

Optimisation avec un ordinateur quantique

Une introduction pratique

Olivier Nahman-Lévesque
École d'été 0 à 1
6 Mai 2025

Préalables

- Savoir ce que ces termes signifient :
 - Qubit
 - Porte quantique
 - Circuit quantique
- Expérience minimale de programmation avec Python. Comprendre ce que ce code produit :

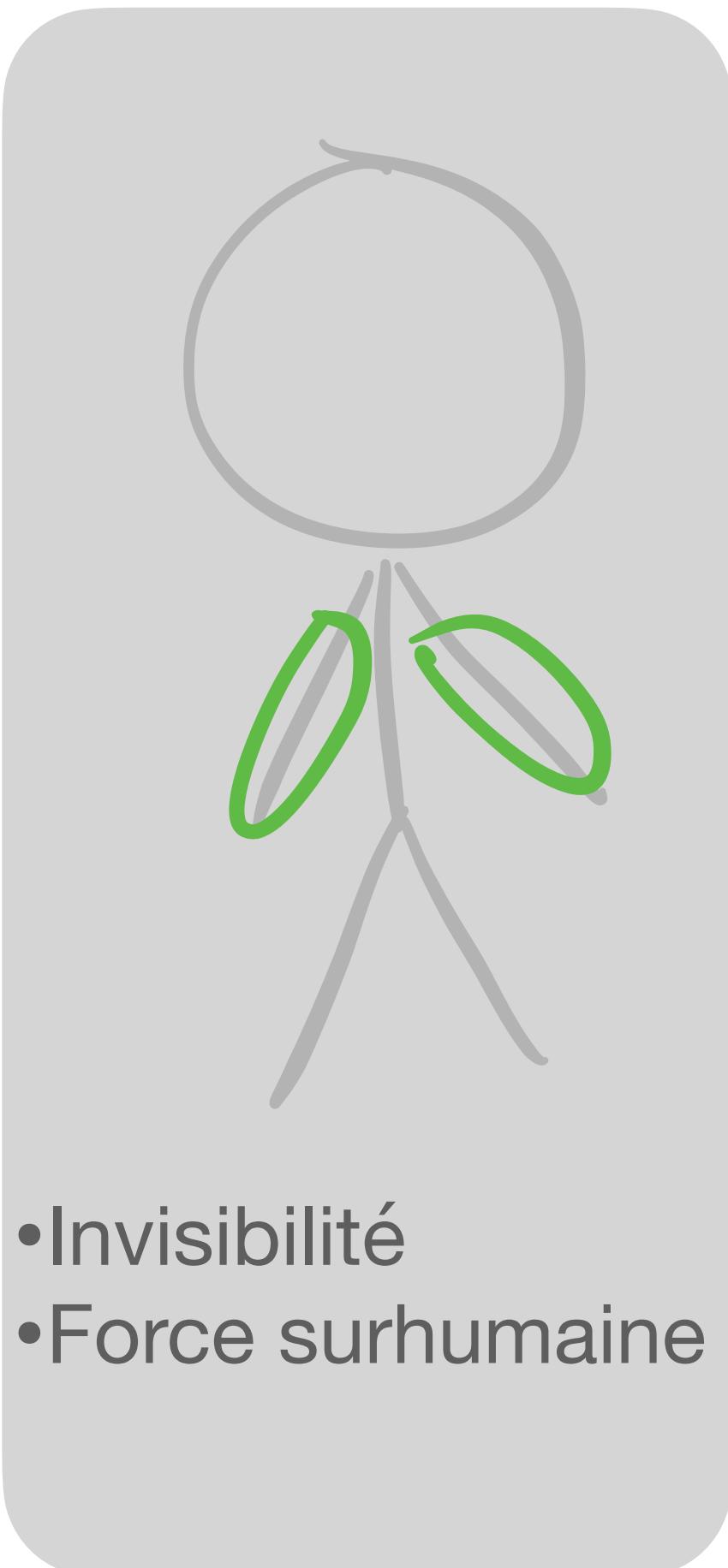
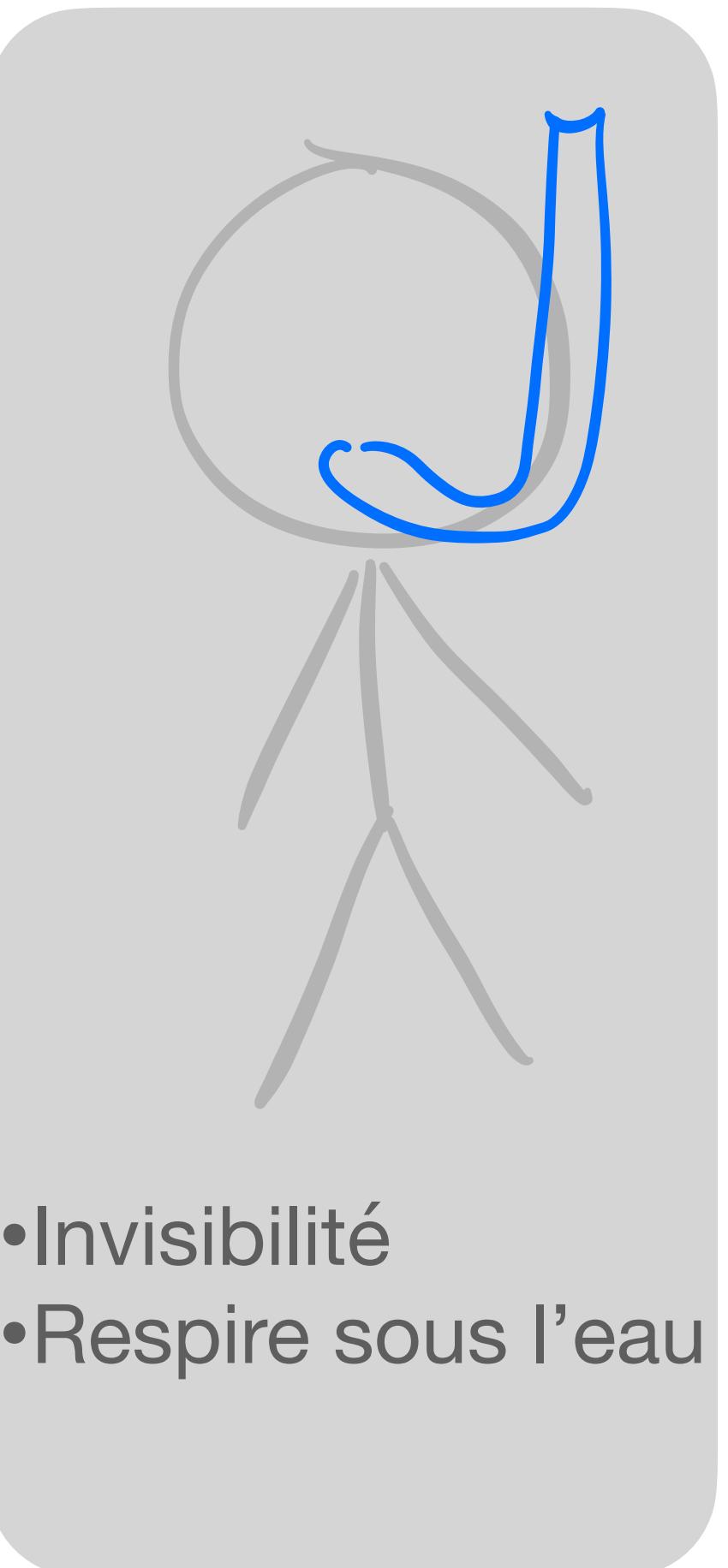
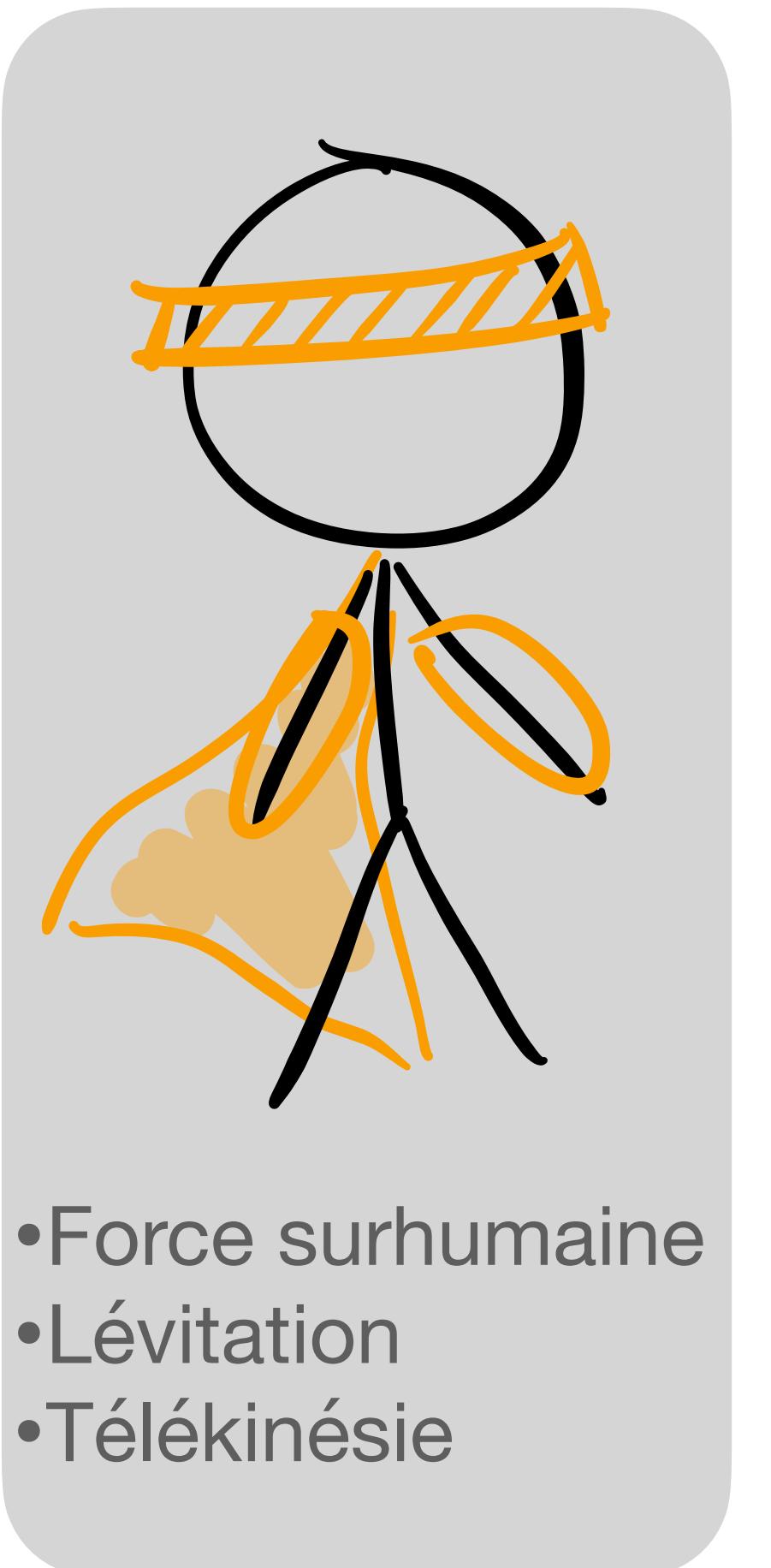
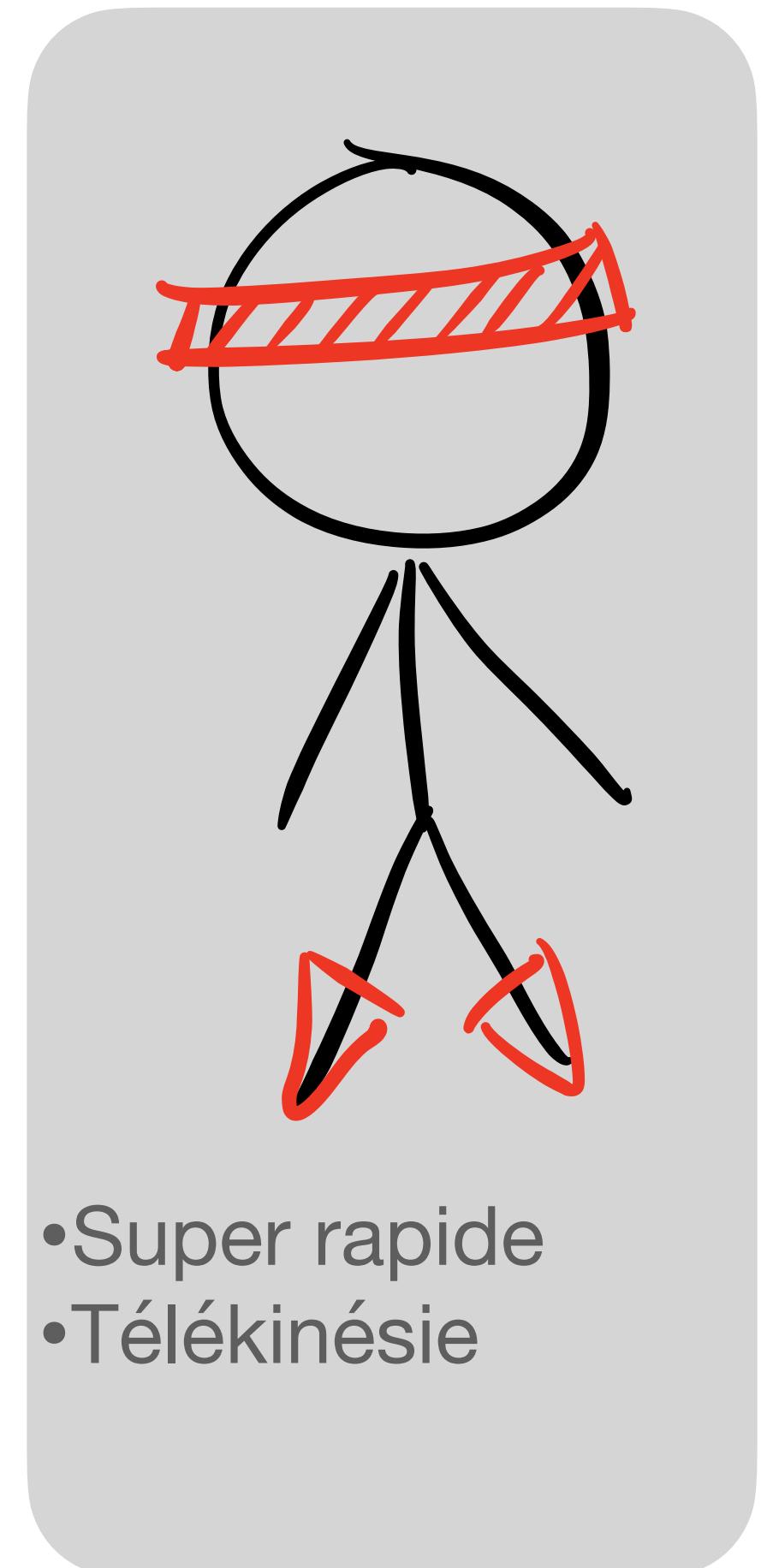
```
0 import numpy as np
1
2 print(np.arange(5))
3
```

Avertissement



Cet atelier contient un modèle jouet

Supers héros



Deux équipes

Vos supers héros sont envoyés en mission. Le plan nécessite de former **deux équipes**.

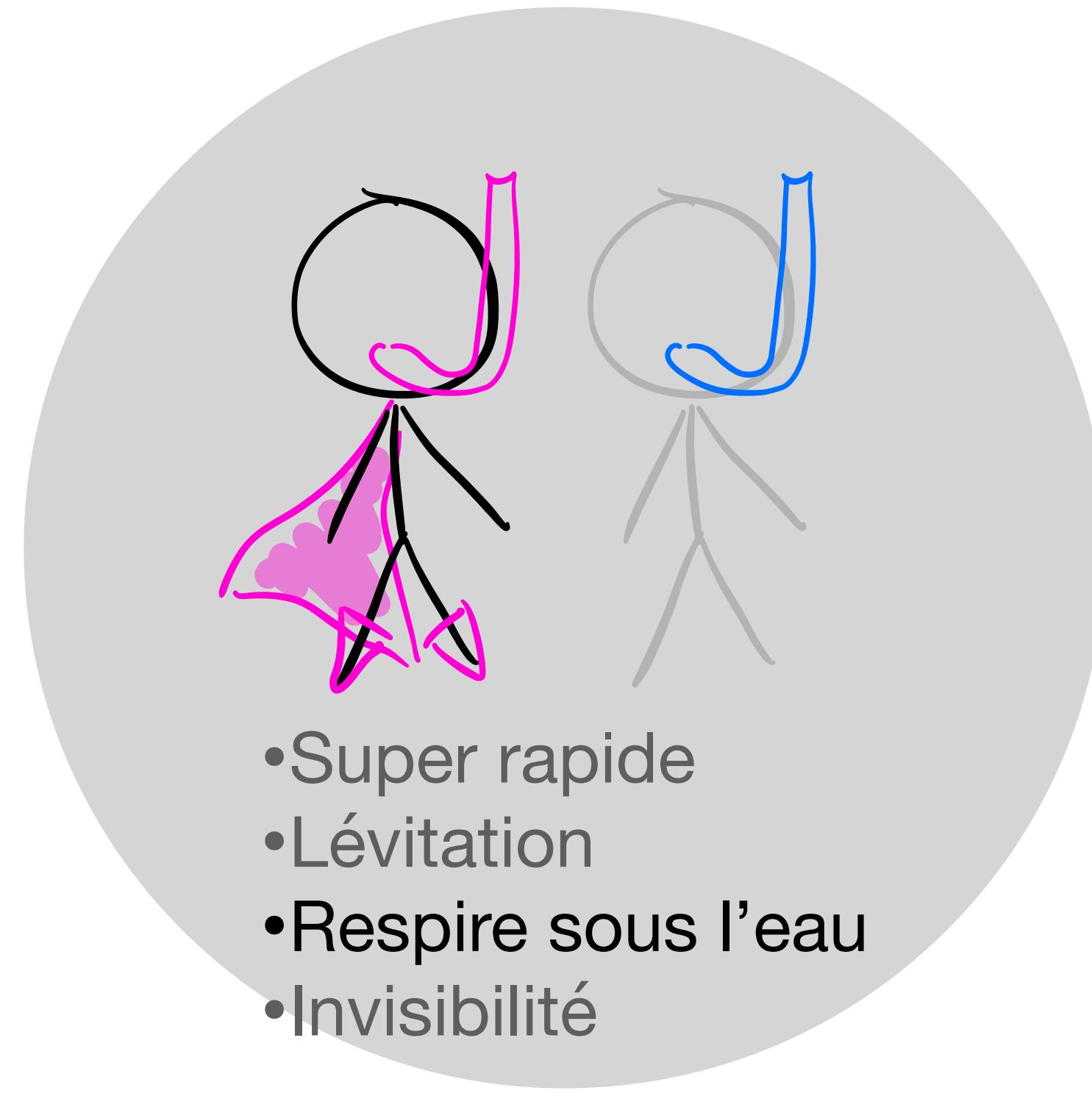
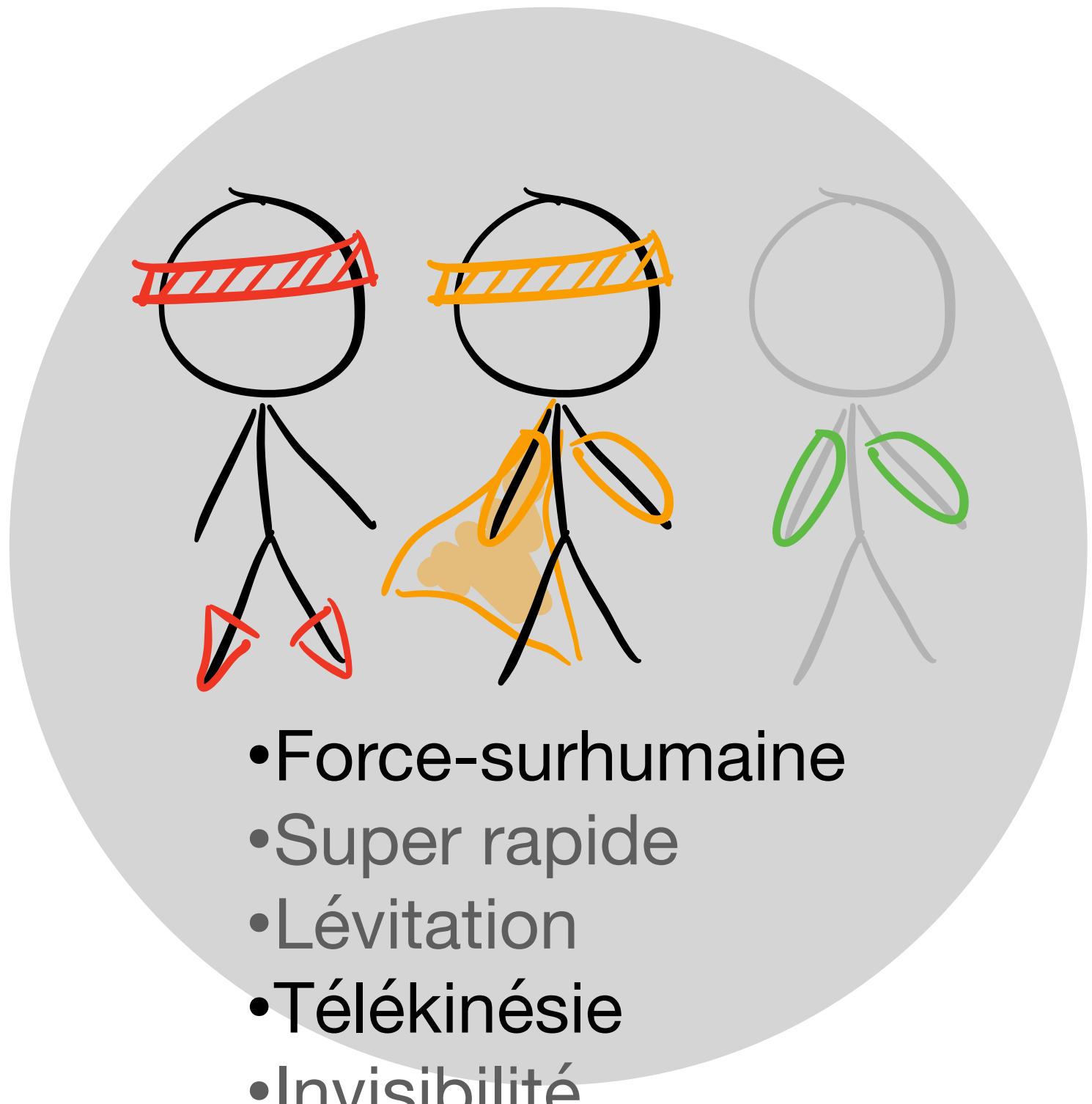
Objectif : Former **deux équipes** en **minimisant** le nombre de super-pouvoirs qui se **répètent** dans chacune des équipes.

Deux équipes

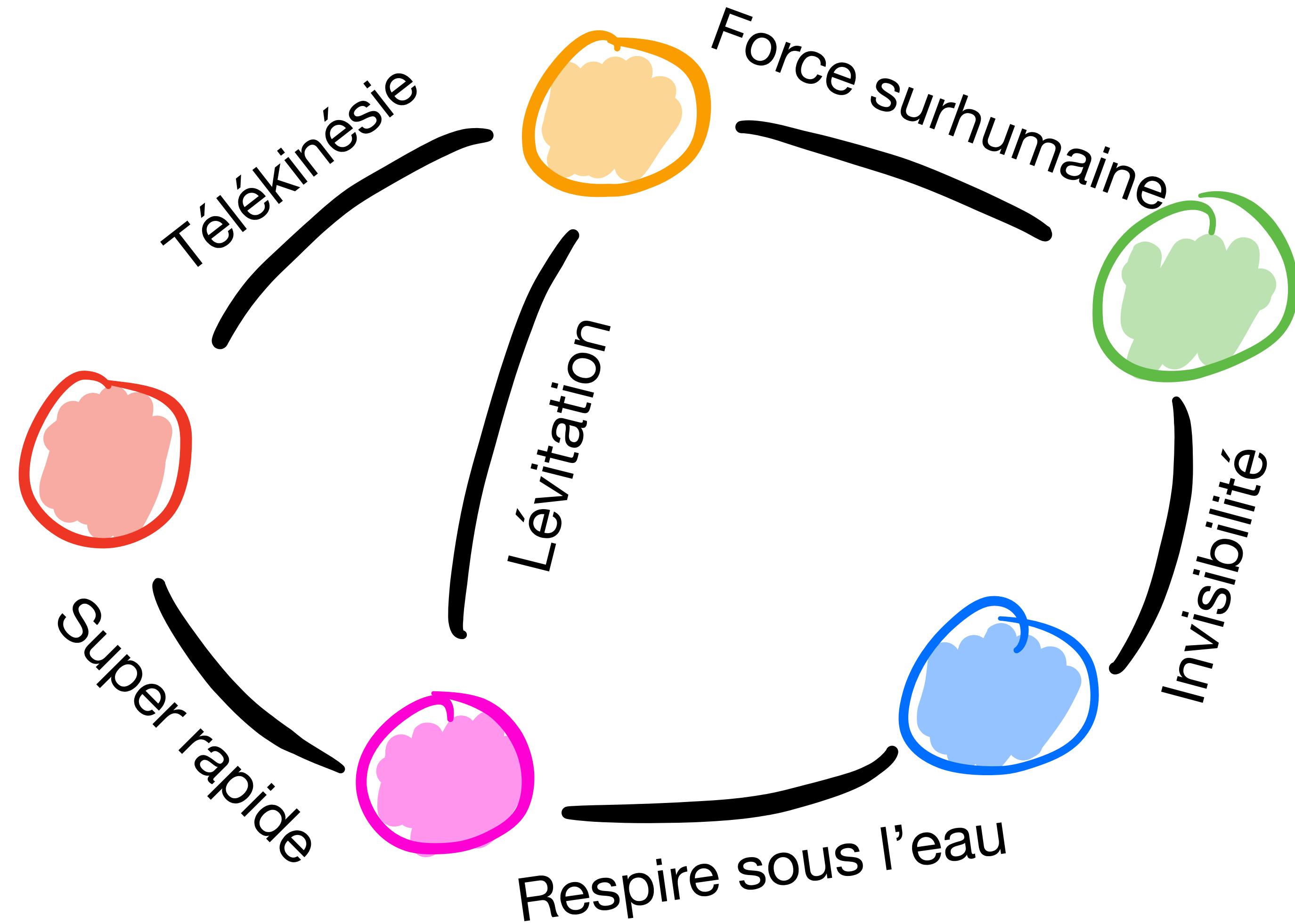
Vos supers héros sont envoyés en mission. Le plan nécessite de former **deux équipes**.

Objectif : Former **deux équipes** en **minimisant** le nombre de super-pouvoirs qui se **répètent** dans chacune des équipes.

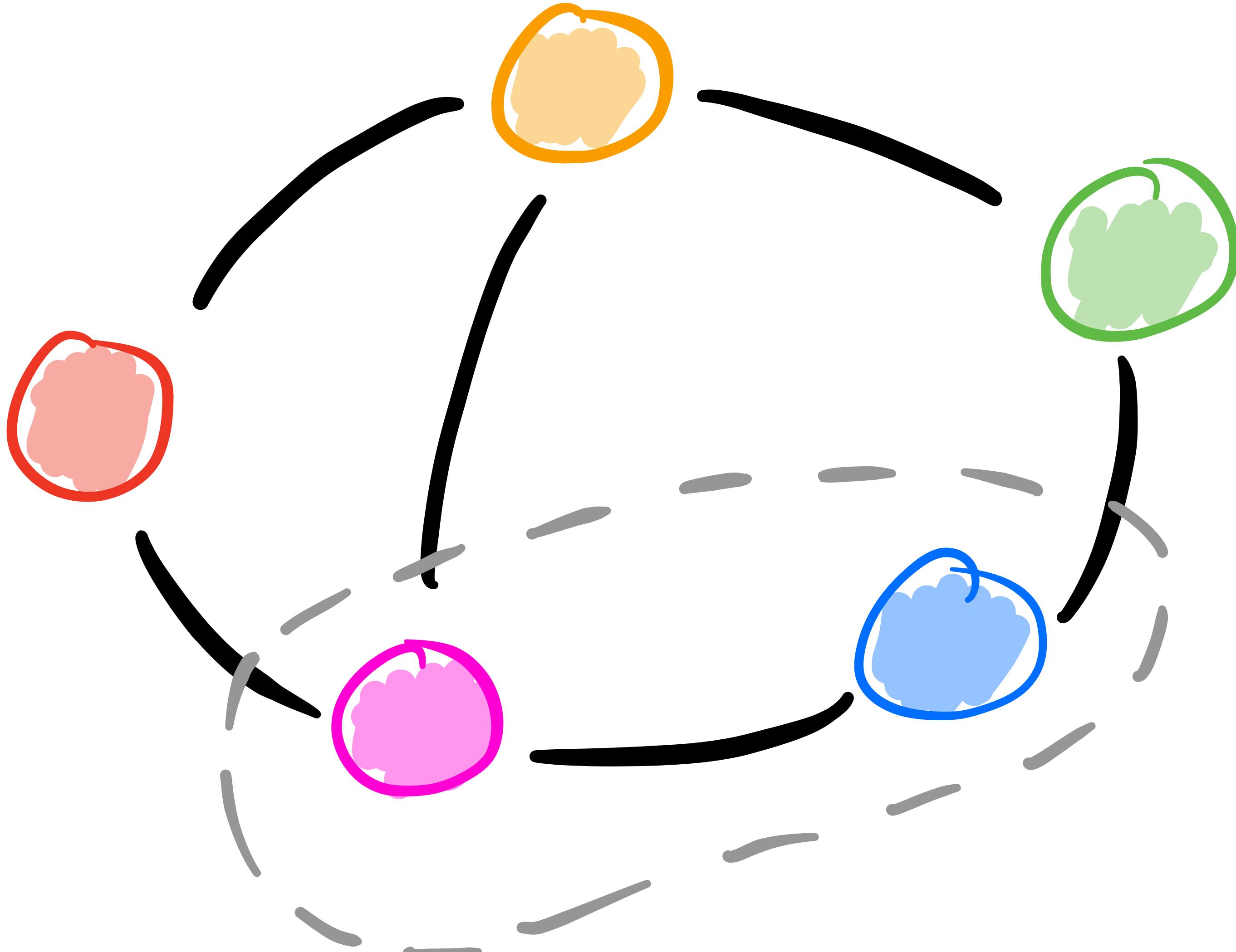
Exemple :



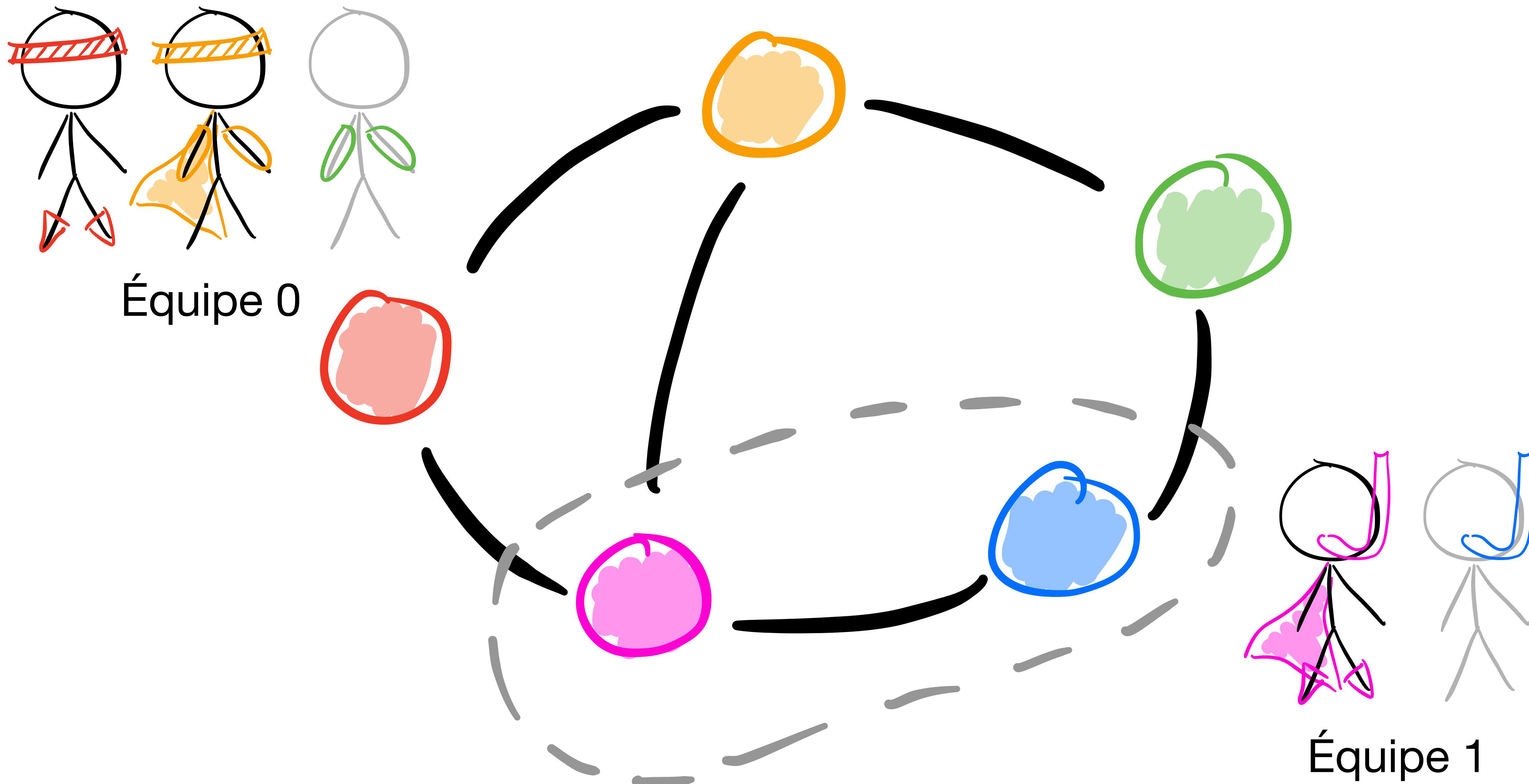
Traduction sous forme de graphe



Coupure maximale (MAX-CUT)

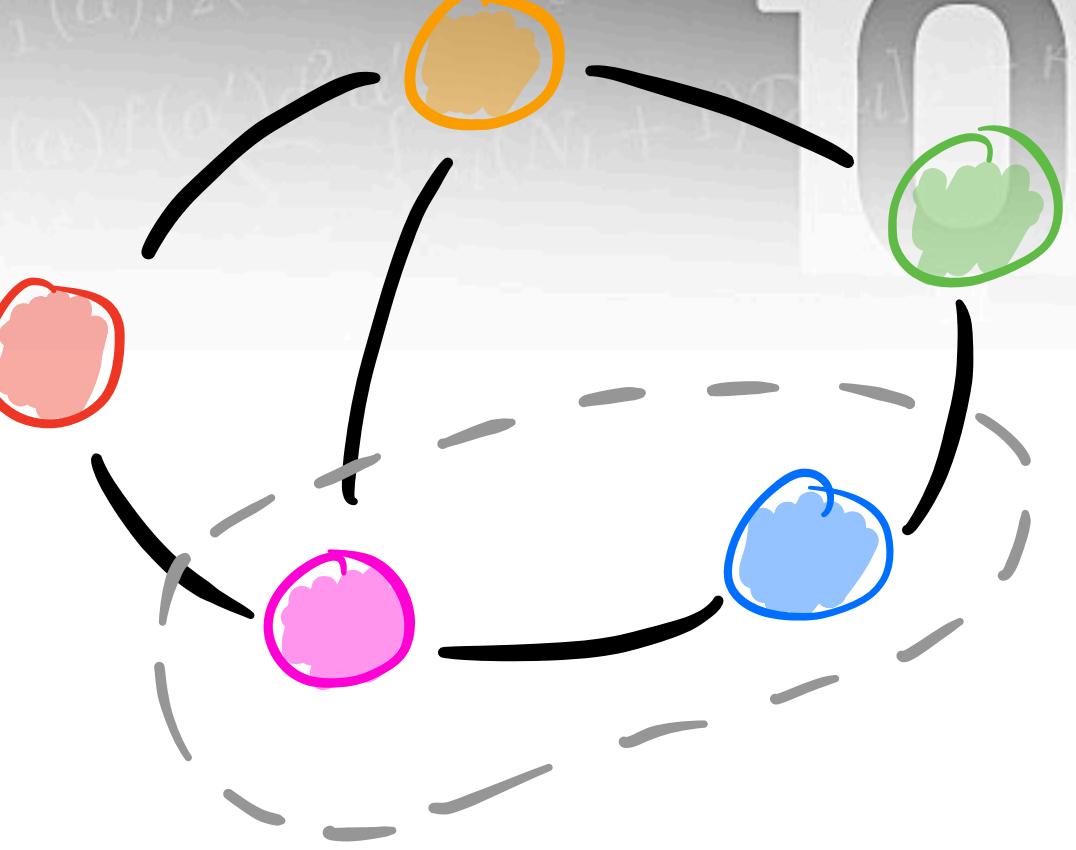


Coupure maximale (MAX-CUT)



Formaliser le problème

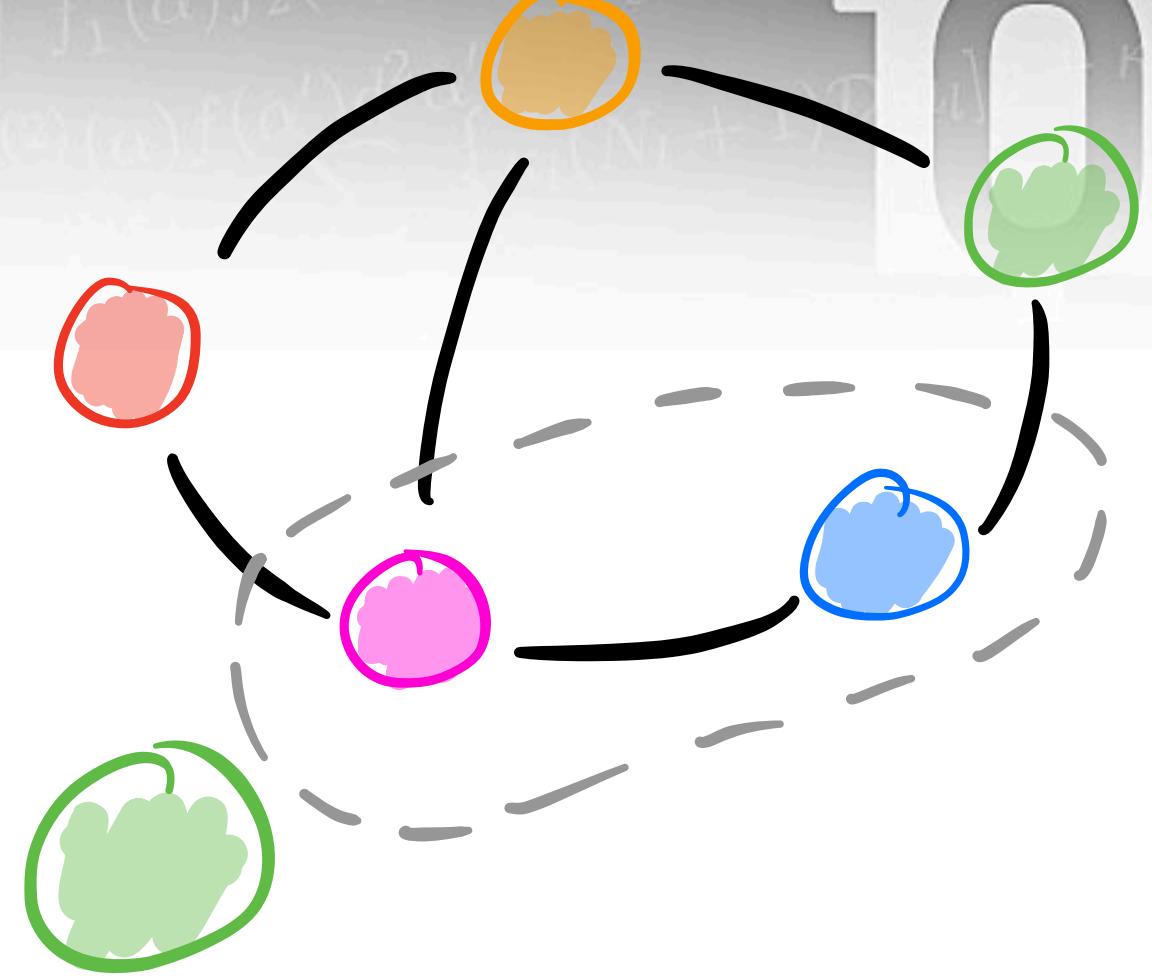
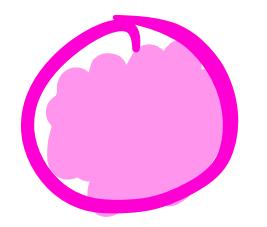
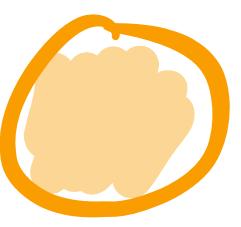
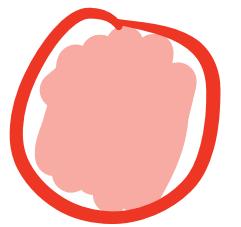
Le vecteur de configuration



$$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 0)$$

Formaliser le problème

Le vecteur de configuration



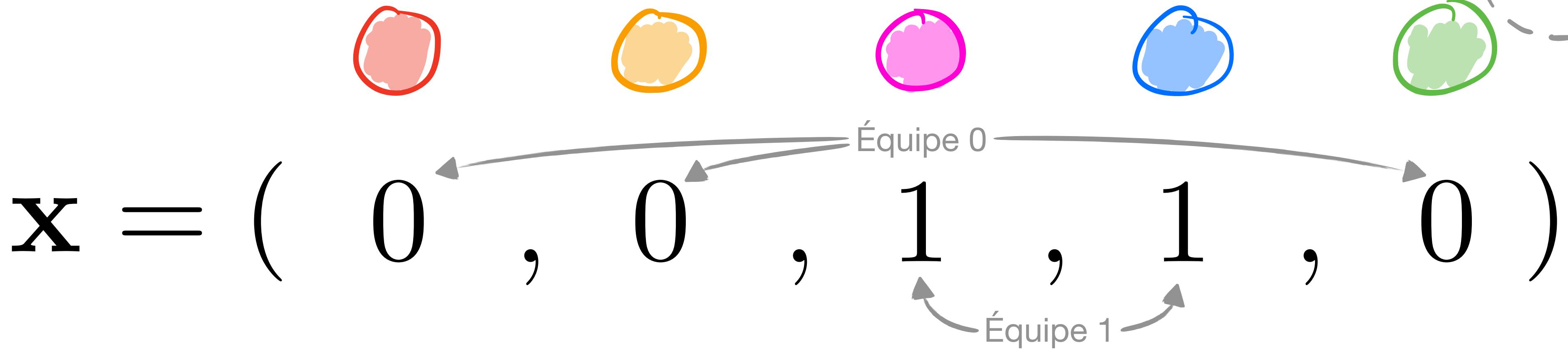
$$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 0)$$

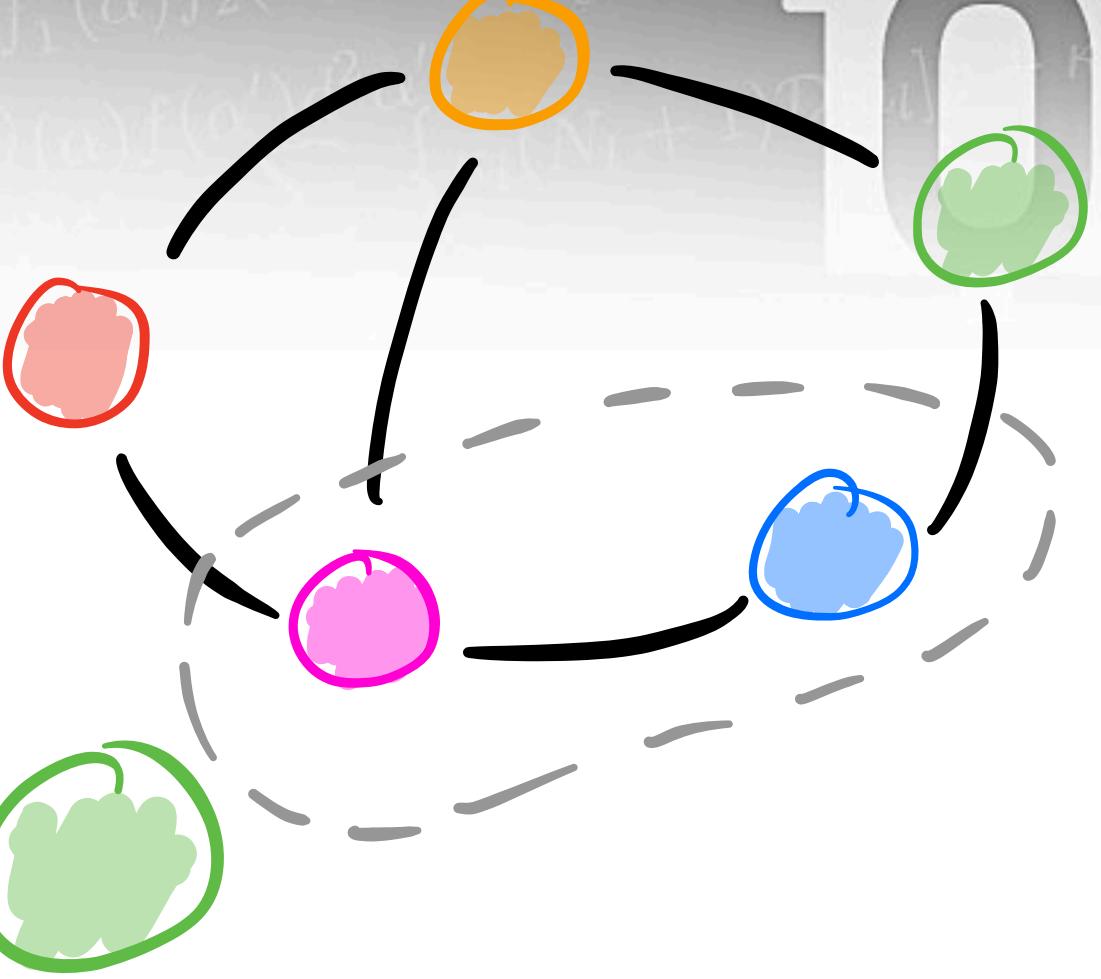
Formaliser le problème

Le vecteur de configuration

$$\mathbf{x} = (0, 0, 1, 1, 0)$$

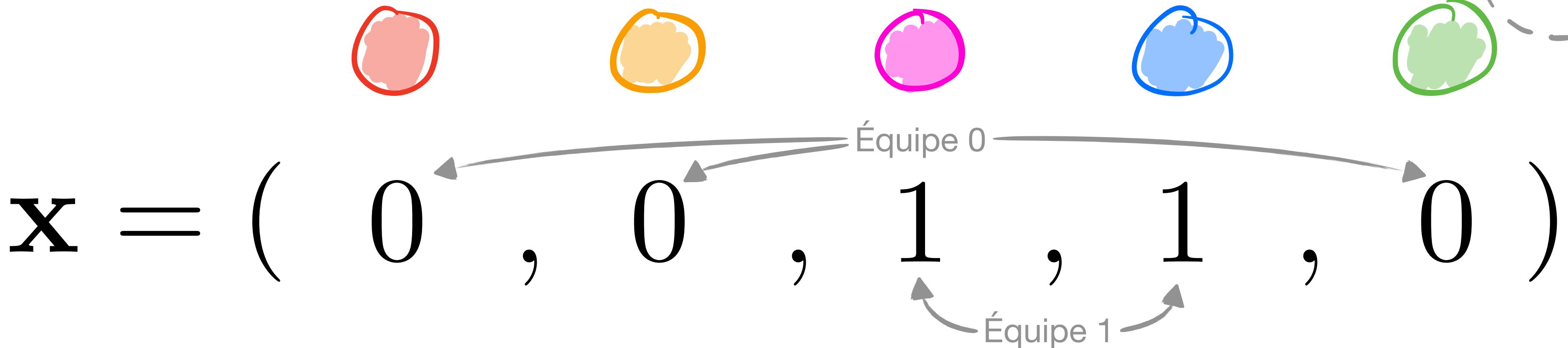
Équipe 0
Équipe 1





Formaliser le problème

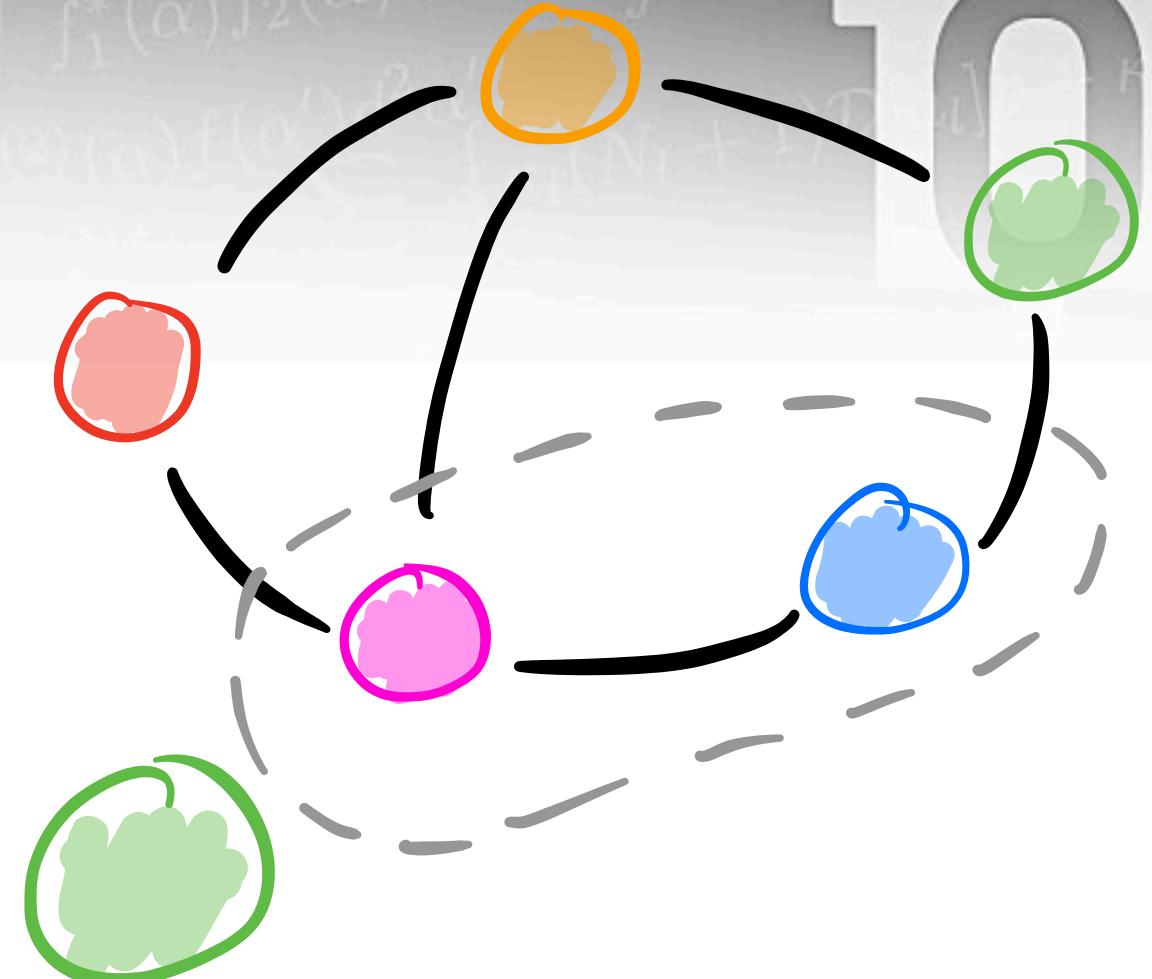
Le vecteur de configuration



Les composantes

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 0$$

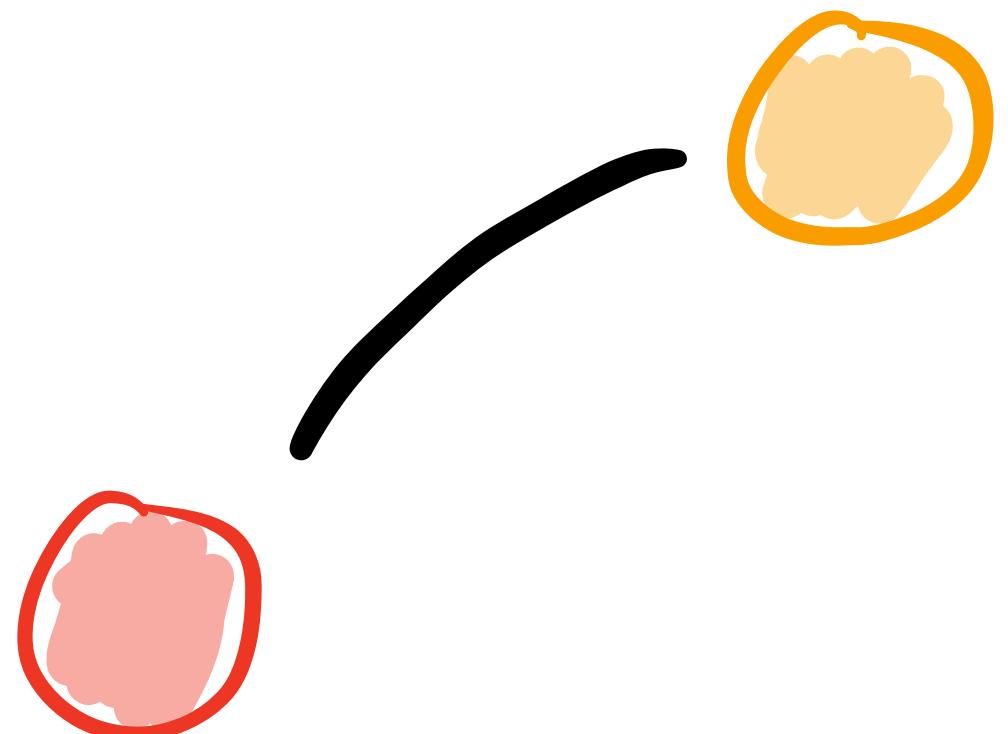
A curved arrow points from the vector components x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 to a general term x_i at the bottom, with the label "Indice de noeud" (Index of node) next to it.



