

V351

Fourier-Analyse und Synthese

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.12.2023

Abgabe: 09.01.2024

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Vorbereitungsaufgabe	4
3.1 Sägezahnschwingung	5
3.2 Dreieckschwingung	5
3.3 Rechteckschwingung	5
4 Durchführung	6
4.1 Fourier-Synthese verschiedener Funktionen	6
4.2 Fourier-Analyse verschiedener Funktionen	6
5 Auswertung	7
5.1 Fouriesynthese	7
5.2 Fourieanalyse	8
6 Diskussion	12
Literatur	12
Anhang	13
Originaldaten	13

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist aus Fourierkomponenten eine Funktion zu synthetisieren sowie verschiedene Funktionen in einzelne Fourierkomponente zu zerlegen.

2 Theorie

Wenn sich eine Funktion nach einer festen Zeit oder einer festen Distanz wiederholt, heißt diese periodisch. Für eine zeitlich periodische Funktion mit Periodendauer T gilt

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

Eine räumlich periodische Funktion erfüllt die Beziehung

$$f(x + D) = f(x). \quad (2)$$

Die beiden wichtigsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und Cosinusfunktionen. Im Allgemeinen lassen sich die beiden Funktionen mit

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \text{bzw.} \quad (3)$$

$$f(t) = b \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad (4)$$

beschreiben. Hierbei ist a bzw. b die jeweilige Amplitude und T die Periodendauer. Mithilfe dieser beiden Funktionen lassen sich viele periodische Vorgänge der Natur beschreiben. Dies folgt aus dem Fourierschen Theorem

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \right). \quad (5)$$

Wenn diese Reihe gleichmäßig konvergiert, dann stellt die Fourier-Entwicklung in Gleichung (5) eine periodische Funktion $f(t)$ dar. Die Funktion ist gleichmäßig konvergent, wenn diese an jeder Stelle stetig ist. Falls eine Funktion an einer Stelle t_0 nicht stetig ist, lässt sich diese Funktion bei t_0 nicht mit der Fourier-Reihe annähern. Stattdessen tritt an der Stelle t_0 eine endliche Abweichung auf. Diese Beobachtung wird Gibbsches Phänomen genannt. Die Koeffizienten a_n und b_n lassen sich für $n \in \mathbb{N}$ wie folgt berechnen

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt \quad \text{bzw.} \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt. \quad (7)$$

Die Bestimmung dieser Koeffizienten bzw. Amplituden wird Fourier-Analyse genannt. Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, also $f(t) = f(-t)$, dann gilt $b_n = 0 \quad \forall n$. Für eine ungerade

Funktion $f(t)$, also wenn $f(t) = -f(-t)$ gilt, dann gilt $a_n = 0 \forall n$. Die Grundfrequenz der Schwingungen wird durch

$$\nu_1 = \frac{1}{T} \quad (8)$$

beschrieben. Die restlichen Frequenzen des periodischen Vorgangs der Fourier-Entwicklung sind ganzzahlige Vielfache von der Grundfrequenz ν_1 . Diese Frequenzen heißen harmonische Oberschwingungen und treten nur in den Phasen 0 , $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ auf. Werden die Amplituden der Oberschwingungen als Funktion der Frequenz aufgetragen, so ergibt sich das Spektrum der Schwingung. Bei periodischen Funktionen entsteht ein Linienspektrum wie in Abbildung (1) zu erkennen. Dahingegen weisen nicht-periodische Vorgänge ein kontinuierliches Spektrum auf.

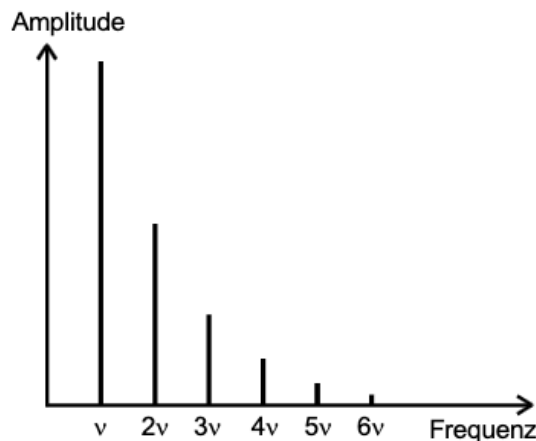


Abbildung 1: Beispiel eines Linienspektrums einer periodischen Funktion. [Q[1]]

