Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт информационных технологий и анализа данных

ОТЧЕТ

По лабораторной работе по дисциплине

Основы теории управления

Лабораторная работа №5

«Исследование автоматической системы с запаздыванием»

Вариант 16

Выполнил
Студент группы АСУб 17-1
Ушаков А.Э.

Проверила:
Серышева И.А.

1 Заданная структурная схема автоматической системы с заданными значениями параметров

Цель работы: ознакомление с автоматическими системами с запаздыванием; моделирование звена запаздывания; устойчивость автоматических систем с запаздыванием; влияние запаздывание на качество переходных процессов.

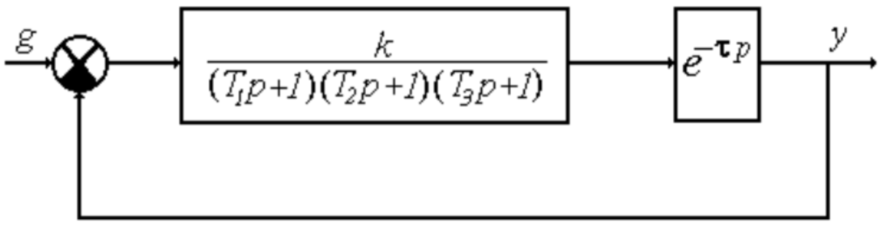

Рис. 1: Структурная схема исследуемой автоматической системы

Значения параметров звена:
$k = 100$
$T_1 = 25$
$T_2 = 0.1$
$T_3 = 0.01$
Звено охватывается единичной отрицательной обратной связью.

2 Описание процесса построения АФЧХ для заданной автоматической системы.

Передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием:

$$W_{\text{р}}(p) = W_1(p)W_{\text{зап}}(p) = \frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}e^{-\tau p} \tag{1}$$

Запаздывающее звено находится в прямой цепи, поэтому передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{р}}(p)}{1+W_{\text{р}}(p)} = \frac{\frac{ke^{-\tau p}}{(T1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1))}}{\frac{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+ke^{-\tau p}}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}} = \frac{ke^{-\tau p}}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+ke^{-\tau p}} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение:

$$(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+ke^{-\tau p} = 0 \tag{3}$$

Нахождение корней характеристического уравнения затруднительно, поэтому для исследования устойчивости системы с запаздыванием будем использовать критерий устойчивости Найквиста.
Найдём устойчивость предельной системы (при $\tau = 0$) в разомкнутом состоянии.

$$W_{\text{пред}}(p) = \frac{k}{(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)} \tag{4}$$

Характеристическое уравнение предельной системы:

$$(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)=0$$
$$\left[\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{T_1}, \\ p_2 &= -\frac{1}{T_2}, \\ p_3 &= -\frac{1}{T_3}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Все корни характеристического уравнения отрицательны, значит предельная система в разомкнутом состоянии устойчива. В данном случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $[-1, j0]$.
Подставим в передаточную функцию разомкнутой системы чисто мнимое значение $p = j\omega$.
Алгебраическая форма:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{k}{(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)(T_3j\omega+1)}e^{-\tau j\omega} = (Re(\omega)+jIm(\omega))e^{-\tau j\omega} \tag{6}$$

Показательная форма:

$$W_{\text{р}}(p) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{-\tau j\omega} = A(\omega)e^{j(\phi(\omega)-\tau\omega)} \tag{7}$$

Где:

$$\begin{gathered} A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega)+Im^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \arctan\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \end{gathered} \tag{8}$$

Звено запаздывания не меняет модуля $A(\omega)$ АФЧХ разомкнутой системы, а вносит лишь дополнительный отрицательный фазовый сдвиг, пропорциональный частоте, причем коэффициентом пропорциональности является время запаздывания τ.
Чтобы найти амплитуду и фазу предельной системы, представим звено в виде 3х последовательных апериодических звеньев первого порядка.

$$\begin{gathered} W_{\text{пред}}(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega)W_3(j\omega) = \frac{k}{T_1j\omega+1} * \frac{1}{T_2j\omega+1} * \frac{1}{T_3j\omega+1} \\ A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) \\ \phi(\omega) = \phi_1(\omega)+\phi_2(\omega) \end{gathered} \tag{9}$$

Амплитуда и фаза 1-го звена:

$$\begin{gathered} A_1(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} \\ \phi_1(\omega) = -\arctan T_1\omega \end{gathered} \tag{10}$$

Амплитуда и фаза 2-го и 3-го звена:

$$\begin{gathered} A_{2,3}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T_{2,3}^2\omega^2}} \\ \phi_{2,3}(\omega) = -\arctan T_{2,3}\omega \end{gathered} \tag{11}$$

Результирующие амплитуда и фаза:

$$\begin{gathered} A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}} \\ \phi(\omega) = -\arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega - \arctan T_3\omega \end{gathered} \tag{12}$$

$$
\begin{cases}
Re(\omega) = A(\omega)\cos\phi(\omega) \\
Im(\omega) = A(\omega)\sin\phi(\omega)
\end{cases}
\tag{13}
$$

