

V354

## **Gedämpfte und erzwungene Schwingung**

Amelie Hater  
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le  
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.2023

Abgabe: 19.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Gedämpfte Schwingungen . . . . .	3
2.2 Erzwungene Schwingungen . . . . .	5
<b>3 Durchführung</b>	<b>7</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>7</b>
<b>5 Diskussion</b>	<b>9</b>
<b>Anhang</b>	<b>9</b>
Originaldaten . . . . .	9

# 1 Zielsetzung

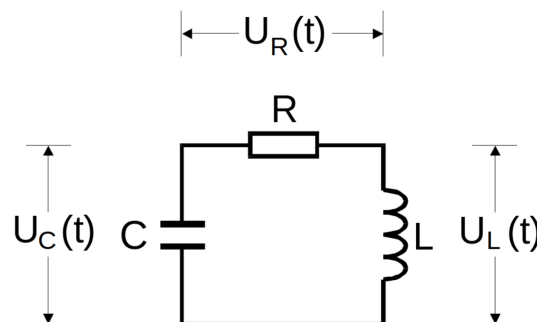
Das Ziel dieses Versuches ist sich mit verschiedene gedämpften und erzwungen Schwingungen innerhalb einer Schaltung bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen, auseinanderzusetzen. Insbesondere wird sich mit einer gedämpften Schwingung, dem aperiodischen Grenzfall und Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung beschäftigt.

## 2 Theorie

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit Induktivität  $L$  und einem Kondensator mit Kapazität  $C$ . In diesem gilt Energieerhaltung, was bedeutet, dass die Gesamtenergie, die im Schwingkreis gespeichert ist, konstant bleibt. Diese Gesamtenergie setzt sich aus der Energie zusammen, die im Magnetfeld der Spule gespeichert ist und der Energie, die im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert ist. Diese beiden Energieformen oszillieren verlustfrei im Schwingkreis.

### 2.1 Gedämpfte Schwingungen

In einem gedämpften Schwingkreis ist zusätzlich zu der Spule und dem Kondensator ein ohmscher Widerstand  $R$  eingebaut, an dem elektrische Energie konstant in Wärmeenergie umgewandelt wird und dadurch das System verlässt. Daher ist keine Energieerhaltung im gedämpften Schwingkreis gegeben. Allerdings findet trotzdem eine Oszillation der einzelnen Energien statt, die Gesamtenergie nähert sich allerdings stetig der 0 an. Das Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt.



**Abbildung 1:** Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises mit Spule, ohmschen Widerstand und Kondensator.

Das Verhalten des gedämpften Schwingkreises lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad (1)$$

beschreiben.  $I$  ist dabei der im Schwingkreis fließende Strom. Diese Gleichung wird durch die Funktion

$$I = e^{-2\pi\mu t} \cdot (B_1 \cdot e^{2\pi\nu it} + B_2 \cdot e^{-2\pi\nu it}) \quad (2)$$

gelöst. Für diese Funktion werden die Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \text{ und } 2\pi\nu := \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

verwendet. Für das Verhalten der Schwingung ist entscheidend, ob  $\nu$  eine imaginäre oder reelle Zahl ist. Dies hängt davon ab in welchem Größenverhältnis die beiden Summanden unter der Wurzel stehen.

### 1. Schwingfall

Damit der Schwingfall eintritt, in dem die Amplitude harmonisch mit einer bestimmten Frequenz oszilliert, während sie sich auf den Nullpunkt zubewegt, muss  $\nu$  eine reelle Zahl sein. Dies wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

gilt. Die Funktion von  $I$  vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$I = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \eta). \quad (3)$$

$A_0$  und  $\eta$  sind reelle Konstanten. Die Abklingdauer  $T_{\text{ex}}$  der Amplitude bezeichnet die Zeit, die benötigt wird, damit die Amplitude auf den  $e$ -ten Teil des ursprünglichen Wertes abgenommen hat. Für die Abklingdauer gilt

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (4)$$

Die einhüllende Funktion zur gedämpften Schwingung ist die Funktion  $\pm e^{-2\pi\mu t}$ .

### 2. Kriechfall

Der Kriechfall tritt ein, eine aperiodische Dämpfung vorliegt, wodurch  $\nu$  eine imaginäre Zahl ist, welche durch

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

zustandekommt. Die Lösungsfunktion von  $I$  enthält nun keinen oszillierenden Anteil mehr. Anhängig von der Wahl der Konstanten  $B_1$  und  $B_2$  erreicht  $I$  zu Beginn ein Extremwert oder geht direkt monoton auf den Nullpunkt zu. Kriechfälle für verschiedene Konstanten sind als durchgezogene, farbige Striche in Abbildung (2) dargestellt. Für große Zeiten gilt

