Estudio y análisis espectral de los polinomios discretos de Legendre

Amélie Bernès Carmona, Moises Soto Bajo y Javier Herrera Vega

Benemérita Universidad Autonóma de Puebla

Décimo Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones, CIMA 10

Motivación

Fijado un entero $n \geq 2$, representaremos señales de dimensión n con vectores $x = (x_m)_{m=0}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Buscamos una base de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}^n := \{\mathcal{L}^{n,k} : 0 \leq k \leq n-1\}$$

- (Tamaño) que sea ortonormal, pues así se cumplirá que, para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$,

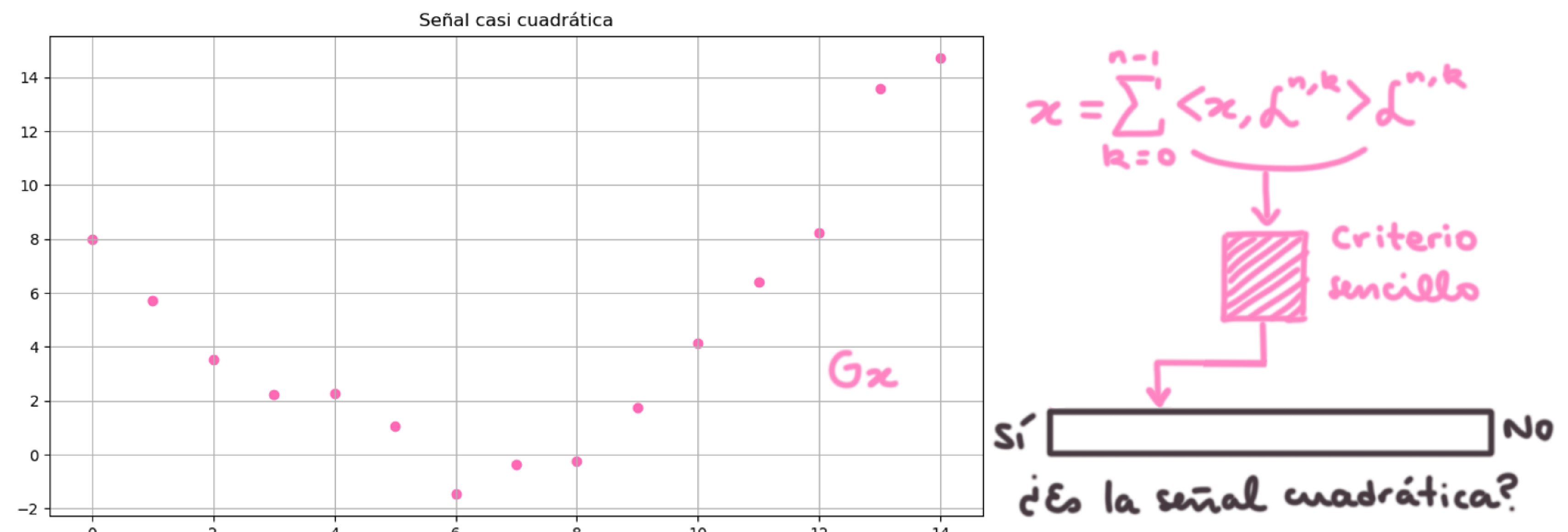
$$x = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle \mathcal{L}^{n,k} \quad y \quad ||x||^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x, \mathcal{L}^{n,k} \rangle^2,$$

y

- (Forma) para la que sea posible establecer criterios sencillos sobre la forma de la gráfica

