la proposición grande?

Usando el operador $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ para reformular propiedades geométricas

Sea $x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
x \textit{ es afín } &\Leftrightarrow x = (a + bi)_{i=0}^{i} \quad \textit{para algunos } a, b \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x = \Omega_{n,\mathcal{P}_n}(l(t)) \textit{ para alguna } l(t) = a + bt \in \mathbb{R}_1[t] \\
&\Leftrightarrow x = aw_0 + bw_1 \\
&\Leftrightarrow x \in W_{n,1}.
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$x \text{ es constante sii } x \in W_{n,0}$$

y

$$x \text{ es cuadrática sii } x \in W_{n,2} \text{ y } x \notin W_{n,1}.$$

Proposición 2

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,

Proposición 3

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,

Proposición 4

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k + 1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$

Propiedades importantes de los espacios $W_{n,k}$

Proposición 5

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$
- *Sea $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $0 \leq i \leq n-1$, $x \in W_{n,i}$ si y sólo si existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.*

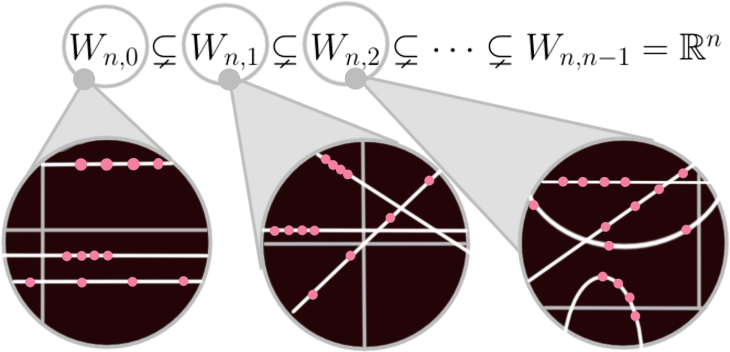
Proposición 6

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$
- *Sea $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $0 \leq i \leq n-1$, $x \in W_{n,i}$ si y sólo si existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.*

Este resultado implica que toda señal $n-$dimensional sea la discretización puntual uniforme de un polinomio de grado a lo más n.

La **pertenencia** de una señal finita $n-$dimensional a un subespacio $W_{n,k}$ de $\mathbb{R}^n$ determina la **forma** de su gráfica.



Pon notación para espacio $\mathbb{R}_{n-1}[t]$.

Proposición 7

Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. La función

$$\Omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}_{n-1}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}-$espacios vectoriales.

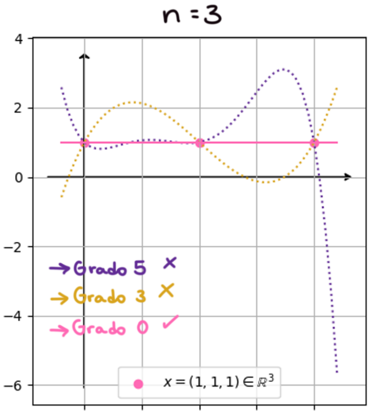
Logramos asociar a una señal n-dimensional un único polinomio de grado menor a n. Observe que, en la proposición, la malla $\mathcal{P}$ se fija en las hipótesis.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

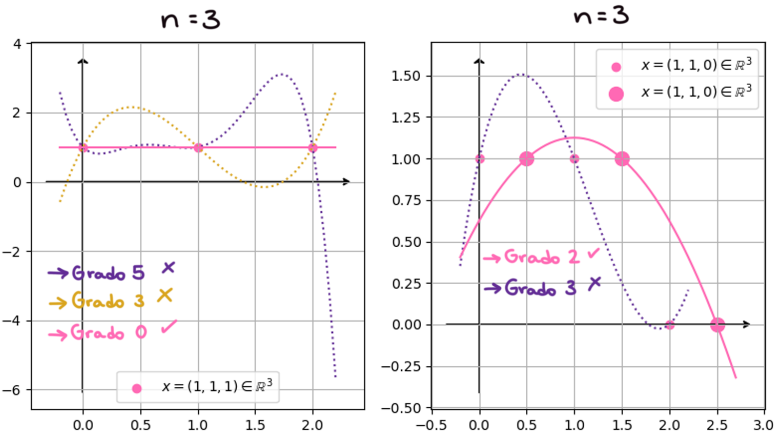
Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.

Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.



Malla & fija, no pedir restricciones de grados.

Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.



Malla & fija, no pedir restricciones de grados.

Malla no fija, no pedir restricciones de grados.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Respuesta: no.

Proposición 9

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ son mallas uniformes de n puntos y $f, \tilde{f} \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ son tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}),$$

entonces $\partial(f) = \partial(\tilde{f})$.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Respuesta: no.

Proposición 10

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ son mallas uniformes de n puntos y $f, \tilde{f} \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ son tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}),$$

entonces $\partial(f) = \partial(\tilde{f})$.

Definición 3

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ y $\mathcal{P}$ son tales que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$, entonces

$$\partial(x) := \partial(f). \quad (\textit{grado de } x).$$

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 1

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 2

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$,

- la gráfica de x tiene la forma de un polinomio de grado k si y sólo si $x \in W_{n,k}$.
- Es posible medir la distancia del punto $x \in \mathbb{R}^n$ al espacio $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$, luego, **podemos medir qué tanto se aleja** x **de tener la propiedad "ser de grado** k**"**.

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 3

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

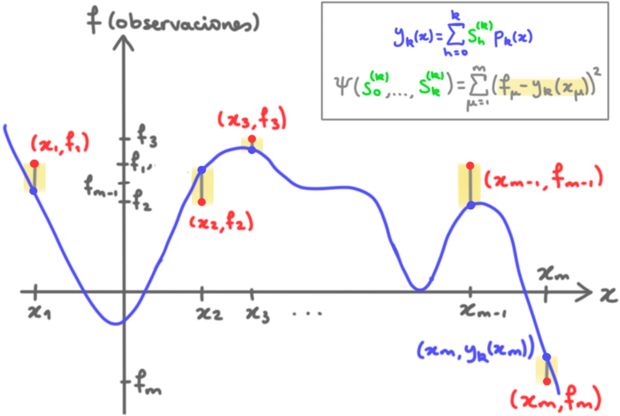
Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$,

- la gráfica de x tiene la forma de un polinomio de grado k si y sólo si $x \in W_{n,k}$.
- Es posible medir la distancia del punto $x \in \mathbb{R}^n$ al espacio $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$, luego, **podemos medir qué tanto se aleja** x **de tener la propiedad "ser de grado** k**"**.

Por lo visto antes, ... encontrar una base ortonormal para cada espacio de polinomios discretos $W_{n,k}$. Al hacer esto, **polinomios discretos de Legendre**, objetos ya estudiados y aplicados en la literatura.

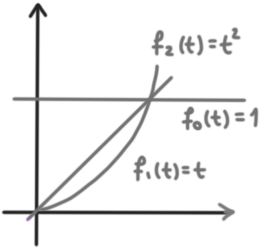
Aquí tienes que hacer referencia a lo que debes leer de tarea.

También habla de la aplicación principal de estos polinomios discretos en la ingeniería; usarlos para facilitar la resolución de problemas de minimización.



Construcción de la base discreta de Legendre

$\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$

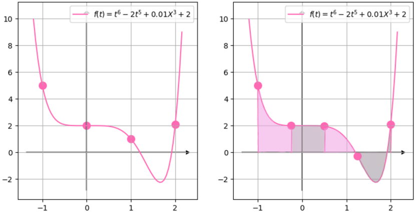


$\{f_k(t)=t^k : 0\leq k\leq n-1\}$

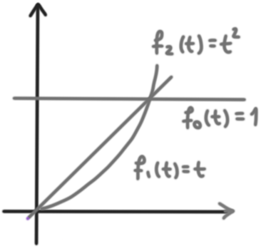
$\boxed{\mathbb{R}^n}$

PASO I: Discretización

$\{w_{n,k} : 0\leq k\leq n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$



$\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$



$\{f_k(t)=t^k \; : \; 0\le k\le n-1\}$

$\boxed{\mathbb{R}^n}$

PASO I: Discretización

$\{\omega_{n,k} \; : \; 0\le k\le n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

