V101

Das Trägheitsmoment

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2023

Abgabe: 28.11.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist das Trägheitsmoment von unterschiedlichen rotierenden Objekten zu bestimmen. Zudem wird der Satz von Steiner überprüft.

2 Theorie

Rotationsbewegungen lassen sich mit Hilfe des Drehmoments M, des Trägheitsmoment I und der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ beschreiben. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse, mit der Masse m und dem Abstand r zu einer Drehachse, lässt wird wie folgt bestimmt:

$$I = m \cdot r^2 \,. \tag{1}$$

Bei einer Rotation eines ausgedehnten Körpers bewegen sich alle Masseelemente mit einer Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ um eine feste Drehachse. Dabei gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \,. \tag{2}$$

Hier beschreibt r_i den Abstand der einzelnen Masselemente m_i zur festen Drehachse. Für infinitesimale Massen gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \int r^2 \, dm \,. \tag{3}$$

Um bei einem komplexen Körper das Trägheitsmoment zu bestimmen, wird dieser häufig in geometrisch einfache Formen aufgeteilt, dessen Trägheitsmomente zu einem Gesamtträgheitsmoment addiert werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Trägheitsmomente der jeweiligen Formen sich auf dieselbe Drehachse beziehen. Somit hängt das Drehmoment von der Lage der Drehachse ab.
Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft und stattdessen parallel mit einem Abstand a zu einer Schwerpunktachse verläuft, dann lässt sich mit Hilfe des Satz von Steiner das Trägheitsmoment berechnen.

$$I = I_\mathrm{S} + m \cdot a^2 \tag{4}$$

I_S beschreibt das Trägheitsmoment, das sich auf die Schwerpunktachse des Körpers bezieht, und m ist die Masse des Körpers. Das Drehmoment ist beschrieben durch:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \;\text{ bzw.} \tag{5}$$

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\varphi) \;, \tag{6}$$

wobei $\vec{F}$ bzw. F die Kraft angibt, die auf den rotierenen Körper wirkt, $\vec{r}$ bzw. r der Abstand zur Drehachse ist und der Winkel φ die Auslenkung zur Ruhelage beschreibt.
In einem schwingfähigen System wirkt dem Auslenkungswinkel φ ein rücktreibendes

Drehmoment entgegen. Ein solches System erzeugt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,. \tag{7}$$

Hier beschreibt D die Winkelrichtgröße und I das Trägheitsmoment. Das wirkende Drehmoment wird mit Hilfe der Winkelrichtgröße D wie folgt ausgedrückt:

$$M = D \cdot \varphi\,. \tag{8}$$

Die Winkelrichtgröße berechnet sich durch:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}\,. \tag{9}$$

2.1 Spezifische Trägheitsmomente

Die umgestellte Gleichung (7) nach I ergibt:

$$I = \frac{T^2 \cdot D}{(2\pi)^2}\,. \tag{10}$$

Das Trägheitmoment einer Kugel mit der Masse m und dem Radius r wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{2}{5} m \cdot r^2\,. \tag{11}$$

Das Trägheitsmoment eines Zylinders mit der Masse m und dem Radius r ist gegeben durch:

$$I_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot r^2}{2} \tag{12}$$

$$I_{\mathrm{Zh}} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)\,. \tag{13}$$

2.2 Vorbereitungsaufgaben

In der Vorbereitungsaufgabe soll das Drehmoment M zu 10 unterschiedlichen Abständen bestimmt werden. Hierbei wirkt eine Kraft $F = 0.1\,\mathrm{N}$ einmal mit einem Winkel $\varphi = 90°$ und einmal mit einem Winkel $\varphi = 45°$ auf eine Stange. Das Drehmoment wird mit Hilfe der Gleichung (6) berechnet.

