V106

Gekoppelte Pendel

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2023

Abgabe: 05.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Schwingdauer, Schwebungsdauer und die Kopplungskonstante K gekoppelter Pendel bei verschiedener Schwingungsformen zu bestimmen. Es werden gleichsinnige Schwinung, gegensinnige Schwingung und gekoppelte Schwingung betrachtet.

2 Theorie

Zunächst wird ein einzelnens ungekoppeltes Fadenpendel mit Fadenlänge l betrachtet. Wird die Masse am Stab aus der Ruhelage ($\varphi = 0$) ausgelenkt, wirkt die Gravitationskraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ als Rückstellkraft der Bewegung entgegen. Dies bewirkt ein Drehmoment $M = D_{\mathrm{P}} \cdot \varphi$ auf das Pendel. φ ist dabei der Auslenkungswinkel aus der Ruhelage und D_{P} die Winkelrichtgröße des Pendels. Die das System beschreibende Differentialgleichung lautet für die angenommene Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) = \varphi$ für $\varphi \leq 10°$

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D_{\mathrm{P}} \cdot \varphi = 0\,.$$

J bezeichnet das Trägheitsmoment des Pendels. Diese Differentialgleichung ist die des harmonischen Oszillators und beschreibt eine harmonische Schwingung mit Schwingfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_{\mathrm{P}}}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Die Periodendauer T und die Schwingfrequenz ω sind verbunden durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ bzw.} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{2}$$

Zwei identische Pendel, die durch eine Feder mit Federkonstante K gekoppelt sind, haben eine andere Bewegungsgleichung. Auf jeden Pendel wirkt dann ein zusätzliches Drehmoment. Auf das eine Pendel wirkt $M_1 = D_{\mathrm{F}} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$ und auf das andere wirkt $M_2 = D_{\mathrm{F}} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$. Durch diese Kopplung entstehen die beiden gekoppelten Differentialgleichungungen

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 &= D_{\mathrm{F}} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 &= D_{\mathrm{F}} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)\ , \end{aligned}$$

die das System vollkommen beschreiben. Mithilfe eines geeigneten Winkels können die Gleichungen entkoppelt werden, sodass sich das System als Überlagerung von zwei Eigenschwingungen darstellen lässt. Diese Eigenschwingungen sind harmonische Schwingungen mit Frequenz ω_1 und ω_2. Je nach Auslenkungswinkel α_1 und α_2 der Pendel beim Zeitpunkt $t = 0$ entstehen verschiedene Schwingungsarten.

Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, schwingt das Pendel gleichsinnig. Bei dieser Bewegung übt die Feder keine Kraft aus, da sie durch die gleich große Auslenkung beider Pendel, weder gestreckt noch gestaucht wird. Beide Pendel schwingen daher gleich und identisch zu einem ungekoppelten Fadenpendel, welches um denselben Winkel ausgelenkt wurde. Daher ist die Schwingfrequenz ω_+ bei diesen konkreten Anfangsbedingungen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \tag{3}$$

dieselbe wie bei einem ungekoppelten Fadenpendel.
Bei einer gegensinnigen Schwingung ist $\alpha_1 = -\alpha_2$. Die Kopplungsfeder übt dann eine gleich große Kraft auf die Pendel aus. Die Kraft zeigt immer zur Mitte zwischen den beiden Pendeln. Die Schwingung bei diesen Anfangsbedingungen ist symmetrisch. Die Frequenz ω_- wird durch

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1+\mathrm{K}}{1-\mathrm{K}}} \tag{4}$$

berechnet. Falls nur ein Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt wird, heißt die entstandene Bewegung gekoppelte Schwingung. Dann gilt für die Auslenkungen $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$. Für $t > 0$ führt das zweite Pendel eine Schwingung aus, ähnlich zu der eines ungekoppelten Fadenpendels. Im fortschreitender Zeit wird die Pendelbewegung des zweiten Pendels langsamer bis dieses vollkommen still steht. Während die Schwiungung des zweiten Pendels langsamer wird, nimmt die des ersten Pendels zu bis es die maximale Auslenkung erreicht, wenn das zweite Pendel stillsteht. Dieses Muster wiederholt sich dauerhaft. Diese Bewegung kommt dadurch zustande, dass die Feder für eine Energieübertragung zwischen den Pendeln sorgt. Die zwischen zwei Stillständen eines Pendels vergangene Zeit nennt man Schwebung. Die Schwebungsfrequenz ω_S wird durch

$$\omega_\mathrm{S} = \omega_+ - \omega_- \tag{5}$$

berechnet. Die sich daraus ergebene Schwebedauer T_S ist

$$T_\mathrm{S} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}\,. \tag{6}$$

2.1 Vorbereitungsaufgaben

Wann spricht man von einer harmomischen Schwingung?
Eine Schwingung ist dann harmonisch, wenn die rücktreibende Kraft linear ist (d.h. proportional zur Auslenkung) und sich die Bahnkurve als Cosinus bzw. Sinus beschrieben werden kann, d.h. die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung ist.

