

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingung

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.2023

Abgabe: 19.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Gedämpfte Schwingungen	3
2.2 Erzwungene Schwingungen	5
3 Durchführung	7
3.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung	7
3.2 Aperiodischen Grenzfall	7
3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	7
4 Auswertung	8
4.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung	8
4.2 Aperiodischen Grenzfall	10
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	10
5 Diskussion	12
Literatur	13
Anhang	14
Originaldaten	14

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist sich mit verschiedenen gedämpften und erzwungen Schwingungen innerhalb einer Schaltung bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen, auseinanderzusetzen. Insbesondere wird sich mit einer gedämpften Schwingung, dem aperiodischen Grenzfall und der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung beschäftigt.

2 Theorie

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator mit Kapazität C . Hier gilt Energieerhaltung, was bedeutet, dass die Gesamtenergie, die im Schwingkreis gespeichert ist, konstant bleibt. Diese Gesamtenergie setzt sich aus der Energie zusammen, die im Magnetfeld der Spule gespeichert ist und der Energie, die im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert ist. Diese beiden Energieformen oszillieren verlustfrei im Schwingkreis.

2.1 Gedämpfte Schwingungen

In einem gedämpften Schwingkreis ist zusätzlich zu der Spule und dem Kondensator ein ohmscher Widerstand R eingebaut, an dem elektrische Energie konstant in Wärmeenergie umgewandelt wird und dadurch das System verlässt. Daher ist keine Energieerhaltung im gedämpften Schwingkreis gegeben. Allerdings findet trotzdem eine Oszillation der einzelnen Energien statt, die Gesamtenergie nähert sich allerdings stetig der 0 an. Das Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt.

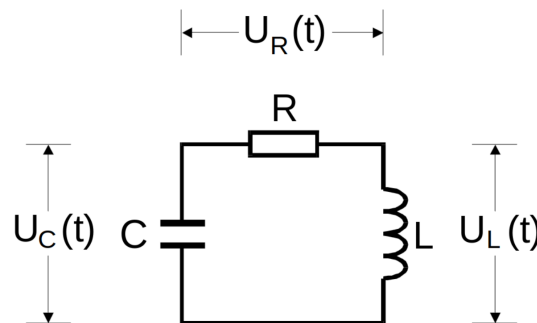


Abbildung 1: Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises mit Spule, ohmschen Widerstand und Kondensator. [Q[1]]

Das Verhalten des gedämpften Schwingkreises lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad (1)$$

beschreiben. I ist dabei der im Schwingkreis fließende Strom. Diese Gleichung wird durch die Funktion

$$I = e^{-2\pi\mu t} \cdot (B_1 \cdot e^{2\pi\nu it} + B_2 \cdot e^{-2\pi\nu it}) \quad (2)$$

gelöst. Für diese Funktion werden die Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \text{ und } 2\pi\nu := \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

verwendet. Für das Verhalten der Schwingung ist entscheidend, ob ν eine imaginäre oder reelle Zahl ist. Dies hängt davon ab in welchem Größenverhältnis die beiden Summanden unter der Wurzel stehen.

1. Schwingfall

Damit der Schwingfall eintritt, in dem die Amplitude harmonisch mit einer bestimmten Frequenz oszilliert, während sie sich auf den Nullpunkt zubewegt, muss ν eine reelle Zahl sein. Dies wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

gilt. Die Funktion von I vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$I = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (3)$$

A_0 und η sind reelle Konstanten. Die Abklingdauer T_{ex} der Amplitude bezeichnet die Zeit, die benötigt wird, damit die Amplitude auf den e -ten Teil des ursprünglichen Wertes abgenommen hat. Für die Abklingdauer gilt

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (4)$$

Die einhüllende Funktion zur gedämpften Schwingung ist die Funktion $\pm e^{-2\pi\mu t}$.