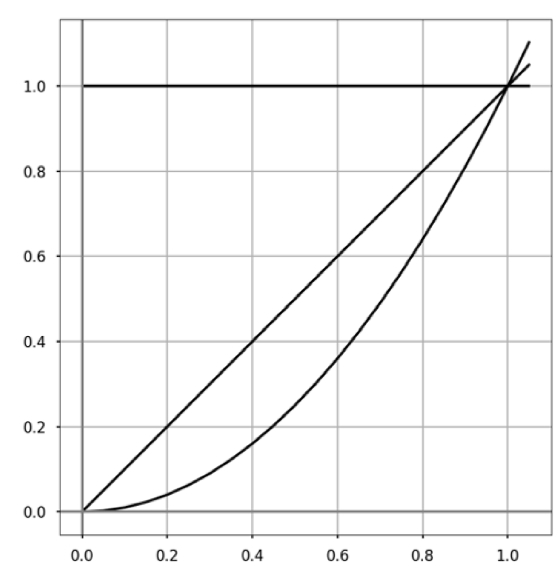
$$G_x := \{(m, x_m) : 0 \leq m \leq n-1\}$$

de x en términos de la representación de esta respecto a la base $\mathcal{L}^n$.

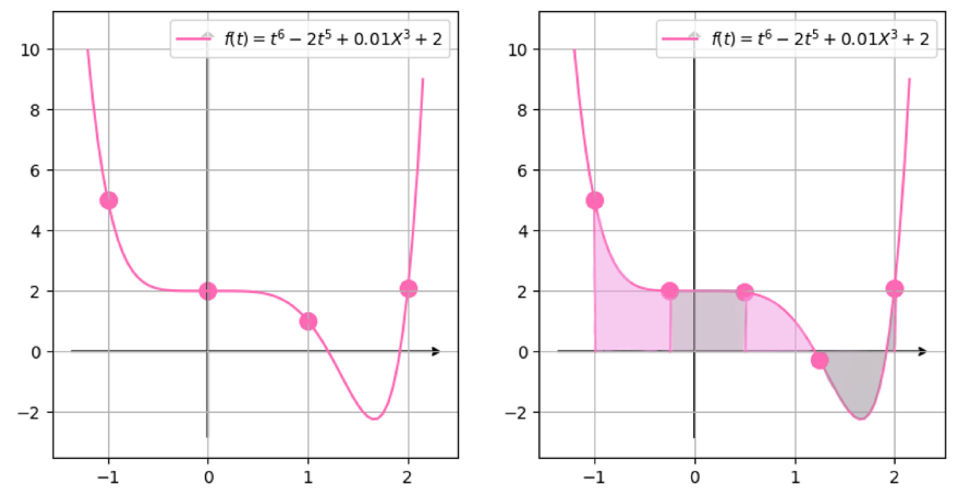


Construcción

$$f_k(t) = t^k \in \mathbb{R}_k[t]$$



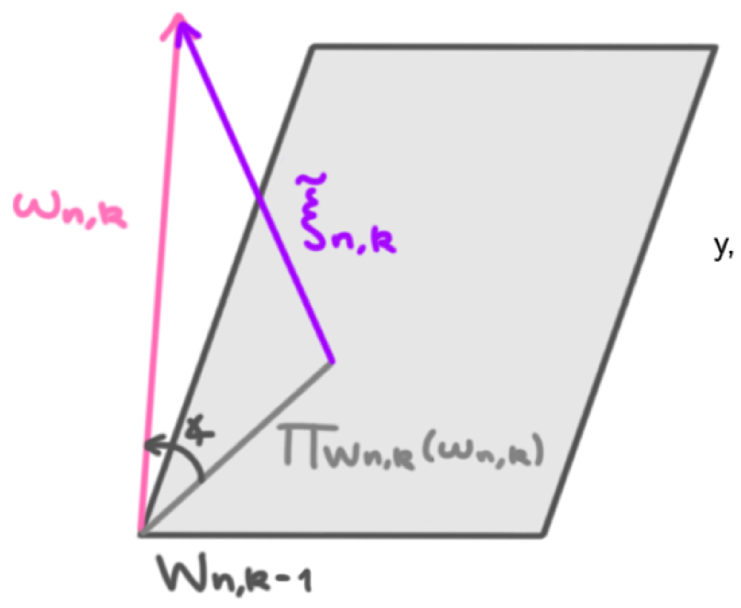
1 Discretización



$$w_k = (f_k(m))_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

$$W_{n,i} = span\{w_{n,k} : 0 \leq k \leq i\}$$

2 Ortonormalización



$$\mathcal{L}^{n,0} = \frac{w_{n,0}}{||w_{n,0}||}$$

y, para toda $0 \leq k \leq n-1$,

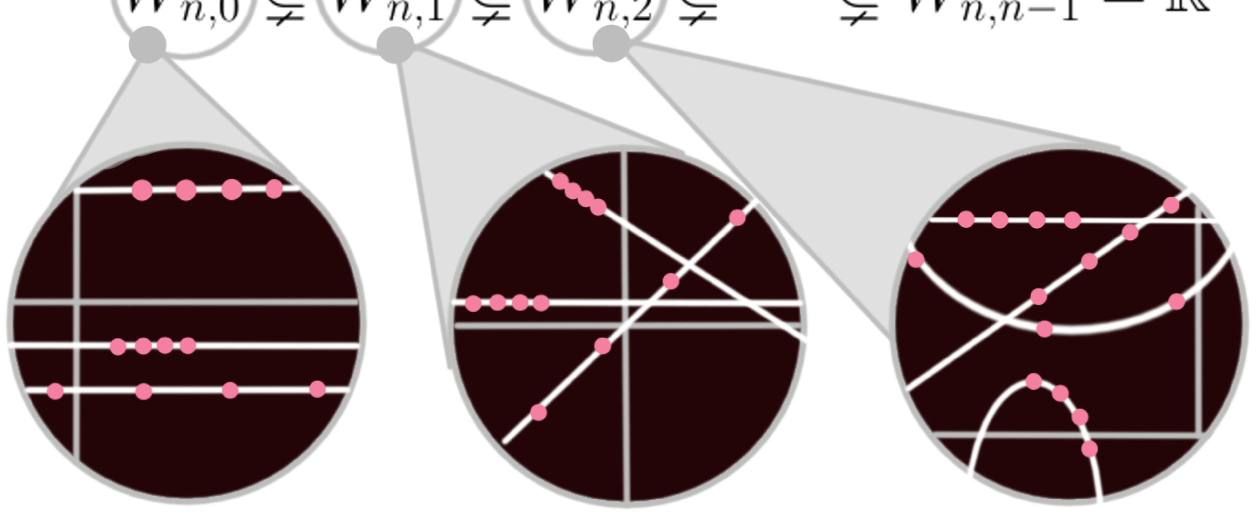
$$\tilde{\xi}_{n,k} = w_{n,k} - \Pi_{W_{n,k-1}}(w_{n,k}),$$

$$\mathcal{L}^{n,k} = \frac{\tilde{\xi}_{n,k}}{||\tilde{\xi}_{n,k}||}.$$

Al vector $\mathcal{L}^{n,k} \in \mathbb{R}^n$ se le llamará el **polinomio discreto de Legendre de dimensión n y grado k**, abreviado como PDL.

Espacios de polinomios discretos

$$W_{n,0} \subsetneq W_{n,1} \subsetneq W_{n,2} \subsetneq \cdots \subsetneq W_{n,n-1} = \mathbb{R}^n$$



Noción de grado para señales n−dimensionales; si $\mathcal{P}$ es una malla uniforme de n puntos cualquiera,

- el operador de discretización puntual

$$\Omega_{n,\mathcal{P}} : \mathbb{R}_{n-1}[t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo. Definimos el **grado de** x como el grado del único polinomio $g \in \mathbb{R}_{n-1}[t]$ tal que $\Omega_{n,\mathcal{P}}(g) = x$ (se comprueba que esta definición del grado no depende de la malla $\mathcal{P}$ fijada antes).

