Estudio y análisis espectral de los polinomios discretos de Legendre

Amélie Bernès Moisés Soto Bajo Javier Herrera Vega

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
ammel.bernes@gmail.com

July 12, 2023

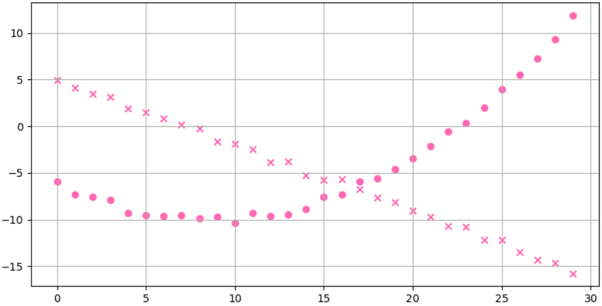
Motivación
Espacios de polinomios discretos
Espacios $W_{n,k}$
Una definición del grado de una señal finita
Polinomios discretos de Legendre
Sobre los PDL en la literatura
Construcción
Simetrías en las entradas de los PDL
Cálculo de los PDL
Análisis de señales finitas en base a los PDL
Análisis espectral
Desarrollo de metodología
Resultados del análisis numérico de algunos PDL
Referencias

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \;\; 0 \leq m \leq n-1\}.$$

Fijado $n \geq 2$ entero, una **señal de dimensión** n será representada como un vector $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. La **gráfica** de x será el conjunto

$$G_x := \{(m, x_m) : \ \ 0 \leq m \leq n-1\}.$$

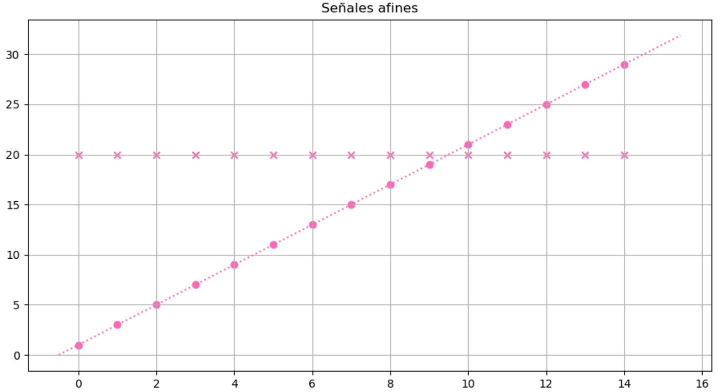


Nos interesa estudiar la forma de la gráfica de una señal, en particular, saber si parece tener forma de recta o parábola.

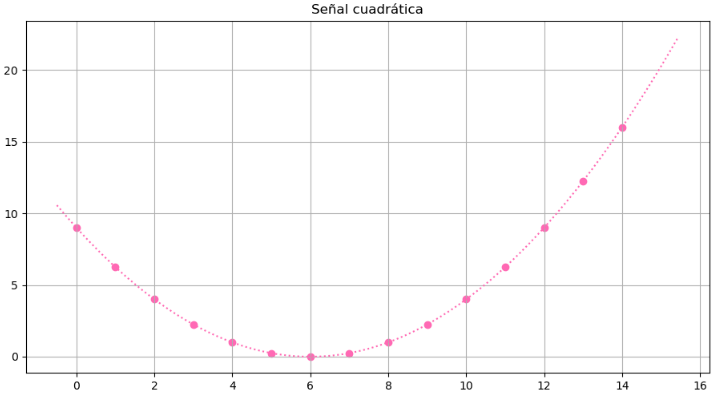
Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **afín** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una recta $l : y = mx + b$. en la malla

$$\mathcal{P}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Si la recta es de la forma $l : y = b$, diremos que x es **constante.**



Una señal $x \in \mathbb{R}^n$ se dirá **cuadrática** si su gráfica G_x es la discretización puntual de una parábola $l : y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, en la malla $\mathcal{P}_n$.



