V101

Das Trägheitsmoment

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2023

Abgabe: 28.11.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist das Trägheitsmoment von unterschiedlichen rotierenden Objekten zu bestimmen. Zudem wird der Satz von Steiner überprüft.

2 Theorie

Rotationsbewegungen lassen sich mit Hilfe des Drehmoments M, des Trägheitsmoment I und der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ beschreiben. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse, mit der Masse m und dem Abstand r zu einer Drehachse, lässt wird wie folgt bestimmt:

$$I = m \cdot r^2\,. \tag{1}$$

Bei einer Rotation eines ausgedehnten Körpers bewegen sich alle Masseelemente mit einer Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ um eine feste Drehachse. Dabei gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i\,. \tag{2}$$

Hier beschreibt r_i den Abstand der einzelnen Masselemente m_i zur festen Drehachse. Für infinitesimale Massen gilt für das Gesamtträgheitsmoment:

$$I = \int r^2\,dm\,. \tag{3}$$

Um bei einem komplexen Körper das Trägheitsmoment zu bestimmen, wird dieser häufig in geometrisch einfache Formen aufgeteilt, dessen Trägheitsmomente zu einem Gesamtträgheitsmoment addiert werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Trägheitsmomente der jeweiligen Formen sich auf dieselbe Drehachse beziehen. Somit hängt das Drehmoment von der Lage der Drehachse ab.
Wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft und stattdessen parallel mit einem Abstand a zu einer Schwerpunktachse verläuft, dann lässt sich mit Hilfe des Satz von Steiner das Trägheitsmoment berechnen.

$$I = I_\mathrm{S} + m \cdot a^2 \tag{4}$$

I_S beschreibt das Trägheitsmoment, das sich auf die Schwerpunktachse des Körpers bezieht, und m ist die Masse des Körpers. Das Drehmoment ist beschrieben durch:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} \;\text{ bzw.} \tag{5}$$
$$M = F \cdot r \cdot \sin(\varphi)\;, \tag{6}$$

wobei $\vec{F}$ bzw. F die Kraft angibt, die auf den rotierenen Körper wirkt, $\vec{r}$ bzw. r der Abstand zur Drehachse ist und der Winkel φ die Auslenkung zur Ruhelage beschreibt.
In einem schwingfähigen System wirkt dem Auslenkungswinkel φ ein rücktreibendes

Drehmoment entgegen. Ein solches System erzeugt eine harmonische Schwingung mit der Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\,. \tag{7}$$

Hier beschreibt D die Winkelrichtgröße und I das Trägheitsmoment. Das wirkende Drehmoment wird mit Hilfe der Winkelrichtgröße D wie folgt ausgedrückt:

$$M = D \cdot \varphi\,. \tag{8}$$

Die Winkelrichtgröße berechnet sich durch:

$$D = \frac{F \cdot r}{\varphi}\,. \tag{9}$$

2.1 Spezifische Trägheitsmomente

Die umgestellte Gleichung (7) nach I ergibt:

$$I = \frac{T^2 \cdot D}{(2\pi)^2}\,. \tag{10}$$

Das Trägheitmoment einer Kugel mit der Masse m und dem Radius r wird durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$I_{\mathrm{K}} = \frac{2}{5} m \cdot r^2\,. \tag{11}$$

Das Trägheitsmoment eines Zylinders mit der Masse m und dem Radius r ist gegeben durch:

$$I_{\mathrm{Z}} = \frac{m \cdot r^2}{2} \tag{12}$$

$$I_{\mathrm{Zh}} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)\,. \tag{13}$$

2.2 Vorbereitungsaufgaben

In der Vorbereitungsaufgabe soll das Drehmoment M zu 10 unterschiedlichen Abständen bestimmt werden. Hierbei wirkt eine Kraft $F = 0.1\,\mathrm{N}$ einmal mit einem Winkel $\varphi = 90°$ und einmal mit einem Winkel $\varphi = 45°$ auf eine Stange. Das Drehmoment wird mit Hilfe der Gleichung (6) berechnet.

Tabelle 1: Vorbereitungsaufgabe

	$\varphi = 90°$	$\varphi = 45°$
r [m]	M $[10^{-3}\mathrm{N\,m}]$	M $[10^{-3}\mathrm{N\,m}]$
0.05	5	3.5355
0.07	7	4.9498
0.09	9	6.3640
0.11	11	7.7782
0.13	13	9.1924
0.15	15	10.6066
0.17	17	12.0208
0.19	19	13.4350
0.21	21	14.8492
0.24	24	16.9706

3 Versuchsaufbau

Das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern wird mit Hilfe einer Drillachse bestimmt. Dafür wird der Körper auf eine zweifach in einem Rahmen drehbare Achse besfestigt. Diese ist über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden. Nachdem die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse bekannt ist, lassen sich anhand der Schwingungsdauer T der unterschiedlichen Körper die jeweiligen Trägbeitsmomente bestimmen.

