

V407

Fresnelsche Formeln

Amelie Hater

amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le

ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.05.2024

Abgabe: 28.05.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-------------------------|----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Durchführung | 4 |
| 4 Auswertung | 5 |
| 5 Diskussion | 8 |
| Literatur | 9 |
| Anhang | 9 |
| Originaldaten | 9 |

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuches ist die fresnelschen Formeln experimentell zu bestätigen, indem das Verhalten von Licht beim Auftreffen auf Grenzflächen wie zum Beispiel einem Siliziumkristall untersucht wird. Zudem wird der Brechungsindex von Silizium und der Brewsterwinkel bestimmt.

2 Theorie

Grundlage des Versuches sind die fresnelschen Formeln, welche aus der elektromagnetischen Wellentheorie hergeleitet werden können. Dabei werden die Annahmen getroffen, dass es sich bei den Materialien um nicht-ferromagnetische und nicht elektrisch leitende Stoffe handelt. Die Strahlenleistung einer Lichtwelle in Materie ist durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1)$$

gegeben. Dabei sind \vec{E} die elektrische Feldstärke und \vec{H} die magnetische Feldstärke. Der Vektor beschreibt die Strahlungsleistung pro Fläche eines elektromagnetischen Feldes. Der Betrag des Vektors kann durch

$$|\vec{S}| = v \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}^2 \quad (2)$$

dargestellt werden, unter der Annahme, dass \vec{E} und \vec{H} als ebene Wellen dargestellt werden können. v ist dabei die Geschwindigkeit der Welle, ε ist die relative Dielektrizitätskonstante und ε_0 die elektrische Feldkonstante. Das elektrische Feld einer Lichtwelle kann als ebene Welle der Form

$$\vec{E} = \vec{E}_e \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)) \quad (3)$$

dargestellt werden. Dabei ist \vec{r} der Ortsvektor, t die Zeit, \vec{k} der Wellenzahlvektor, ω die Kreisfrequenz und \vec{E}_e die Amplitude der Welle. Wenn diese ebene Welle aus einem Vakuum unter einem Winkel α auf eine Grenzfläche fällt wird ein Teil reflektiert (mit Amplitude \vec{E}_r) und ein Teil dringt ins Material ein (mit Amplitude \vec{E}_d). Dies ist in Abbildung (1) schematisch dargestellt. Im Material ist die Lichtgeschwindigkeit v geringer als die im Vakuum c . Daher ändert der Lichtstrahl seine Richtung. Für Brechungsindizes gilt

$$n = \frac{c}{v}. \quad (4)$$

Für die weitere Beschreibung der Brechung ist die Unterteilung des Feldvektors in senkrecht und parallel zur Einfallsebene nötig. Es gilt

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}. \quad (5)$$

Zuerst wird die Komponente betrachtet, die senkrecht zur Einfallsebene schwingt und damit tangential zur Grenzfläche. Die Tangentialkomponente des Feldstärkenvektors geht stetig durch die Grenzfläche hindurch, daher gilt

$$\vec{E}_{e,\perp} + \vec{E}_{r,\perp} = \vec{E}_{d,\perp}. \quad (6)$$

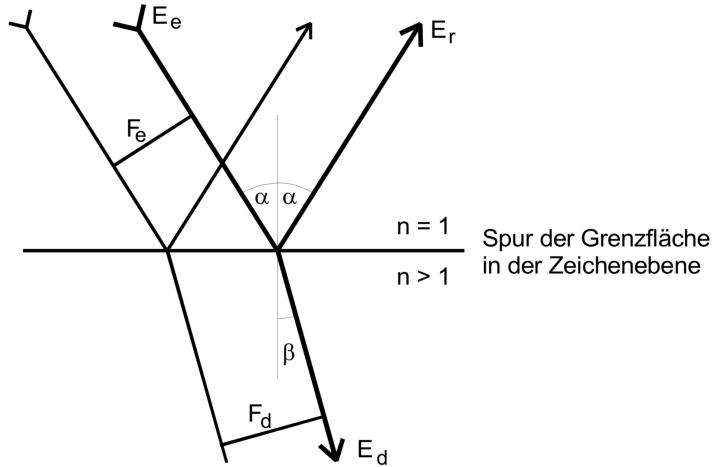


Abbildung 1: Schematische Dartstellung eines auftreffenden Lichtstrahls auf eine Grenzfläche Q[1].