Tabelle 1: Vorbereitungsaufgabe

	$\varphi = 90°$	$\varphi = 45°$
r [m]	M $\left[10^{-3}\mathrm{N\,m}\right]$	M $\left[10^{-3}\mathrm{N\,m}\right]$
0,05	5	3,5355
0,07	7	4,9498
0,09	9	6,3640
0,11	11	7,7782
0,13	13	9,1924
0,15	15	10,6066
0,17	17	12,0208
0,19	19	13,4350
0,21	21	14,8492
0,24	24	16,9706

3 Versuchsaufbau

Das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern wird mit Hilfe einer Drillachse bestimmt. Dafür wird der Körper auf eine zweifach in einem Rahmen drehbare Achse besfestigt. Diese ist über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden. Nachdem die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse bekannt ist, lassen sich anhand der Schwingungsdauer T der unterschiedlichen Körper die jeweiligen Trägbeitsmomente bestimmen.

4 Durchführung

4.1 Apparaturkonstanten der Drillachse

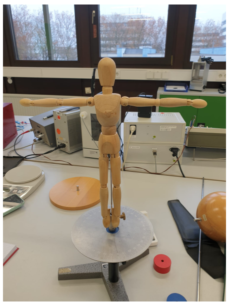
Die Winkelrichtgröße D der Drillachse wird bestimmt, indem an dem Auslenkstab ein Newtonmeter im einem Abstand von ca. 20 cm von der Mitte befestigt wird. Der Auslenkstab wird nun um den Winkel φ ausgelenkt, wobei zu beachten ist, dass das Newtonmeter senkrecht zum Stab ausgerichtet ist. Die aufzuwendene Kraft der Feder wird nun für zehn verschiedene Winkel notiert. Für die Berechnung der Drillachse I_D werden an beiden Seiten des Auslenkstabs Zylinder befestigt, welche den selben Abstand zur Mitte sowie ungefährt die selbe Masse und Größe haben. Diese werden um 90° ausgelenkt und die fünffache Schwingungsdauer $5T$ wird gemessen. Diese Messung wird jeweils für zehn verschiedene Abstände durchgeführt.

4.2 Trägheitsmoment zwei verschiedener Körper

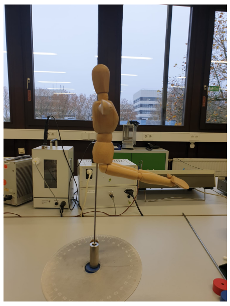
Für die Bestimmung der Trägheitsmomente von zwei verschiedenen Körpern, werden die Körper an der Drillachse befestigt und umd 90° ausgelenkt. Dabei wird zehnmal die fünfache Schwingungsdauer $5T$ gemessen. Anschließend lassen sich die Trägheitsmomente der Körper mit der Winkelrichtgröße D und der Eigenträgheitsmoment I_{D} berechnen.

4.3 Trägheitsmoment der Puppe

Zunächst wird der Körper der Puppe gemessen. Hierzu werden die Beine, die Arme, der Körper und der Kopf als Zylinder genährt. Daher werden die Höhe und der Durchmesser der einzelnen Körperteile gemeessen. Das Trägheitsmoment der Puppe wird für zwei verschiedene Körperstellungen bestimmt. Für die erste Position sind die Arme der Puppe horizontal ausgestreckt. Für die zweite Position sind zusätzlich die Beine in einem Winkel von 90° ausgestreckt. Für beide Körperhaltungen wird die Puppe um 90° ausgelenkt und jeweils fünfmal die fünffache Schwingungsdauer $5T$ gemessen. Zusätzlich wird die Puppe in beiden Positionen um 120° ausgelenkt und dabei wird erneut jeweils fünfmal die fünffache Schwingungsdauer $5T$ gemessen.



(a) 1. Position der Puppe.



(b) 2. Position der Puppe.

Abbildung 1: Beide Körperhaltungen der Puppe.

5 Auswertung

5.1 Berechnung der Winkelrichtgröße D

Um die Winkelrichtgröße D zu bestimmen, wird die Kraft F in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels φ bei festem Abstand von $0{,}19975\,\mathrm{m}$, vermerkt in Tabelle (2), verwendet. Die Winkelrichtgröße D wird durch Gleichung (9) bestimmt und ist ebenfalls in Tabelle (2) eingetragen. Im Folgenden werden Mittelwerte aus einer Messwerttabelle gebildet. Diese Mittelwerte werden durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

berechnet. n ist dabei die Anzahl der Messungen aus der der Mittelwert bestimmt wird. Der Mittelwertsfehler wird durch

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}$$

berechnet. Bei Größen, die von mehreren fehlerbehafteten Größen abhängig sind, wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

zur Berechnung des Fehlers verwendet. Das mithilfe dieser Formeln gemittelte Ergebnis von D ist $\bar{D} = (21,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-3}$ N m.