2. Kriechfall

Der Kriechfall tritt ein, wenn eine aperiodische Dämpfung vorliegt, wodurch ν eine imaginäre Zahl ist, welche durch

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

zustandekommt. Die Lösungsfunktion von I enthält nun keinen oszillierenden Anteil mehr. Abhängig von der Wahl der Konstanten B_1 und B_2 erreicht I zu Beginn ein Extremwert oder geht direkt monoton auf den Nullpunkt zu. Kriechfälle für verschiedene Konstanten sind als durchgezogene, farbige Striche in Abbildung (2) dargestellt. Für große Zeiten gilt

$$I \sim e^{-2\pi(\mu - \nu i)t}.$$

3. Aperiodischer Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall ist ein Spezialfall in dem I am schnellsten gegen den Nullpunkt geht. Für diesen Fall gilt

$$\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2. \quad (5)$$

Daraus folgt, dass $\nu = 0$ ist. Die Funktion I vereinfacht sich zu

$$I = D \cdot e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

D ist eine reelle Konstante. In Abbildung (2) ist der aperiodische Grenzfall als gestrichelte, schwarze Linie dargestellt.

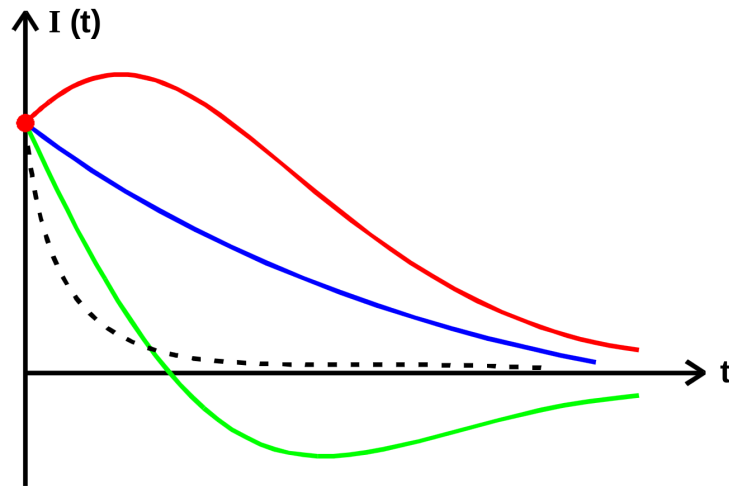


Abbildung 2: Verhalten von Strom I in einem Schwingkreis bei aperiodischer Dämpfung. [Q[1]]

2.2 Erzwungene Schwingungen

In einem Schwingkreis entsteht eine erzwungene Schwingung, wenn dieser eine äußere periodische Krafteinwirkung erfährt. In diesem Fall ist die Kraft eine Spannungsquelle mit sinusförmiger Wechselspannung $U(t)$. Dieser Schwingkreis ist in Abbildung (3) zu sehen.

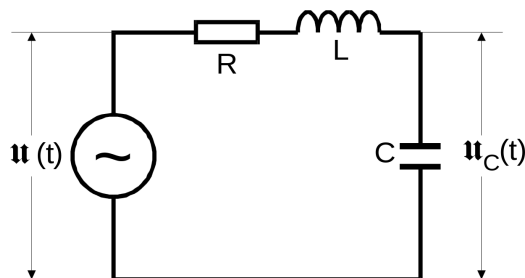


Abbildung 3: Schwingkreis an dem eine sinusförmige Wechselstromquelle angeschlossen ist. [Q[1]]

Die Differentialgleichung

$$LC \cdot \ddot{U}_C + RC \cdot \dot{U}_C + U_C = U_0 \cdot e^{\omega i t} \quad (6)$$

beschreibt das System. U_0 ist eine Konstante. Diese Gleichung wird durch den Ansatz $U_C = U \cdot e^{\omega i t}$ mit

$$U = \frac{U_0 \cdot (1 - LC\omega^2 - \omega RCi)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (7)$$

gelöst. Der Betrag von U beträgt

$$|U| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (8)$$

und die Phase ist

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (9)$$

Die Funktion

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (10)$$

löst die Differentialgleichung (6). $U_C(\omega)$ hat ein Maximum für die Resonanzfrequenz ω_{res} . Diese beträgt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ strebt $U_C(\omega)$ gegen die Erregeramplitude $U_0(\omega)$. Für den Fall der schwachen Dämpfung, für den

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

gilt, nähert sich ω_{res} der Frequenz ω_0 von der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall wird das Maximum von U_C durch