4 Durchführung

4.1 Apparaturkonstanten der Drillachse

Die Winkelrichtgröße D der Drillachse wird bestimmt, indem an dem Auslenkstab ein Newtonmeter im einem Abstand von ca. 20 cm von der Mitte befestigt wird. Der Auslenkstab wird nun um den Winkel φ ausgelenkt, wobei zu beachten ist, dass das Newtonmeter senkrecht zum Stab ausgerichtet ist. Die aufzuwendene Kraft der Feder wird nun für zehn verschiedene Winkel notiert. Für die Berechnung der Drillachse I_D werden an beiden Seiten des Auslenkstabs Zylinder befestigt, welche den selben Abstand zur Mitte sowie ungefährt die selbe Masse und Größe haben. Diese werden um 90° ausgelenkt und die fünffache Schwingungsdauer $5T$ wird gemessen. Diese Messung wird jeweils für zehn verschiedene Abstände durchgeführt.

4.2 Trägheitsmoment zwei verschiedener Körper

Für die Bestimmung der Trägheitsmomente von zwei verschiedenen Körpern, werden die Körper an der Drillachse befestigt und umd 90° ausgelenkt. Dabei wird zehnmal die fünfache Schwingungsdauer $5T$ gemessen. Anschließend lassen sich die Trägheitsmomente der Körper mit der Winkelrichtgröße D und der Eigenträgheitsmoment I_{D} berechnen.

4.3 Trägheitsmoment der Puppe

Zunächst wird der Körper der Puppe gemessen. Hierzu werden die Beine, die Arme, der Körper und der Kopf als Zylinder genährt. Daher werden die Höhe und der Durchmesser der einzelnen Körperteile gemeessen. Das Trägheitsmoment der Puppe wird für zwei verschiedene Körperstellungen bestimmt. Für die erste Position sind die Arme der Puppe horizontal ausgestreckt. Für die zweite Position sind zusätzlich die Beine in einem Winkel von 90° ausgestreckt. Für beide Körperhaltungen wird die Puppe um 90° ausgelenkt und jeweils fünfmal die fünffache Schwingungsdauer $5T$ gemessen. Zusätzlich wird die Puppe in beiden Positionen um 120° ausgelenkt und dabei wird erneut jeweils fünfmal die fünffache Schwingungsdauer $5T$ gemessen.

5 Auswertung

5.1 Berechnung der Winkelrichtgröße D

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wurde die Kraft F in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels φ bei festem Abstand von $0,19975[\mathrm{m}]$ gemessen. Diese Werte sind in Tabelle (2) zu sehen. Die Winkelrichtgröße D wird durch Gleichung (9) bestimmt und ist ebenfalls in Tabelle (2) eingetragen, dort auf vier Nachkommastellen gerundet. Das gemittelte Ergebnis ist $\bar{D} = (21,0 \pm 0,8) \cdot 10^{-3}\,[\mathrm{N\,m}]$.

Tabelle 2: Kraft in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel

φ[°]	F [N]	D [N m]
20	0,026	0,0149
30	0,050	0,0191
40	0,068	0,0195
50	0,090	0,0206
60	0,120	0,0229
70	0,136	0,0222
80	0,156	0,0223
90	0,184	0,0234
100	0,20	0,0229
110	0,21	0,0218

5.2 Berechnung des Eigenträgheitmoments

Um das Eigenträgheitsmoment der Drillachse I_{Drill} zu bestimmen, wurde die fünffache Periodendauer T in Abhängigkeit vom Abstand a bei einer Auslenkung von 90° gemessen. Diese Messwerte sind in Tabelle (3) vermerkt.