$$I \sim e^{-2\pi(\mu - \nu i)t}.$$

### 3. Aperiodischer Grenzfall

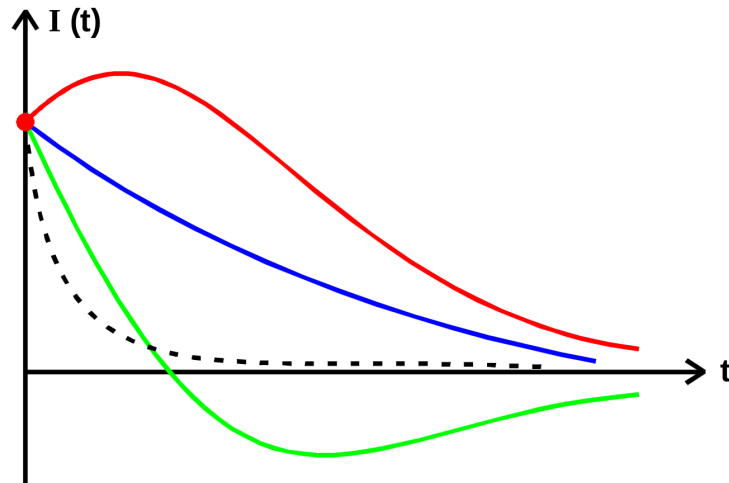
Der aperiodische Grenzfall ist ein Spezialfall in dem  $I$  am schnellsten gegen den Nullpunkt geht. Für diesen Fall gilt

$$\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2.$$

Daraus folgt, dass  $nu = 0$  ist. Die Funktion  $I$  vereinfacht sich zu

$$I = D \cdot e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

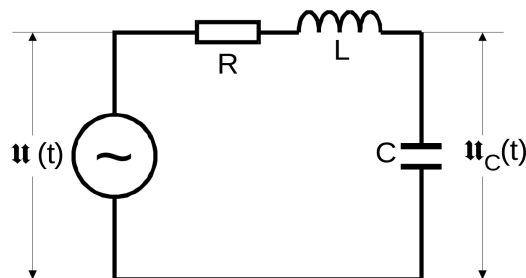
$D$  ist eine reelle Konstante. In Abbildung (2) ist der aperiodische Grenzfall als gestrichelte, schwarze Linie dargestellt.



**Abbildung 2:** Verhalten von Strom  $I$  in einem Schwingkreis bei aperiodischer Dämpfung.

## 2.2 Erzwungene Schwingungen

In einem Schwingkreis entsteht eine erzwungene Schwingung, wenn dieser eine äußere periodische Krafteinwirkung erfährt. In diesem Fall ist die Kraft eine Spannungsquelle mit sinusförmiger Wechselspannung  $U(t)$ . Dieser Schwingkreis ist in Abbildung (3) zu sehen.



**Abbildung 3:** Schwingkreis an den eine sinusförmige Wechselstromquelle angeschlossen ist.

Die Differentialgleichung

$$LC \cdot \ddot{U}_C + RC \cdot \dot{U}_C + U_C = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (5)$$

beschreibt das System.  $U_0$  ist eine Konstante. Diese Gleichung wird durch den Ansatz  $U_C = U \cdot e^{\omega i t}$  mit

$$U = \frac{U_0 \cdot (1 - LC\omega^2 - \omega RCi)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (6)$$

gelöst. Der Betrag von  $U$  beträgt

$$|U| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (7)$$

und die Phase ist

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \quad (8)$$

Die Funktion

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (9)$$

löst die Differentialgleichung (5).  $U_C(\omega)$  hat ein Maximum für die Resonanzfrequenz  $\omega_{\text{res}}$ . Diese beträgt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

Für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  strebt  $U_C(\omega)$  gegen die Erregeramplitude  $U_0(\omega)$ . Für den Fall der schwachen Dämpfung, für den

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$$

gilt, nähert sich  $\omega_{\text{res}}$   $\omega_0$  von der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall wird das Maximum von  $U_C$  durch

$$U_{C,\text{max}} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

ausgedrückt. Falls  $R \rightarrow 0$  geht  $U_{C,\text{max}} \rightarrow \infty$ . Der Vorfaktor  $\frac{1}{\omega_0 RC}$  heißt Resonanzüberhöhung oder auch Güte  $q$  des Schwingkreises. Die Breite der Resonanzkurve wird mithilfe der Frequenzen  $\omega_+$  und  $\omega_-$  beschrieben, bei denen

$$U_C(\omega_{+,-}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{C,\text{max}}$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$$

gilt, wird die Breite der Resonanzkurve durch

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (10)$$

ausgedrückt. Die Güte  $q$  wird ausgedrückt durch

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}. \quad (11)$$

### 3 Durchführung

### 4 Auswertung

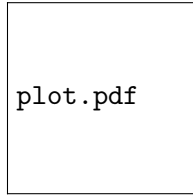


Abbildung 4: Plot.