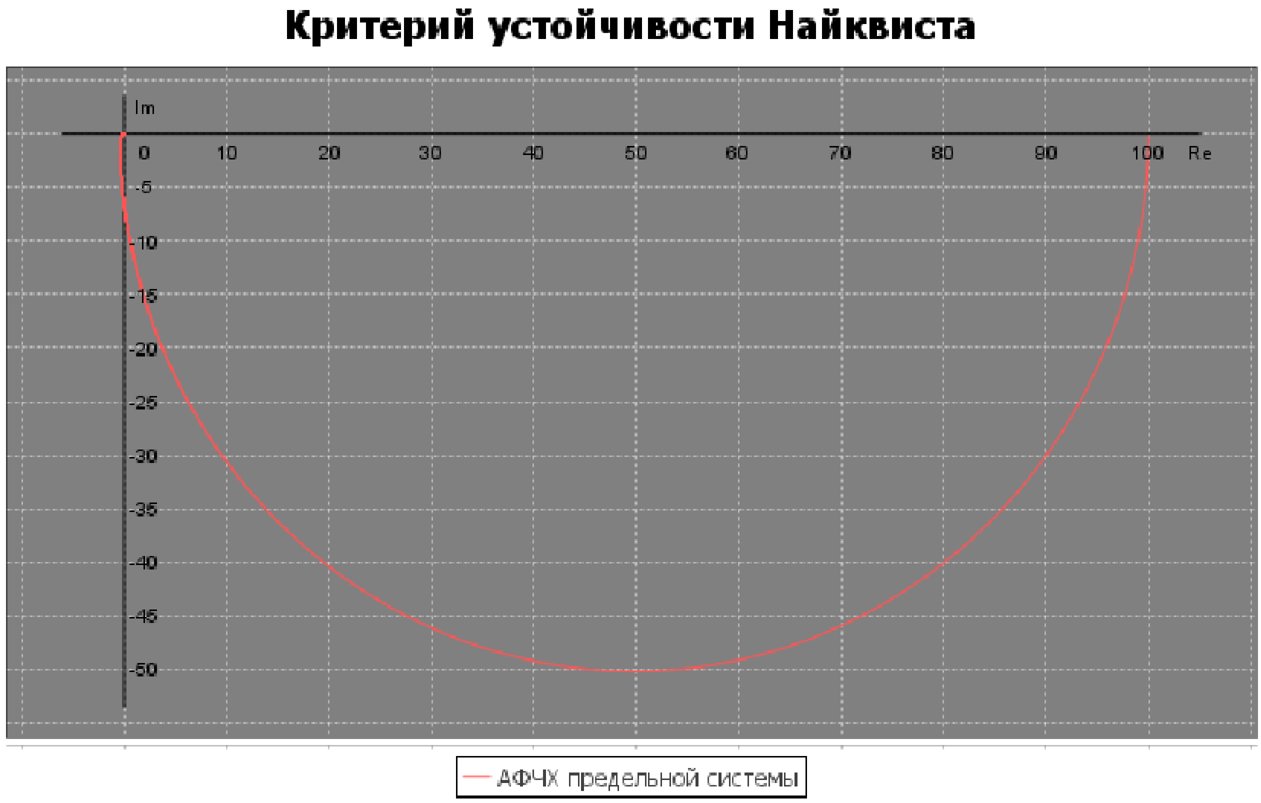

Рис. 2: АФЧХ

График не охватывает точку с координатами $[-1, j0]$, значит система устойчива.

3 Описание процесса определения $\tau_{\text{кр}}$ графическим способом

Рис. 3: Определение $\tau_{\text{кр}}$ графическим способом

Чтобы определить $\tau_{\text{кр}}$ графически, построим окружность единичного радиуса. Точка пересечения годографа $W(j\omega)$ с этой окружностью определяет частоту $\omega_{\text{кр}}$. Время запаздывания $\tau_{\text{кр}}$ определяется по формуле

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{\pi - \phi}{\omega_{\text{кр}}} = \frac{\gamma}{\omega_{\text{кр}}} \tag{14}$$

Значения, вычисленные по графику:

$$\begin{gathered} \omega_{\text{кр}} = 3.746 \\ \phi_{\text{кр}} = -1.9559911 \\ \tau_{\text{кр}} = 0.31606439 \end{gathered} \tag{15}$$

4 Аналитические выражения, с помощью которых определено значение $\tau_{\text{кр}}$

Значения $\tau_{\text{кр}}$ и $\omega_{\text{кр}}$ определяются из уравнения

$$W_{\text{р}}(j\omega_{\text{кр}}) = W_1(j\omega_{\text{кр}})W_{\text{зап}}(j\omega_{\text{кр}}) = 1 \tag{16}$$