Formaliser le problème

On gagne quoi à couper?

On définit le gain. Cette fonction doit avoir le comportement suivant :



$$g(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = x_1 \\ 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \end{cases}$$

Formaliser le problème

On gagne quoi à couper?

On définit le gain. Cette fonction doit avoir le comportement suivant :

$$g(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = x_1 \\ 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \end{cases}$$

Même équipe

Équipes différentes

Formaliser le problème

On gagne quoi à couper?

On définit le gain. Cette fonction doit avoir le comportement suivant :

$$g(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = x_1 \\ 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \end{cases}$$

Même équipe

Équipes différentes

La fonction suivante fait exactement cela :

$$g(x_0, x_1) = x_0(1 - x_1) + x_1(1 - x_0)$$

Formaliser le problème

On gagne quoi à couper?

On définit le gain. Cette fonction doit avoir le comportement suivant :

$$g(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = x_1 \\ 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \end{cases}$$

Même équipe

Équipes différentes

La fonction suivante fait exactement cela :

$$g(x_0, x_1) = x_0(1 - x_1) + x_1(1 - x_0)$$

Les 4 possibilités :

$$g(0, 0) = 0(1 - 0) + 0(1 - 0) = 0$$

$$g(0, 1) = 0(1 - 1) + 1(1 - 0) = 1$$

$$g(1, 0) = 1(1 - 0) + 0(1 - 1) = 1$$

$$g(1, 1) = 1(1 - 1) + 1(1 - 1) = 0$$

Formaliser le problème

On gagne quoi à couper?

On définit le gain. Cette fonction doit avoir le comportement suivant :

$$g(x_0, x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = x_1 \\ 1 & \text{si } x_0 \neq x_1 \end{cases}$$

La fonction suivante fait exactement cela :

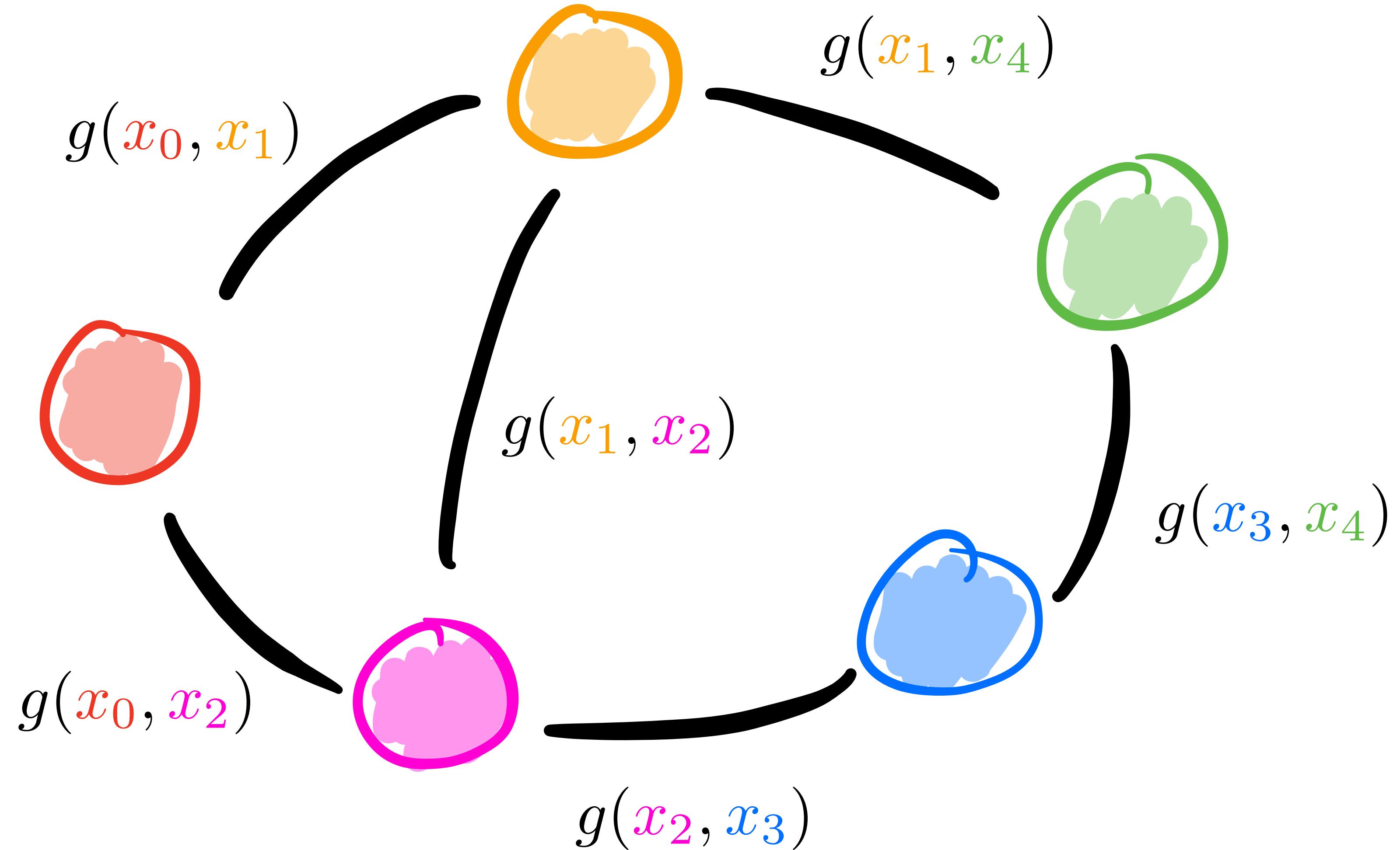
$$g(x_0, x_1) = x_0(1 - x_1) + x_1(1 - x_0)$$

Et sa forme générale pour les noeuds i et j :

$$g(x_i, x_j) = x_i(1 - x_j) + x_j(1 - x_i)$$

Formaliser le problème

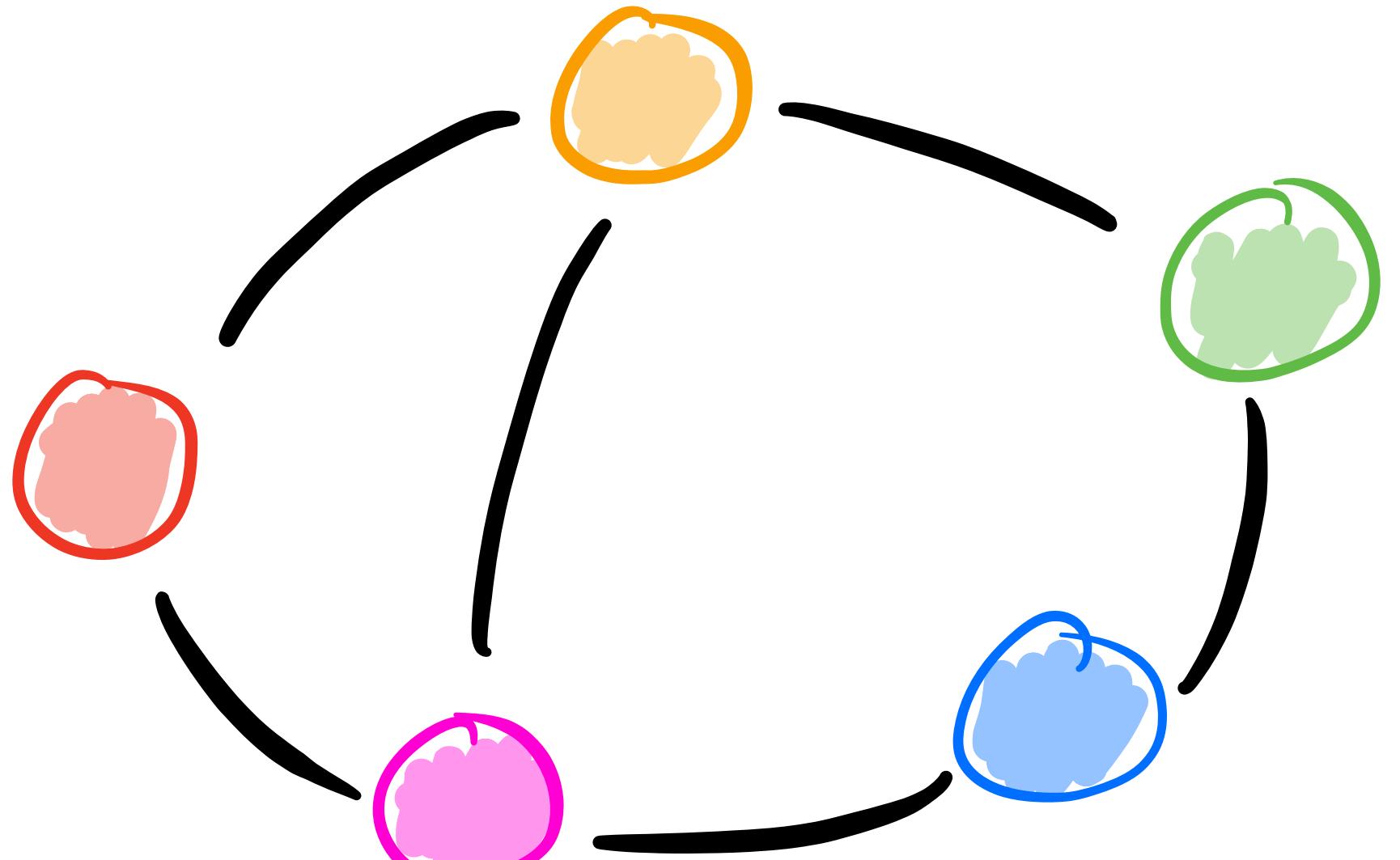
Le gain total



Formaliser le problème

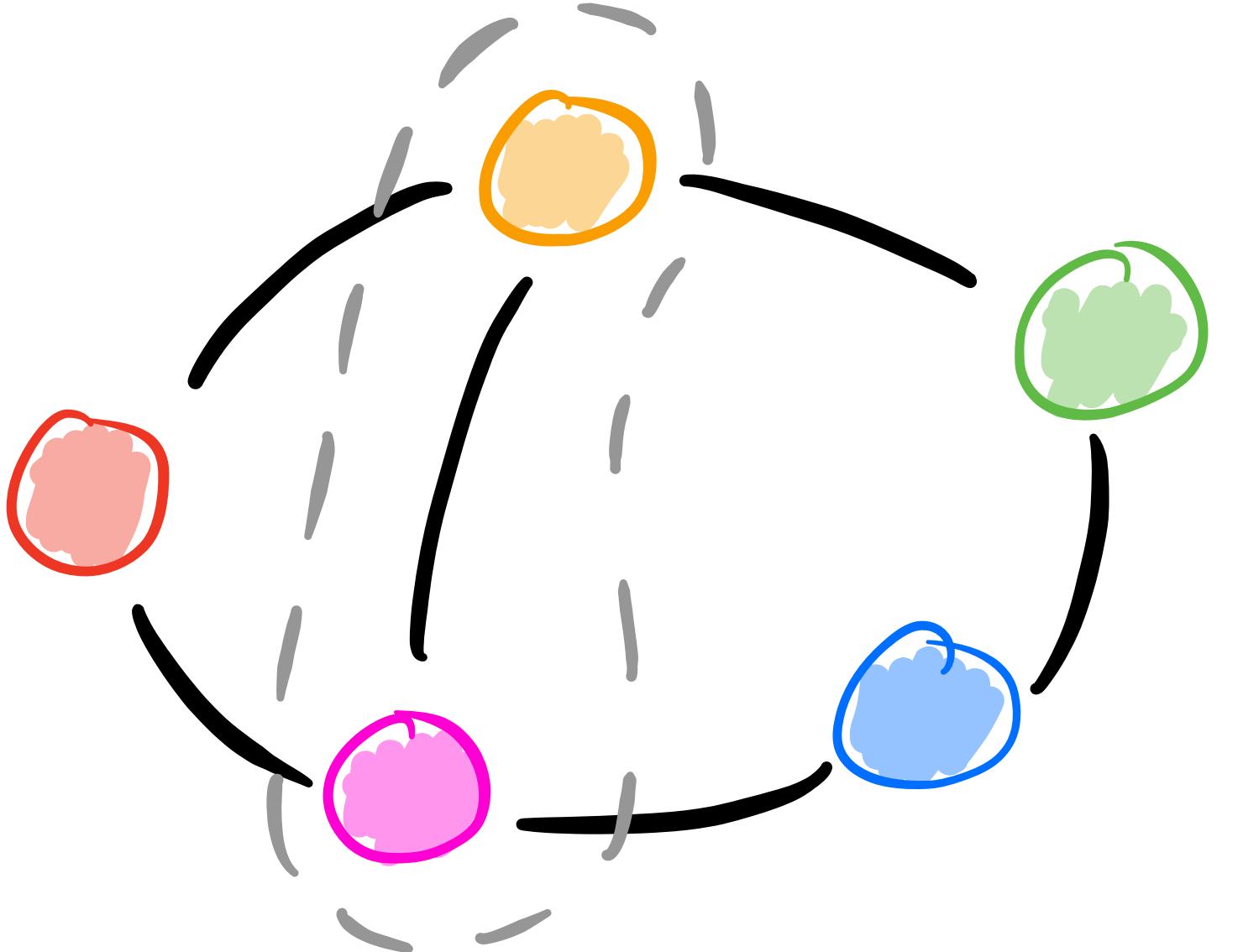
Le gain total

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) = & \ g(x_0, x_1) + g(x_0, x_2) \\ & + g(x_1, x_2) + g(x_1, x_4) \\ & + g(x_2, x_3) + g(x_3, x_4) \end{aligned}$$



Exercices

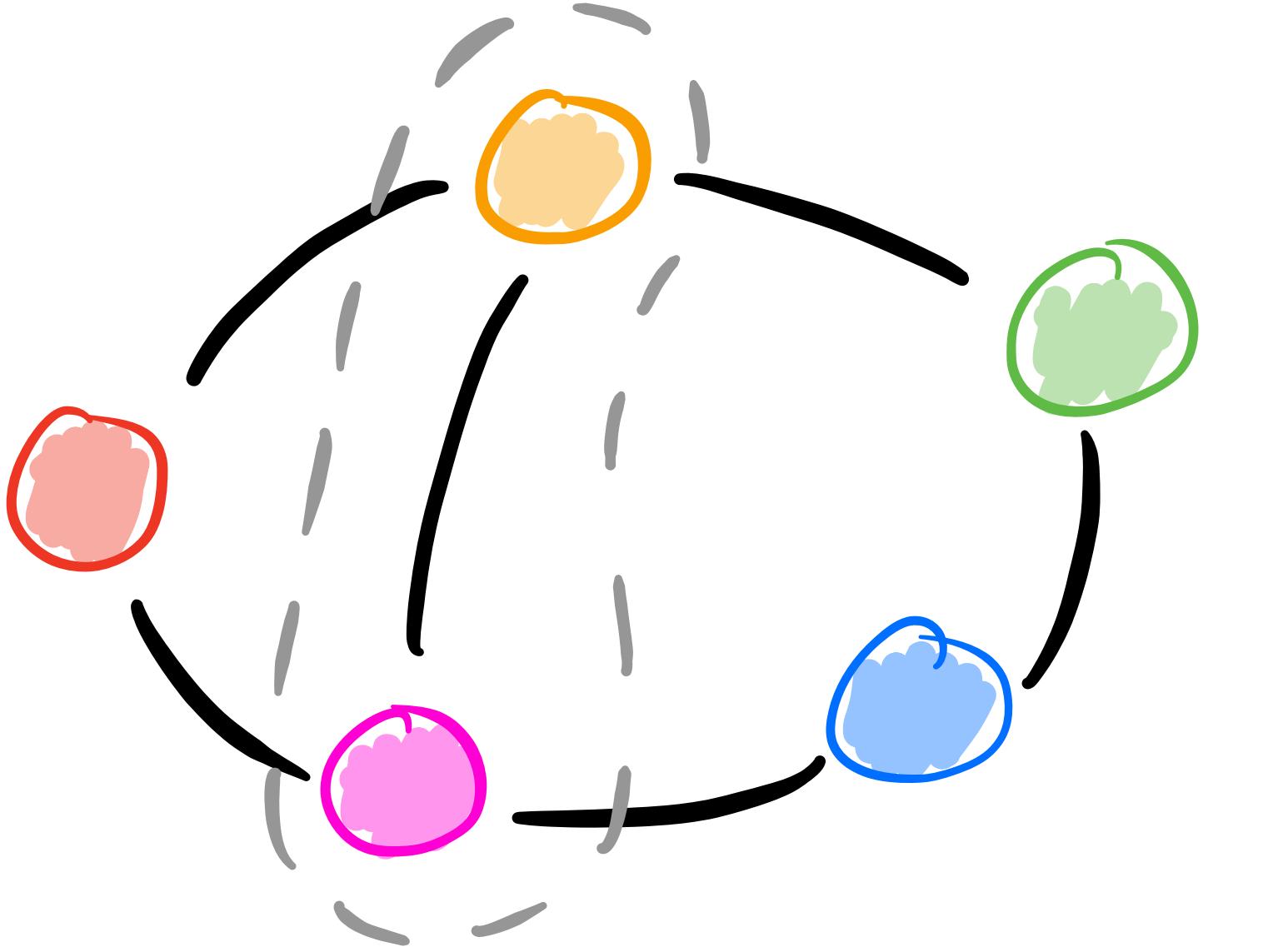
a)



b)

Exercices

a)

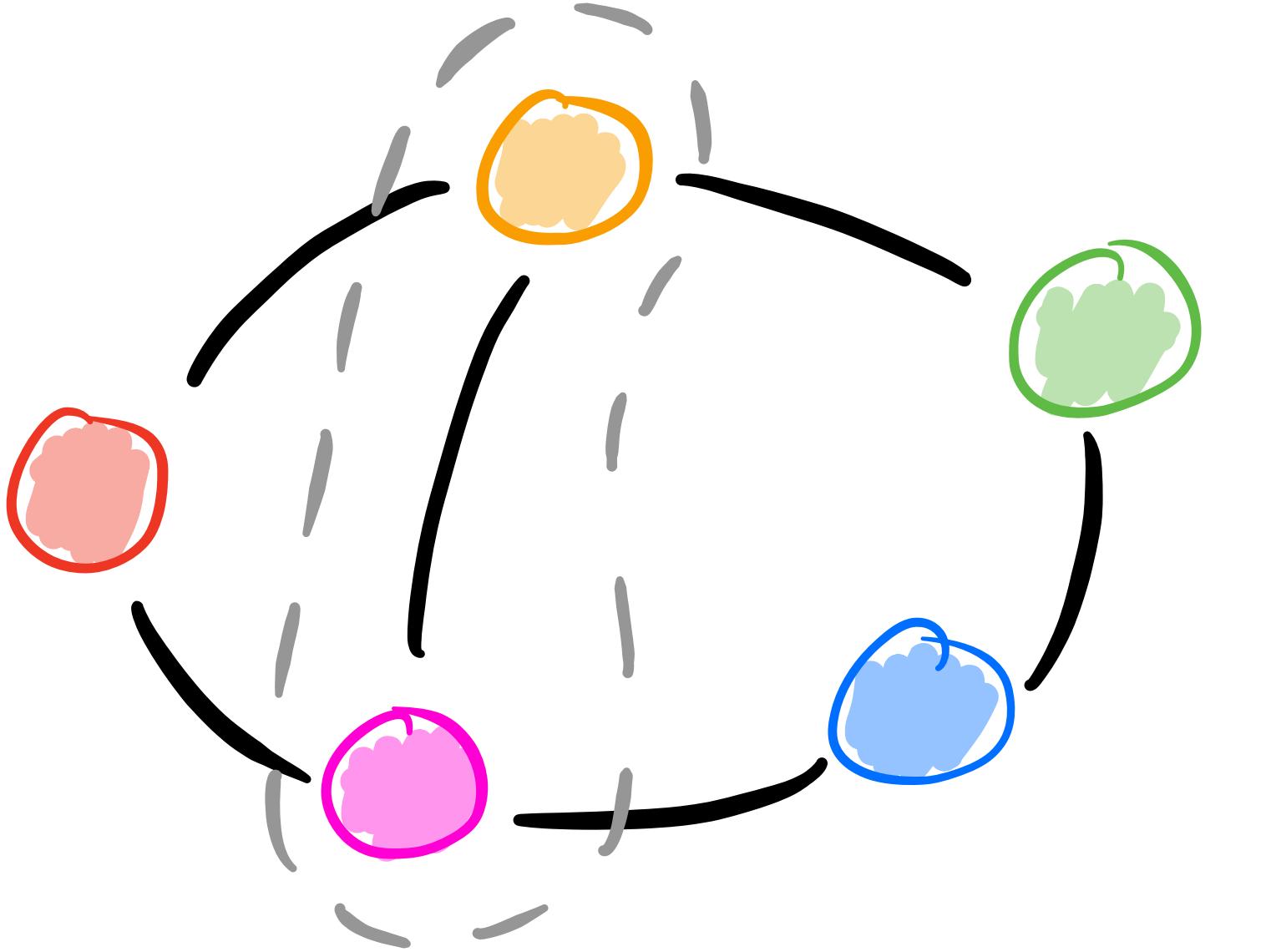


$$G((0, 1, 1, 0, 0)) =$$

b)

Exercices

a)

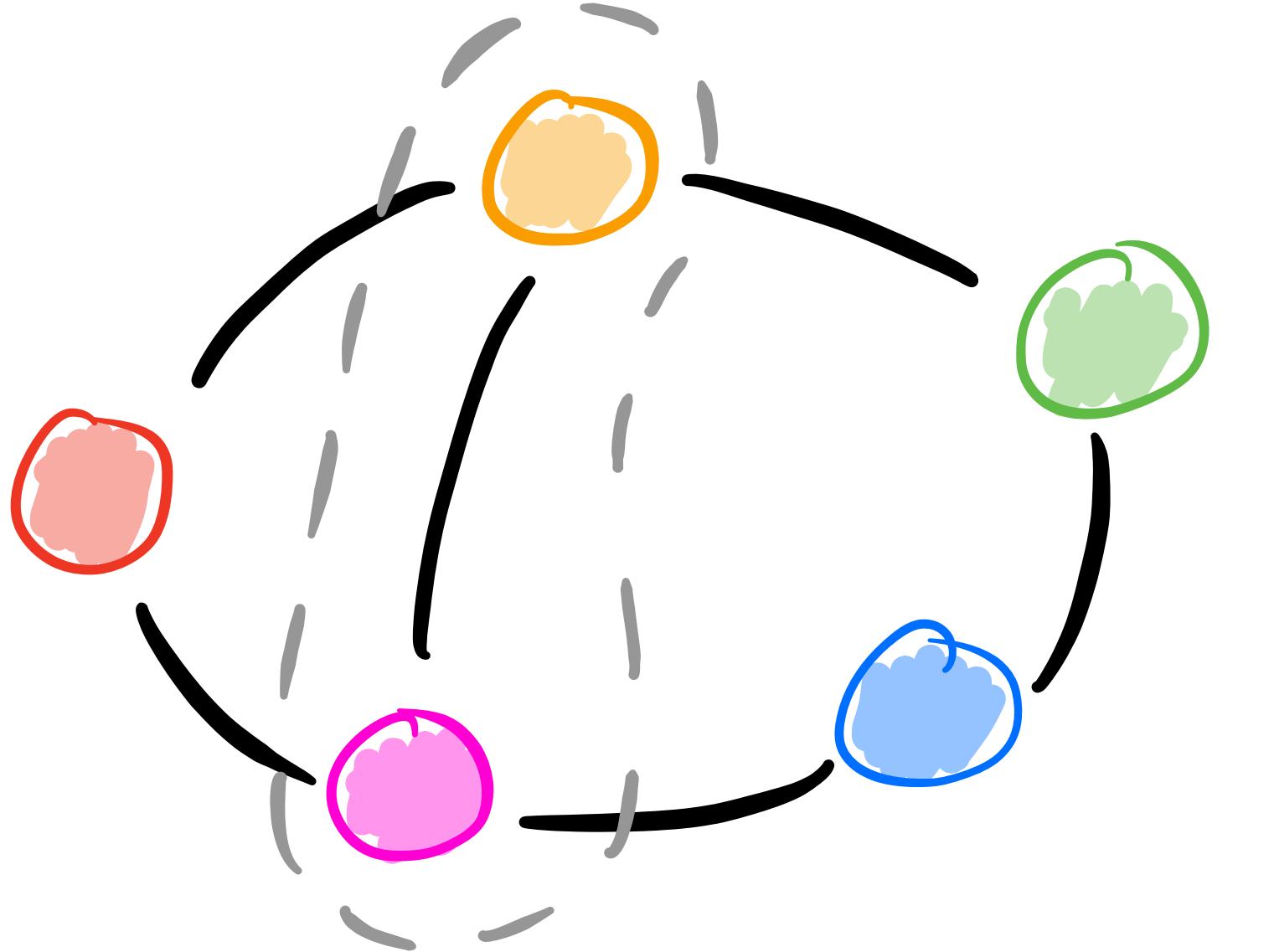


$$G((0, 1, 1, 0, 0)) = 4$$

b)

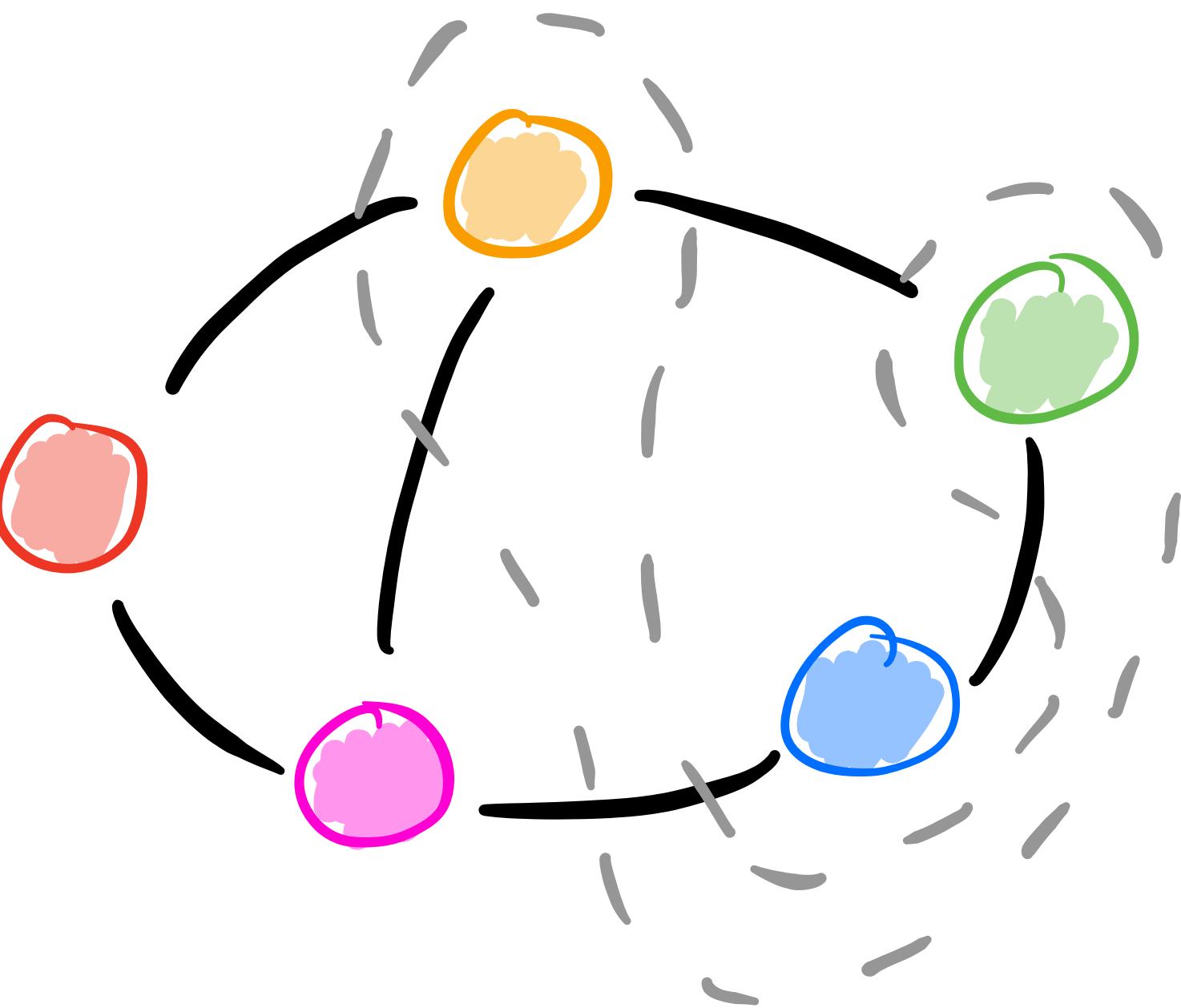
Exercices

a)



$$G((0, 1, 1, 0, 0)) = 4$$

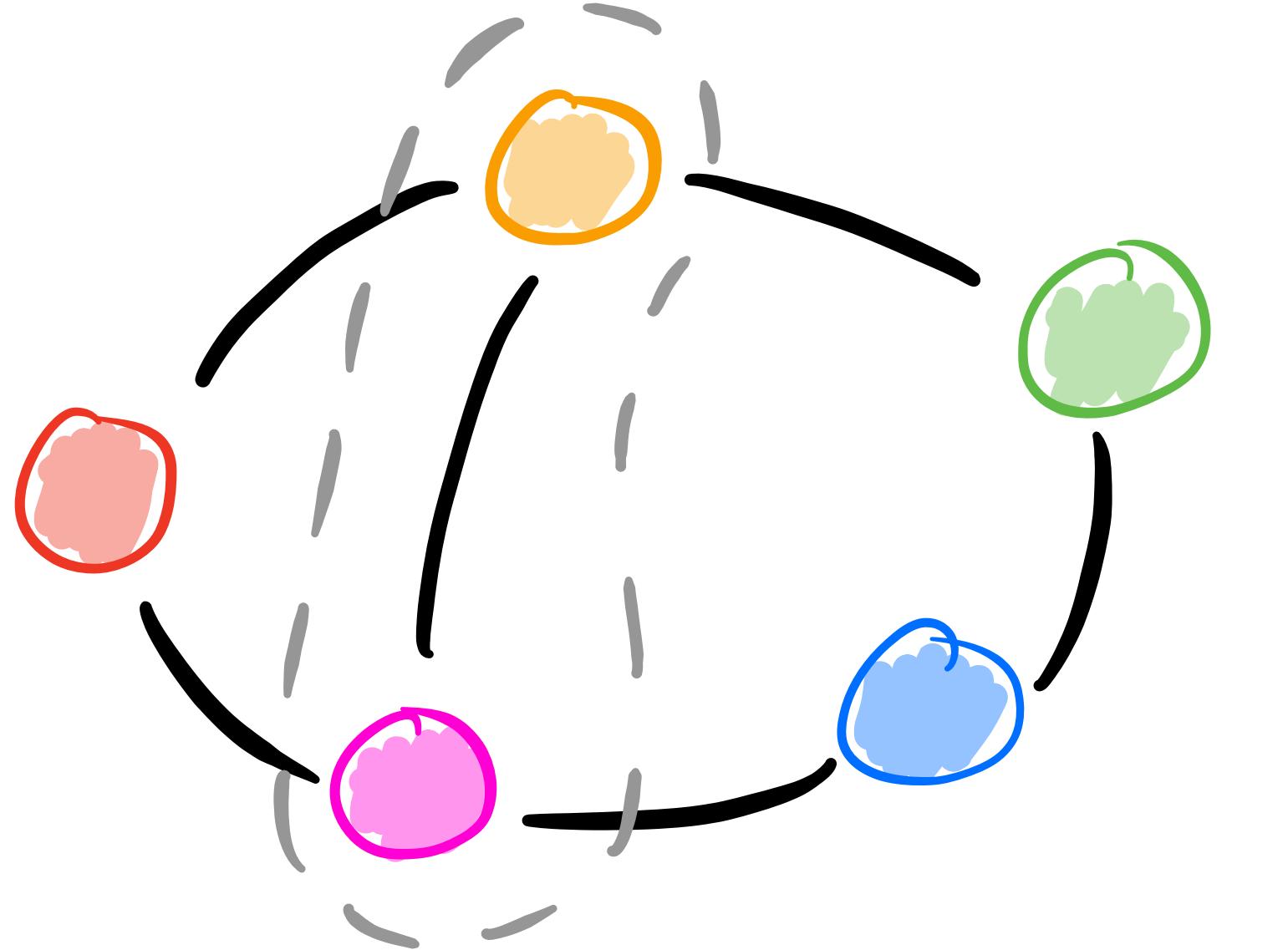
b)



$$G((0, 1, 0, 0, 1)) =$$

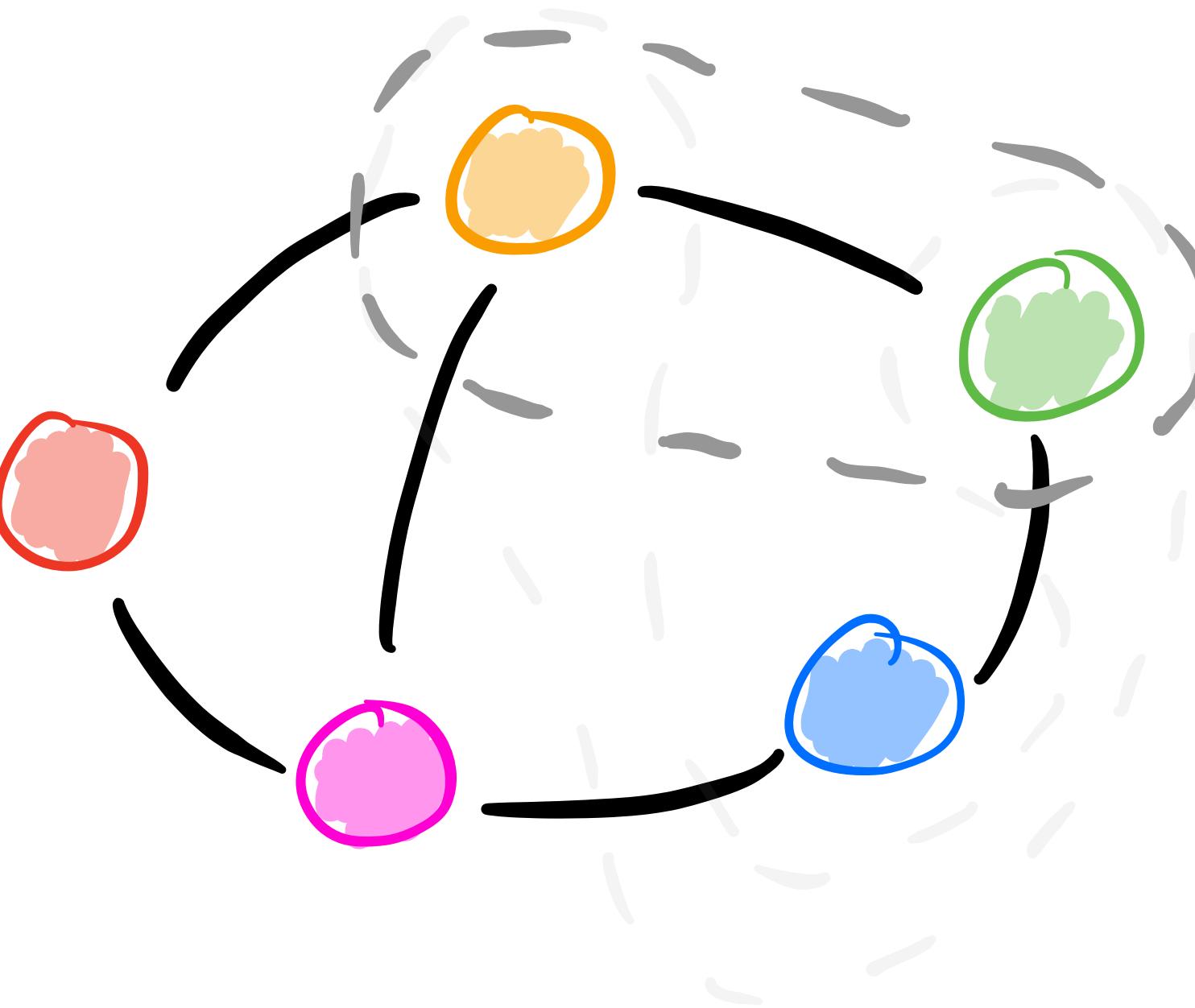
Exercices

a)



$$G((0, 1, 1, 0, 0)) = 4$$

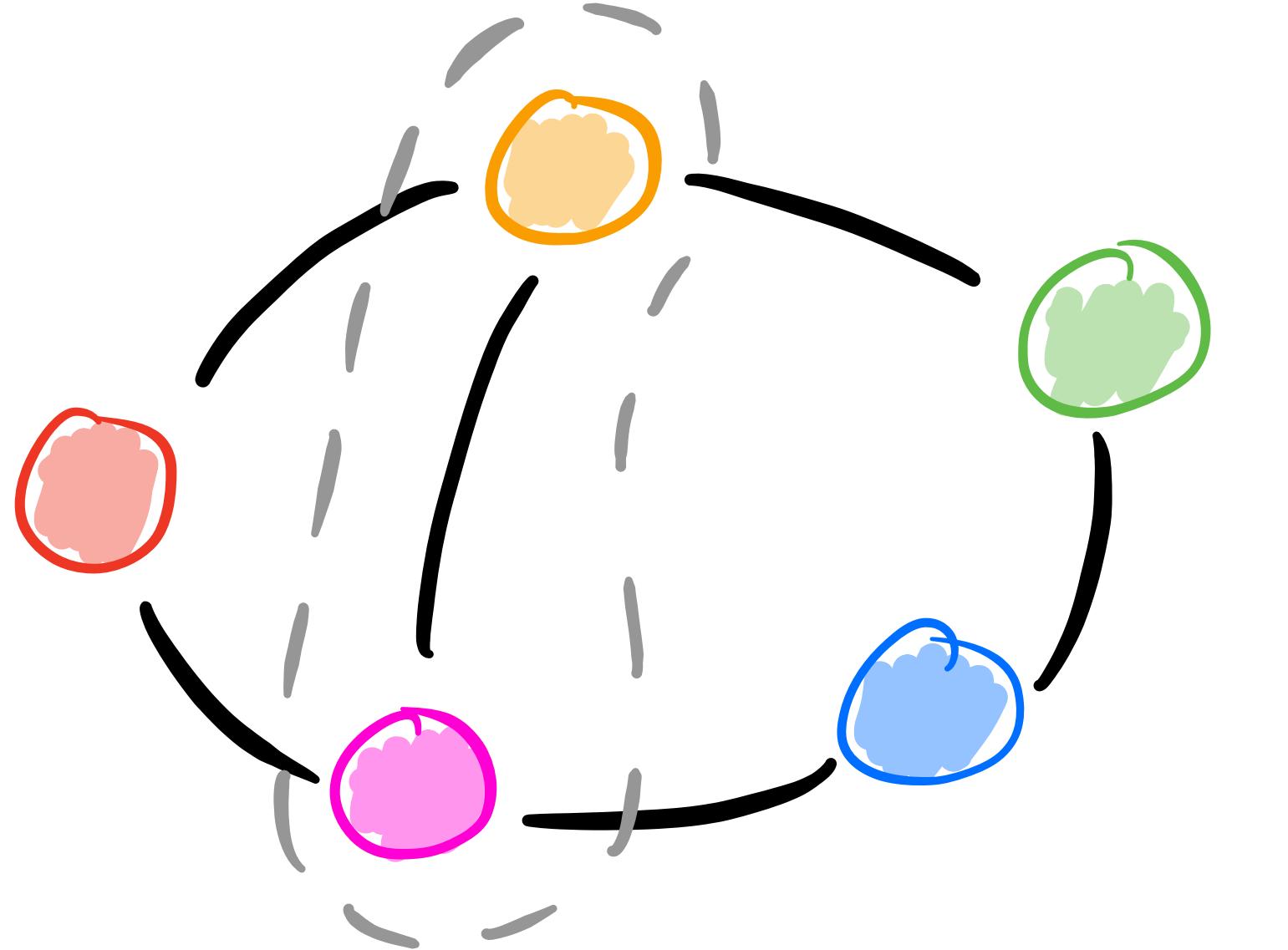
b)



$$G((0, 1, 0, 0, 1)) =$$

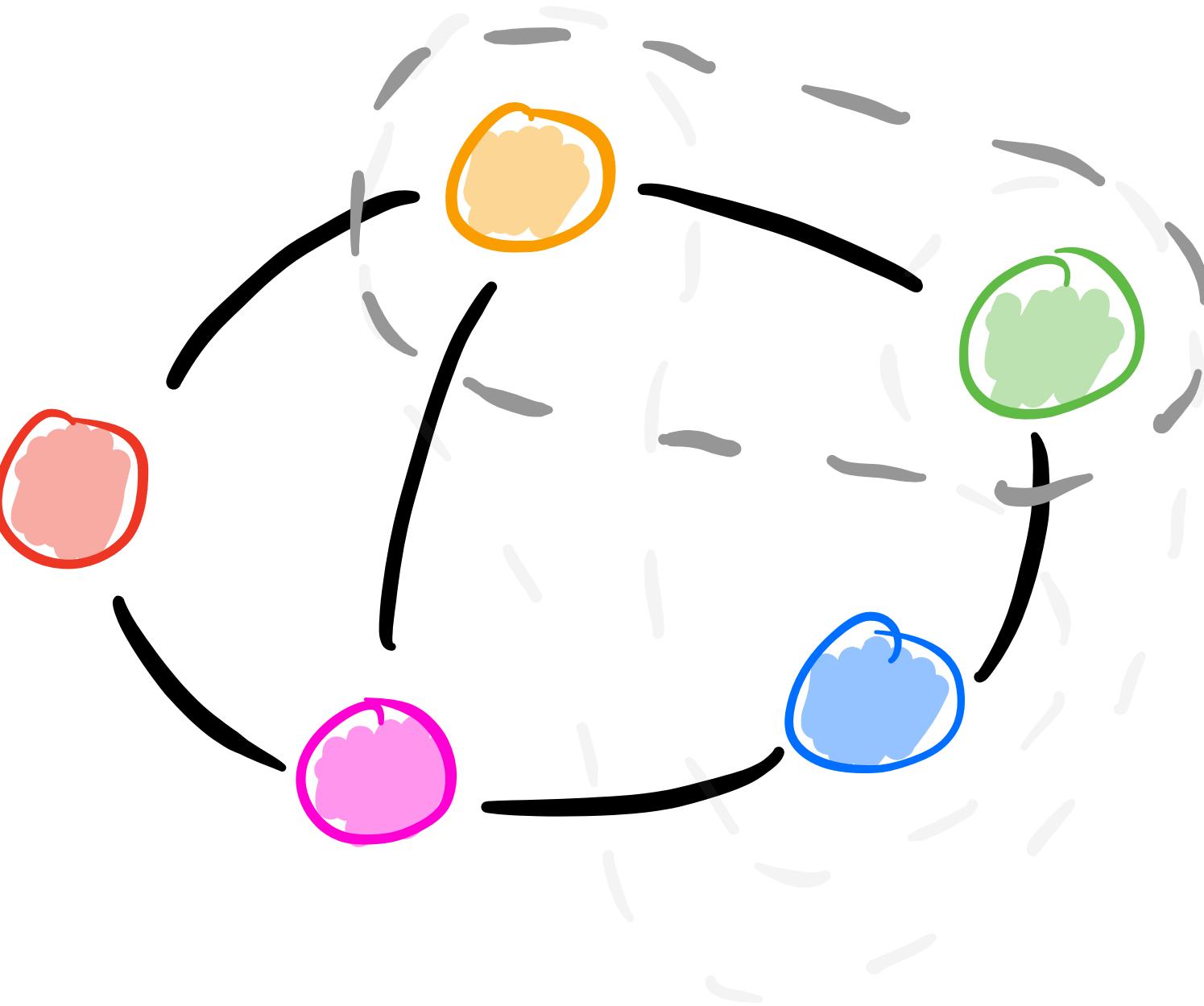
Exercices

a)



$$G((0, 1, 1, 0, 0)) = 4$$

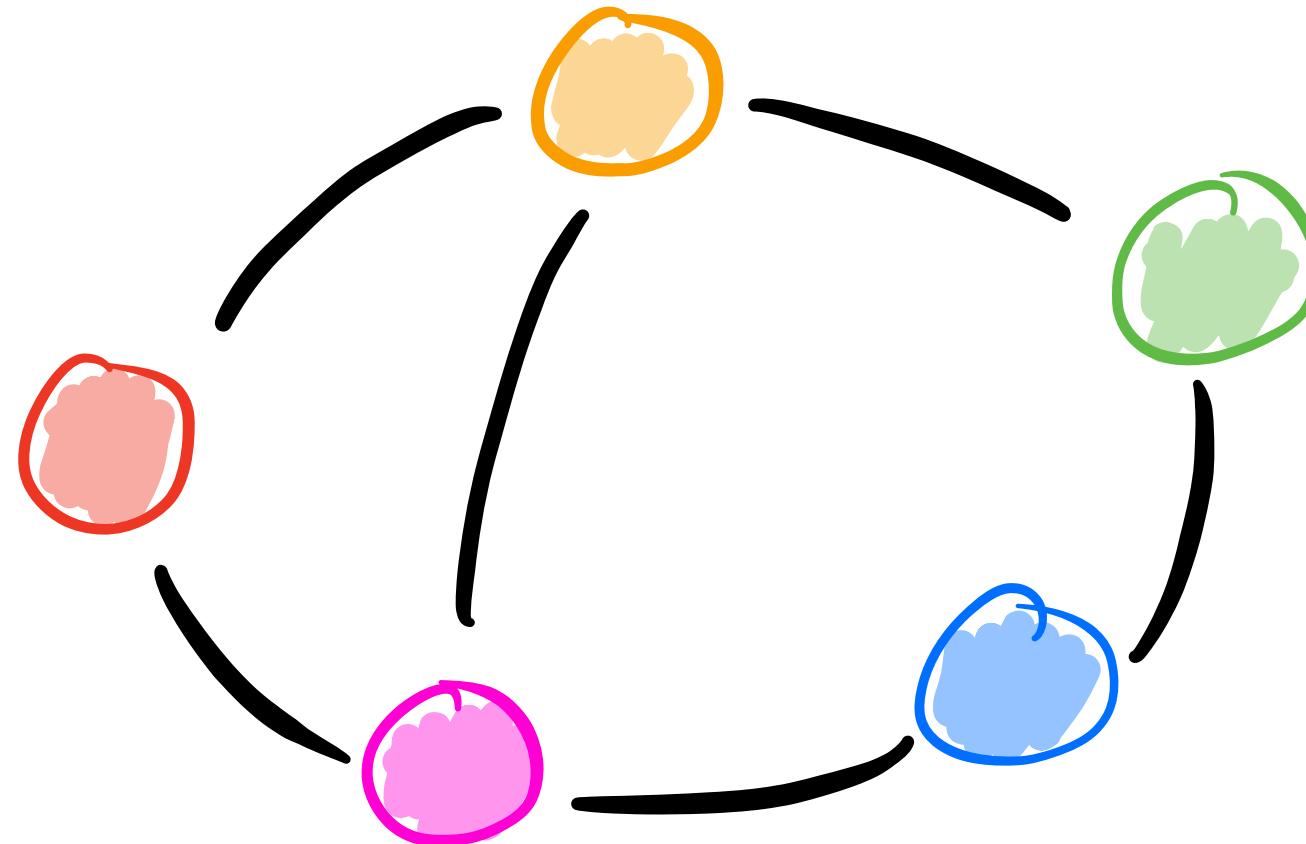
b)



$$G((0, 1, 0, 0, 1)) = 3$$

Solution classique

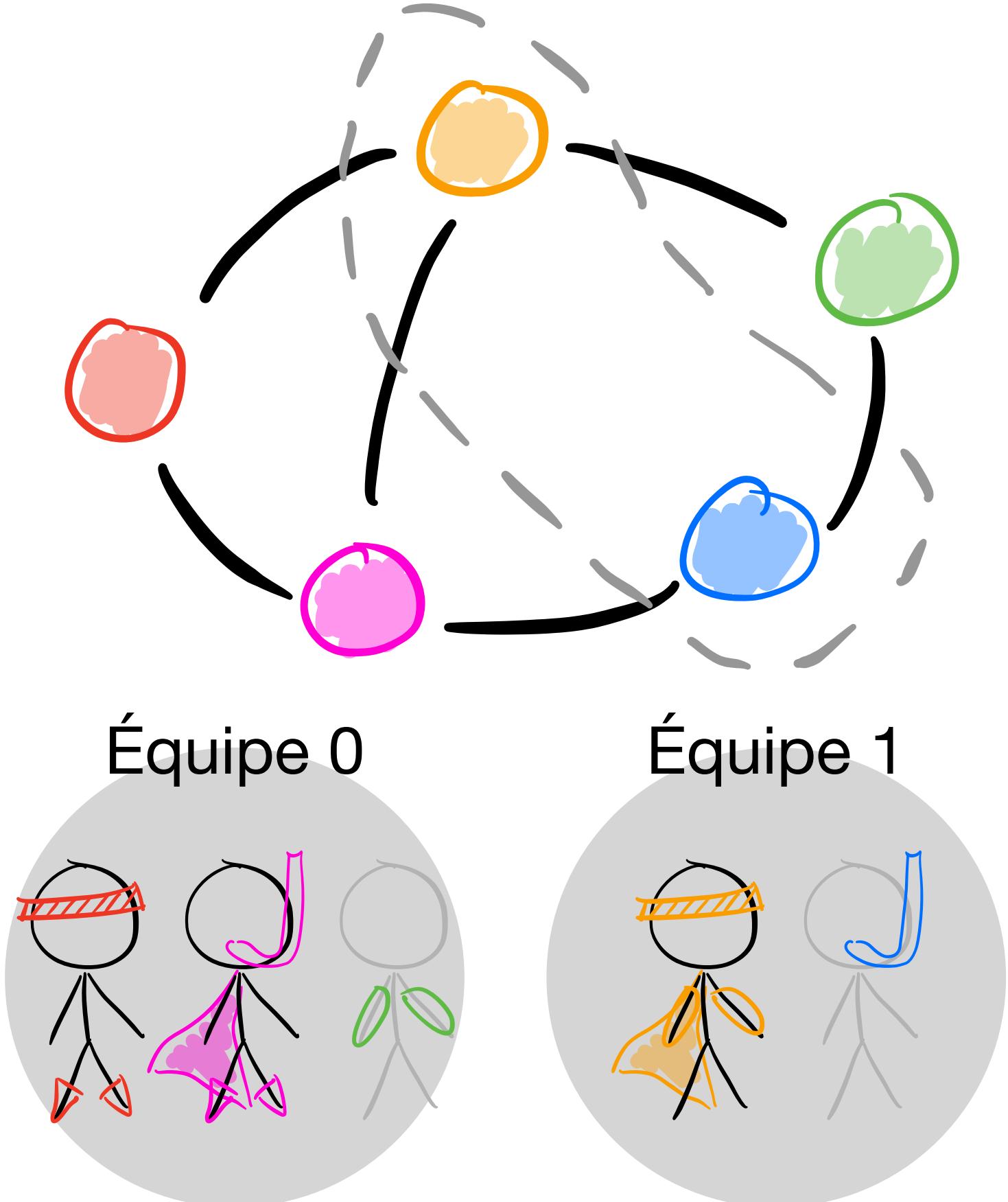
La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain est **d'essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**