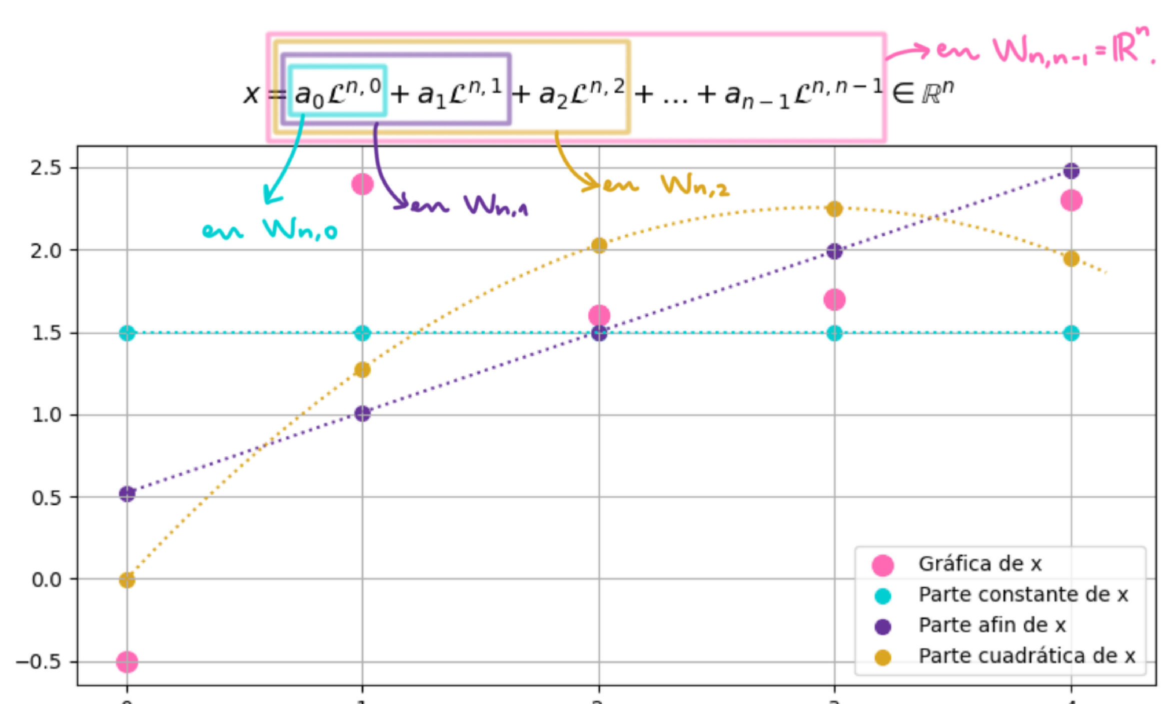
- Para toda señal $x \in \mathbb{R}^n$ y toda $0 \leq i \leq n-1$, $x \in W_{n,i}$ sii existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más i tal que $x = \Omega_{n,\mathcal{P}}(g)$.
- Para toda $1 \leq i \leq n-1$, x tiene grado i sii $x \in W_{n,i}$ pero $x \notin W_{n,i-1}$.

