V351

Fourier-Analyse und Synthese

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.12.2023

Abgabe: 09.01.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist aus Fourierkomponenten eine Funktion zu synthetisieren sowie verschiedene Funktionen in einzelne Fourierkomponente zu zerlegen.

2 Theorie

Wenn sich eine Funktion nach einer festen Zeit oder einer festen Distanz wiederholt, heißt diese periodisch. Für eine zeitlich periodische Funktion mit Periodendauer T gilt

$$f(t+T) = f(t)\,. \tag{1}$$

Eine räumlich periodische Funktion erfüllt die Beziehung

$$f(x+D) = f(x)\,. \tag{2}$$

Die beiden wichtigsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und Cosinusfunktionen. Im Allgemeinen lassen sich die beiden Funktionen mit

$$f(t) = a\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \quad \text{bzw.} \tag{3}$$

$$f(t) = b\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) \tag{4}$$

beschreiben. Hierbei ist a bzw. b die jeweilige Amplitude und T die Periodendauer. Mithilfe dieser beiden Funktionen lassen sich viele periodische Vorgänge der Natur beschreiben. Dies folgt aus dem Fourierschen Theorem

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right)\right)\,. \tag{5}$$

Wenn diese Reihe gleichmäßig konvergiert, dann stellt die Fourier-Entwicklung in Gleichung (5) eine periodische Funktion $f(t)$ dar. Die Funktion ist gleichmäßig konvergent, wenn diese an jeder Stelle stetig ist. Falls eine Funktion an einer Stelle t_0 nicht stetig ist, lässt sich diese Funktion bei t_0 nicht mit der Fourier-Reihe annähern. Stattdessen tritt an der Stelle t_0 eine endliche Abweichung auf. Diese Beobachtung wird Gibbsches Phänomen gannant. Die Koeffizienten a_n und b_n lassen sich für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt berechnen

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right)\mathrm{d}t \quad \text{bzw.} \tag{6}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right)\mathrm{d}t\,. \tag{7}$$

Die Bestimmung dieser Koeffizienten bzw. Amplituden wird Fourier-Analyse genannt. Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, also $f(t) = f(-t)$, dann gilt $b_n = 0\ \forall n$. Für eine ungerade

Funktion $f(t)$, also wenn $f(t) = -f(-t)$ gilt, dann gilt $a_n = 0 \; \forall n$. Die Grundfrequenz der Schwingungen wird durch

$$\nu_1 = \frac{1}{T} \tag{8}$$

beschrieben. Die restlichen Frequenzen des periodischen Vorgangs der Fourier-Entwicklung sind ganzzahlige Vielfache von der Grundfrequenz ν_1. Diese Frequenzen heißen harmonische Oberschwingungen und treten nur in den Phasen 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ auf. Werden die Amplituden der Oberschwingungen als Funktion der Frequenz aufgetragen, so ergibt sich das Spektrum der Schwingung. Bei periodischen Funktionen ensteht ein Linienspektrum wie in Abbildung (1) zu erkennen. Dahingegen weisen nicht-periodische Vorgänge ein kontinuierliches Spektrum auf.

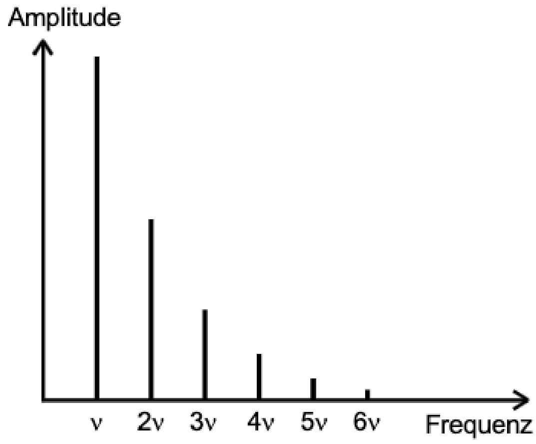

Abbildung 1: Beispiel eines Linienspektrums einer periodischen Funktion. [Q[1]]

Mithilfe der Fourier-Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\nu t) \, \mathrm{d}t \tag{9}$$

lässt sich das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion bestimmen. Diese gilt sowohl für periodische als auch für nicht-periodische Funktionen. Die umgekehrte Fourier-Transformation lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} g(\nu) \exp(-i\nu t) \, \mathrm{d}\nu \, . \tag{10}$$

Im Allgemeinen ist zu beachten, dass oftmals eine Integration über einen unendlich langen Zeitraum nicht möglich ist, weswegen die Integration auf einen endlichen Zeitraum beschränkt wird. Daher ist die Periodizität von der Funktion $f(t)$ nicht mehr erfüllt.

3 Vorbereitungsaufgabe

In der Vorbereitungsaufgabe sollten mithilfe der Gleichungen (6) und (7) die Fourier-Koeffizienten für drei verschiedene periodische Funktionen berechnet werden. Um die

Rechnung zu vereinfachen werden gerade oder ungerade Funktionen gewählt.