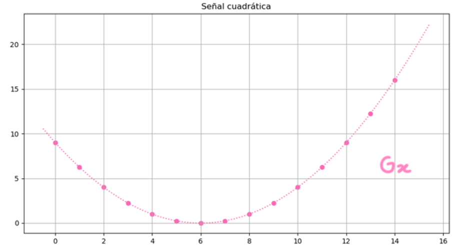
Fijada una dimensión $n \geq 2$, buscamos una base $\mathcal{L}^n = \{\mathcal{L}^{n,k} : \; 0 \leq k \leq n-1\}$ de $\mathbb{R}^n$

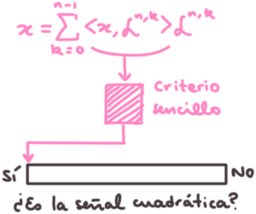
- (Tamaño) que sea ortonormal, pues así se cumplirá que, para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

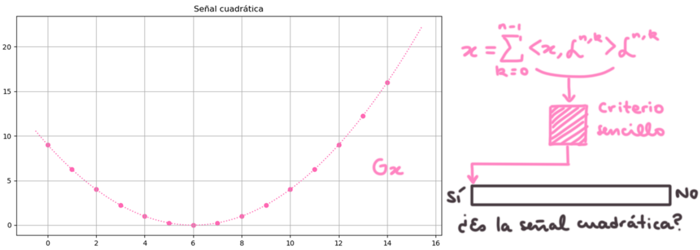
$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle x \;\; y \;\; ||x||^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2,$$

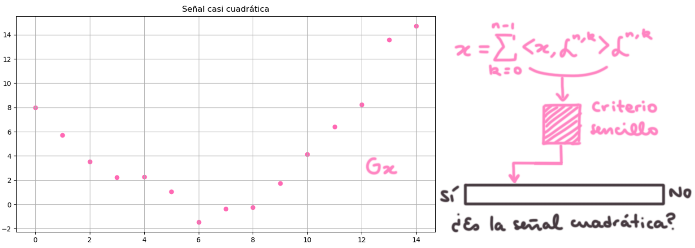
  y

- (Forma) para la que sea posible establecer criterios sencillos sobre la forma de la gráfica de una señal x en términos de la representación de esta respecto a la base $\mathcal{L}^{n,k}$.


Señal cuadrática
Gx


$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?


Señal cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?


Señal casi cuadrática
Gx
$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k}$
Criterio sencillo
Sí
No
¿Es la señal cuadrática?

Piensa en cómo introducir esto.

Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \;\; 0 \leq j \leq n-1\}$$

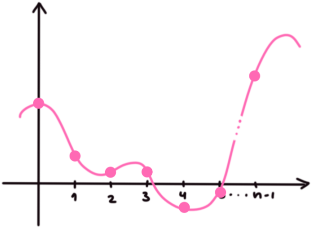
Piensa en cómo introducir esto.
Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \ \ 0 \leq j \leq n-1\}$$

- Discretización puntual:
dado $f \in \mathbb{R}[t]$ y $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ una malla uniforme,

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) := (f(t_j))_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n.$$



Piensa en cómo introducir esto.

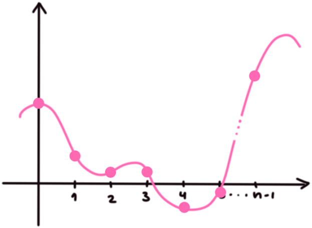
Fijemos una dimensión $n \neq 2$.

- Mallas uniformes:

$$\mathcal{P} = \{t_j = t_0 + hj : \quad 0 \leq j \leq n-1\}$$

- Discretización puntual:
  dado $f \in \mathbb{R}[t]$ y $\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}$ una malla uniforme,

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) := (f(t_j))_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n.$$



$$\omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un operador lineal.

La siguiente consecuencia directa del Teorema fundamental del Álgebra es de mayor importancia para el desarrollo del trabajo. parafrasea.

Proposición 1

Sean $n \geq 2$ entero y $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Si $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ es un polinomio de grado menor a n y $\Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$ es el vector cero de $\mathbb{R}^n$, entonces f es el polinomio cero.

$$\forall n \geq 2, \forall \mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^{n-1}, \forall f \in \mathbb{R}[t] : \ \partial(f) \leq n \wedge \Omega_{n,\mathcal{P}} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Aquí definición de los Wnk. Caracterización de las bases? o lo dejo implicito en la proposición grande?