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

ausgedrückt. Falls $R \rightarrow 0$ geht $U_{C,\text{max}} \rightarrow \infty$. Der Vorfaktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ heißt Resonanzüberhöhung oder auch Güte q des Schwingkreises. Die Breite der Resonanzkurve wird mithilfe der Frequenzen ω_+ und ω_- beschrieben, bei denen

$$U_C(\omega_{+,-}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{C,\text{max}}$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$$

gilt, wird die Breite der Resonanzkurve durch

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (11)$$

ausgedrückt. Die Güte q wird ausgedrückt durch

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} . \quad (12)$$

3 Durchführung

Zur Aufnahme von Messwerten stehen verschiedene ohmsche Widerstände (R_1 , R_2 , R_3), eine Spule und ein Kondensator zur Verfügung. Außerdem werden die Spannungsverläufe auf einem Oszilloskop dargestellt und ein Generator zur Erzeugung verschiedener Spannungen ist vorhanden.

3.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung

Im ersten Versuchsteil wird eine Schwingung im gedämpften Schwingkreis gemessen. Für diese Messung wird eine vom Generator erzeugte Rechteckspannung in den Schwingkreis mit R_1 als ohmschen Widerstand geleitet. Auf dem an den Schwingkreis angeschlossenen Oszilloskop wird dann die oszillierende Schwingung scharfgestellt und die Amplituden in Abhängigkeit von der Zeit abgelesen.

3.2 Aperiodischen Grenzfall

Im zweiten Teil des Versuches wird statt R_1 der verstellbare ohmsche Widerstand R_3 verwendet. Der Generator erzeugt auch in diesem Teil eine Rechteckspannung, die in den Schwingkreis geleitet wird. Auf dem Oszilloskop wird ebenso wie beim 1. Teil der zeitliche Spannungsverlauf abgelesen. Zu Beginn der Messung ist der verstellbare Widerstand auf dem höchsten Wert eingestellt. Dann wird der Widerstand stetig verkleinert bis die Kurve des aperiodischen Grenzfalls auf dem Oszilloskop zu sehen ist. Der Widerstand, bei dem dies der Fall ist, wird notiert.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Beim letzten Teil der Versuches wird die Kondensatorspannung auf eine Frequenzabhängigkeit untersucht. Nun wird R_2 verwendet und eine sinusförmige Spannung durch den Generator erzeugt, um diese in den gedämpften Schwingkreis zu leiten. Auf dem Oszilloskop werden zwei Spannungsverläufe aufgezeichnet, einmal den der Erregerspannung und den der Kondensatorspannung. Zu Beginn wird versucht die Erregerfrequenz zu finden, die für die höchste Kondensatorspannung sorgt. Im folgenden wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz gemessen und notiert. Dabei ist darauf zu achten, dass die Erregerfrequenzen möglichst gleichmäßig um die Erregerfrequenz, die den höchsten Ausschlag der Kondensatorspannung verursacht, gewählt werden.

4 Auswertung

Für diesen Versuch werden die folgenden Größen verwendet

$$R_1 = (67,2 \pm 0,1) \Omega$$

$$R_2 = (682 \pm 0,5) \Omega$$

$$R_3 = 1 \text{ bis } 10 \text{ k}\Omega$$

$$L = (16,87 \pm 0,05) \text{ mH}$$

$$C = (2,060 \pm 0,003) \text{ nF}.$$

Außerdem werden im Folgenden die Mittelwerte mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

bestimmt. n ist die Anzahl der Daten und x_i die einzelnen Daten. Mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}$$

werden die Messunsicherheiten ausgerechnet, wenn eine Größe von mehreren fehlerbehafteten Größen abhängt.

4.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung

Bei dieser Durchführung wird der Widerstand R_1 verwendet. In der Tabelle (1) sind die gemessenen zeitabhängigen Amplituden einer gedämpften Schwingung aufgeführt. Hier wird, anders als im Anhang zu erkennen, der Nullpunkt der Zeit um $215 \mu\text{s}$ verschoben damit die Zeiten positiv sind. Diese Verschiebung hat allerdings keine Auswirkung auf die Zeitabhängigkeit der Amplituden.

Tabelle 1: Gemessene Amplituden in Abhängigkeit der Zeit einer gedämpften Schwingung.