Green	Blue	Pink	Yellow	Red	Gain
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	4
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	3
0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	0	4
0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	1	3
1	0	1	0	0	5
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	0	4
1	0	1	1	1	2
1	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3
1	1	0	1	1	3
1	1	1	0	0	3
1	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	0

Solution classique

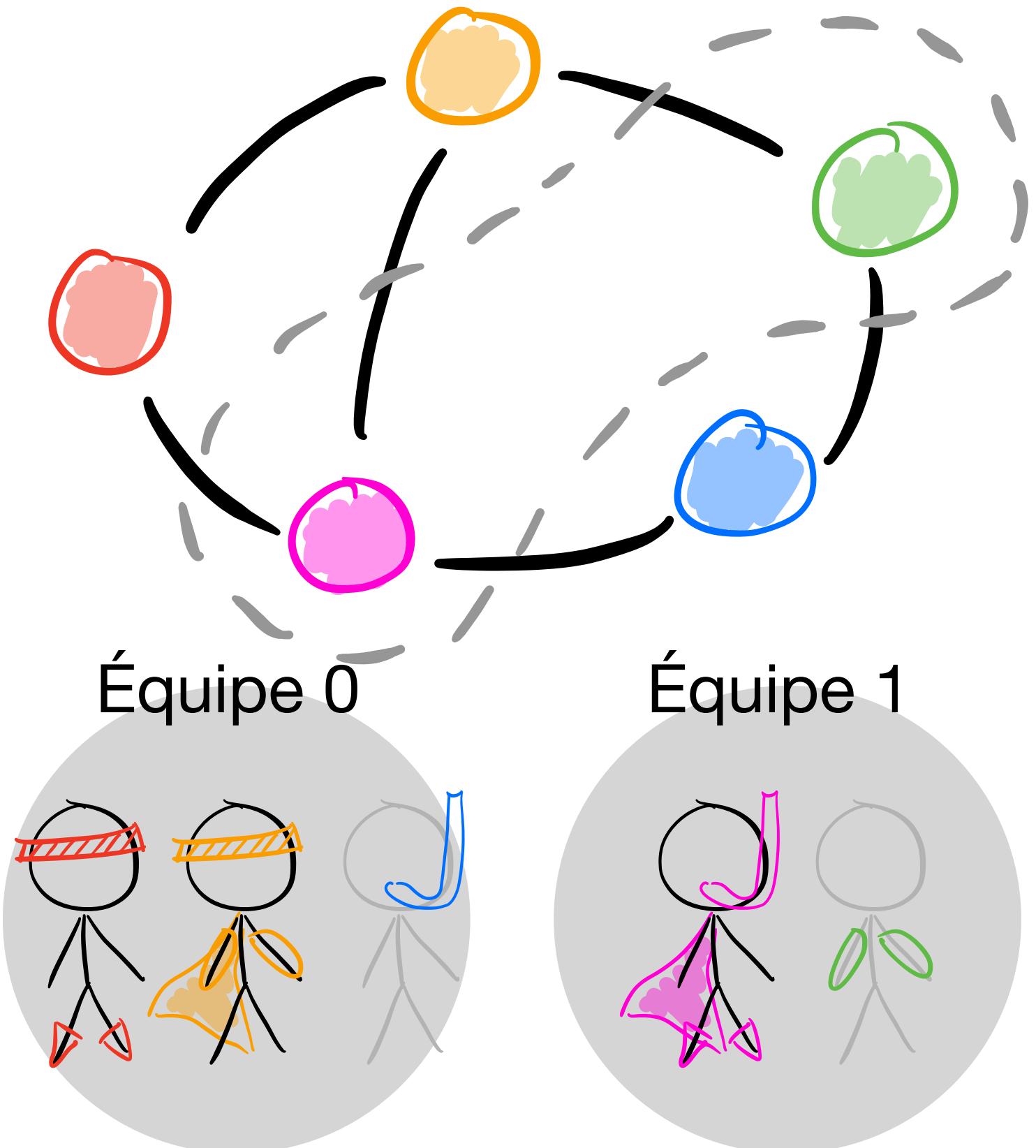
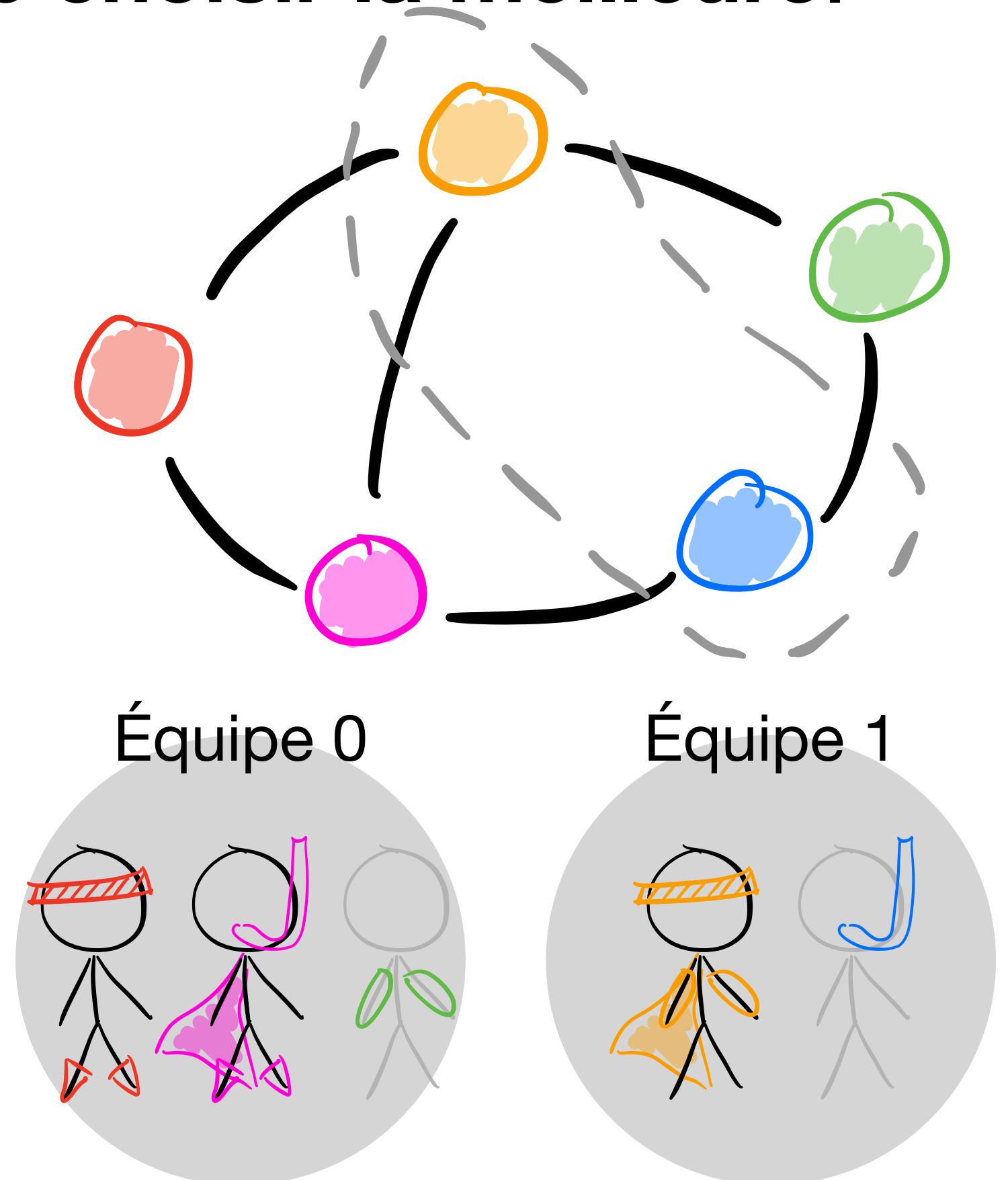
La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain est d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**



Équipe 0	Gain				
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	4
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	3
0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	0	4
0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	1	3
1	0	1	0	0	5
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	0	4
1	0	1	1	1	2
1	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3
1	1	0	1	1	3
1	1	1	0	0	3
1	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	0

Solution classique

La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain et d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**



Gain	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	1	0	3
0	0	0	0	1	1	3
0	0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	0	3
0	0	1	1	0	0	4
0	0	1	1	1	1	2
0	1	0	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4	
0	1	0	1	0	5	
0	1	0	1	1	5	
0	1	1	0	0	0	3
0	1	1	0	1	3	
0	1	1	1	0	0	4
0	1	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	0	2
1	0	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3	
1	0	0	1	1	3	
1	0	1	0	0	0	5
1	0	1	0	1	5	
1	0	1	1	0	0	4
1	0	1	1	1	1	2
1	1	0	0	0	0	2
1	1	0	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3	
1	1	0	1	1	3	
1	1	1	0	0	0	3
1	1	1	0	1	1	3
1	1	1	1	0	0	2
1	1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	1	0

Solution classique

La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain et d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**

Combien y-a-t'il de configurations à essayer?

- Pour notre problème à 5 noeuds?

Gain	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	4
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	3
0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	0	4
0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	1	3
1	0	1	0	0	5
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	0	4
1	0	1	1	1	2
1	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3
1	1	0	1	1	3
1	1	1	0	0	3
1	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	0

Solution classique

La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain et d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**

Combien y-a-t'il de configurations à essayer?

- Pour notre problème à 5 noeuds?

$$2^5 = 32$$

Gain	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	4
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	3
0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	0	4
0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	1	3
1	0	1	0	0	5
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	0	4
1	0	1	1	1	2
1	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3
1	1	0	1	1	3
1	1	1	0	0	3
1	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	0

Solution classique

La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain et d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**

Combien y-a-t'il de configurations à essayer?

- Pour notre problème à 5 noeuds?

$$2^5 = 32$$

- Pour un problème à 100 noeuds?

Green	Blue	Pink	Yellow	Red	Gain
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	1	0	3
0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	3
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	4
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	0	2
0	1	0	0	1	4
0	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	3
0	1	1	0	1	3
0	1	1	1	0	4
0	1	1	1	1	2
1	0	0	0	0	2
1	0	0	0	1	4
1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	1	3
1	0	1	0	0	5
1	0	1	0	1	5
1	0	1	1	0	4
1	0	1	1	1	2
1	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	4
1	1	0	1	0	3
1	1	0	1	1	3
1	1	1	0	0	3
1	1	1	0	1	3
1	1	1	1	0	2
1	1	1	1	1	0

Solution classique

La méthode la plus simple pour trouver une configuration qui maximise le gain et d'**essayer toutes les configurations et de choisir la meilleure.**

Combien y-a-t'il de configurations à essayer?

- Pour notre problème à 5 noeuds?

$$2^5 = 32$$

- Pour un problème à 100 noeuds?

$$2^{100} = 1\ 267\ 650\ 600\ 228\ 229\ 401\ 496\ 703\ 205\ 376$$

1 267 milliards de milliards de milliards

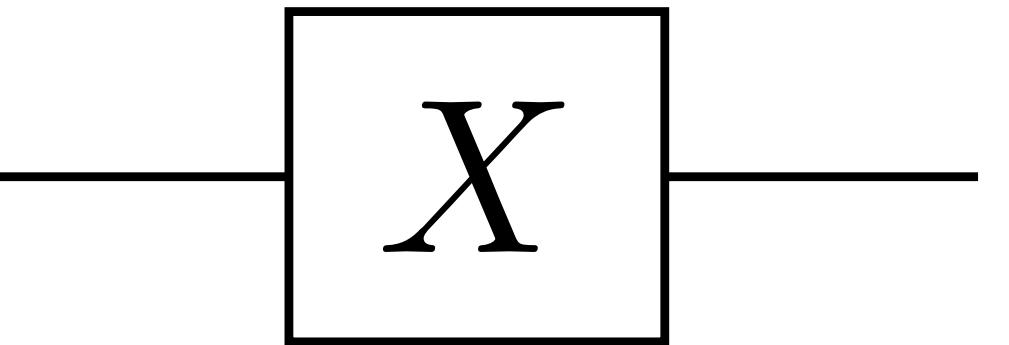
Gain	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	2	
0	0	0	1	0	3	
0	0	0	1	1	3	
0	0	1	0	0	3	
0	0	1	0	1	3	
0	0	1	1	0	4	
0	0	1	1	1	2	
0	1	0	0	0	2	
0	1	0	0	1	4	
0	1	0	1	0	5	
0	1	0	1	1	5	
0	1	1	0	0	3	
0	1	1	0	1	3	
0	1	1	1	0	4	
0	1	1	1	1	2	
1	0	0	0	0	2	
1	0	0	0	1	4	
1	0	0	1	0	3	
1	0	0	1	1	3	
1	0	1	0	0	5	
1	0	1	0	1	5	
1	0	1	1	0	4	
1	0	1	1	1	2	
1	1	0	0	0	2	
1	1	0	0	1	4	
1	1	0	1	0	3	
1	1	0	1	1	3	
1	1	1	0	0	3	
1	1	1	0	1	3	
1	1	1	1	0	2	
1	1	1	1	1	0	

Solution quantique

Rappel quantique

Portes quantiques à 1 qubit

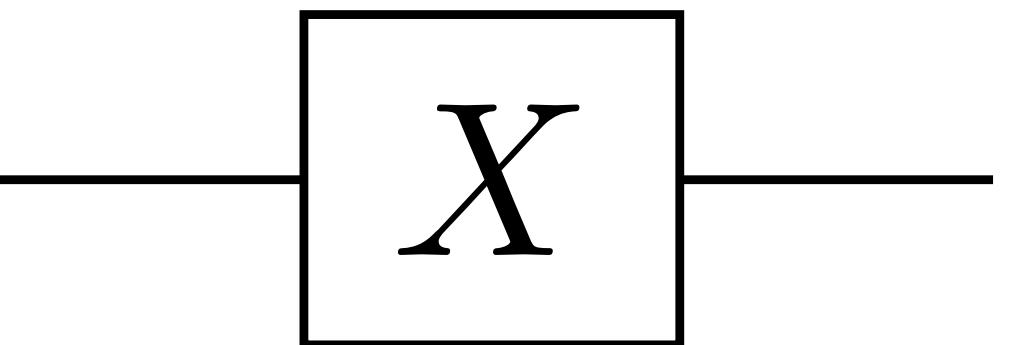
Porte X (NOT)



Rappel quantique

Portes quantiques à 1 qubit

Porte X (NOT)

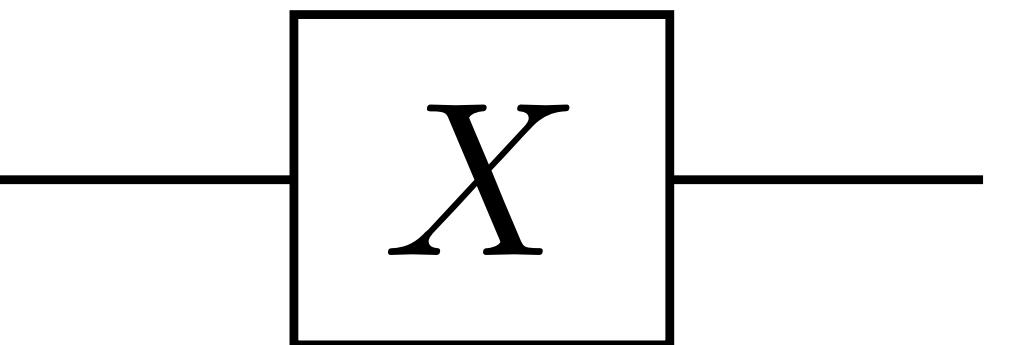


$$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$$

Rappel quantique

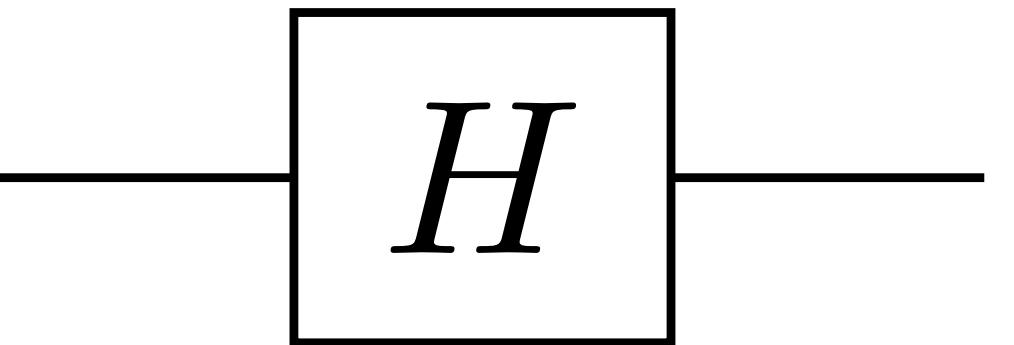
Portes quantiques à 1 qubit

Porte X (NOT)



$$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$$

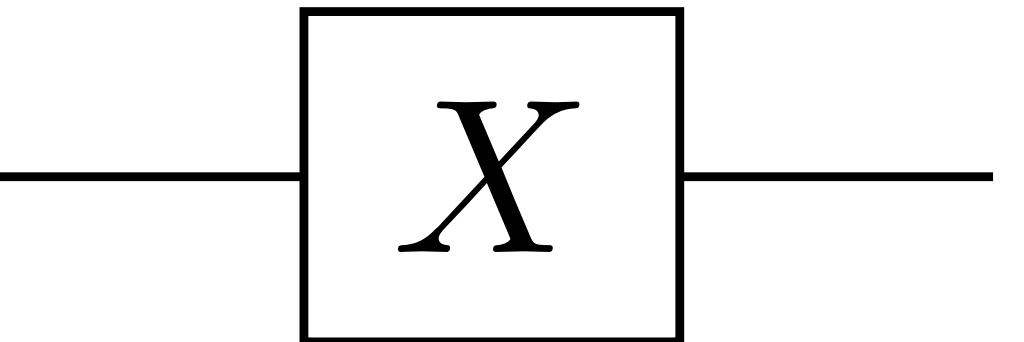
Porte Hadamard



Rappel quantique

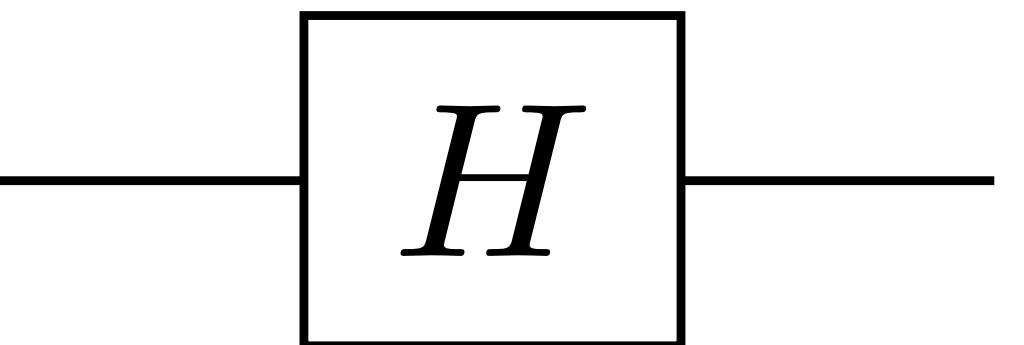
Portes quantiques à 1 qubit

Porte X (NOT)



$$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$$

Porte Hadamard



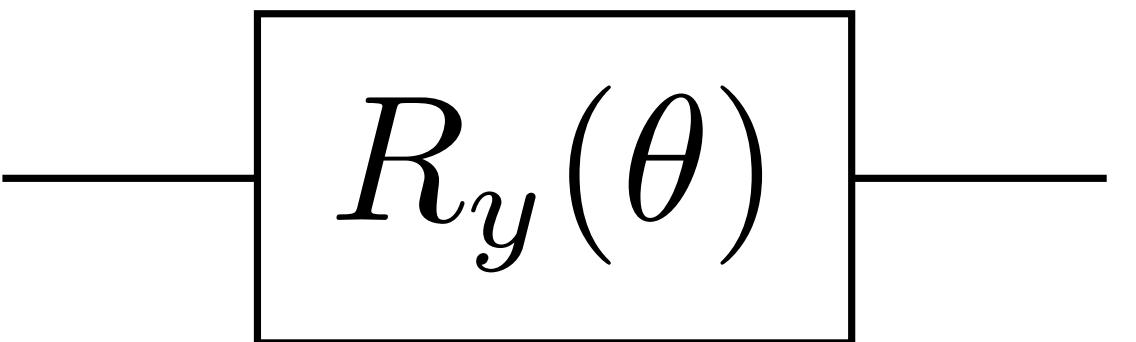
$$|0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Rappel quantique

Portes quantiques paramétrées

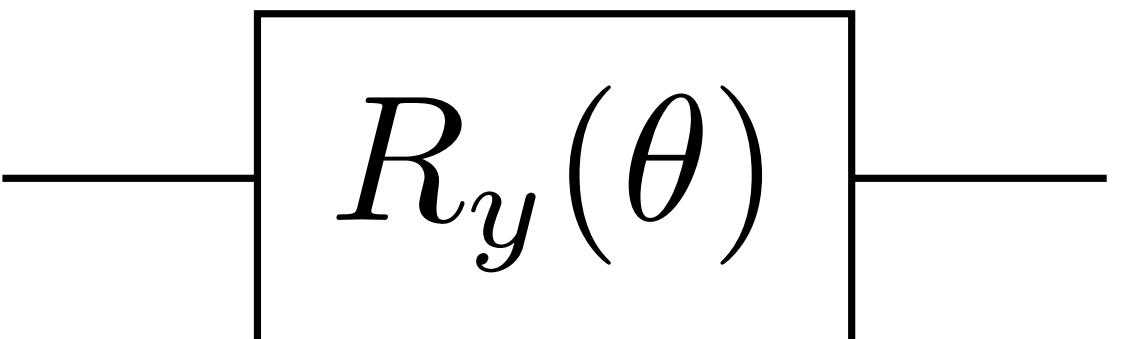
Porte Ry



Rappel quantique

Portes quantiques paramétrées

Porte Ry



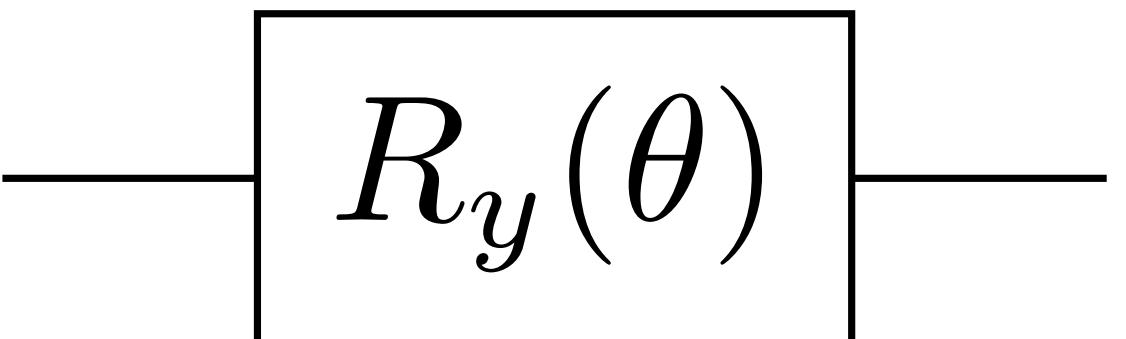
$$|0\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

Rappel quantique

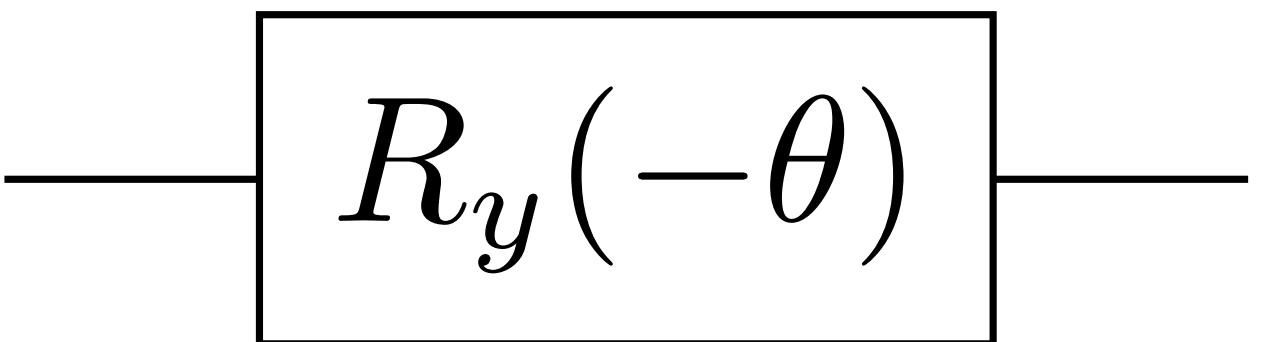
Portes quantiques paramétrées

Porte Ry



$$|0\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad |1\rangle \rightarrow -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

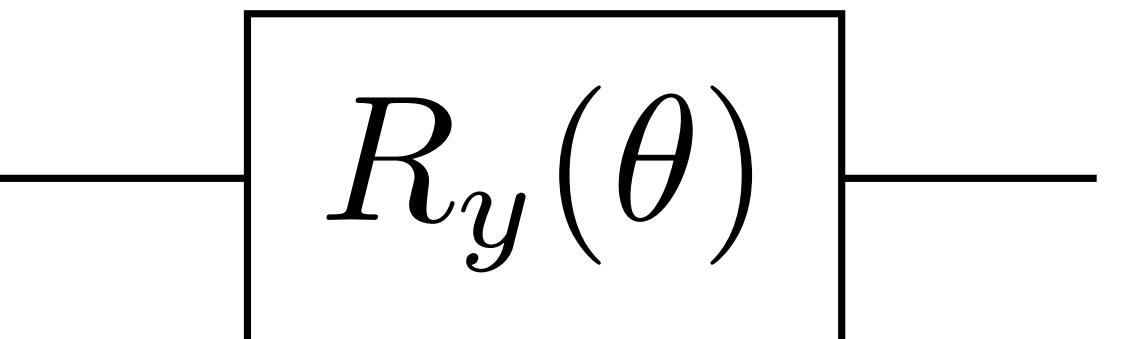
Porte Ry inverse



Rappel quantique

Portes quantiques paramétrées

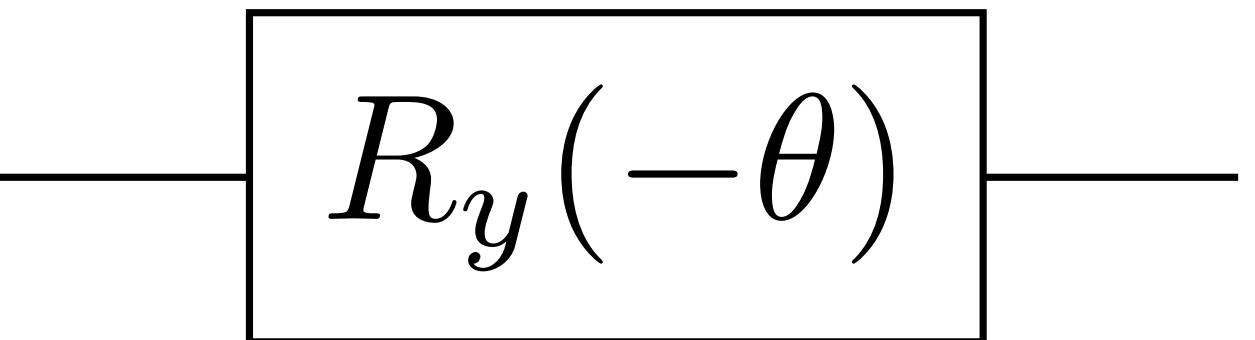
Porte Ry



$$|0\rangle \rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$$|1\rangle \rightarrow -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

Porte Ry inverse



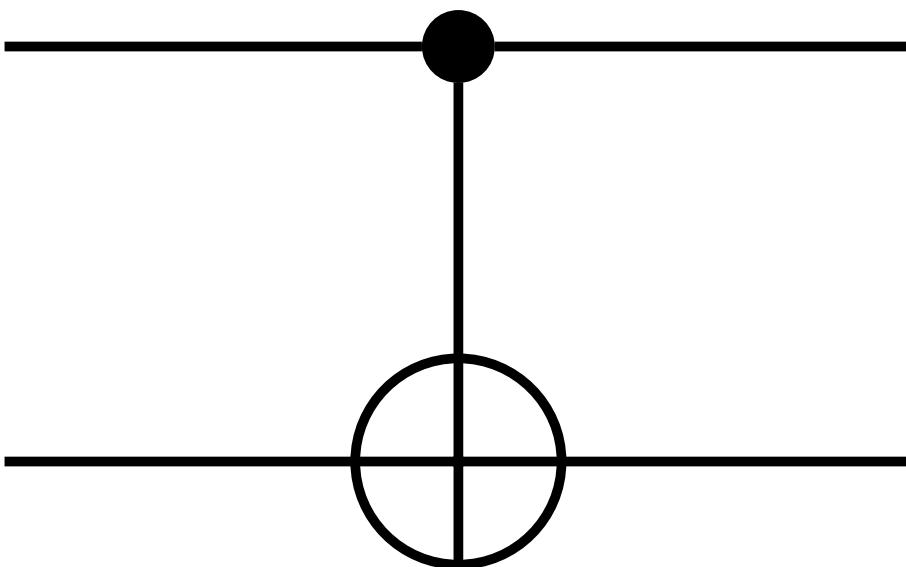
$$|0\rangle \leftarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

$$|1\rangle \leftarrow -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle$$

Rappel quantique

Portes quantiques à 2 qubits

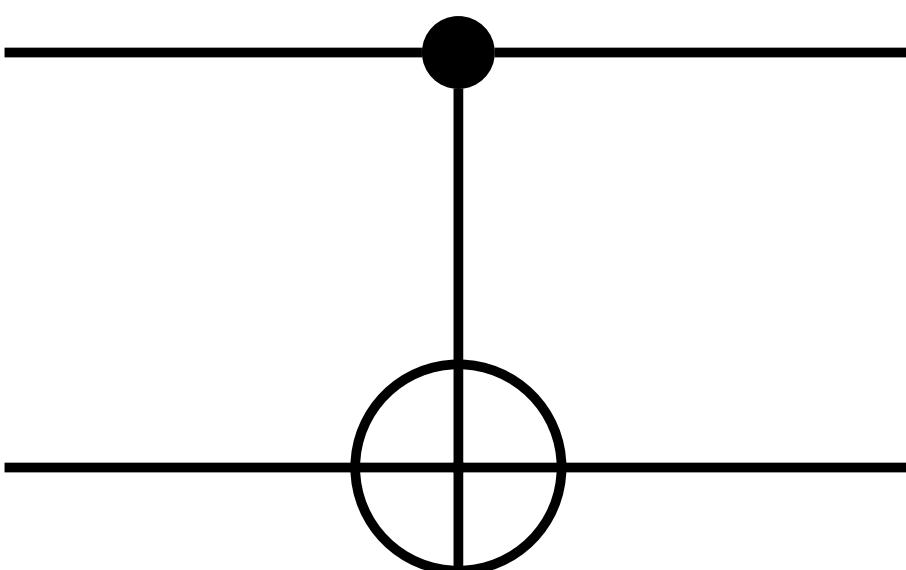
Porte X Contrôlée (CNOT)



Rappel quantique

Portes quantiques à 2 qubits

Porte X Contrôlée (CNOT)



$$|00\rangle \leftrightarrow |00\rangle$$

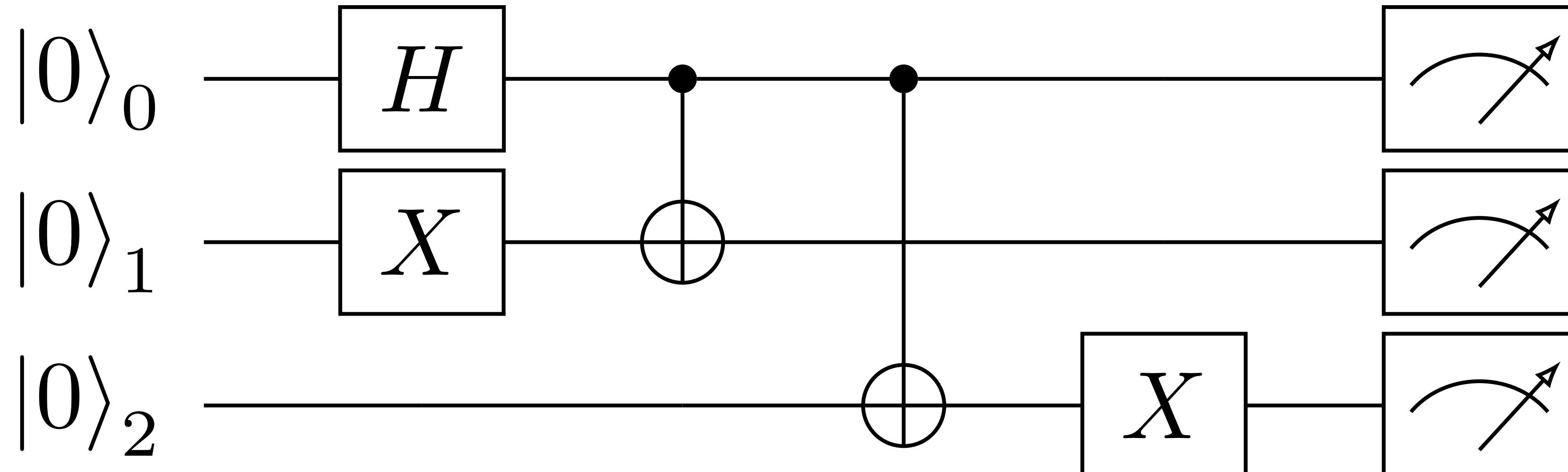
$$|01\rangle \leftrightarrow |11\rangle$$

$$|10\rangle \leftrightarrow |10\rangle$$

$$|11\rangle \leftrightarrow |01\rangle$$

Rappel quantique

Circuits quantiques



Solution quantique

Concepts clés

Solution quantique

Concepts clés

- Encodage

Solution quantique

Concepts clés

- Encodage
- Préparation d'états quantiques

Solution quantique

Concepts clés

- Encodage
- Préparation d'états quantiques
- Mesure et estimation du gain sur un ordinateur quantique

Solution quantique

Encodage

On choisi d'abord un **encodage** pour représenter les **configurations** comme des **états quantiques** :

$$|\mathbf{x}\rangle = |x_4 x_3 x_2 x_1 x_0\rangle$$

Solution quantique

Encodage

On choisi d'abord un **encodage** pour représenter les **configurations** comme des **états quantiques** :

$$|\mathbf{x}\rangle = |x_4 x_3 x_2 x_1 x_0\rangle$$

Exemple :

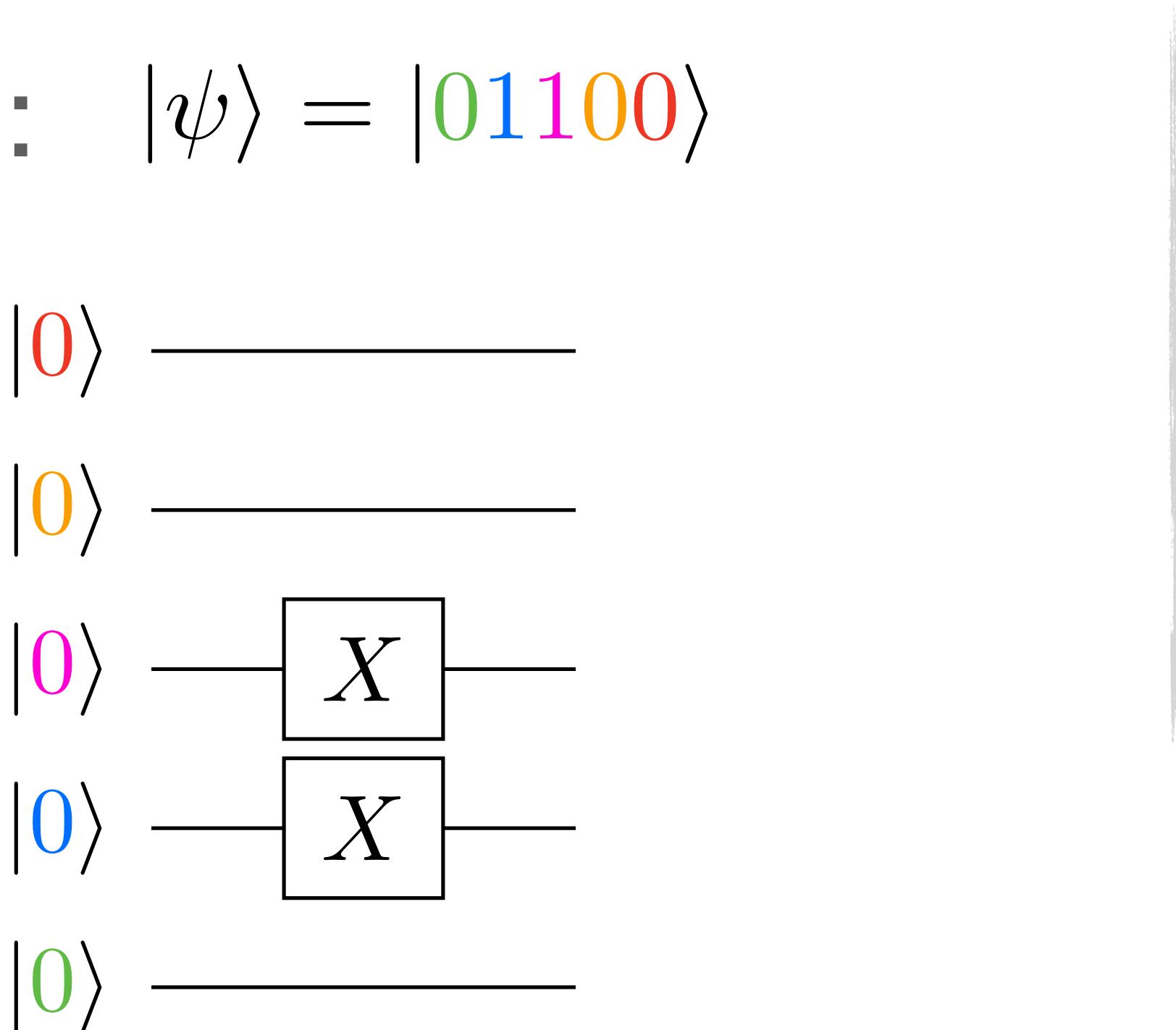
$$|\psi\rangle = |01100\rangle$$

Solution quantique

Encodage

On peut préparer des **configurations**
à l'aide d'un **circuit quantique**

Exemple : $|\psi\rangle = |\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1}\textcolor{magenta}{1}\textcolor{red}{0}\textcolor{orange}{0}\rangle$

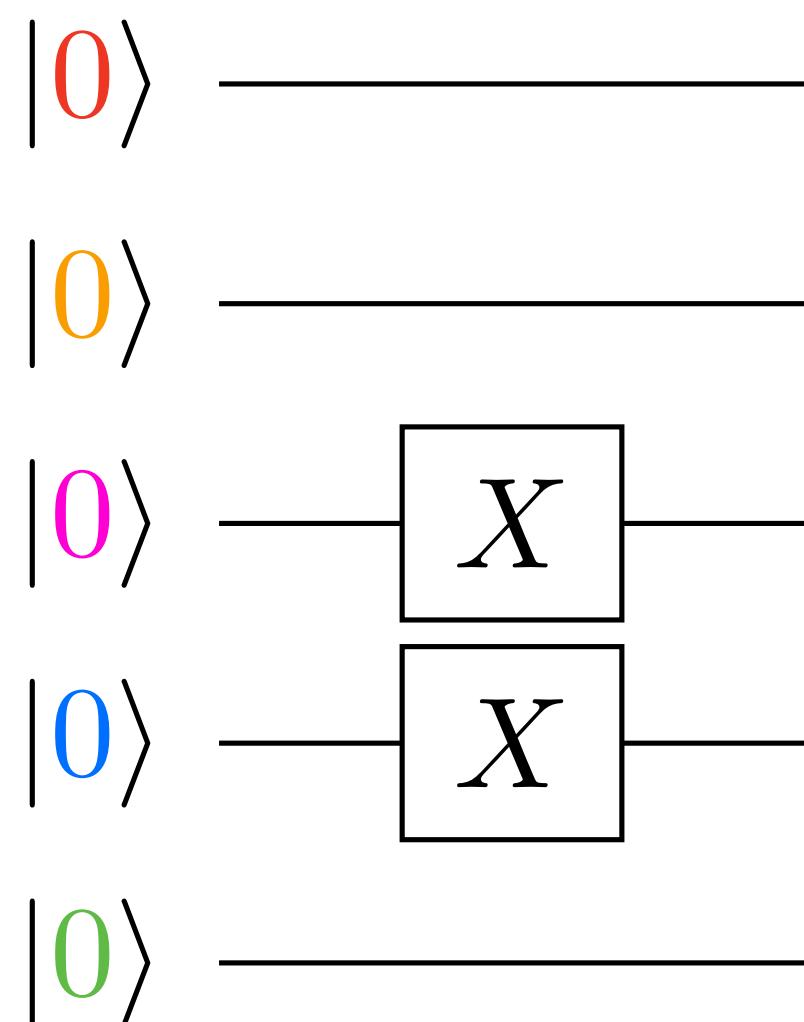


Solution quantique

Encodage

On peut préparer des **configurations** à l'aide d'un **circuit quantique**

Exemple : $|\psi\rangle = |\text{01100}\rangle$



On peut aussi préparer des **superpositions** de configurations

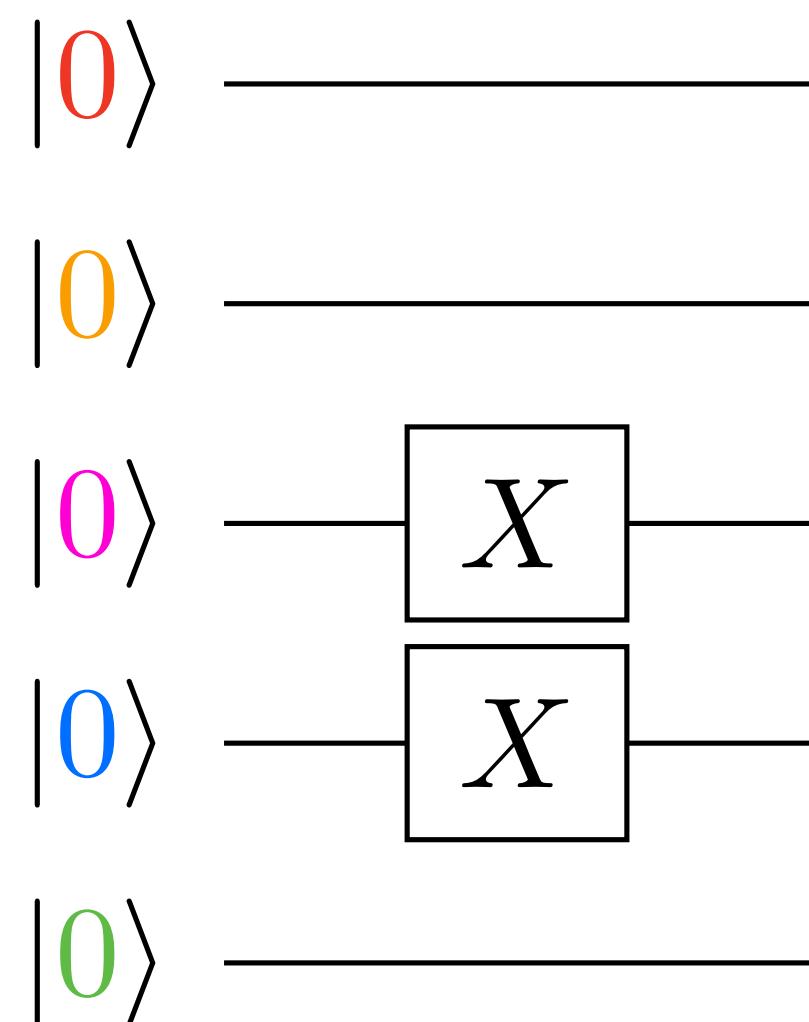
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01000\rangle + |\text{01100}\rangle)$$

Solution quantique

Encodage

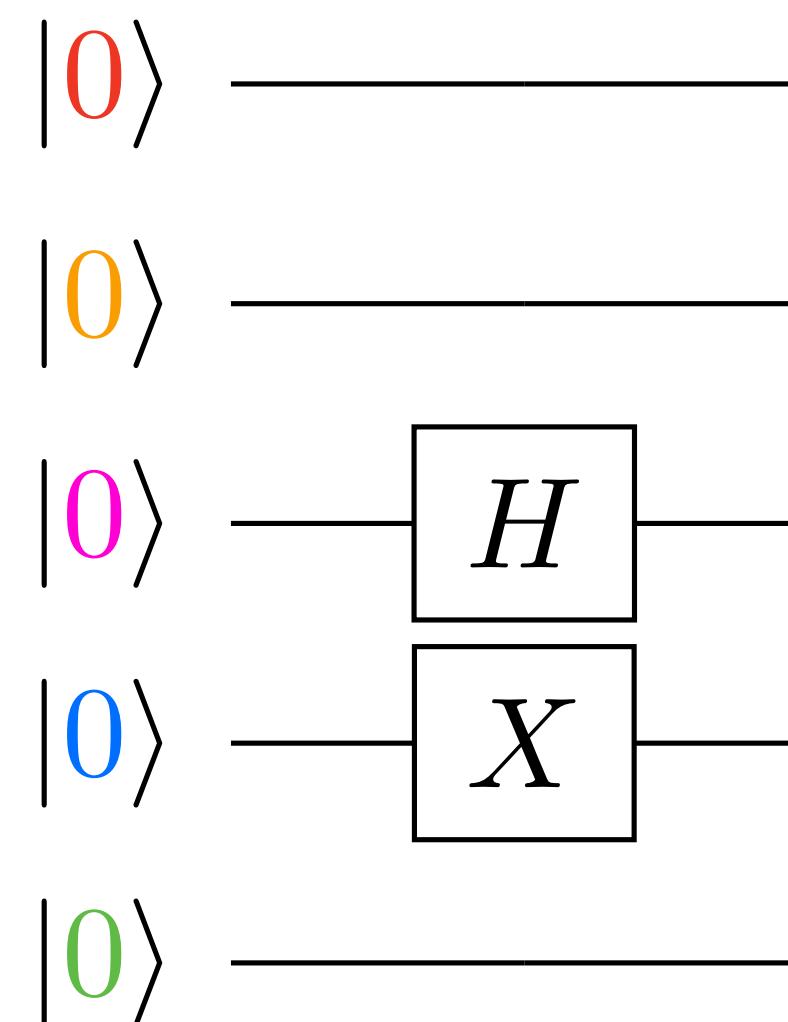
On peut préparer des **configurations** à l'aide d'un **circuit quantique**

Exemple : $|\psi\rangle = |\text{01100}\rangle$



On peut aussi préparer des **superpositions** de configurations

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01000\rangle + |\text{01100}\rangle)$$