3.1 Rechteckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} C & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -C & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Diese Funktion ist ungerade, weswegen für die Koeffizienten $a_n = 0 \ \forall n$ gilt. Die Berechnung von b_n lautet

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0} C \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{T}{2}} -C \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{T}\left(\left[-\frac{CT}{2\pi n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right)\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} - \left[-\frac{CT}{2\pi n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right)\right]_{0}^{\frac{T}{2}}\right) \\
&= \frac{2C}{\pi n}\left(\cos\left(\pi n\right) - 1\right) \\
\Rightarrow b_n &= 0, \text{ für } n \text{ gerade und} \\
b_n &= -\frac{4C}{\pi n}, \text{ für } n \text{ ungerade} \\
\Rightarrow b_n &\sim \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

3.2 Sägezahnschwingung

$$f(t) = t \quad 0 \leq t \leq T$$

Die Sägezahnschwingung ist ebenfalls eine ungerade Fukntion, wodurch die Koeffizienten $a_n = 0 \ \forall n$ gilt. Für die Koeffizienten b_n ergeben sich

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{0}^{T} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\left(-\frac{T^2}{2\pi n} + \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \cdot \sin\left(2\pi n\right)\right) \\
b_n &= -\frac{T}{\pi n} \\
\Rightarrow b_n &\sim \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

3.3 Dreieckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{T}{2} & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -t + \frac{T}{2} & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Die gewählte Dreiecksschwingung ist eine gerade Funktion, weswegen für die Koeffizienten $b_n = 0\ \forall n$ gilt. Die Koeffizienten a_n lauten

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(t+\frac{T}{2})\cdot\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{T}{2}}(-t+\frac{T}{2})\cdot\cos\left(\frac{2\pi n}{T}\cdot t\right)\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{T}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\left(\pi n\right)\right)\\
\Rightarrow a_n &= 0,\ \text{für } n \text{ gerade und}\\
a_n &= \frac{2T}{\pi^2 n^2},\ \text{für } n \text{ ungerade}\\
\Rightarrow a_n &\sim \frac{1}{n^2}\,.
\end{aligned}
$$

4 Durchführung

In diesem Versuch werden mit einem Scanner, Oberwellengenerator, Funktions-Erzeuger und Oszilloskop eine Fourier-Synthese und Analyse für verschiedene Funktionen durchgeführt.

4.1 Fourier-Synthese verschiedener Funktionen

Für die Fourier-Synthese werden die in der Vorbereitungsaufgabe berechneten $\frac{1}{n}$- bzw $\frac{1}{n^2}$-Abhängigkeiten der Amplituden verwendet. Bei den $\frac{1}{n}$-abhängigen Funktionen lassen sich mit dem Oberwellengenerator die n-ten Oberwellen für $n \in \{1, 9\}$ einstellen. Dafür wird die Grundfrequenz ($n = 1$) durch n dividiert, um die benötigte Amplitude zu erhalten. Diese Amplitude wird dann für das jeweilige n mit dem Oberwellengenerator eingestellt und lässt sich am Scanner ablesen. Anschließend werden die jeweiligen Phasen der Oberwellen am Oberwellengenerator angepasst. Hierfür wird ein digitales Oszilloskop zur visuellen Darstellung verwendet. Das Gleiche wird erneut für die $\frac{1}{n^2}$-abhängige Funktion durchgeführt. Allerdings wird für die n-te Amplitude die Grundfrequenz durch n^2 dividiert.

4.2 Fourier-Analyse verschiedener Funktionen

Für die Fourier-Analyse werden mit dem Funktions-Erzeuger jeweils eine Dreiecks-, Rechteck- und Sägezahnschwingung erzeugt. Zunächst wird am Oszilloskop in der x, t Einstellung überprüft, ob die jeweilige Schwingung übermittelt wird. Dann wird der Mathe-Modus und die „Fast Fourier Transformation“(FFT) im Oszilloskop eingestellt. In der x, y Einstellung ist dann das Linienspektrum der Funktionen zu erkennen. Hier werden die jeweiligen Peaks mit dem integrierten Courser im Oszilloskop abgelesen und notiert.

5 Auswertung

5.1 Fouriesynthese

Im ersten Teil des Experiments wurden wie in der Durchführung beschrieben die Spannungsverläufe zusammengesetzt.
In Abbildung (2) ist die Fouriereihe der Sägezahnspannung zu sehen.