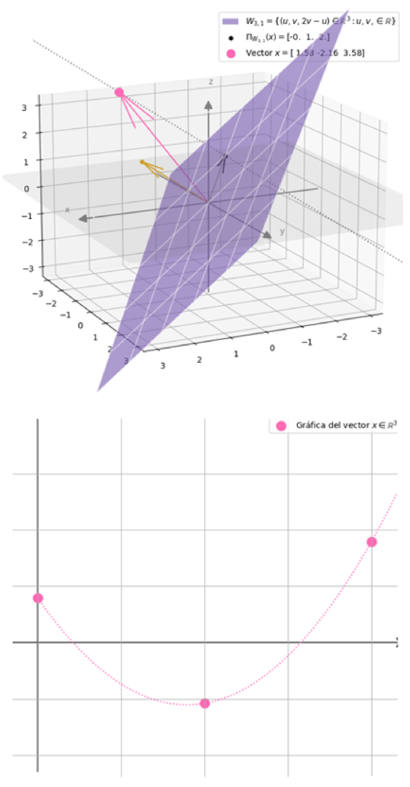
Referencias

Charles P. Neuman y Dave I. Schonbach. "Discrete (Legendre) orthogonal polynomials -a survey", International Journal for Numerical Methods in Engineering: 8.4 (1974), p. 743-770 ◇ Ranjan Roy. "The work of Chebyshev on orthogonal polynomials", Topics In Polynomials Of One And Several Variables And Their Applications: Volume Dedicated to the Memory of P.L. Chebyshev ◇ S.K. Suslov, V.B. Uvarov y Nikiforov A.F. "Classical orthogonal polynomials of a discrete variable". Springer Berlin Heidelberg (1991).

Usando representaciones respecto a $\mathcal{L}^n$ para hacer análisis de morfología

Se determina qué tanto tiende una una señal $x \in \mathbb{R}^n$ a tener grado k usando sus similitudes coseno a los espacios $W_{n,k}$. Puesto que la forma de la gráfica de una señal es invariante ante multiplicaciones por escalares, note que el usar similitudes coseno en vez de distancias euclideas es mejor para dar una medida de la cercanía de x a un espacio de polinomios discretos n−dimensionales.

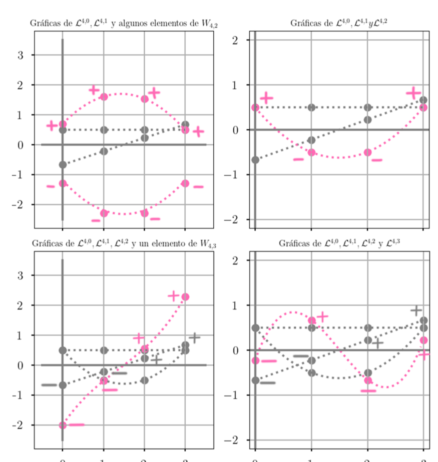




Si $x \neq 0$ y $a_i := \langle x, \mathcal{L}^{n,i} \rangle$, entonces

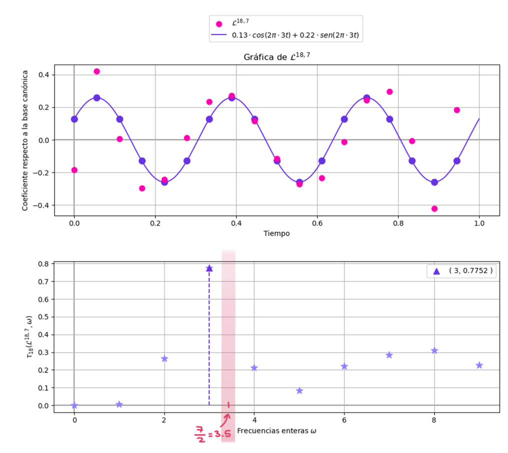
$$cos(\measuredangle(x, W_{n,k})) = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{k} a_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2}}, \quad y \quad x \in W_{n,k} \iff cos(\measuredangle(x, W_{n,k})) = 1.$$

Análisis espectrales de los PDL



Las condiciones de ortogonalidad en la definición de los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ implican un aumento en los cambios de signo de sus entradas conforme la variable de grado k aumenta.

Usando la transformada discreta de Fourier



Objetivo: poder tomar en consideración frecuencias $\omega \geq 0$ arbitrarias.

Análisis espectral usando espacios monofrecuenciales

Señal n−dimensional de frecuencia pura ω

$x = A\left(cos\left(2\pi\omega\frac{m}{n} + 2\pi\phi\right)\right)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Amplitud $A \geq 0$, frecuencia $\omega \geq 0$, desfase $\phi \in [0, 1[$.