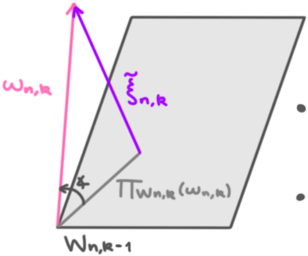
PASO II: Ortogonalización

$\{\xi_{n,k} \; : \; 0\le k\le n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

PASO III: Normalización

$\{\mathcal{L}^{n,k} \; : \; 0\le k\le n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

ORTHONORMALIZATION



$\mathcal{L}^{n,0} = \frac{\omega_{n,0}}{\|\omega_{n,0}\|}$ and, for all $1 \le k \le n-1$,

- $\tilde{\xi}_{n,k} := \omega_{n,k} - \Pi_{W_{n,k-1}}(\omega_{n,k})$ [Gram - Schmidt]
- $\mathcal{L}^{n,k} = \frac{\tilde{\xi}_{n,k}}{\|\tilde{\xi}_{n,k}\|}$ [Normalization]

Puesto que $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n := \{\mathcal{L}^{n,k} : \ 0 \leq k \leq n-1\} \tag{1}$$

es una BON de $\mathbb{R}^n$. Llamamos a esta la **base de Legendre discreta de dimensión** n.

Puesto que $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n := \{\mathcal{L}^{n,k} : \; 0 \leq k \leq n-1\} \tag{1}$$

es una BON de $\mathbb{R}^n$. Llamamos a esta la **base de Legendre discreta de dimensión** n.
Al vector $\mathcal{L}^{n,k} \in \mathbb{R}^n$ le llamaremos el **vector de Legendre de dimensión** n **y grado** k**.**

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_m^{n,k}\right)_{m=0}^{n-1} \in W_{n,k}$$

Tabulemos los valores de algunos PDL.

k \ n	2	3	4
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$
2	$---$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
3	$---$	$---$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$

Parece ser que existe una simetría central en las entradas de los PDL.

k \ n	5	6
0	$\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right)$
1	$\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \sqrt{\frac{5}{14}}\right)$
2	$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$	$\left(\frac{5}{2\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, \frac{5}{2\sqrt{21}}\right)$
3	$\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt5}{6}, \frac{7}{6\sqrt5}, \frac{2}{3\sqrt5}, -\frac{2}{3\sqrt5}, -\frac{7}{6\sqrt5}, \frac{\sqrt5}{6}\right)$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{70}}, -\frac{2\sqrt2}{\sqrt{35}}, \frac{3\sqrt2}{\sqrt{35}}, -\frac{2\sqrt2}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{70}}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt7}, -\frac{3}{2\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}, \frac{1}{\sqrt7}, -\frac{3}{2\sqrt7}, \frac{1}{2\sqrt7}\right)$
5	— — —	$\left(-\frac{1}{6\sqrt7}, \frac{5}{6\sqrt7}, -\frac{5}{3\sqrt7}, \frac{5}{3\sqrt7}, -\frac{5}{6\sqrt7}, \frac{1}{6\sqrt7}\right)$

Definición 4

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sea $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Definimos al **espacio de señales antisimétricas** $S_{n,-}$ *como*

$$S_{n,-} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 0 \leq m \leq M-1 : \;\; x_m = -x_{n-m-1} \tag{2}$$

y, además, definimos al **espacio de señales simétricas** $S_{n,+}$ *como*

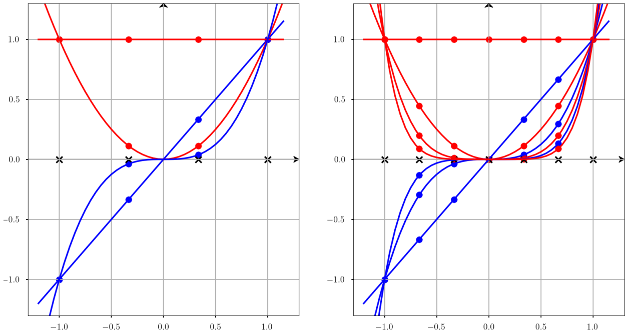
$$S_{n,+} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 0 \leq m \leq M-1 : \;\; x_m = x_{n-m-1}\}, \tag{3}$$

Las siguientes propiedades de los conjuntos $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ se siguen de inmediato.