Usando el operador $\Omega_{n,\mathcal{P}}$ para reformular propiedades geométricas

Sea $x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
x \textit{ es afín } &\Leftrightarrow x = (a + bi)_{i=0}^{i} \quad \textit{para algunos } a, b \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x = \Omega_{n,\mathcal{P}_n}(l(t)) \textit{ para alguna } l(t) = a + bt \in \mathbb{R}_1[t] \\
&\Leftrightarrow x = aw_0 + bw_1 \\
&\Leftrightarrow x \in W_{n,1}.
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$x \text{ es constante sii } x \in W_{n,0}$$

y

$$x \text{ es cuadrática sii } x \in W_{n,2} \text{ y } x \notin W_{n,1}.$$

Proposición 2

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k + 1$,

Proposición 3

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,

Proposición 4

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k + 1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$

Proposición 5

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$
- *Sea $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $0 \leq i \leq n-1$, $x \in W_{n,i}$ si y sólo si existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.*

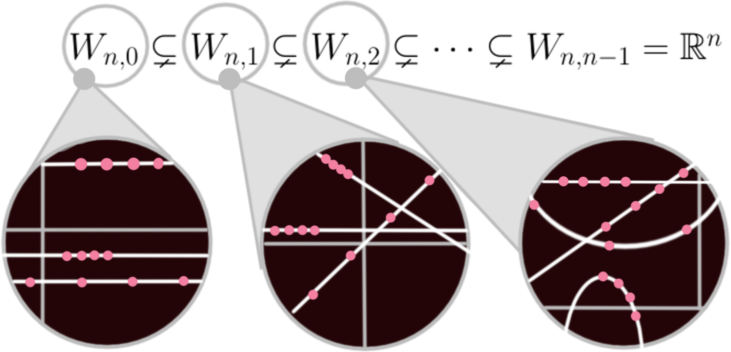
Proposición 6

Sea $n \geq 2$ entero. Para cada $0 \leq k \leq n-1$ entero, sea $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$ el espacio definido en ref.

- $dim(W_{n,k}) = k+1$,
- $\forall 0 \leq i \leq n-2$: $W_{n,i} \subseteq W_{n,i+1}$,
- $\mathbb{R}^n = W_{n,n-1}$
- *Sea $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. Para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $0 \leq i \leq n-1$, $x \in W_{n,i}$ si y sólo si existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.*

Este resultado implica que toda señal $n-$dimensional sea la discretización puntual uniforme de un polinomio de grado a lo más n.

La **pertenencia** de una señal finita $n-$dimensional a un subespacio $W_{n,k}$ de $\mathbb{R}^n$ determina la **forma** de su gráfica.



Pon notación para espacio $\mathbb{R}_{n-1}[t]$.

Proposición 7

Sean $n \geq 2$ y $\mathcal{P}$ una malla uniforme de n puntos. La función

$$\Omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}_{n-1}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo $\mathbb{R}-$espacios vectoriales.

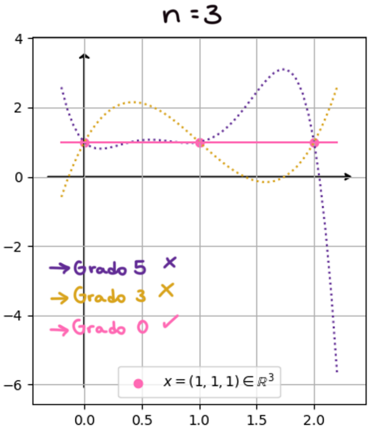
Logramos asociar a una señal n-dimensional un único polinomio de grado menor a n. Observe que, en la proposición, la malla $\mathcal{P}$ se fija en las hipótesis.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

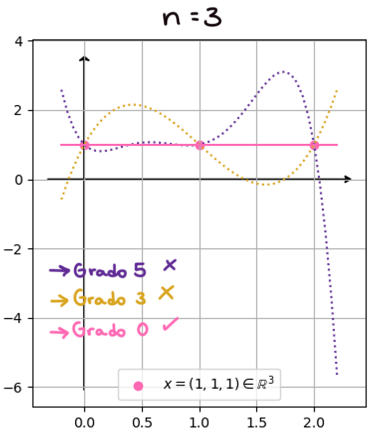
Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.

Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.

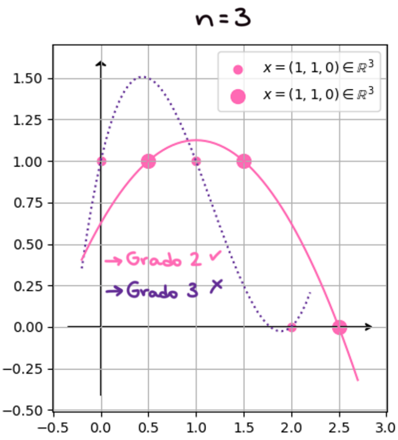


Malla ℓ fija, <u>no</u> pedir restricciones de grados.

Lo que es seguro es que no se puede asegurar algún tipo de unicidad si quitamos la restricción en los grados de los polinomios a discretizar.



Malla & fija, no pedir restricciones de grados.



Malla no fija, no pedir restricciones de grados.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Respuesta: no.

Proposición 9

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ son mallas uniformes de n puntos y $f, \tilde{f} \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ son tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}),$$

entonces $\partial(f) = \partial(\tilde{f})$.

Pregunta: ¿Se pueden encontrar dos mallas $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ y dos polinomios $f, \tilde{f}$ de grados $0 \leq \partial(f) < \partial(\tilde{f}) \leq n-1$ tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f})?$$

Respuesta: no.

Proposición 10

Sean $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{P}$ y $\tilde{\mathcal{P}}$ son mallas uniformes de n puntos y $f, \tilde{f} \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ son tales que

$$\Omega_{n,\mathcal{P}}(f) = x = \Omega_{n,\tilde{\mathcal{P}}}(\tilde{f}),$$

entonces $\partial(f) = \partial(\tilde{f})$.

Definición 3

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ y $\mathcal{P}$ son tales que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(f)$, entonces

$$\partial(x) := \partial(f). \quad (\textit{grado de } x).$$

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 1

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 2

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$,

- la gráfica de x tiene la forma de un polinomio de grado k si y sólo si $x \in W_{n,k}$.
- Es posible medir la distancia del punto $x \in \mathbb{R}^n$ al espacio $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$, luego, **podemos medir qué tanto se aleja x de tener la propiedad "ser de grado k"**.

Así, $W_{n,k}$ es el espacio de las señales $n-$dimensionales de grado k

Teorema 3

Sean $n \geq 2$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

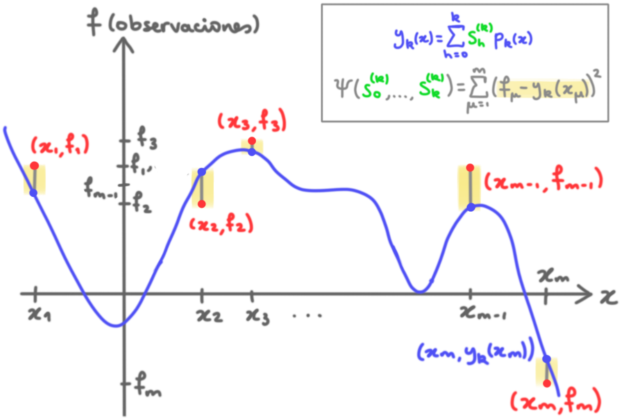
- *x tiene grado cero sii $x \in W_{n,0}$, y*
- *para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$.*

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$,

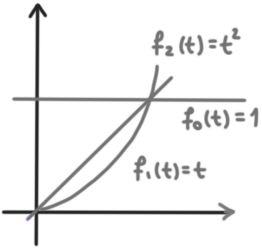
- la gráfica de x tiene la forma de un polinomio de grado k si y sólo si $x \in W_{n,k}$.
- Es posible medir la distancia del punto $x \in \mathbb{R}^n$ al espacio $W_{n,k} \leq \mathbb{R}^n$, luego, **podemos medir qué tanto se aleja** x **de tener la propiedad "ser de grado** k**"**.