$t [\mu\text{s}]$	$U [\text{V}]$	$t [\mu\text{s}]$	$U [\text{V}]$	$t [\mu\text{s}]$	$U [\text{V}]$
2,50	-3,20	155,00	-1,40	280,00	-1,00
7,50	3,10	165,00	1,35	315,00	1,00
47,50	-2,40	200,00	-1,30	325,00	-0,40
57,50	2,40	207,50	1,25	445,00	0,40
65,00	-2,20	220,00	-1,15	370,00	-0,35
102,50	2,20	227,50	1,15	380,00	0,35
110,00	-2,05	237,50	-1,10	387,50	-0,30
145,00	2,00	272,50	1,05	422,50	0,30

Diese Messdaten sind graphisch in der Abbildung (4) dargestellt. Zusätzlich werden zwei exponentielle Regressionen durchgeführt. Hierfür wird

$$y = a \cdot \exp(-b \cdot x)$$

verwendet. Für die Spannungen $U > 0$ ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} a_{\text{pos.}} &= 3,29 \text{ V} \\ b_{\text{pos.}} &= 4658,96 \text{ Hz} . \end{aligned}$$

Für die Spannungen $U < 0$ ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} a_{\text{neg.}} &= -3,20 \text{ V} \\ b_{\text{neg.}} &= 4964,21 \text{ Hz} . \end{aligned}$$

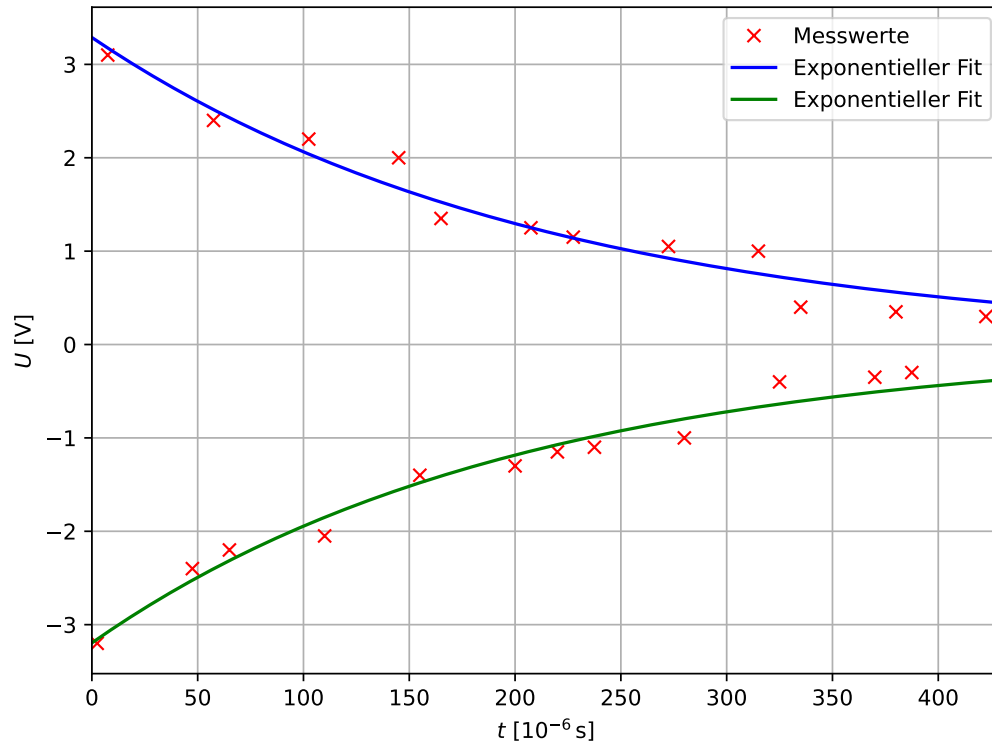


Abbildung 4: Zeitabhängigkeit der Spannung.