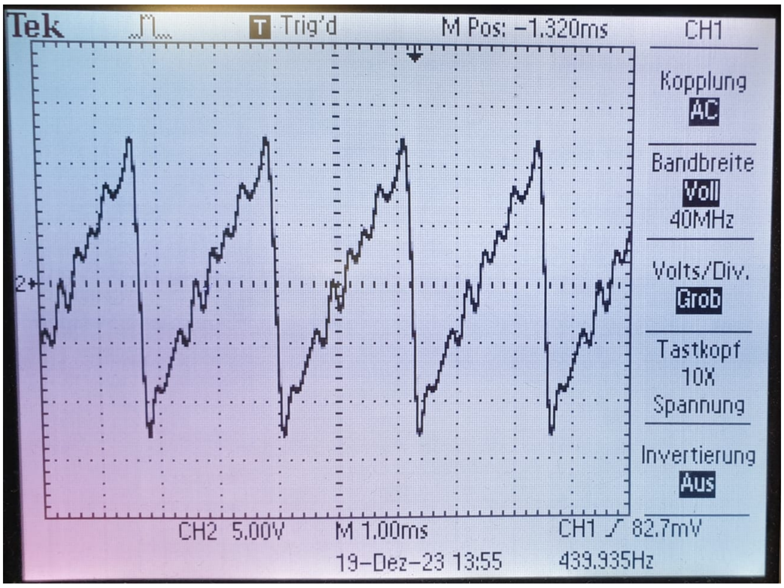

Abbildung 2: Verlauf der Sägezahnspannung.

In Abbildung (4) ist die Fouriereihe der Dreiecksspannung zu erkennen.

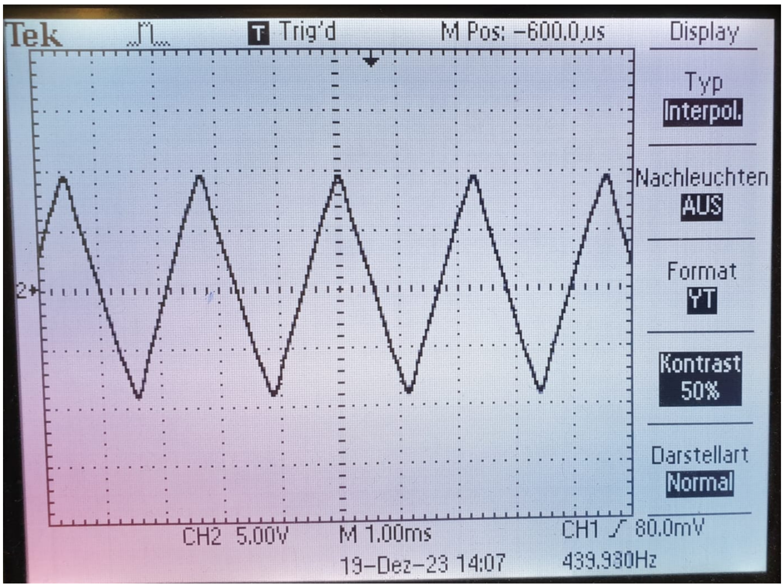

Abbildung 3: Verlauf der Dreiecksspannung.

Außerdem ist in Abbildung (**??**) die Fouriereihe der Rechteckspannung

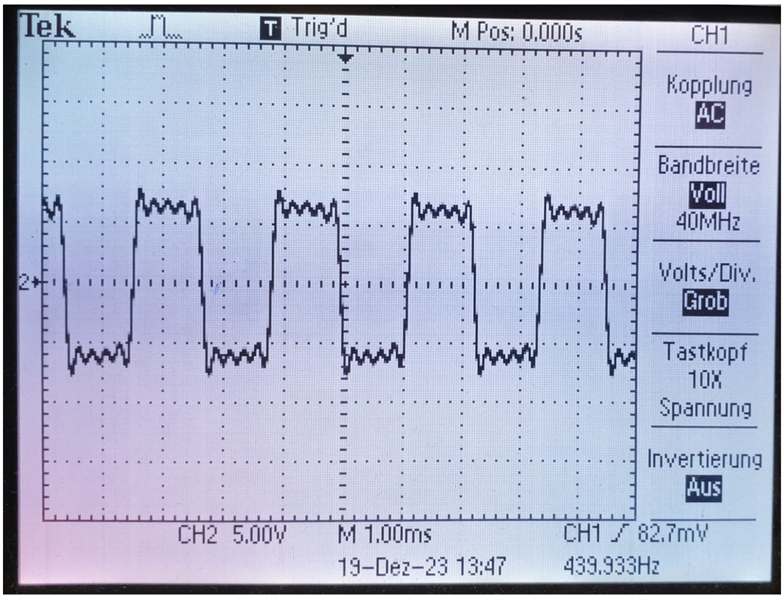

Abbildung 4: Verlauf der Rechteckspannung.

5.2 Fourieanalyse

Im zweiten Teil des Experiments wurde das Linienspektrums der Sägezahnspannung, Dreiecksspannung und Rechteckspannung auf dem Oszilloskop eingestellt, um dann mit-

hilfe des Cursers die Höhe der Peaks messen zu können.
Sägezahnspannung
Die Frequenz wird in Kilohertz und die Höhe der Peaks wird in Dezibil gemessen. Die aufgenommenen Messdaten sind in Tabelle (**??**) aufgeführt. **Dreiecksspannung**
Rechteckspannung

6 Diskussion

Die relative Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert wird bestimmt durch

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}} .$$

Literatur

[1] Unknown. *Fourier-Analyse und Synthese*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Anhang

Originaldaten