Diese Relation und das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (7)$$

werden verwendet, um die Relation

$$\vec{E}_{r,\perp} = -\vec{E}_{e,\perp} \frac{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)}{n^2 - 1} \quad (8)$$

aufzustellen. Für den Fall der Komponente \vec{E}_{\parallel} ergibt sich

$$\vec{E}_{r,\parallel} = \vec{E}_{e,\parallel} \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (9)$$

Aus der Gleichung geht hervor, dass es einen Winkel gibt unter dem keine Reflexion mehr stattfindet, sondern der Lichtstrahl ganz in das Medium eindringt. Dieser Winkel ist der Brewstersche Winkel α_B . Für diesen gilt

$$\tan \alpha_B = n. \quad (10)$$

3 Durchführung

Der Versuchsaufbau ist schematisch in Abbildung (2) zu sehen. Der Versuch besteht aus einem Laser einem drehbaren Spiegel aus Silizium und einem Goniometer. Mit diesem kann die Lichtintensität in Ampere gemessen werden. Zu Beginn wird der Laser so eingestellt, dass der Strahl auf dem Spiegel auf gleicher Höhe reflektiert wird. Der Spiegel steht dabei senkrecht zum Laser. Danach wird eine Dunkelstrommessung durchgeführt,

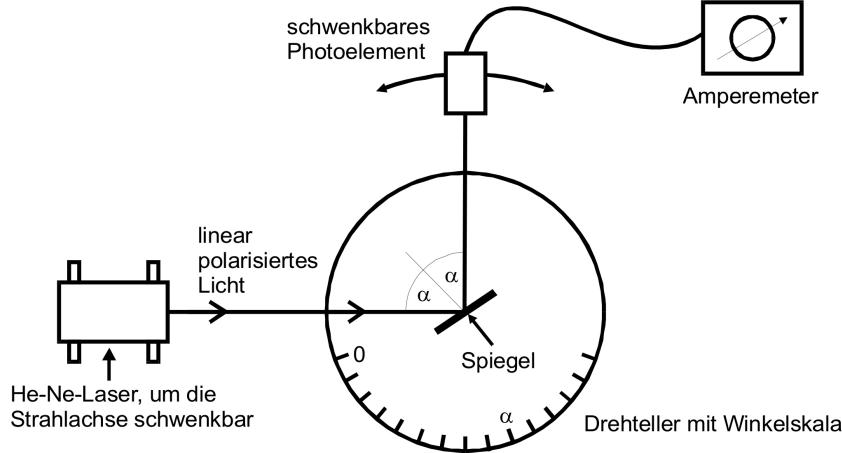


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines in der Einfallebene schwindenden Lichtstrahls. Q[1]

die die Intensität der Umgebungshelligkeit bestimmt. Dazu wird der Laser ausgeschaltet. Danach wird in einem Bereich von ungefähr 5° bis 70° in 2° Schritten der Spiegel rotiert und die Intensität des reflektierenden Laserstrahls gemessen. Ab 70° wird ein 1° Schritten die Messung fortgeführt bis der Spiegel um 80° gedreht ist. Im Anschluss wird in 2° Schritten bis mindestens 86° weitergemessen.

