V106

Gekoppelte Pendel

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 28.11.2023

Abgabe: 05.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Schwingungsdauer, Schwebungsdauer und die Kopplungskonstante K gekoppelter Pendel bei verschiedener Schwingungsformen zu bestimmen. Es werden gleichsinnige Schwingungen, gegensinnige Schwingung und gekoppelte Schwingung betrachtet.

2 Theorie

Zunächst wird ein einzelnens ungekoppeltes Fadenpendel mit Fadenlänge l betrachtet. Wird die Masse am Stab aus der Ruhelage ($\varphi = 0$) ausgelenkt, wirkt die Gravitationskraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ als Rückstellkraft der Bewegung entgegen. Dies bewirkt ein Drehmoment $M = D_\text{P} \cdot \varphi$ auf das Pendel. φ ist dabei der Auslenkungswinkel aus der Ruhelage und D_P die Winkelrichtgröße des Pendels. Die Differentialgleichung, die das System beschreibt, lautet für die angenommene Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) = \varphi$ für $\varphi \leq 10°$

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D_\text{P} \cdot \varphi = 0\,.$$

J bezeichnet das Trägheitsmoment des Pendels. Diese Differentialgleichung ist die des harmonischen Oszillators und beschreibt eine harmonische Schwingung mit Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D_\text{P}}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Die Periodendauer T und die Schwingungsfrequenz ω sind verbunden durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ bzw.} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{2}$$

Zwei identische Pendel, die durch eine Feder mit Federkonstante K gekoppelt sind, haben eine andere Bewegungsgleichung. Auf jeden Pendel wirkt dann ein zusätzliches Drehmoment. Auf das eine Pendel wirkt $M_1 = D_\text{F} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$ und auf das andere wirkt $M_2 = D_\text{F} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$. Durch diese Kopplung entstehen die beiden gekoppelten Differentialgleichungungen

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + D\varphi_1 &= D_\text{F} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\varphi}_2 + D\varphi_2 &= D_\text{F} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)\ , \end{aligned}$$

die das System vollkommen beschreiben. Mithilfe eines geeigneten Winkels können die Gleichungen entkoppelt werden, sodass sich das System als Überlagerung von zwei Eigenschwingungen darstellen lässt. Diese Eigenschwingungen sind harmonische Schwingungen mit Frequenz ω_1 und ω_2. Je nach Auslenkungswinkel α_1 und α_2 der Pendel beim Zeitpunkt $t = 0$ entstehen verschiedene Schwingungsarten.

Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, schwingt das Pendel gleichsinnig. Bei dieser Bewegung übt die Feder keine Kraft aus, da diese durch die gleich große Auslenkung beider Pendel, weder gestreckt noch gestaucht wird. Die Schwingungen der beiden Pendel sind gleich. Zudem sind diese identisch zu einem ungekoppelten Fadenpendel, welches um denselben Winkel ausgelenkt wurde. Daher ist die Schwingfrequenz ω_+ bei diesen konkreten Anfangsbedingungen

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \tag{3}$$

dieselbe wie bei einem ungekoppelten Fadenpendel.
Bei einer gegensinnigen Schwingung ist $\alpha_1 = -\alpha_2$. Die Kopplungsfeder übt dann eine gleich große Kraft auf die Pendel aus. Die Kraft zeigt immer zur Mitte zwischen den beiden Pendeln. Die Schwingung bei diesen Anfangsbedingungen ist symmetrisch. Die Frequenz $\omega\_$ wird durch

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1+\mathrm{K}}{1-\mathrm{K}}} \tag{4}$$

berechnet. Falls nur ein Pendel aus der Ruhelage ausgelenkt wird, heißt die entstandene Bewegung gekoppelte Schwingung. Dann gilt für die Auslenkungen $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$. Für $t > 0$ führt das zweite Pendel eine Schwingung aus, ähnlich zu der eines ungekoppelten Fadenpendels. Bei fortschreitender Zeit wird die Pendelbewegung des zweiten Pendels langsamer bis dieses vollkommen still steht. Während die Schwiungung des zweiten Pendels langsamer wird, nimmt die des ersten Pendels zu bis dieses die maximale Auslenkung erreicht, wenn das zweite Pendel stillsteht. Dieses Muster wiederholt sich dauerhaft. Diese Bewegung kommt dadurch zustande, dass die Feder für eine Energieübertragung zwischen den Pendeln sorgt. Die zwischen zwei Stillständen eines Pendels vergangene Zeit wird Schwebung genannt. Die Schwebungsfrequenz ω_S wird durch

$$\omega_\mathrm{S} = \omega_+ - \omega_- \tag{5}$$

berechnet. Die sich daraus ergebene Schwebungsdauer T_S ist

$$T_\mathrm{S} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-}\,. \tag{6}$$