Mithilfe der Fourier-Transformation

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\nu t) dt \quad (9)$$

lässt sich das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion bestimmen. Diese gilt sowohl für periodische als auch für nicht-periodische Funktionen. Die umgekehrte Fourier-Transformation lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) \exp(-i\nu t) d\nu. \quad (10)$$

Im Allgemeinen ist zu beachten, dass oftmals eine Integration über einen unendlich langen Zeitraum nicht möglich ist, weswegen die Integration auf einen endlichen Zeitraum beschränkt wird. Daher ist die Periodizität der Funktion $f(t)$ nicht mehr erfüllt.

3 Vorbereitungsaufgabe

In der Vorbereitungsaufgabe sollten mithilfe der Gleichungen (6) und (7) die Fourier-Koeffizienten für drei verschiedene periodische Funktionen berechnet werden. Um die

Rechnung zu vereinfachen werden gerade oder ungerade Funktionen gewählt.

3.1 Sägezahnschwingung

$$f(t) = t \quad 0 \leq t \leq T$$

Die Sägezahnschwingung ist eine ungerade Funktion, wodurch für die Koeffizienten $a_n = 0 \quad \forall n$ gilt. Für die Koeffizienten b_n ergeben sich

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T t \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left(-\frac{T^2}{2\pi n} + \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \cdot \sin(2\pi n) \right) \\ b_n &= -\frac{T}{\pi n} \\ \Rightarrow b_n &\sim \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

3.2 Dreiecksschwingung

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{T}{2} & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -t + \frac{T}{2} & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Die gewählte Dreiecksschwingung ist eine gerade Funktion, weswegen für die Koeffizienten $b_n = 0 \quad \forall n$ gilt. Die Koeffizienten a_n lauten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(t + \frac{T}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left(-t + \frac{T}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt \right) \\ &= \frac{T}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(\pi n)) \\ \Rightarrow a_n &= 0, \text{ für } n \text{ gerade und} \\ a_n &= \frac{2T}{\pi^2 n^2}, \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \Rightarrow a_n &\sim \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

3.3 Rechteckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} C & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -C & 0 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Diese Funktion ist ebenfalls eine ungerade Funktion, weswegen für die Koeffizienten $a_n = 0 \forall n$ gilt. Die Berechnung von b_n lautet

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 C \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} -C \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) dt \right) \\
 &= \frac{2}{T} \left(\left[-\frac{CT}{2\pi n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \left[-\frac{CT}{2\pi n} \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} \cdot t\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) \\
 &= \frac{2C}{\pi n} (\cos(\pi n) - 1) \\
 &\Rightarrow b_n = 0, \text{ für } n \text{ gerade und} \\
 &\quad b_n = -\frac{4C}{\pi n}, \text{ für } n \text{ ungerade} \\
 &\Rightarrow b_n \sim \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

4 Durchführung

In diesem Versuch werden mit einem Scanner, Oberwellengenerator, Funktions-Erzeuger und Oszilloskop eine Fourier-Synthese und Analyse für verschiedene Funktionen durchgeführt.

4.1 Fourier-Synthese verschiedener Funktionen

Für die Fourier-Synthese werden die in der Vorbereitungsaufgabe berechneten $\frac{1}{n}$ - bzw. $\frac{1}{n^2}$ -Abhängigkeiten der Amplituden verwendet. Bei den $\frac{1}{n}$ -abhängigen Funktionen lassen sich mit dem Oberwellengenerator die n -ten Oberwellen für $n \in \{1, 9\}$ einstellen. Dafür wird die Grundfrequenz ($n = 1$) durch n dividiert, um die benötigte Amplitude zu erhalten. Diese Amplitude wird dann für das jeweilige n mit dem Oberwellengenerator eingestellt und lässt sich am Scanner ablesen. Anschließend werden die jeweiligen Phasen der Oberwellen am Oberwellengenerator angepasst. Hierfür wird ein digitales Oszilloskop zur visuellen Darstellung verwendet. Das Gleiche wird erneut für die $\frac{1}{n^2}$ -abhängige Funktion durchgeführt. Allerdings wird für die n -te Amplitude die Grundfrequenz durch n^2 dividiert.

