

V207

Das Kugelfall – Viskosimeter nach Höppler

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.11.2023

Abgabe: 21.11.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
2.1 Kugelfallviskosimeter nach Höppler	3
2.2 Vorbereitungsaufgaben	4
3 Durchführung	5
4 Auswertung	6
4.1 Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur	6
4.2 Apparatekonstante der großen Glaskugel	6
4.3 Bestimmung der Reynoldsschen Zahl	7
4.4 Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser	8
5 Diskussion	10
6 Originaldaten	11
Literatur	11

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuches ist die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität von destilliertem Wasser zu bestimmen. Dazu wird das Kugelfallviskosimeter nach Höppler verwendet. Außerdem wird die Reynoldszahl berechnet und benutzt, um herauszufinden, ob es sich um eine laminare oder turbulente Strömung handelt.

2 Theorie

Bewegt sich ein Körper durch ein Medium hindurch, wirkt eine Reibungskraft \vec{F}_R , die unter anderem von der Berührungsfläche und der Geschwindigkeit des Körpers abhängt. Je nach Strömungsart kann diese Kraft unterschiedliche Abhängigkeiten haben. Bei dem Kugelfallviskosimeter nach Höppler ist von einer laminaren Strömung auszugehen. Dies wird in der Auswertung durch die Berechnung der Reynoldszahl überprüft. Eine experimentspezifische Reynoldszahl über ca. 2300 weist auf eine turbulente Strömung hin, eine die darunter liegt auf eine laminare Strömung. Die Reynoldszahl berechnet sich über

$$Re = \frac{\rho_M \cdot \bar{v} \cdot d}{\eta} . \quad (1)$$

Dabei bezeichnet ρ_M die Dichte des Mediums, \bar{v} die mittlere Geschwindigkeit des Körpers, d die charakteristische Länge (beim Kugelfallviskosimeter ist dies der Durchmesser der Röhre) und η die dynamische Viskosität des Mediums.

Die Reibungskraft ist bei laminarer Strömung die Stokessche Reibung

$$\vec{F}_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot v \cdot r , \quad (2)$$

hier bereits an die Symmetrie einer Kugel mit Berührungsfläche $A = 6 \cdot \pi \cdot r$ angepasst, wobei r der Radius der Kugel ist. η ist die dynamische Viskosität des Mediums, eine Materialkonstante und v ist die Fallgeschwindigkeit des Körpers.

2.1 Kugelfallviskosimeter nach Höppler

Die obige beschriebene Theorie ist die Grundlage der Funktionalität des Viskosimeters nach Höppler. Es besteht aus einem geschlossenen Glaszylinder, welcher mit einer leichten Neigung am Fuß befestigt ist. Dieser Zylinder ist um 180° drehbar. Am Fuß befindet sich eine Libelle, die zur richtigen Ausrichtung der Apparatur verwendet wird. Innerhalb des Zylinders ist Wasser, das durch Schläuche mit einem Thermostat verbunden ist, welches das Wasser aufheizen kann.

Durch den Zylinder führt eine Glasröhre, die von außen durch Stöpsel verschlossen werden kann. Auf der Glasröhre sind 3 Striche, die jeweils einen Abstand von 5 cm haben. In die innere Röhre kann ein Medium und eine Kugel eingefüllt werden. Durch das von außen erwärmte Wasser werden Wirbel im inneren Medium vermieden. Bei diesem Experiment hat die größere verwendete Kugel näherungsweise den Durchmesser der Röhre. Die leichte Neigung der Apparatur wurde gewählt, um die unkontrollierte Bewegung zu vermeiden,

die bei einer senkrecht herabfallenden Kugel entstehen würde.