4 Auswertung

Die zuerst gemessenen Werte des Nullstroms I_0 und des Dunkelstroms I_D lauten

$$I_0 = 460 \mu\text{A}$$

$$I_D = 2,8 \text{nA}.$$

Während der Messung des Dunkelstroms, ist das Photoelement so positioniert worden, dass es einer maximalen Störung der Lichtquellen ausgesetzt ist. Bei der Durchführung treffen im Allgemeinen nur kleinere Störungen auf das Photoelement. Zusätzlich befindet sich die maximale Störung in einem kleinen Bereich, weswegen der Dunkelstrom im weiteren Verlauf der Auswertung vernachlässigt wird.

In der Tabelle 1 sind die gemessenen Photoströme in Abhängigkeit des Einfallswinkels α aufgelistet. Um die Brechungsindizes für s- und p-polarisiertes Licht zu bestimmen, werden die Gleichungen (8) und (9) nach n_s und n_p umgestellt. Daraus ergeben sich

$$n_s = \sqrt{\frac{E^2 - 2E \cos(2\alpha) + 1}{E^2 - 2E + 1}} \quad \text{und} \quad (11)$$

$$n_p = \sqrt{\left(\frac{1+E}{1-E}\right)^2 \frac{1}{2 \cos^2(\alpha)} + \sqrt{\frac{(1+E)^2}{4 \cos^4(\alpha)(1-E)^4} - \frac{1}{(1-E)^2} \tan^2(\alpha)}}. \quad (12)$$

Hierfür gilt

$$E = \frac{E_{\text{ref}}}{E_{\text{ein}}} = \frac{I_{\text{ref}}(\alpha)}{I_0}.$$

Tabelle 1: Gemessene Photoströme bei einem s- und p-polarisiertem Laser in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α .

| α [°] | $I_{\text{ref}, s}$ [μA] | $I_{\text{ref}, p}$ [μA] | α [°] | $I_{\text{ref}, s}$ [μA] | $I_{\text{ref}, p}$ [μA] | α [°] | $I_{\text{ref}, s}$ [μA] | $I_{\text{ref}, p}$ [μA] |
|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 6 | 6 | 14 | 38 | 24 | 20 | 70 | 110 | 3 |
| 8 | 8 | 14 | 40 | 31 | 20 | 71 | 120 | 1 |
| 10 | 7 | 15 | 42 | 28 | 20 | 72 | 120 | 2,2 |
| 12 | 10 | 15 | 44 | 39 | 20 | 73 | 130 | 1,4 |
| 14 | 6 | 14 | 46 | 38 | 20 | 74 | 140 | 0,9 |
| 16 | 11 | 11 | 48 | 47 | 20 | 75 | 140 | 0,5 |
| 18 | 10 | 16 | 50 | 46 | 20 | 76 | 130 | 0,57 |
| 20 | 10 | 16 | 52 | 55 | 19 | 77 | 150 | 0,76 |
| 22 | 12 | 16 | 54 | 64 | 17 | 78 | 140 | 1,5 |
| 24 | 15 | 17 | 56 | 70 | 16 | 79 | 160 | 2,8 |
| 26 | 12 | 17 | 58 | 70 | 16 | 80 | 150 | 4,6 |
| 28 | 17 | 18 | 60 | 80 | 14 | 82 | 170 | 10 |
| 30 | 14 | 18 | 62 | 78 | 12 | 84 | 160 | 23 |
| 32 | 19 | 19 | 64 | 90 | 10 | 86 | 190 | 43 |
| 34 | 18 | 19 | 66 | 90 | 8 | 87 | 190 | 60 |
| 36 | 26 | 19 | 68 | 110 | 5 | | | |

