V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingung

Amelie Hater
amelie.hater@tu-dortmund.de

Ngoc Le
ngoc.le@tu-dortmund.de

Durchführung: 12.12.2023

Abgabe: 19.12.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuches ist sich mit verschiedene gedämpften und erzwungen Schwingungen innerhalb einer Schaltung bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen, auseinanderzusetzen. Insbesondere wird sich mit einer gedäpften Schwingung, dem aperiodischen Grenzfall und Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung beschäftigt.

2 Theorie

Ein ungedämpfter Schwingkreis besteht aus einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator mit Kapazität C. In diesem gilt Energieerhaltung, was bedeutet, dass die Gesamtenergie, die im Schwingkreis gespeichert ist, konstant bleibt. Diese Gesamtenergie setzt sich aus der Energie zusammen, die im Magnetfeld der Spule gespeichert ist und der Energie, die im elektrischen Feld des Kondensators gespeichert ist. Diese beiden Energieformen oszillieren verlustfrei im Schwingkreis.

2.1 Gedämpfte Schwingungen

In einem gedämpften Schwingkreis ist zusätzlich zu der Spule und dem Kondensatir ein ohmscher Widerstand R eingebaut, an dem elektrische Energie konstant in Wärmeenergie umgewandelt wird und dadurch das System verlässt. Daher ist keine Energieerhaltung im gedämpften Schwingkreis gegeben. Allerdings findet trotzdessen eine Oszillation der einzelnen Energien statt, die Gesamtenergie nähert sich allerdings stetig der 0 an. Das Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises ist in Abbildung (1) dargestellt.

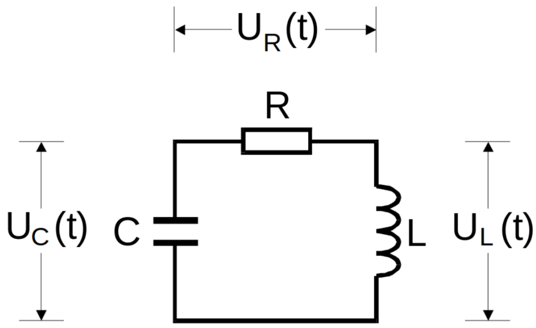


Abbildung 1: Schaltbild eines gedämpften Schwingkreises mit Spule, ohmschen Widestand und Kondensator.

Das Verhalten des gedämpften Schwingkreises lässt sich durch die Differentialgleichung

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \tag{1}$$

beschreiben. I ist dabei der im Schwingkreis fließende Strom. Diese Gleichung wird durch die Funktion

$$I = \mathrm{e}^{-2\pi\mu t} \cdot \left(\mathrm{B}_1 \cdot \mathrm{e}^{2\pi\nu i t} + \mathrm{B}_2 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi\nu i t}\right) \tag{2}$$

gelöst. Für diese Funktion werden die Abkürzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \text{ und } 2\pi\nu := \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

verwendet. Für das Verhalten der Schwingung ist entscheident, ob ν eine imaginäre oder reele Zahl ist. Dies hängt davon ab in welchem Größenverhältnis die beiden Summanden unter der Wurzel stehen.

1. Schwingfall
Damit der Schwingfall eintritt, in dem die Amplitude harmonisch mit einer bestimmten Frequenz oszilliert, während sie ich auf den Nullpunkt zubewegt, muss ν eine reele Zahl sein. Dies wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

gilt. Die Funktion von I vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$I = \mathrm{A}_0 \cdot \mathrm{e}^{-2\pi\mu t} \cdot \cos\left(2\pi\nu t + \eta\right). \tag{3}$$

A_0 und η sind reele Konstanten. Die Abklingdauer T_{ex} der Amplitude bezeichnet die Zeit, die benötigt wird, damit die Amplitude auf den e-ten Teil des ursprünglichen Wertes abgenommen hat. Für die Abklingdauer gilt

$$T_{\mathrm{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \tag{4}$$

Die einhüllende Funktion zur gedämpften Schwingung ist die Funktion $\pm\mathrm{e}^{-2\pi\mu t}$.