Por lo visto antes, ... encontrar una base ortonormal para cada espacio de polinomios discretos $W_{n,k}$. Al hacer esto, **polinomios discretos de Legendre**, objetos ya estudiados y aplicados en la literatura.

Aquí tienes que hacer referencia a lo que debes leer de tarea. También habla de la aplicación principal de estos polinomios discretos en la ingeniería; usarlos para facilitar la resolución de problemas de minimización.



$\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$

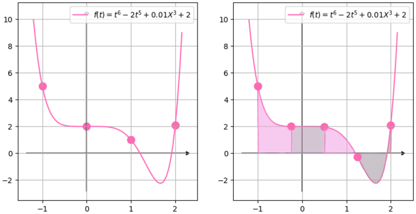


$\{f_k(t)=t^k : 0\leq k\leq n-1\}$

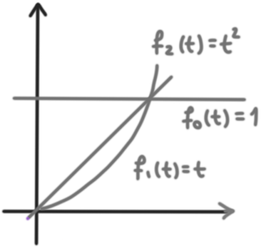
$\boxed{\mathbb{R}^n}$

PASO I: Discretización

$\{w_{n,k} : 0\leq k\leq n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$



$\boxed{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$



$\{f_k(t)=t^k \ : \ 0\leq k\leq n-1\}$

$\boxed{\mathbb{R}^n}$

PASO I: Discretización

$\{w_{n,k} \ : \ 0\leq k\leq n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

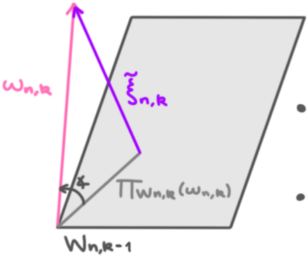
PASO II: Ortogonalización

$\{\xi_{n,k} \ : \ 0\leq k\leq n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

PASO III: Normalización

$\{\mathcal{L}^{n,k} \ : \ 0\leq k\leq n-1\}\subseteq\mathbb{R}^n$

ORTHONORMALIZATION



$\mathcal{L}^{n,0} = \dfrac{w_{n,0}}{\|w_{n,0}\|}$ and, for all $1 \le k \le n-1$,

- $\tilde{\xi}_{n,k} := w_{n,k} - \Pi_{W_{n,k-1}}(w_{n,k})$ [Gram-Schmidt]
- $\mathcal{L}^{n,k} = \dfrac{\tilde{\xi}_{n,k}}{\|\tilde{\xi}_{n,k}\|}$ [Normalization]

Puesto que $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n := \{\mathcal{L}^{n,k} : \; 0 \leq k \leq n-1\} \tag{1}$$

es una BON de $\mathbb{R}^n$. Llamamos a esta la **base de Legendre discreta de dimensión** n.

Puesto que $W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n := \{\mathcal{L}^{n,k} : \ 0 \leq k \leq n-1\} \tag{1}$$

es una BON de $\mathbb{R}^n$. Llamamos a esta la **base de Legendre discreta de dimensión** n.
Al vector $\mathcal{L}^{n,k} \in \mathbb{R}^n$ le llamaremos el **vector de Legendre de dimensión** n **y grado** k**.**

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_m^{n,k}\right)_{m=0}^{n-1} \in W_{n,k}$$

Tabulemos los valores de algunos PDL.

k \ n	2	3	4
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$
2	$---$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
3	$---$	$---$	$\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$

Parece ser que existe una simetría central en las entradas de los PDL.

k \ n	5	6
0	$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$
1	$\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \sqrt{\frac{5}{14}}\right)$
2	$\left(\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\sqrt{\frac{2}{7}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$	$\left(\frac{5}{2\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{2\sqrt{21}}, \frac{5}{2\sqrt{21}}\right)$
3	$\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, \frac{7}{6\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{7}{6\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$
4	$\left(\frac{1}{\sqrt{70}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{70}}\right)$	$\left(\frac{1}{2\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{3}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$
5	$---$	$\left(-\frac{1}{6\sqrt{7}}, \frac{5}{6\sqrt{7}}, -\frac{5}{3\sqrt{7}}, \frac{5}{3\sqrt{7}}, -\frac{5}{6\sqrt{7}}, \frac{1}{6\sqrt{7}}\right)$

