

Blatt01_A2

April 29, 2024

1 Aufgabe 2:

sorry für Denglisch

```
[19]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[20]: E = 50 * 10 **9
m = 511 * 10**3
gamma = E/m
beta = np.sqrt(1-gamma**(-2))
```

(a) Berechnung von β^2

```
[21]: beta_square = beta**2
print(f"beta square = {beta_square}")
```

beta square = 0.9999999998955516

mit $\beta^2 = 0.9999999998955516$ folgt

$$\frac{2 + \sin^2(\theta)}{1 - \beta^2 \cos^2(\theta)} \approx \frac{2 + \sin^2(\theta)}{1 - \cos^2(\theta)}$$

\Rightarrow Unstable für: $\theta \rightarrow 0$ bzw. $\theta \in (1 \cdot 10^{-9}, 1 \cdot 10^{-7})$ (s. Plot) \rightarrow ja, aber nicht nur.

Was ist mit Vielfachen von π ?

$\theta \in n\pi$ -0.5p

(b) unter Verwendung der Hinweise lautet die umgeschriebene Funktion

$$f = \frac{2\gamma^2 + \gamma^2 \sin^2 \theta}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \theta} \stackrel{!}{=} \frac{2 + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \frac{1}{\gamma^2} \cos^2 \theta}$$

$$(c) \quad = \frac{\frac{2}{\gamma^2} + \sin^2 \theta}{\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \sin^2 \theta} = \frac{2 + \sin^2 \theta}{\frac{1}{\gamma^2} + \sin^2 \theta - \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \theta} = \frac{2 + \sin^2 \theta}{\frac{1}{\gamma^2} (1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta} \quad \text{passt}$$

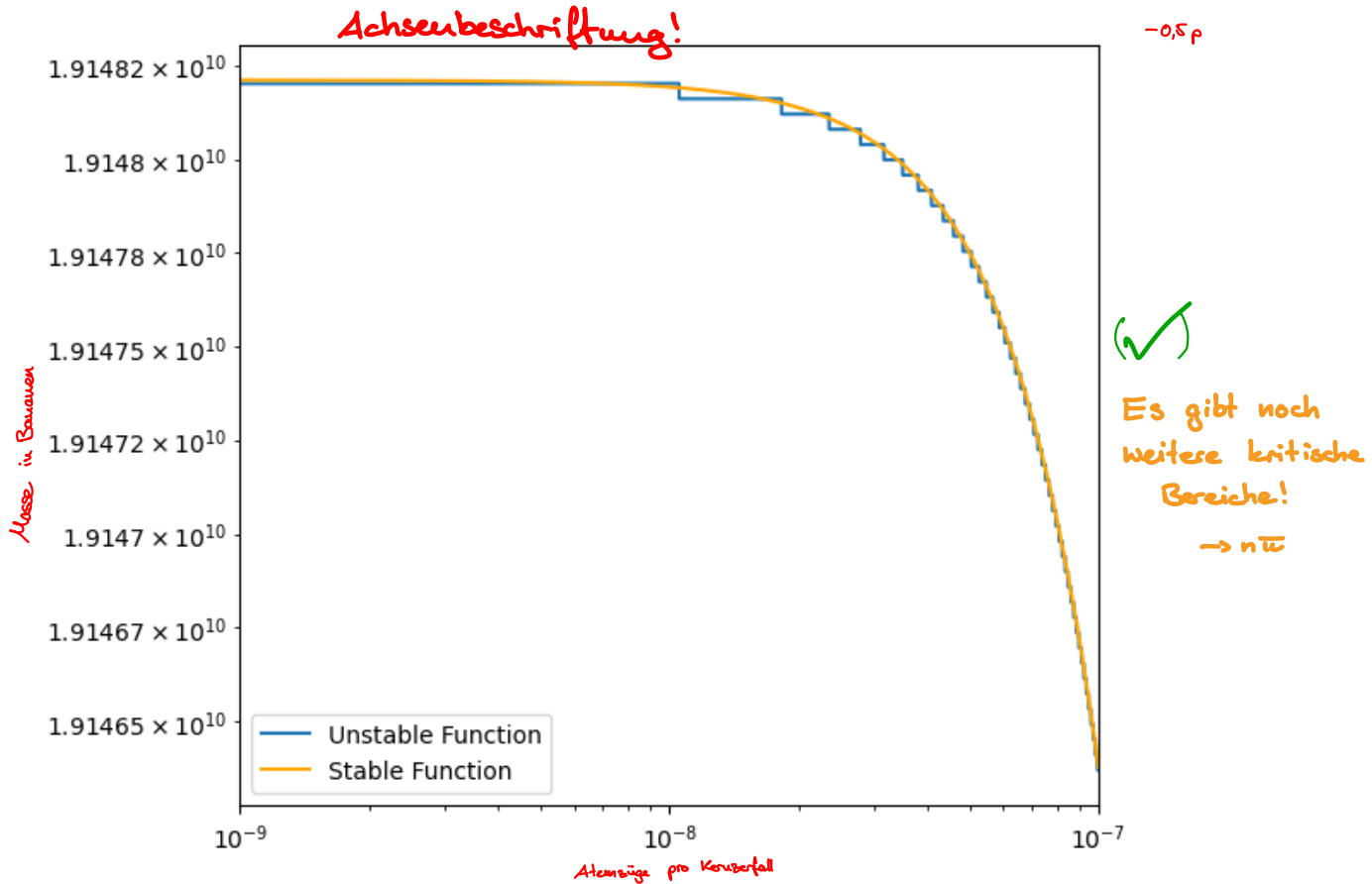
```
[22]: def function_unstable(theta):
    return (2 + np.sin(theta)**2) / (1 - beta**2 * np.cos(theta)**2)

def function_stable(theta):
    return (2 * gamma**2 + gamma**2 * np.sin(theta)**2) / (1 + gamma**2 *
    ↪ beta**2 * np.sin(theta)**2)
```

```
[23]: x = np.logspace(-9,-7, 10000)

fig1, (ax1) = plt.subplots(1, 1, layout="constrained")
ax1.plot(x, function_unstable(x), label="Unstable Function")
ax1.plot(x, function_stable(x), color= "orange", label="Stable Function")
ax1.set_xscale("log")
ax1.set_yscale("log")
plt.xlim(1e-9,1e-7)
ax1.legend(loc="best")
```