4.2 Fourier-Analyse verschiedener Funktionen

Für die Fourier-Analyse werden mit dem Funktions-Erzeuger jeweils eine Dreiecks-, Rechteck- und Sägezahnschwingung erzeugt. Zunächst wird am Oszilloskop in der (x, t) Einstellung überprüft, ob die jeweilige Schwingung übermittelt wird. Dann wird der Mathe-Modus und die „Fast Fourier Transformation“ (FFT) im Oszilloskop eingestellt. In der (x, y) Einstellung ist dann das Linienspektrum der Funktionen zu erkennen. Hier werden die jeweiligen Peaks mit dem integrierten Cursor im Oszilloskop abgelesen und notiert.

5 Auswertung

5.1 Fouriesynthese

Im ersten Teil des Experiments werden, wie in der Durchführung beschrieben, die Spannungsverläufe zusammengesetzt.

In Abbildung (2) ist die Fouriereihe der Sägezahnspannung zu sehen.

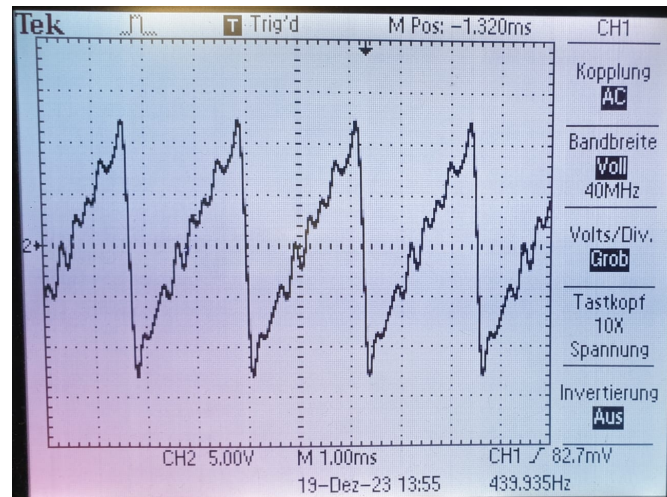


Abbildung 2: Verlauf der Sägezahnspannung.

In Abbildung (3) ist die Fouriereihe der Dreiecksspannung zu erkennen.

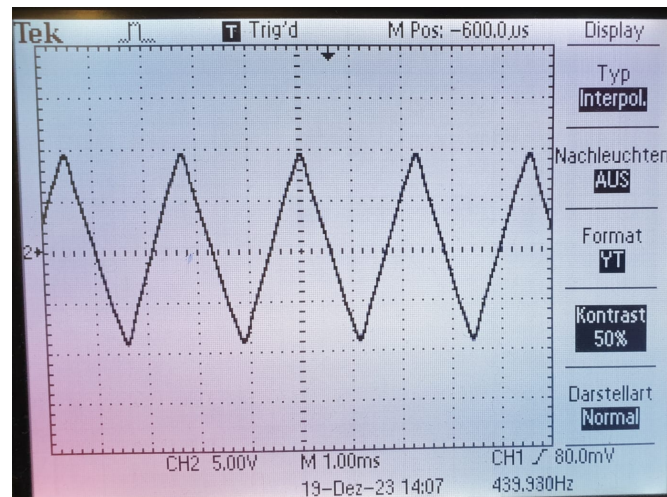


Abbildung 3: Verlauf der Dreiecksspannung.

Außerdem ist in Abbildung (4) die Fouriereihe der Rechteckspannung zu sehen.