Exercices

a) $|\psi\rangle = |\textcolor{blue}{0}\textcolor{red}{1}\textcolor{green}{0}\textcolor{orange}{0}\textcolor{red}{1}\rangle$

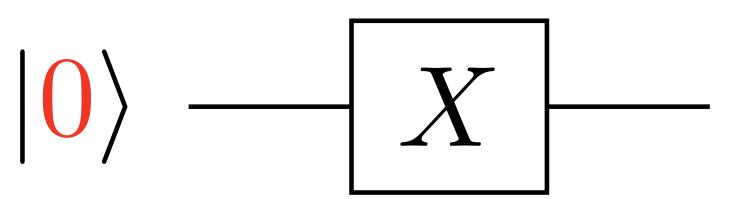
b)

c)

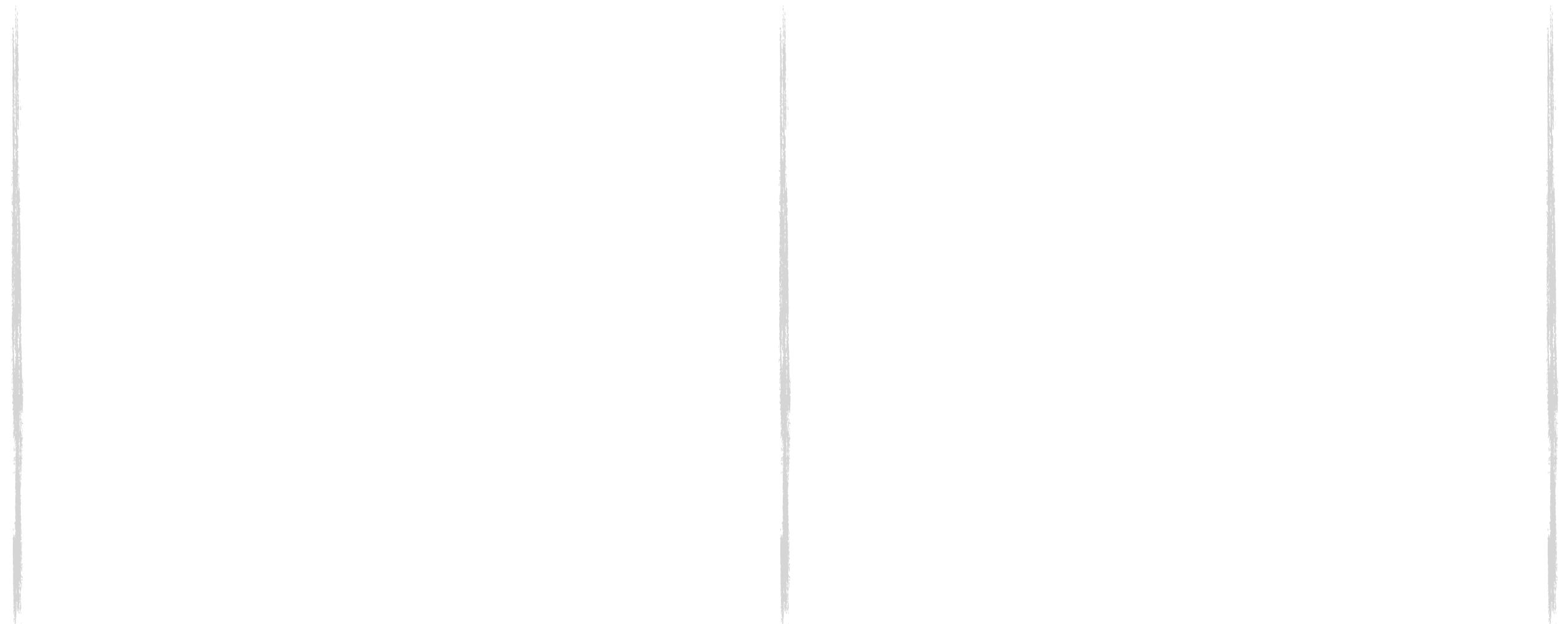
d)

Exercices

a) $|\psi\rangle = |\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1}\textcolor{magenta}{0}\textcolor{orange}{0}\textcolor{red}{1}\rangle$



b)



c)

d)

Exercices

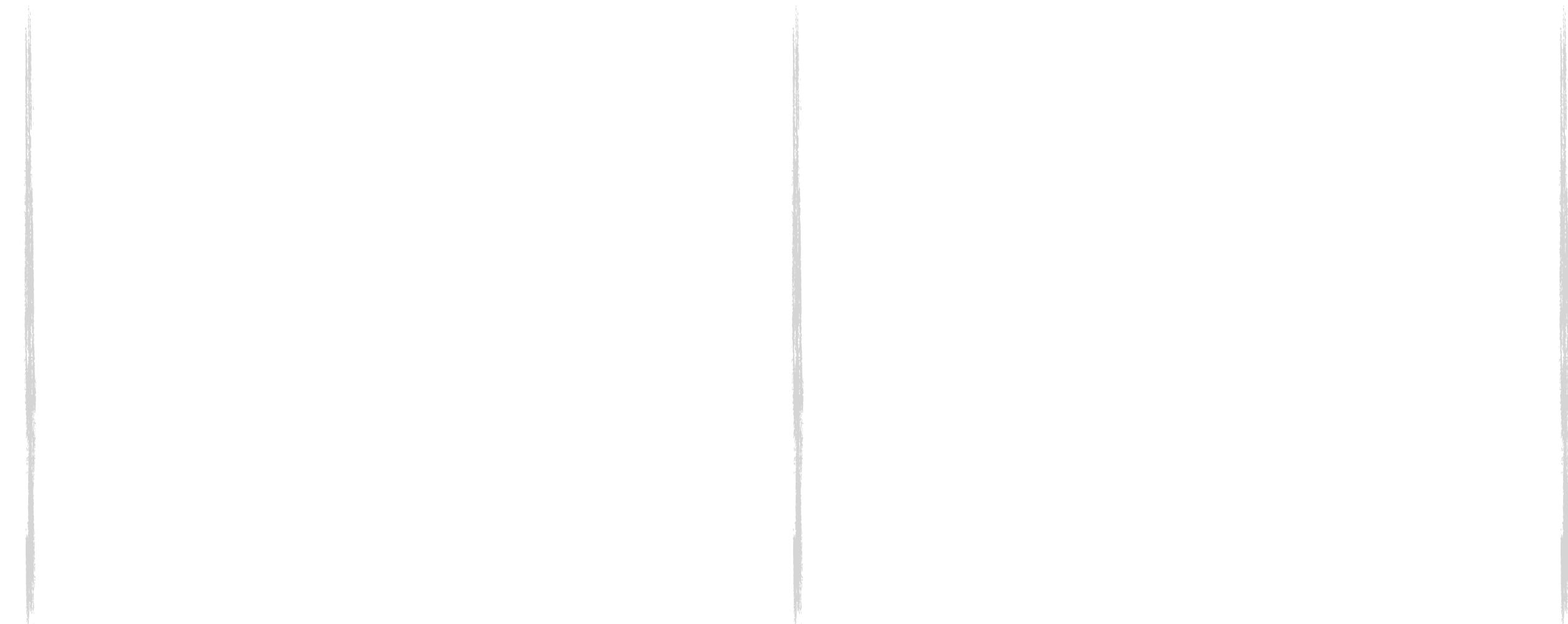
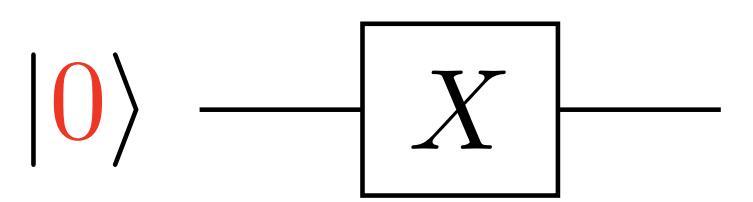
a) $|\psi\rangle = |\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1}\textcolor{magenta}{0}\textcolor{orange}{0}\textcolor{red}{1}\rangle$

b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\textcolor{green}{1}\textcolor{blue}{1}000\rangle + |\textcolor{green}{1}\textcolor{blue}{1}010\rangle)$$

c)

d)



Exercices

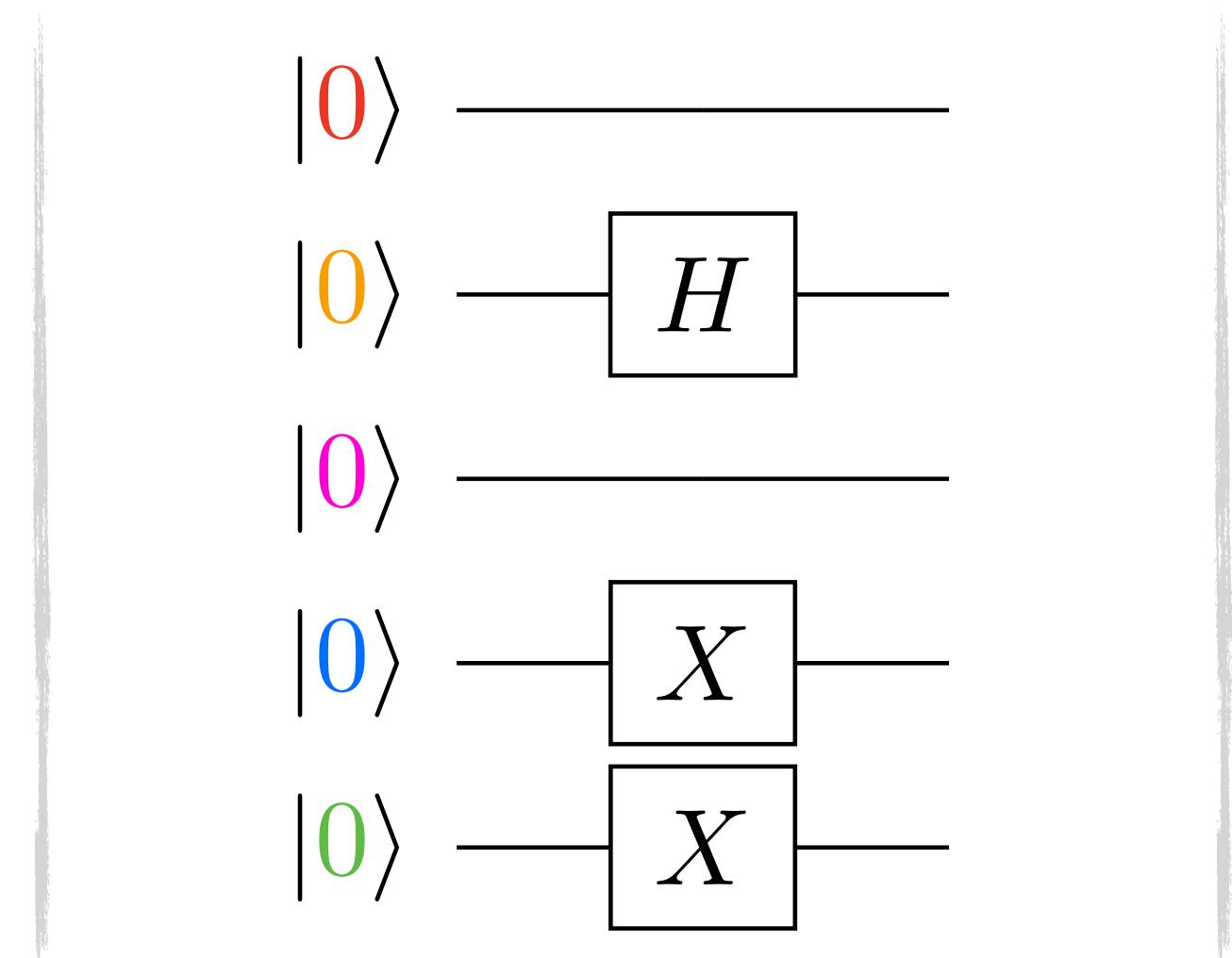
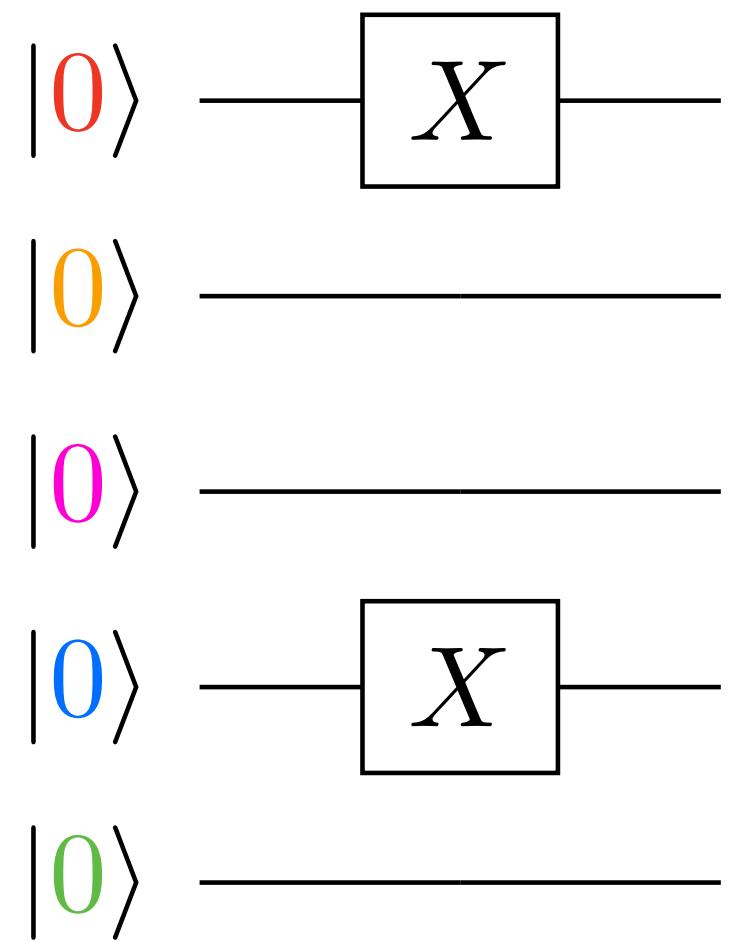
a) $|\psi\rangle = |\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1}\textcolor{magenta}{0}\textcolor{orange}{0}\textcolor{red}{1}\rangle$

b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\textcolor{green}{1}\textcolor{blue}{1}000\rangle + |\textcolor{green}{1}\textcolor{blue}{1}010\rangle)$$

c)

d)



Exercices

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00000\rangle + |01000\rangle + |10000\rangle + |11000\rangle)$$

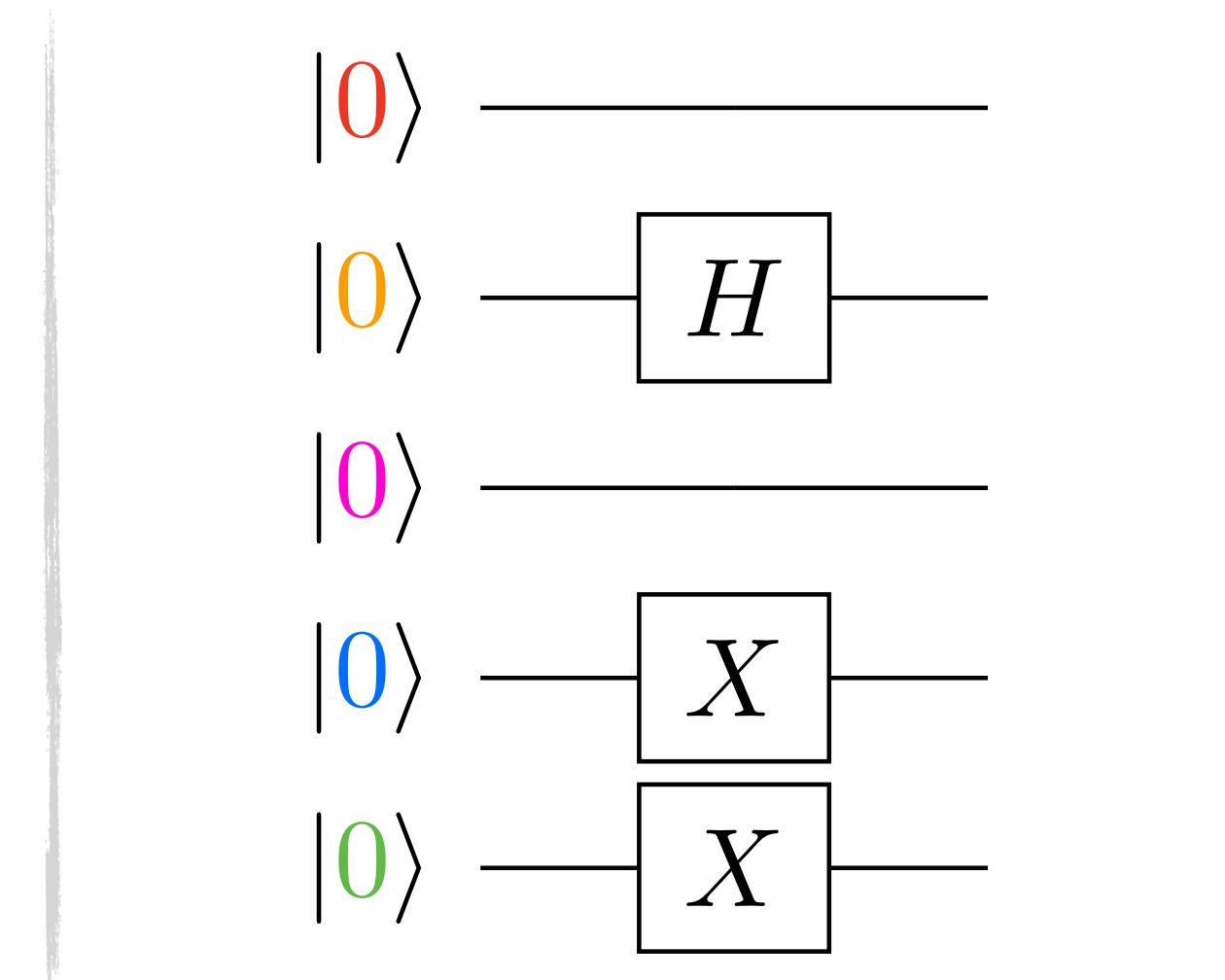
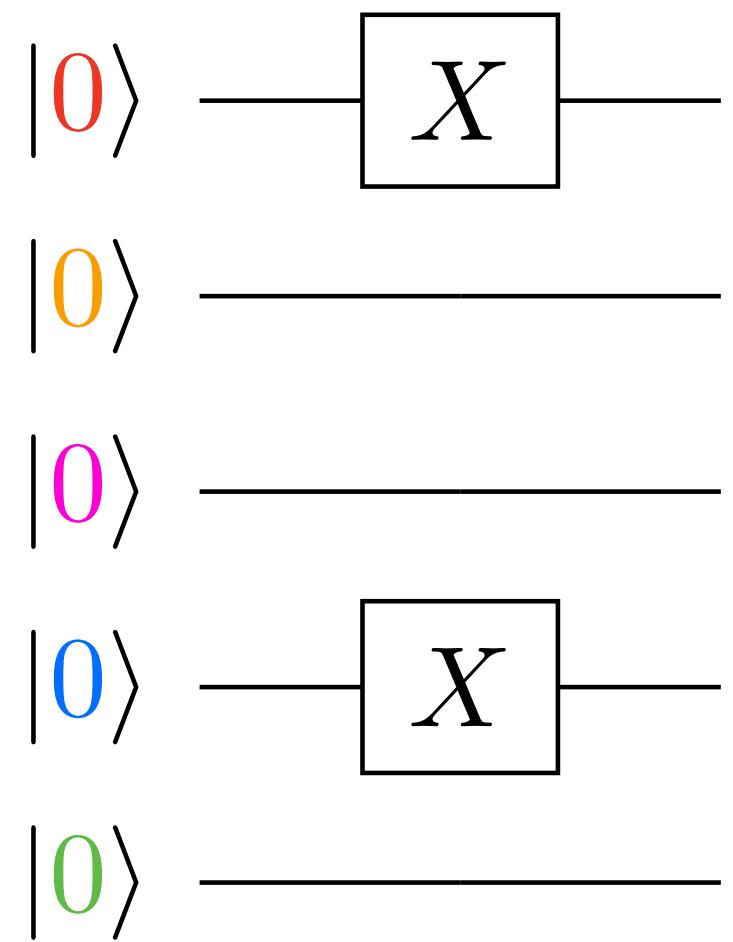
a) $|\psi\rangle = |01001\rangle$

b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11000\rangle + |11010\rangle)$$

c)

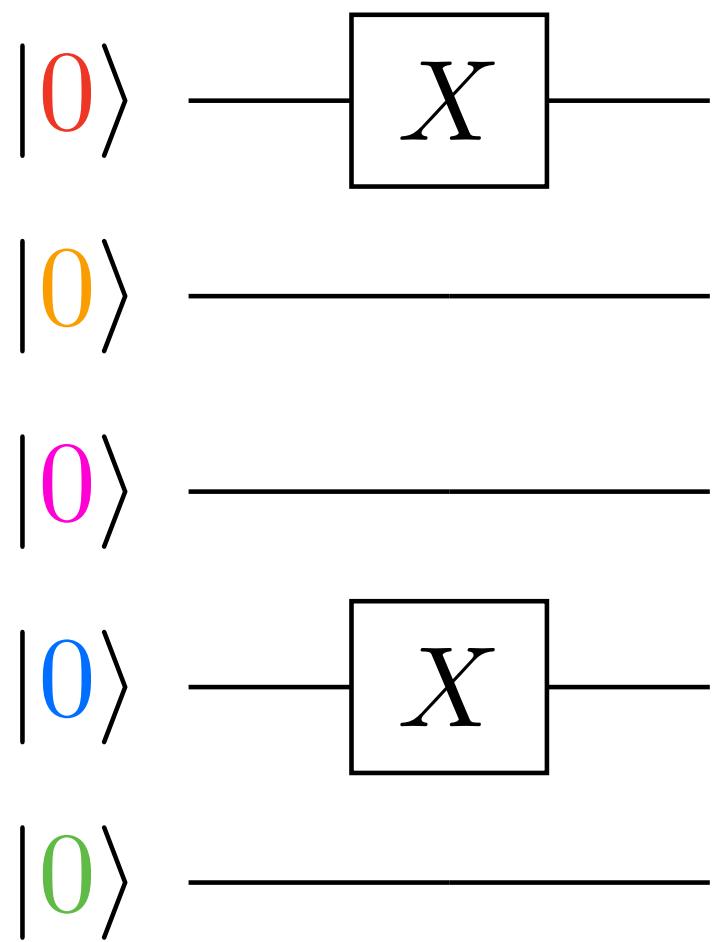
d)



Exercices

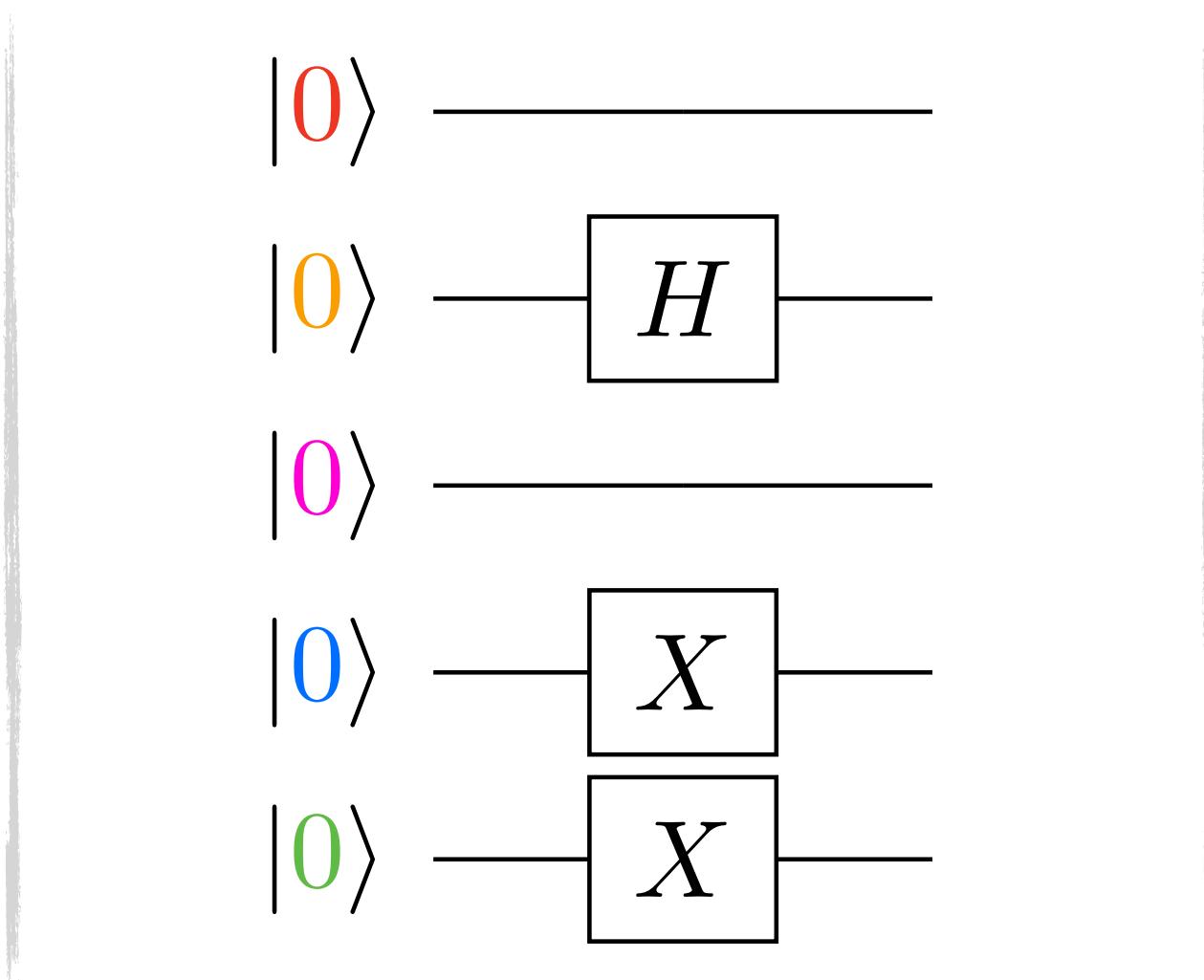
$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00000\rangle + |01000\rangle + |10000\rangle + |11000\rangle)$$

a) $|\psi\rangle = |01001\rangle$

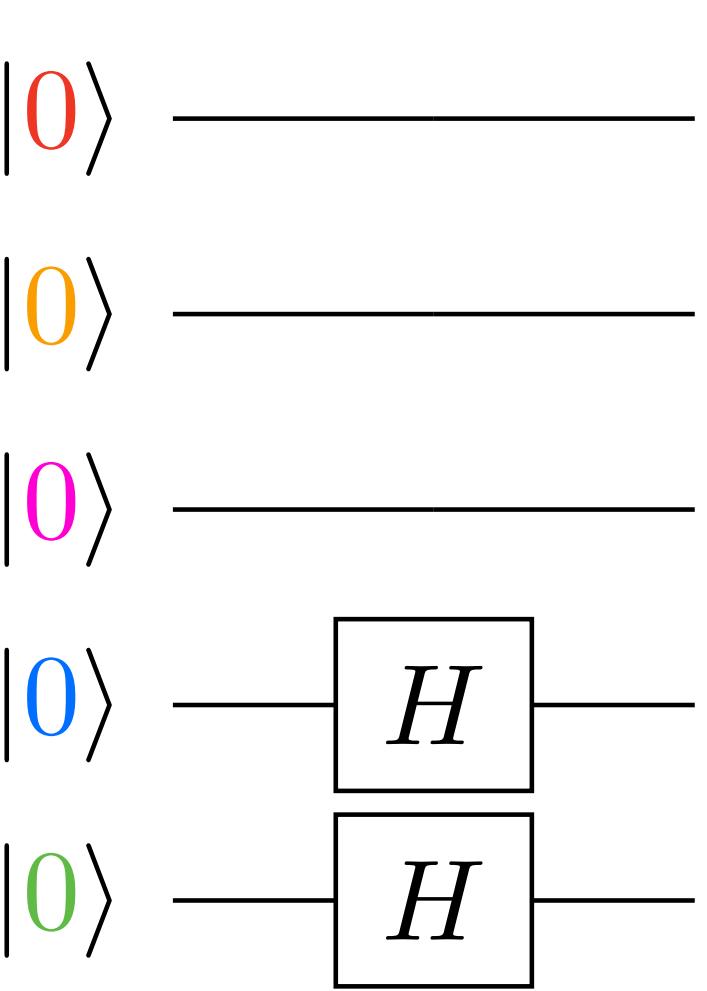


b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11000\rangle + |11010\rangle)$$



c)

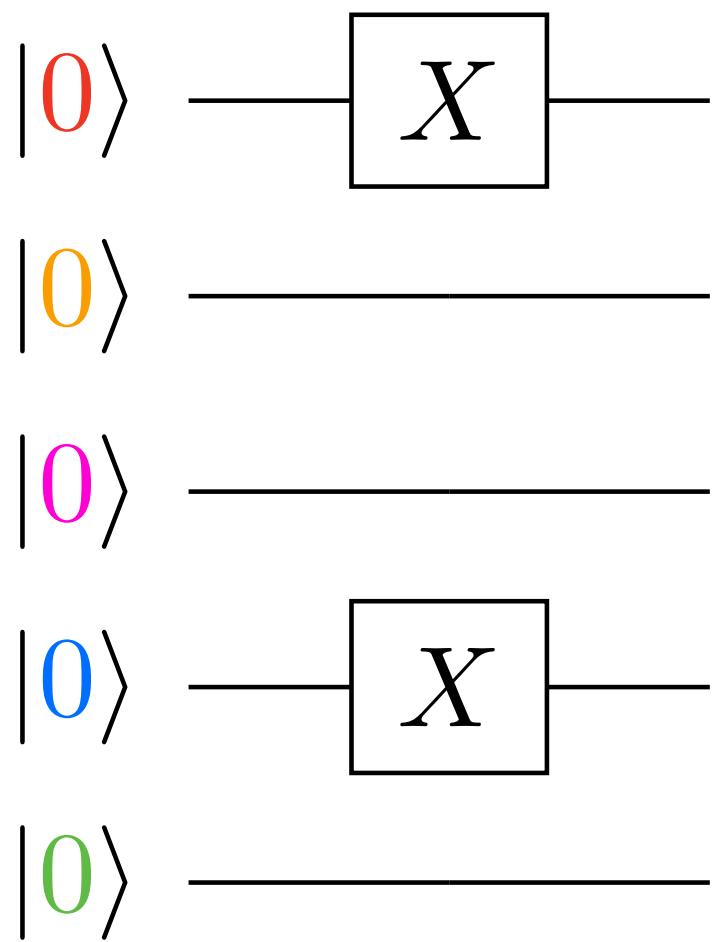


d)

Exercices

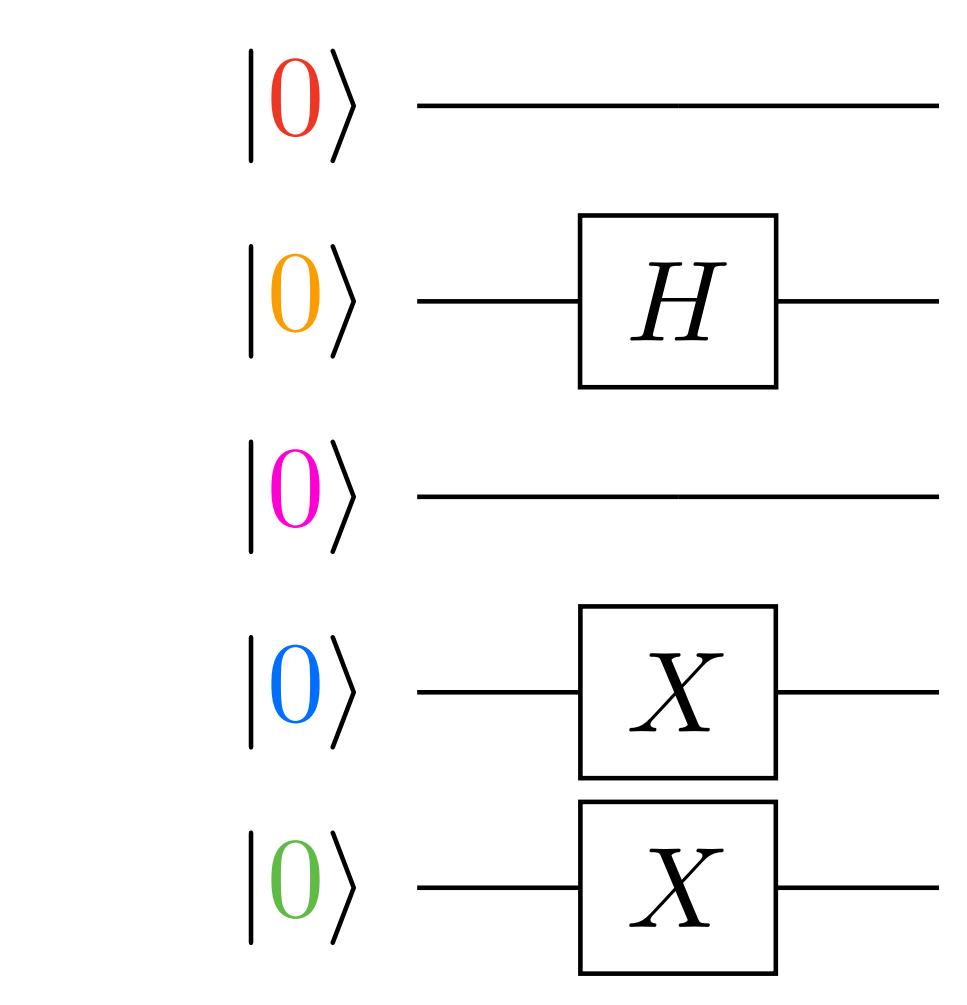
$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00000\rangle + |01000\rangle + |10000\rangle + |11000\rangle)$$

a) $|\psi\rangle = |01001\rangle$

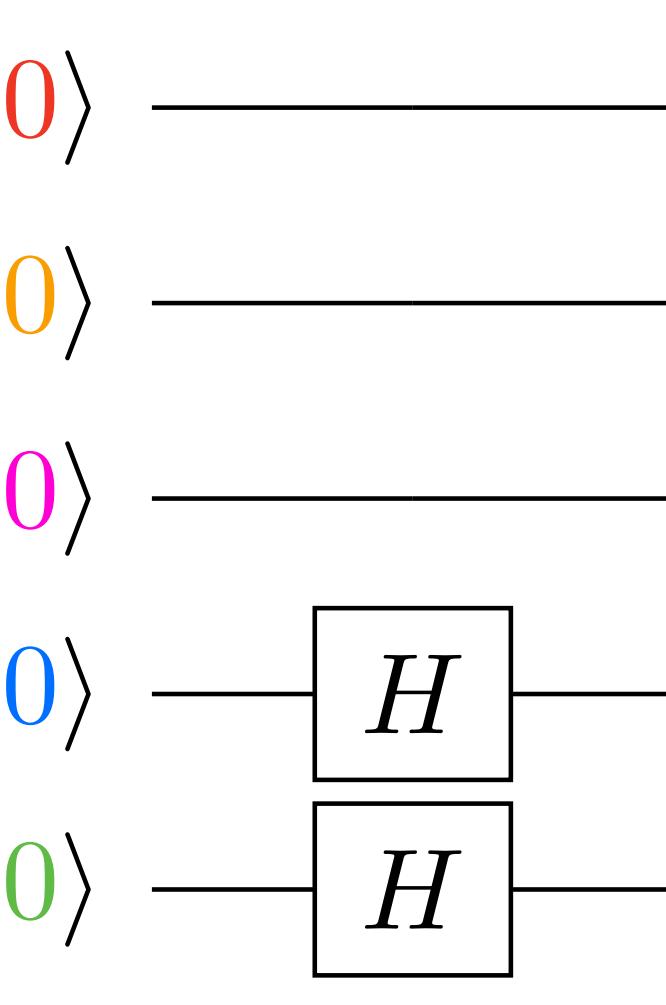


b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11000\rangle + |11010\rangle)$$



c)



d)

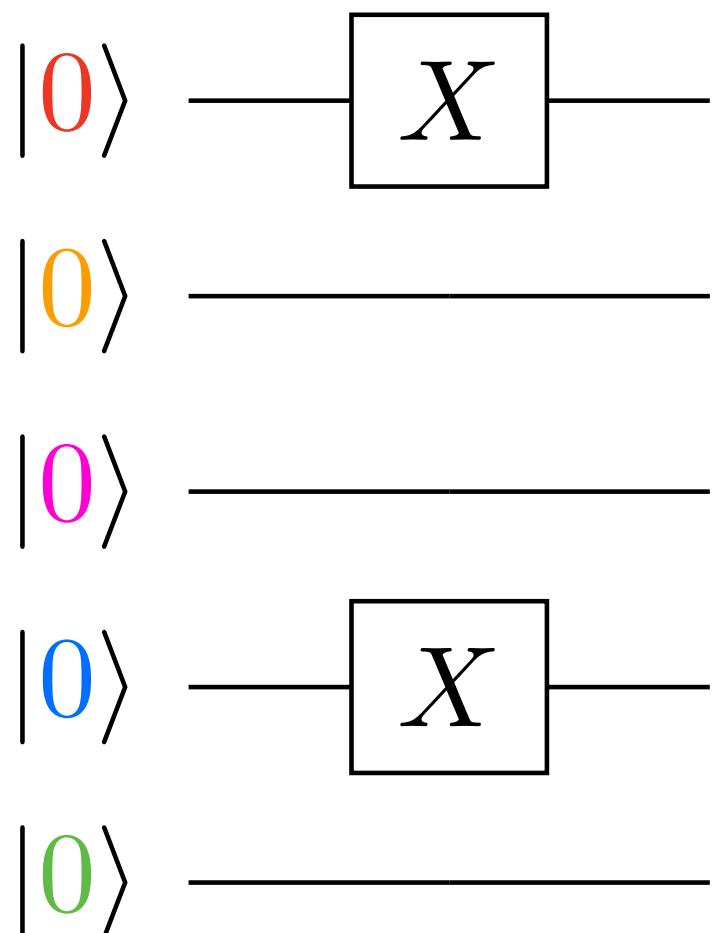
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00000\rangle + |10100\rangle)$$



Exercices

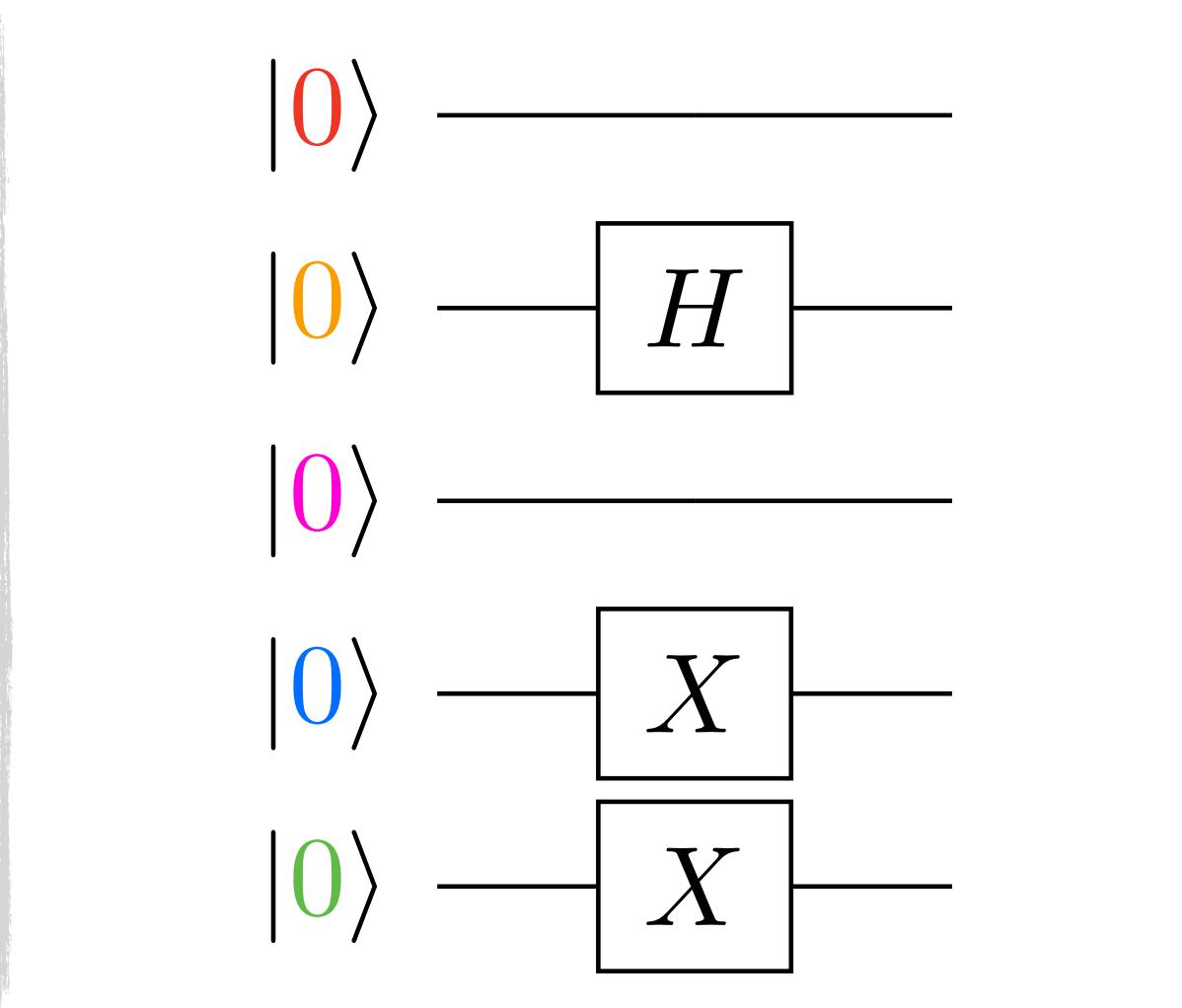
$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00000\rangle + |01000\rangle + |10000\rangle + |11000\rangle)$$

a) $|\psi\rangle = |01001\rangle$

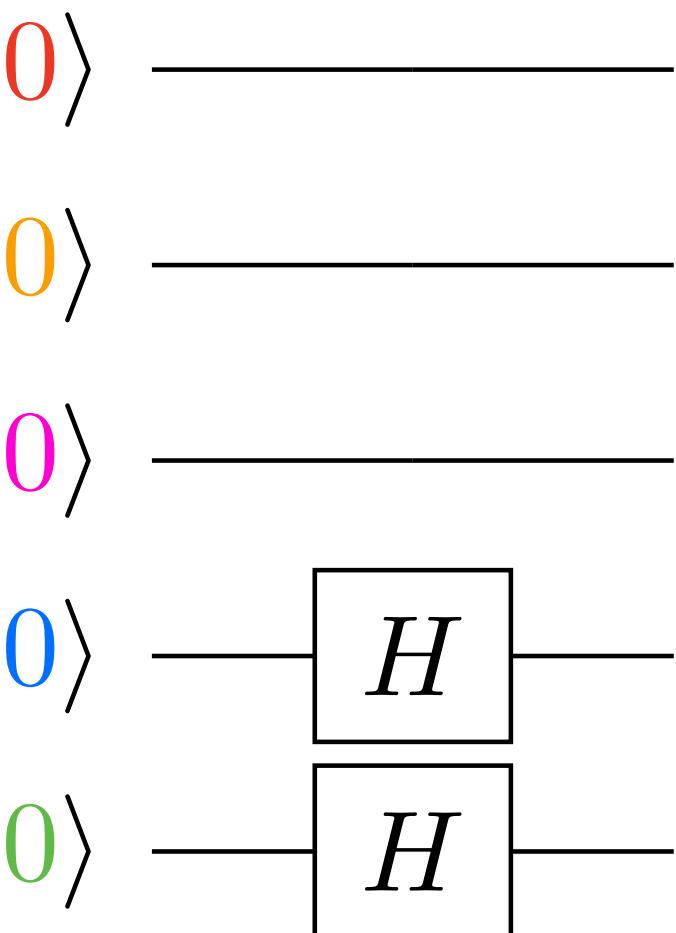


b)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11000\rangle + |11010\rangle)$$

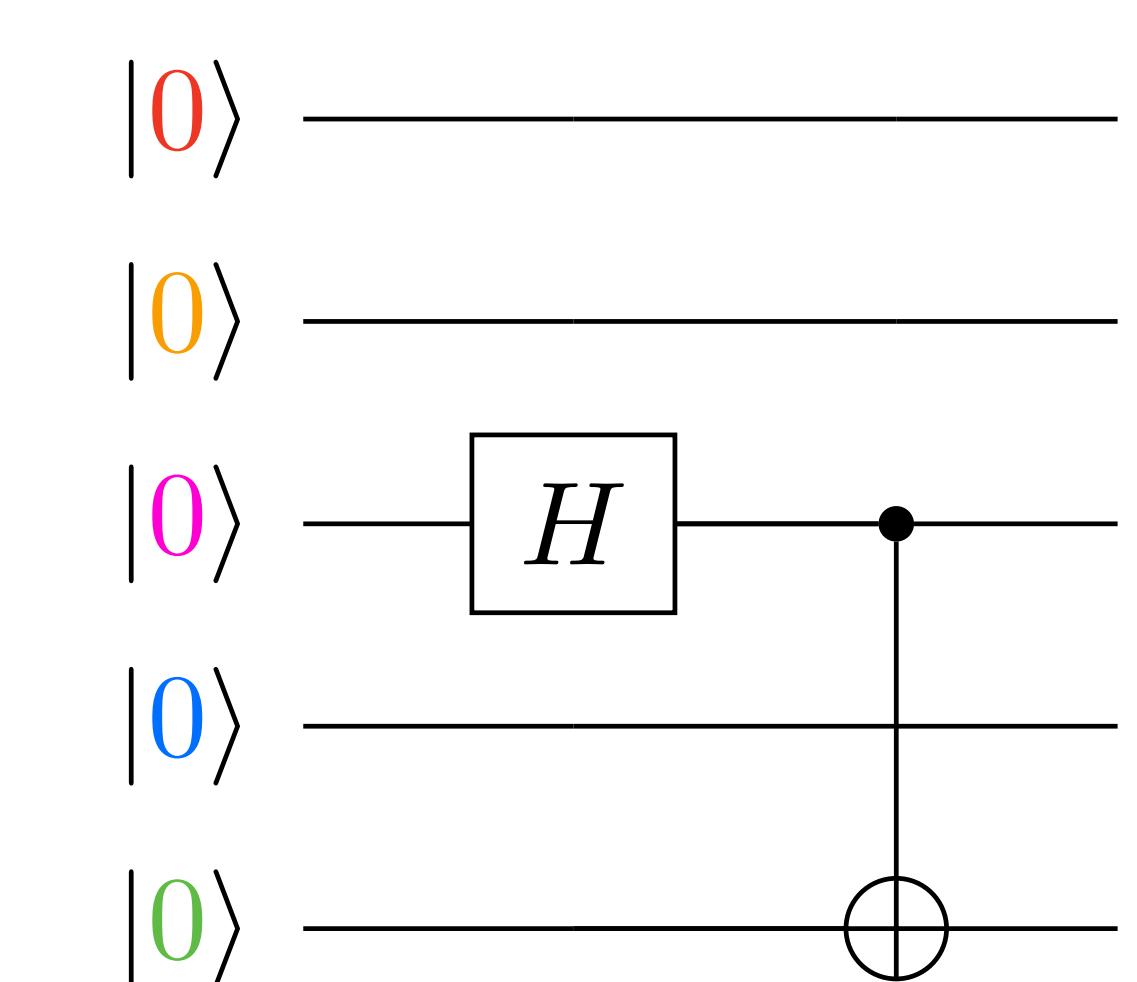


c)



d)

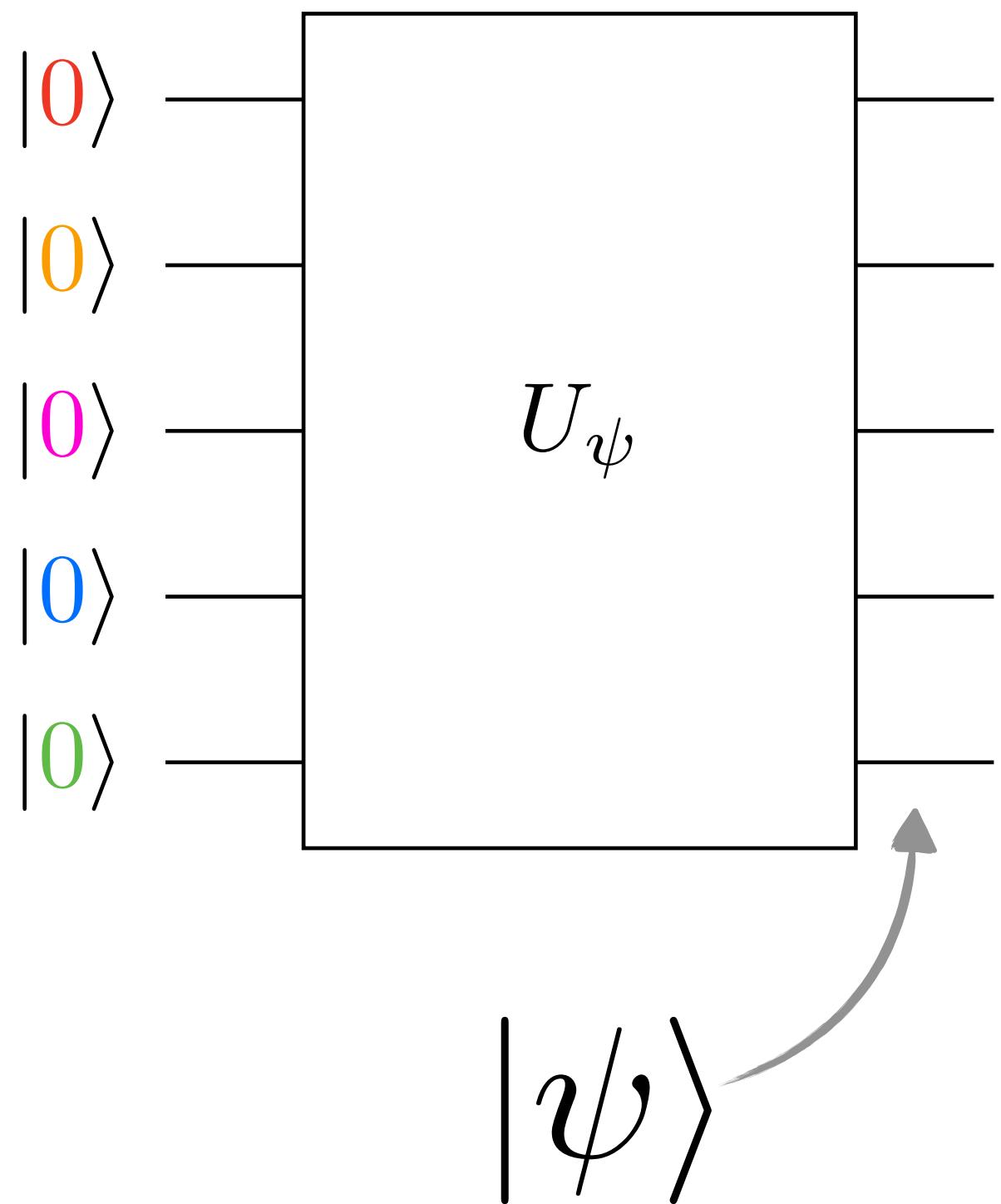
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00000\rangle + |10100\rangle)$$



Solution quantique

Encodage

On représente la préparation d'un état quantique général par une porte U.