2. Kriechfall
Der Kriechfall tritt ein, eine aperiodische Dämpfung vorliegt, wodurch ν eine imaginäre Zahl ist, welche durch

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

zustandekommt. Die Lösungsfunktion von I enthält nun keinen oszillierenden Anteil mehr. Anhängig von der Wahl der Konstanten B_1 und B_2 erreicht I zu Beginn ein Extremwert oder geht direkt monoton auf den Nullpunkt zu. Kriechfälle für verschiedene Konstanten sind als durchgezogene, farbige Striche in Abbildung (2) dargestellt. Für große Zeiten gilt

$$I \sim \mathrm{e}^{-2\pi(\mu - \nu\mathrm{i})t}.$$

3. Aperiodischer Greznfall
Der aperiodische Grenzfall ist ein Spezialfall in dem I am schnellsten gegen den Nullpunkt geht. Für diesen Fall gilt

$$\frac{1}{LC} = \left(\frac{R}{2L}\right)^2.$$

Daraus folgt, dass $nu = 0$ ist. Die Funktion I vereinfacht sich zu

$$I = \mathrm{D} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} .$$

D ist eine reele Konstante. In Abbildung (2) ist der aperiodische Grenzfall als gestrichelte, schwarze Linie dargestellt.

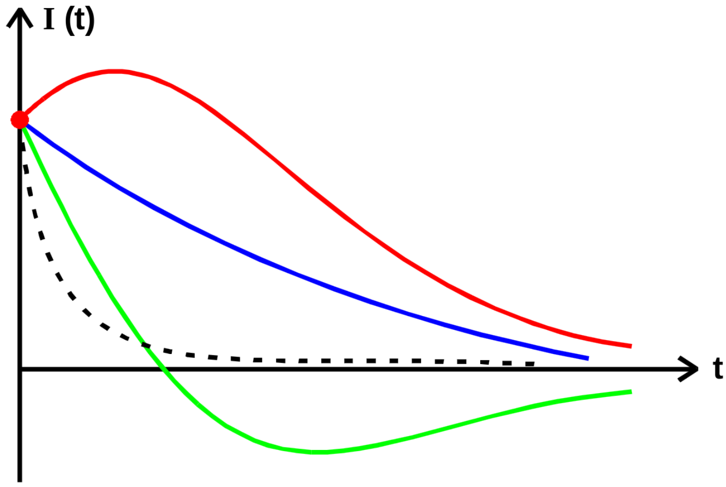


Abbildung 2: Verhalten von Strom I in einem Schwingkreis bei aperiodischer Dämpfung.

2.2 Erzwungene Schwingungen

In einem Schwingkreis entsteht eine erzwungene Schwingung, wenn dieser eine äußere periodische Krafteinwirkung erfährt. In diesem Fall ist die Kraft eine Spannungsquelle mit sinusförmiger Wechselspannung $U(t)$. Dieser Schwingkreis ist in Abbildung (3) zu sehen.

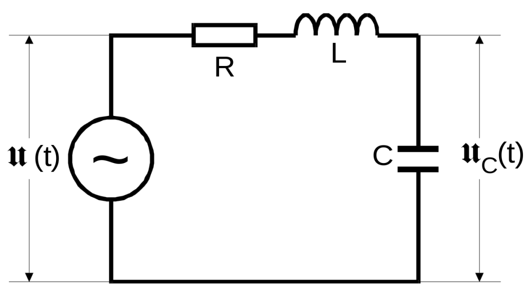


Abbildung 3: Schwingkreis an dein eine sinusförmige Wechselstromquelle angeschlossen ist.

