Devoir 3 : Intégration numérique

Patrick Fournier

30 septembre 2019

Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$, et

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

l'intégrale (définie) de f. Une règle de quadrature régulière est une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{N} w_k f(t_k) = \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{f} \approx I$$

où $t_0 = -1$, $t_N = 1$ et les $t_k, k = 1, \ldots, N-1$ sont espacés régulièrement entre t_0 et t_N. Les w_k et les t_k sont appelés les *poids* et les *points* de quadrature respectivement. En les modifiant, on obtient différentes règles de quadrature. Pour ce devoir, vous allez créer et rendre disponible sur GitHub un package R implémentant plusieurs règles de quadratures. Vous êtes libres de procéder de la manière que vous voulez. Notez toutefois que des points seront alloués à l'élégance de la solution (performance, approche orientée objet...). En particulier, éviter de répéter du code. Évidemment, des points seront alloués pour la documentation appropriée de chacune des fonctions.

Question 1

Écrivez une fonction retournant une partition régulière de l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction devra prendre en argument un entier n et retourner une partition comptant 2^n intervalles.

Question 2

Il serait utile de pouvoir intégrer sur des intervalles autres que $[-1, 1]$. Pour ce faire, on peut utiliser le changement de variable

$$g(t) = \frac{a + b - 2t}{a - b}$$

où a et b sont les bornes d'intégration inférieure et supérieure respectivement. Écrivez une fonction effectuant cela pour a et b arbitraires.

Question 3

Une approche classique consiste à procéder, dans un premier temps, à l'interpolation linéaire des points de quadrature ; c'est cette interpolation que l'on intègre par la suite. Il s'agit de la *règle du trapèze*. Les poids sont définis par

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N}, \quad w_k = \frac{2}{N}, k = 1, \ldots, N-1$$

Implémentez cette règle pour une fonction f, un intervalle $[a, b]$ et un nombre d'intervalles $N = 2^n$ arbitraires.

Question 4

Comme elle est basée sur des interpolations linéaires, la méthode du trapèze peut sembler assez simpliste. Toutefois, une de ses forces est qu'elle peut facilement s'adapter à la fonction à intégrer. L'idée est la suivante : pour intégrer la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ avec une tolérance ϵ,

```
1 : Fixer n ← 0
2 : Calculer la quadrature de f en utilisant N = 2^n intervalles. Stocker le résultat dans q.
3 : Fixer n ← n + 1.
4 : Calculer la quadrature de f en utilisant N = 2^n intervalles. Stocker le résultat dans q'.
5 : if |q − q'| < ϵ then
6 :     Retourner q'.
7 : end if
8 : Aller à 2.
```

Une valeur de ϵ de l'ordre de 10^{-10} devrait être suffisante dans la majorité des cas. L'algorithme ci-dessus se prête à une multitude d'optimisation. En particulier, plusieurs calculs peuvent être réutilisés d'étape en étape. À vous de jouer !

Question 5

Une approche quelque peu différente est connue sous le nom d'intégration Monte Carlo. Un cas particulièrement simple sur $[-1, 1]$ est celui où les poids sont donnés par

$$w_0 = \ldots = w_N = \frac{2}{N+1}.$$

Les points de quadrature sont alors tirés uniformément sur l'intervalle d'intégration. Implémentez cette règle pour un N arbitraire.

Question 6

Comparez les deux approches pour deux fonctions “faciles” à intégrer et deux fonctions “difficiles”. Faites vos recherches !