Которое можно представить двумя уравнениями:

$$\begin{cases} A(\omega_{\text{кр}}) = 1, \\ \phi(\omega_{\text{крит}}) = \phi_1(\omega_{\text{крит}}) - \tau_{\text{кр}}\omega_{\text{крит}} \end{cases} \tag{17}$$

Приравняем амплитуду к 1:

$$\begin{gathered} A(\omega_{\text{кр}}) = \frac{k}{\sqrt{(1+T_1^2\omega_{\text{кр}}^2)(1+T_2^2\omega_{\text{кр}}^2)(1+T_3^2\omega_{\text{кр}}^2)}} = 1 \\ \frac{k^2}{(1+T_1^2\omega_{\text{кр}}^2)(1+T_2^2\omega_{\text{кр}}^2)(1+T_3^2\omega_{\text{кр}}^2)} = 1 \\ (T_1^2T_2^2\omega_{\text{кр}}^4 + (T_1^2+T_2^2)\omega_{\text{кр}}^2 + 1)(1+T_3^2\omega_{\text{кр}}^2) = k^2 \\ T_1^2T_2^2T_3^2\omega_{\text{кр}}^6 + (T_1^2T_3^2 + T_2^2T_3^2 + T_1^2T_2^2)\omega_{\text{кр}}^4 + (T_1^2+T_2^2+T_3^2)\omega_{\text{кр}}^2 + 1 - k^2 = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

Введём замену $z = \omega_{\text{кр}}^2$ и подставим значения параметров передаточной функции:

$$\begin{gathered} T_1^2T_2^2T_3^2z^3 + (T_1^2T_3^2 + T_2^2T_3^2 + T_1^2T_2^2)z^2 + (T_1^2+T_2^2+T_3^2)z + 1 - k^2 = 0 \\ 0.000625z^3 + 6.3125z^2 + 625.0101z - 9999 = 0 \end{gathered} \tag{19}$$

Для решения этого уравнения был использован сервис allcalc.ru.

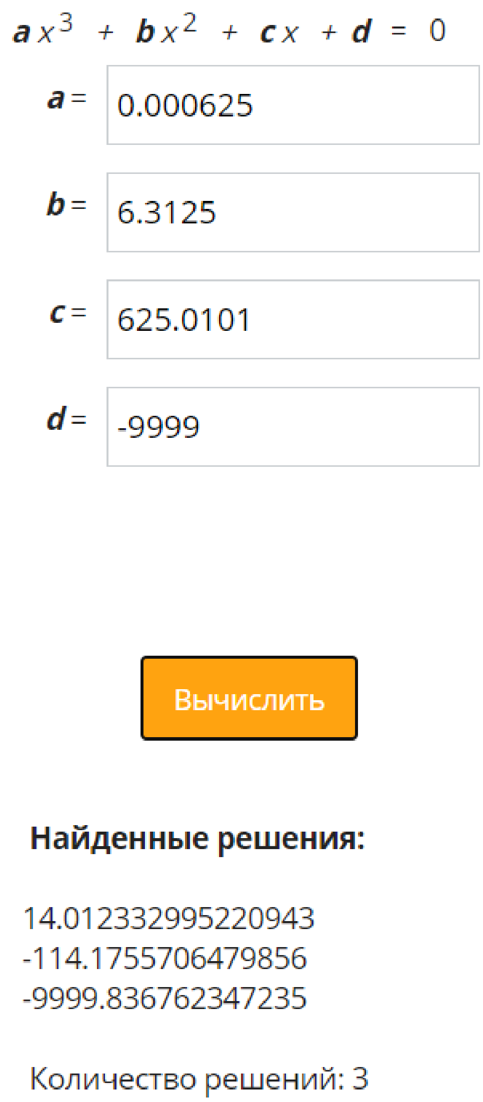

Рис. 4: Результат вычислений

Частота должна быть положительна, поэтому учитываем только первый корень.

$$\omega_{кр} = \sqrt{14.0123329} = 3.74330507 \tag{20}$$

Найдём фазу:

$$\begin{gathered}\phi_{кр}(\omega_{кр}) = -\arctan T_1\omega_{кр} - \arctan T_2\omega_{кр} - \arctan T_3\omega_{кр} = \\ = -\arctan 93.582626 - \arctan 0.3743305 - \arctan 0.03743305 = -1.95571015\end{gathered} \tag{21}$$

Время запаздывания:

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \phi_{кр}}{\omega_{кр}} = 0.3168 \tag{22}$$