Die Differentialgleichung

$$LC \cdot \ddot{U}_\mathrm{C} + RC \cdot \dot{U}_\mathrm{C} + U_\mathrm{C} = \mathrm{U}_0 \cdot \mathrm{e}^{\omega \mathrm{i} t} \tag{5}$$

beschreibt das System. U_0 ist eine Konstante. Diese Gleichung wird durch den Ansatz $U_\mathrm{C} = U \cdot \mathrm{e}^{\omega i t}$ mit

$$U = \frac{\mathrm{U}_0 \cdot \left(1 - LC\omega^2 - \omega RC\mathrm{i}\right)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{6}$$

gelöst. Der Betrag von U beträgt

$$|U| = \mathrm{U}_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{\left((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2\right)^2}} \tag{7}$$

und die Phase ist

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right). \tag{8}$$

Die Funktion

$$U_\mathrm{C}(\omega) = \frac{\mathrm{U}_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{9}$$

löst die Differentialgleichung (5). $U_\mathrm{C}(\omega)$ hat ein Maximum für die Resonanzfrequenz ω_res. Diese beträgt

$$\omega_\mathrm{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}\,.$$

Für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ strebt $U_\mathrm{C}(\omega)$ gegen die Erregeramplitude $\mathrm{U}_0(\omega)$. Für den Fall der schwachen Dämpfung, für den

$$\frac{R^2}{2L^2} << \frac{1}{LC}$$

gilt, nähert sich ω_res ω_0 von der ungedämpften Schwingung an. In diesem Fall wird das Maximum von U_C durch

$$U_\mathrm{C,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} \cdot \mathrm{U}_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{U}_0$$

ausgedrückt. Falls $R \to 0$ geht $U_\mathrm{C,max} \to \infty$. Der Vorfaktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ heißt Resonanzüberhöhung oder auch Güte q des Schwingkreises. Die Breite des Resonanzkurve wird mithilfe der Frequenzen ω_+ und ω_- beschrieben, bei denen

$$U_\mathrm{C}(\omega_{+,-}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_\mathrm{C,max}$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{R^2}{L^2} << \omega_0^2$$

gilt, wird die Breite der Resonanzkurve durch

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \tag{10}$$

ausgedrückt. Die Güte q wird ausgedrückt durch

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}\,. \tag{11}$$

3 Durchführung

Zur Aufnahme von Messwerten stehen verschiedene ohmsche Widerstände (R_1, R_2, R_3), eine Spule und ein Kondensator zur Verfügung. Außerdem werden die Spannungsverläufe auf einem Oszilloskop dargestellt und ein Generator zur Erzeugung verschiedener Spannungen ist vorhanden.

3.1 Amplitude einer gedämpften Schwingung

Im ersten Versuchsteil wird eine Schwingung im gedämpften Schwingkreis gemessen. Für diese Messung wird eine vom Generator erzeugte Rechteckspannung in den Schwingkreis mit R_1 als ohmschen Widerstand geleitet. Auf dem an den Schwingkreis angeschlossenen Oszilloskop wird dann die oszillierende Schwingung scharfgestellt und die Amplituden im Abhängigkeit von der Zeit abgelesen.

3.2 Aperiodischen Grenzfall

Im zweiten Teil des Versuches wird statt R_1 der verstellbare ohmsche Widerstand R_3 verwendet. Der Generator erzeugt auch in diesem Teil eine Rechteckspannung, die in den Schwingkreis geleitet wird. Auf dem Oszilloskop wird ebenso wie beim 1. Teil der zeitliche Spannungsverlauf abgelesen. Zu Beginn der Messung ist der verstellbare Widerstand auf dem höchsten Wert eingestellt. Dann wird der Widerstand stetig verkleinert bis die Kurve des aperiodischen Grenzfalles auf dem Oszilloskop zu sehen ist. Der Widerstand bei dem dies der Fall ist wird notiert.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Beim letzten Teil der Versuches wird die Kondensatorspannung auf eine Frequenzabhängigkeit untersucht. Nun wird R_2 verwendet und eine sinusförmige Spannung durch den Generator erzeugt, um diese in den gedämpften Schwingkreis zu leiten. Auf dem Oszilloskop werden zwei Spannungsverläufe aufgezeichenet, einmal den der Erregerspannung und den der Kondensatorspannung. Zu Beginn wird versucht die Erregerfrequenz zu finden, die für die höchste Kondensatorspannung sorgt. Im folgenden wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz gemessen und notiert. Dabei ist darauf zu achten, dass die Erregerfrequenzen möglichst gleichmäßig um die Erregerfrequenz, die den höchsten Ausschlag der Kondensatorspannung verursacht, gewählt werden.