Anhand des gemittelten Werts $b = 4811,585$ aus den Werten $b_{\text{pos.}}$ und $b_{\text{neg.}}$ ergibt sich mit der Gleichung (4) der effektive Widerstand

$$R_{\text{eff,exp.}} = 2 \cdot b \cdot L = (162,3 \pm 0,5) \, \Omega .$$

4.2 Aperiodischen Grenzfall

Mithilfe des verstellbaren Widerstands R_3 wird im Experiment der aperiodische Widerstand ermittelt und beträgt

$$R_{\text{ap,exp.}} = 4500 \, \Omega.$$

Der theoretische, aperiodische Widerstand ergibt sich durch Umstellen der Gleichung (5) nach R . Daraus folgt für den Widerstand

$$R_{\text{ap}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Durch Einsetzen von L und C wird

$$R_{\text{ap,theo.}} = (5723 \pm 9) \, \Omega$$

bestimmt. Die experimentelle Abklingzeit wird mit $b = 2\pi\mu$ und der Gleichung (4) ermittelt. Daraus folgt

$$T_{\text{ex,exp.}} = 415,66 \, \mu\text{s}.$$

Die theoretische Abklingzeit wird durch Einsetzen von L und R_1 in Gleichung (4) berechnet. Dies beträgt

$$T_{\text{ex,theo.}} = (502 \pm 2) \, \mu\text{s}.$$

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Für diese Durchführung wird der Widerstand R_2 verwendet. Die gemessenen Spannungen in Abhängigkeit der Frequenz sind in der Tabelle (2) aufgeführt. Zusätzlich wird in der Tabelle (2) das Verhältnis $\frac{U}{U_0}$ festgehalten. Hierfür wird die Spannung $U_0 = 2,15 \, \text{V}$ bestimmt.

Tabelle 2: Gemessene Spannung in Abhängigkeit der Frequenz.

f [kHz]	U [V]	$\frac{U}{U_0}$	f [kHz]	U [V]	$\frac{U}{U_0}$
11,03	2,35	1,093	26,53	6,75	3,140
13,53	2,50	1,163	27,03	6,50	3,023
15,53	3,20	1,488	28,03	6,60	3,070
17,53	2,90	1,349	28,53	6,40	2,977
19,03	4,20	1,953	30,53	4,40	2,047
20,53	4,50	2,093	32,03	4,00	1,860
22,53	6,20	2,884	33,53	2,60	1,209
23,03	6,00	2,791	35,53	2,30	1,070
24,53	6,50	3,023	37,53	2,00	0,930
25,53	6,75	3,140	40,03	1,30	0,605

In der Abbildung (5) ist das Verhältnis $\frac{U}{U_0}$ gegen die Frequenz f halblogarithmisch aufgetragen. Gleichzeitig wird mit der Gleichung (10) die Theoriekurve bestimmt, die ebenfalls in der Abbildung (5) dargestellt ist.