Tabelle 2: Kraft in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel

φ [°]	F [N]	D [N m]
20	0,026	0,0149
30	0,050	0,0191
40	0,068	0,0195
50	0,090	0,0206
60	0,120	0,0229
70	0,136	0,0222
80	0,156	0,0223
90	0,184	0,0234
100	0,200	0,0229
110	0,210	0,0218

5.2 Berechnung des Eigenträgheitmoments

Um das Eigenträgheitsmoment der Drillachse I_{Drill} zu bestimmen, wurde die fünffache Periodendauer T in Abhängigkeit vom Abstand a bei einer Auslenkung von 90° gemessen. Diese Messwerte sind in Tabelle (3) vermerkt.

Tabelle 3: Fünffache Periodendauer T in Abhängigkeit vom Abstand a

a [m]	$5 \cdot T$ [s]
0,050	14,40
0,075	16,57
0,100	18,60
0,125	21,41
0,150	30,10
0,175	26,78
0,200	29,94
0,225	32,75
0,250	36,60
0,300	42,50

I_{Drill} wird durch die Verbindung

$$I_{\text{gemessen}} = I_{\text{Drill}} + 2 \cdot I_{\text{Zh, verschoben}}$$

berechnet. Dabei ist

$$I_{\text{Zh, verschoben}} = I_{\text{Zh}} + m \cdot a^2$$

nach Satz von Steiner.
Mithilfe der Gleichung (10) können I_{Drill} und T^2 durch

$$I_{\text{Drill}} = \frac{T^2 \cdot D}{(2\pi)^2} - 2 \cdot \left(m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + m \cdot a^2 \right) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{8\pi^2 \cdot m}{D} \cdot a^2 + \frac{4\pi^2 \cdot I_{\text{Drill}}}{D} + \frac{8\pi^2 \cdot m}{D} \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \tag{15}$$

ausgedrückt werden. In Abbildung (2) wird T^2 gegen a^2 aufgetragen und durch lineare Regression der Form $y = m_{\text{St}} \cdot x + n$ werden m_{St} und n bestimmt. m_{St} beträgt $713,1192\ \text{s}^2/\text{m}^2$ und n beträgt $8,564\ \text{s}^2$.