4 Auswertung

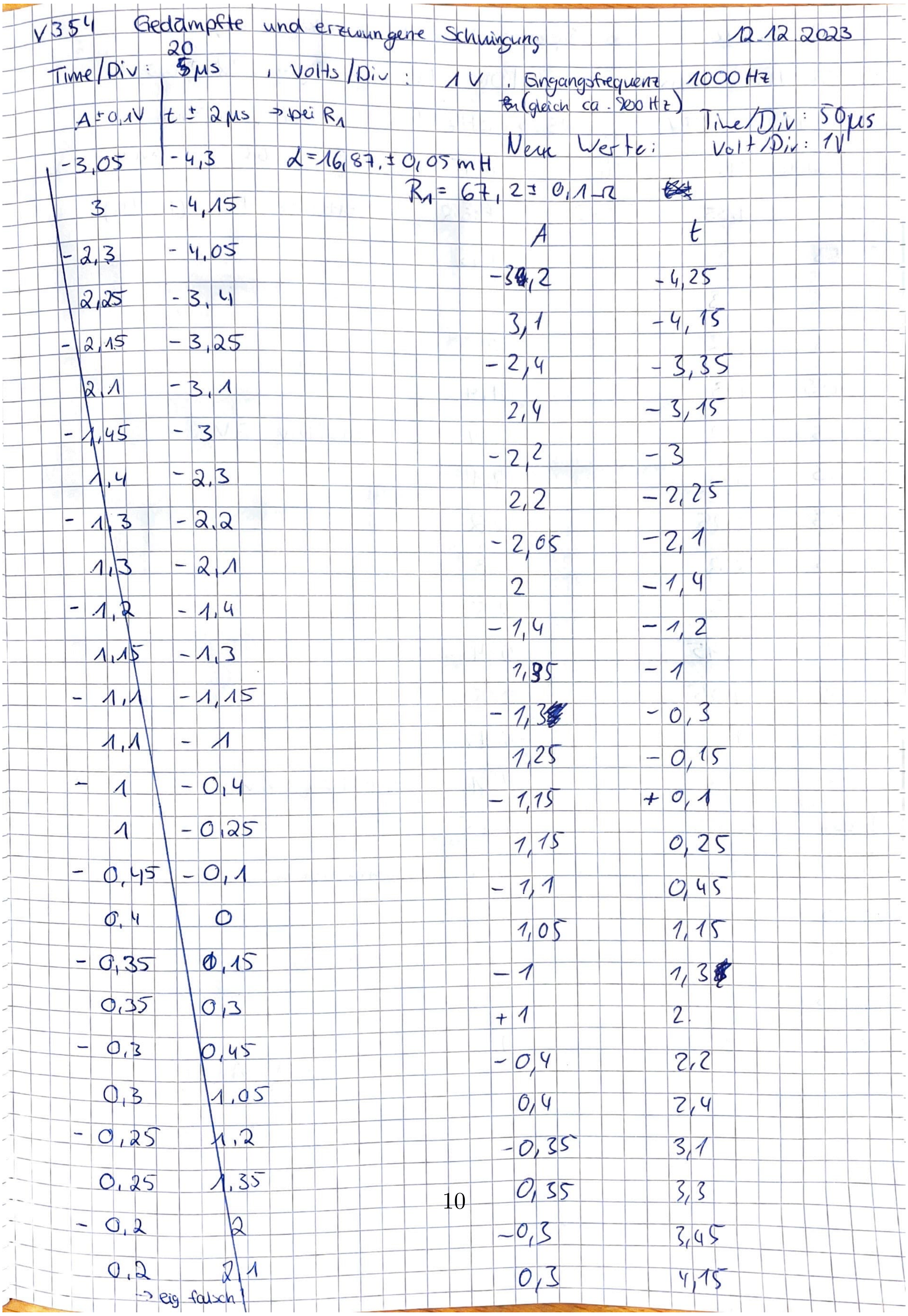
$$R_1 = (67,2 \pm 0,1)\,\Omega \tag{12}$$
$$R_2 = (682 \pm 0,5)\,\Omega \tag{13}$$
$$R_3 = 1 \mathrm{bis} 10\,\mathrm{k\Omega} \tag{14}$$
$$L = (16,87 \pm 0,05)\,\mathrm{mH} \tag{15}$$
$$C = (2,060 \pm 0,003)\,\mathrm{nF} \tag{16}$$