Построим АФЧХ для $\tau < \tau_{кр}, \tau = \tau_{кр}$ и $\tau > \tau_{кр}$

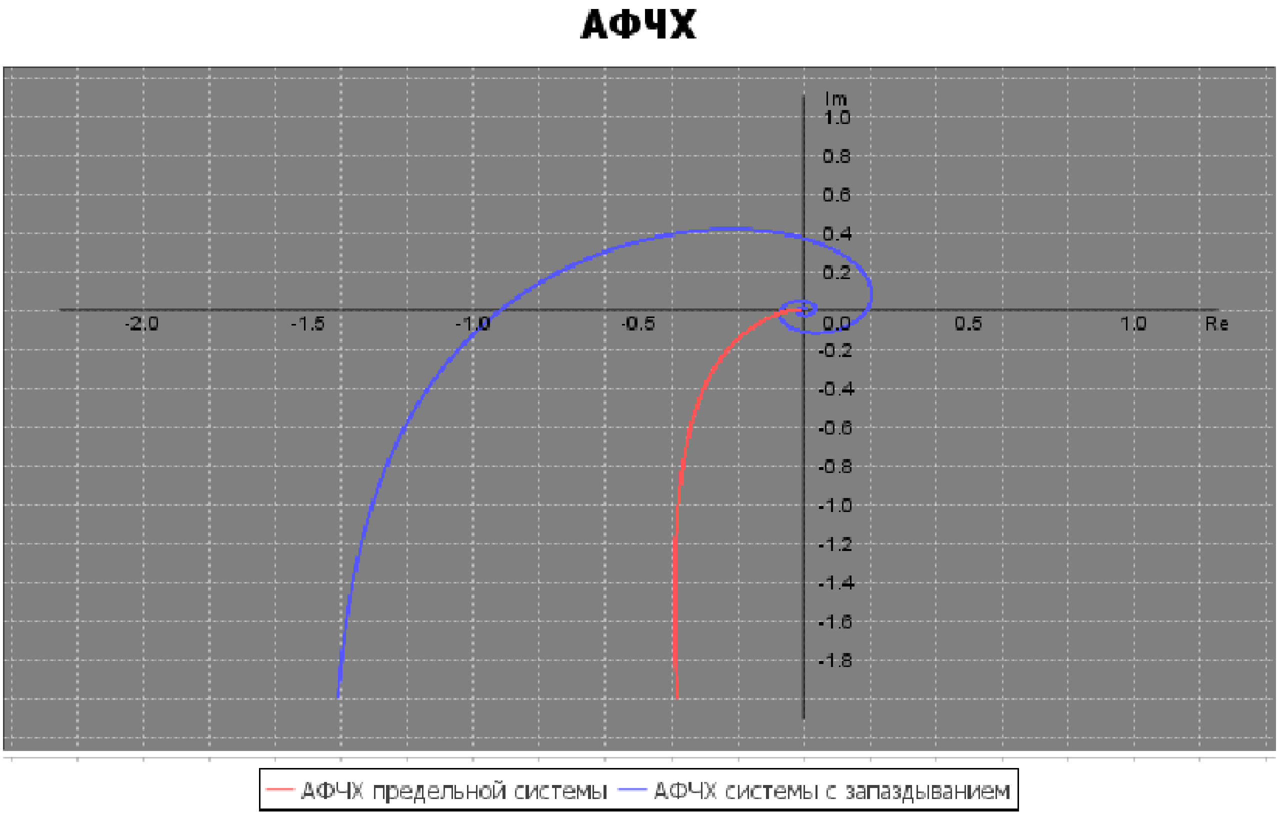

Рис. 5: АФЧХ системы с запаздыванием при $\tau < \tau_{\text{кр}}$

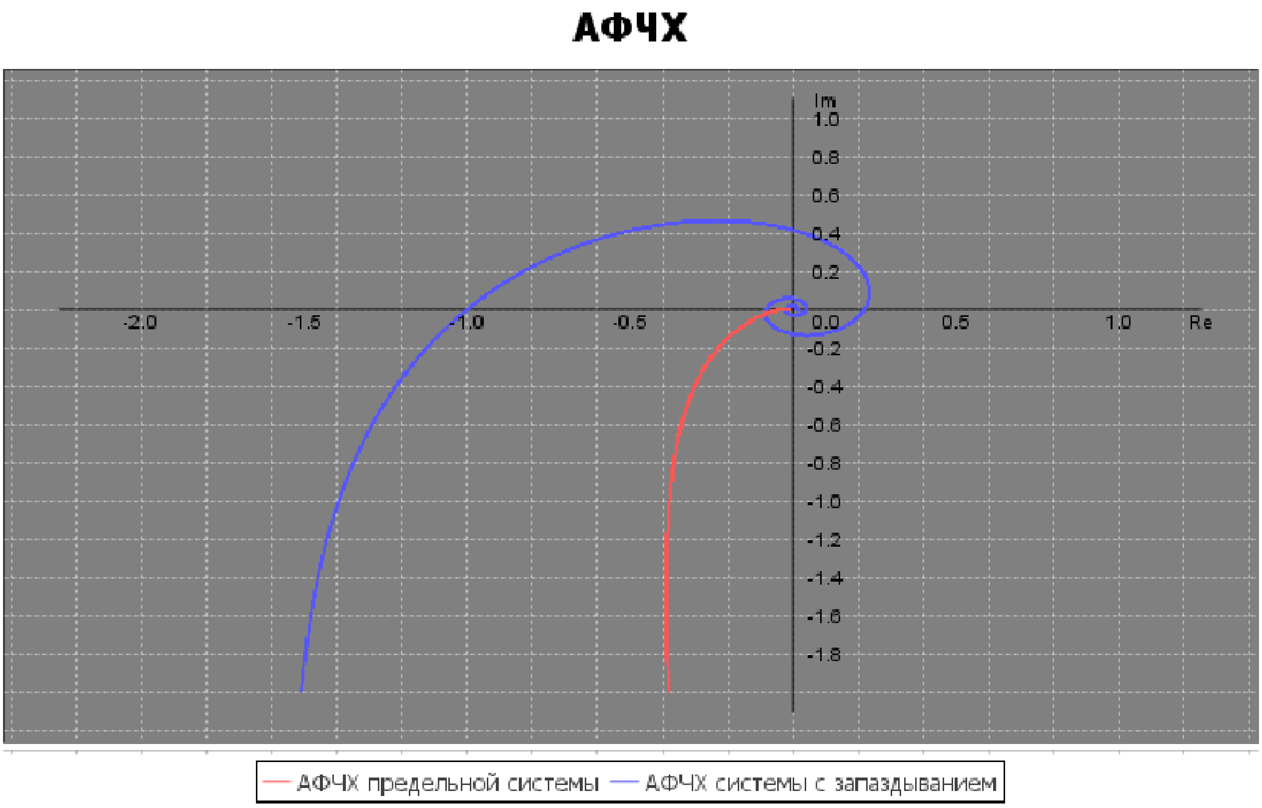

Рис. 6: АФЧХ системы с запаздыванием при $\tau = \tau_{\text{кр}}$