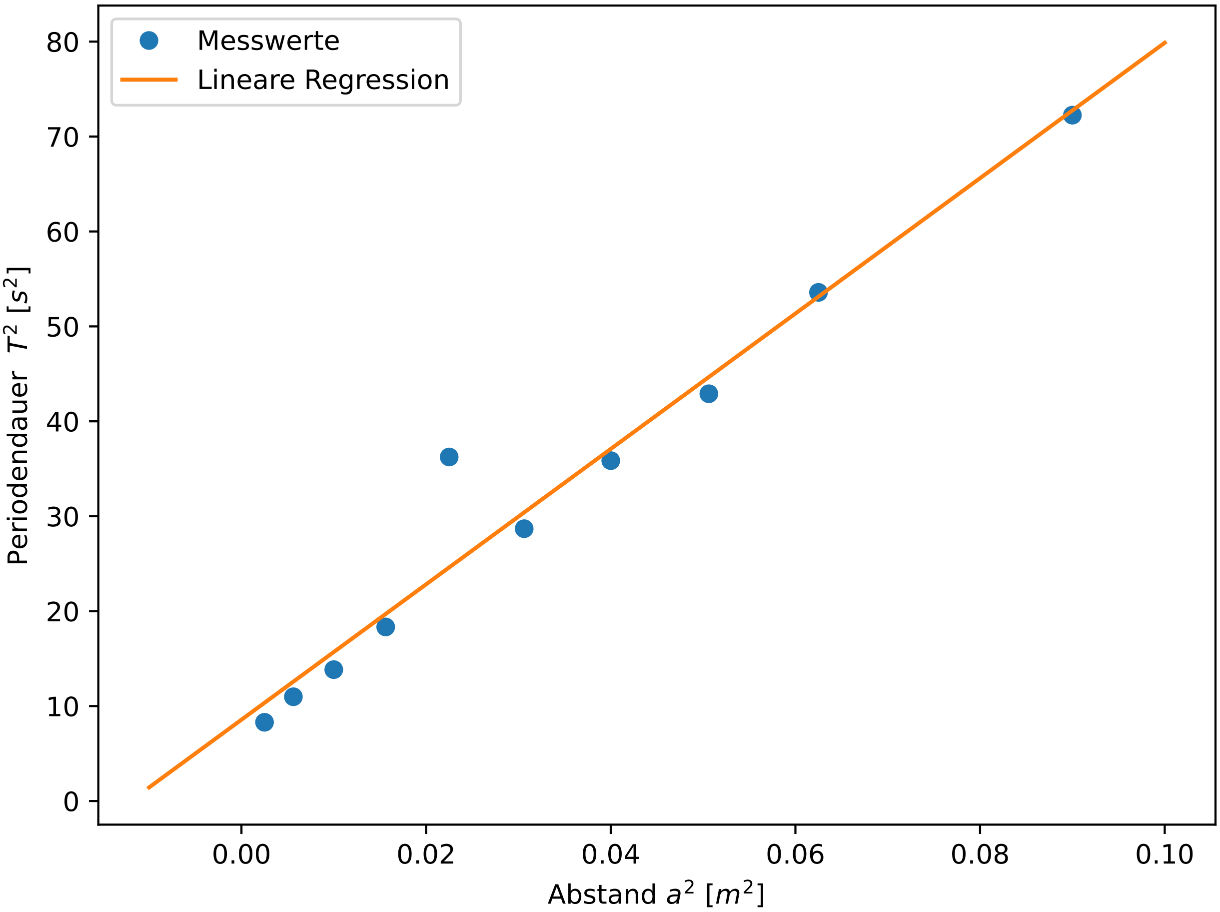


Abbildung 2: Auftragung von Periodenzeit T^2 gegen Abstand a^2 mit linearer Regression.

Mithilfe dieser Regression und der obrigen Gleichung lässt sich das Eigenträgheitsmoment I_{Drill} wie folgt bestimmen:

$$I_{\text{Drill}} = \frac{D \cdot n}{4\pi^2} - \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 - \frac{1}{6} \cdot m \cdot h^2 \tag{16}$$

r bezeichnet dabei den Radius und h die Höhe der zylindischen Gewichte, die für die Messung verwendet wurden. Die Messungen dieser beiden Größen werden in Tabelle (4) und (5) aufgeführt. Für die Rechnung wird der Mittelwert beider Gewichte $r = (22,550 \pm 0,010) \cdot 10^{-3}$ m und $h = (20,334 \pm 0,008) \cdot 10^{-3}$ m verwendet.

Tabelle 4: Messungen der Höhe und des Durchmessers des blauen Gewichts

Höhe [m]	Durchmesser [m]
0,02034	0,0450
0,02030	0,0451
0,02030	0,0451
0,02032	0,0451
0,02030	0,0451

Tabelle 5: Messungen der Höhe und des Durchmessers des roten Gewichts

Höhe [m]	Durchmesser [m]
0,02038	0,04506
0,02036	0,04510
0,02032	0,04510
0,02036	0,04518
0,02036	0,04516

Dies ergibt ein Eigenträgheitmoment I_{Drill} von $(4,46 \pm 0,18) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

5.3 Eigenträgheitmoment der Kugel

5.3.1 Theoretischer Wert

Das Eigenträgheitmoment der Kugel I_{K} kann durch Gleichung (11) berechnet werden. $r = d/2$ ist dabei der aus dem Mittelwert der gemessenen Durchmesser berechnete Wert $r = (146,61 \pm 0,20) \cdot 10^{-3}$ m. Die gemessenen Durchmesser sind in Tabelle(6) dargestellt. m ist $1,1742$ kg.

Tabelle 6: Gemessene Durchmesser der Kugel

Durchmesser [m]
0,14660
0,14590
0,14660
0,14685
0,14710

Damit beträgt der Theoriewert des Trägheitsmoment der Kugel $(2,524 \pm 0,007) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

5.3.2 Gemessener Wert

Die für die Rechnung benötigte Periodendauer der Kugel ist in Tabelle(7) dargestellt. Sie wurde bei fester Auslenkung um 90° gemessen.