Abbildung 4: Plot.

5 Diskussion

Anhang

Originaldaten



V354 Gedämpfte und erzwungene Schwingung 12.12.2023

Time/Div: ~~5~~ 20 µs, Volts/Div: 1 V, Eingangsfrequenz 1000 Hz (gleich ca. 900 Hz)

$L = 16{,}87 \pm 0{,}05$ mH

$R_1 = 67{,}2 \pm 0{,}1\ \Omega$

$A \pm 0{,}1$ V	$t \pm 2$ µs → bei R_1
-3,05	-4,3
3	-4,15
-2,3	-4,05
2,25	-3,4
-2,15	-3,25
2,1	-3,1
-1,45	-3
1,4	-2,3
-1,3	-2,2
1,3	-2,1
-1,2	-1,4
1,15	-1,3
-1,1	-1,15
1,1	-1
-1	-0,4
1	-0,25
-0,45	-0,1
0,4	0
-0,35	0,15
0,35	0,3
-0,3	0,45
0,3	1,05
-0,25	1,2
0,25	1,35
-0,2	2
0,2	2,1

→ eig falsch

Neue Werte: Time/Div: 50µs, Volt/Div: 1V

A	t
-3,2	-4,25
3,1	-4,15
-2,4	-3,35
2,4	-3,15
-2,2	-3
2,2	-2,25
-2,05	-2,1
2	-1,4
-1,4	-1,2
1,35	-1
-1,3	-0,3
1,25	-0,15
-1,15	+0,1
1,15	0,25
-1,1	0,45
1,05	1,15
-1	1,3
+1	2
-0,4	2,2
0,4	2,4
-0,35	3,1
0,35	3,3
-0,3	3,45
0,3	4,15

b) $R = 4{,}5\,k\Omega$, bei Frequenz = 192,8 Hz Rechteckspannung

c) Time/Div: 20 µs , Volts/Div: 1V , $R_2 = 682{,}1 \pm 0{,}5\,\Omega$

Volts/Divs: 5V , 25,53 kHz / $L = 16{,}87 \pm 0{,}05\,mH$

$C = 2{,}060 \pm 0{,}003\,nF$

f in kHz	U_C	U_0	T	
25,53	1,35	2,15	~~1,45~~ 2	Volts/Div: 1V (für U_C)
26,53	1,35	-"-	1,45	
24,53	1,3		2	
23,03	1,2		2,1	
27,03	1,3		1,4	
28,53	3,2		1,4	Volts/Div: 2V
22,53	3,1		2,1	
20,53	2,25		2,2	
30,53	2,2		1,3	
33,53	1,3		2,5	
17,53	1,45		2,4	
13,53	1,25		3,35	
37,53	1,00		1,15	
40,03	1,3		1,1	Volts/Div: 1V
~~10,53~~ 11,03	2,35		4,25	
15,53	3,2		3,1	~~Volts/Div: 2V~~
35,53	2,3		1,2	
32,03	2		1,3	Volts/Div: 2V
19,03	2,1		2,3	
28,03	3,3		1,4	

11.12.23

[signature]