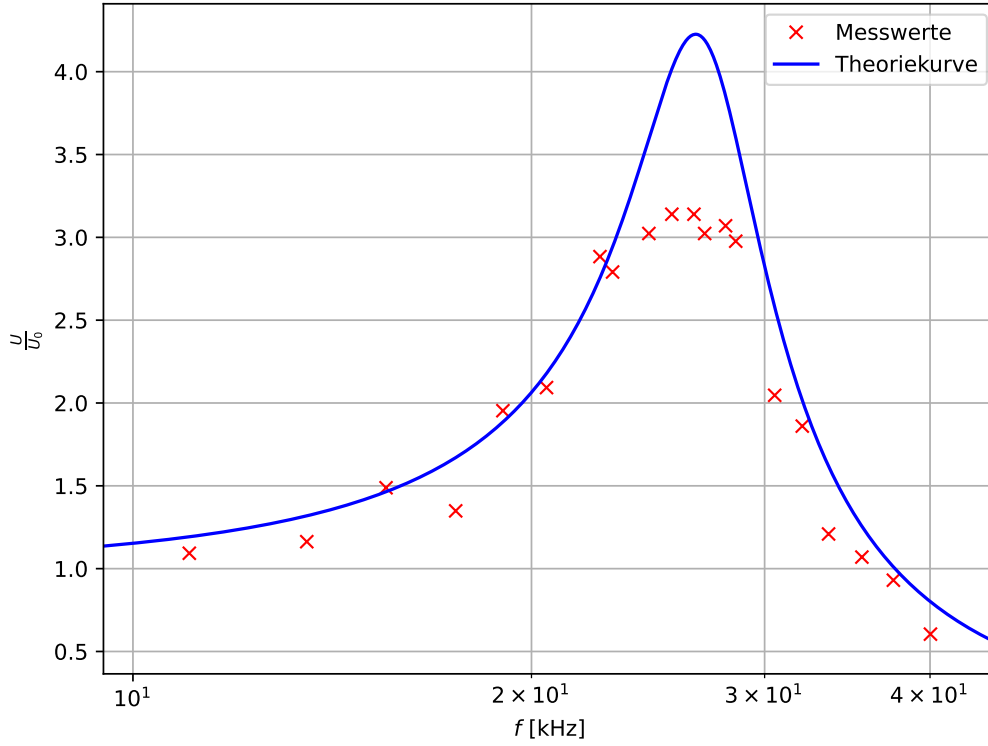


Abbildung 5: Frequenzabhängigkeit der Spannung und die Theoriekurve.

Anhand der Tabelle (2) lässt sich die Resonanzüberhöhung bzw. Güte bei einer Frequenz $f = 26,53$ kHz abschätzen. Demnach ergibt sich für die experimentelle Güte

$$q_{\text{exp.}} = 3,140.$$

Die theoretische Güte wird mit den Gleichungen (11) und (12) bestimmt und beträgt

$$q_{\text{theo.}} = (4,196 \pm 0,008).$$

Die Breite des Resonanzbereichs, wird ermittelt, indem die beiden Frequenzen bestimmt werden, bei denen das Verhältnis $\frac{U}{U_0}$ das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache von der Güte q beträgt. Dafür wird in Abbildung (6) ein Ausschnitt der Messwerte linear dargestellt. Anhand dieser Abbildung lässt sich ablesen bei welchen Frequenzen $\frac{U}{U_0} = 2.220$ gilt. Daraus ergeben sich die Frequenzen

$$f_{1,\text{exp.}} = 20,85 \text{ kHz}$$

$$f_{2,\text{exp.}} = 30,16 \text{ kHz}.$$

Demnach ergibt sich für den experimentellen Resonanzbereich

$$\Delta f_{\text{exp.}} = f_{2,\text{exp.}} - f_{1,\text{exp.}} = 9,31 \text{ kHz}.$$

Die theoretische Breite des Resonanzbereich wird mithilfe der Gleichung (11) abgeschätzt. Somit beträgt die Breite

$$\Delta f_{\text{theo.}} = (6434 \pm 20) \text{ Hz}.$$

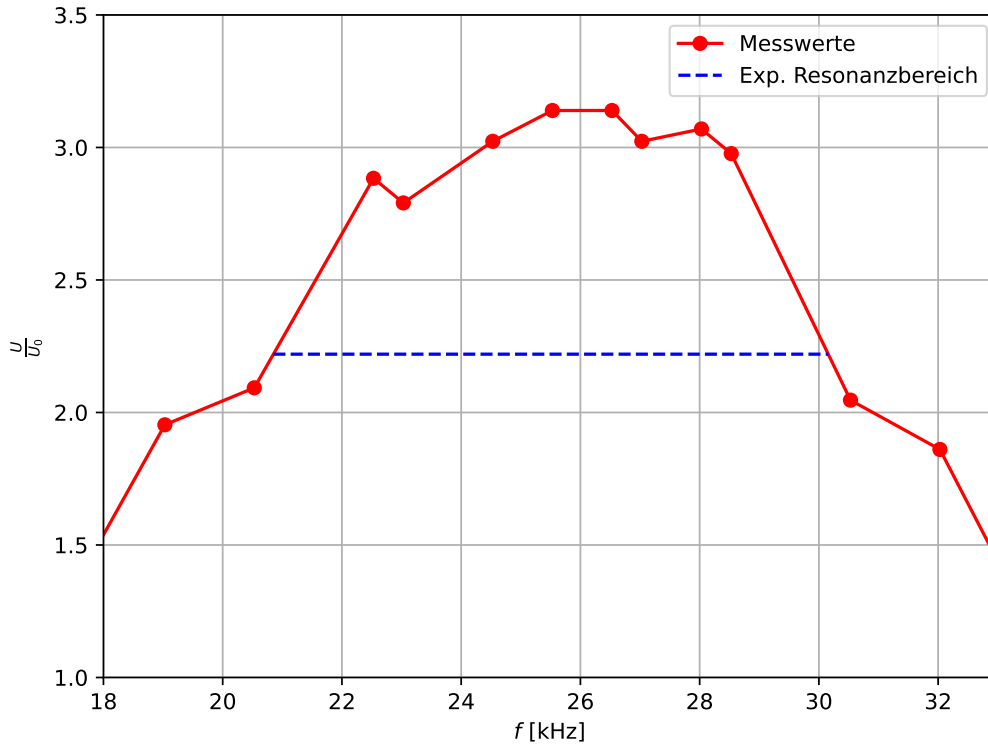


Abbildung 6: Linear aufgetragene Messdaten mit dem Resonanzbereich.