Tabelle 7: Gemessene fünfache Periodendauer der Kugel

Periodendauer [s]
9,53
9,50
9,35
9,72
9,40
9,53
9,38
9,31
9,32
9,44

Der Mittelwert einer Periodendauer $T_{\mathrm{K}} = (1,890 \pm 0,008)$ s wurde für die Berechnung des Trägheitsmomentes $I_{\mathrm{K,\ gemessen}}$ mithilfe von Gleichung (10) verwendet. $I_{\mathrm{K,\ gemessen}}$ ist $(1,90 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{kg\,m^2}$.

5.4 Eigenträgheitmoment der Schiebe

5.4.1 Theoretischer Wert

Das Eigenträgheitmoment der Scheibe kann durch Gleichung (12) berechnet werden. m beträgt $0,4237$ kg. Das zur Berechnung verwendete r wurde aus dem Mittelwert der Messungen des Durchmessers berechnet. Die Messungen der Durchmesser sind in Tabelle (8) vermerkt. Das mithilfe dieser Werte berechnete, theoretische Trägheitsmoment der Scheibe ist $I_{\mathrm{S}} = (2,552 \pm 0,006) \cdot 10^{-3}$ $\mathrm{kg\,m^2}$.

Tabelle 8: Gemessene Durchmesser der Scheibe

Durchmesser [m]
0,22010
0,21890
0,22010
0,21920
0,21915

5.4.2 Gemessener Wert

Der gemessene Wert des Trägheitmoment der Scheibe $I_{\text{S, gemessen}}$ wird mithilfe der Gleichung (10) berechnet. T ist dabei der Mittelwert der einfachen Periodendauer. Die gemessene fünffache Periodendauer ist in Tabelle (9) dargestellt.

Tabelle 9: Gemessene fünfache Periodendauer der Scheibe

Periodendauer [s]
9,28
9,22
9,31
9,34
9,37
9,31
9,56
9,31
9,44
9,31

Für $I_{\text{S, gemessen}}$ wird der Wert $(1,85 \pm 0,07) \cdot 10^{-3}$ kg m^2 berechnet.

5.5 Trägheitsmoment der Puppe

5.5.1 1. Position der Puppe

Theoretischer Wert

Zur Berechnung des Trägheitsmoments der Puppe in Position 1 werden eine Reihe von Vereinfachungen angenommen. Der Kopf wird genauso wie die Arme, Beine und der Torso als zylindrisch angenommen und die Dichte als homogen. Der Durchmesser der einzelnen Zylinder wird als Mittelwert der Messungen der Durchmesser angenommen. Diese Messungen sind in Tabelle (10) aufgeführt.

Tabelle 10: Gemessene Durchmesser der einzelnen Puppenteile

Kopf [m]	Arm [m]	Torso [m]	Bein [m]
0,02726	0,00824	0,02330	0,01900
0,02786	0,01480	0,02708	0,01734
0,01510	0,01200	0,03874	0,01178
0,01650	0,01412	0,03230	0,01514
0,02300	0,01520	0,03834	0,01694
	0,01138	0,04230	0,01304
	0,01270	0,04020	0,00924
	0,01020	0,03600	0,01708
	0,01180	0,03472	0,01620
	0,01384	0,03800	0,01344

Mithilfe der gemittelten Durchmesser werden die Volumina der einzelnen Körperteile berechnet, um dadurch die Masse der Einzelteile zu bestimmen. Bei dieser Berechnung wird angenommen, dass die Dichte der Puppe homogen ist. Die Volumina der Puppenteile können durch

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

berechnet werden. r ist dabei der Radius der Zylinder und h die Höhe. Das berechneten Volumen der Puppenteile, sowie die daraus anteilig am Gesamtgewicht von $0,1696$ kg bestimmte Massen sind in Tabelle (11) und (12) gelistet.