Wie weit kann man ein Fadenpendel von $l = 70$ cm auslenken, damit die Kleinwinkelnäherung noch gilt?
Bei der Kleinwinkelnäherung ist es ausschlaggebend, dass der Winkel α möglichst keinen

Wert über 10° annimmt, damit die Taylorentwicklung des $\sin(\alpha)$ mit Entwicklungspunkt $\alpha = 0$ noch gültig ist. Der Winkel α im Fadenpendelsystem kann durch

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{l}$$
$$\Leftrightarrow x = \sin(\alpha) \cdot l$$

ausgdrückt werden. x ist dabei die Auslenkung aus der Ruhelage, senkrecht zur Ruhelage. Einsetzen von $\alpha = 10°$ und $l = 70$ cm ergibt eine maximale Auslenkung von $x = 12,16$ cm.

3 Auswertung

3.1 Kurzes Pendel

Zunächst werden die beiden Schwingungen der einzelnen Pendel bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$ verglichen. Die gemessene fünffache Schwingungsdauer $5\,T$ des linken als auch des rechten Pendels sind in der Tabelle (1) aufgelistet.

Tabelle 1: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$

linkes Pendel $5\,T_{\mathrm{l},1}$ [s]	rechtes Pendel $5\,T_{\mathrm{r},1}$ [s]
6,21	6,19
6,07	6,24
6,15	6,24
6,19	6,30
6,24	6,05
6,10	6,15
6,22	6,18
6,14	6,18
6,19	6,14
6,35	6,25

Aus dieser Tabelle und mit den Gleichungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}$$

lassen sich die Mittelwerte sowie die Standardabweichungen des Mittelwerts bestimmen. x_i beschreibt die einzelnen Messdaten und n die Anzahl der Messungen. Somit ergeben sich die Schwingungsdauern

$$T_{\text{l,exp.,1}} = (1,237 \pm 0,005)\ \text{s}$$
$$T_{\text{r,exp.,1}} = (1,238 \pm 0,004)\ \text{s}\,.$$

Aufgrund der Fehlertolernz werden die beiden Pendel als identisch angenommen. Daher werden im Folgenden drei verschiedene Schwingungsarten untersucht.

3.1.1 Gleichphasige Schwingung

Die gemessene fünffache Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung sind in der Tabelle (2) aufgeführt.

Tabelle 2: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $32,5\,\text{cm}$ und gleichphasiger Schwingung.

$5\,T_{+,1}$ [s]
5,97
5,88
5,92
5,98
5,97
5,99
5,95
6,02
6,10
5,93

Die aus der Tabelle (2) hergeleitete gemittelte Schwingungsdauer mit der Standardabweichung lautet

$$T_{+,\text{exp.1}} = (1,194 \pm 0,004)\ \text{s}\,.$$

Mit der Gleichung (**??**) wird die theoretische Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung bestimmt. Daraus folgt

$$T_{+,\text{theo.},1} = 1,144\,\text{s}\,.$$

Aus der Gleichung (**??**) und der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta\omega = \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T^2}\cdot\Delta T\right)^2}$$

wird, durch Einsetzen von $T_{\mathrm{gl},1}$, die Schwingungsfrequenz

$$\omega_{+,\mathrm{exp}.1} = (5,261 \pm 0,017)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

berechnet. Anhand der Gleichung (**??**) wird die theoretische Schwingungsfreqeunz der gleichphasigen Schwingung

$$\omega_{+,\mathrm{theo.},1} = 5,494\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

bestimmt.

3.1.2 Gegenphasige Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern der gegenphasigen Schwingung bei einer Länge von 32, 5 cm sind in der Tabelle (3) aufgeführt.

Tabelle 3: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von 32, 5 cm und gegenphasiger Schwingung.