Die berechneten Brechungsindizes sind in der Tabelle 2 aufgeführt. Ohne die Berücksichtigung von systematischen Fehlern, ergibt sich für die gemittelten Brechungsindizes

$$\overline{n_s} = 2,1 \pm 1,1 \quad \text{und}$$

$$\overline{n_p} = 4 \pm 6.$$

Insbesondere bei dem p-polarisierten Filter handelt es sich um einen großen Fehlerbereich. Daher werden aufgrund der systematischen Fehler für das s-polarisierte Licht die Werte $n_s > 4$ und bei dem p-polarisiertem Licht alle Werte $n_p > 6$ vernachlässigt. Die daraus gemittelten Brechungsindizes sind

$$\overline{n_s} = 2,0 \pm 0,9 \quad \text{und}$$

$$\overline{n_p} = 2,4 \pm 1,1.$$

Die Messdaten sind in der Abbildung 3 dargestellt. Hierbei ist $\sqrt{I(\alpha)/I_0}$ gegen α aufgetragen. Zusätzlich sind in der Abbildung die Theoriekurven abgebildet, welche durch \bar{n}_s , \bar{n}_p sowie den Gleichungen (8) und (9) bestimmt werden. Außerdem wird anhand der Tabelle beim Minimum des p-polarisitem Lasers ein Brewsterwinkel von $\alpha_B = 75^\circ$ abgelesen. Dieser ist ebenfalls in der Abbildung 3 eingezeichnet. Anhand dieses Brewsterwinkels lässt sich über die Gleichung (10) der theoretische Brechungsindex

$$n = 3,73$$

ermitteln.

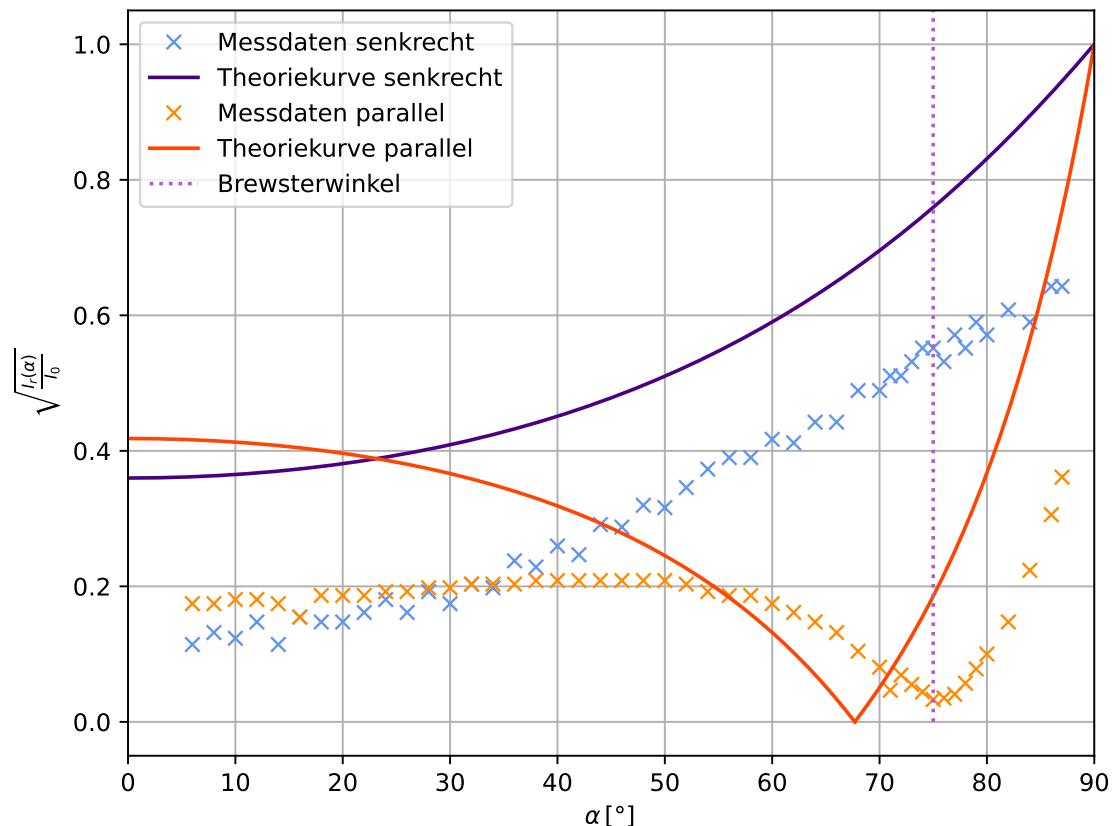


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Messwerte mit der Theoriekurve und markiertem Brewsterwinkel.