2.1 Vorbereitungsaufgaben

Wann spricht man von einer harmomischen Schwingung?
Eine Schwingung ist dann harmonisch, wenn die rücktreibende Kraft linear ist (d.h. proportional zur Auslenkung) und sich die Bahnkurve als Cosinus bzw. Sinus beschreiben lässt. Somit ist die Bahnkurve die Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Wie weit kann man ein Fadenpendel von $l = 70$ cm auslenken, damit die Kleinwinkelnäherung noch gilt?
Das Ausschlaggebende bei der Kleinwinkelnäherung ist, dass der Winkel α möglichst

keinen Wert über 10° annimmt, damit die Taylorentwicklung des $\sin(\alpha)$ mit Entwicklungspunkt $\alpha = 0$ noch gültig ist. Der Winkel α im Fadenpendelsystem wird durch

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{l}$$
$$\Leftrightarrow x = \sin(\alpha) \cdot l$$

ausgdrückt. x ist dabei die Auslenkung aus der Ruhelage, senkrecht zur Ruhelage. Einsetzen von $\alpha = 10°$ und $l = 70$ cm ergibt eine maximale Auslenkung von

$$x = 12,16 \text{ cm}\,.$$

3 Aufbau

Der Versuch wird mithilfe zweier Fadenpendel durchgeführt, die an einer Wand befestigt sind. Da beide Pendel identisch sind wird im Folgenden nur der Aufbau eines Pendel beschrieben. Das Pendel besteht aus einem Metallstab, der an einer reibungsarmen Aufhängung befestigt ist, und einer Masse ($m = 1\,\text{kg}$), die entlang des Stabes verschoben werden kann. Die Pendellänge ist die Länge von der Aufhängung bis zum Mittelpunkt der Masse und wird mithilfe eines Maßbandes gemessen. Die Pendel sind über eine Feder verbunden. Die Schwingungsdauern werden mithilfe einer Stopuhr gemessen.

4 Durchführung

Zunächst werden bei beiden Pendeln die Massen auf dieselbe Höhe eingestellt und notiert. Danach wird die Kopplungsfeder entfernt und 10 Mal die fünffache Schwingungsdauer $5 \cdot T$ der beiden Pendel bei gleicher Auslenkung gemessen. Die Schwingungsdauern der beiden Pendel sollte im Rahmen der Messungenauigkeit übereinstimmen. Falls dies nicht der Fall ist, werden die Höhen der Massen nachjustiert und die Messung wiederholt. Wenn die Schwingungsdauern übereinstimmen sind die Pendel als annähernd identisch anzunehmen und der Versuch kann fortgeführt werden. Die Pendel werden durch die Kopplungsfeder verbunden und die fünffache Schwingungsdauer für gleichphasige $(5 \cdot T_+)$ und gegenphasige $(5 \cdot T_-)$ Schwingungen gemessen. Die Pendel sollten bei den einzelnen Messungen immer um dieselbe Strecke ausgelenkt werden, welche innerhalb der Grenzwerte für eine Kleinwinkelnäherung liegen muss. Die fünffache Schwingungsdauer wird jeweils 10 Mal gemessen für die gleichphasige und gegenphasige Schwingung. Danach werden Messungen zur gekoppelten Schwingung ausgeführt. Die fünffache Schwebungsdauer und fünffache Schwebungsdauer wird je 10 Mal gemessen. Im Anschluss wird die Länge der Pendel verändert und alle beschriebenen Messungen erneut durchgeführt.

5 Auswertung

5.1 Kurzes Pendel

Zunächst werden die beiden Schwingungen der einzelnen Pendel bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$ verglichen. Die gemessene fünffache Schwingungsdauer $5\,T$ des linken als auch des rechten Pendels sind in der Tabelle (1) aufgelistet.