5 Diskussion

Die relative Abweichung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Wert wird bestimmt durch

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}}.$$

Für die gedämpfte Schwingung beträgt der experimentelle, effektive Widerstand $R_{\text{eff,exp.}} = (162,3 \pm 0,5) \Omega$. Bei dieser Durchführung wird der Widerstand $R_1 = (67,20 \pm 0,10) \Omega$ verwendet. Somit ergibt sich eine relative Abweichung von 141,6 %. Diese große Abweichung könnte daran liegen, dass der Innenwiderstand des Frequenzgenerators vernachlässigt wird. Somit wäre der theoretische, effektive Widerstand größer und demnach die Abweichung kleiner. Für die Abklingdauer ergeben sich die Werte $T_{\text{ex,exp.}} = 415,66 \mu\text{s}$.

und $T_{\text{ex,theo.}} = (502 \pm 2) \mu\text{s}$. Hier beträgt die Abweichung 17,2 %. Die Abweichungen können dadurch zustande kommen, dass es viele Messwerte gibt, die knapp über bzw. knapp unter einem Messstrich liegen und dann beide auf denselben Messstrich gerundet werden. Dies verfälscht den Abstand, der zwischen den Daten liegt.

Zur Bestimmung des aperiodischen Widerstands ergibt sich für den experimentellen Wert $R_{\text{ap,exp.}} = 4500 \Omega$ und der theoretische Wert beträgt $R_{\text{ap,theo.}} (5723 \pm 9) \Omega$. Demnach ist eine relative Abweichung von 21,4 % vorhanden. Auf der Abbildung des Oszilloskops ist der genaue Übergang zwischen dem aperiodischen Grenzfall und einem Überschlag nicht genau ablesbar und muss abgeschätzt werden. Diese Ungenauigkeit könnte die relative Abweichung des aperiodischen Widerstands erklären.