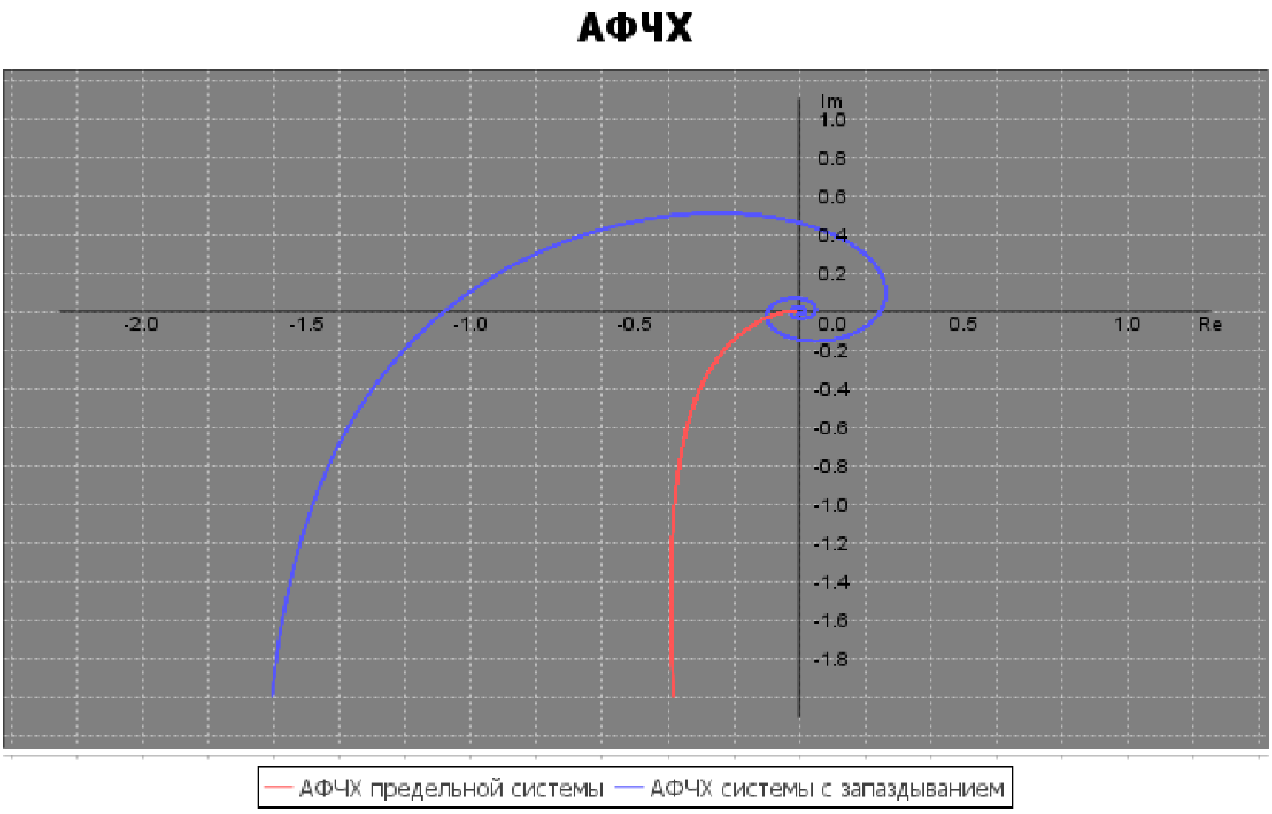

Рис. 7: АФЧХ системы с запаздыванием при $\tau > \tau_{\text{кр}}$

Как видно из графиков, при $\tau < \tau_{\text{кр}}$ система устойчива, при $\tau = \tau_{\text{кр}}$ система находится на границе устойчивости, а при $\tau > \tau_{\text{кр}}$ система неустойчива.