Tabelle 1: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$.

linkes Pendel $5\,T_{\mathrm{l},1}$ [s]	rechtes Pendel $5\,T_{\mathrm{r},1}$ [s]
6,21	6,19
6,07	6,24
6,15	6,24
6,19	6,30
6,24	6,05
6,10	6,15
6,22	6,18
6,14	6,18
6,19	6,14
6,35	6,25

Aus dieser Tabelle und mit den Gleichungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})}$$

lassen sich die Mittelwerte sowie die Standardabweichung des Mittelwerts bestimmen. x_i beschreibt die einzelnen Messdaten und n die Anzahl der Messungen. Somit ergeben sich die Schwingungsdauern und deren Standardabweichungen

$$T_{\mathrm{l,exp.},1} = (1,237 \pm 0,005)\ \mathrm{s}$$
$$T_{\mathrm{r,exp.},1} = (1,238 \pm 0,004)\ \mathrm{s}\,.$$

Aufgrund der Fehlertolernz werden die beiden Pendel als identisch angenommen. Daher werden im Folgenden drei verschiedene Schwingungsarten untersucht.

5.1.1 Gleichphasige Schwingung

Die gemessene fünffache Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung sind in der Tabelle (2) aufgeführt.

Tabelle 2: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$ und gleichphasiger Schwingung.

$5\,T_{+,1}$ [s]
5,97
5,88
5,92
5,98
5,97
5,99
5,95
6,02
6,10
5,93

Die aus der Tabelle (2) hergeleitete gemittelte Schwingungsdauer mit der Standardabweichung lautet

$$T_{+,\mathrm{exp.},1} = (1,194 \pm 0,004)\ \mathrm{s}\,.$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3) in die Gleichung (2) wird die theoretische Schwingungsdauer der gleichphasigen Schwingung bestimmt. Daraus folgt

$$T_{+,\mathrm{theo.},1} = 1,144\,\mathrm{s}\,.$$

Aus der Gleichung (1) und der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\varDelta\omega = \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T^2}\cdot \varDelta T\right)^2}$$

wird, durch Einsetzen von $T_{\mathrm{gl},1}$, die Schwingungsfrequenz

$$\omega_{+,\mathrm{exp.},1} = (5,261 \pm 0,017)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

berechnet. Anhand der Gleichung (3) wird die theoretische Schwingungsfreqeunz der gleichphasigen Schwingung

$$\omega_{+,\mathrm{theo.},1} = 5,494\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

bestimmt.

5.1.2 Gegenphasige Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern der gegenphasigen Schwingung bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$ sind in der Tabelle (3) aufgeführt.

Tabelle 3: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $32,5\,\mathrm{cm}$ und gegenphasiger Schwingung.

$5\,T_{-,1}$ [s]
5,10
5,20
5,13
5,45
5,08
5,06
5,08
5,06
5,30
5,10

Anhand dieser Daten lassen sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung berechnen. Somit ergibt sich

$$T_{-,\mathrm{exp.},1} = (1,031 \pm 0,008)\ \mathrm{s}\,.$$

Für die Bestimmung der theoretischen Schwingungsdauer und Schwingungsfrequenz einer gegenphasigen Schwingung wird die Kopplungskonstante K benötigt. Da diese nicht gegeben ist, wird die Kopplungskonstante durch Einsetzen von $T_{+,1}$ und $T_{-,1}$ in die Gleichung (**??**) berechnet. Die Messunsicherheit der Kopplungskonstante ergibt sich aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{4 \cdot T_+ \cdot T_-^2}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \Delta T_+\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot T_+^2 \cdot T_-}{(T_+^2 + T_-^2)^2} \cdot \Delta T_-\right)^2}\,.$$

Daraus folgt

$$K_1 = (0,146 \pm 0,008)\ .$$

Anschließend lässt sich die theoretische Schwingungsdauer mithilfe der Gleichungen (2) und (4) bestimmen. Diese lautet

$$T_{-,\mathrm{theo.},1} = (0,988 \pm 0,008)\ \mathrm{s}\,.$$

Die empirische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\text{exp.},1} = (6,09 \pm 0,05)\ \frac{1}{\text{s}}$$

wird durch $T_{-,1}$ und der Gleichung (1) berechnet. Aus der Gleichung (4) ergibt sich die folgendene theoretische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\text{theo},1} = (6,36 \pm 0,05)\ \frac{1}{\text{s}}\,.$$

5.1.3 Gekoppelte Schwingung

In der Tabelle (4) sind die Schwingungsdauer und die Schwebung einer gekoppelten Schwingungen aufgelistet.