Tabelle 2: Brechnete Brechungsindizes in Abhängigkeit des Winkels und der Intensität.

| $\alpha [^\circ]$ | n_s | n_p | $\alpha [^\circ]$ | n_s | n_p | $\alpha [^\circ]$ | n_s | n_p |
|-------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|-------------------|-------|-------|
| 6 | 1,00 | 1,37 | 38 | 1,26 | 1,75 | 70 | 2,76 | 3,24 |
| 8 | 1,01 | 1,38 | 40 | 1,34 | 1,80 | 71 | 2,94 | 3,19 |
| 10 | 1,01 | 1,40 | 42 | 1,33 | 1,85 | 72 | 2,95 | 3,53 |
| 12 | 1,02 | 1,40 | 44 | 1,46 | 1,91 | 73 | 3,14 | 3,64 |
| 14 | 1,02 | 1,39 | 46 | 1,47 | 1,98 | 74 | 3,34 | 3,80 |
| 16 | 1,03 | 1,35 | 48 | 1,59 | 2,06 | 75 | 3,35 | 3,98 |
| 18 | 1,04 | 1,44 | 50 | 1,61 | 2,15 | 76 | 3,18 | 4,29 |
| 20 | 1,05 | 1,45 | 52 | 1,73 | 2,22 | 77 | 3,58 | 4,67 |
| 22 | 1,06 | 1,47 | 54 | 1,87 | 2,27 | 78 | 3,39 | 5,23 |
| 24 | 1,09 | 1,50 | 56 | 1,97 | 2,37 | 79 | 3,81 | 5,94 |
| 26 | 1,08 | 1,52 | 58 | 2,00 | 2,51 | 80 | 3,61 | 6,81 |
| 28 | 1,12 | 1,56 | 60 | 2,16 | 2,60 | 82 | 4,06 | 9,31 |
| 30 | 1,12 | 1,58 | 62 | 2,17 | 2,71 | 84 | 3,86 | 14,34 |
| 32 | 1,17 | 1,63 | 64 | 2,37 | 2,84 | 86 | 4,59 | 25,32 |
| 34 | 1,18 | 1,66 | 66 | 2,40 | 2,98 | 87 | 4,59 | 37,91 |
| 36 | 1,25 | 1,69 | 68 | 2,73 | 3,08 | | | |

5 Diskussion

Die relative Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert wird bestimmt durch

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}}.$$

Die relative Abweichung zwischen dem berechneten Brechungsindex \bar{n}_s und dem theoretischen Brechungsindex n beträgt 47,26 %. Bei dem p-polarisiertem Laser ist die relative Abweichung 34,68 %. Diese großen Abweichungen lassen sich aufgrund des Versuchsaufbau erklären. Während der Durchführung ist bereits aufgefallen, dass die Werte nicht dem Verlauf der Theoriekurve entsprechen, weswegen eine neue Messreihe mit einem anderem Polarisationsfilter durchgeführt wurde. Bei der verwendeten Messreihe, sahen vor Allem die Werte des s-polarisierten Lasers grob nach dem Verlauf der Theoriekurve aus, wodurch sich für diese Messreihe entschieden wurde. Bei der Auswertung fällt auf, dass die unbereinigten Brechungsindizes bei dem p-polarisierten Laser einen größeren Fehlerbereich nachweist. Daher könnte eine weitere Erklärung für die hohen Abweichungen, ein nicht ideal funktionierender Polarisationsfilter sein.

Literatur

- [1] Unknown. *Fresnelsche Formeln*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2024.

