

Devoir 1 : Algèbre

Patrick Fournier

14 septembre 2021

Répondez aux questions en complétant le fichier `solution.R`. Les "fonctions à utiliser" sont de simples indices. N'hésitez pas à consulter la documentation de R!

Exercice 1

La fonction gamma p -variée est définie comme

$$\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{k=1}^p \Gamma\left(x - \frac{k-1}{2}\right)$$

où Γ est la fonction gamma standard. Implémentez cette fonction. *Fonctions à utiliser : `gamma` et `prod`.*

Exercice 2

Soient $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ symétrique définie positive et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$. On peut montrer que

$$|\mathbf{M} + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top| = (1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x})d.$$

où $d = |\mathbf{M}|$. Par ailleurs, soit $\mathbf{M} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}$ la décomposition de Cholesky de \mathbf{M} . On a que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} = \|(\mathbf{R}^{-1})^\top \mathbf{x}\|^2.$$

Écrivez une fonction calculant $|\mathbf{M} + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top|$ étant donné \mathbf{x} , d et \mathbf{R} sans inverser \mathbf{R} . Pour ce faire, utilisez le fait que $(\mathbf{R}^{-1})^\top \mathbf{x}$ est la solution de

$$\mathbf{R}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

et que \mathbf{R} est triangulaire supérieure. *Fonctions à utiliser : `crossprod` et `backsolve`.*

Exercice 3

La distribution de Wishart a pour support l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives. Sa fonction de densité est

$$f(\mathbf{M}) = \frac{|\mathbf{M}|^{(m-p-1)/2} \exp(-1/2 \operatorname{tr}(\mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{M}))}{2^{mp/2} |\mathbf{\Sigma}|^{m/2} \Gamma_p(m/2)}$$

où $\mathbf{M}, \mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $m > p - 1$. Il est facile de voir que si \mathbf{M} est symétrique définie positive, $\mathbf{M} + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ l'est aussi. Écrivez une fonction échantillonnant, étant donné \mathbf{M} , m et $\mathbf{\Sigma}$, une suite de matrices iid. $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ où

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M} + \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$$

avec $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Id}_p)$. Pour chaque matrice \mathbf{M}_k échantillonnée, $f(\mathbf{M}_k)$ devra aussi être retourné. De plus,

1. Vous avez le droit d'inverser $\mathbf{\Sigma}$ (une seule fois...);
2. Vous devez utiliser les fonctions programmées pour les deux exercices précédents au moins une fois chacune.

Soyez le plus efficace possible! *Fonctions à utiliser : `sum`, `diag`, `rnorm`.*