$5\,T_{-,1}$ [s]
5,10
5,20
5,13
5,45
5,08
5,06
5,08
5,06
5,30
5,10

Anhand dieser Daten lässt sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung berechnet. Somit ergibt sich

$$T_{-,\mathrm{exp.},1} = (1,031 \pm 0,008)\ \mathrm{s}\,.$$

Für die Bestimmung der theoretischen Schwingungsdauer und Schwingungsfrequenz einer gegenphasigen Schwingung wird die Kopplungskonstante K benötigt. Da diese nicht gegeben ist, wird die Kopplungskonstante durch Einsetzen von $T_{+,1}$ und $T_{-,1}$ in die Gleichung (**??**) berechnet. Die Messusicherheit der Kopplungskonstante ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot T_+ \cdot T_-^2}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \Delta T_+\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot T_+^2 \cdot T_-}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \Delta T_-\right)^2}$$

Daraus folgt

$$K_1 = (0,146 \pm 0,008)\ .$$

Anschließend lässt sich die theoretische Schwingungsdauer mit Hilfe der Gleichung (**??**) bestimmen. Diese lautet

$$T_{-,\text{theo.},1} = (0,988 \pm 0,008)\ \text{s}\,.$$

Die empirische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\text{exp}.1} = (6,09 \pm 0,05)\ \frac{1}{\text{s}}$$

wird durch $T_{-,1}$ und der Gleichung (**??**) berechnet. Aus der Gleichung (**??**) ergibt sich die folgendene theoretische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\text{theo},1} = (6,36 \pm 0,05)\ \frac{1}{\text{s}}\,.$$

3.1.3 Gekoppelte Schwingung

In der Tabelle (4) sind die Schwingungsdauer und die Schwebung einer gekoppelten Schwingungen aufgelistet.

Tabelle 4: Gemessene fünffache Schwingungsdauer und Schwebung bei einer Länge von 32,5 cm und gekoppelter Schwingung.

$5\,T_1$ [s]	$5\,T_{\text{S},1}$ [s]
5,09	35,53
4,93	35,94
4,76	35,56
5,03	35,58
5,56	35,63
5,20	35,58
5,69	35,50
5,70	35,44
6,50	35,55
6,46	35,64

Aus dieser Tabelle lässt sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung

$$T_{1,\text{exp.}} = (1,10 \pm 0,04)\ \text{s}$$

bestimmen. Durch Einsetzen der Schwingungsdauer T_1 in die Gleichung (**??**) ergibt sich die Schwingungsfreqeunz

$$\omega_{1,\text{exp.}} = (5,72 \pm 0,20)\ \frac{1}{\text{s}}\,.$$

Anhand der Messwerte aus der Tabelle (4) wird die gemittelte Schwebung und die Standardabweichung

$$T_{\mathrm{S,exp.,1}} = (7,119 \pm 0,009)\ \mathrm{s}$$

berechnet. Der theoretische Wert berechnet sich mit der Gleichung (**??**) und beträgt

$$T_{\mathrm{S,theo,1}} = (7,2 \pm 0,4)\ \mathrm{s}$$

Die aus der Gleichung (**??**) ermittelte Schwingungsfreqeunz der Schwebung lautet

$$\omega_{\mathrm{S,exp.,1}} = (0,8826 \pm 0,0011)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

Mithilfe der Gleichung (**??**) wird die theoretische Schwingungsfreqeunz berechnet. Der Betrag davon lautet

$$\omega_{\mathrm{S,theo.,1}} = (0,87 \pm 0,05)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

3.2 Langes Pendel

Zunächst werden erneut beide einzel Schwingungen bei einer Länge von 65,3 cm miteinander verglichen. Die dafür gemessenen Schwingungsdauern sind in der Tabelle (5) aufgeführt.

Tabelle 5: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von 65,3 cm

linkes Pendel $5\,T_{\mathrm{l,2}}$ [s]	rechtes Pendel $5\,T_{\mathrm{r,2}}$ [s]
7,99	7,96
8,04	7,96
7,96	8,11
7,99	7,97
8,04	7,96
8,17	8,04
7,92	8,14
7,94	8,16
7,89	7,97
8,18	8,14

Aus der Tabelle ergeben sich die gemittelten Schwingungsdauern und deren Standardabweichung

$$T_{\mathrm{l,exp.,2}} = (1,602 \pm 0,006)\ \mathrm{s}$$
$$T_{\mathrm{r,exp.,2}} = (1,608 \pm 0,006)\ \mathrm{s}\,.$$

Aufgrund der Fehlertoleranz werden die beiden Pendel erneut als identisch angenommen und die drei verschiedene Schwingungsarten untersucht.

3.2.1 Gleichphasige Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern einer gleichphasigen Schwingung bei einer Länge von $65,3\,\text{cm}$ sind in der Tabelle (**??**) aufgelistet.