Definición 4

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Sea $M = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Definimos al **espacio de señales antisimétricas** $S_{n,-}$ *como*

$$S_{n,-} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 0 \leq m \leq M{-}1 : \;\; x_m = -x_{n-m-1} \tag{2}$$

y, además, definimos al **espacio de señales simétricas** $S_{n,+}$ *como*

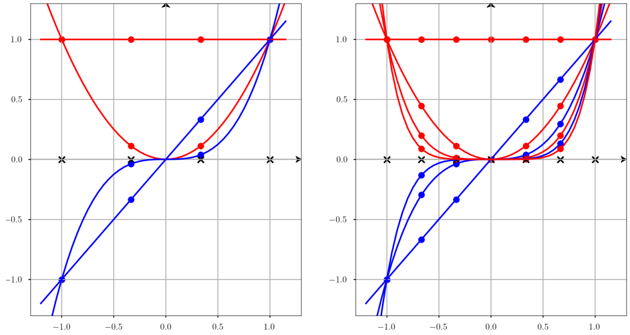
$$S_{n,+} := \{x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, 0 \leq m \leq M{-}1 : \;\; x_m = x_{n-m-1}\}, \tag{3}$$

Las siguientes propiedades de los conjuntos $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ se siguen de inmediato.

- $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.
- Para cualesquiera $u \in S_{n,+}$ y $v \in S_{n,-}$ se cumple que $\langle u, v \rangle = 0$.

Las siguientes propiedades de los conjuntos $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ se siguen de inmediato.

- $S_{n,+}$ y $S_{n,-}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.
- Para cualesquiera $u \in S_{n,+}$ y $v \in S_{n,-}$ se cumple que $\langle u, v \rangle = 0$.



Teorema 4

Sean $n \geq 2$ y $0 \leq k \leq n-1$ enteros. Se tiene que

- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,+}$ *si k es par, y que*
- $\mathcal{L}^{n,k} \in S_{n,-}$ *si k es impar.*

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{M-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k}\right)$$

$$\mathcal{L}^{n,k} = \left(\mathcal{L}_0^{n,k}, \mathcal{L}_1^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{M-1}^{n,k}, \mathcal{L}_M^{n,k}, \ldots, \mathcal{L}_{n-2}^{n,k}, \mathcal{L}_{n-1}^{n,k}\right)$$

Si $\{\eta_k : \ 0 \leq k \leq n-1\}$ es la BON de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene al ortogonalizar a $\{w_k : \ 0 \leq k \leq n-1\}$, entonces

$$\forall 0 \leq k \leq n-1 : \ \mathcal{L}^{n,k} = \frac{1}{||\eta_{k||}} \eta_k.$$

Si $k > 0$,

$$\eta_k = w_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle w_k, \eta_k \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \eta_j.$$

Procedemos por inducción sobre k. Por ejemplo, si k es par,

$$\eta_k = \underbrace{w_k - \sum_{\substack{j=0,\\ j \text{ par}}}^{k-1} \frac{\langle w_k, \eta_k \rangle}{\langle \eta_j, \eta_j \rangle} \eta_j}_{\text{Combinación lineal de elementos de } S_{n,+}} \in S_{n,+}.$$

En Survey, fijada una dimensión $n \geq 2$, se dan fórmulas para la única colección de n vectores

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{n-1} : \ \ 0 \leq k \leq n-1\} \tag{4}$$

tal que

- [DLOP-1n] los vectores $y_{n,k}$ son mutuamente ortogonales y
- [DLOP-2n] la primera entrada de todos los $y_{n,k}$ es uno.

En Survey, fijada una dimensión $n \geq 2$, se dan fórmulas para la única colección de n vectores

$$\{y_{n,k} := (P_k(m, n-1))_{m=0}^{n-1} : \;\; 0 \leq k \leq n-1\} \tag{4}$$

tal que

- [DLOP-1n] los vectores $y_{n,k}$ son mutuamente ortogonales y
- [DLOP-2n] la primera entrada de todos los $y_{n,k}$ es uno.