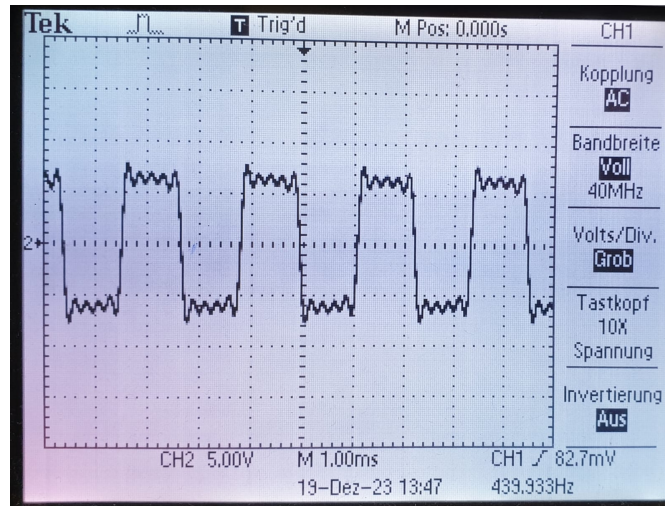


Abbildung 4: Verlauf der Rechteckspannung.

5.2 Fourieanalyse

Im zweiten Teil des Experiments wird das Linienspektrums der Sägezahnspannung, Dreieckspannung und Rechteckspannung auf dem Oszilloskop eingestellt, um dann mithilfe des Coursers die Höhe der Peaks messen zu können.

Sägezahnspannung

Die Frequenz wird in Kilohertz und die Höhe der Peaks wird in Dezibel gemessen. Die aufgenommenen Messdaten sind in Tabelle (1) aufgeführt.

Tabelle 1: Gemessene Sägezahnspannung in Abhängigkeit der Frequenz.

f [kHz]	U [dB]
10	33,0
20	27,0
30	23,4
40	21,0
50	19,0
60	17,4
70	16,2
80	14,6
90	13,4
100	13,0
110	12,2

Die Amplitude wird zur weiteren Betrachtung der Daten von Dezibel in Volt umgerechnet durch

$$V \sim 10^{\frac{\text{dB}}{20}}.$$

Diese Messwerte werden in Abbildung (5) aufgetragen. Zusätzlich wird eine Ausgleichsfunktion berechnet, die durch

$$U(x) = c \cdot x^d \quad (11)$$

definiert ist. Für die Sägezahnspannung werden die Werte

$$c_1 = (451 \pm 4) \cdot 10^{-3} \text{ V s}$$

$$d_1 = -1,0036 \pm 0,0035$$

berechnet. Diese Ausgleichsfunktion wird mit in Abbildung (5) abgebildet.

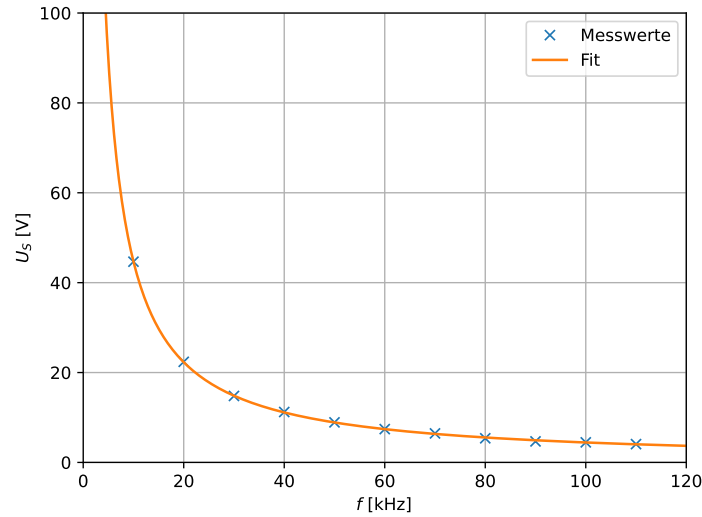


Abbildung 5: Gemessene Peaks der Sägezahnspannung U_S und zugehörige Ausgleichsfunktion.

Der Faktor d zeigt welche Abhängigkeit zwischen der Höhe der Peaks und der Frequenz besteht. Das berechnete $d_1 \approx -1$ bestätigt eine $\frac{1}{n}$ Abhängigkeit.

Dreiecksspannung

Die gemessenen Peaks des Linienspektrums der Dreiecksspannung in Abhängigkeit von der Frequenz sind in Tabelle (2) aufgeführt.