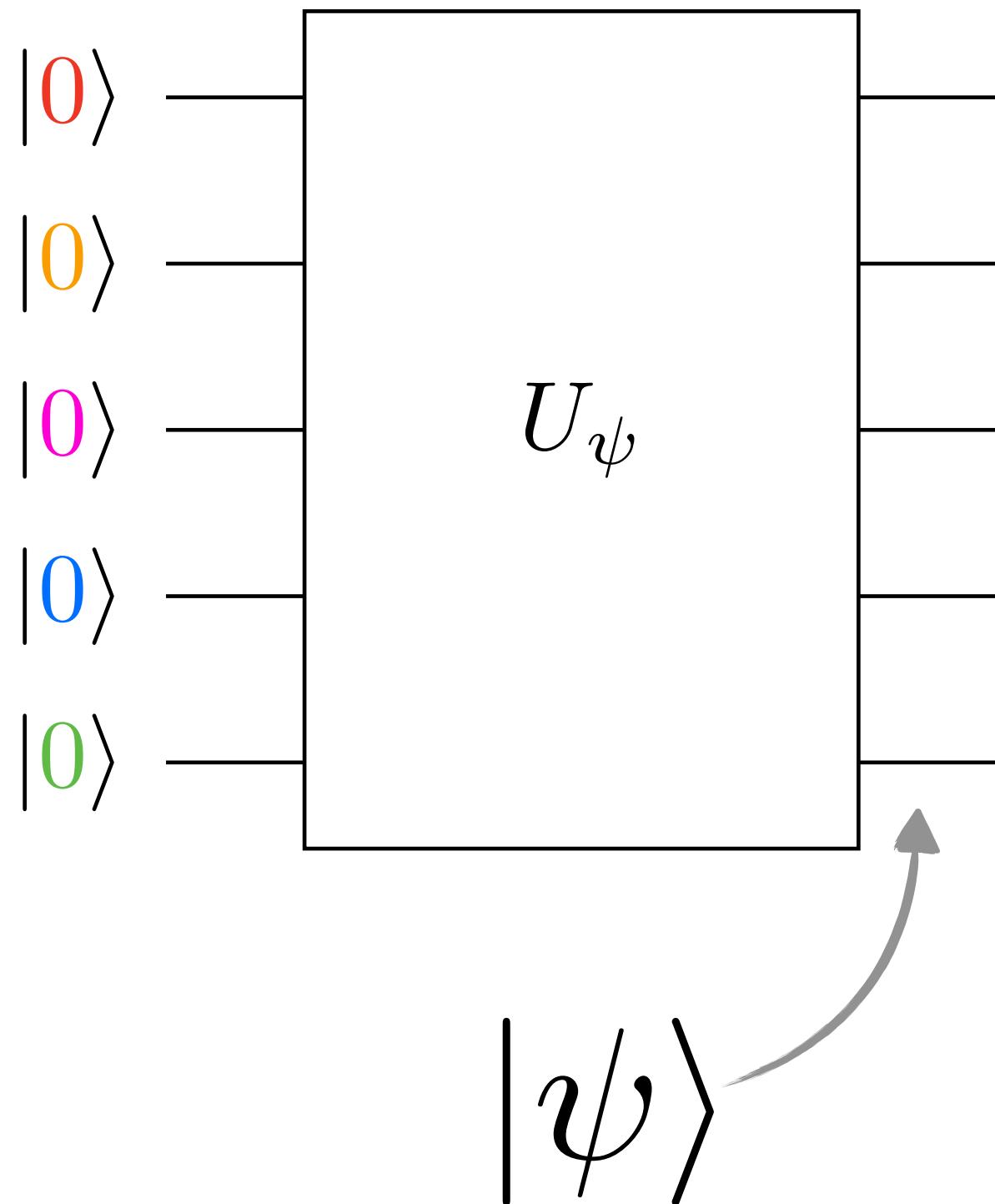


Solution quantique

Encodage

On représente la préparation d'un état quantique général par une porte U.

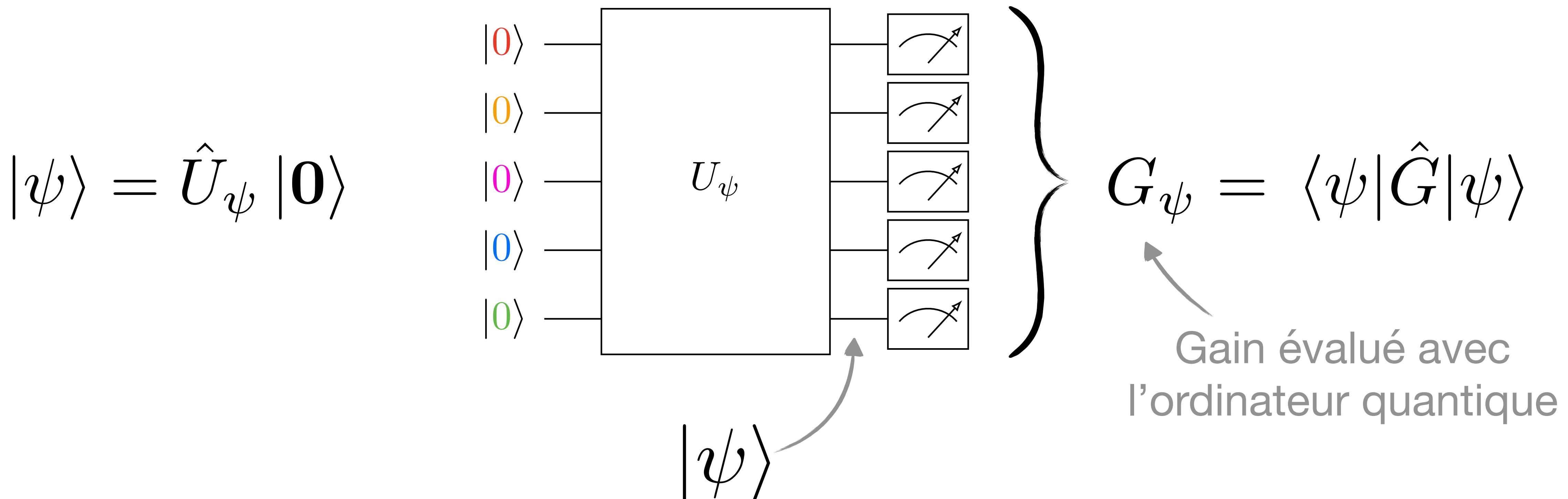
$$|\psi\rangle = \hat{U}_\psi |0\rangle$$



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

La mesure des qubits permet d'**évaluer le gain** pour une **configuration** donnée.



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Opérateur de Pauli Z

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Opérateur de Pauli Z

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle$$

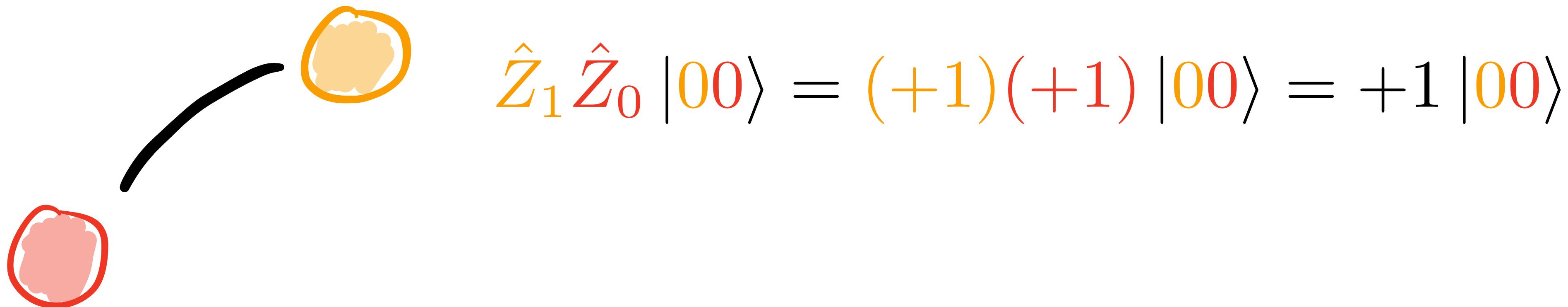
$$\hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.

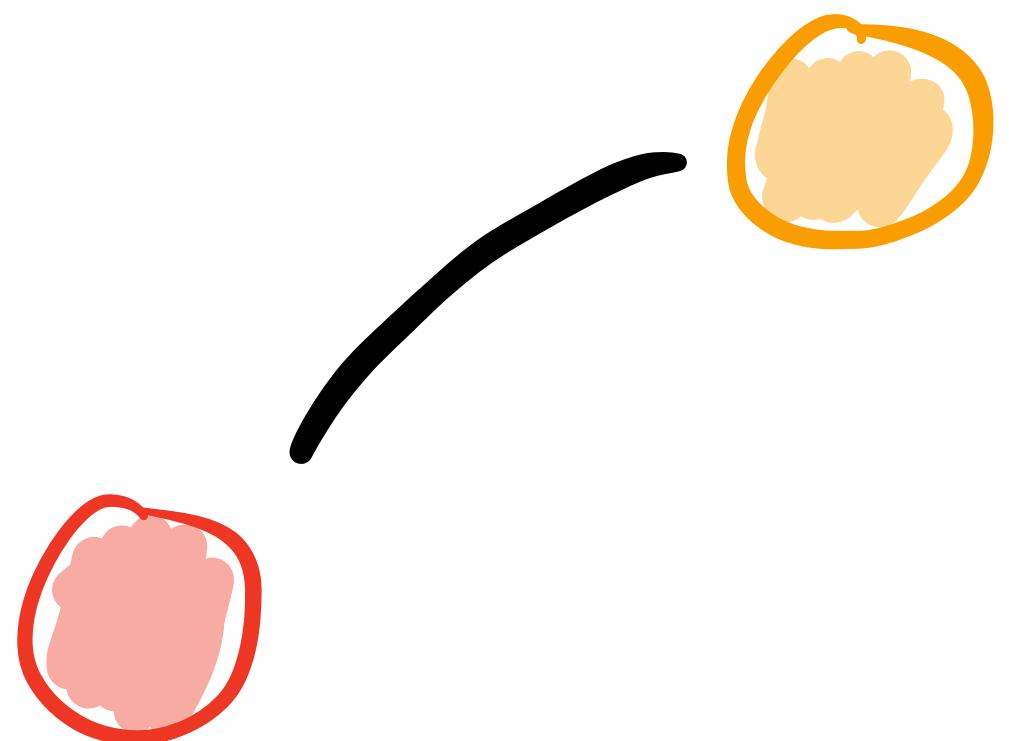


Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.



$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |00\rangle = (+1)(+1) |00\rangle = +1 |00\rangle$$

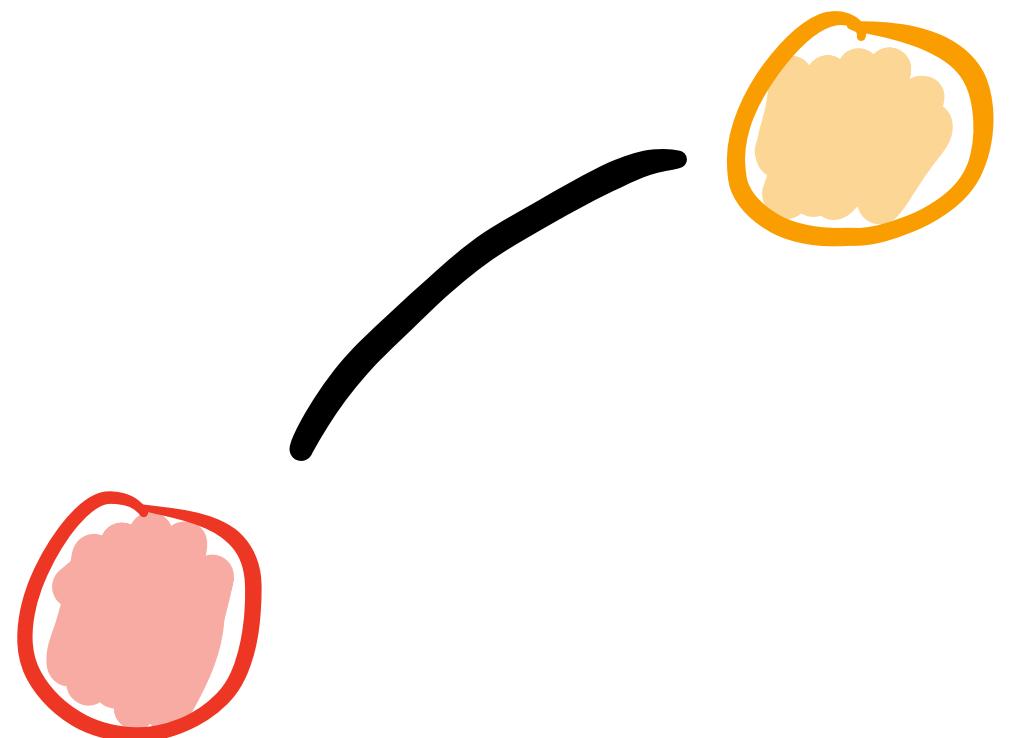
$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |01\rangle = (+1)(-1) |01\rangle = -1 |01\rangle$$

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.



$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |00\rangle = (+1)(+1) |00\rangle = +1 |00\rangle$$

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |01\rangle = (+1)(-1) |01\rangle = -1 |01\rangle$$

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |10\rangle = (-1)(+1) |10\rangle = -1 |10\rangle$$

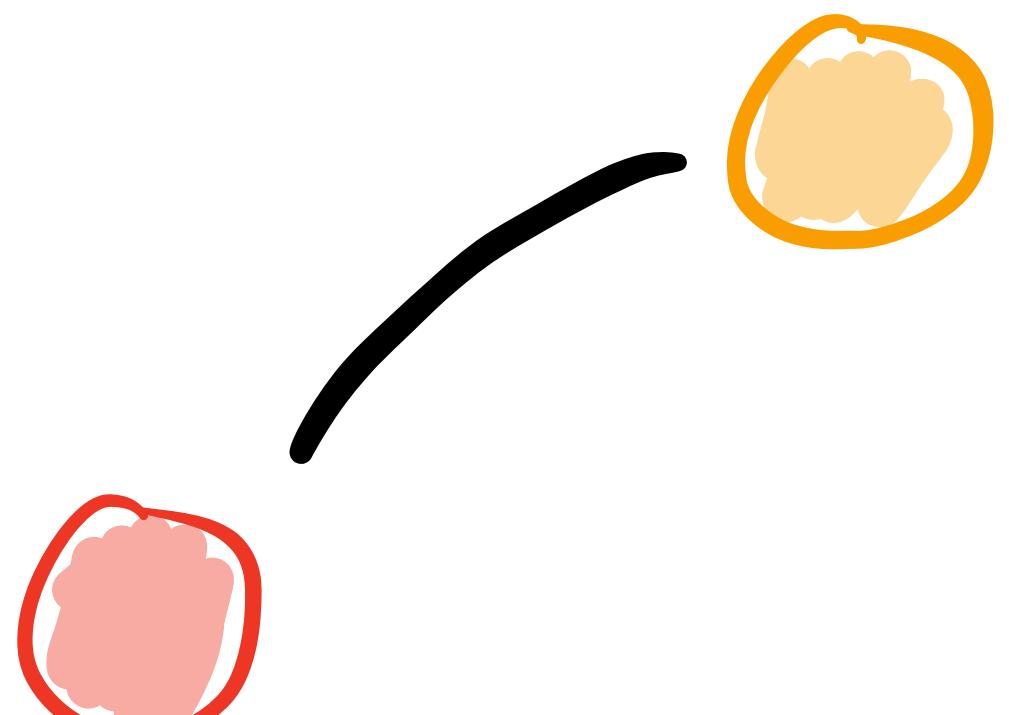
$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |11\rangle = (-1)(-1) |11\rangle = +1 |11\rangle$$

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.



$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |00\rangle = (+1)(+1) |00\rangle = +1 |00\rangle$$

Même équipe

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |01\rangle = (+1)(-1) |01\rangle = -1 |01\rangle$$

Équipes différentes

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |10\rangle = (-1)(+1) |10\rangle = -1 |10\rangle$$

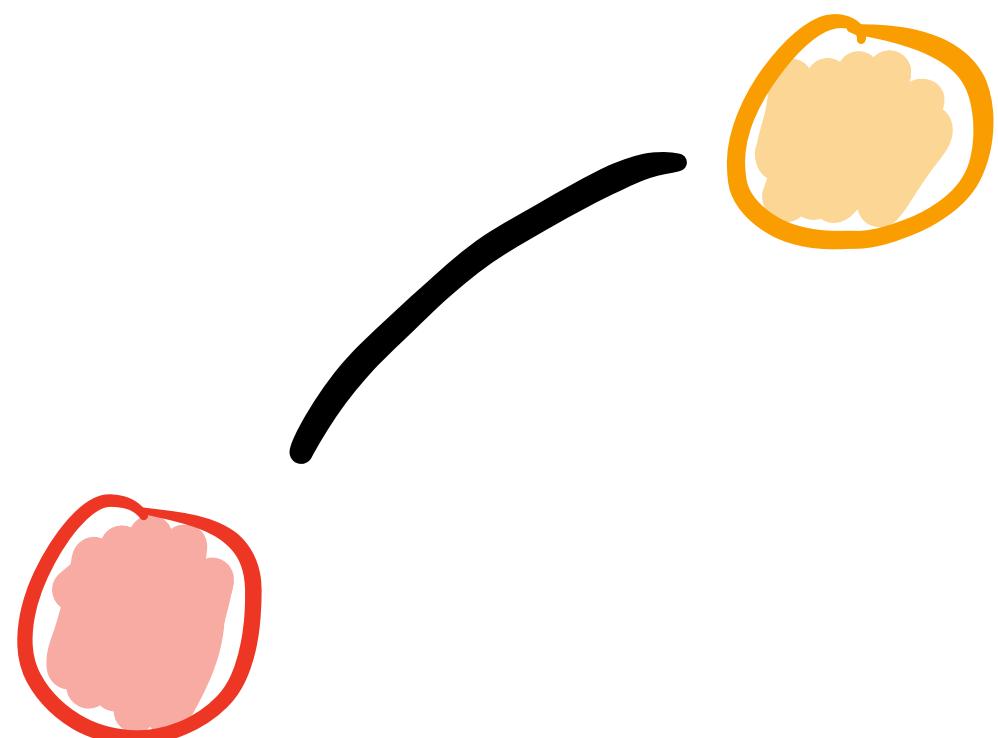
$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |11\rangle = (-1)(-1) |11\rangle = +1 |11\rangle$$

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.



$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |x_1 x_0\rangle = \begin{cases} +1 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 = x_0 \\ -1 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 \neq x_0 \end{cases}$$

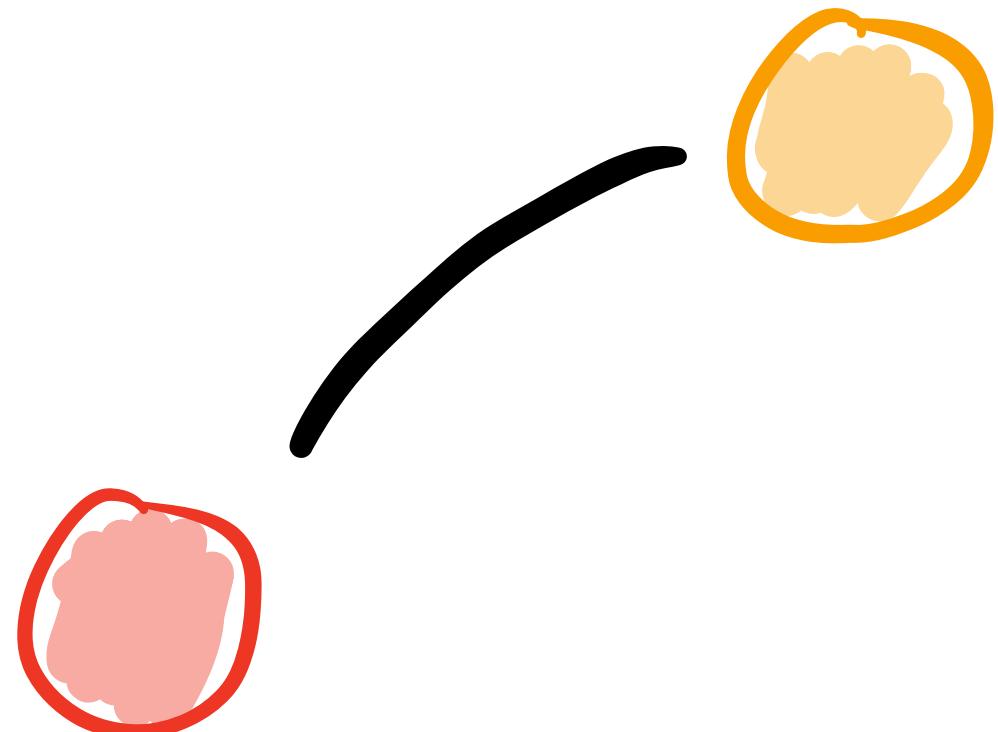
Même équipe
Équipes différentes

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

$$\hat{Z} |0\rangle = +1 |0\rangle \quad \hat{Z} |1\rangle = -1 |1\rangle$$

Déetecter un lien brisé à l'aide de l'observable Z.



$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_0 |x_1 x_0\rangle = \begin{cases} +1 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 = x_0 \\ -1 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 \neq x_0 \end{cases}$$

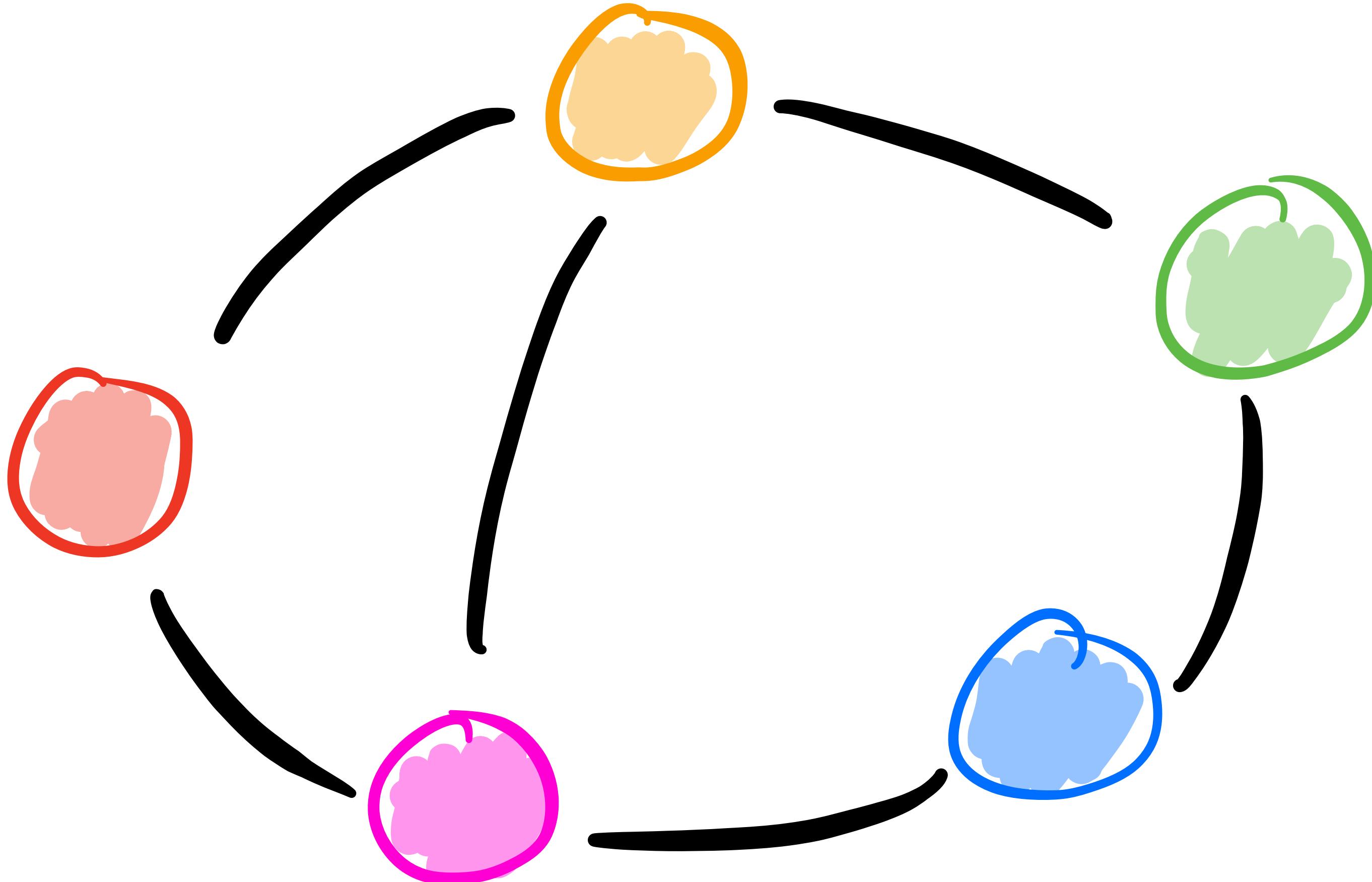
Même équipe
Équipes différentes

On transforme l'observable afin d'obtenir directement le gain.

$$\left(-\frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{Z}_0 + \frac{1}{2}\right) |x_1 x_0\rangle = \begin{cases} 0 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 = x_0 \\ +1 |x_1 x_0\rangle & \text{si } x_1 \neq x_0 \end{cases}$$

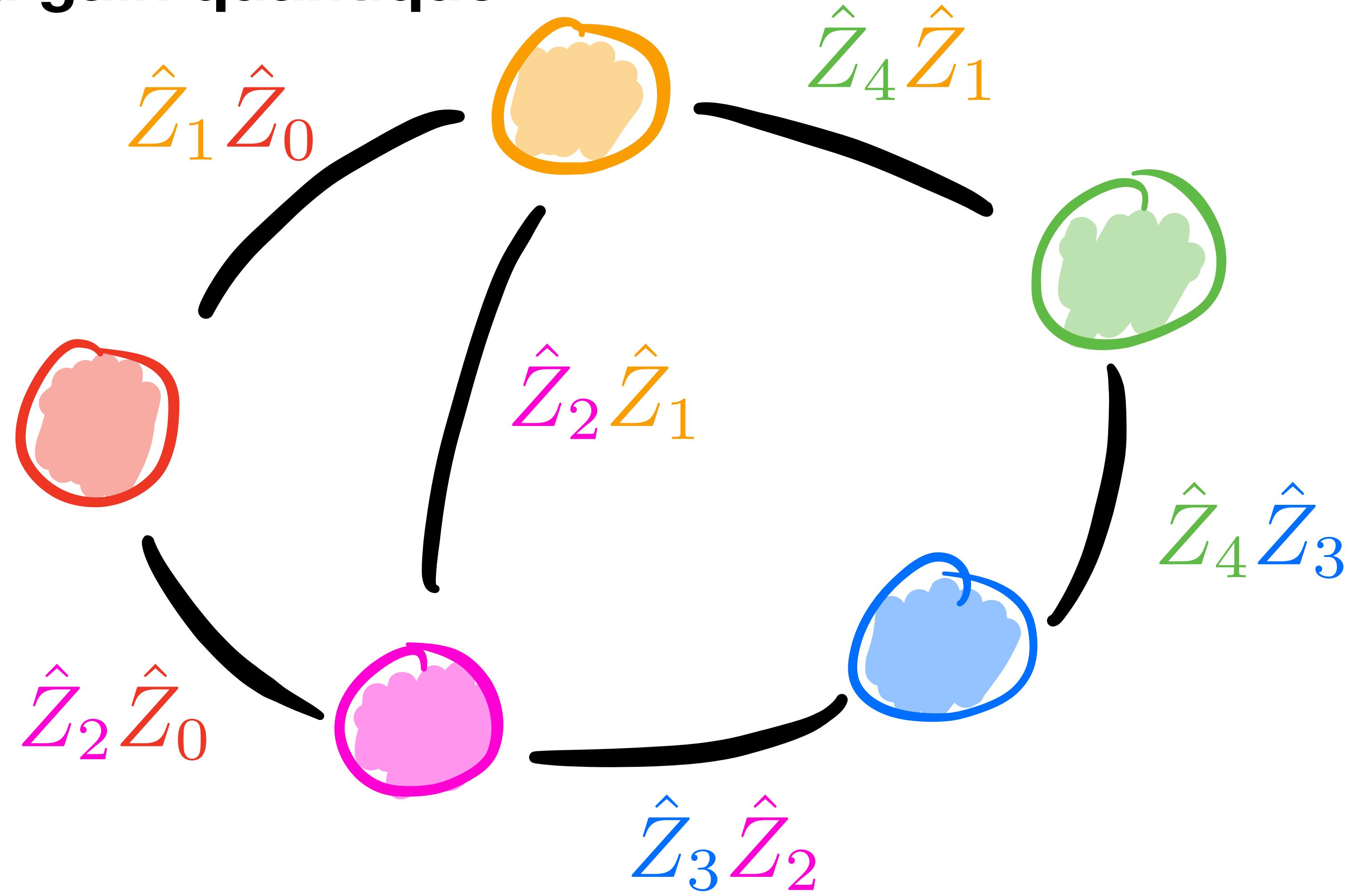
Solution quantique

Évaluation du gain quantique



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

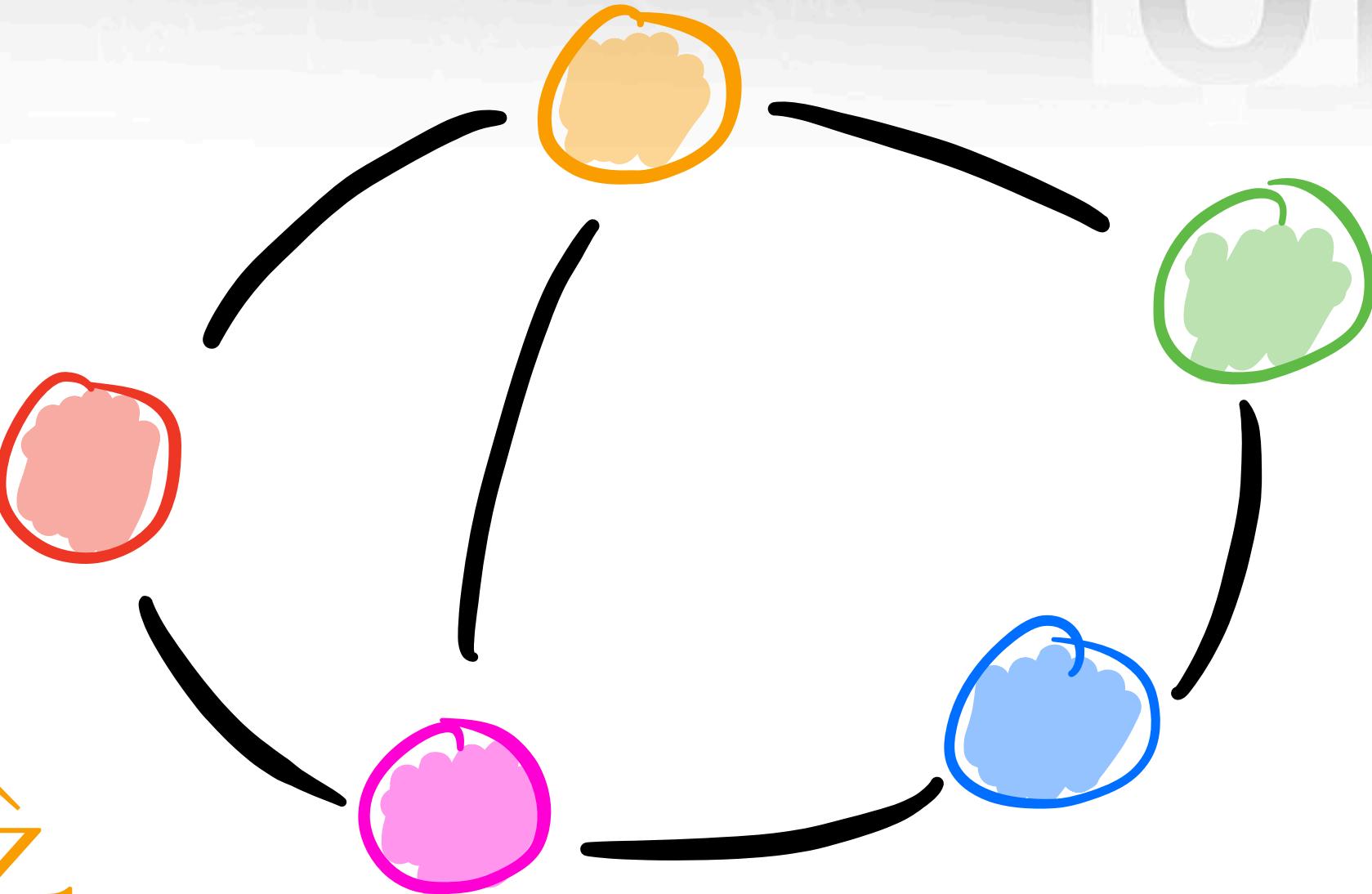


Solution quantique

Évaluation du gain quantique

L'opérateur de **gain total** est construit en **sommant** les opérateurs des **gains de lien**.

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{Z}_0 - \frac{1}{2} \hat{Z}_2 \hat{Z}_0 - \frac{1}{2} \hat{Z}_2 \hat{Z}_1 - \frac{1}{2} \hat{Z}_4 \hat{Z}_1 - \frac{1}{2} \hat{Z}_3 \hat{Z}_2 - \frac{1}{2} \hat{Z}_4 \hat{Z}_3 + \frac{1}{2} \times 6$$

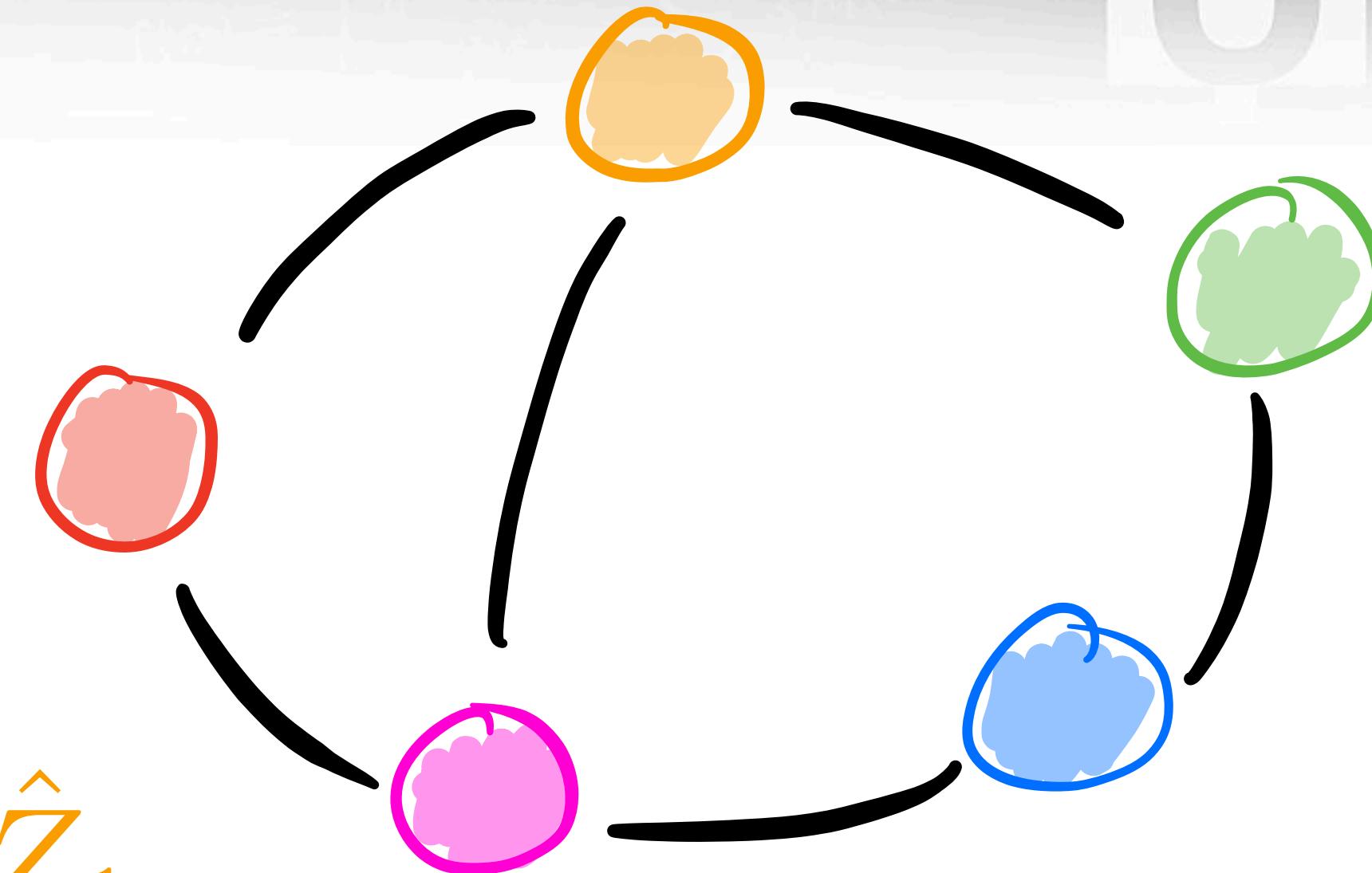


Solution quantique

Évaluation du gain quantique

L'opérateur de **gain total** est construit en **sommant** les opérateurs des **gains de lien**.

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{Z}_1 \hat{Z}_0 - \frac{1}{2} \hat{Z}_2 \hat{Z}_0 - \frac{1}{2} \hat{Z}_2 \hat{Z}_1 \\ - \frac{1}{2} \hat{Z}_4 \hat{Z}_1 - \frac{1}{2} \hat{Z}_3 \hat{Z}_2 - \frac{1}{2} \hat{Z}_4 \hat{Z}_3 + \frac{1}{2} \times 6$$



On peut également l'exprimer sous forme de **chaines de Pauli**.

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{I} \hat{I} \hat{I} \hat{Z} \hat{Z} - \frac{1}{2} \hat{I} \hat{I} \hat{Z} \hat{I} \hat{Z} - \frac{1}{2} \hat{I} \hat{I} \hat{Z} \hat{Z} \hat{I} \\ - \frac{1}{2} \hat{Z} \hat{I} \hat{I} \hat{Z} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{I} \hat{Z} \hat{Z} \hat{I} \hat{I} - \frac{1}{2} \hat{Z} \hat{Z} \hat{I} \hat{I} \hat{I} + \frac{1}{2} \times 6$$

Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Exemple : $|01100\rangle$

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

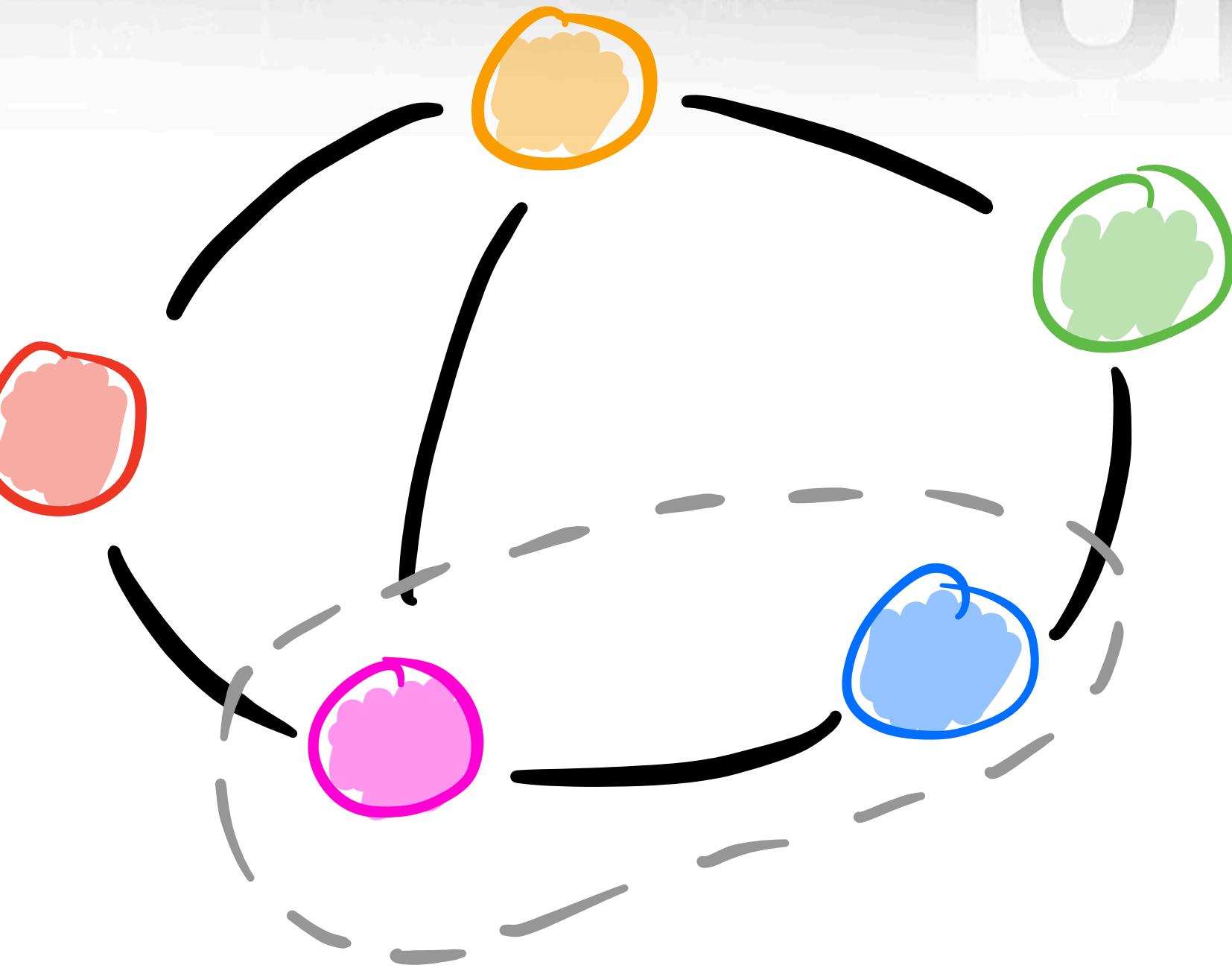
$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Exemple : $|01100\rangle$

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

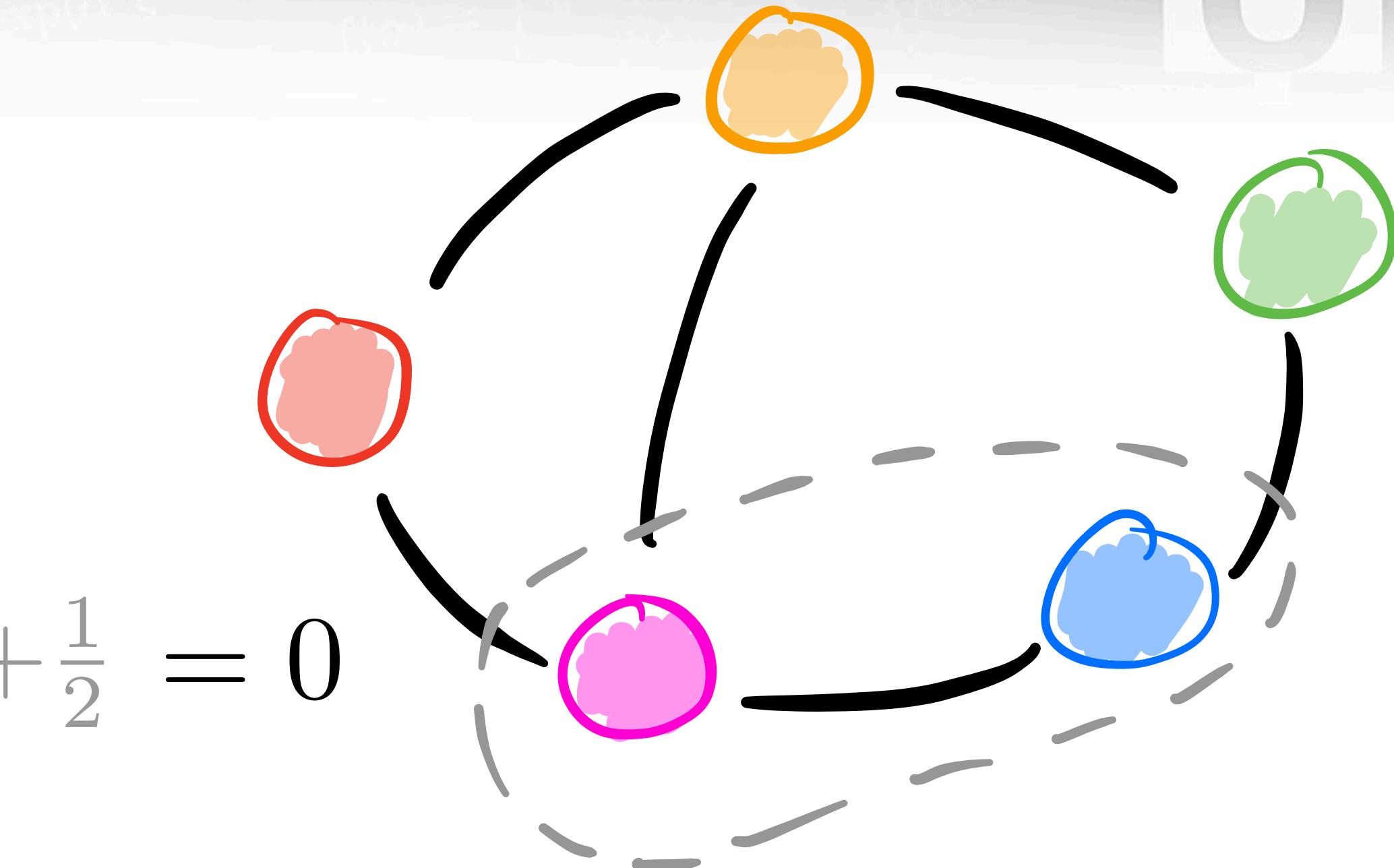
$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Exemple : $|01100\rangle$

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

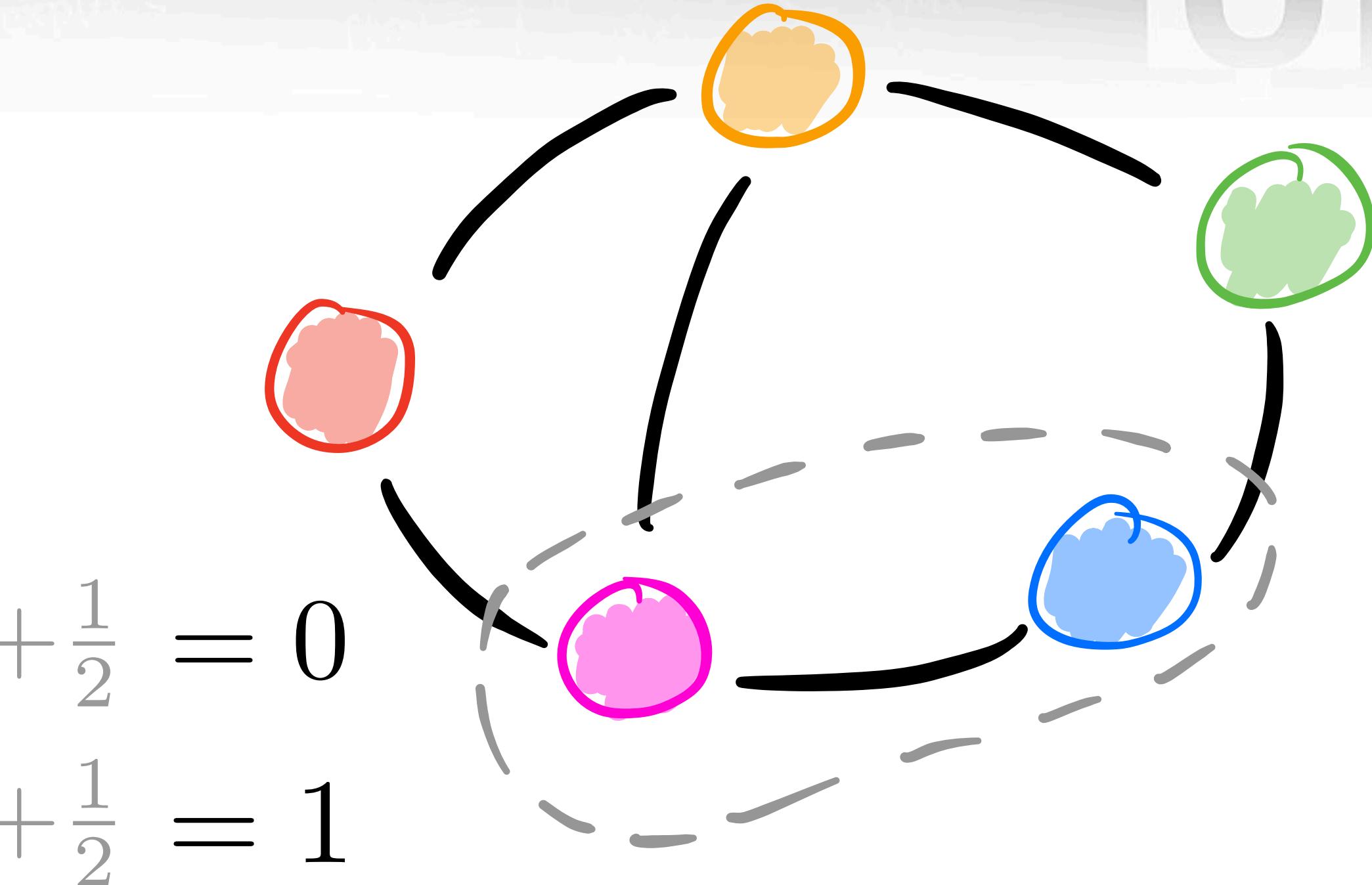
$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I}\hat{Z} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2}$$