En realidad, en Survey se habla en términos de funciones $P_k(\cdot, m)$ de variable discreta, a las que denomina "discrete legendre orthogonal polynomials".

Survey

@BookDSmath, author = Nathan Carter, title = Data Science for Mathematicians, publisher = Chapman and Hall, CRC Press, year = 2020, edition = 1st Edition
@UnpublishedNimark, author = Nimark, Kristoffer, title = The Projection Theorem, howpublished = `http://www.kris-nimark.net/pdf/ProjectionTheorem.pdf`,
@BookLang, author = Lang, Serge, title = Undergraduate Analysis, publisher = Springer New York, NY, year = 1997, series = Undergraduate Texts in Mathematics, edition = 2nd edition,
@Bookspivak, author = Michael Spivak, title = Calculus, publisher = Publish or Perish, year = 2008
@Bookrotman, author = Joseph J. Rotman, title = Advanced Modern Algebra, publisher = American Mathematical Society, year = 2010, edition = 2nd edition, series = Graduate Studies in Mathematics
@Bookmunkres, author = James R. Munkres, title = Topology, publisher = Pearson College Div, year = 2000, edition = 2dn edition

@Bookfourier1, author = Elias M. Stein, title = Fourier Analysis: An Introduction, publisher = Princeton Lectures in Analysis
@Bookfourier2, author = D. Sundararajan, title = The Discrete Fourier Transform: Theory, Algorithms and Applications, publisher = World Scientific Publishing Company, year = 2001

@Bookfriedberg, author = Stephen H. Friedberg, title = Linear Algebra, publisher = Pearson, year = 2002, edition = 4th edition
@Bookconway, author = John B Conway, title = A course in functional analysis, publisher = Springer, year = 1990, edition = 2nd edition, series = Graduate Texts in Mathematics
@Bookkolmogorov, author = A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, title = Introductory real analysis, publisher = Dover Publications
@BookDSML, author = Dirk P. Kroese, Zdravko I. Botev, Thomas Taimre, Radislav Vaisman, title = Data science and machine learning: mathematical and statistical methods, year

= 2022
@BookKreyszig, author = Kreyszig, Erwin, title = Introductory functional analysis with applications, publisher = John Wiley and Sons, year = 1991
@articlegeorge, title=Generation and use of orthogonal polynomials for data-fitting with a digital computer, author=George E. Forsythe, journal=Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, volume=5, number=2, pages=74-88, year=June 1957
@articleroy, title=The work of Chebyshev on orthogonal polynomials, author=Roy, Ranjan, volume=Topics In Polynomials Of One And Several Variables And Their Applications: Volume Dedicated to the Memory of PL Chebyshev (1821–1894), pages=495-512, year=1993
@articleaburd, title=On the computation of discrete Legendre polynomial coefficients, author=Aburdene, Maurice F., journal = Multidimensional systems and signal processing, pages=181-186, year=1993
@articleaburd2, title=Parallel computation of discrete Legendre

transforms, author=Aburdene, Maurice F., John E. Dorband, journal = IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing Conference Proceedings, volume = 6, year=1996
@articledris, title=Fast discrete polynomial transforms with applications to data analysis for distance transitive graphs, author=Driscoll, James R., Dennis M. Healy Jr, Daniel N. Rockmore., journal = SIAM Journal on Computing, pages = 1066-1099, year=1997
@articlemukun, title=Some computational aspects of discrete orthonormal moments, author=Mukundan, Ramakrishnan, journal = IEEE Transactions on image processing, pages = 1055-1059, year=2004
@articlecolomer, title=Adaptive ECG data compression using discrete legendre transform, author=Colomer, Alberto Albiol, Antonio Albiol Colomer, journal = Digital Signal Processing, pages = 222-228, year=1997
@articlestockel, title=Stöckel, Andreas, author=Discrete function bases and convolutional neural networks, journal =

