

Devoir 1 : Transformée de Fourier

Patrick Fournier

17 septembre 2020

Soit $(x_n)_{n=0}^{N-1}, x_n \in \mathbb{C}$ une suite de N nombres complexes. On définit sa transformée de Fourier (discrète) comme la suite de N nombres complexes $(X_k)_{k=0}^{N-1}$ telle que

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi i n k}{N}\right) \quad (1)$$

où i est l'unité imaginaire. Cette dernière est représentée par `i` dans R. Par exemple, les nombres complexes $4 + 3i$ et $2 + i$ s'écrivent `4 + 3i` et `2 + 1i` dans R.

Exercice 1

(a)

Implémentez naïvement (i.e. directement de la définition) eq. (1). Votre fonction doit

1. prendre deux argument, à savoir
 - un vecteur complexe x et
 - un nombre naturel k ;
2. retourner le nombre complexe correspondant X_k ;
3. faire appel à la fonction `sum`;
4. s'appeler `dft1_naive`.

(b)

Implémentez une version itérative de eq. (1). Celle-ci doit respecter les exigences 1 et 2 de la fonction implémentée en (a). De plus, votre fonction doit

1. faire appel à une boucle `for`;
2. s'appeler `dft1_iter`.

(c)

Implémentez une version matricielle de la eq. (1). Celle-ci doit respecter les exigences 1 et 2 de la fonction implémentée en (a). De plus, votre fonction doit

1. faire appel à la fonction `crossprod`;
2. ne contenir qu'une seule ligne de code;
3. ne pas contenir le symbole `”;`;
4. s'appeler `dft1_matrix`.

Notez que le nombre X_k n'est pas la même chose que la matrice 1×1 contenant X_k .

(d)

Implémentez une fonction permettant de calculer la transformée de Fourier d'une suite de nombres complexes $(x_n)_{n=0}^{N-1}$ à partir de l'une des fonctions (a), (b) ou (c). Votre fonction doit respecter les exigences 2 et 3 de (c). De plus, votre fonction doit

1. accepter deux arguments, à savoir
 - une fonction F et
 - un vecteur complexe x ;
2. retourner le vecteur complexe correspondant à $(X_k)_{k=0}^{N-1}$;
3. s'appeler `dft_factory`.

(e)

Implémentez les fonctions `dft_naive`, `dft_iter` et `dft_matrix` utilisant les fonctions `dft1_naive`, `dft1_iter` et `dft1_matrix` afin de calculer la transformée de Fourier d'une suite de nombres complexes $(x_n)_{n=0}^{N-1}$. Vos fonctions doivent respecter les exigences 2 et 3 de (c). De plus, vos fonctions doivent

1. accepter un seul argument, à savoir un vecteur complexe x ;
2. retourner le vecteur complexe correspondant à $(X_k)_{k=0}^{N-1}$.