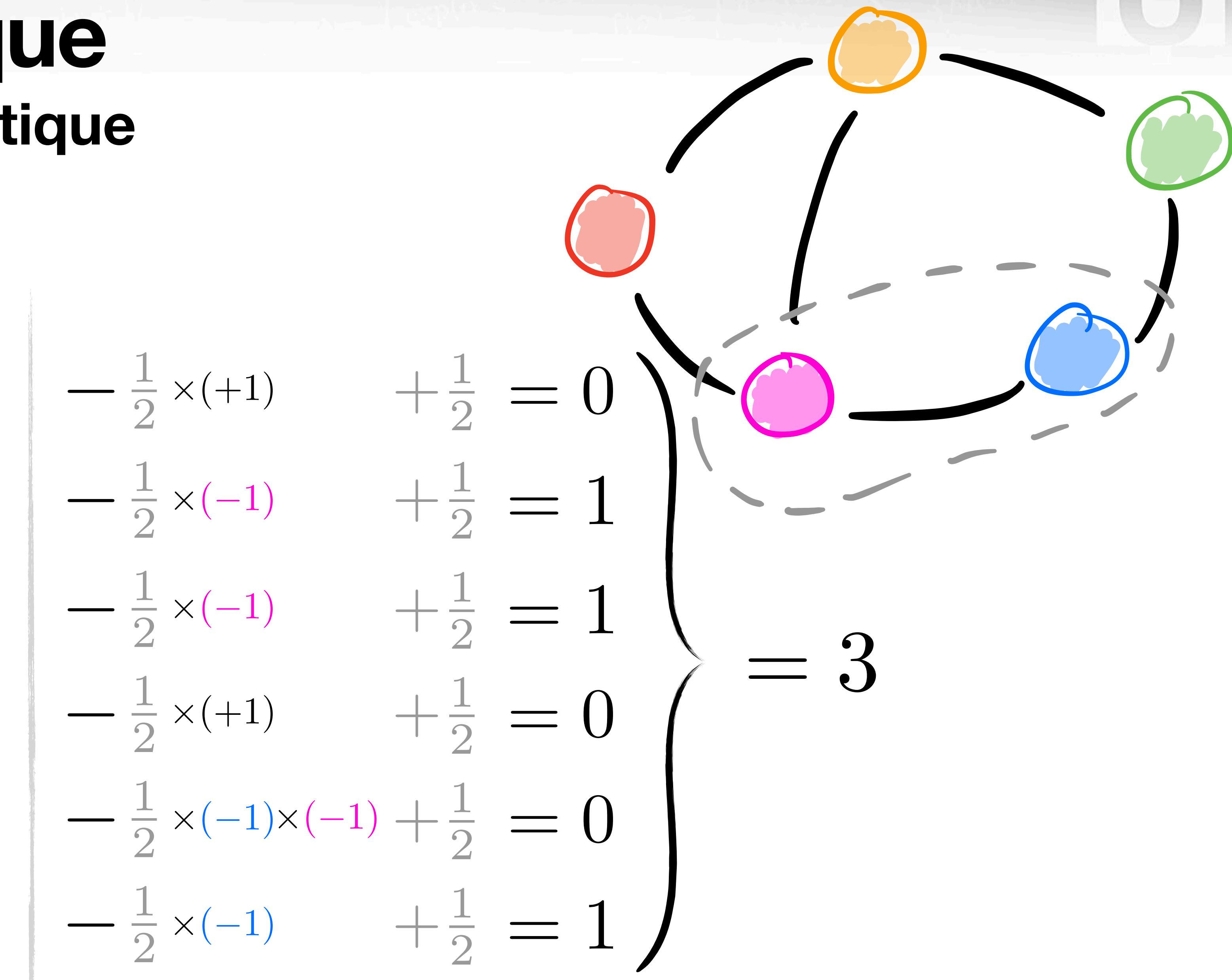


Solution quantique

Évaluation du gain quantique

Exemple : $|01100\rangle$

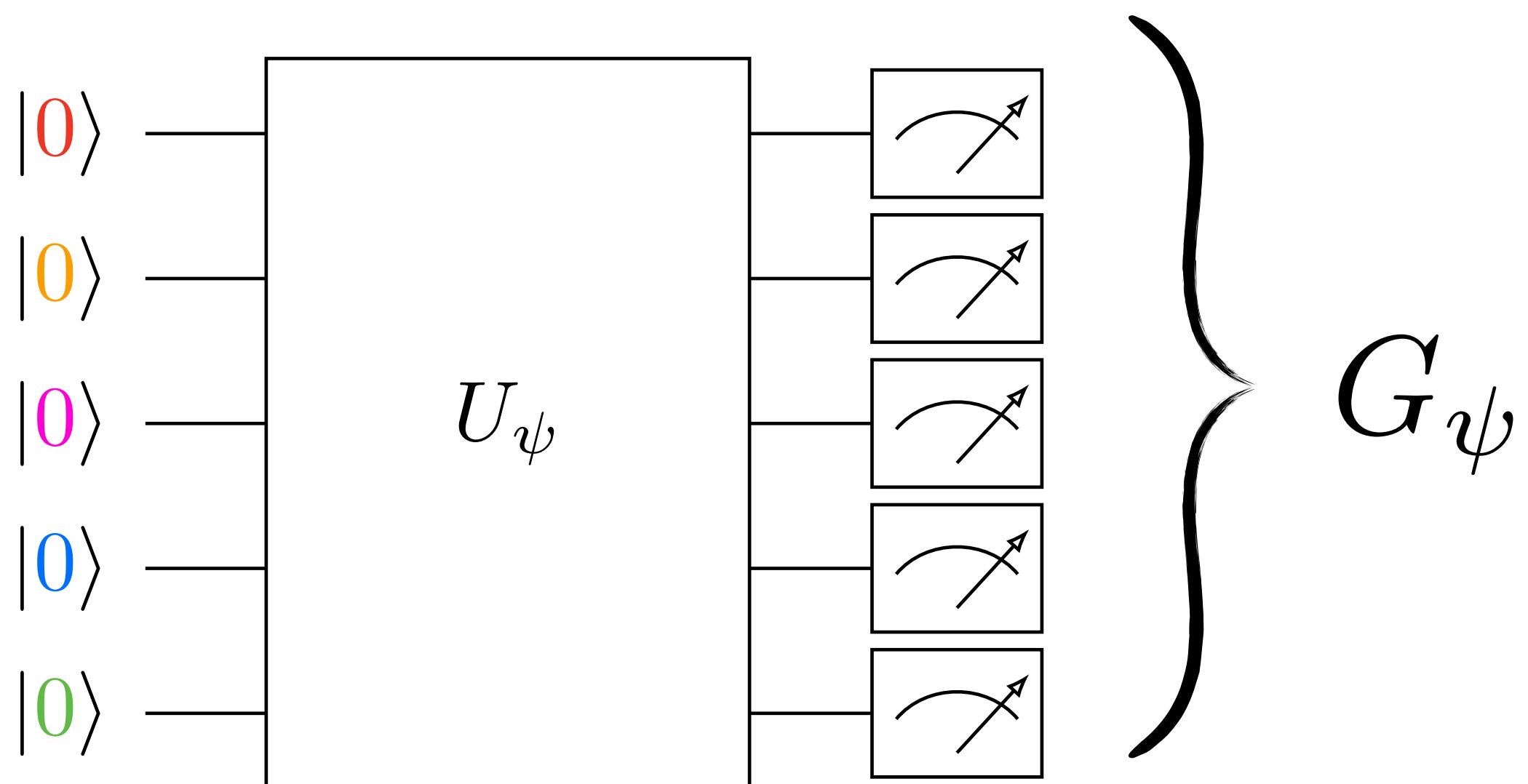
$$\begin{aligned}
 \hat{G} = & -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (+1) & + \frac{1}{2} = 0 \\
 & -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I}\hat{Z} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (-1) & + \frac{1}{2} = 1 \\
 & -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (-1) & + \frac{1}{2} = 1 \\
 & -\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{Z}\hat{I} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (+1) & + \frac{1}{2} = 0 \\
 & -\frac{1}{2} \hat{I}\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (-1) \times (-1) & + \frac{1}{2} = 0 \\
 & -\frac{1}{2} \hat{Z}\hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{I} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \times (-1) & + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

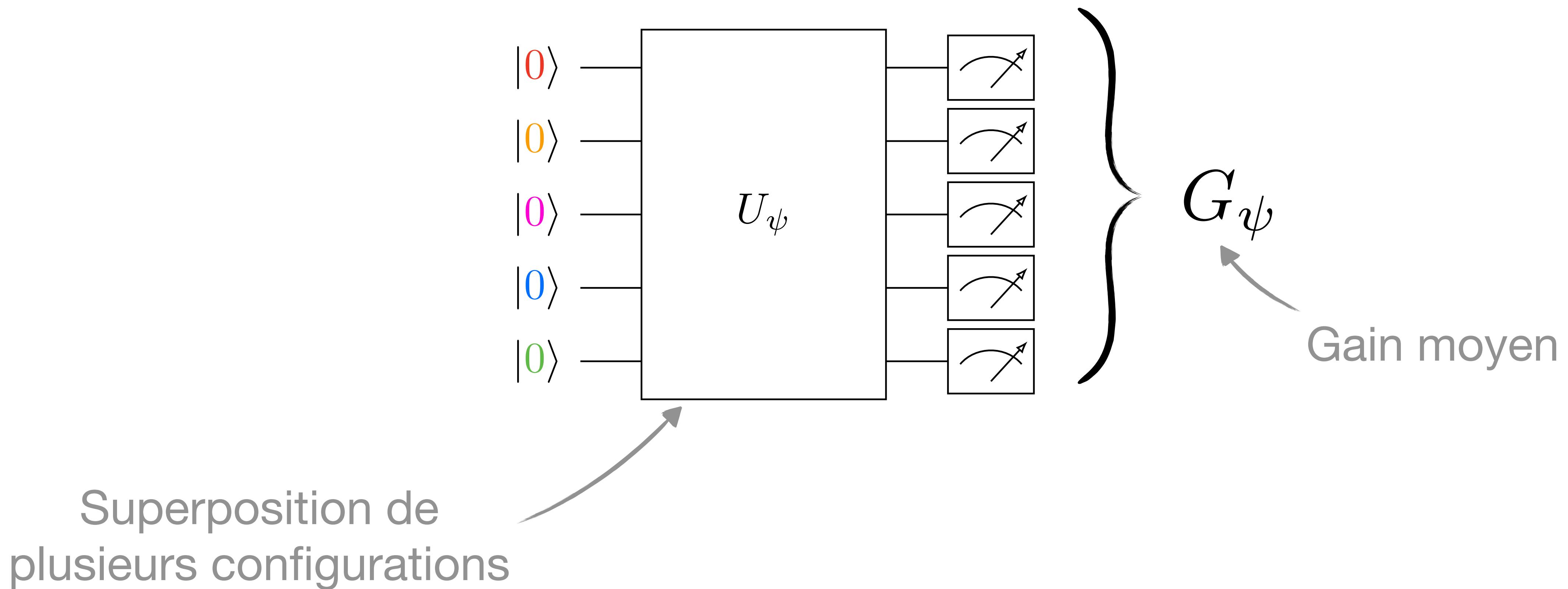
Exploiter le parallélisme quantique!



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

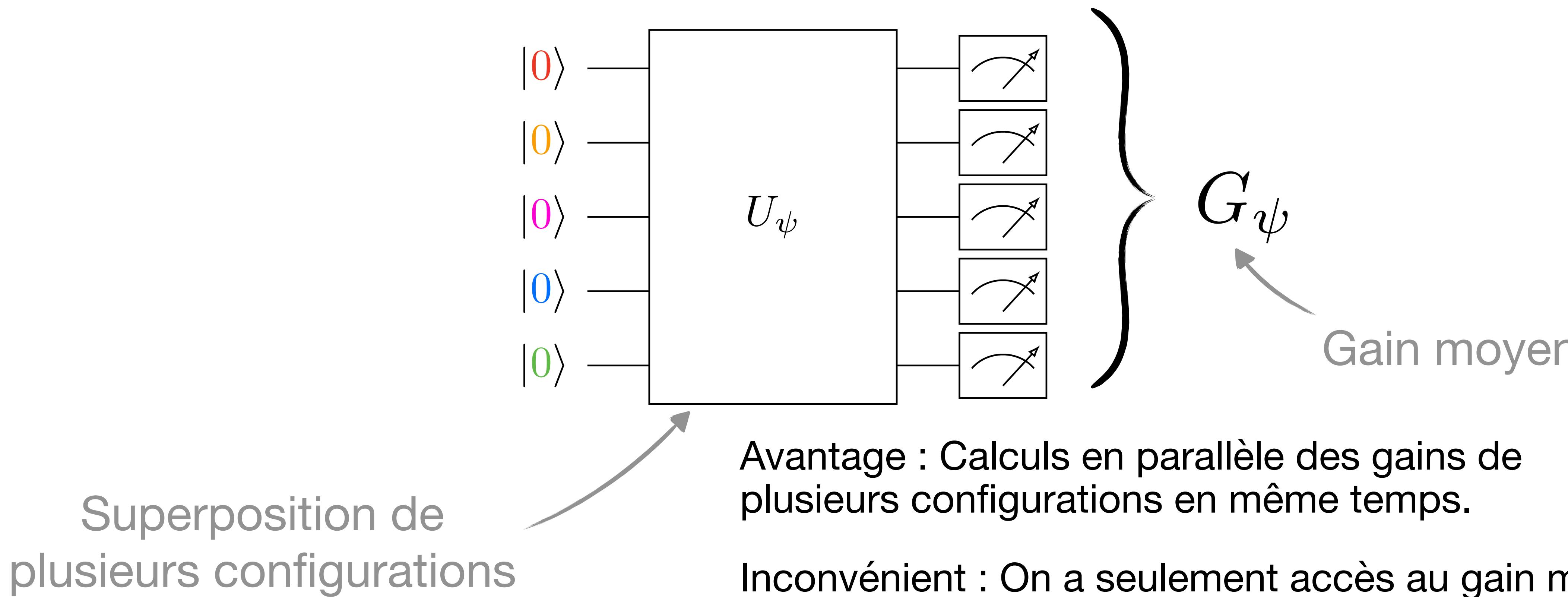
Exploiter le parallélisme quantique!



Solution quantique

Évaluation du gain quantique

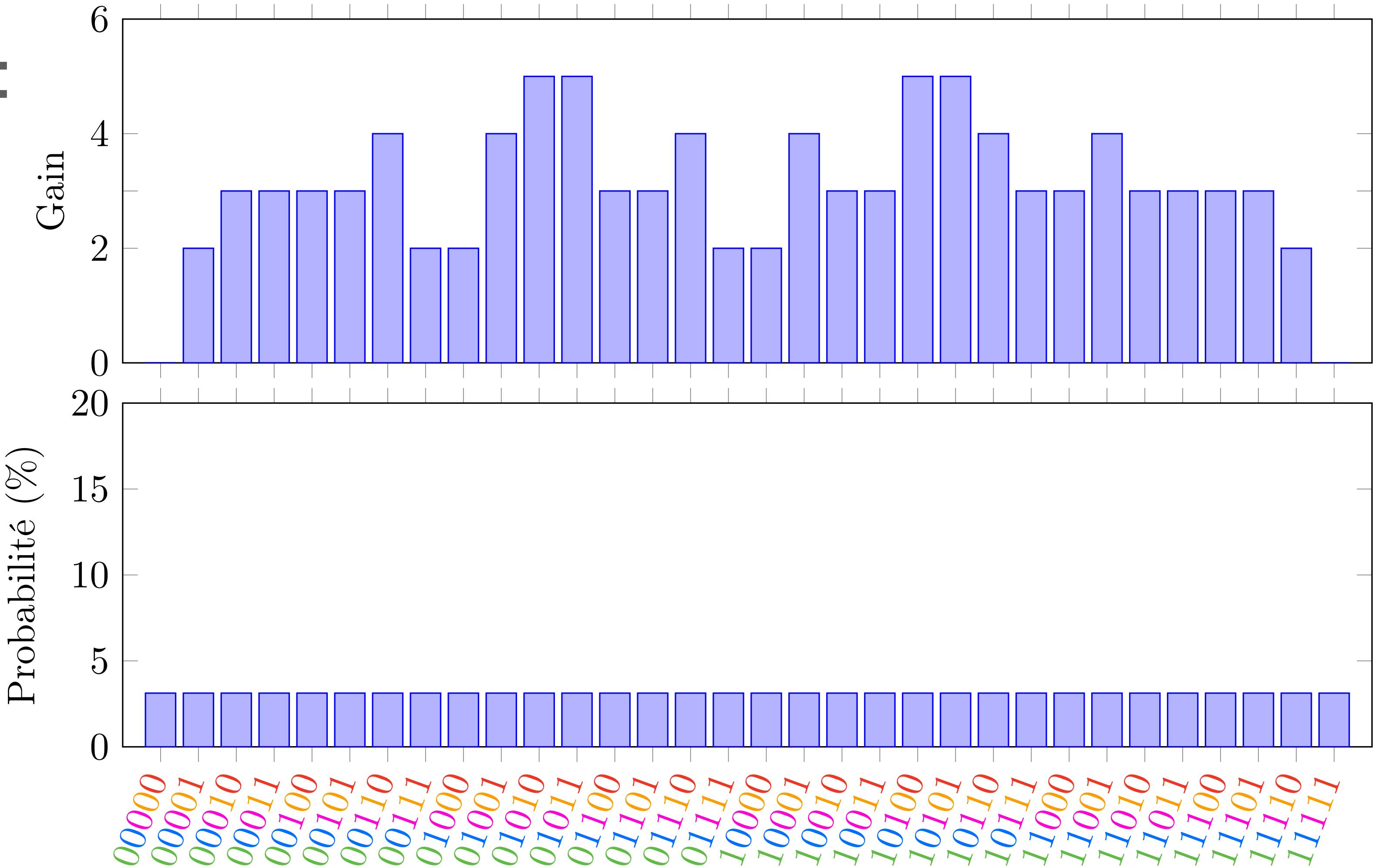
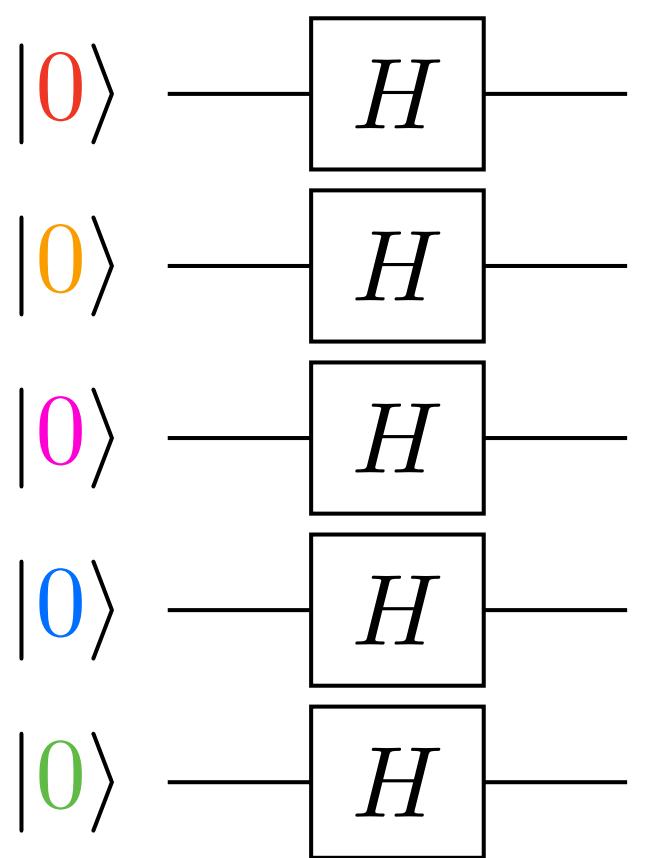
Exploiter le parallélisme quantique!



Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

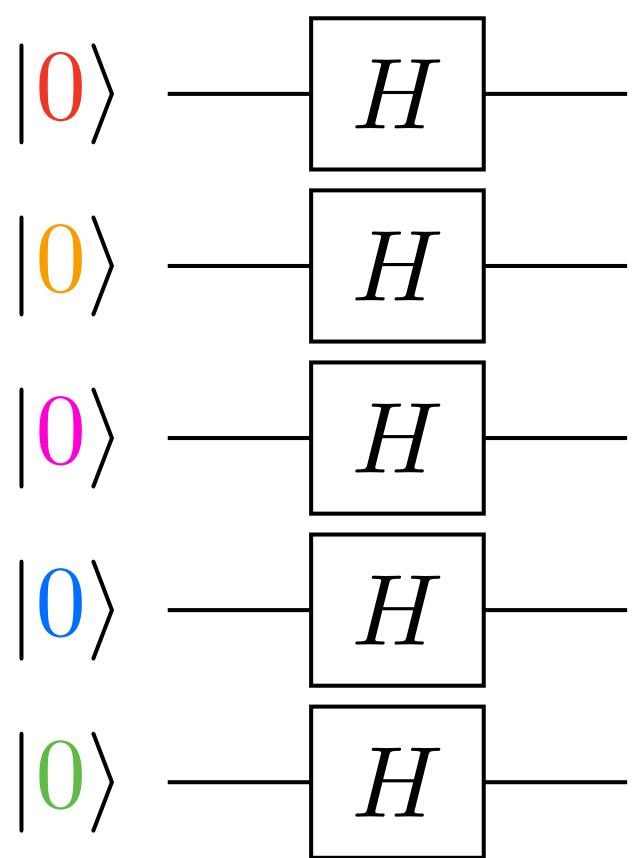
Exemple :



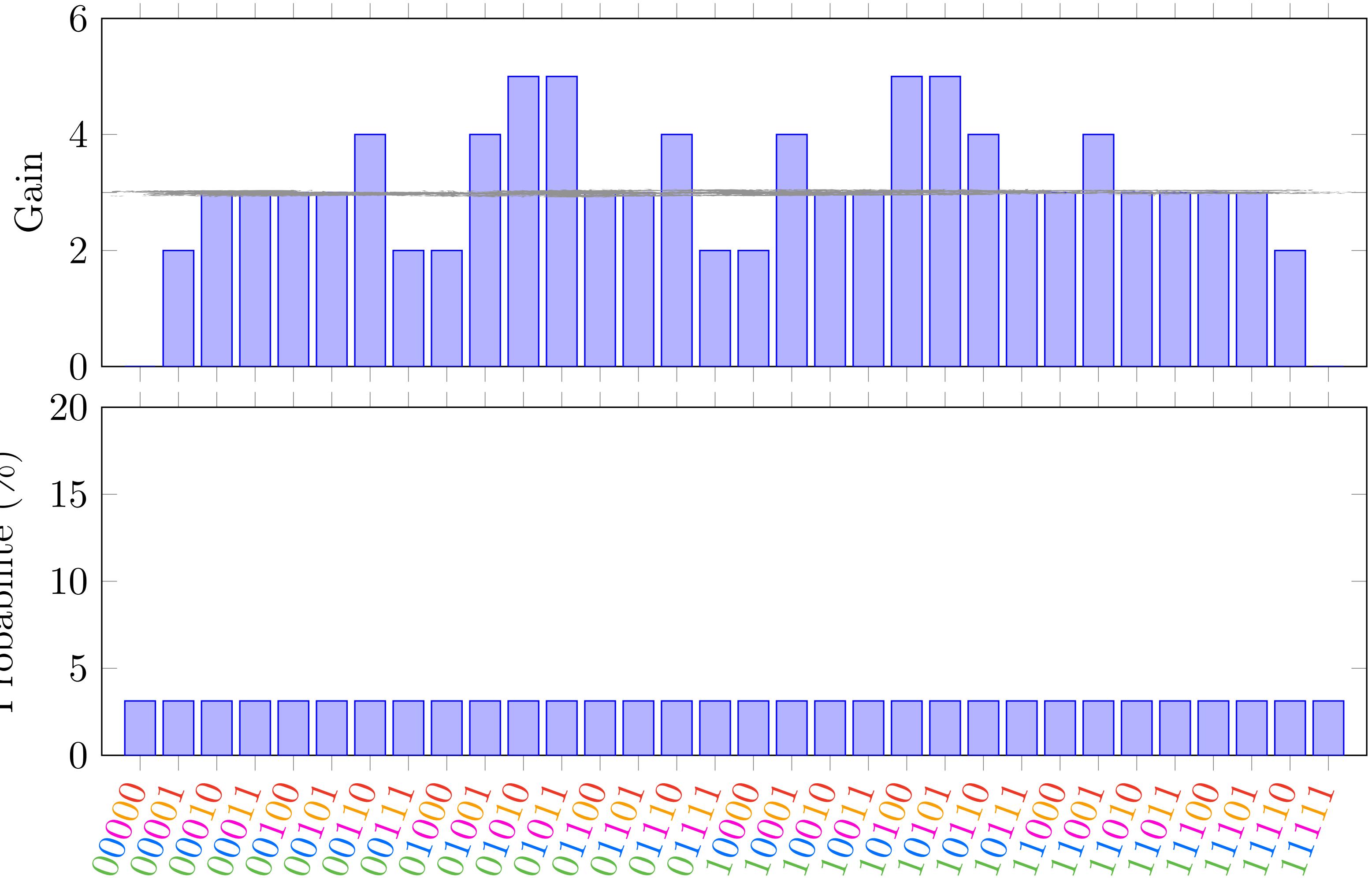
Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

Exemple :



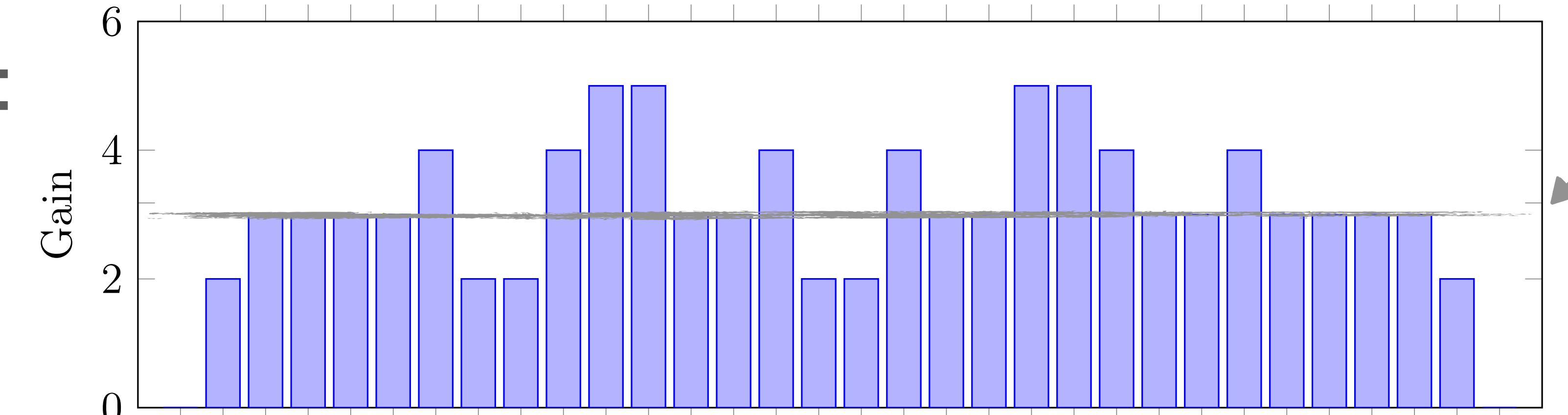
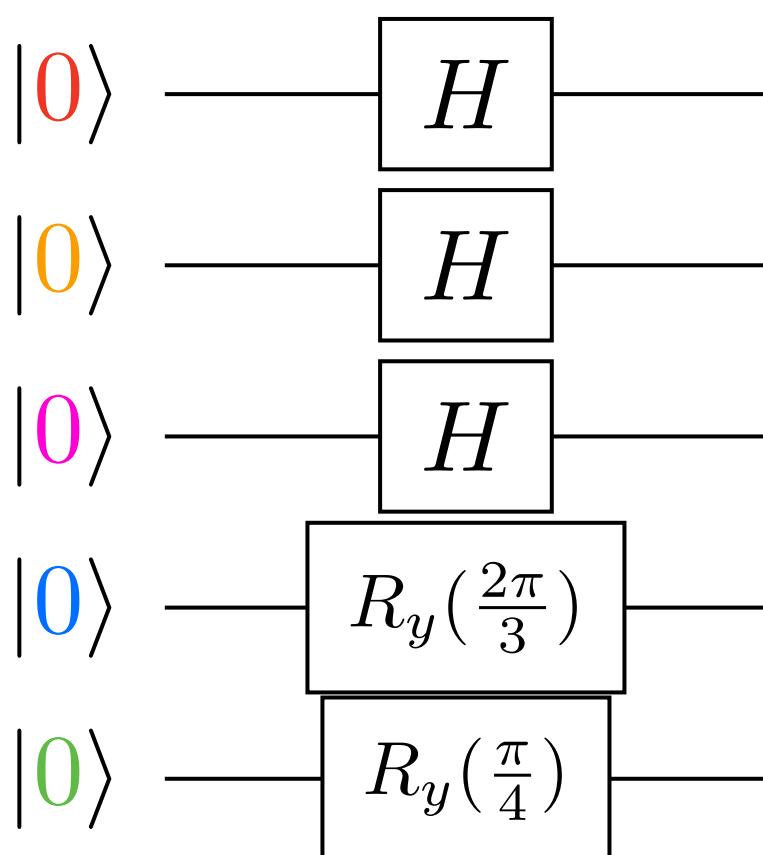
Probabilité (%)



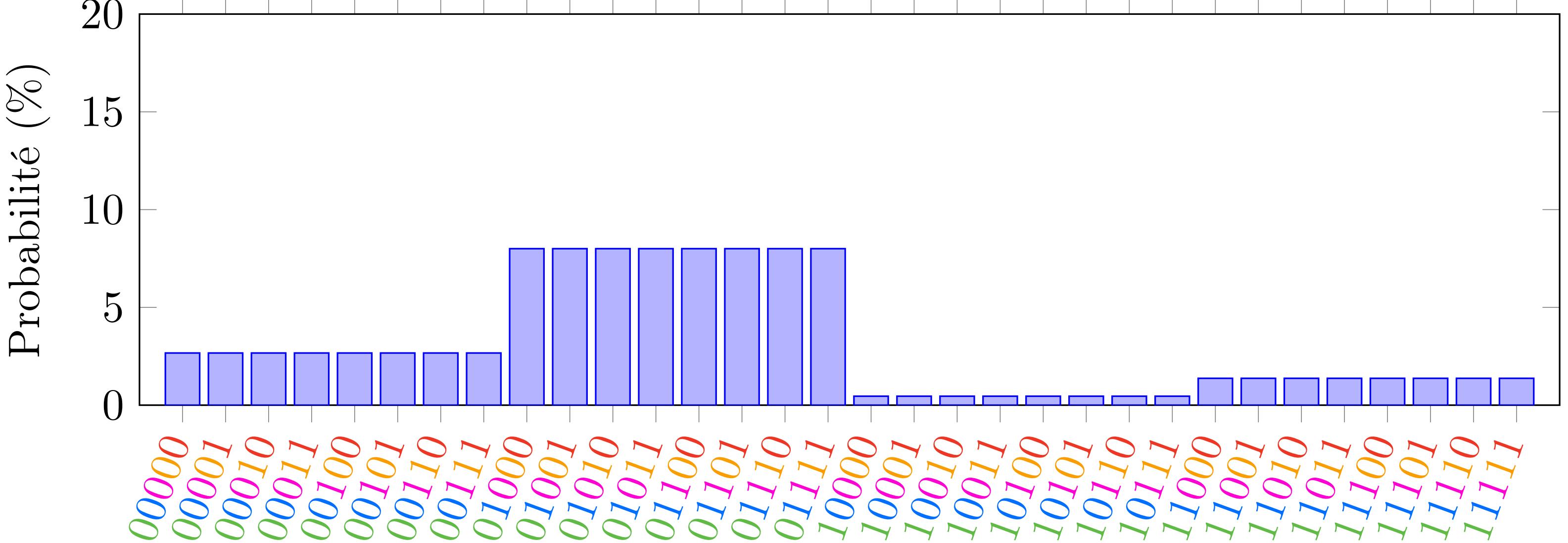
Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

Exemple :



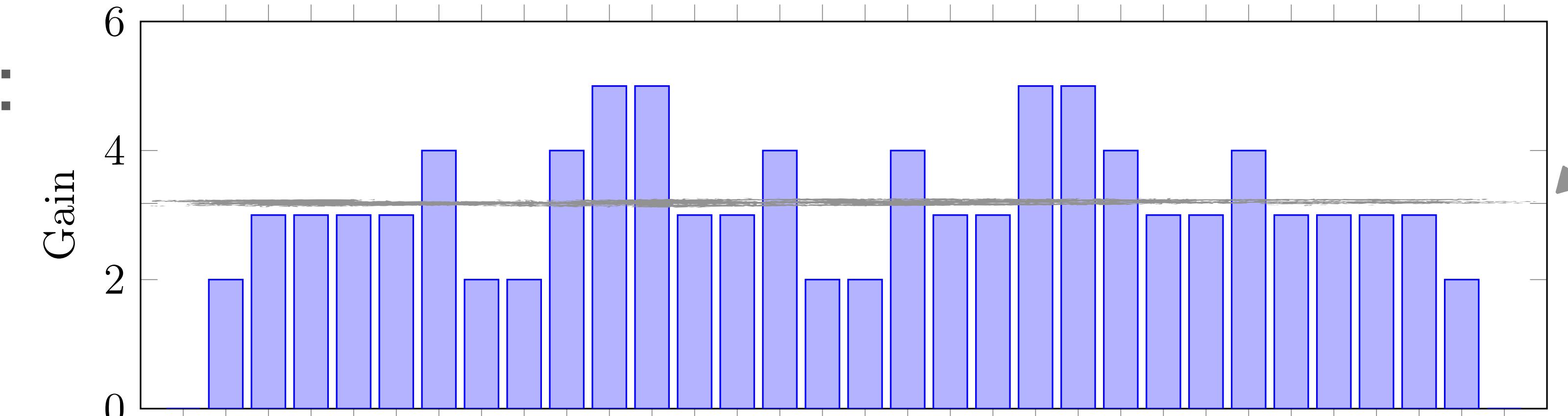
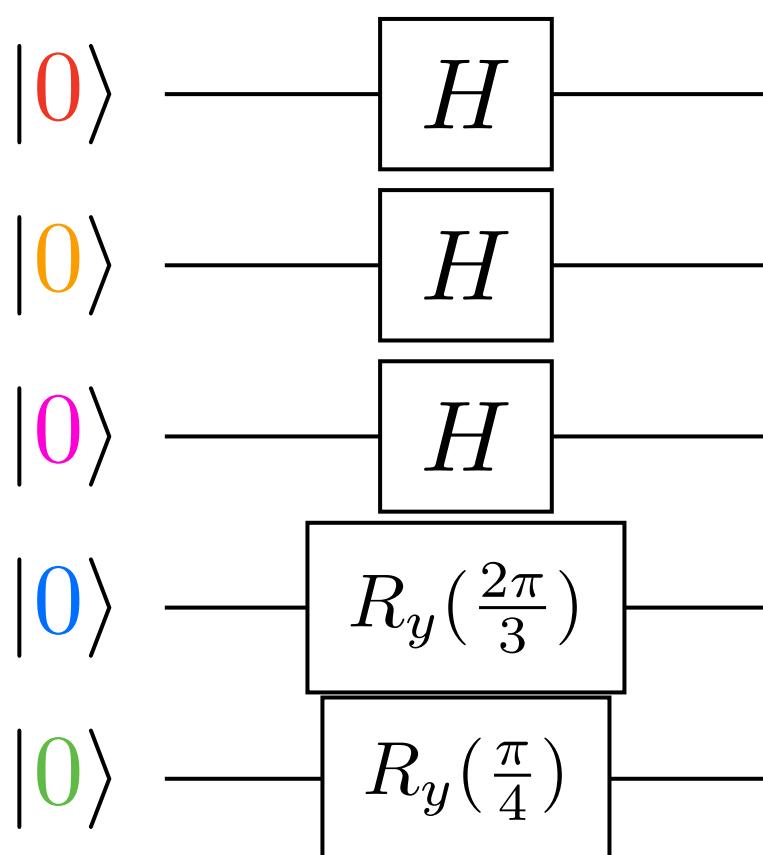
Gain moyen
= 3,00



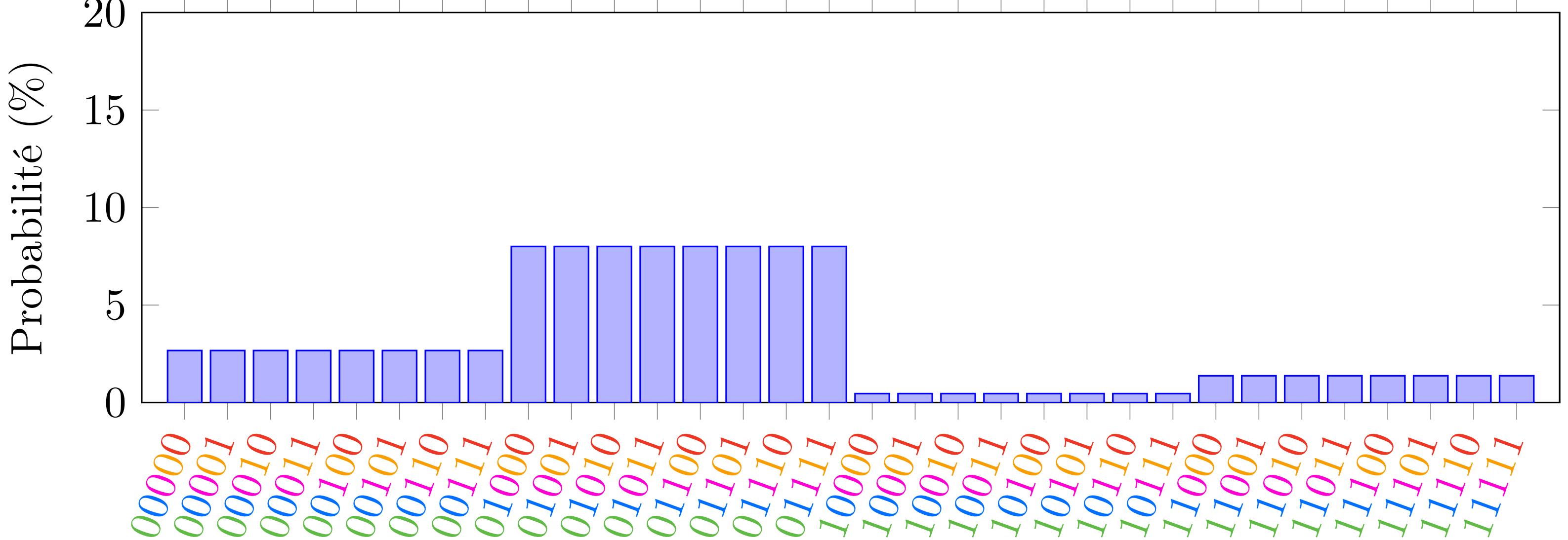
Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

Exemple :



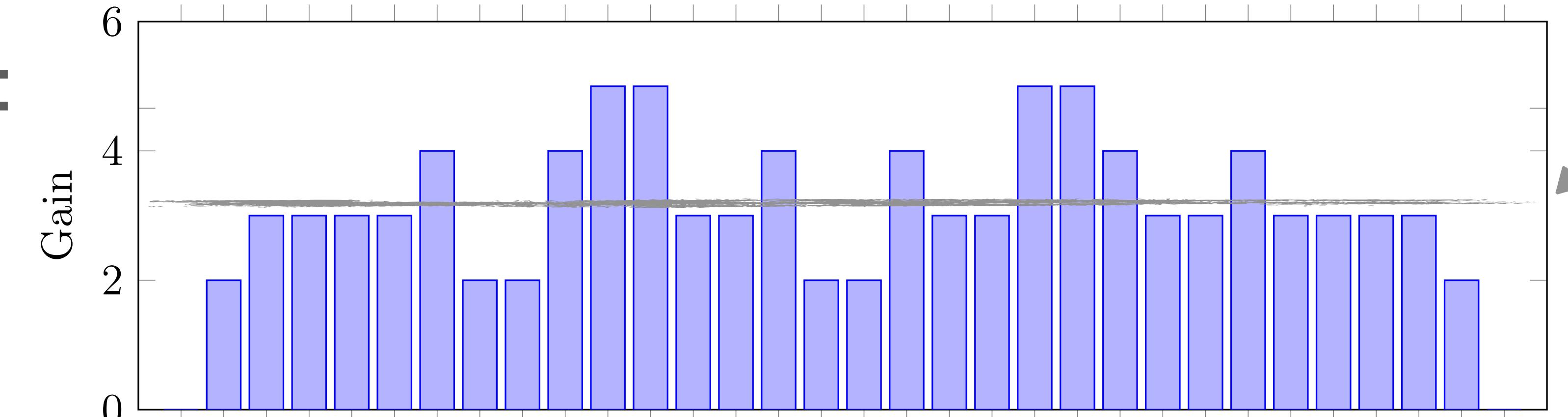
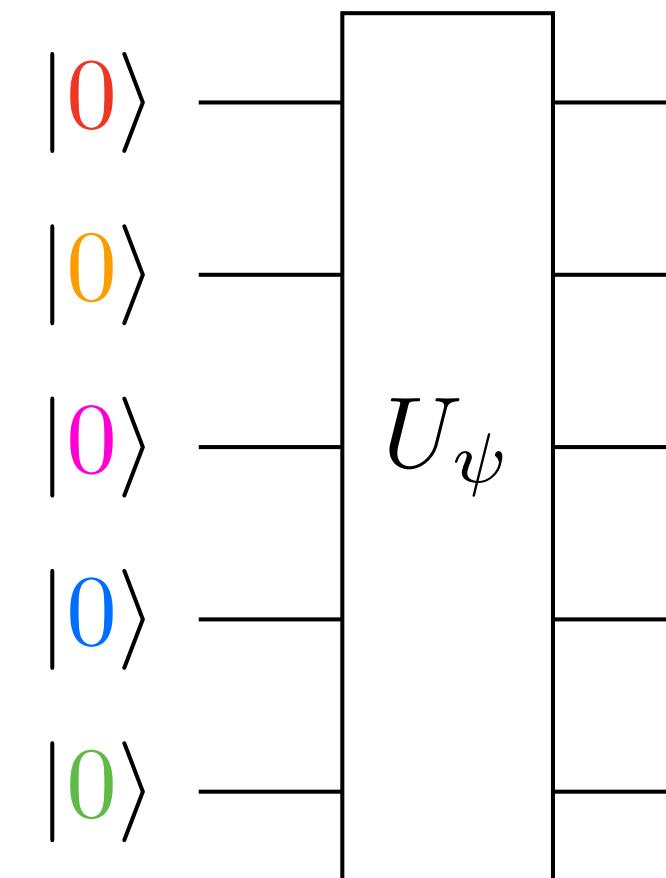
Gain moyen
= 3,18



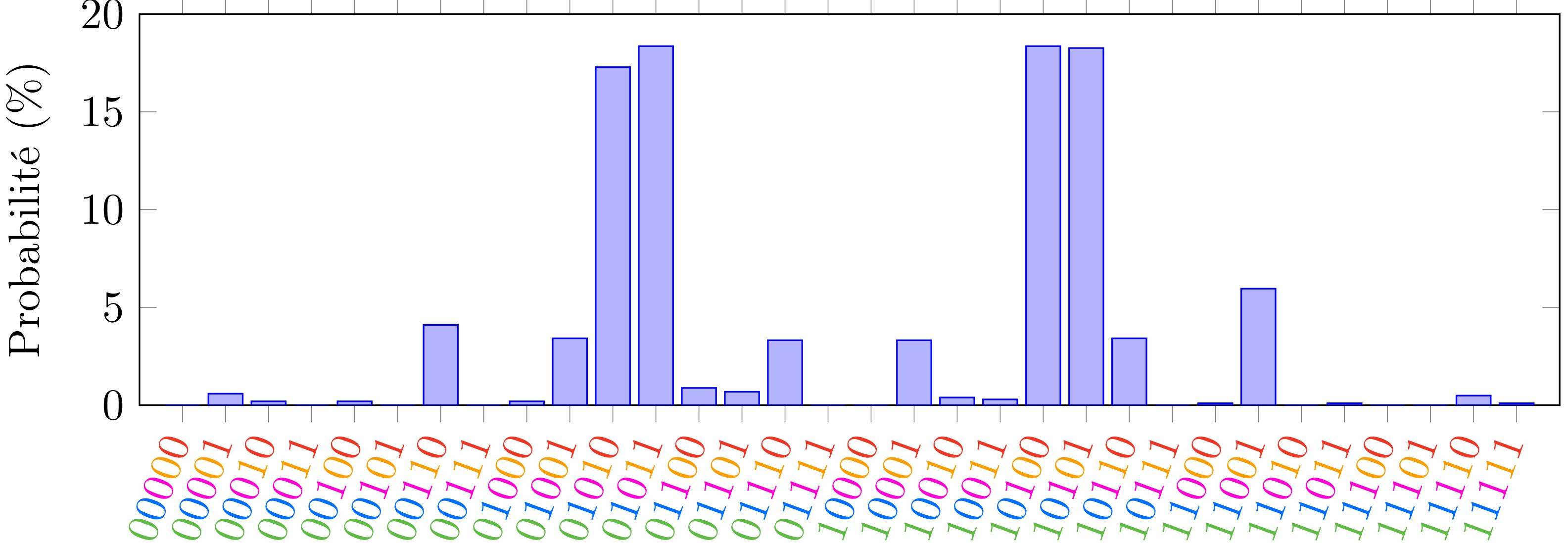
Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

Exemple :



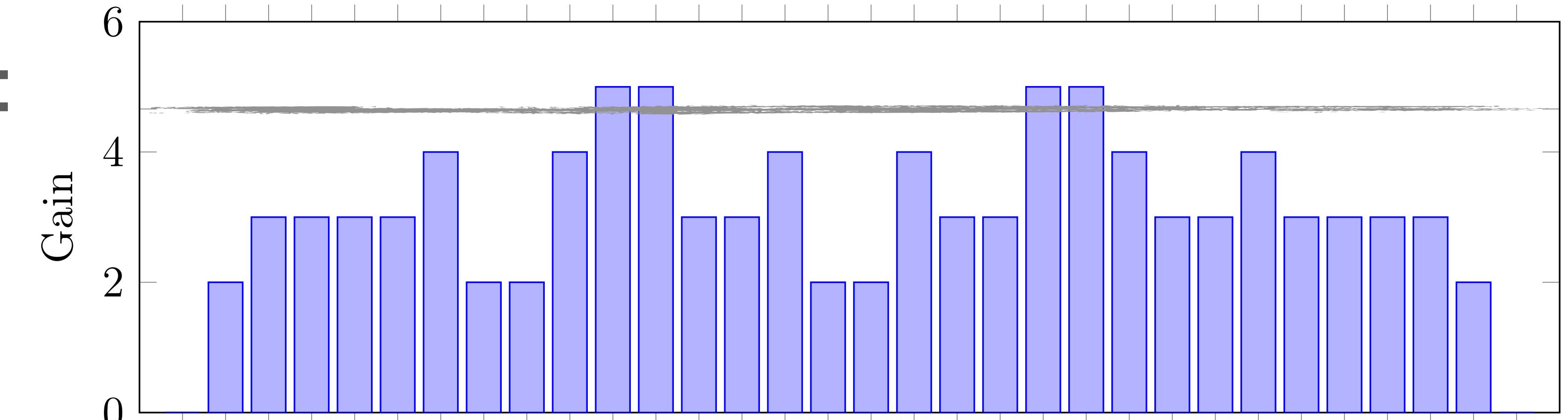
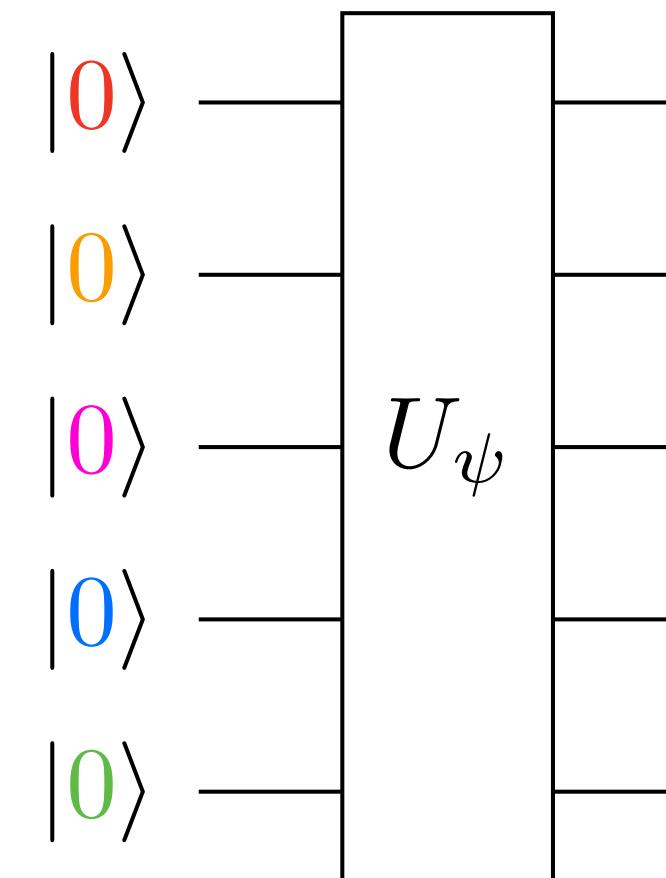
Gain moyen
= 3,18



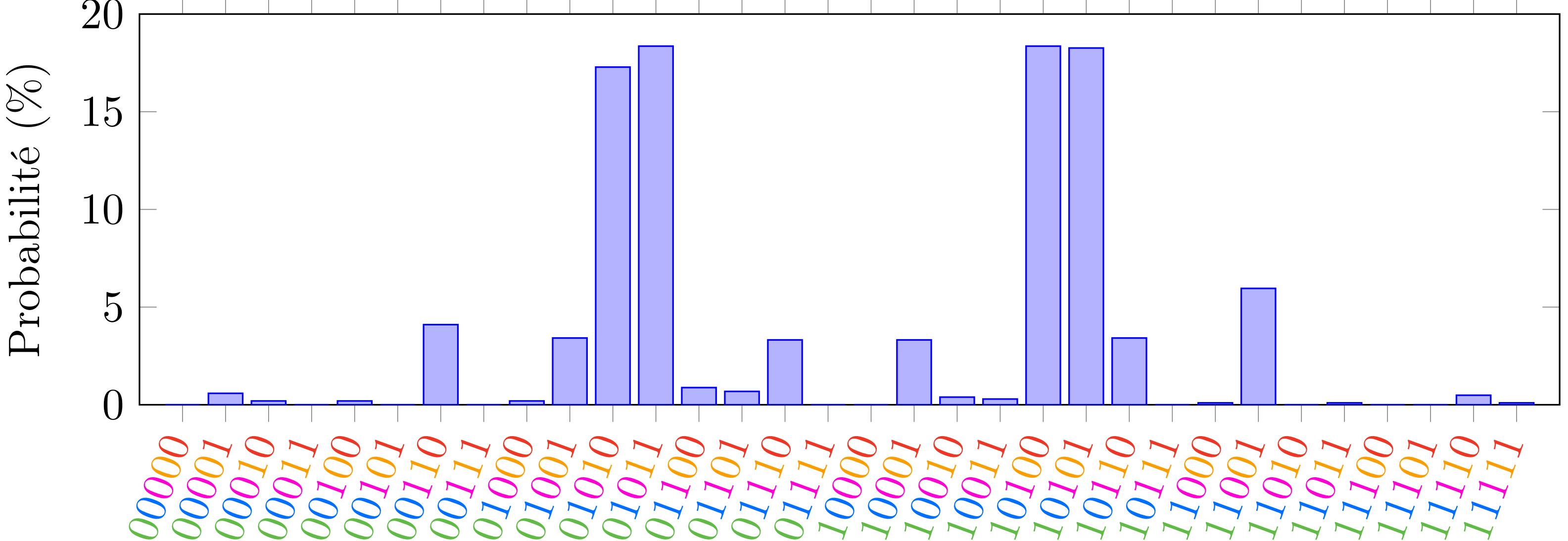
Solution quantique

Aperçu du parallélisme quantique

Exemple :