Tabelle 2: Gemessene Dreiecksspannung in Abhängigkeit der Frequenz.

f [kHz]	U [dB]
10	35,00
30	16,20
50	7,01
70	1,10
90	-2,99
110	-7,39
130	-9,39

Durch diese Messwerte wird ebenfalls die Ausgleichsfunktion (11) gelegt. Die durch diese Messwerte errechneten Faktoren sind

$$c_2 = (5381 \pm 91) \cdot 10^{-3} \text{ V s}$$

$$d_2 = -1,9809 \pm 0,0072.$$

Die Messwerte und die Ausgleichsfunktion sind in Abbildung (6) dargestellt.

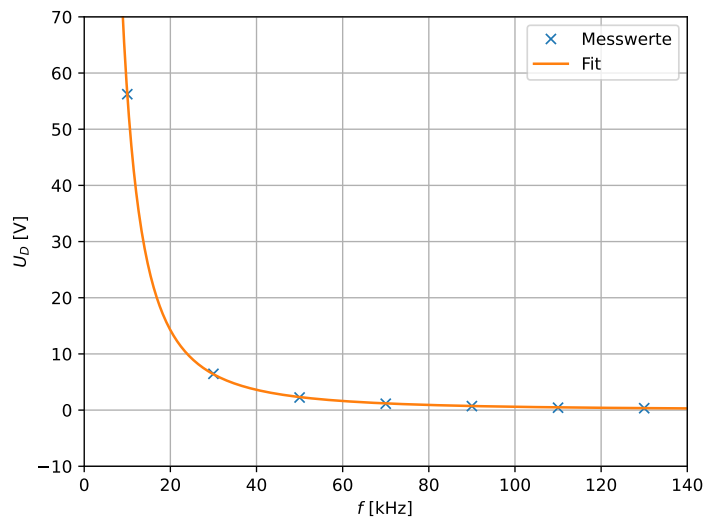


Abbildung 6: Gemessene Peaks der Dreiecksspannung U_D und Ausgleichsfunktion.

Der Faktor $d_2 \approx -2$ zeigt, dass die Höhe der Peaks mit $\frac{1}{n^2}$ abfällt.

Rechtecksspannung

Die für die Peaks des Linienspektrums der Rechtecksspannung aufgenommenen Messwerte sind in Tabelle (3) notiert.

Tabelle 3: Gemessene Rechteckspannung in Abhängigkeit der Frequenz.

f [kHz]	U [dB]	f [kHz]	U [dB]
10	39,0	210	13,0
30	29,4	230	12,2
50	25,0	250	11,4
70	22,2	270	10,6
90	20,2	290	10,2
110	18,2	310	9,81
130	17,0	330	9,01
150	15,8	350	8,61
170	14,6	370	8,21
190	13,4	390	7,81

Die durch die Gleichung (11) und die Messwerte aus Tabelle (3) berechnete Ausgleichsgerade hat die Parameter

$$c_3 = (878 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ V s}$$

$$d_3 = -0,9939 \pm 0,0022 .$$

Die Ausgleichsfunktion und Messwerte sind in Abbildung (7) aufgetragen.

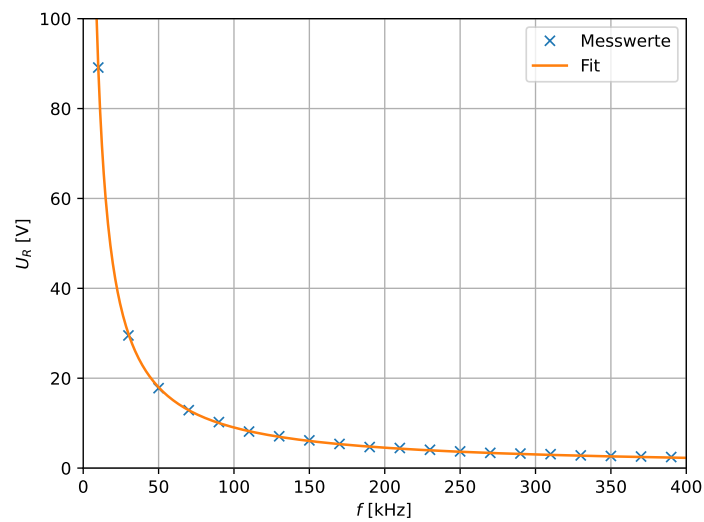


Abbildung 7: Gemessene Peaks der Rechteckspannung U_R und Ausgleichsfunktion.