Tabelle 3: Fünffache Periodendauer in Abhängigkeit vom Abstand

$a\,[\text{m}]$	$5 \cdot T[\text{s}]$
0,050	14,40
0,075	16,57
0,100	18,60
0,125	21,41
0,150	30,10
0,175	26,78
0,200	29,94
0,225	32,75
0,250	36,60
0,300	42,50

I_{Drill} wird durch die Verbindung

$$I_{\text{gemessen}} = I_{\text{Drill}} + 2 \cdot I_{\text{Zh, verschoben}}$$

berechnet. Dabei ist $I_{\text{Zh, verschoben}}$ nach Satz von Steiner:

$$I_{\text{Zh, verschoben}} = I_{\text{Zh}} + m \cdot a^2$$

Mithilfe der Gleichung (10) können I_{Drill} und T^2 wie folgt ausgedrückt werden:

$$I_{\text{Drill}} = \frac{T^2 \cdot D}{(2\pi)^2} - 2 \cdot \left(m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) + m \cdot a^2 \right) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{8\pi^2 \cdot m}{D} \cdot a^2 + \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot I_{\text{Drill}}}{D} + \frac{8\pi^2 \cdot m}{D} \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \tag{15}$$

In Graph (1) T^2 wird gegen a^2 aufgetragen und durch lineare Regression

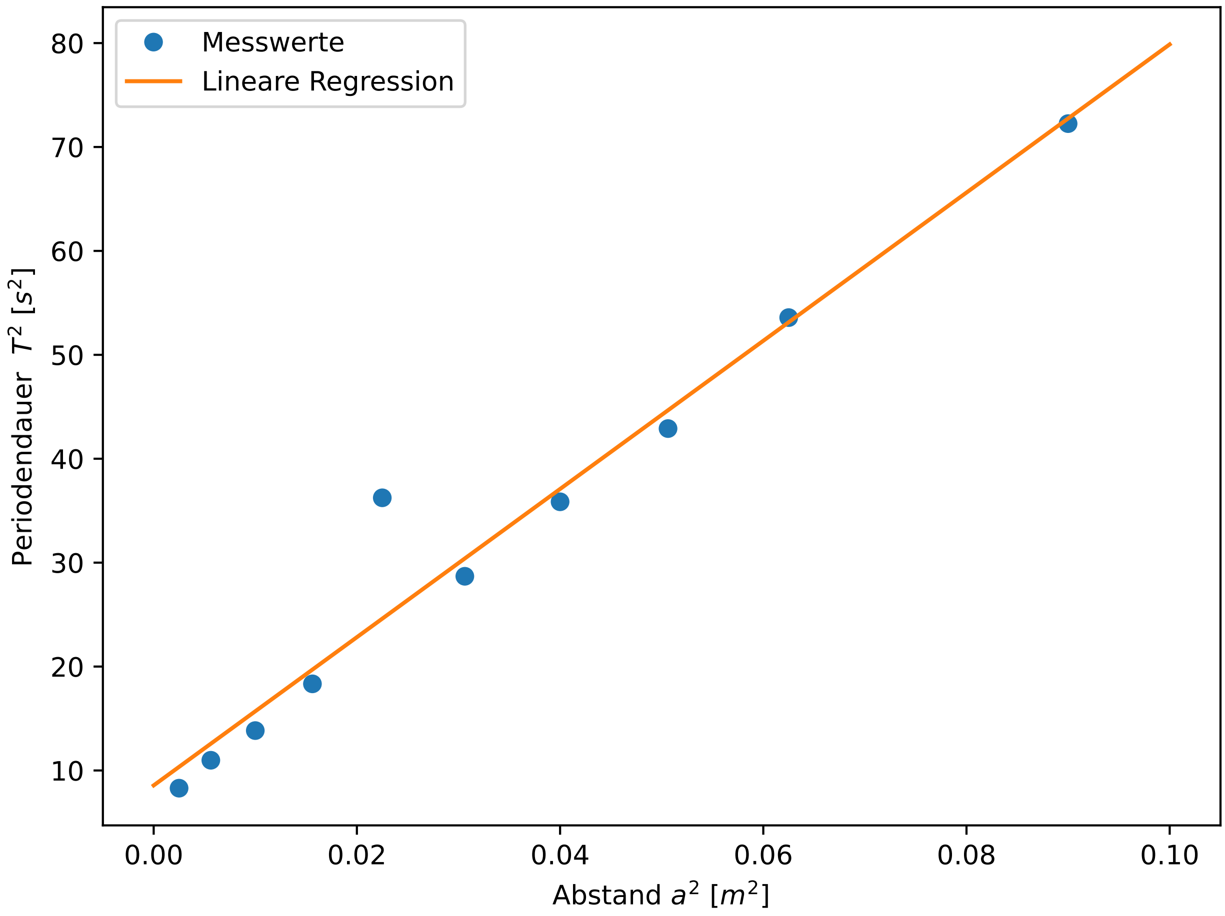

Abbildung 1: Auftragung von Periodenzeit T^2 gegen Abstand a^2

6 Diskussion

7 Originaldaten