Tabelle 11: Volumina der Puppenteile

Kopf [10^{-5} m^3]	Arm [10^{-5} m^3]	Torso [10^{-5} m^3]	Bein [10^{-5} m^3]
0,017 ± 0,004	1,66 ± 0,18	9,50 ± 1,0	3,0 ± 0,4

Tabelle 12: Massen der Puppenteile

Kopf [kg]	Arm [kg]	Torso [kg]	Bein [kg]
0,017 ± 0,004	0,0136 ± 0,0015	0,078 ± 0,006	0,017 ± 0,004

Mithilfe dieser Massen wird das Trägheitsmoment der einzelnen Puppenteile bestimmt, woraus sich das Gesamtträgheitsmoment der Puppe in Position 1 zusammensetzt. Da alle Gliedmaße als Zylinder genähert wurden, werden die Trägheitsmoment durch Formel (12) für den Kopf, den Torso und die Beine und Formel (13) für die vom Torso ausgestrecken Arme berechnet. Für die Berechnung des Trägheitsmomentes der Beine und Arme wird der Satz von Steiner angewandt. Der dabei verwendete Abstand beträgt bei den Beinen näherungsweise den Radius der Beine und bei den Armen die Summe aus dem Radius des Torsos und der Hälfte der Höhe der Arme. Diese Werte führen zu einem theoretischen Trägheitsmoment der Puppe in Position 1 $I_{\text{Pos1,theo}}$ von $(0,262 \pm 0,025) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

Gemessener Wert

Die gemessenen, fünffachen Periodendauern der Puppe in Position 1 sind in Tabelle (13) vermerkt, unterschieden nach Auslenkung um 90° und 120°.

Tabelle 13: Fünfache Periodendauer der Puppe in Position 1

T bei Auslenkung um 90° [s]	T bei Auslenkung um 120° [s]
3,10	3,15
3,06	3,06
3,06	3,19
3,03	3,00
3,03	3,03

Da der Mittelwert der Periodendauer bei Auslenkung um 90° und 120° annähernd gleich sind, wird davon ausgegangen, dass keine Abhängigkeit der Periodendauer von der Auslenkung besteht und beide Messungen zusammengefasst betrachtet werden können. Der allgemeine Mittelwert der Periodenauer T ist daher $T = 0,614 \pm 0,004$ s. Mithilfe dieses Mittelwertes und Formel (10) wird das Trägheitsmoment der Puppe in Position 1 I_{Pos1} berechnet. I_{Pos1} ist $(0,2 \pm 0,008) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

5.5.2 Position 2 der Puppe

Bei Position 2 der Puppe wurde vereinfachend angenommen, dass beide Beine im Winkel von 90° vom Torso wegzeigen. Die Armposition ist dieselbe wie bei Position 1 der Puppe.

Theoretischer Wert

Für die Berechnung des theoretischen Wertes des Trägheitsmoments der Puppe in Position 2 können die bereits berechneten Trägheitsmomente der Arme, des Kopfes und des Torsos übernommen werden, da ihre Position keine Veränderung aufweist. Neu berechnet werden hingegen die Trägheitsmomente der Beine. Für die Berechnung dieser wird Formel (13) und der Satz von Steiner verwendet. Das theoretisch berechnete Trägheitsmoment der Puppe in Position 2 $I_{\text{Pos2,theo}}$ beträgt demnach $(0,72 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

Gemessener Wert

Wie bereits bei Position 1 festgestellt, hängt die Periodendauer nicht von der Auslenkung ab. Daher werden auch bei Position 2 beide Messwertreihen zusammen betrachtet. Die gemessene fünfache Periodendauer ist trotzdessen in Tabelle (14) nach Auslenkungswinkel getrennt aufgeführt.

Tabelle 14: Fünfache Periodendauer der Puppe in Position 2

T bei Auslenkung um 90° [s]	T bei Auslenkung um 120° [s]
4,72	4,85
4,87	4,90
4,84	4,81
4,69	4,87
4,69	4,85

Der Mittelwert der Periodenauer T ist $T = (0,962 \pm 0,004)$ s. Mithilfe dieses Mittelwertes und Formel (10) wird das Trägheitsmoment der Puppe in Position 2 I_{Pos2} berechnet. I_{Pos2} ist $(0,491 \pm 0,020) \cdot 10^{-3}$ kg m^2.

6 Diskussion

7 Originaldaten