Auf die herabfallende Kugel wirken während des Falls drei Kräfte: Die Gravitationskraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$, die die Kugel nach unten beschleunigt, die Auftriebskraft \vec{F}_A und die Reibungskraft \vec{F}_R . Die Reibungskraft und Auftriebskraft wirken entgegengesetzt zur Schwerkraft. Aufgrund der Kräfte beschleunigt die Kugel im Medium bis sie eine konstante Endgeschwindigkeit erreicht, wenn sich das Kräftegleichgewicht $\vec{F}_G = \vec{F}_A + \vec{F}_R$ eingestellt hat. Die Viskosität η wird durch die empirische Formel

$$\eta = K \cdot (\rho_K - \rho_M) \cdot t \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{\eta}{(\rho_K - \rho_M) \cdot t} \quad (4)$$

beschrieben werden. K ist dabei eine Proportionalitätskonstante, ρ_K die Dichte der Kugel und ρ_M die Dichte des Mediums. Die Dichte der Kugel wird durch die Formel

$$\rho_K = \frac{m_K}{V_K} \quad (5)$$

bestimmt werden, wo bei m_K die Masse der Kugel ist und V_K das Volumen der Kugel. Das Volumen wird aus dem Durchmesser d_K durch

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_K}{2}\right)^3 \quad (6)$$

berechnet werden.

2.2 Vorbereitungsaufgaben

Wann bezeichnet man eine Strömung als "laminar"?

Eine Strömung ist dann laminar, wenn die einzelnen benachbarten Schichten des Mediums ohne gegenseitige Störung aneinander vorbeigleiten und keine Wirbel entstehen.

Wie lautet die Dichte und die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser als Funktion der Temperatur?

Die Dichte von destilliertem Wasser kann unterhalb einer Temperatur von 100 °C nicht als temperaturabhängige Formel beschrieben werden. Die Dichte ρ_{Wasser} bei der Temperatur von 20 °C beträgt $998.207 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. (Q[2])

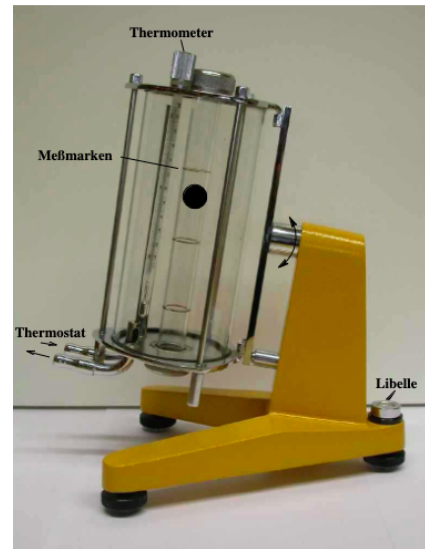


Abbildung 1: Kugelfallviskosimeter nach Höppler. (Q[3])

Außerdem gibt es auch keine spezielle Funktion für die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser. Die Andradesche Gleichung

$$\eta(T) = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \quad (7)$$

gilt auch für destilliertes Wasser. A und B sind Konstanten und T ist die Temperatur in Kelvin.

3 Durchführung

Zuerst wird der Durchmesser zweier Glaskugeln gemessen und das Volumen der Kugeln mithilfe von Gleichung (6) berechnet. Dieses Volumen und die durch den Übungsleiter gegebene Masse wird verwendet, um die Dichte der Kugeln mit Gleichung (5) zu bestimmen. Anschließend wird der Fuß des Viskosimeters mithilfe der Libelle waagerecht ausgerichtet.

Danach wird das Viskosimeter mit destilliertem Wasser gefüllt und die Kugel hineingegeben. Dabei ist darauf zu achten, dass sich keine kleinen Luftblasen am Rand oder an der Kugel absetzen. Falls diese auftreten, sollten sie mithilfe eines Glasstabes vorsichtig entfernt werden.

Danach wird das Viskosimeter mithilfe des Stopfens verschlossen. Zu Beginn der Messung der Fallzeit wird eine Seite des Viskosimeters als oben definiert, damit im Folgenden ein Unterschied gemacht werden kann zwischen „in Richtung der oberen Seite fallen“ (auch „hoch“ genannt) und „nicht in die Richtung der oberen Seite fallen“ (auch „runter“ genannt). Dies wird neben der Fallzeit vermerkt. Die Zeit wird mit einer Stoppuhr gemessen. Es muss darauf geachtet werden, dass die Kugel ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht hat, bevor sie in den Messbereich eintritt.