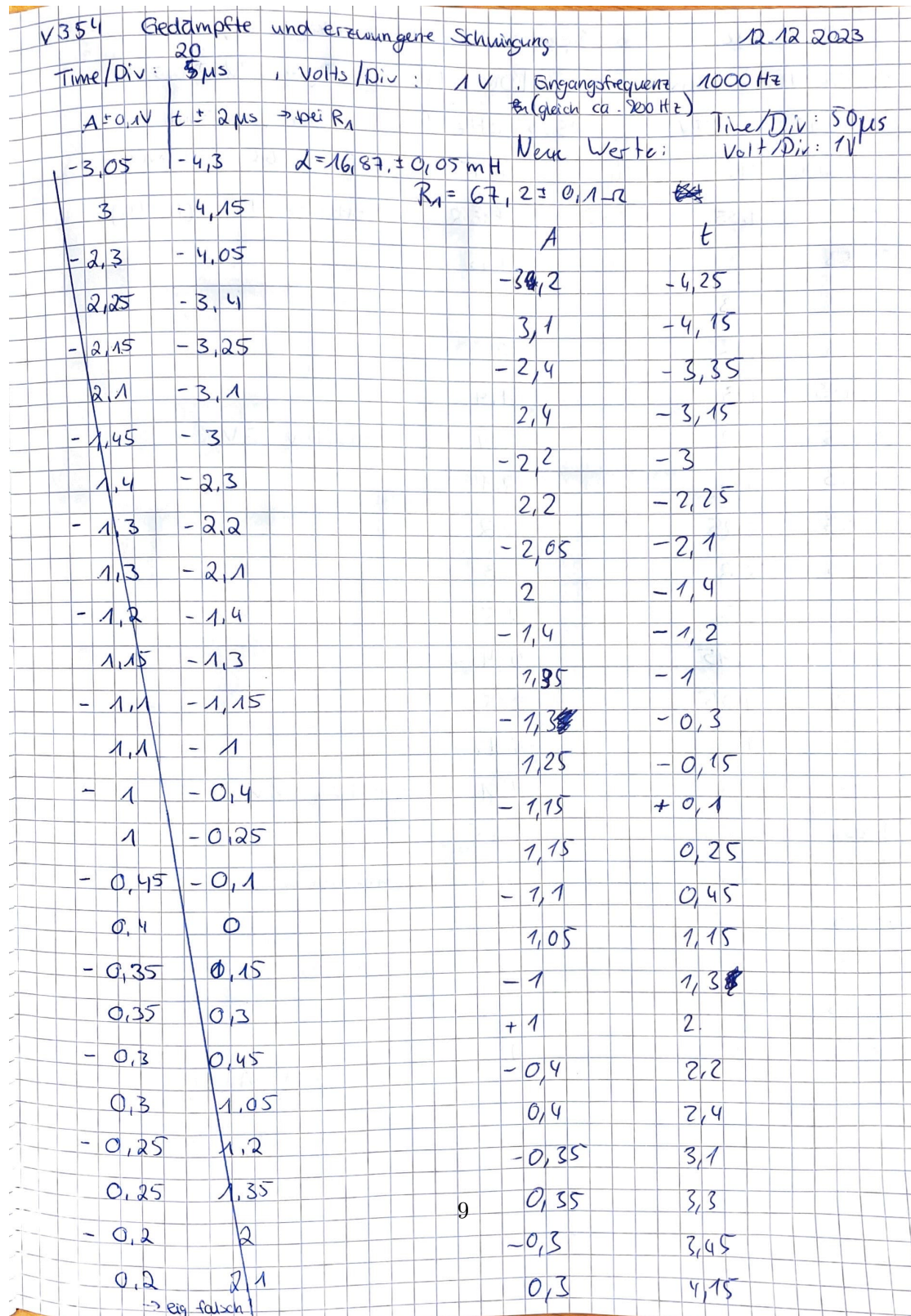




## 5 Diskussion

### Anhang

### Originaldaten



b)  $R = 4,5 \text{ k}\Omega$  , bei Frequenz =  $192,8 \text{ Hz}$  Rechteckspannung

c) Time/Div:  $20 \mu\text{s}$  , Volts/Div:  $1 \text{ V}$  ,  $R_2 = 682, \pm 0,5 \Omega$

Volts/Div:  $5 \text{ V}$  ,  $25,53 \text{ kHz}$  /  $L = 16,87 \pm 0,05 \text{ mH}$

$C = 2,060 \pm 0,003 \text{ nF}$

$f$ in kHz	$U_C$	$U_o$	$R_T$	
25,53	1,35	2,15	<del>1,45</del> 2	Volts/Div: $1 \text{ V}$ (für $U_C$ )
26,53	1,35	- " -	1,45	
24,53	1,3		2	
23,03	1,2		2,1	
27,03	1,3		1,4	
28,53	3,2		1,4	Volts/Div: $2 \text{ V}$
22,53	3,1		2,1	
20,53	2,25		2,2	
30,53	2,2		1,3	
33,53	1,3		2,5	
17,53	1,45		2,4	
13,53	1,25		3,35	
37,53	1,00		1,15	
40,03	1,3		1,1	Volts/Div: $1 \text{ V}$
<del>10,53</del> 11,03	2,35		4,25	
15,53	3,2		3,1	<del>Volts/Div: <math>2 \text{ V}</math></del>
35,53	2,3		1,2	
32,03	2		1,3	Volts/Div: $2 \text{ V}$
19,03	2,1		2,3	
28,03	3,3		1,4	

m.m.v.  
M/m