Anhang

Originaldaten

| V407 - Fresnelsche Formeln | | | |
|--|---|---------------|------|
| Messanfang: | -0,5° | 0° | 0,5° |
| Maximaler Distanzstrom: 0,22245 Einheit 10 Maestro Außen | | | |
| | $0,22 \cdot \frac{9}{50} = 0,28 \Rightarrow 2,8 \text{ mA}$ | | |
| $E_0 = 0,46 \text{ mA}$ | | | |
| 2° | 0° Pol nicht messbar | 90° Pol / | / |
| 4° | nicht messbar | / | / |
| 6° | 0,18 · 100 μA | 0,17 · 100 μA | |
| 8° | 0,17 · 100 μA | 0,16 · 100 μA | |
| 10° | 0,18 · 100 μA | 0,18 · 100 μA | |
| 12° | 0,16 · 100 μA | 0,16 · 100 μA | |
| 14° | 0,22 · 100 μA | 0,18 · 100 μA | |
| 16° | 0,18 · 100 μA | 0,36 · 100 μA | |
| 18° | 0,52 " | 0,32 " | " |
| 20° | 0,41 " | 0,32 " | " |
| 22° | 0,52 " | 0,30 " | " |
| 24° | 0,52 " | 0,315 " | " |
| 26° | 0,52 " | 0,30 " | " |
| 28° | 0,52 " | 0,30 " | " |
| 30° | 0,56 " | 0,26 " | " |
| 32° | 0,61 " | 0,26 " | " |
| 34° | 0,62 " | 0,30 " | " |
| 36° | 0,6 " | 0,30 " | " |
| 38° | 0,66 " | 0,28 " | " |
| 40° | 0,73 " | 0,26 " | " |

| | | | | |
|---------------|------------------------------|--------------------------------|---------------------------|------------------------|
| 42° | 0,474 | $\mu A \cdot 100$ | 0,28 | $\cdot 100 \mu A$ |
| 44° | 0,78 | " | 0,28 | " |
| 46° | 0,8 | " | 0,26 | " |
| 48° | 0,78 | " | 0,25 | " |
| 50° | 0,9 | " | 0,24 | " |
| 52° | 0,83 | " | 0,22 | " |
| 54° | 0,98 | " | 0,21 | " |
| 56° | 0,92 | " | 0,19 | " |
| 58° | 0,1 | $1 \mu A$ meas A | 0,16 | " |
| 60° | 0,1 | $m A$ | 0,14 | " |
| 62° | 0,12 | $m A$ | 0,12 | " |
| 64° | 0,12 | $m A$ | 0,1 | " |
| 66° | 0,12 | $m A$ | 0,08 | " |
| 68° | 0,12 | $m A$ | 0,06 | " |
| 70° | | | | |
| 71 | | | | |
| 72 | | | | |
| 73 | | | | |
| 74 | | | | |
| Drei Messung: | | 0° | 90° | |
| 6° | 0,05 - 10 μA | $0,1 \cdot 100 \mu A$ | 0,43 1 μA | $0,68 \cdot 100 \mu A$ |
| 8° | | $0,11 \cdot 100 \mu A$ | | $0,09 \cdot 100 \mu A$ |
| 10° | | $0,12 \cdot 100 \mu A$ | | $0,01 \cdot 100 \mu A$ |
| 12° | | $0,12 \cdot 100 \mu A$ | | $0,1 \cdot 100 \mu A$ |
| 14° | | $0,13$ " | | $0,1 \cdot 100 \mu A$ |
| 16° | | $0,13$ " | | $0,1 \cdot 100 \mu A$ |
| 18° | | $0,15$ " | | $0,12$ " |
| 20° | | $0,15$ " | | $0,12$ " |