- $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.
- Para cualesquiera $u \in S_{n,+}$ y $v \in S_{n,-}$ se cumple que $\langle u, v \rangle = 0$.

Las siguientes propiedades de los conjuntos $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ se siguen de inmediato.

- $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.
- Para cualesquiera $u \in S_{n,+}$ y $v \in S_{n,-}$ se cumple que $\langle u, v \rangle = 0$.



Motivación
Espacios de polinomios discretos
Espacios $W_{n,k}$
Una definición del grado de una señal finita
Polinomios discretos de Legendre
Sobre los PDL en la literatura
Construcción
Simetrías en las entradas de los PDL
Cálculo de los PDL
Análisis de señales finitas en base a los PDL
Análisis espectral
Desarrollo de metodología
Resultados del análisis numérico de algunos PDL
References

Teorema 4

Sean $n \geq 2$ y $0 \leq k \leq n-1$ enteros. Se tiene que

- *$\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,+}$ si k es par, y que*
- *$\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,-}$ si k es impar.*

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{M-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k}\right)$$

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k}\right)$$

Si $\{\eta_k : \; 0 \leq k \leq n-1\}$ es la BON de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene al ortogonalizar a $\{w_k : \; 0 \leq k \leq n-1\}$, entonces

$$\forall 0 \leq k \leq n-1 : \; \mathcal{L}^{n,k} = \frac{1}{||\eta_{k||}}\eta_k.$$

Si $k > 0$,

$$\eta_k = w_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle w_k, \eta_k \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle}\eta_j.$$

Procedemos por inducción sobre k. Por ejemplo, si k es par,

$$\eta_k = \underbrace{w_k - \sum_{\substack{j=0, \\ j \text{ par}}}^{k-1} \frac{\langle w_k, \eta_k \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle}\eta_j}_{\text{Combinación lineal de elementos de } S_{n,+}} \in S_{n,+}.$$

En [NS74], fijada una dimensión $n \geq 2$, se dan fórmulas para la única colección de n vectores

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{n-1} : \ \ 0 \leq k \leq n-1\} \tag{4}$$

tal que

- [DLOP-1n] los vectores $y_{n,k}$ son mutuamente ortogonales y
- [DLOP-2n] la primera entrada de todos los $y_{n,k}$ es uno.

En [NS74], fijada una dimensión $n \geq 2$, se dan fórmulas para la única colección de n vectores

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{n-1} : \ \ 0 \leq k \leq n-1\} \qquad (4)$$

tal que

- [DLOP-1n] los vectores $y_{n,k}$ son mutuamente ortogonales y
- [DLOP-2n] la primera entrada de todos los $y_{n,k}$ es uno.

En realidad, en [NS74] se habla en términos de funciones $P_k(\cdot, m)$ de variable discreta, a las que denomina "discrete legendre orthogonal polynomials".
A partir de las expresiones para (4) queremos encontrar expresiones para los PDL de dimensión n.

Lema 1

Sea $n \geq 2$ entero. Sean $y_{n,k}$ los vectores de (4). Para toda $0 \leq k \leq n-1$, los vectores $y_{n,k}$ y $\mathcal{L}^{n,k}$ son paralelos.

Lema 2

Sea $n \geq 2$ entero. Sean $y_{n,k}$ los vectores de (4). Para toda $0 \leq k \leq n-1$, los vectores $y_{n,k}$ y $\mathcal{L}^{n,k}$ son paralelos.

