

Devoir 3 : Intégration numérique

Patrick Fournier

30 septembre 2019

Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$, et

$$I = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

l'intégrale (définie) de f . Une règle de quadrature régulière est une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^N w_k f(t_k) = \mathbf{w}^\top \mathbf{f} \approx I$$

où $t_0 = -1$, $t_N = 1$ et les $t_k, k = 1, \dots, N-1$ sont espacés régulièrement entre t_0 et t_N . Les w_k et les t_k sont appelés les *poids* et les *points* de quadrature respectivement. En les modifiant, on obtient différentes règles de quadrature. Pour ce devoir, vous allez créer et rendre disponible sur GitHub un package R implémentant plusieurs règles de quadratures. Vous êtes libres de procéder de la manière que vous voulez. Notez toutefois que des points seront alloués à l'élégance de la solution (performance, approche orientée objet...). En particulier, évitez de répéter du code. Évidemment, des points seront alloués pour la documentation appropriée de chacune des fonctions.

Question 1

Écrivez une fonction retournant une partition régulière de l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction devra prendre en argument un entier n et retourner une partition comptant 2^n intervalles.

Question 2

Il serait utile de pouvoir intégrer sur des intervalles autres que $[-1, 1]$. Pour ce faire, on peut utiliser le changement de variable

$$g(t) = \frac{a+b-2t}{a-b}$$

où a et b sont les bornes d'intégration inférieure et supérieure respectivement. Écrivez une fonction effectuant cela pour a et b arbitraires.

Question 3

Une approche classique consiste à procéder, dans un premier temps, à l'interpolation linéaire des points de quadrature ; c'est cette interpolation que l'on intègre par la suite. Il s'agit de la *règle du trapèze*. Les poids sont définis par

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N}, \quad w_k = \frac{2}{N}, k = 1, \dots, N-1$$

Implémentez cette règle pour une fonction f , un intervalle $[a, b]$ et un nombre d'intervalles $N = 2^n$ arbitraires.

Question 4

Comme elle est basée sur des interpolations linéaires, la méthode du trapèze peut sembler assez simpliste. Toutefois, une de ses forces est qu'elle peut facilement s'adapter à la fonction à intégrer. L'idée est la suivante : pour intégrer la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ avec une tolérance ϵ ,

```

1 : Fixer  $n \leftarrow 0$ 
2 : Calculer la quadrature de  $f$  en utilisant  $N = 2^n$  intervalles. Stocker le résultat dans  $q$ .
3 : Fixer  $n \leftarrow n + 1$ .
4 : Calculer la quadrature de  $f$  en utilisant  $N = 2^n$  intervalles. Stocker le résultat dans  $q'$ .
5 : if  $|q - q'| < \epsilon$  then
6 :   Retourner  $q'$ .
7 : end if
8 : Aller à 2.

```

Une valeur de ϵ de l'ordre de 10^{-10} devrait être suffisante dans la majorité des cas. L'algorithme ci-dessus se prête à une multitude d'optimisation. En particulier, plusieurs calculs peuvent être réutilisés d'étape en étape. À vous de jouer !

Question 5

Une approche quelque peu différente est connue sous le nom d'intégration Monte Carlo. Un cas particulièrement simple sur $[-1, 1]$ est celui où les poids sont donnés par

$$w_0 = \dots = w_N = \frac{2}{N+1}.$$

Les points de quadrature sont alors tirés uniformément sur l'intervalle d'intégration. Implémentez cette règle pour un N arbitraire.

Question 6

Comparez les deux approches pour deux fonctions “faciles” à intégrer et deux fonctions “difficiles”. Faites vos recherches !