5 Графики переходных функций

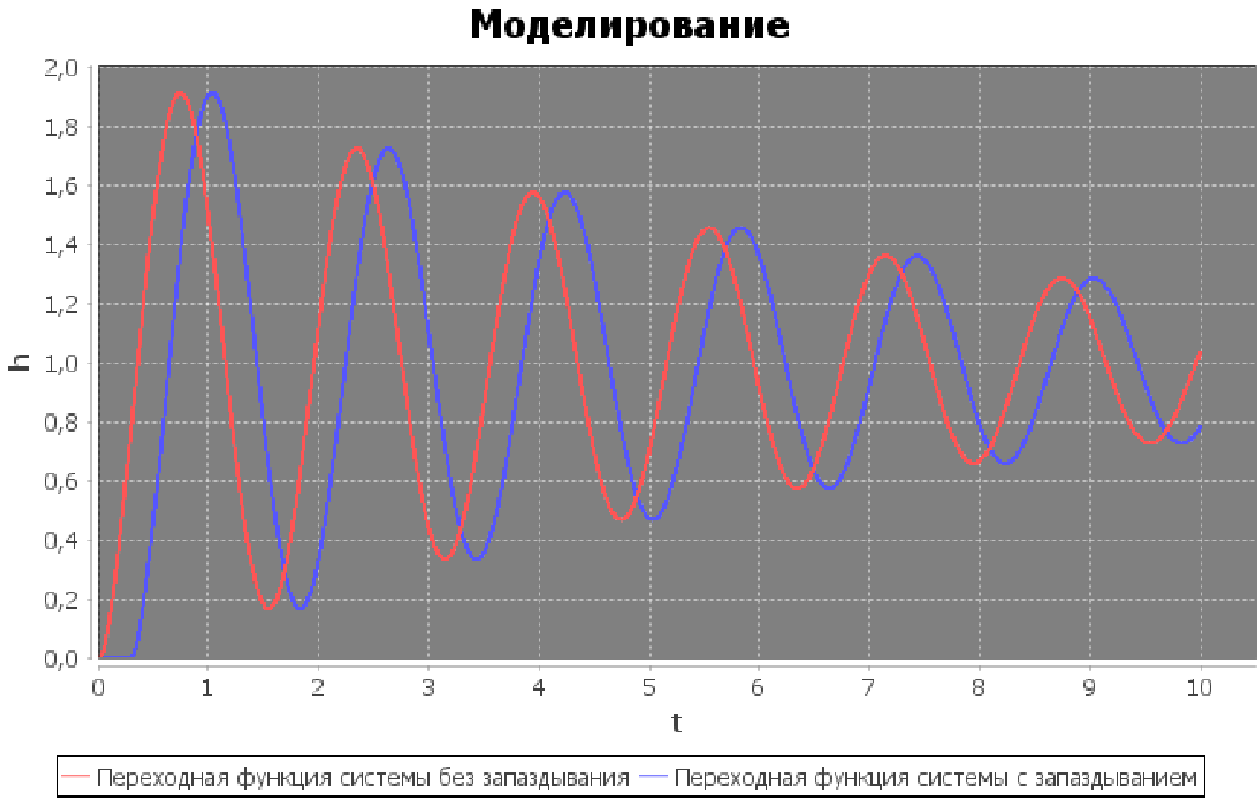

Рис. 8: Моделирование системы при $\tau = 0.2868$

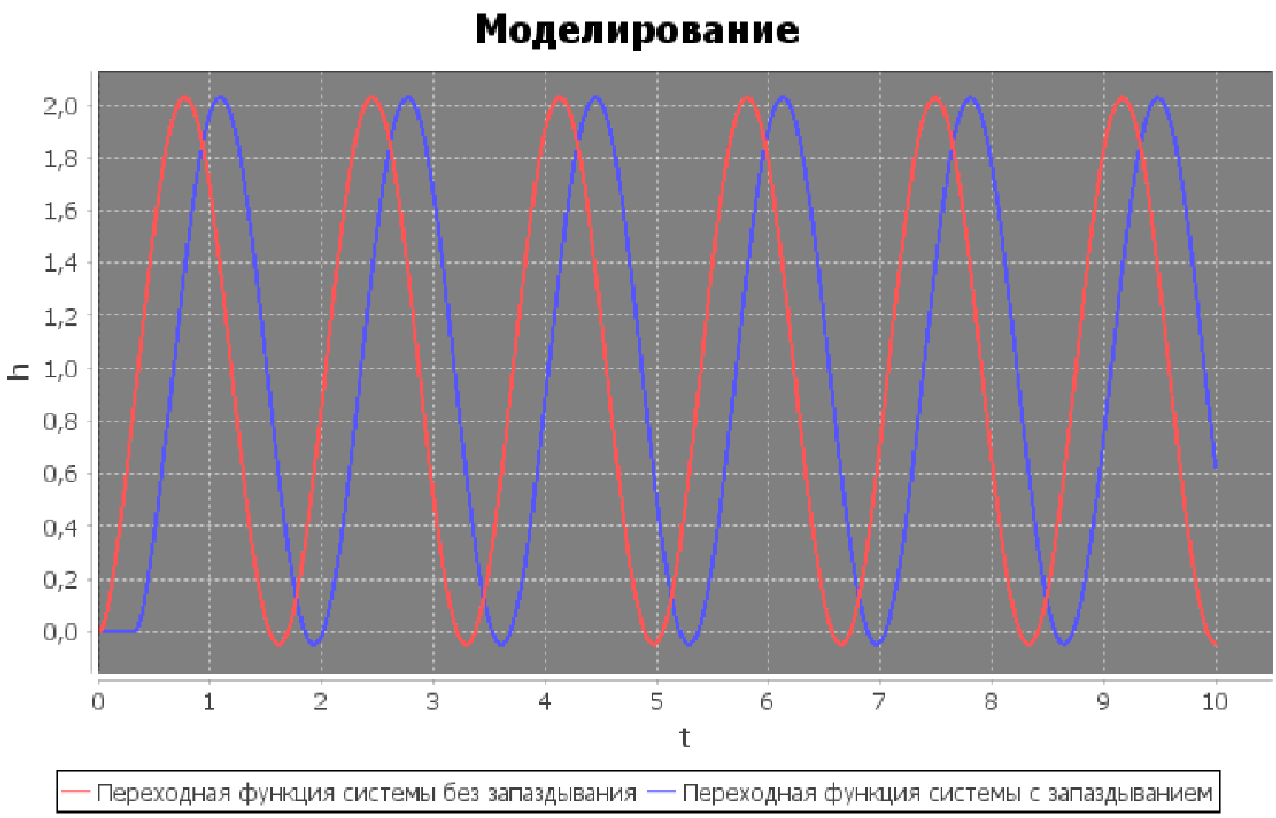

Рис. 9: Моделирование системы при $\tau = \tau_{\text{кр}}$

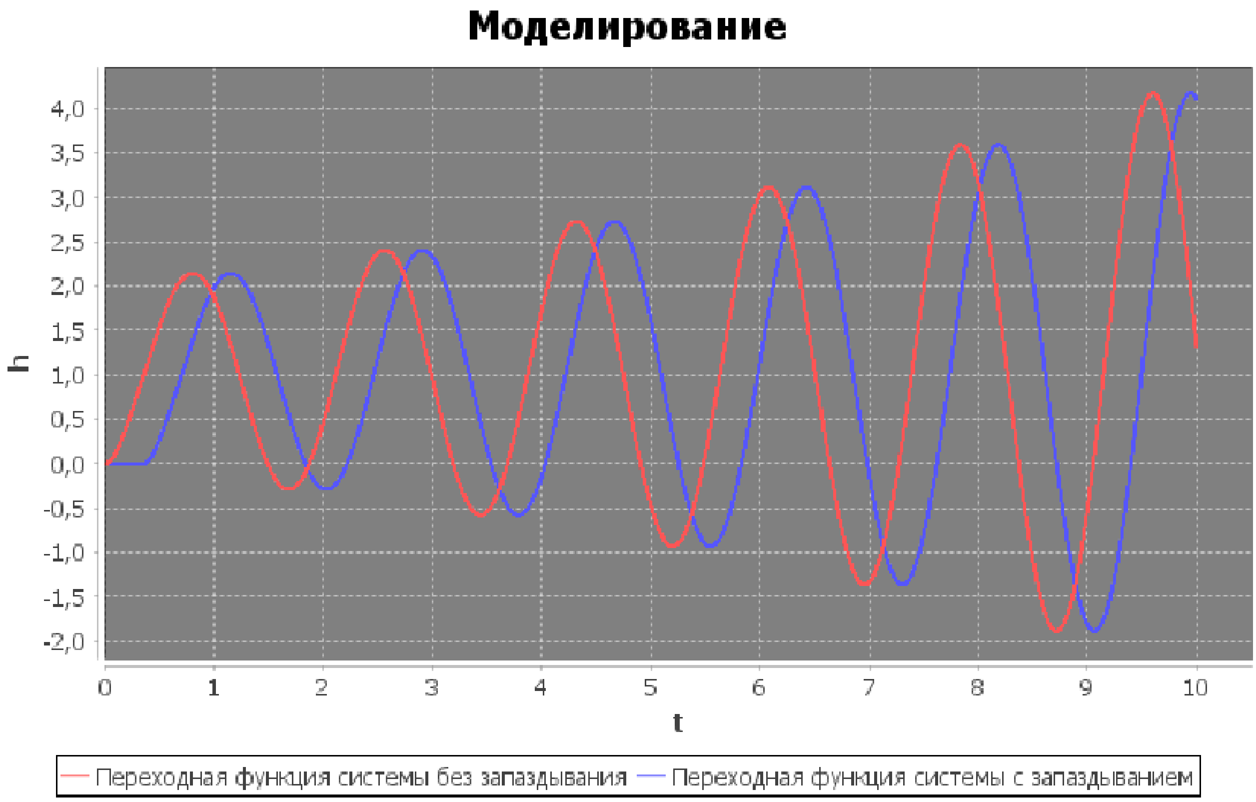

Рис. 10: Моделирование системы при $\tau = 0.3468$