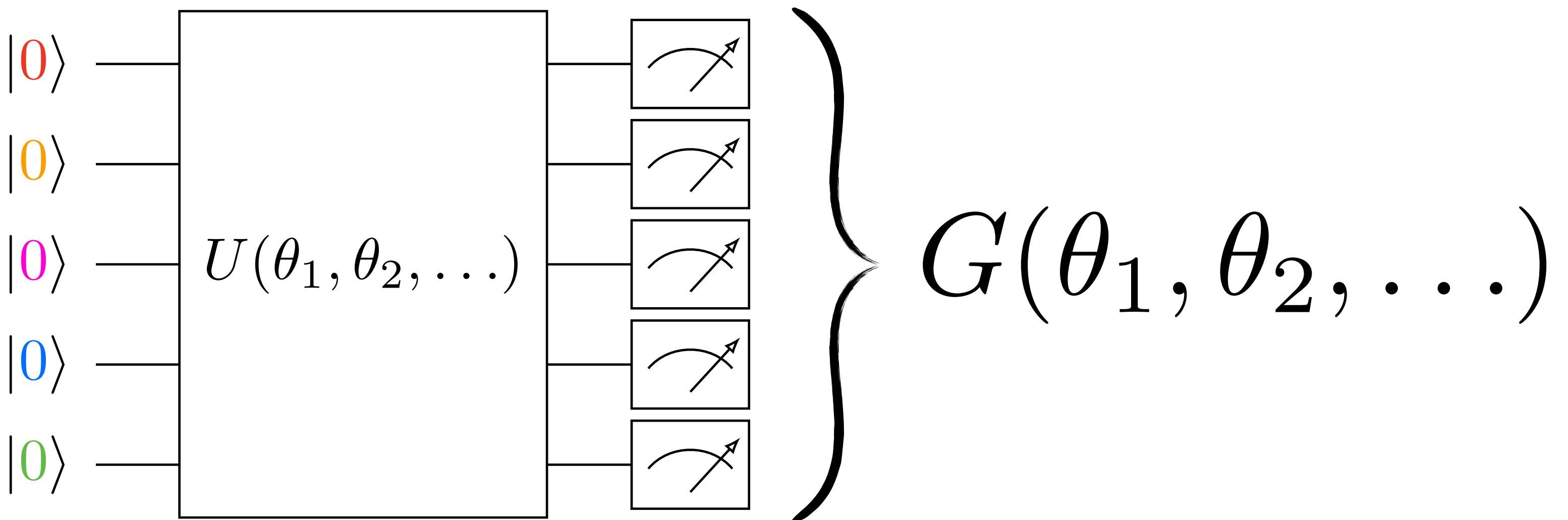
Gain moyen
= 4,66



Solution quantique

Algorithmes variationnels

1. L'état quantique est préparé par un **circuit paramétré** aussi appelé **Ansatz**.

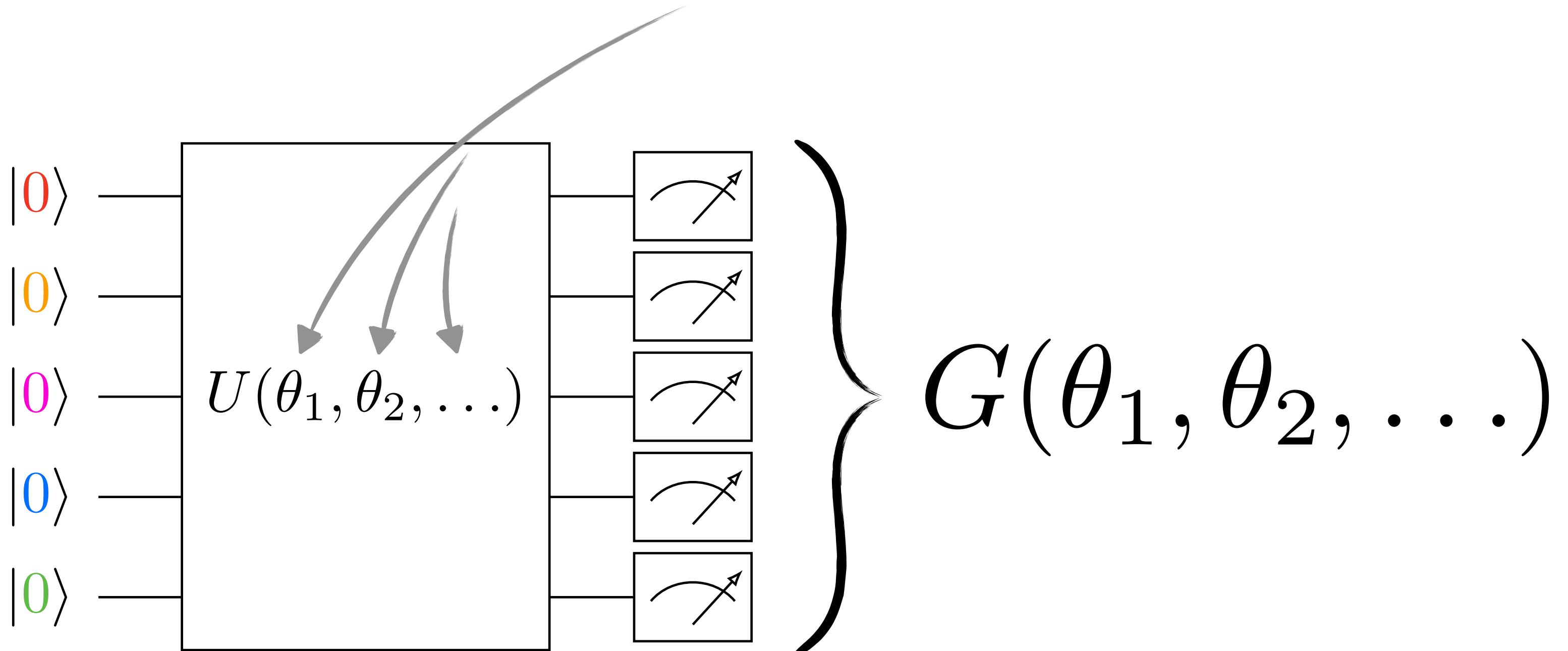


Solution quantique

Algorithmes variationnels

Paramètres qui changent
l'état quantique préparé

1. L'état quantique est préparé par un **circuit paramétré** aussi appelé **Ansatz**.



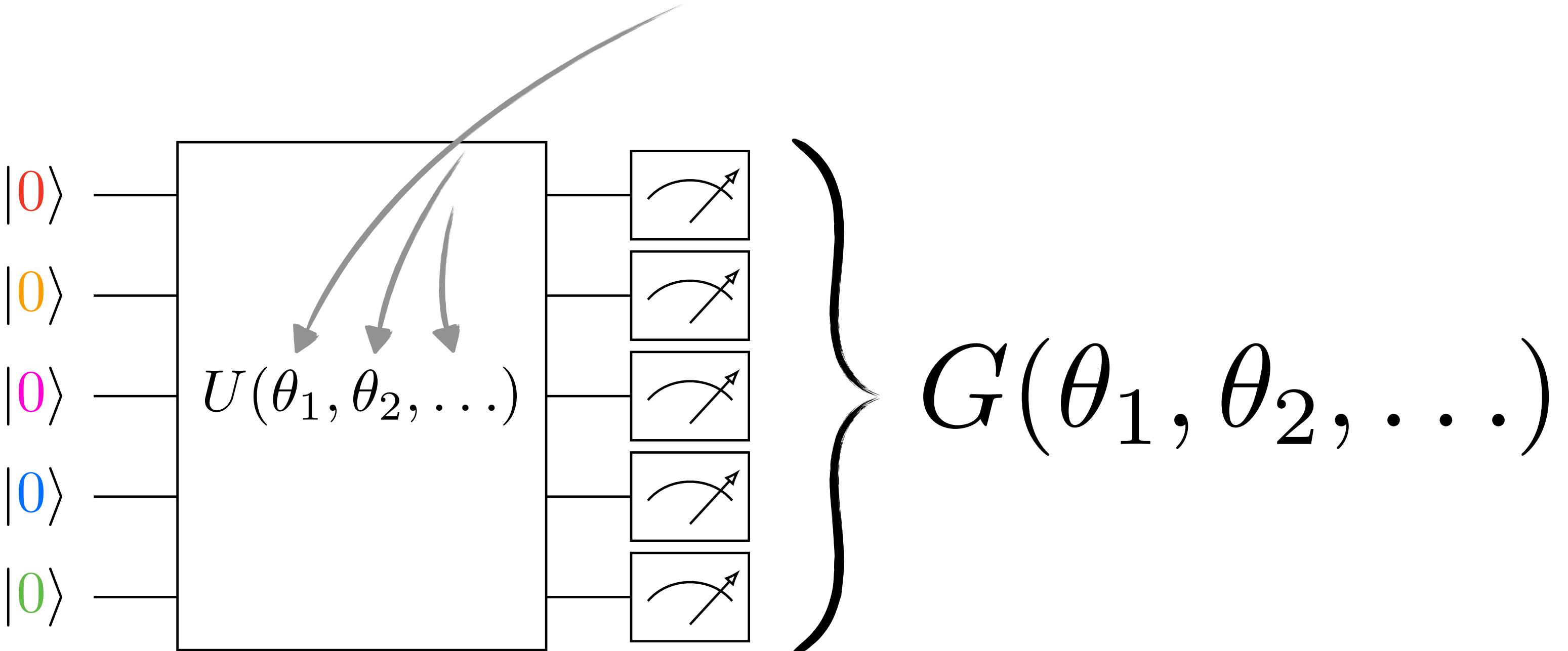
Solution quantique

Algorithmes variationnels

Paramètres qui changent
l'état quantique préparé

1. L'état quantique est préparé par un **circuit paramétré** aussi appelé **Ansatz**.

2. On modifie les paramètres de manière à **maximiser** le gain moyen.



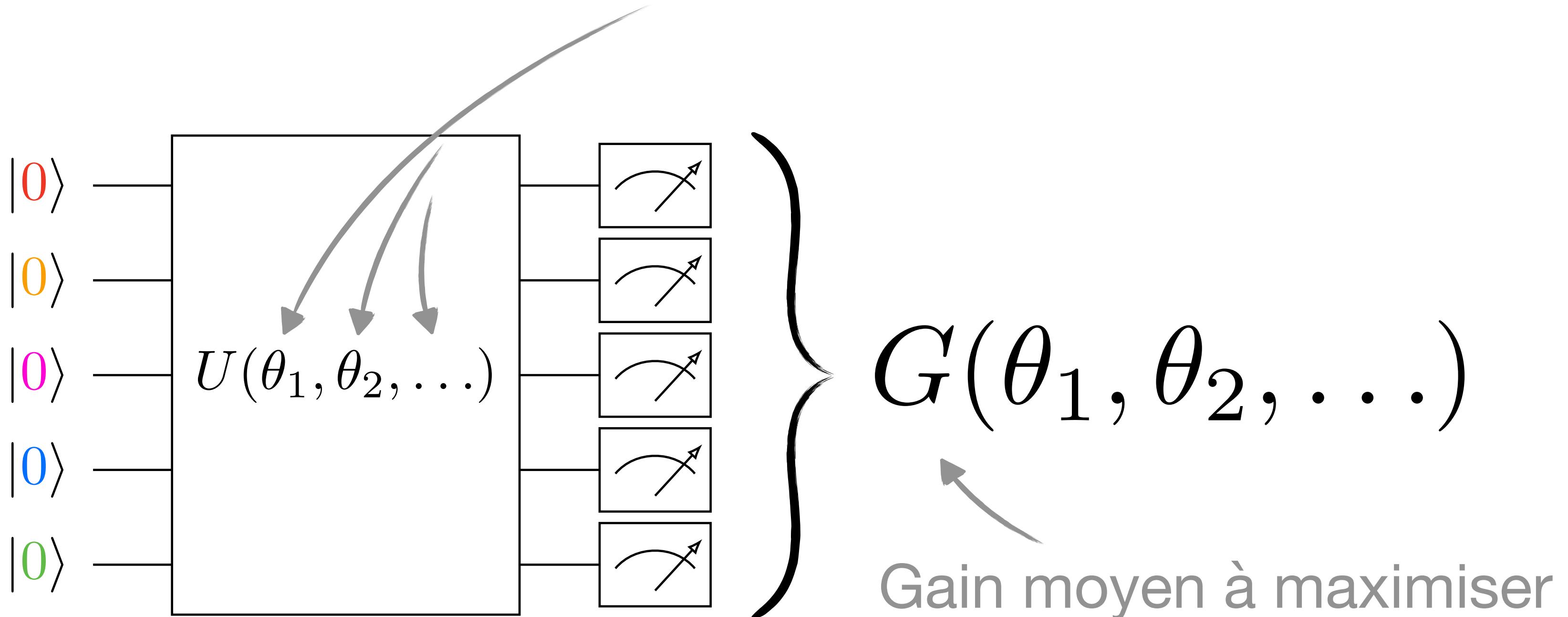
Solution quantique

Algorithmes variationnels

Paramètres qui changent
l'état quantique préparé

1. L'état quantique est préparé par un **circuit paramétré** aussi appelé **Ansatz**.

2. On modifie les paramètres de manière à **maximiser** le gain moyen.



Solution quantique

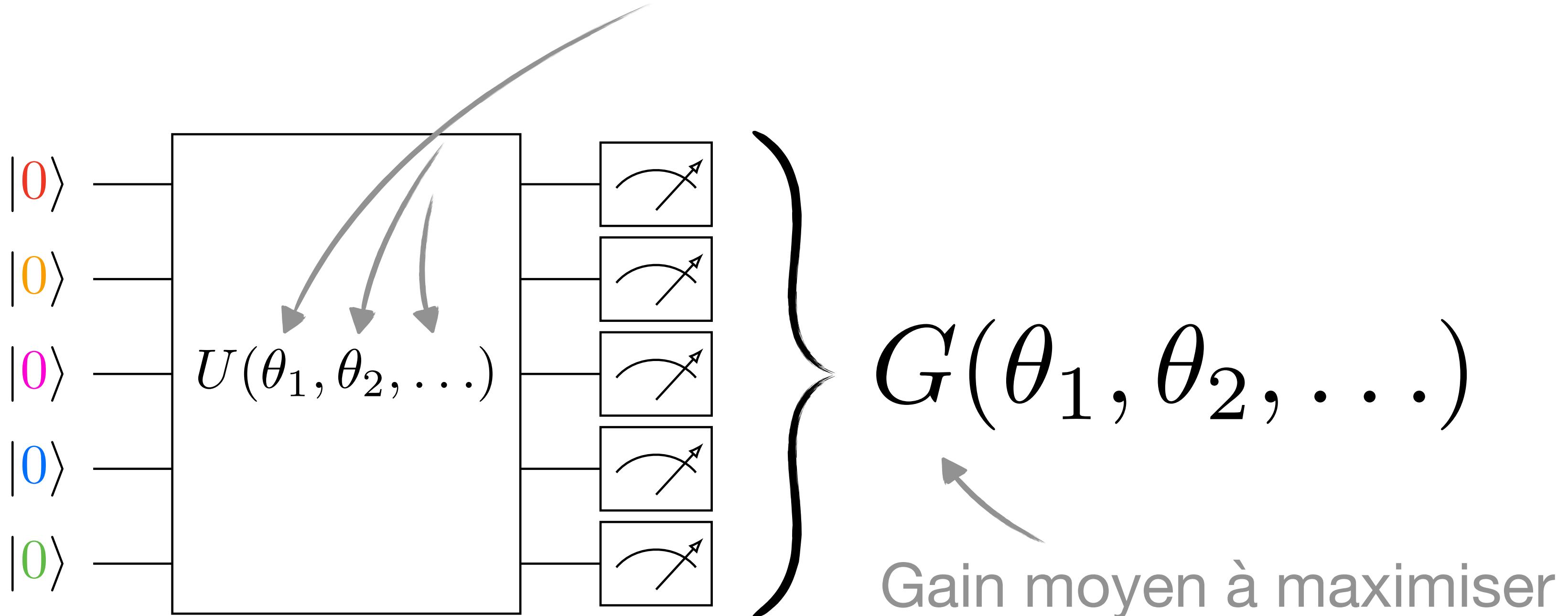
Algorithmes variationnels

Paramètres qui changent
l'état quantique préparé

1. L'état quantique est préparé par un **circuit paramétré** aussi appelé **Ansatz**.

2. On modifie les paramètres de manière à **maximiser** le gain moyen.

3. Les configurations **dominantes** dans l'état qui maximise le gain moyen, sont de **bonnes solutions**.



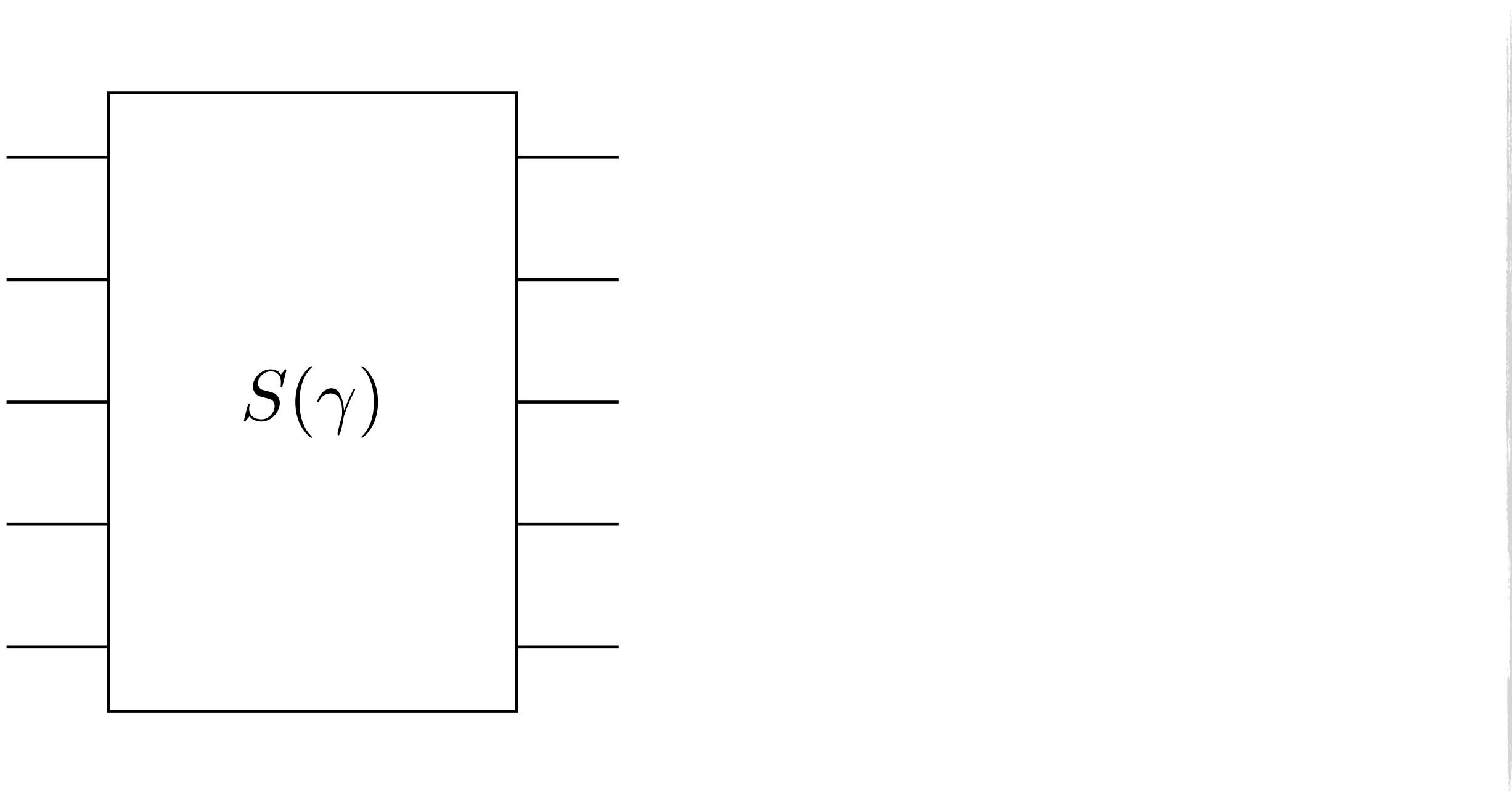
QAOA

Algorithme quantique d'optimisation approximative

QAOA

Structure du circuit quantique

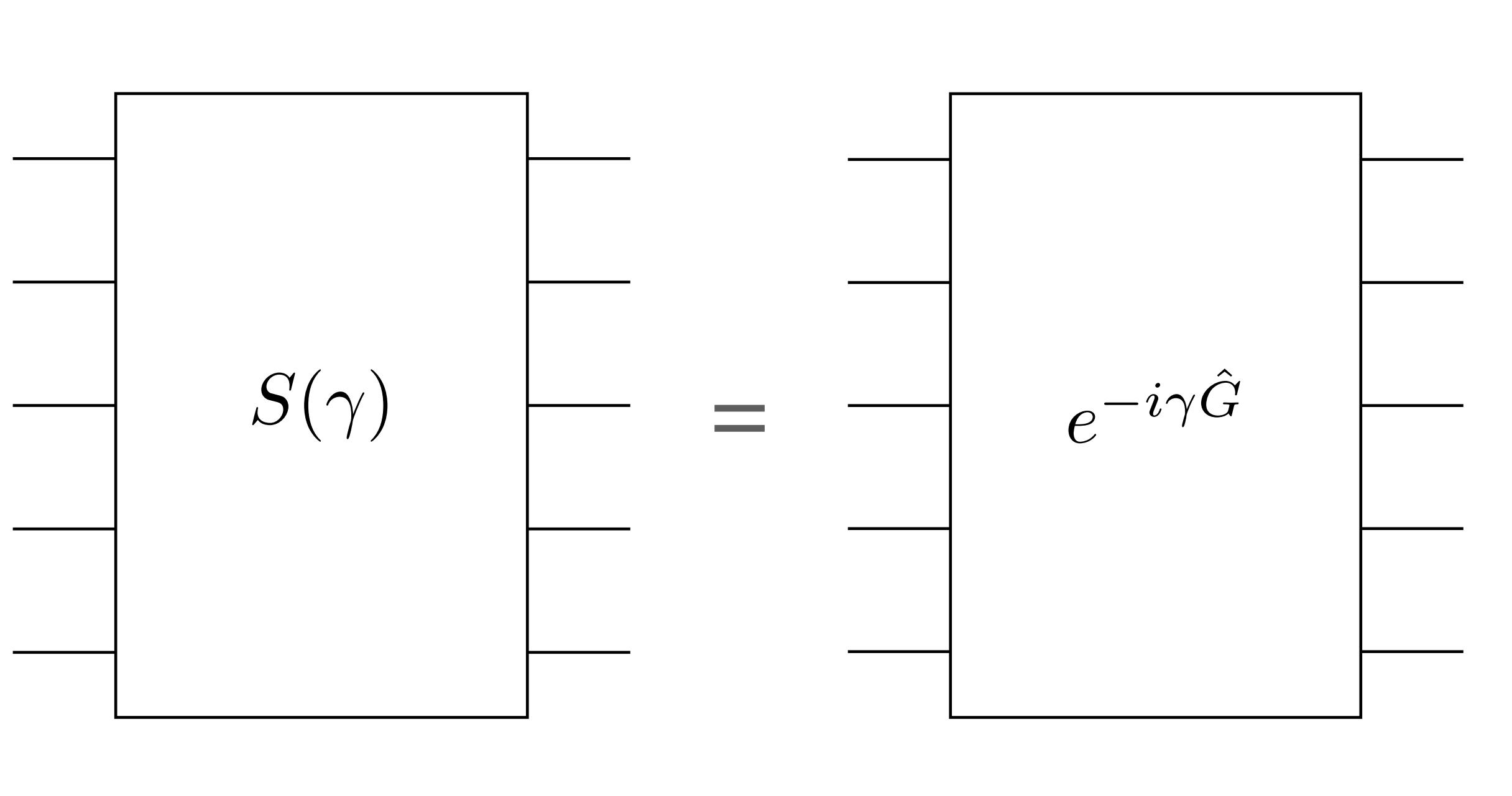
Circuit d'évolution lié au problème



QAOA

Structure du circuit quantique

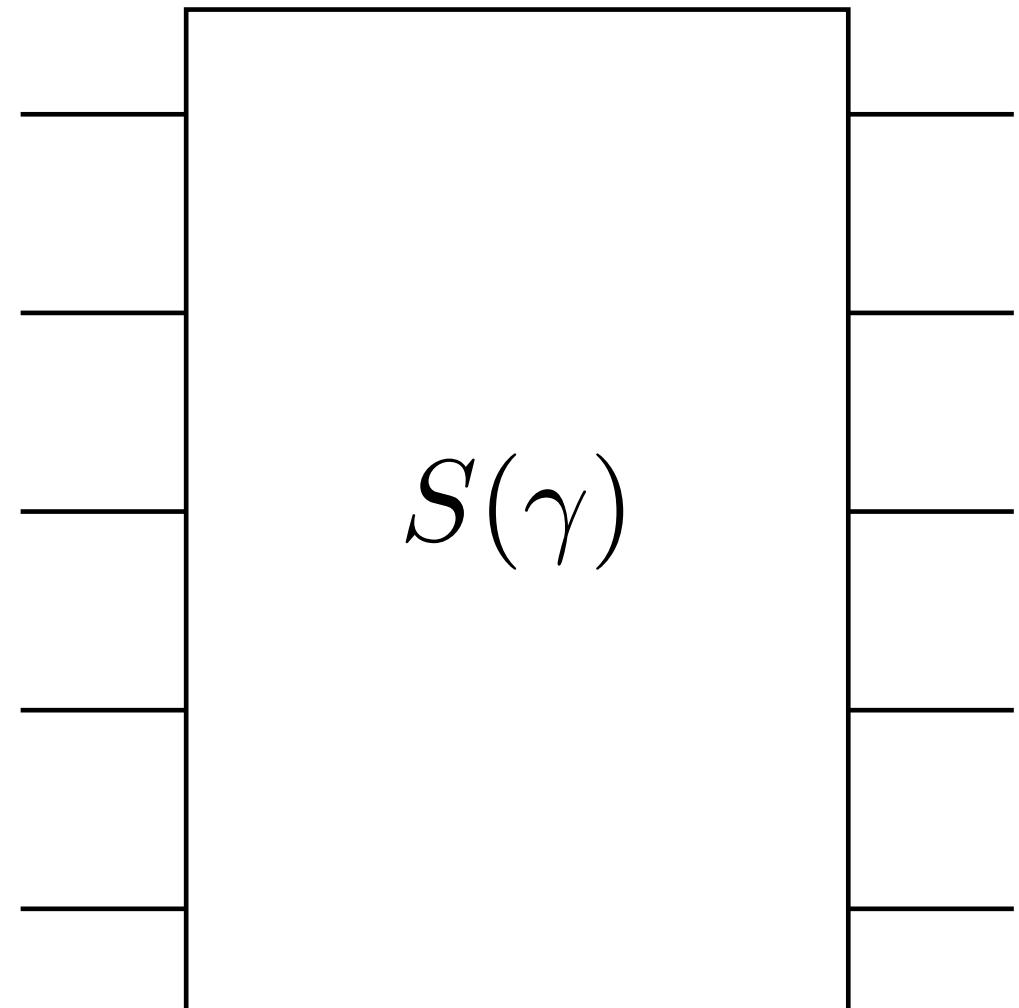
Circuit d'évolution lié au problème



QAOA

Structure du circuit quantique

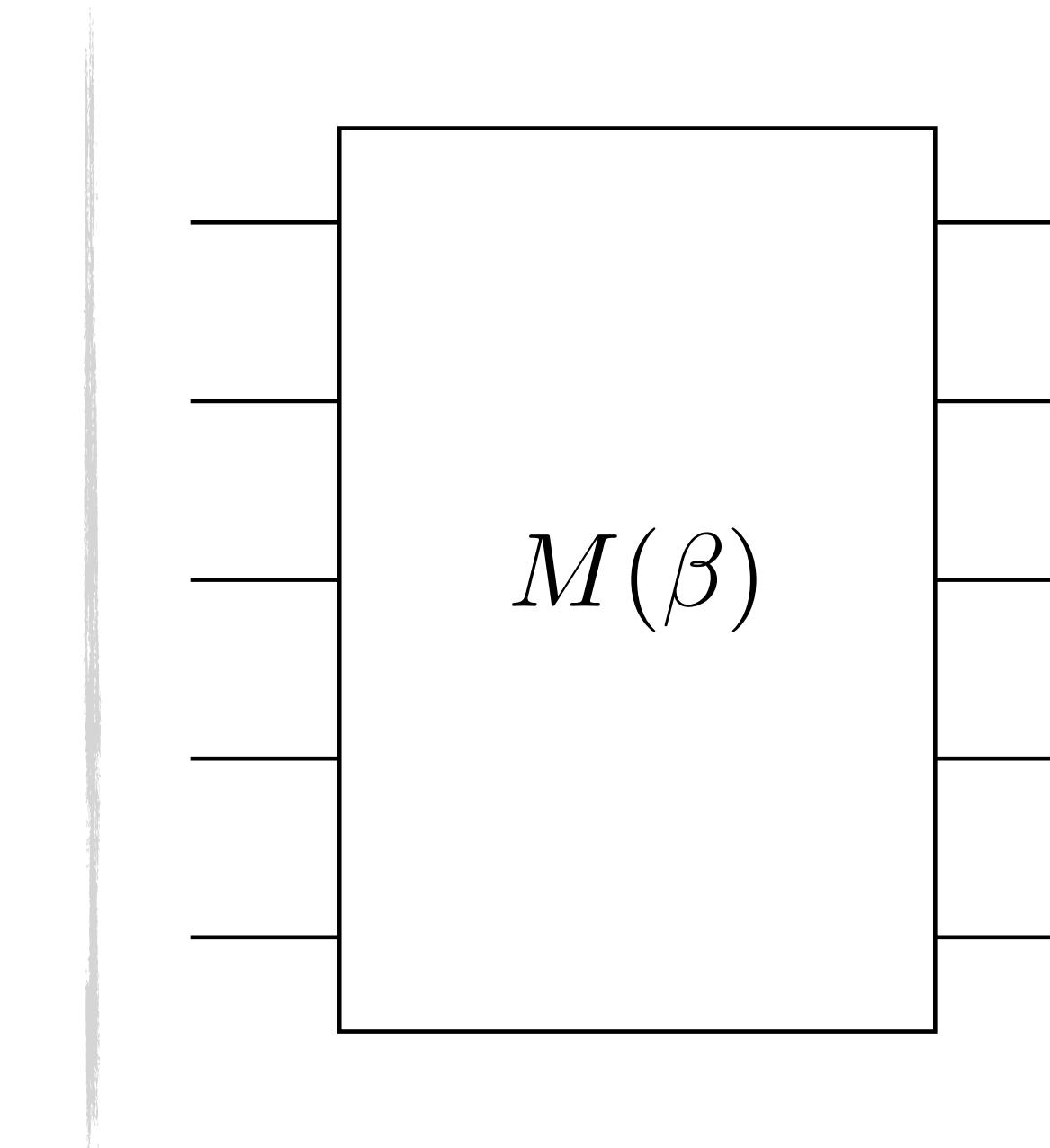
Circuit d'évolution lié au problème



=

$$e^{-i\gamma \hat{G}}$$

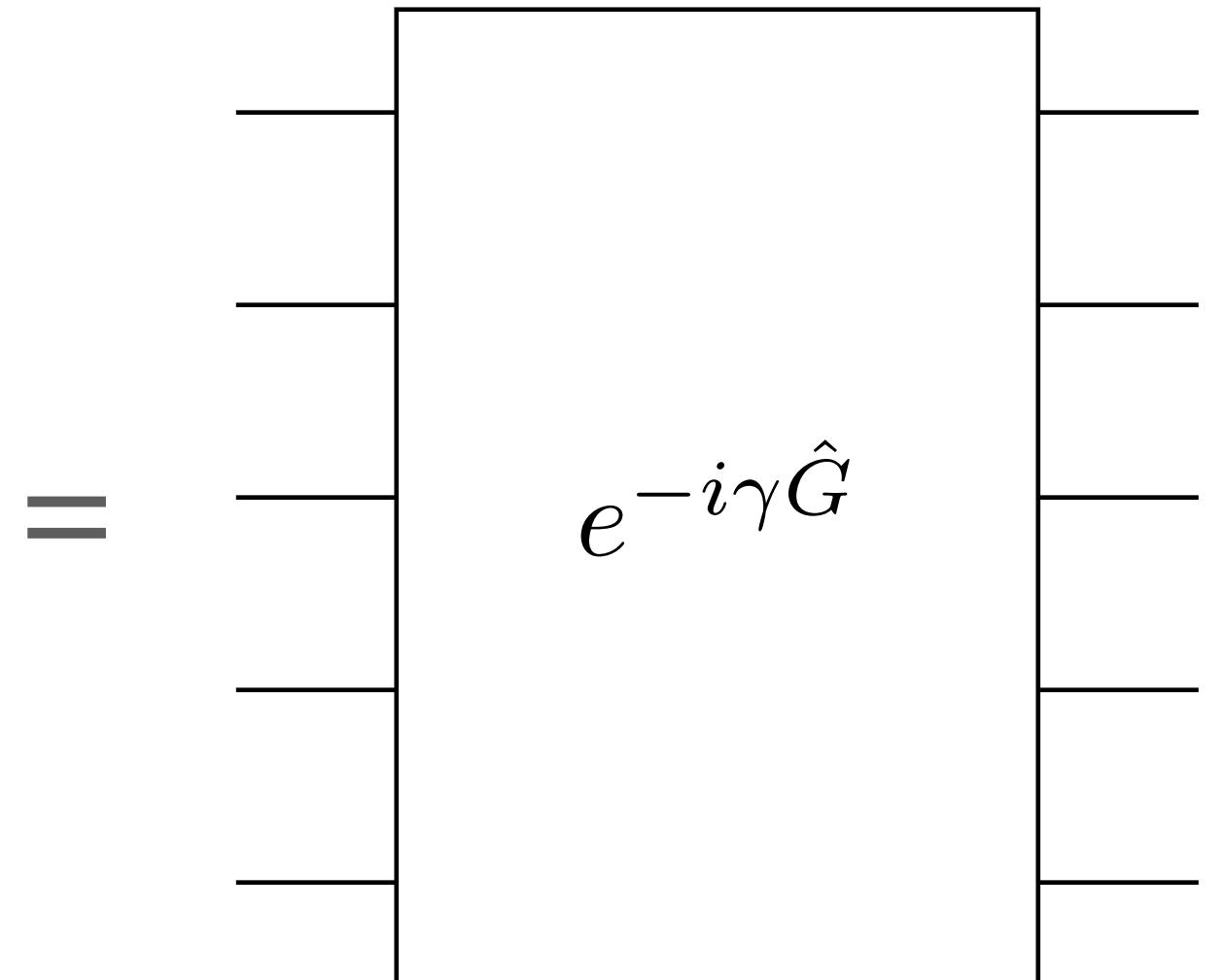
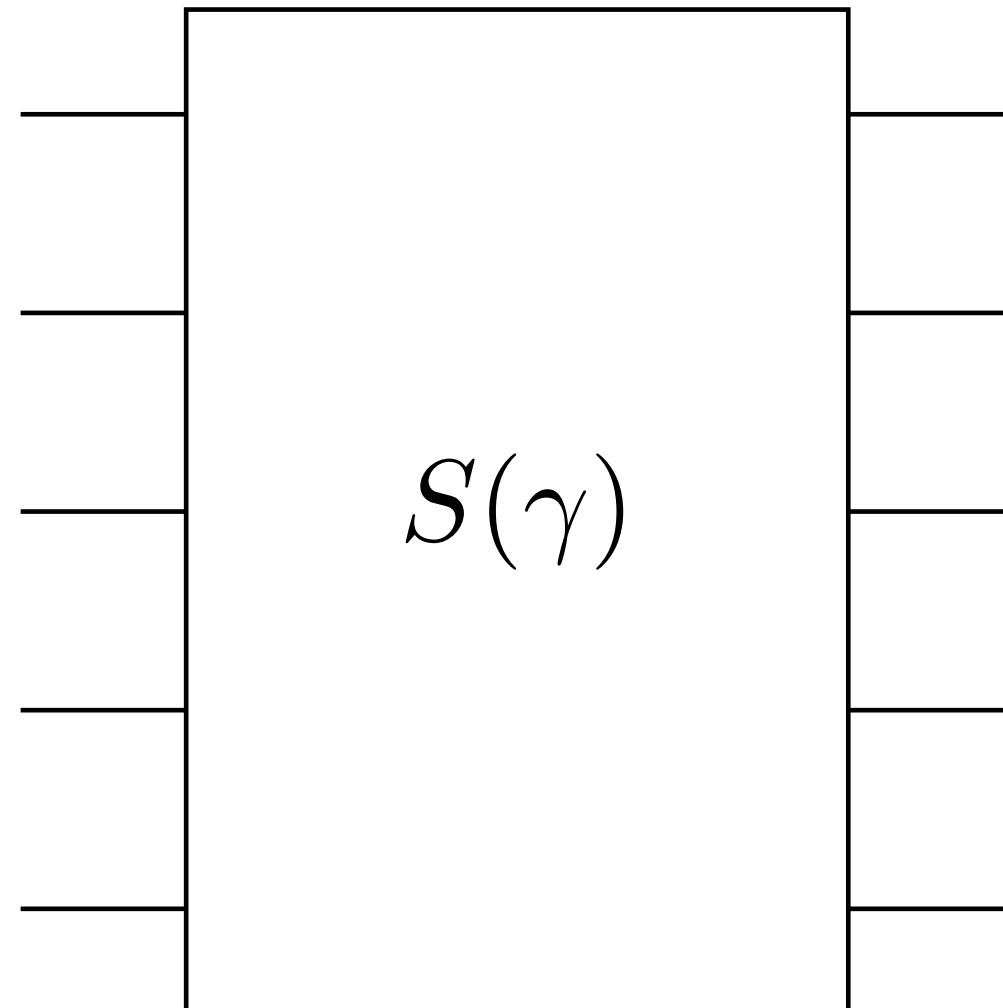
Circuit de mixage



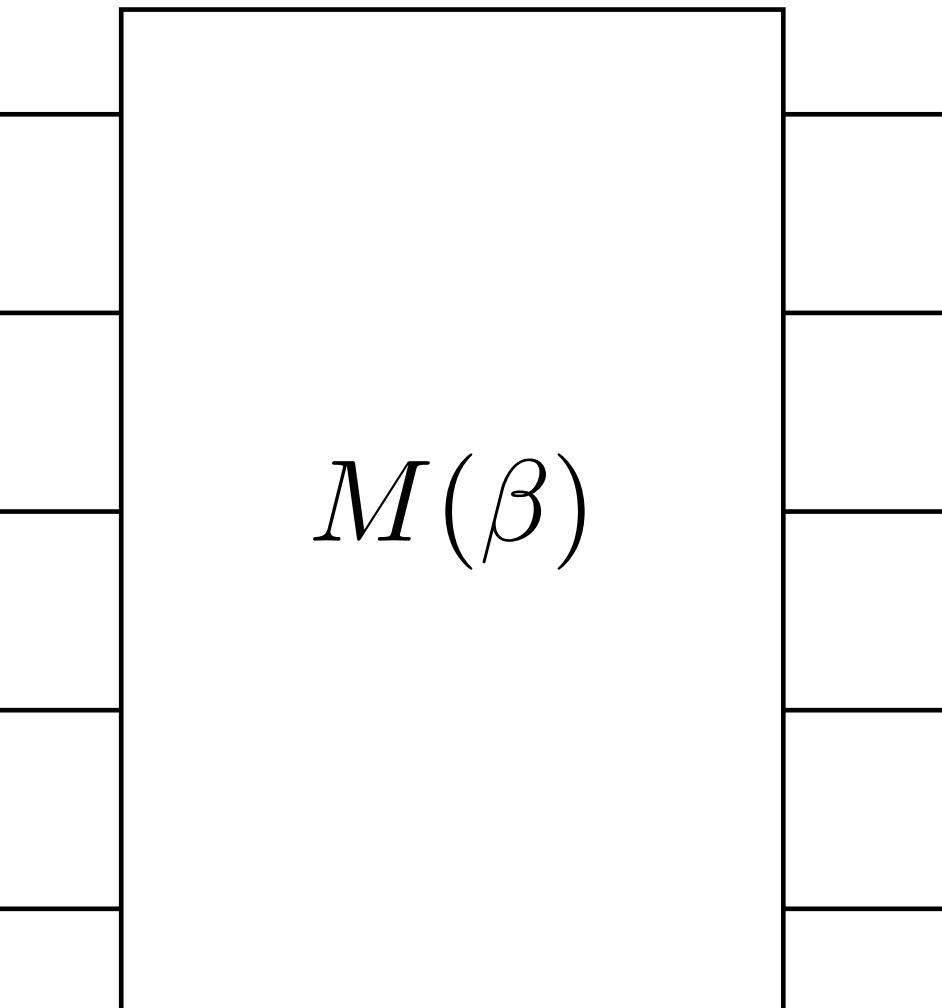
QAOA

Structure du circuit quantique

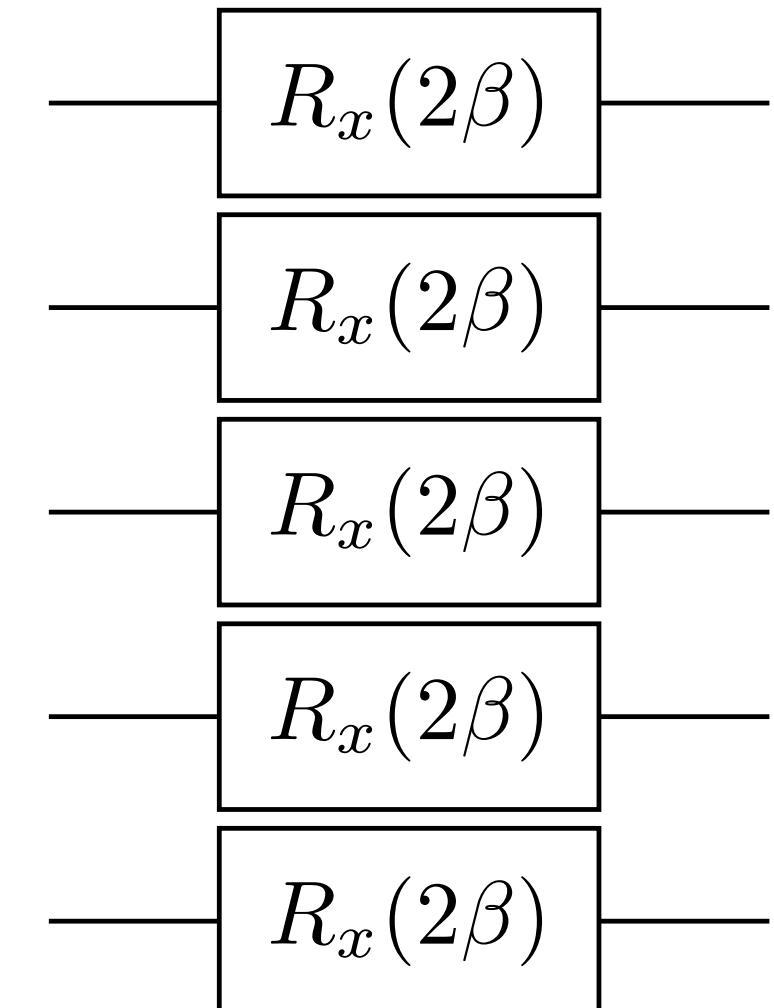
Circuit d'évolution lié au problème



=



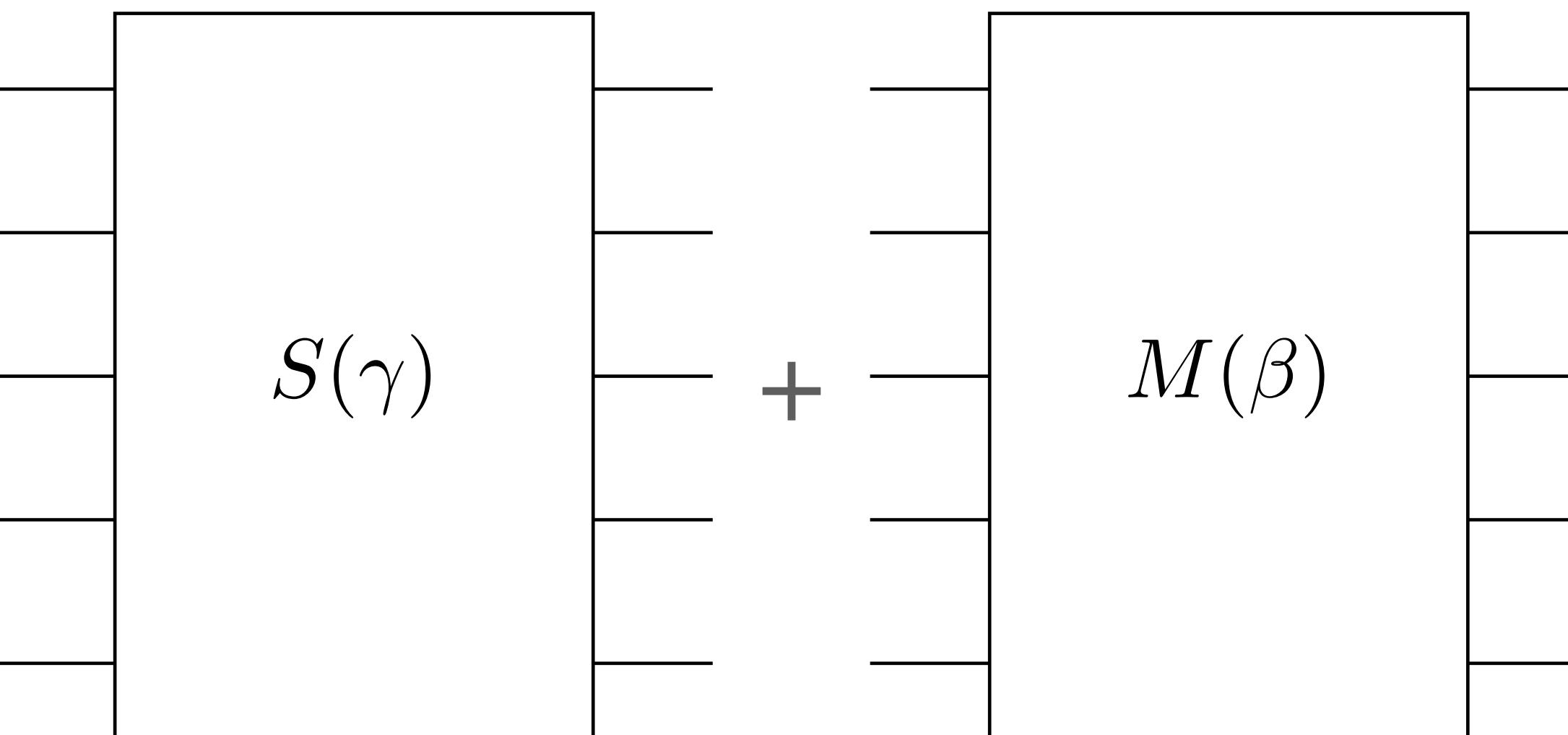
=



Circuit de mixage

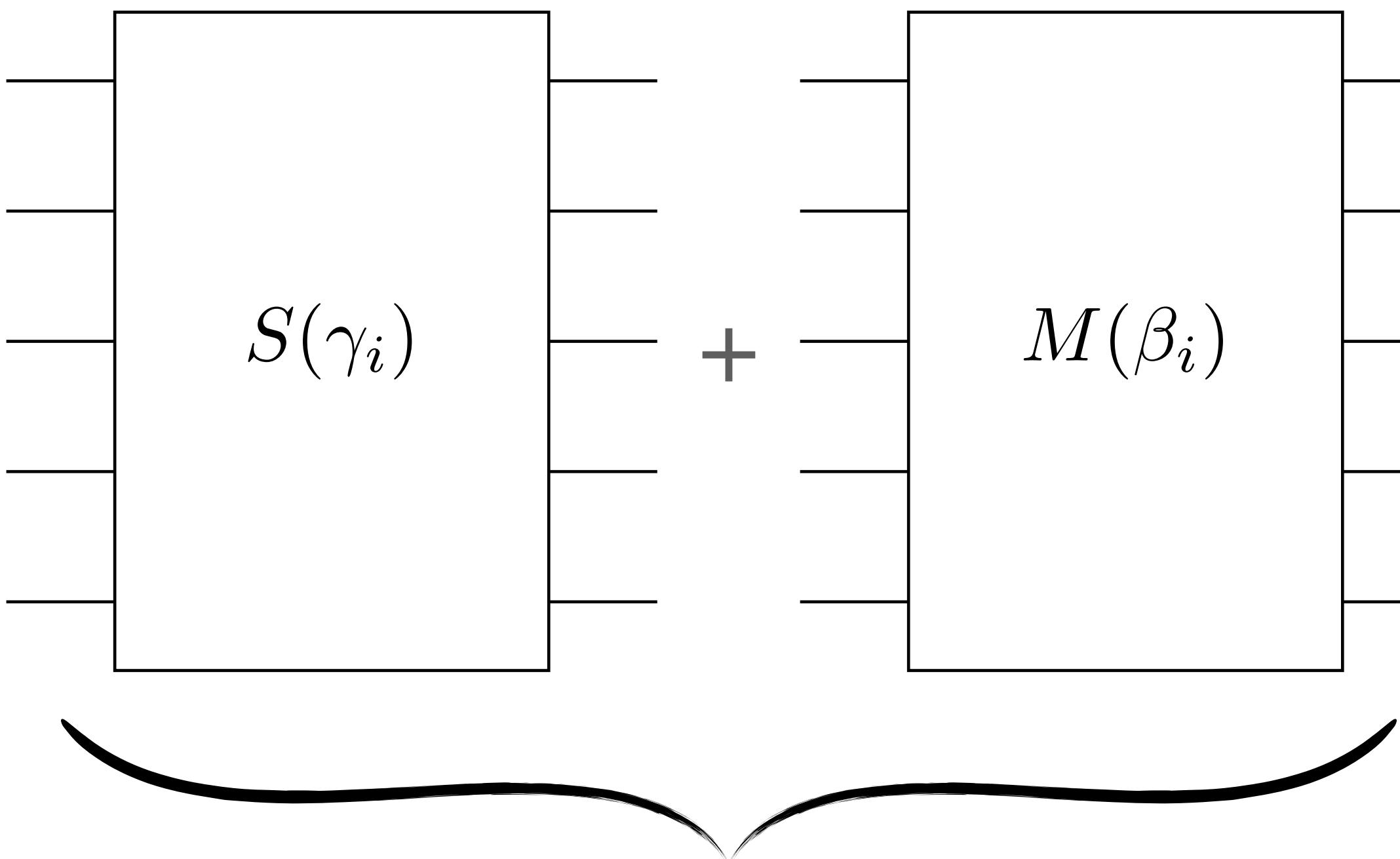
QAOA

Structure du circuit quantique



QAOA

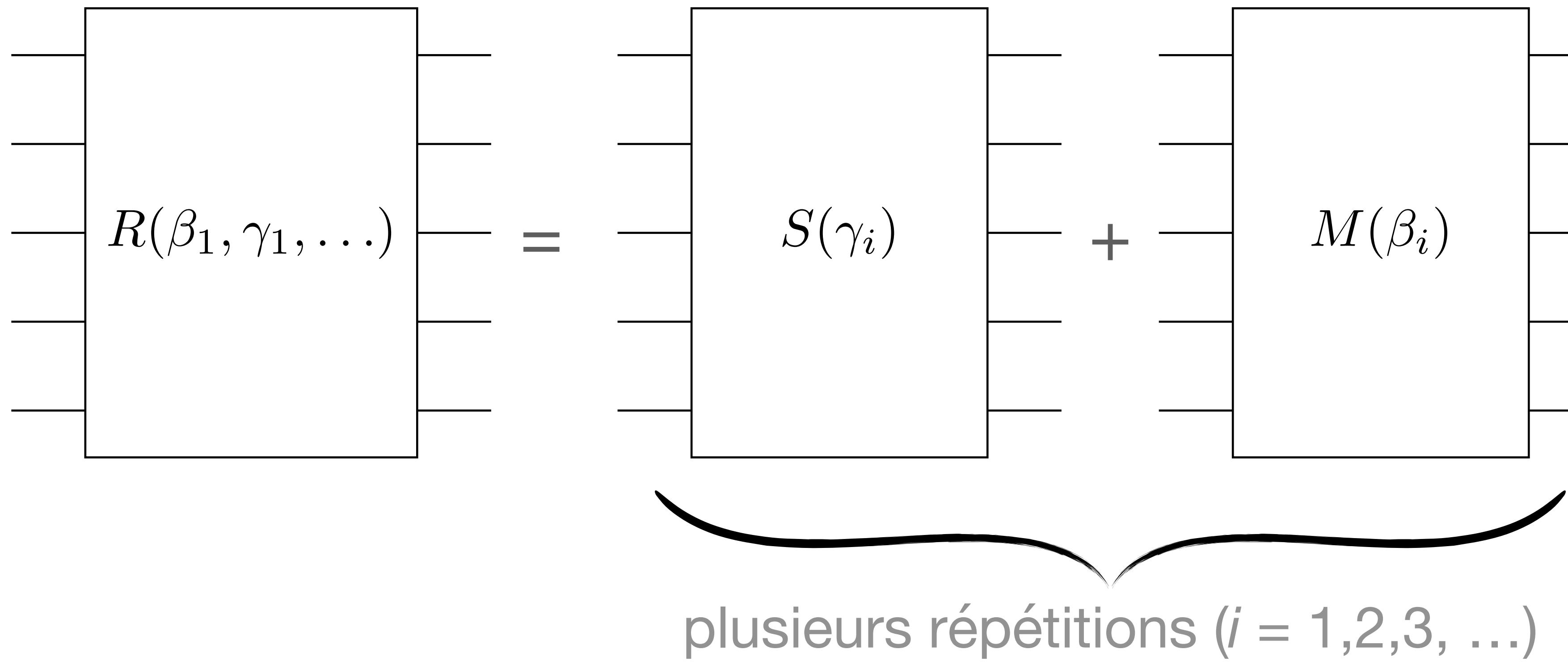
Structure du circuit quantique



plusieurs répétitions ($i = 1, 2, 3, \dots$)