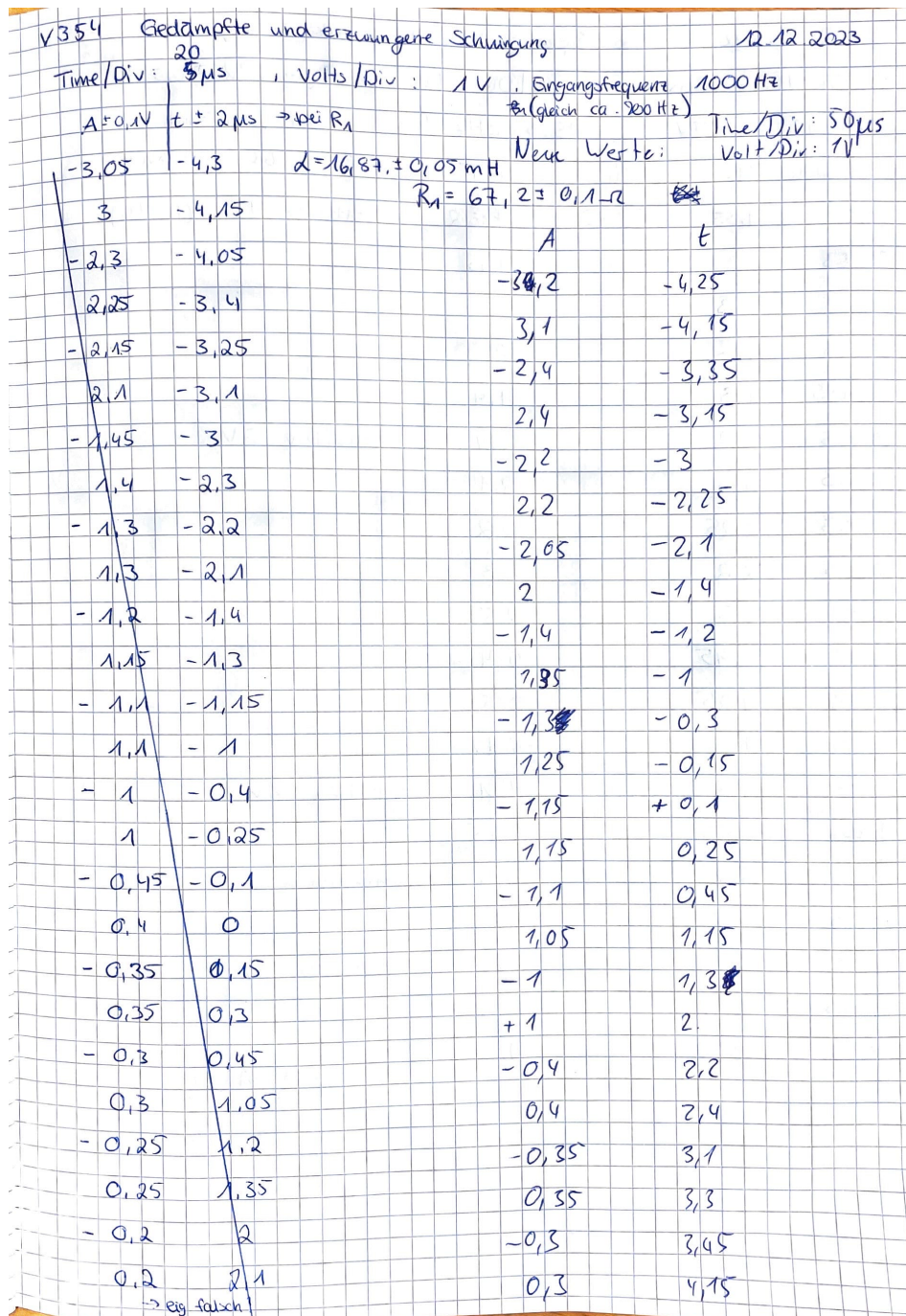
Bei der dritten Durchführung ergeben sich für die Güten $q_{\text{exp.}} = 3,140$ und $q_{\text{theo.}} = (4,196 \pm 0,008)$. Die relative Abweichung von diesen Werten beträgt 25,2 %. Außerdem ergeben sich für die Breite der Resonanzkurven $\Delta f_{\text{exp.}} = 9310 \text{ Hz}$ und $\Delta f_{\text{theo.}} = (6434 \pm 20) \text{ Hz}$. Für die Breite der Resonanzkurve ergibt sich eine relative Abweichung von 44,7 %. Hier könnten die Abweichungen unter anderem durch den oben beschriebenen Ablesefehler entstehen.

Literatur

- [1] Unknown. *Gedämpfte und erzwungene Schwingung*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Anhang

Originaldaten



b) $R = 4,5 \text{ k}\Omega$, bei Frequenz = $192,8 \text{ Hz}$ Rechteckspannung

c) Time/Div: $20 \mu\text{s}$, Volts/Div: 1 V , $R_2 = 682,1 \pm 0,5 \Omega$
 Volts/Div: 5 V , $25,53 \text{ kHz}$ / $L = 16,87 \pm 0,05 \text{ mH}$
 $C = 2,060 \pm 0,003 \text{ nF}$

f in kHz	U_C	U_0	R_T	
25,53	1,35	2,15	1,45	Volts/Div: 1 V (für U_C)
26,53	1,35	- - -	1,45	
24,53	1,3		2	
23,03	1,2		2,1	
27,03	1,3		1,4	
28,53	3,2		1,4	Volts/Div: 2 V
22,53	3,1		2,1	
20,53	2,25		2,2	
30,53	2,2		1,3	
33,53	1,3		2,5	
17,53	1,45		2,4	
13,53	1,25		3,35	
37,53	1,00		1,15	
40,03	1,3		1,1	Volts/Div: 1 V
40,53 11,03	2,35		4,25	
15,53	3,2		3,1	Volts/Div: 2 V
35,53	2,3		1,2	
32,03	2		1,3	Volts/Div: 2 V
10,03	2,1		2,3	
28,03	3,3		1,4	

17.12.23
 N/m