Devoir 1 : Algèbre

Patrick Fournier

17 septembre 2021

Répondez aux questions en complétant le fichier `solution.R`. Les "fonctions à utiliser" sont de simples indices. N'hésitez pas à consulter la documentation de R !

Exercice 1

La fonction gamma p-variée est définie comme

$$\Gamma_p(x) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\left(x - \frac{k-1}{2}\right)$$

où Γ est la fonction gamma standard. Implémentez cette fonction. *Fonctions à utiliser :* `gamma` *et* `prod`.

Exercice 2

Soient $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ symmétrique définie positive et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$. On peut montrer que

$$|\boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\intercal| = (1 + \boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{x})d.$$

où $d = |\boldsymbol{M}|$. Par ailleurs, soit $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^\intercal \boldsymbol{R}$ la décomposition de Cholesky de $\boldsymbol{M}$. On a que

$$\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{x} = ||(\boldsymbol{R}^{-1})^\intercal \boldsymbol{x}||^2.$$

Écrivez une fonction calculant $|\boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\intercal|$ étant donné $\boldsymbol{x}$, d et $\boldsymbol{R}$ **sans inverser** $\boldsymbol{R}$. Pour ce faire, utilisez le fait que $(\boldsymbol{R}^{-1})^\intercal \boldsymbol{x}$ est la solution de

$$\boldsymbol{R}^\intercal \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

et que $\boldsymbol{R}$ est triangulaire supérieure. *Fonctions à utiliser :* `crossprod` *et* `backsolve`.

Exercice 3

La distribution de Wishart a pour support l'ensemble des matrices symmétriques semi-définies positives. Sa fonction de densité est

$$f(\boldsymbol{M}) = \frac{|\boldsymbol{M}|^{(m-p-1)/2} \exp(-1/2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{M}))}{2^{mp/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{m/2} \Gamma_p(m/2)}$$

où $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $m > p - 1$. Il est facile de voir que si $\boldsymbol{M}$ est symmétrique définie positive, $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\intercal$ l'est aussi. Écrivez une fonction échantillonant, étant donné $\boldsymbol{M}$, m et $\boldsymbol{\Sigma}$, une suite de matrices iid. $\boldsymbol{M}_1, \ldots, \boldsymbol{M}_n$ où

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\intercal$$

avec $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Id}_p)$. Pour chaque matrice $\boldsymbol{M}_k$ échantillonnée, $f(\boldsymbol{M}_k)$ devra aussi être retourné. De plus,

1. Vous avez le droit d'inverser $\boldsymbol{\Sigma}$ (une seule fois...) ;
2. Vous devez utiliser les fonctions programmées pour les deux exercices précédents au moins une fois chacune.

Soyez le plus efficace possible ! *Fonctions à utiliser :* `sum`, `diag`, `rnorm`.