

# Sheet02\_Abgabe

May 14, 2024

## 1 Übungsblatt 02

### 1.1 Aufgabe 1

- a) Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Punkte gleich oder größer 9 beträgt, werden durch die Häufigkeiten

$$k = \text{Häufigkeit der Paare mit Summe gleich 9} \quad (1)$$

$$c = \text{Häufigkeit der Paare mit Summe größer als 9} \quad (2)$$

$$n = \text{Gesamtanzahl der Paare} \quad (3)$$

$$(4)$$

und der allgemeinen Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

$$P(\text{Ereignis}) = \frac{A_{\text{Häufigkeit eines Ereignisses}}}{n} \quad (5)$$

berechnet. Die einzelnen Häufigkeiten  $k$  und  $c$  sowie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wird das unten stehende Programm verwendet. Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten

$$P(a)) \approx 0.11 \quad (6)$$

$$P(b)) \approx 0.167 \quad (7)$$

$$(8)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten in Teilaufgabe c und d werden die Regeln zur Pfadmultiplikation und Pfadaddition verwendet. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich zu

$$P(c)) = P(\text{"Zum Würfeln einer 4"})P(\text{"Zum Würfeln einer 5"}) \cdot 2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 2 \approx 0.056 \quad (9)$$

$$P(d)) = P(\text{"Zum Würfeln einer 4"})P(\text{"Zum Würfeln einer 5"}) \cdot 2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 2 \approx 0.0278 \quad (10)$$

$$(11)$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus e) bis g) wird die folgende allgemeine Formel aus der Vorlesung verwendet

$$P(BA) = \frac{P(BA)}{P(A)} \quad (12)$$

Die Wahrscheinlichkeiten werden ebenso im unten stehenden Programm ausgerechnet, sodass sich folgende Ergebnisse ergeben

$$P(e) = \frac{P(\text{"Zum ersten Würfeln einer 4 und die Summe gleich 9"})}{P(\text{"Zum ersten Würfeln einer 4"})} \approx 0.167 \quad (13)$$

$$P(f) = \frac{P(\text{"Zum ersten Würfeln einer 4 und die Summe größer 9"})}{P(\text{"Zum ersten Würfeln einer 4"})} \approx 0.167 \quad (14)$$

$$P(g) = P(e) \approx 0.167 \quad (15)$$

$$(16)$$

```
[1]: import numpy as np
n=36 #hier 36 Möglichkeiten
#Für die Bestimmung von k
k=0
c=0
f=0
for i in range (1,7):
    if i+4>9:
        f+=1
    for j in range (1,7):
        if i+j==9:
            k+=1
        if i+j>9:
            c+=1
#Für die Wahrscheinlichkeiten c) und d) nutze die Pfadregel:
Pc=((1/6)**2)*2
Pd=((1/6)**2)
print(k,c)
P=k/n
print("Wahrscheinlichkeit für a) beträgt", k/n , "und die Häufigkeit zu diesem_
↪Ereignis beträgt",k)
print("Wahrscheinlichkeit für b) beträgt", c/n, "und die Häufigkeit zu diesem_
↪Ereignis beträgt",c)
print("Wahrscheinlichkeit für c) beträgt", Pc)
print("Wahrscheinlichkeit für d) beträgt", Pd)

Pe=((1/6)*(1/6))/(1/6)
Pf=(f/36)/(1/6)
Pg=Pe
print("Wahrscheinlichkeit für e) beträgt", Pe)
print("Wahrscheinlichkeit für f) beträgt", Pf)
print("Wahrscheinlichkeit für g) beträgt", Pg)
```

4 6

Wahrscheinlichkeit für a) beträgt 0.1111111111111111 und die Häufigkeit zu diesem Ereignis beträgt 4

Wahrscheinlichkeit für b) beträgt 0.1666666666666666 und die Häufigkeit zu diesem Ereignis beträgt 6

Wahrscheinlichkeit für c) beträgt 0.0555555555555555

Wahrscheinlichkeit für d) beträgt 0.027777777777777776

Wahrscheinlichkeit für e) beträgt 0.1666666666666666

Wahrscheinlichkeit für f) beträgt 0.1666666666666666

Wahrscheinlichkeit für g) beträgt 0.1666666666666666

## 1.2 Aufgabe 2

Für die Aufgabe a) und b) wird zunächst die Normierungskonstante über die folgende Integration berechnet:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad (17)$$

Setze ein und löse mithilfe der Ergebnisse folgender Integrale

$$\int v \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) dv = -\frac{k_b T}{m} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 \cdot k_b T}\right) + C_{\text{constant}} \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) dv = \sqrt{\frac{\pi k_b T}{2m}} \quad (19)$$

schließlich über Partielle Integration

$$N \cdot 4\pi \frac{k_b T}{2m} \cdot \left[ v \cdot \exp\left(-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) \right] + \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) dv = N \cdot \left(\frac{2\pi k_b T}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (20)$$

$$\Rightarrow N = \left(\frac{m}{2\pi k_b T}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

Um die Geschwindigkeit mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, nutze die notwendige Bedingung

$$\frac{df}{dv} = 0 \quad (22)$$

Erhalte für die Ableitung folgende Gleichung

$$4N \cdot \pi \exp\left(-\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) \cdot \left(-\frac{m \cdot v^3}{k_b T} + 2v\right) = 0 \quad (23)$$

$$\Rightarrow v \cdot \left(\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T} + 2\right) = 0 \quad (24)$$

$$(25)$$

Die Geschwindigkeit muss größer als 0 sein, somit gilt:

$$v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (26)$$

Um den Erwartungswert zu bestimmen, wird die folgende Definition des Erwartungswertes verwendet:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} f(v) \cdot v dv = \int_0^{\infty} N \cdot \exp\left(\frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T}\right) \cdot v dv \quad (27)$$