Der Wert $d_3 \approx -1$ weist auf eine $\frac{1}{n}$ Entwicklung der Höhe der Peaks des Linienspektrums hin.

6 Diskussion

Die relative Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert wird bestimmt durch

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}}.$$

Bemerkenswert ist, dass alle gemessenen Werte sehr nah an den erwarteten Theoriewerten liegen. Für die Sägezahnspannung wurde $-1,0036 \pm 0,0035$ für d_1 bestimmt, was bei einem Theoriewert von -1 einer relativen Abweichung von $-0,36\%$ entspricht. Das für die Dreieckspannung berechnete d_2 beträgt $-1,9809 \pm 0,0072$. Dies führt bei einem Theoriewert von -2 zu einer relativen Abweichung von $-0,955\%$. Der Theoriewert der Rechteckspannung ist $d_{3,\text{theo}} = -1$. Die relative Abweichung bei einem gemessenen Wert von $d_3 = -0,9939 \pm 0,0022$ ist daher $-0,61\%$.

Diese äußerst geringen Fehler können dadurch erklärt werden, dass das Ablesen der Messwerte digital mithilfe eines Coursers erfolgt, wodurch die Unsicherheit, die durch das Ablesen von Menschen entsteht, minimiert wird. Außerdem werden bei diesem Versuch viele Einstellungen mit einer digitalen Anzeige eingestellt. Daher sind alle Einstellungen und Messungen sehr genau. Die höchste Messunsicherheit, die bei der Dreieckspannung entsteht, kann durch die, im Vergleich zu den anderen Messreihen, wenig aufgenommenen Messdaten erklärt werden. Dadurch, dass die Peaks mit n^{-2} abfallen, ist nach wenigen Messdaten die Höhe der Peaks so gering, dass diese im Bereich des Hintergrundrauschens sind und die Werte damit nicht mehr verlässlich abgelesen werden können.

Literatur

- [1] Unknown. *Fourier-Analyse und Synthese*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Anhang

Originaldaten

V351 - Fourie Analyse 19.12.2023

1. Teil: Synthese Rechteckspannung:

Grundspannung: $0,54745 \text{ V} = g_1$

$n=3: \frac{g_1}{3} = 0,18248333$

$n=5: \frac{g_1}{5} = 0,10949$

$n=7: \frac{g_1}{7} = 0,07820714$

$n=9: \frac{g_1}{9} = 0,06082728$

Dreiecksspannung: $g_1 = 0,55180 \text{ V}$

$n=3: \frac{g_1}{3} = 0,18393333$

$n=5: \frac{g_1}{5} = 0,11036$

$n=7: \frac{g_1}{7} = 0,07884286$

$n=9: \frac{g_1}{9} = 0,06132222$

Sägezahnspannung: g_1

$n=2: \frac{g_1}{2} = 0,275725$

$n=4: \frac{g_1}{4} = 0,1378625$

$n=6: \frac{g_1}{6} = 0,091775$

$n=8: \frac{g_1}{8} = 0,0689625$

(andere Werte von der Rechteckspannung)

$V \sim 10^{(dB/20)}$ - Vorfaktor $V \text{ dB Umrechnung}$

Sägezahn (+Ramp) $f = 10 \text{ kHz}$		Rechteck (square)	
$f \text{ [kHz]}$	$a \text{ [dB]}$	$f \text{ [kHz]}$	$a \text{ [dB]}$
bei 10	33	10	33
20	27	30	29,4
30	23,4	50 50	25
40	21	70	22,2
50	19	90	20,2
60	17,4	110	18,2
70	16,2	130	17
80	14,6	150	15,8
90	13,4	170	14,6
100	13,0	190	13,4
110	12,2	210	13
		230	12,2

Dreiecksspannung (triangle)

$f \text{ in kHz}$	$a \text{ in dB}$		
10	35	250	11,4
30	16,2	270	10,6
50	2,01	290	10,2
70	1,1	310	9,81
90	-2,95	330	9,01
110	-7,39	350	8,61
130	-9,39	370	8,21
		390	7,81

M. L.