[23]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1140f5f10>



(d) In General: Condition Nummer $K = \left| x \frac{f'(x)}{f(x)} \right|$ Here:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} f(E, \theta) &= - \frac{2 \cos \theta \sin \theta (\beta^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \cos^2 \theta + 2\beta^2 - 1)}{(\beta^2 \cos^2(\theta) - 1)^2} \\ &= - \frac{2 \cos \theta \sin \theta (3\beta^2 - 1)}{(\beta^2 \cos^2(\theta) - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = \left| -\theta \cdot \frac{\overbrace{2 \cos \theta \sin \theta}^{= \sin 2\theta} (3\beta^2 - 1)}{(\beta^2 \cos^2(\theta) - 1)^2} \cdot \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}{2 + \sin^2 \theta} \right| \quad \checkmark$$

Eindeutig bis auf ein VZ wegen des Betrages.

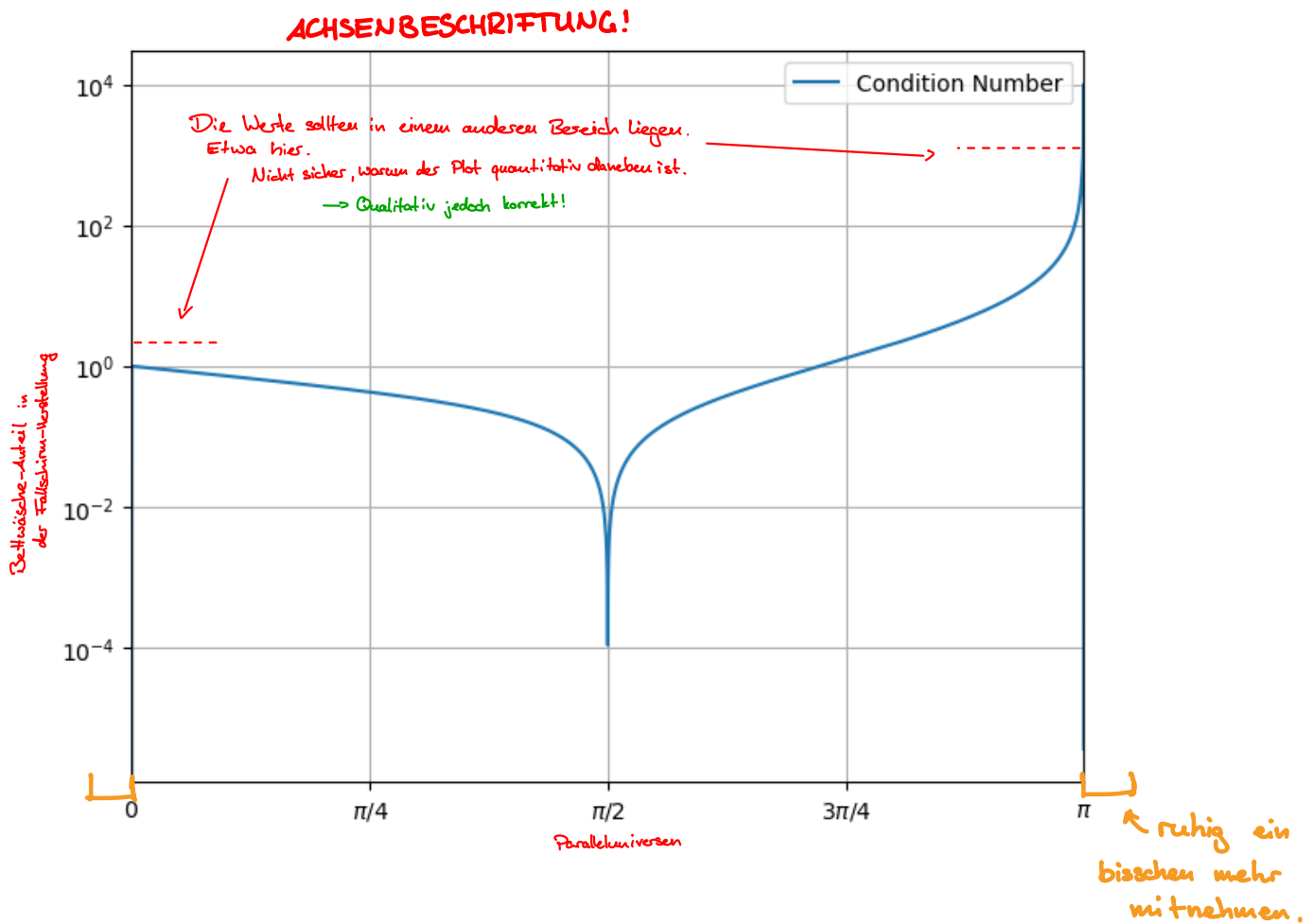
keine lineare und keine exponentielle θ -Abhängigkeit

(e)

```
[24]: def condition_number(x):
    return np.abs(-x * (2 * np.cos(x) * np.sin(x) * (3 * beta**2 - 1) * (1 -
↪ beta**2 * np.cos(x)**2)) / ((beta**2 * np.cos(x)**2 - 1)**2 * (2 + np.
↪ sin(x)**2))

x2 = np.linspace(0, np.pi, 10000)
# x2 = np.linspace(-np.pi, 2*np.pi, 10000)
labels = [r"$0$", r"$\pi/4$", r"$\pi/2$", r"$3\pi/4$", r"$\pi$"]