Proposición 12

Sea $n \geq 2$ entero. Para toda $0 \leq k \leq n-1$

$$\mathcal{L}^{n,k} = (-1)^k \cdot \frac{y_{n,k}}{||y_{n,k}||}.$$

Definición 5

Sean $K, m \in \overline{\mathbb{N}}$. Se define el **fading factorial** $K^{(m)}$ *como sigue;*

$$K^{(m)} = \begin{cases} \frac{K!}{(K-m)!} & \textit{si } K \geq m, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

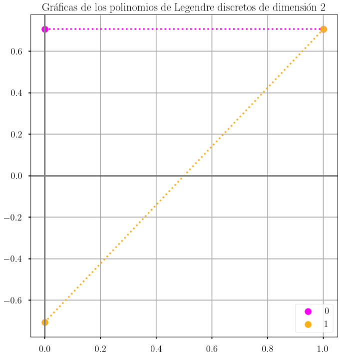
Teorema 5

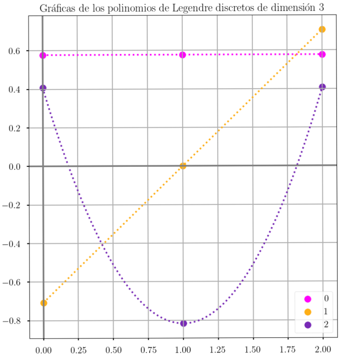
Sea $n \in \mathbb{N}$. Para toda $0 \leq k \leq n-1$,

$$\mathcal{L}_m^{n,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{(2k+1)(n-1)^{(k)}}{(n+k)^{(k+1)}}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{m^{(j)}}{(n-1)^{(j)}}, \tag{5}$$

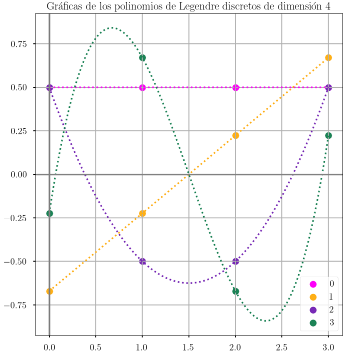
donde $\mathcal{L}^{n,k} = (\mathcal{L}_m^{n,k})_{m=0}^{n-1}$ es el polinomio discreto de Legendre de dimensión n y grado k.

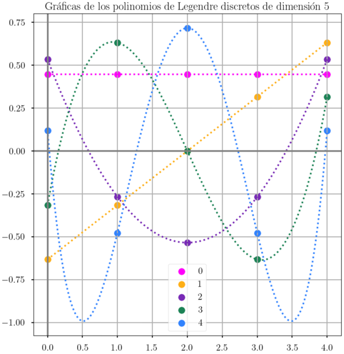
Imágenes de PDL para dimensiones bajas



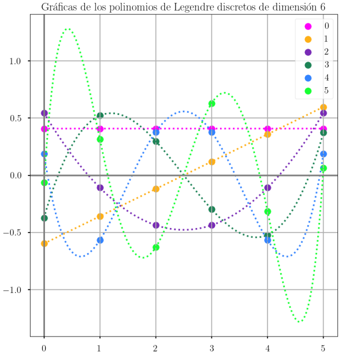


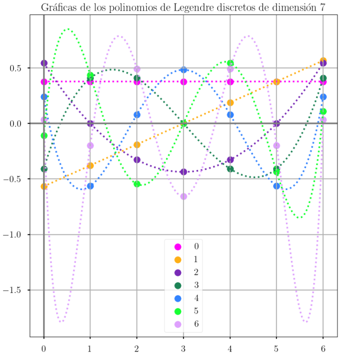
Imágenes de PDL para dimensiones bajas





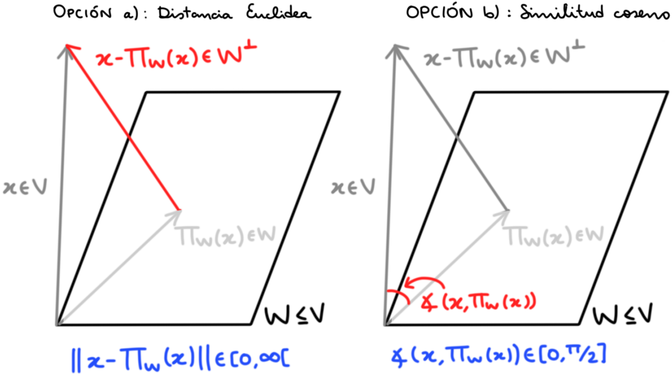
Imágenes de PDL para dimensiones bajas





Recuerde que la distancia de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ a un espacio $W_{n,k}$ indica qué tanto x tiende a ser la discretización de un polinomio de grado k.
¿Cómo estamos midiendo esta distancia?