Die Fallzeit der kleinen Kugel wird insgesamt 20 Mal gemessen, somit fällt die Kugel auf einer Strecke von 10 cm 10 Mal „hoch“ und 10 Mal „runter“. Danach wird die Zeit bestimmt, welche die größere Kugel benötigt, um 5 cm zu fallen. Es werden insgesamt 10 Messwerte erhoben (5 Mal „hoch“ und 5 Mal „runter“).

Danach wird die Apparatekonstante K der großen Kugel mit Gleichung (4) berechnet. Dazu wird die gegebene Apparatekonstante für die kleine Kugel K_{kl} verwendet.

Anschließend werden durch Verwendung der großen Kugel Messdaten zu verschiedenen Temperaturen des destillierten Wassers aufgenommen. Es werden 10 unterschiedliche Temperaturen verwendet, die auf einer Skala von 20 °C bis 55 °C liegen. Bei jeder einzelnen Temperatur werden 4 Messwerte aufgenommen (jeweils 2 Mal „hoch“ und „runter“). Zwischen dem Erhöhen der Wassertemperatur und dem Aufnehmen der Messwerte muss eine möglichst konstante Zeit gewartet werden. Dadurch gleicht sich die Temperatur des destillierten Wassers im inneren Zylinder der Temperatur des umliegenden Wassers an. Mithilfe der Messungen wird im Anschluss die dynamische Viskosität $\eta(T)$ des destillierten Wassers und die Reynoldszahl bestimmt. Mit dieser wird überprüft, ob die Strömung laminar ist.

4 Auswertung

4.1 Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur

Zunächst wird die Dichte der kleinen Glaskugel ρ_{kl} durch die Gleichung (5) und Gleichung (6) bestimmt. Dafür werden die gegebene Masse $m_{kl} = 4.4531 \text{ g}$ und der gemessene Durchmesser $d_{kl} = (1.5570 \pm 0.0010) \text{ cm}$ verwendet.

$$\rho_{kl} = (2.253 \pm 0.004) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die betrachteten Fallzeiten der kleinen Kugel sind in dieser Tabelle erfasst:

Tabelle 1: Gemessene Fallzeiten der kleinen Kugel bei einer Strecke von 10 cm

$t_{\text{Runter}} [\text{s}]$	$t_{\text{Hoch}} [\text{s}]$
12.32	12.20
12.18	12.35
12.15	12.43
12.24	12.23
12.18	12.19
12.18	12.26
12.17	12.17
11.92	12.10
12.01	11.91
12.07	12.19

Anhand dieser Messdaten erhält man die folgenden Zeiten, die für die Berechnung der Viskosität benötigt werden:

$$t_{kl,r} = (12.14 \pm 0.11) \text{ s}$$
$$t_{kl,h} = (12.20 \pm 0.13) \text{ s}.$$

Die Viskosität von Wasser bei Raumtemperatur lässt sich mithilfe der Gleichung (3) und der angegebenen Apparatekonstante der kleinen Glaskugel $K_{kl} = 0.0760 \frac{\text{mPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}}$ bestimmen.

$$\eta_{\text{Hoch}} = (1.170 \pm 0.013) \text{ mPa} \cdot \text{s}$$
$$\eta_{\text{Runter}} = (1.164 \pm 0.011) \text{ mPa} \cdot \text{s}$$

4.2 Apparatekonstante der großen Glaskugel

Vorab wird erneut mit der Gleichung (5) und der Gleichung (6) die Dichte der großen Glaskugel bestimmt. Hierbei beträgt die gegebene Masse $m_{gr} = 4.9528 \text{ g}$ und der

gemessene Durchmesser $d_{\text{gr}} = (1.5760 \pm 0.0010) \text{ cm}$.

$$\rho_{\text{gr}} = (2.416 \pm 0.005) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die betrachteten Fallzeiten der großen Kugel sind in dieser Tabelle erfasst:

Tabelle 2: Gemessene Fallzeiten der großen Kugel bei einer Strecke von 5 cm

$t_{\text{Runter}} [\text{s}]$	$t_{\text{Hoch}} [\text{s}]$
34.61	34.70
34.78	34.64
34.69	35.00
34.87	34.86
34.69	34.56