arXiv preprint arXiv:2103.05609 (2021),
@articletcheb, title=Sur une nouvelle série, author=Tchebychef, P.L., journal = in Oeuvres, T.I. (Chelsea, New York, 1961), year = 1858, pages = 381-384
@articlenikiforov, title=Classical orthogonal polynomials of a discrete variable, author=Nikiforov, A.F., S.K. Suslov, V.B. Uvarov, journal = Springer Berlin Heidelberg, year = 1991,
@articlefurlong, title=Learned legendre predictor. Learning with compressed representaitons for efficient online multistep prediction, author=Furlong, P. Michael, et al., journal = Technical Report, year = 2022,
@Bookhimmelblau, author = David M. Himmelblau, title = Process Analysis by Statistical Methods, publisher = John Wiley and Sons, year = 1970
@Bookrabin, author = Ralston, A. and P. Rabinowtiz, title = A First Course in Numerical Analysis, publisher = McGraw-Hill New York, year = 1978
@articleNeuman, title=Discrete (Legendre) orthogonal polynomials—a survey, author=Neuman, Charles P and

Schonbach, Dave I, journal=International Journal for Numerical Methods in Engineering, volume=8, number=4, pages=743–770, year=1974, publisher=Wiley Online Library
@articlepapel, title=Cross-directional Control on Paper Machines using Gram Polynomials, author=Kristinn Kristinsson, Guy A. Dumont, journal=Automatica, volume=32, number=4, pages=533-548, year=1996
@PhdThesisKrist, author = Kristinn Kristinsson, title = Cross directional control of basis weight on paper machines using Gram polynomials, year = 1994, type = Thesis
@miscFFTscipy, title = Discrete Fourier Transform, SciPy module, howpublished = `https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html`, note = Accessed: 2023-05-09
@mischopital, title = L'Hopital's rule, howpublished = `https://en.wikipedia.org/wiki/L%27H%C3%B4pital%27s_rule`, note = Accessed: 2023-05-18
@miscTDFwiki, title = Discrete Fourier Transform, howpublished = `https:`

//en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform, note = Accessed: 2023-05-09

@miscmse1, title = An orthonormal set cannot be a basis in an infinite dimension vector space?, howpublished = https://math.stackexchange.com/questions/13641/an-orthonormal-set-cannot-be-a-basis-in-an-infinite-
note = Accessed: 2023-04-11

@miscmse2, title = Why isn't every Hamel basis a Schauder basis?, howpublished = https://math.stackexchange.com/questions/1653691/why-isnt-every-hamel-basis-a-schauder-basis?, note = Accessed: 2023-04-11

@miscmse3, title = Proof that every finite dimensional normed vector space is complete, howpublished = https://math.stackexchange.com/questions/168275/proof-that-every-finite-dimensional-normed-vector-spa
note = Accessed: 2023-04-11

@miscinterpolation, title = Polynomial interpolation, howpublished = https://www.unioviedo.es/compnum/

labs/PYTHON/Interpolation.html, note = Accessed: 2023-04-25
@misccosineSim, title = Cosine similarity, howpublished = https://en.wikipedia.org/wiki/Cosine_similarity, note = Accessed: 2023-04-11
@Bookalgorithms, author = Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein , title = Introduction to algorithms, publisher = The MIT Press, year = 2009, edition = Third edition
@Bookjacobson, author = Nathan Jacobson, title = Basic Algebra I, publisher = W H Freeman and Company, year = 1985, edition = 2nd edition
@Bookmarsden, author = Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman, title = Basic complex analysis, publisher = W H Freeman and Company, year = 1999, edition = 3rd edition
@Bookkurosch, author = A. G. Kurosch, title = Curso de álgebra superior, publisher = Editorial MIR, year = 1968, edition = edition
@Bookgodement, author = Roger Godement, title = Cours

d'algèbre, publisher = Hermann éditeurs, year = 1966
@Bookcarothers, author = N. L. Carothers, title = Real analysis, publisher = Cambridge University Press, year = 2000, edition = 1st edition
@miscleg, title = Legendre polynomials, howpublished = `https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials`, note = Accessed: 2023-04-11
@miscleg, title = wolfram, howpublished = `https://mathworld.wolfram.com/L2-Space.html`, note = Accessed: 2023-04-11