Recuerde que la distancia de una señal $x \in \mathbb{R}^n$ a un espacio $W_{n,k}$ indica qué tanto x tiende a ser la discretización de un polinomio de grado k.
¿Cómo estamos midiendo esta distancia?

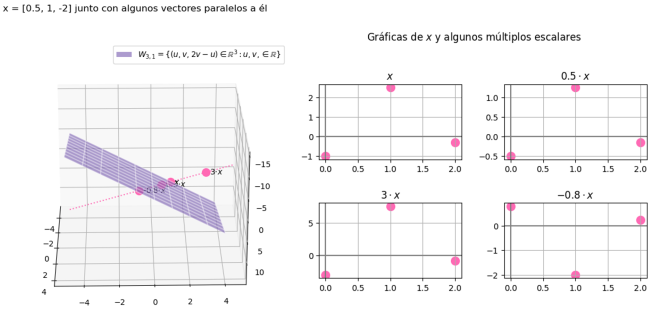


¿Por qué nos conviene más usar similitud coseno?

Respuesta: al igual que la forma de la gráfica de una señal, la distancia coseno de la señal a un subespacio de su espacio ambiente es invariante bajo multiplicación por escalares.

¿Por qué nos conviene más usar similitud coseno?

Respuesta: al igual que la forma de la gráfica de una señal, la distancia coseno de la señal a un subespacio de su espacio ambiente es invariante bajo multiplicación por escalares.



Aquí pon la fórmula de sim coseno!!

Usando los coeficientes de una señal respecto a $\mathcal{L}^n$ para hacer un análisis morfológico

Usando la representación de $x \in \mathbb{R}^n$ respecto a $\mathcal{L}^n$, es muy fácil calcular las proyecciones de x a todos los espacios $W_{n,k}$.

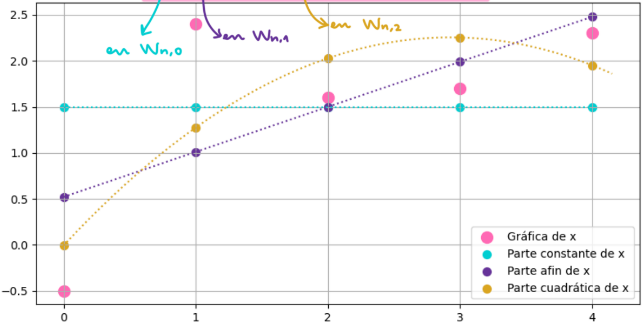
$$x = \boxed{\boxed{\boxed{\boxed{a_0\mathcal{L}^{n,0}} + a_1\mathcal{L}^{n,1}} + a_2\mathcal{L}^{n,2}} + \ldots + a_{n-1}\mathcal{L}^{n,n-1}} \in \mathbb{R}^n$$

en $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$.

en $W_{n,0}$

en $W_{n,1}$

en $W_{n,2}$



Sea $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathcal{L}^{n,k}$. Como $\mathcal{L}^n$ es BON, claro que $a_i = \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle$.

Fijado $0 \leq k < n-1$, x es cercano a $\Pi_{W_{n,k}}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \mathcal{L}^{n,k}$ si y sólo si $x - \Pi_{W_{n,k}}$ es cercano a cero, o, equivalentemente, si y sólo si

$$||x - \Pi_{W_{n,k}}||^2 = \sum_{i=k+1}^{n-1} a_i^2 \approx 0.$$

Puesto que

[NS74] Charles P Neuman **and** Dave I Schonbach. "Discrete (Legendre) orthogonal polynomials—a survey". **in***International Journal for Numerical Methods in Engineering*: 8.4 (1974), **pages** 743–770.