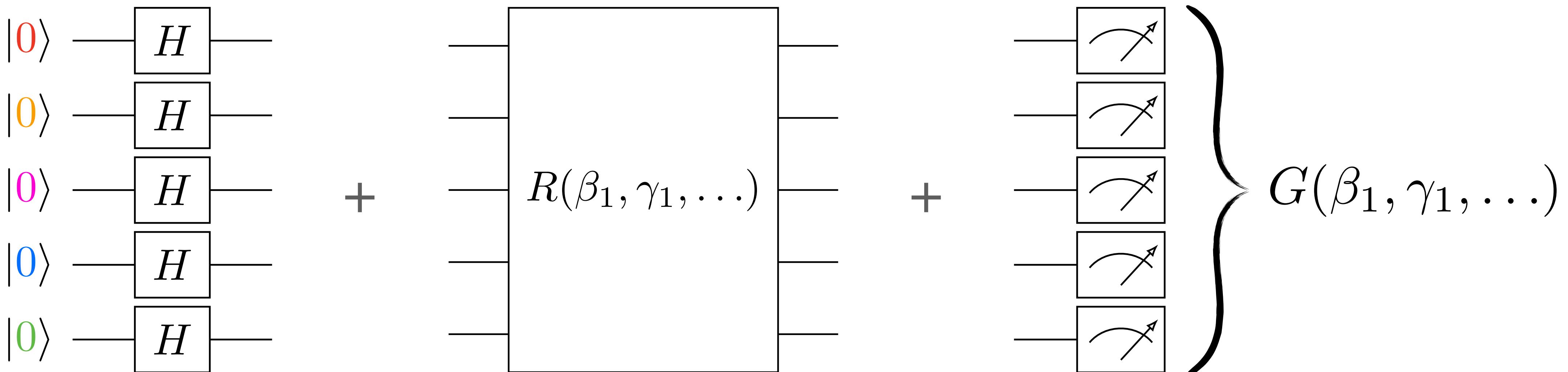
QAOA

Structure du circuit quantique



QAOA

Structure du circuit quantique



QAOA

Boucle d'optimisation

Choix des paramètres

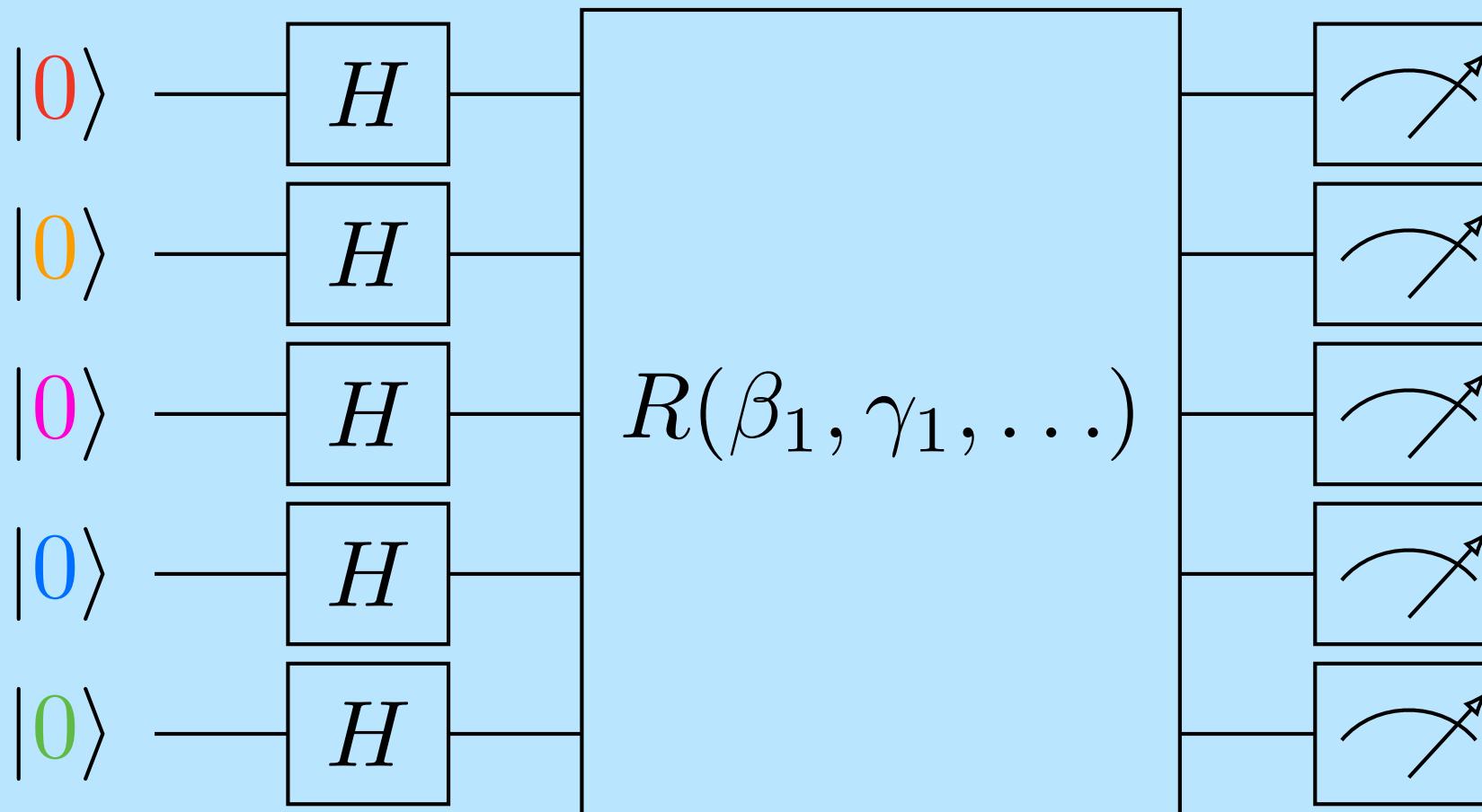
QAOA

Boucle d'optimisation

Choix des paramètres

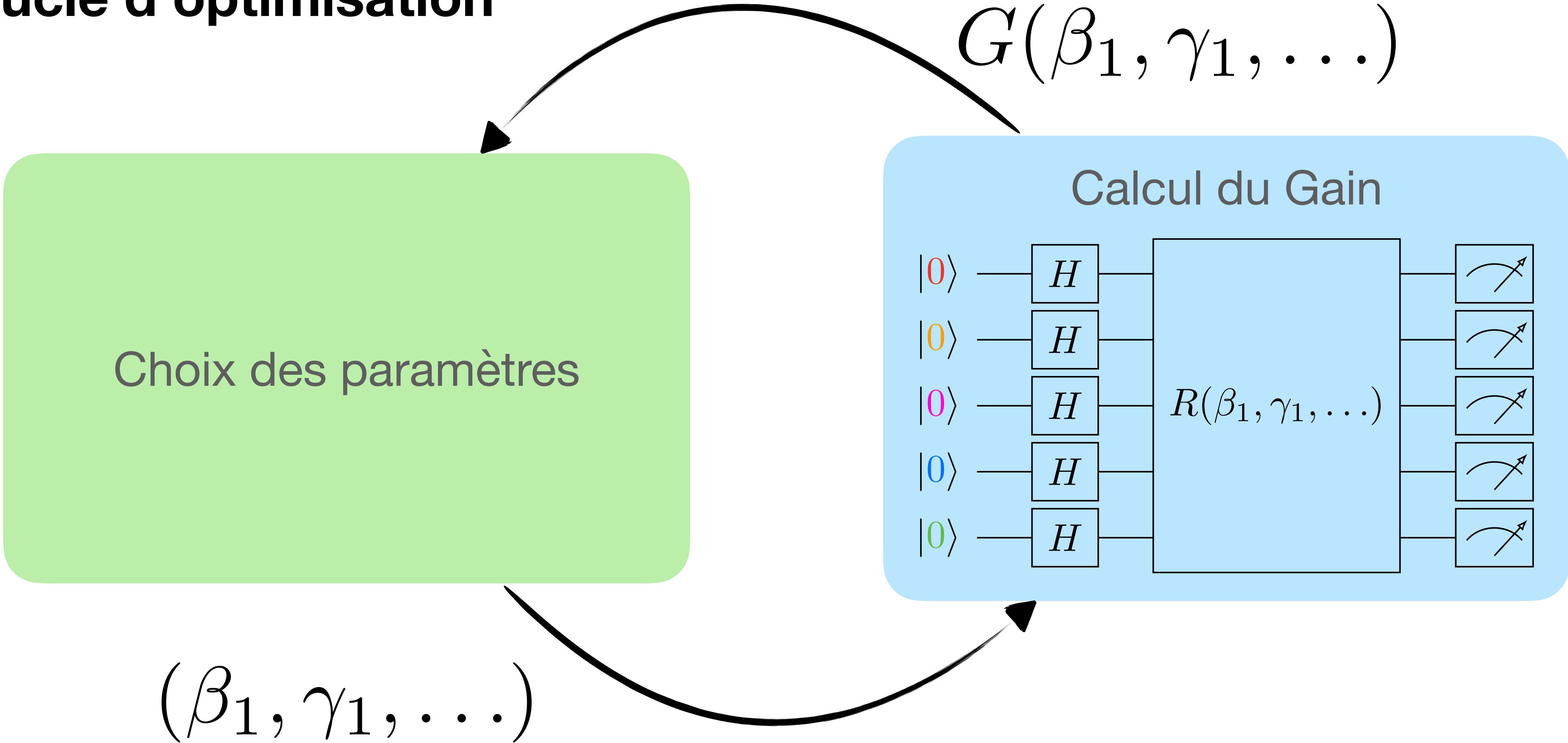
$(\beta_1, \gamma_1, \dots)$

Calcul du Gain



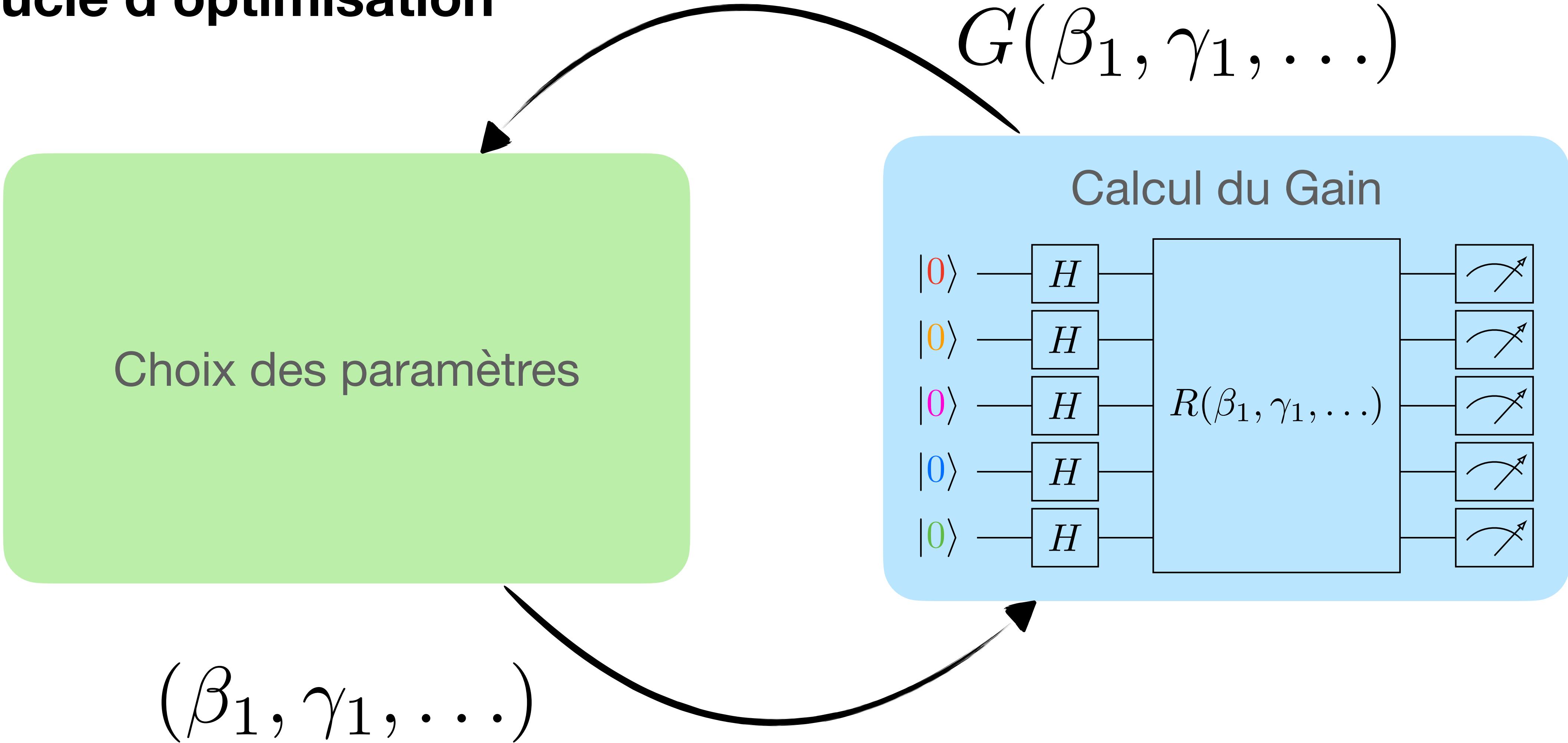
QAOA

Boucle d'optimisation

 $(\beta_1, \gamma_1, \dots)$

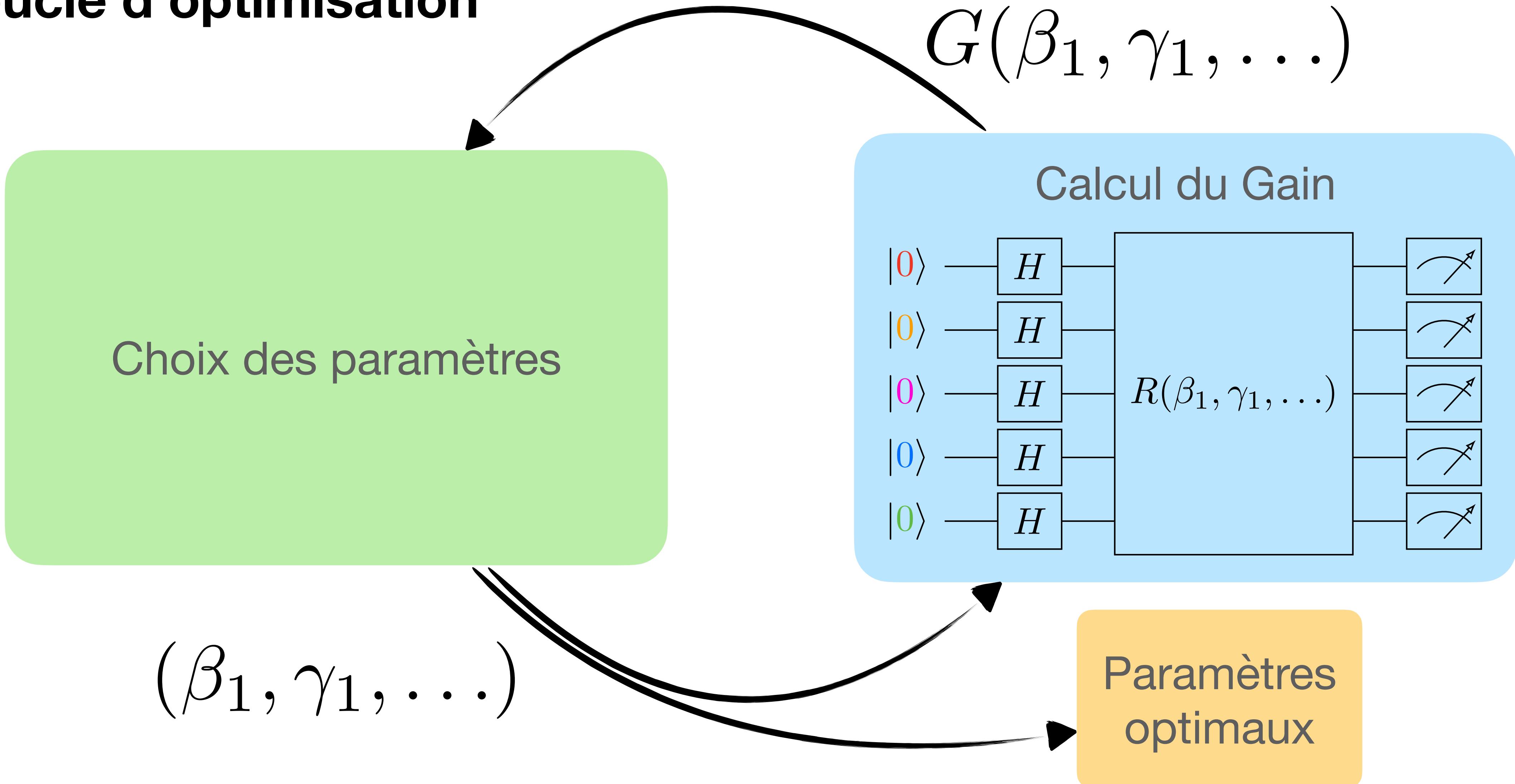
QAOA

Boucle d'optimisation

 $(\beta_1, \gamma_1, \dots)$

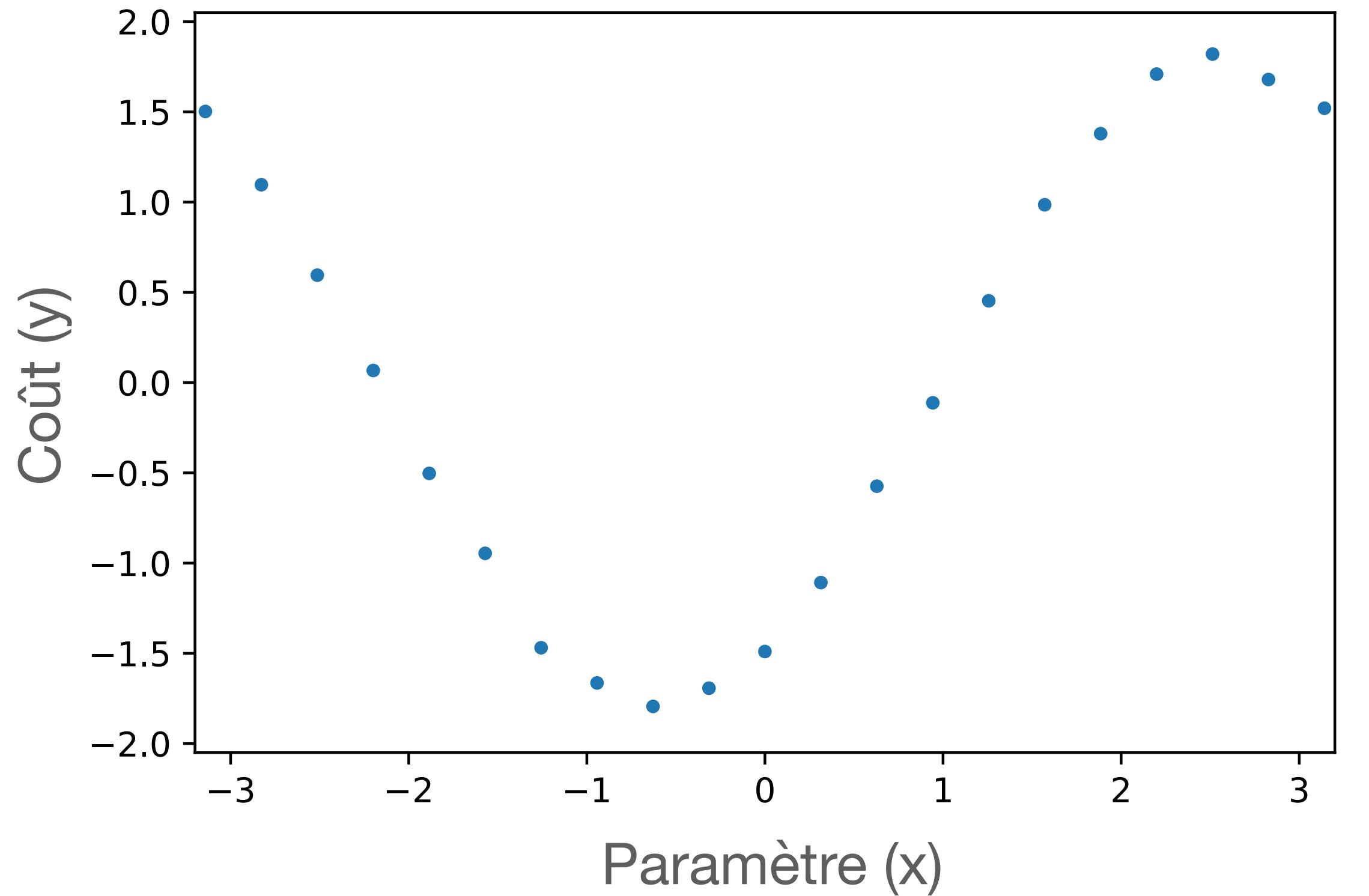
QAOA

Boucle d'optimisation



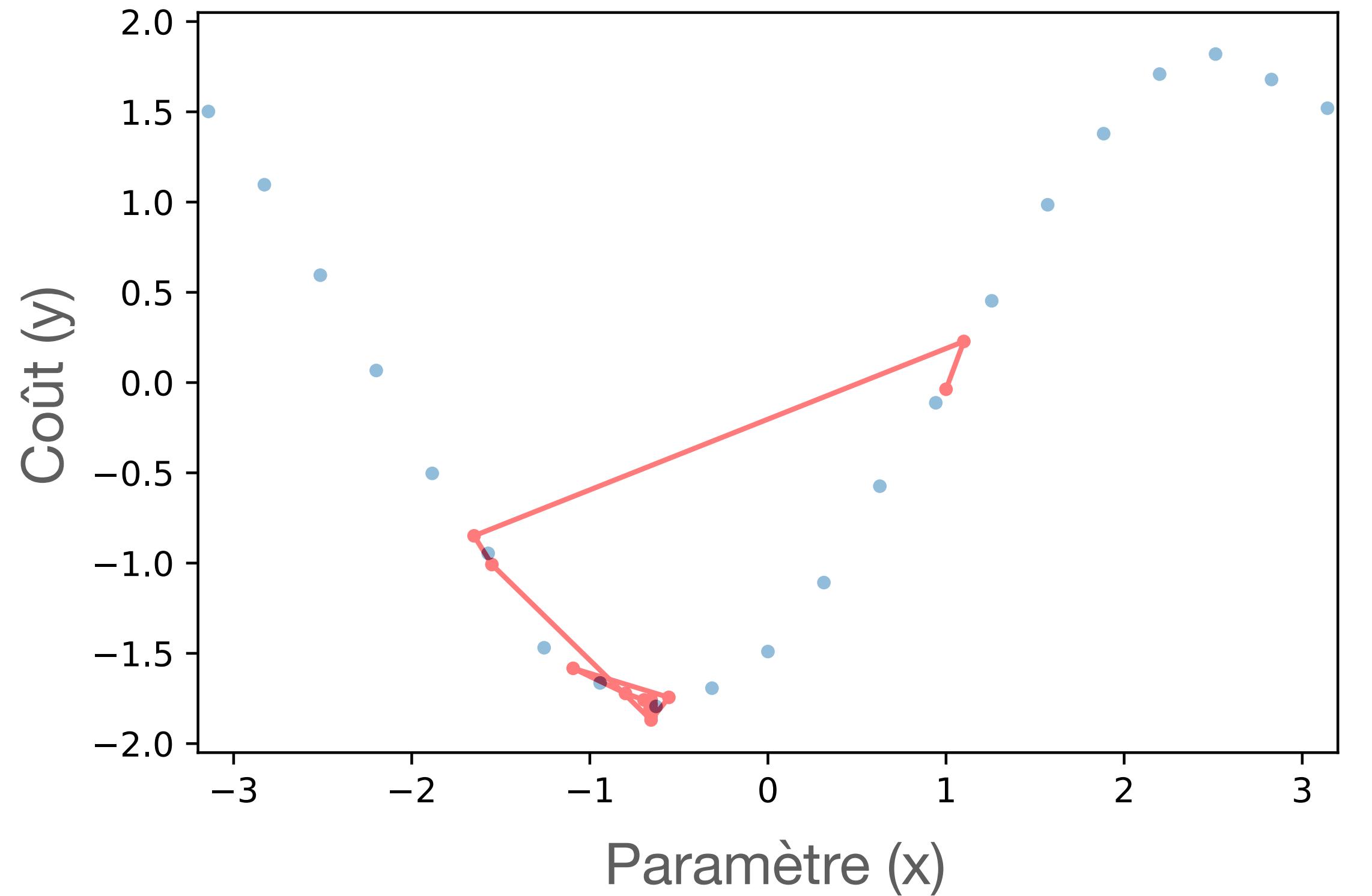
QAOA

Fonctionnement d'un optimiseur



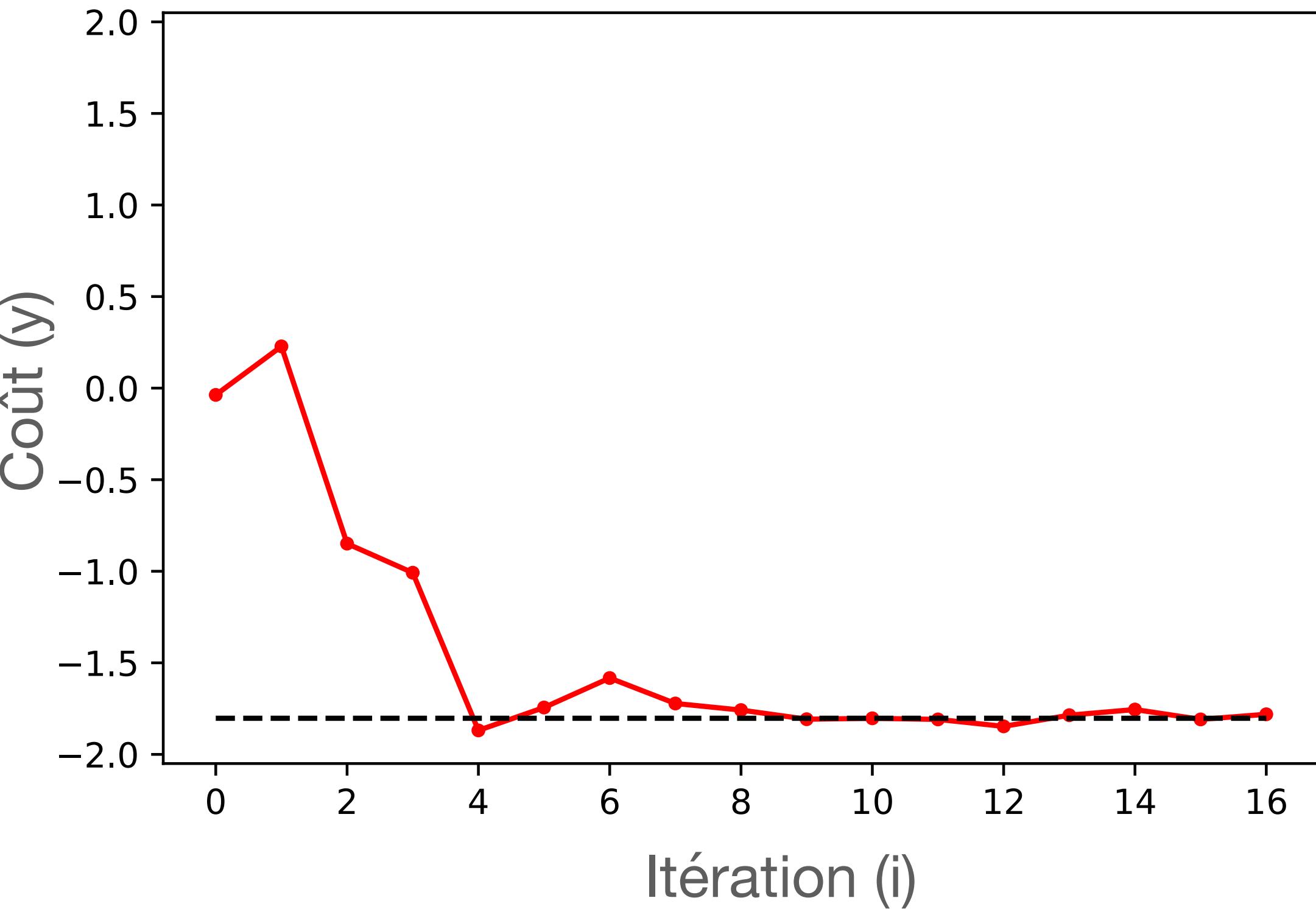
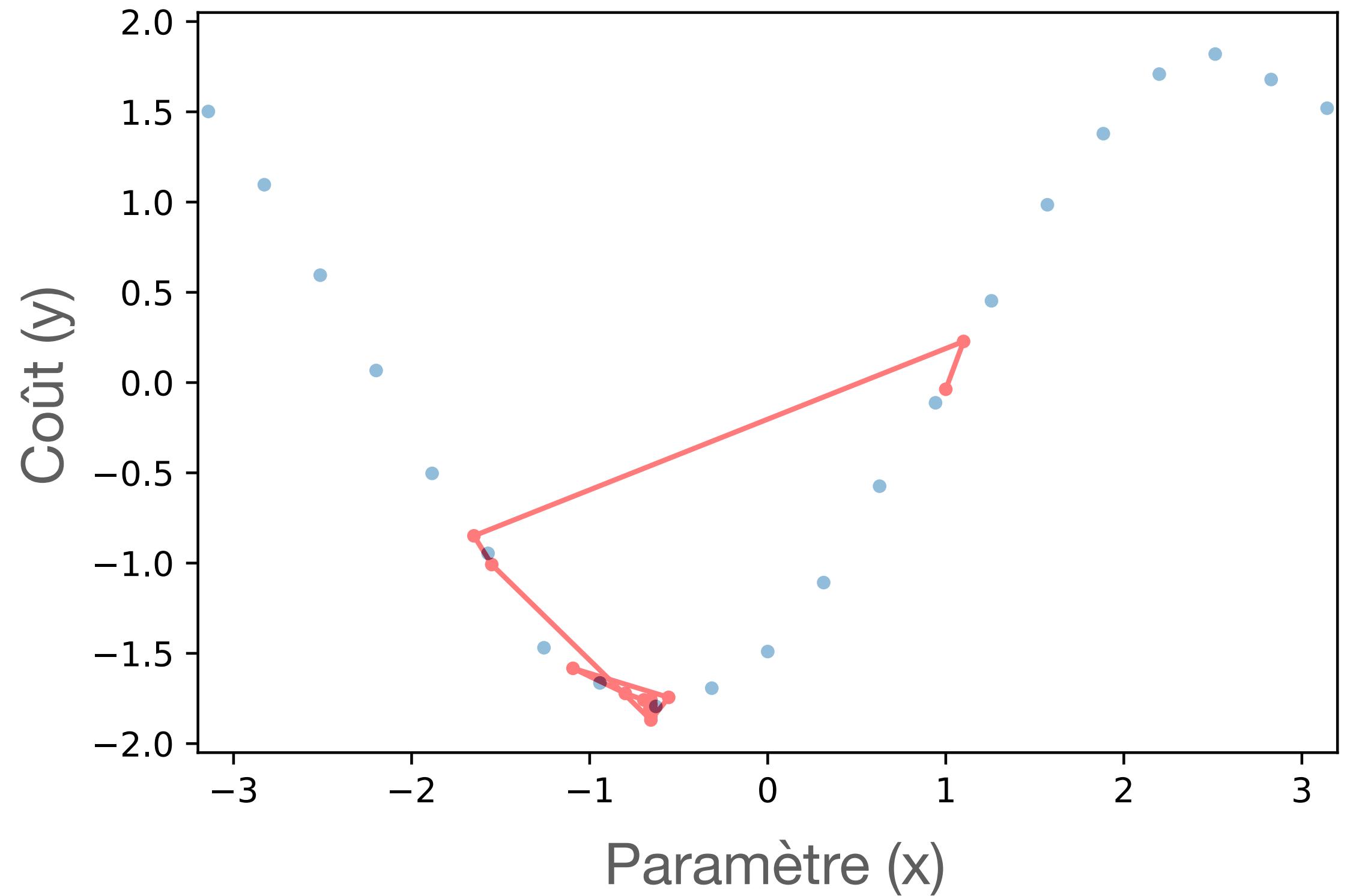
QAOA

Fonctionnement d'un optimiseur



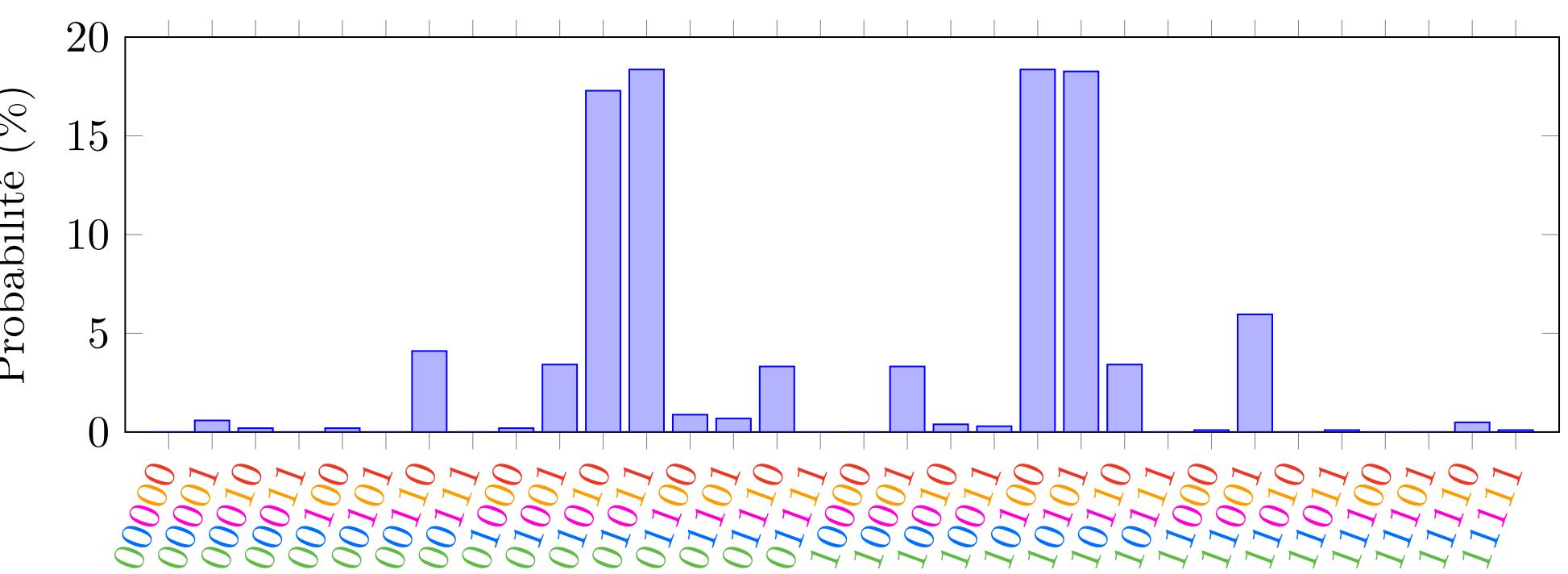
QAOA

Fonctionnement d'un optimiseur

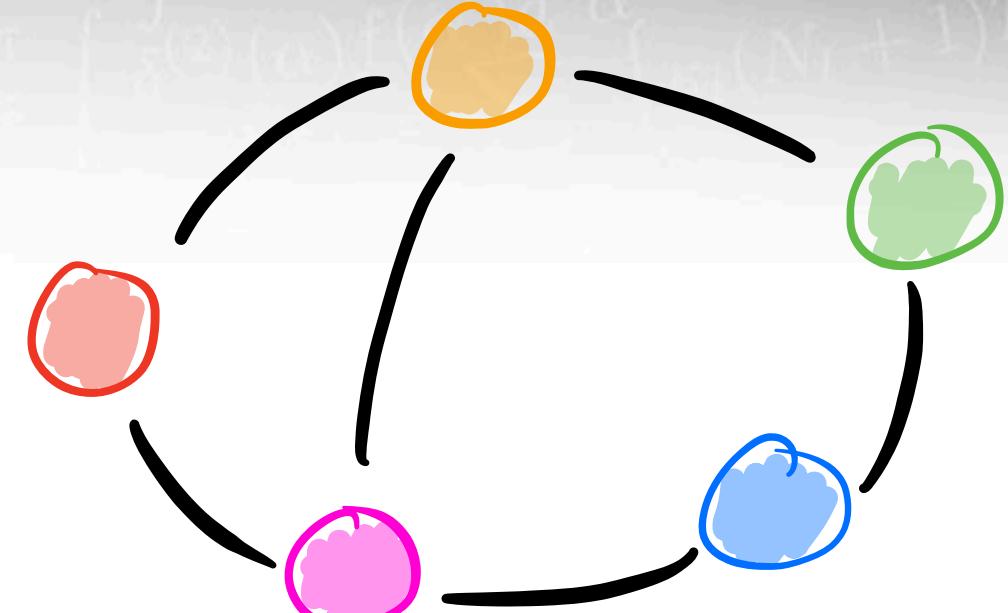
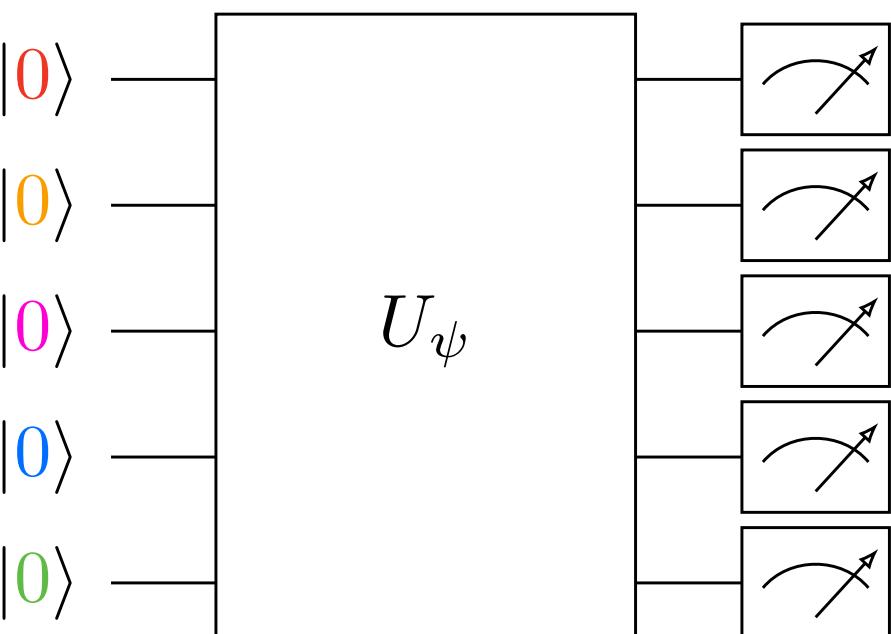


Résumé

- Convertir un problème d'optimisation en graphe + fonction de gain.
- Encoder différentes configurations dans un système de qubits en utilisant la superposition d'états quantiques.
- Écrire un opérateur quantique qui permet d'estimer le gain moyen avec la mesure d'un état quantique.
- Maximiser le gain entraîne une amplification des bonnes solutions.

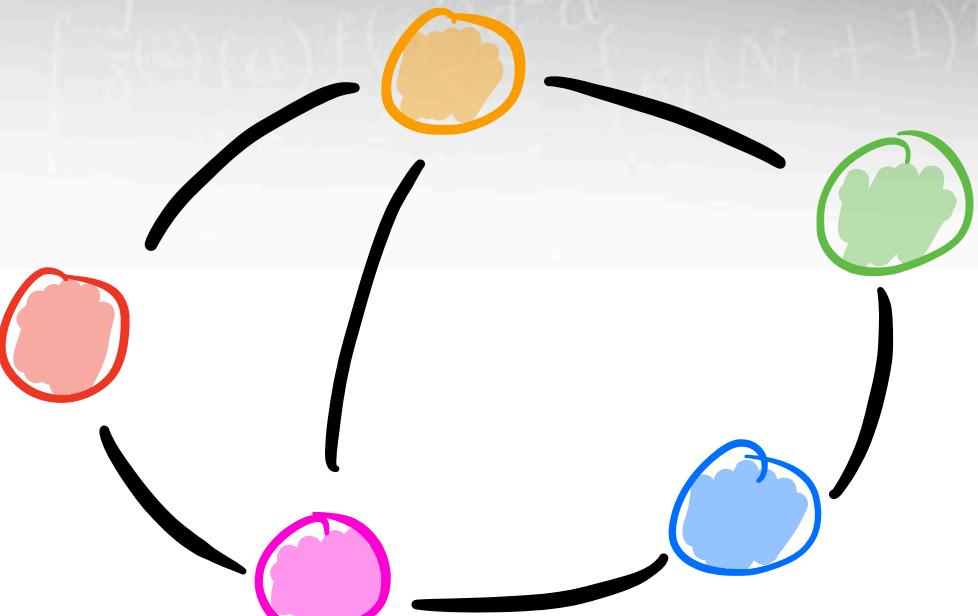
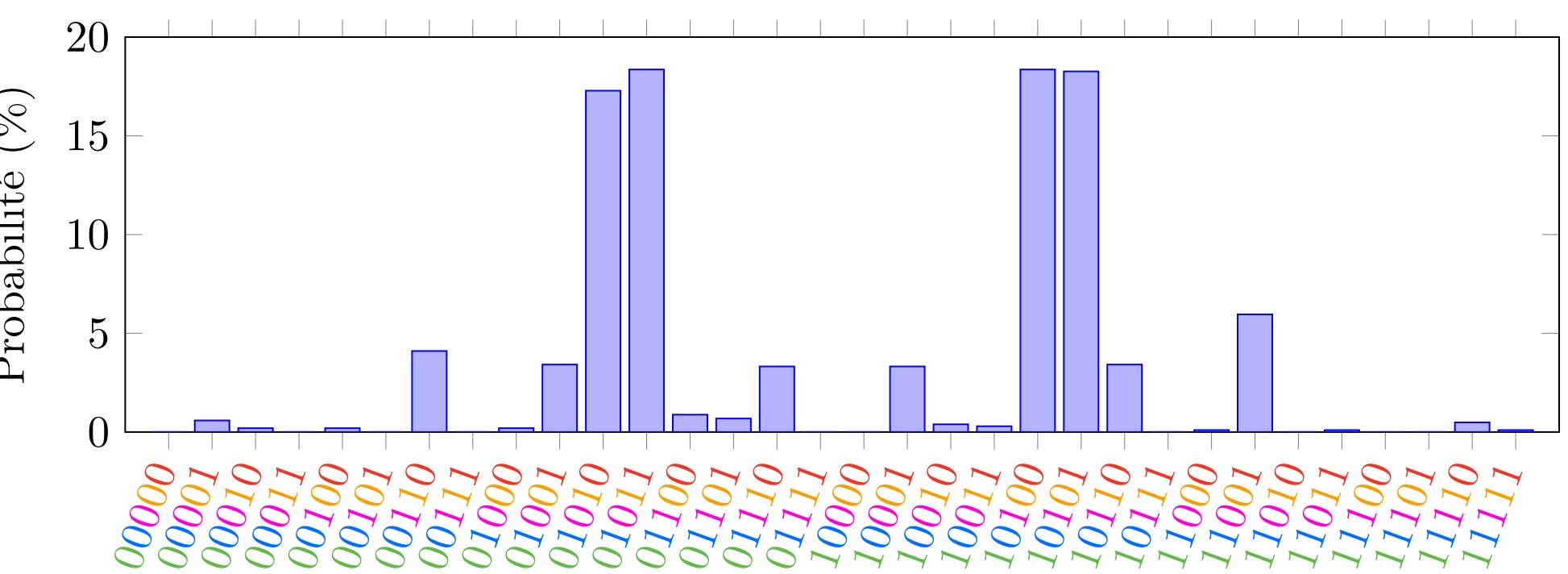


$$|\mathbf{x}\rangle = |x_4 x_3 x_2 x_1 x_0\rangle$$



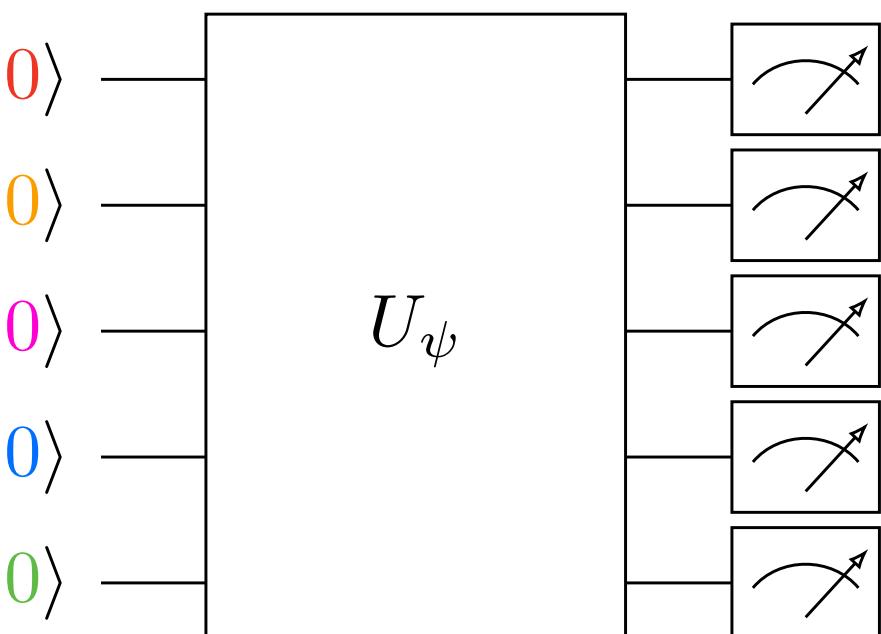
Résumé

- Convertir un problème d'optimisation en graphe + fonction de gain.
- Encoder différentes configurations dans un système de qubits en utilisant la superposition d'états quantiques.
- Écrire un opérateur quantique qui permet d'estimer le gain moyen avec la mesure d'un état quantique.
- Maximiser le gain entraîne une amplification des bonnes solutions.



$$|\mathbf{x}\rangle = |x_4 x_3 x_2 x_1 x_0\rangle$$

$$\hat{I} \hat{I} \hat{I} \hat{Z} \hat{Z}$$



Pause!

Profitez-en pour télécharger le Jupyter Notebook et le fichier Python.
Il devrait être disponible sur le Github.