fig3, ax3 = plt.subplots(1, 1, layout="constrained")
ax3.plot(x2, condition_number(x2), label="Condition Number")
ax3.set_xticks(np.arange(0, np.pi+0.01, np.pi/4))
ax3.set_xticklabels(labels)
ax3.set_yscale("log")
ax3.grid()
plt.xlim(0, np.pi)
ax3.legend(loc="best")
```

[24]: <matplotlib.legend.Legend at 0x112e645f0>



\Rightarrow ill-conditioned for $K \gg 1 \Rightarrow \theta \in [\frac{7}{8}\pi, \pi]$

(f) Stability bezieht sich auf den Algorithmus ✓ und Condition bezieht sich auf das (mathematische) Problem. ✓ Unter Stabilität versteht man den Einfluss von Rundungsfehlern auf eine störanfällige maschinelle Rechenmethode. ✓ “Instabilities” lassen sich umgehen, indem der Algorithmus umgeschrieben wird, wie in Aufgabenteil 2b. Z.B. kann es zu Rundungsfehlern kommen, weil man sich einer Polstelle nähert, wie in 2a-c. ✓ “Condition” beschreibt den Einfluss eines anfänglichen Fehlers auf eine präzisere maschinelle Rechenmethode. ✓ Die Condition lässt sich allerdings nicht durch Umschreiben des Algorithmus lösen. Z.B. ist ein Problem “well-conditioned”, wenn bei einer kleinen Veränderung der Übergabe, sich das Ergebnis nur minimal ändert und “ill-conditioned”, wenn bei einer kleinen Veränderung der Übergabe, sich das Ergebnis stark verändert. ✓

5/6