Haciendo $A = 1$ y $\phi = 0, \pi/2$ obtenemos los vectores $c_{n,\omega}$ y $s_{n,\omega}$. $x \in P_{n,\omega} := span\{c_{n,\omega}, s_{n,\omega}\}$ sii x es de frecuencia pura ω. Si $x \neq 0$, definimos

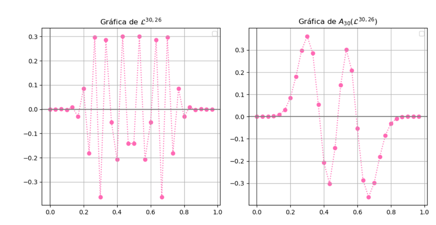
$$\sigma_{n,\omega}(x) = cos(\measuredangle(x, P_{n,\omega})),$$

y a su espectro $\Sigma_x : [0, n/2] \longrightarrow [0, 1]$ como la función continua

$$\Sigma_x(\omega) = \begin{cases} cos(\measuredangle(x, P_{n,\omega})) & si\ \omega \in]0, n/2[, \\ cos(\measuredangle(x, W_{n,1})) & si\ \omega = 0, \\ cos(\measuredangle(A_n(x), W_{n,1})) & si\ \omega = n/2. \end{cases}$$

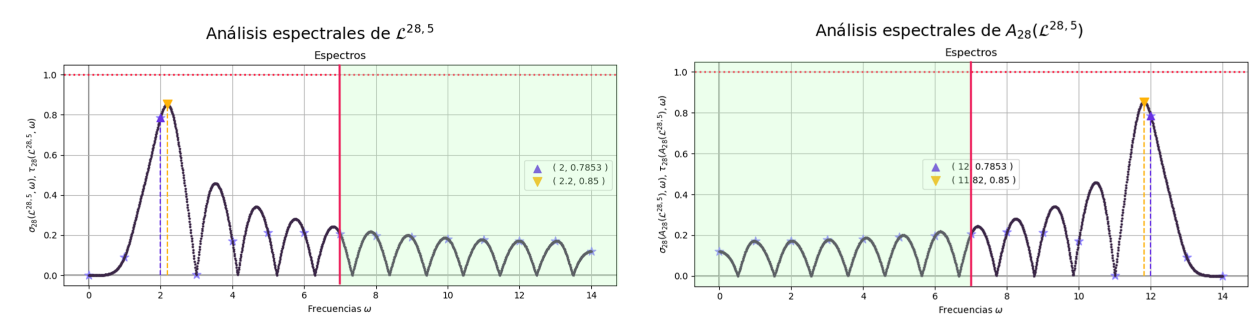
Operador de alternancia $A_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\forall x = (x_m)_{m=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n : \quad A_n(x) = ((-1)^m$



El espectro Σ_x es una función **continua** y, exceptuando los puntos extremos, **una extensión del espectro de Fourier**.

Para toda $0 < \omega < n/2$, entre más cercano a uno sea $\Sigma_x(\omega)$, más cerca estará x de tener la propiedad de ser de frecuencia pura ω. A los $\omega \in [0, n/2]$ en los que Σ_x alcance su máximo se les llamará **frecuencias principales** de x.



Conclusiones del análisis espectral numérico

Parece ser que el valor $k/2$ es, más que una estimación precisa de la frecuencia principal de un PDL de grado k, una cota superior para tal frecuencia principal. En general, para todas las dimensiones n estudiadas, se encontró que los PDL $\mathcal{L}^{n,k}$ con k pequeño parecían responder particularmente bien a su frecuencia principal, siendo el espectro evaluado en esta muy cercano a uno, pero conforme n crece y k tiende a $n-1$ (su cota superior), los valores $\sigma_n(\mathcal{L}^{n,k}, \omega)$ parecen estar muy alejados de 1, por lo que no parece ser factible aproximar la gráfica de tales PDL sólo con un sinusoide. $\mathbf{cot}(x)$