Tabelle 4: Gemessene fünffache Schwingungsdauer und Schwebung bei einer Länge von $32,5\,\text{cm}$ und gekoppelter Schwingung.

$5\,T_1$ [s]	$5\,T_{\text{S},1}$ [s]
5,09	35,53
4,93	35,94
4,76	35,56
5,03	35,58
5,56	35,63
5,20	35,58
5,69	35,50
5,70	35,44
6,50	35,55
6,46	35,64

Aus dieser Tabelle lassen sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung

$$T_{1,\text{exp.}} = (1,10 \pm 0,04)\ \text{s}$$

bestimmen. Durch Einsetzen der Schwingungsdauer $T_{1,\text{exp.}}$ in die Gleichung (1) ergibt sich die Schwingungsfreqeunz

$$\omega_{1,\text{exp.}} = (5,72 \pm 0,20)\ \frac{1}{\text{s}}\,.$$

Anhand der Messwerte aus der Tabelle (4) werden die gemittelte Schwebung und die Standardabweichung

$$T_{\text{S,exp.},1} = (7,119 \pm 0,009)\ \text{s}$$

berechnet. Der theoretische Wert berechnet sich mit der Gleichung (6) und beträgt

$$T_{\mathrm{S,theo},1} = (7,2 \pm 0,4)\ \mathrm{s}\,.$$

Die aus der Gleichung (1) ermittelte Schwingungsfreqeunz der Schwebung, durch Einsetzen von $T_{\mathrm{S,exp.},1}$, lautet

$$\omega_{\mathrm{S,exp.},1} = (0,8826 \pm 0,0011)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

Mithilfe der Gleichung (5) wird die theoretische Schwingungsfreqeunz berechnet. Der Betrag davon lautet

$$\omega_{\mathrm{S,theo.},1} = (0,87 \pm 0,05)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

5.2 Langes Pendel

Zunächst werden erneut die beiden einzelnen Schwingungen bei einer Länge von 65,3 cm miteinander verglichen. Die dafür gemessenen Schwingungsdauern sind in der Tabelle (5) aufgeführt.

Tabelle 5: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von 65,3 cm.

linkes Pendel $5\,T_{\mathrm{l},2}$ [s]	rechtes Pendel $5\,T_{\mathrm{r},2}$ [s]
7,99	7,96
8,04	7,96
7,96	8,11
7,99	7,97
8,04	7,96
8,17	8,04
7,92	8,14
7,94	8,16
7,89	7,97
8,18	8,14

Aus der Tabelle ergeben sich die gemittelten Schwingungsdauern und deren Standardabweichungen

$$T_{\mathrm{l,exp.},2} = (1,602 \pm 0,006)\ \mathrm{s}$$
$$T_{\mathrm{r,exp.},2} = (1,608 \pm 0,006)\ \mathrm{s}\,.$$

Aufgrund der Fehlertoleranz werden die beiden Pendel erneut als identisch angenommen und die drei verschiedene Schwingungsarten untersucht.

5.2.1 Gleichphasige Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern einer gleichphasigen Schwingung bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ sind in der Tabelle (6) aufgelistet.

Tabelle 6: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ und gleichphasiger Schwingung.

$5\,T_{+,2}$ [s]
7,82
8,09
7,70
8,06
7,83
7,95
7,65
7,72
7,72
7,83

Aus diesen Werten ergeben sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung

$$T_{+,\mathrm{exp.},2} = (1,567 \pm 0,010)\ \mathrm{s}\,.$$

Die theoretische Schwingungsdauer lässt sich anhand der Gleichungen (2) und (3) bestimmen und beträgt

$$T_{+,\mathrm{theo.},2} = 1,621\,\mathrm{s}\,.$$

Mit der Gleichung (1) und $T_{+,\mathrm{exp.2}}$ lässt sich die Schwingungsfreqeunz

$$\omega_{+,\mathrm{exp.},2} = (4,009 \pm 0,025)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

berechnen. Die theoretische Schwingungsfrequenz

$$\omega_{+,\mathrm{theo.},2} = 3,876\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

ergibt sich aus der Gleichung (3).