Tabelle 6: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $65,3\,\text{cm}$ und gleichphasiger Schwingung.

$5\,T_{+,2}$ [s]
7,82
8,09
7,70
8,06
7,83
7,95
7,65
7,72
7,72
7,83

Aus diesen Werten ergibt sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung

$$T_{+,\text{exp.},2} = (1,567 \pm 0,010)\ \text{s}\,.$$

Die theoretische Schwingungsdauer lässt sich anhand der Gleichung (**??**) bestimmen und beträgt

$$T_{+,\text{theo.},2} = 1,621\,\text{s}\,.$$

Mit der Gleichung (**??**) und $T_{+,\text{exp.}2}$ lässt sich die Schwingungsfreqeunz

$$\omega_{+,\text{exp.},2} = (4,009 \pm 0,025)\ \frac{1}{\text{s}}$$

berechnen. Die theoretische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{+,\text{theo.},2} = 3,876\,\frac{1}{\text{s}}$$

ergibt sich aus der Gleichung (**??**).

3.2.2 Gegenphasige Schwingung

In der Tabelle (**??**) sind die gemessenen Schwingungsdauern bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ einer gegenphasigen Schwingung.

Tabelle 7: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ und gegenphasiger Schwingung.

$5\,T_{-,2}$ [s]
7,18
7,09
7,04
7,01
7,24
7,13
7,06
7,10
7,18
6,95

Aus dieser Tabelle ergibt sich die folgende gemittelte Schwingungsdauer mit der Standardabweichung

$$T_{-,\mathrm{exp},2} = (1,420 \pm 0,006)\ \mathrm{s}\,.$$

Um die theoretische Schwingungsdauer zu bestimmt wird zunächst die Kopplungskonstante K mit der Gleichung (**??**) bestimmt. Daraus ergibt sich

$$K_2 = 0,099 \pm 0,007\,.$$

Mit der Gleichung (**??**) wird die theoretische Schwingungsdauer

$$T_{-,\mathrm{theo.},2} = (1,468 \pm 0.011)\ \mathrm{s}$$

berechnet. Durch Einsetzen von $T_{-,\mathrm{exp},2}$ in die Gleichung (**??**) wird die Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\mathrm{exp.},2} = (4,426 \pm 0,017)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

bestimmt. Die theoretische Schwingungsdauer ergibt aus Gleichung (**??**) Für die theoretische Schwingungsfrequenz ergibt sich aus der Gleichung (**??**)

$$\omega_{-,\mathrm{theo.},2} = (4,279 \pm 0,031)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

3.2.3 Gekoppelte Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern bei der gekoppelten Schwingung sind in der Tabelle (**??**) aufgeführt.

Tabelle 8: Gemessene fünffache Schwingungsdauer und Schwebung bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ und gekoppelter Schwingung.

$5\,T_2$ [s]	$5\,T_{\mathrm{S},2}$ [s]
7,63	78,36
7,89	78,86
7,73	78,50
8,16	78,82
7,60	78,46
7,60	78,89
7,60	78,58
7,61	78,81
7,69	78,93
7,78	78,82

Aus diesen Messwerten lässt sich die gemittelte Schwingungsdauer mit der Standardabweichung

$$T_{2,\mathrm{exp.}} = (1,546 \pm 0,011)\ \mathrm{s}$$

ermitteln. Die Schwingungsfrequent wird aus der Gleichung (**??**) berechnet. Daraus folgt

$$\omega_{2,\mathrm{exp.}} = (4,065 \pm 0,030)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

Die gemittelte Schwebung mit der Standardabweichung wird anhand der Messwerten aus der Tabelle (8) berechnet. Somit ergibt sich

$$T_{\mathrm{S,exp.},2} = (15,741 \pm 0,013)\ \mathrm{s}\,.$$

Mit Hilfe der Gleichung (**??**) wird die folgende theoretische Schwebung bestimmt.

$$T_{\mathrm{S,theo.},2} = (15,6 \pm 1,2)\ \mathrm{s}\,.$$

Durch Einsatz von $T_{\mathrm{S,exp.},2}$ in Gleichung (**??**) wird die Schwebungsfrequenz

$$\omega_{\mathrm{S,exp.},2} = (0,39917 \pm 0,00033)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

berechnet. Anhand der Gleichung (**??**) lässt sich die theoretische Schwebungsfrequenz ermitteln. Der Betrag davon lautet

$$\omega_{\mathrm{S,exp.},2} = (0,404 \pm -0,031)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

4 Diskussion

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}}$$

5 Originaldaten

Anhang

Originaldaten