| | 0° | 80° |
|------------|------------------------|--|
| 6° | $0,06 \cdot 100 \mu A$ | $0,14 \cdot 100 \mu A$ |
| 8° | $0,08 \cdot 100 \mu A$ | $0,14 \cdot 100 \mu A$ |
| 10° | $0,07 \cdot 100 \mu A$ | $0,15 \cdot 100 \mu A$ |
| 12° | $0,1 \cdot 100 \mu A$ | $0,15 \cdot 100 \mu A$ |
| 14° | $0,06 \cdot 100 \mu A$ | $0,14 \cdot 100 \mu A$ |
| 16° | $0,11 \cdot 100 \mu A$ | $0,11 \cdot 100 \mu A$ |
| 18° | $0,10 \cdot 100 \mu A$ | $0,16 \cdot 100 \mu A$ |
| 20° | $0,10 \cdot 100 \mu A$ | $0,16 \cdot 100 \mu A$ |
| 22° | $0,12 \cdot 100 \mu A$ | $0,16 \cdot 100 \mu A$ |
| 24° | $0,15 \cdot 100 \mu A$ | $0,17 \cdot 100 \mu A$ |
| 26° | $0,12 \cdot 100 \mu A$ | $0,17 \cdot 100 \mu A$ |
| 28° | $0,17 \cdot 100 \mu A$ | $0,18 \cdot 100 \mu A$ |
| 30° | $0,14 \cdot 100 \mu A$ | $0,18 \cdot 100 \mu A$ |
| 32° | $0,19 \cdot 100 \mu A$ | $0,19 \cdot 100 \mu A$ |
| 34° | $0,18 \cdot 100 \mu A$ | $0,19 \cdot 100 \mu A$ |
| 36° | $0,26 \cdot 100 \mu A$ | $0,19 \cdot 100 \mu A$ |
| 38° | $0,24 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 40° | $0,31 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 42° | $0,28 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 44° | $0,39 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 46° | $0,38 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 48° | $0,47 \cdot 100 \mu A$ | $0,2 \cdot 100 \mu A$ |
| 50° | $0,46 \cdot 100 \mu A$ | $0,25 \cdot 100 \mu A$ |
| 52° | $0,55 \cdot 100 \mu A$ | $0,19 \cdot 100 \mu A$ |
| 54° | $0,64 \cdot 100 \mu A$ | $0,167 \cdot 100 \mu A$ |
| 56° | $0,7 \cdot 100 \mu A$ | $0,16 \cdot 100 \mu A$ |
| 58° | $0,7 \cdot 100 \mu A$ | $0,16 \cdot 100 \mu A$ |
| 60° | $0,8 \cdot 100 \mu A$ | $0,14 \cdot 100 \mu A$ |

| | | | | |
|-------------|------|----|------|------------------|
| 62° | 0,78 | , | 0,12 | " |
| 64° | 0,08 | mA | 0,10 | " |
| 66° | 0,09 | mA | 0,08 | " |
| 68° | 0,11 | mA | 0,05 | " |
| 670° | 0,11 | " | 0,03 | " |
| 71° | 0,12 | " | 0,01 | " |
| 72° | 0,12 | " | 0,22 | $\cdot 10 \mu A$ |
| 73° | 0,13 | " | 0,14 | $\cdot 10 \mu A$ |
| 74° | 0,14 | " | 0,03 | $\cdot 10 \mu A$ |
| 75° | 0,14 | " | 0,05 | $\cdot 10 \mu A$ |
| 76° | 0,13 | " | 0,57 | $\cdot 1 \mu A$ |
| 77° | 0,15 | " | 0,76 | $\cdot 1 \mu A$ |
| 78° | 0,14 | " | 0,15 | $\cdot 10 \mu A$ |
| 79° | 0,16 | " | 0,28 | $10 \mu A$ |
| 80° | 0,15 | " | 0,46 | $10 \mu A$ |
| 82° | 0,17 | " | 0,01 | $100 \mu A$ |
| 84° | 0,16 | " | 0,23 | $100 \mu A$ |
| 86° | 0,79 | " | 0,43 | $100 \mu A$ |
| 87° | 0,19 | " | 0,60 | $100 \mu A$ |

✓ 62