5.2.2 Gegenphasige Schwingung

In der Tabelle (7) sind die gemessenen Schwingungsdauern bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ einer gegenphasigen Schwingung.

Tabelle 7: Gemessene fünffache Schwingungsdauer bei einer Länge von $65,3\,\mathrm{cm}$ und gegenphasiger Schwingung.

$5\,T_{-,2}$ [s]
7,18
7,09
7,04
7,01
7,24
7,13
7,06
7,10
7,18
6,95

Aus dieser Tabelle ergeben sich die gemittelte Schwingungsdauer und die Standardabweichung

$$T_{-,\mathrm{exp},2} = (1,420 \pm 0,006)\ \mathrm{s}\,.$$

Um die theoretische Schwingungsdauer zu bestimmt wird zunächst die Kopplungskonstante K mit der Gleichung (**??**) bestimmt. Daraus ergibt sich

$$K_2 = 0,099 \pm 0,007\,.$$

Durch Einsetzen von Gleichung (4) in die Gleichung (2) wird die theoretische Schwingungsdauer

$$T_{-,\mathrm{theo.},2} = (1,468 \pm 0.011)\ \mathrm{s}$$

berechnet. Durch Einsetzen von $T_{-,\mathrm{exp},2}$ in die Gleichung (1) wird die Schwingungsfrequenz

$$\omega_{-,\mathrm{exp.},2} = (4,426 \pm 0,017)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

bestimmt. Für die theoretische Schwingungsfrequenz ergibt sich aus der Gleichung (4)

$$\omega_{-,\mathrm{theo.},2} = (4,279 \pm 0,031)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

5.2.3 Gekoppelte Schwingung

Die gemessenen Schwingungsdauern bei der gekoppelten Schwingung sind in der Tabelle (8) aufgeführt.

Tabelle 8: Gemessene fünffache Schwingungsdauer und Schwebung bei einer Länge von 65, 3 cm und gekoppelter Schwingung.

$5\,T_2$ [s]	$5\,T_{S,2}$ [s]
7,63	78,36
7,89	78,86
7,73	78,50
8,16	78,82
7,60	78,46
7,60	78,89
7,60	78,58
7,61	78,81
7,69	78,93
7,78	78,82

Aus diesen Messwerten lässt sich die gemittelte Schwingungsdauer mit der Standardabweichung

$$T_{2,\mathrm{exp.}} = (1,546 \pm 0,011)\ \mathrm{s}$$

ermitteln. Die Schwingungsfrequenz wird aus der Gleichung (1) berechnet. Daraus folgt

$$\omega_{2,\mathrm{exp.}} = (4,065 \pm 0,030)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

Die gemittelte Schwebung mit der Standardabweichung wird anhand der Messwerte aus der Tabelle (8) berechnet. Somit ergibt sich

$$T_{\mathrm{S,exp.},2} = (15,741 \pm 0,013)\ \mathrm{s}\,.$$

Mithilfe der Gleichung (6) wird die folgende theoretische Schwebung bestimmt

$$T_{\mathrm{S,theo.},2} = (15,6 \pm 1,2)\ \mathrm{s}\,.$$

Durch Einsetzen von $T_{\mathrm{S,exp.},2}$ in Gleichung (1) wird die Schwebungsfrequenz

$$\omega_{\mathrm{S,exp.},2} = (0,39917 \pm 0,00033)\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

berechnet. Anhand der Gleichung (5) lässt sich die theoretische Schwebungsfrequenz ermitteln. Der Betrag davon lautet

$$\omega_{\mathrm{S,exp.},2} = (0,404 \pm -0,031)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$

6 Diskussion

$$\text{rel. Abweichung} = \frac{|\text{exp. Wert} - \text{theo. Wert}|}{\text{theo. Wert}}$$

Literatur

[1] Unknown. *V106: Gekoppelte Pendel*. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2023.

Anhang

Originaldaten