Eingesetzt ergibt sich folgende Gleichung, die sich über partielle Integration und Substitution mit

$$u = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot k_b T} \quad (28)$$

$$du = \frac{m \cdot dv}{k_b T} \quad (29)$$

$$(30)$$

wie folgt berechnen lässt

$$\langle v \rangle = 4\pi N \cdot \frac{2k_b^2 \cdot T^2}{m^2} \cdot ([-u \cdot \exp(-u)] + \int_0^\infty \exp(-u) du) = 8\pi \frac{k_b^2 \cdot T^2}{m^2} \cdot N = \sqrt{\frac{8k_B T}{m\pi}} \quad (31)$$

Bei der Teilaufgabe c) wird zunächst über Integration die CDF Funktion bestimmt. Zunächst wurde es mit der Methode quad aus sympy.integrate benutzt, jedoch war dies nicht zielführend, da explizit Integrationsgrenzen angegeben werden müssen. Es wurde dann analog zu a) und b) die CDF- Funktion händisch gelöst und für die Gaußsche Fehlerfunktion scipy.special verwendet. Um den Median zu bestimmen, muss folgendes berechnet werden

$$F(v_{0.5}) - 0.5 = 0 \quad (32)$$

Dies ist mit scipy.optimize.root möglich, jedoch sind keine konkreten Werte für die Konstanten unter anderem für die Masse und Temperatur gegeben, sodass sich das Programm nicht ausführen lässt. (Deswegen sind hier beliebige Werte für m und T eingesetzt worden).

```
[2]: #Für die Teilaufgabe c) und d) nutze CDF über INtegration von
import numpy as np
import scipy.optimize
from scipy import optimize
from scipy import integrate
from scipy.integrate import quad
from scipy import special
m=1 #Hier gewählt, aber nicht gegeben
k=1
T=1#Hier gewählt, aber nicht gegeben
N=(m/(2*np.pi*k*T))**(3/2)
def PDF(v):
    return N*np.exp(-(m*v**2)/(2*k*T))*4*np.pi*v**2
def CDF0(v,a):
    return quad(PDF, 0, a, args=(v))
#hier händisch gelöst, obige CDF- Funktion nicht möglich denn Übergabe von
    ↳ Integrationsgrenze
def CDF1(v):
    return 4*np.pi*N*(-v*((k*T)/(m))*np.exp(-(m*v**2)/(2*k*T))+(np.sqrt((k*T*np.
    ↳ pi)/(4*m)))*special.erf(v))-0.5
sol = optimize.root(CDF1,[1]) #wie kann man Guesses machen wenn keine Werte
    ↳ gegeben sind
print(sol.x)
```

[2.03647787]

d) Zur Berechnung der halben Höhe der Distribution:

$$\begin{aligned} f(v_m) &= N \cdot \exp(-1) \cdot 4\pi \frac{2K_B T}{m} \\ \Leftrightarrow f(v_m) &= 4\sqrt{\frac{m}{2K_b T \pi}} \cdot \exp(-1) \\ f(v_m)/2 &= 2\sqrt{\frac{m}{2K_b T \pi}} \cdot \exp(-1) \end{aligned}$$

Die gesamte Breite der Funktion ergibt sich dann aus den  $v_2 - v_1$  Werten, für die Funktion  $f(v_m)/2 = f(v_2) = f(v_1)$ : Für die beiden  $v_1, v_2$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{\frac{m^3}{8K_b^3 T^3 \pi^3}} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_b T}\right) \cdot 4\pi v^2 - 2\sqrt{\frac{m}{2K_b T \pi}} \cdot e^{-1} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{m}{2K_b T} \exp\left(-\frac{mv^2}{2K_b T}\right) \cdot v^2 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

Da ich keine Ahnung habe, wie ich das auswerten soll für Unbekannte: Für  $\frac{m}{2K_b T} = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \exp(-v^2) \cdot v^2 - 2e^{-1} \\ \Leftrightarrow v_{1,2} &= \pm i \sqrt{W_n\left(-\frac{2}{e}\right)} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e) Für die Standardabweichung gilt:

$$\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$$

Berechnung für  $\langle v^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 \cdot f(v) dv \\ \langle v^2 \rangle &= 4\pi N \int_0^\infty v^4 \cdot \exp(-kv^2) dv \quad \text{mit } k = \frac{m}{2k_b T} \\ &= -4\pi N \int_0^\infty v^2 \frac{d}{dk} \exp(-kv^2) dv, \quad \text{da gilt: } v^2 \cdot \exp(-kv^2) = -\frac{d}{dk} \exp(-kv^2) \\ &= -4\pi N \frac{d}{dk} \int_0^\infty v^2 \exp(-kv^2) dv \quad \text{im nächsten Schritt dann mit partieller Integration} \\ &= -4\pi N \frac{d}{dk} \left[ -v \cdot \frac{1}{2k} \exp(-kv^2) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2k} \exp(-kv^2) dv \\ &= -N \sqrt{\pi^3} \frac{d}{dk} \frac{1}{k^{3/2}} \\ &= \frac{3}{2} N \sqrt{\pi^3} \cdot k^{-5/2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m^3}{8K_b^3 T^3 \pi^3}} \cdot \sqrt{\pi^3} \cdot \left(\frac{m}{2K_b T}\right)^{-5/2} = \frac{3K_b T}{m} \end{aligned}$$

In  $\sigma$  eingesetzt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3K_b T}{m} - \frac{8K_b T}{m\pi}} = \sqrt{\frac{(3\pi - 8)K_b T}{m\pi}}$$