Aus den Messdaten werden die folgenden Zeiten bestimmt:

$$t_{\text{gr,r}} = (34.73 \pm 0.09) \text{ s}$$

$$t_{\text{gr,h}} = (34.75 \pm 0.16) \text{ s}.$$

Folglich wird mit der Gleichung (4) und den zuvor berechneten Viskositäten die Apparatkonstante der großen Glaskugel bestimmt.

$$K_{\text{gr,r}} = (0.02364 \pm 0.00025) \frac{\text{mPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}}$$

$$K_{\text{gr,h}} = (0.02374 \pm 0.00030) \frac{\text{mPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}}$$

4.3 Bestimmung der Reynoldsen Zahl

Durch einsetzen der Werte in die Gleichung (1) ergeben sich für die kleine Glaskugel diese Reynoldszahlen:

$$Re_{\text{kl,r}} = (111.3 \pm 2.0)$$

$$Re_{\text{kl,h}} = (110.2 \pm 2.4) .$$

Analog erfolgt die Berechnung der Reynoldszahlen für die große Glaskugel.

$$Re_{\text{gr,r}} = (19.46 \pm 0.19)$$

$$Re_{\text{gr,h}} = (19.35 \pm 0.24)$$

Aus den Reynoldszahlen erschließt sich, dass sowohl bei der kleinen als auch bei der großen Glaskugel eine laminare Strömung entsteht, da alle Reynoldszahlen deutlich kleiner sind als $Re = 2300$.

4.4 Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser

Für die Auswertung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Wasser wird der natürliche Logarithmus von der Andradeschen Gleichung (7) gebildet. Somit entsteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Kehrwert von der Temperatur und dem natürlichen Logarithmus von der dynamischen Viskosität η .

$$\begin{aligned}\eta(T) &= A \cdot e^{\frac{B}{T}} \\ \Rightarrow \ln(\eta(T)) &= \ln(B) \cdot \frac{1}{T} + \ln(A)\end{aligned}\tag{8}$$

Die mithilfe von Gleichung (3) gemessenen Fallzeiten der großen Kugel bei variierter Temperatur sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Tabelle 3: Gemessene Fallzeiten der großen Kugel bei unterschiedlichen Temperaturen

T [°C]	t_{h1} [s]	t_{r1} [s]	t_{h2} [s]	t_{r2} [s]	$\rho(T)$ $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$ (Q[2])
31±1	28.76	28.26	28.27	28.80	0.99534
33±1	27.16	27.03	27.12	27.07	0.99470
34±1	26.76	27.01	26.75	26.76	0.99437
36±1	26.16	26.06	26.16	26.24	0.99369
40±1	24.32	24.23	24.40	24.24	0.99222
42±1	23.52	23.46	23.36	23.36	0.99144
43±1	22.84	22.81	22.87	23.27	0.99104
44±1	22.38	22.64	22.23	21.80	0.99063
47±1	21.32	21.69	21.38	21.24	0.98936
49±1	20.64	20.81	20.58	20.41	0.98848

Im Abschnitt 4.1 wurde bereits festgestellt, dass die dynamischen Viskositäten der beiden Fallrichtungen bei Raumtemperatur keine signifikante Differenz aufweisen. Aus diesem Grund werden bei dieser Auswertung die Fallrichtungen „hoch“, und „runter“ nicht mehr getrennt voneinander betrachtet. Demnach erhält man für die jeweiligen Temperaturen die folgenden Fallzeiten:

Tabelle 4: Fallzeiten der großen Kugel und die temperaturabhängige Viskositäten

T [°C]	t [s]	$\rho(T)$ $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$ (Q[2])	$\eta(T)$ [mPa · s]
31±1	28.510 ±0.250	0.99534	0.962 ±0.014
33±1	27.095 ±0.065	0.99470	0.908 ±0.011
34±1	26.885 ±0.125	0.99437	0.907 ±0.012
36±1	26.110 ±0.050	0.99369	0.882 ±0.011
40±1	24.275 ±0.045	0.99222	0.821 ±0.010
42±1	23.490 ±0.030	0.99144	0.795 ±0.010
43±1	22.825 ±0.015	0.99104	0.772 ±0.009
44±1	22.510 ±0.130	0.99063	0.762 ±0.010
47±1	21.505 ±0.185	0.98936	0.729 ±0.011
49±1	20.725 ±0.085	0.98848	0.703 ±0.009

Die in der Tabelle aufgelisteten dynamischen Viskositäten $\eta(T)$ erschließen sich aus der Gleichung (3) und den temperaturabhängigen Dichten. Mithilfe dieser Daten und der Gleichung (8) lassen sich die Messwerte sowie deren Unsicherheiten graphisch darstellen.



Abbildung 2: Lineare Ausgleichsgerade der Andradeschen Gleichung.

Anschließend erfolgt die obige lineare Regression aus der Andradeschen Gleichung (7). Anhand dieser linearen Regression und der Gleichung (8) werden die Konstanten A und B ermittelt. Hierbei entspricht A dem Ordinatenabschnitt und B der Steigung der linearen Ausgleichsgeraden.

$$\begin{aligned}\ln(A) &= -5.567 \pm 0.097 \iff A = 0.0038 \pm 0.0004 \\ B &= 1680 \pm 30\end{aligned}$$

5 Diskussion

Die berechneten Viskositäten von Wasser bei Raumtemperatur entsprechen trotz Unsicherheiten nicht dem Literaturwert $1.0016 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ (Q[1]). Die Abweichung, berechnet mit

$$\text{Abweichung} = \frac{\text{Messwert}}{\text{Literaturwert}}, \quad (9)$$

für η_{Hoch} beträgt ungefähr 16.8 %. Die Abweichung für η_{Runter} ist ungefähr 16.2 %. Dies kann unter anderem darauf zurückgeführt werden, dass die realistischen Messunsicherheiten wesentlich größer sein werden, als in der Auswertung angenommen. Bei der Messung der Fallzeit müsste zum Beispiel auch die Reaktionszeit der messenden Person einbezogen werden. Diese kann zu einem signifikanten Fehler führen. Außerdem haben die beiden Glaskugeln viele Dellen, welche zu turbulenteren Strömung führen könnten. Das fehlende Material an den Kugeln führt dazu, dass auch die angegebene Masse nicht mehr stimmen könnte. Diese Masse wurde außerdem ohne Fehler angegeben, was die Fehlerfortpflanzung verfälscht.

Die temperaturabhängige dynamischen Viskositäten stimmen ebenfalls nicht mit den Literaturwerten überein. Die Tendenz des Mediums weniger zäh zu sein bei höheren Temperaturen ist allerdings gleich, wie in der untenstehenden Tabelle (5) zu sehen. Daher ist es wahrscheinlich, dass der größte Teil der Abweichung dadurch zustande kommt, dass das destillierte Wasser zum Zeitpunkt der Messung noch nicht die Temperatur des umliegenden Wassers angenommen hat.

Tabelle 5: Vergleich der berechneten dynamischen Viskositäten und der Literaturwerte

T [°C]	$\eta(T)$ [mPa · s]	$\eta_{\text{lit}}(T)$ [mPa · s] (Q[1])
31±1	0.962 ±0.014	0.7805
33±1	0.908 ±0.011	0.7488
34±1	0.907 ±0.012	0.7337
36±1	0.882 ±0.011	0.7050
40±1	0.821 ±0.010	0.6527
42±1	0.795 ±0.010	0.6300
43±1	0.772 ±0.009	0.6186
44±1	0.762 ±0.010	0.6072
47±1	0.729 ±0.011	0.5761
49±1	0.703 ±0.009	0.5564

6 Originaldaten

Literatur

- [1] Kenneth Alambra. *Water Viscosity Calculator*. URL: <https://www.omnicalculator.com/physics/water-viscosity>.
- [2] Internetchemie.Info. *Wasser-Dichtetabelle*. URL: <https://www.internetchemie.info/chemie-lexikon/daten/w/wasser-dichtetabelle.php>.
- [3] *Versuch V207: Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.