6 Доказательство правильности определения $\tau_{\text{кр}}$

Из полученных графиков видно, что при $\tau < \tau_{\text{кр}}$ переходная функция системы с запаздыванием стремится к 1, значит система находится в устойчивом состоянии; при $\tau = \tau_{\text{кр}}$ переходная функция не стремится к какому-либо значению и не расходится, значит система находится на границе устойчивости; при $\tau > \tau_{\text{кр}}$ переходная функция расходится, то есть система становится неустойчивой. Эти выводы подтверждают правильность вычисления $\tau_{\text{кр}}$.

7 Влияние запаздывания на качество переходных процессов

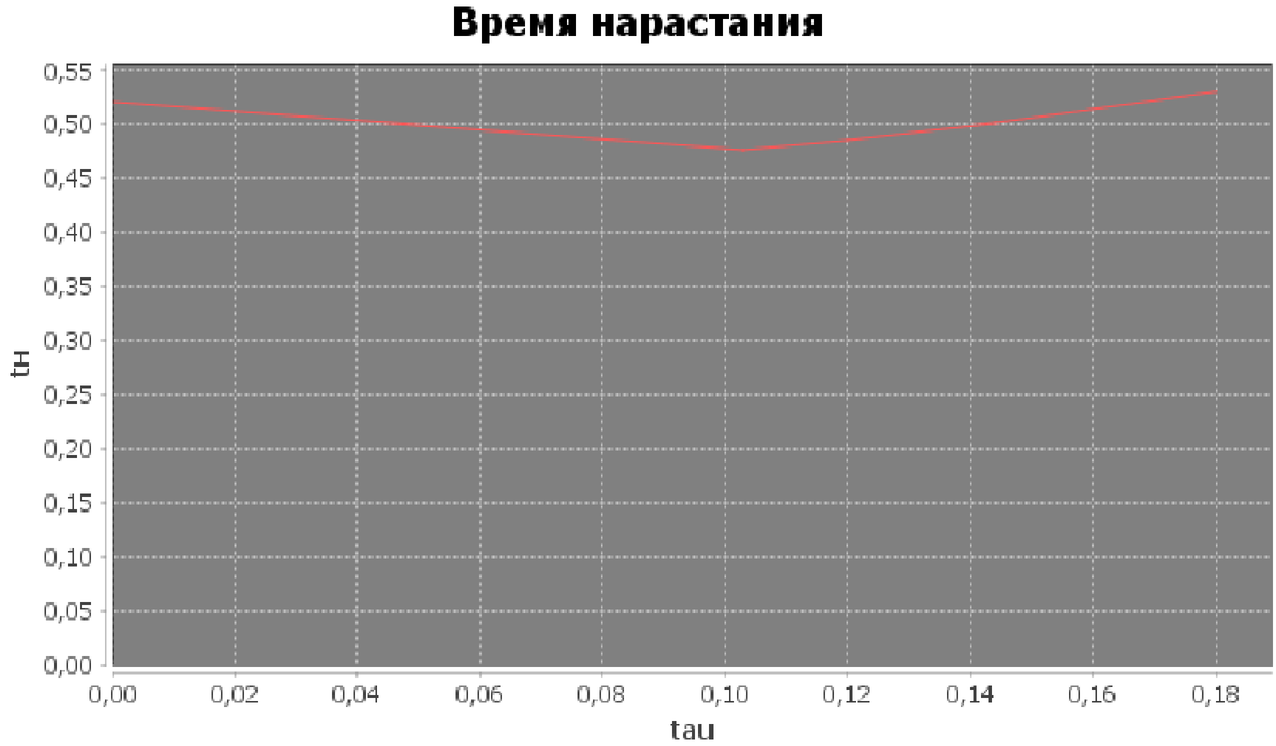

Рис. 11: Зависимость времени нарастания от времени запаздывания

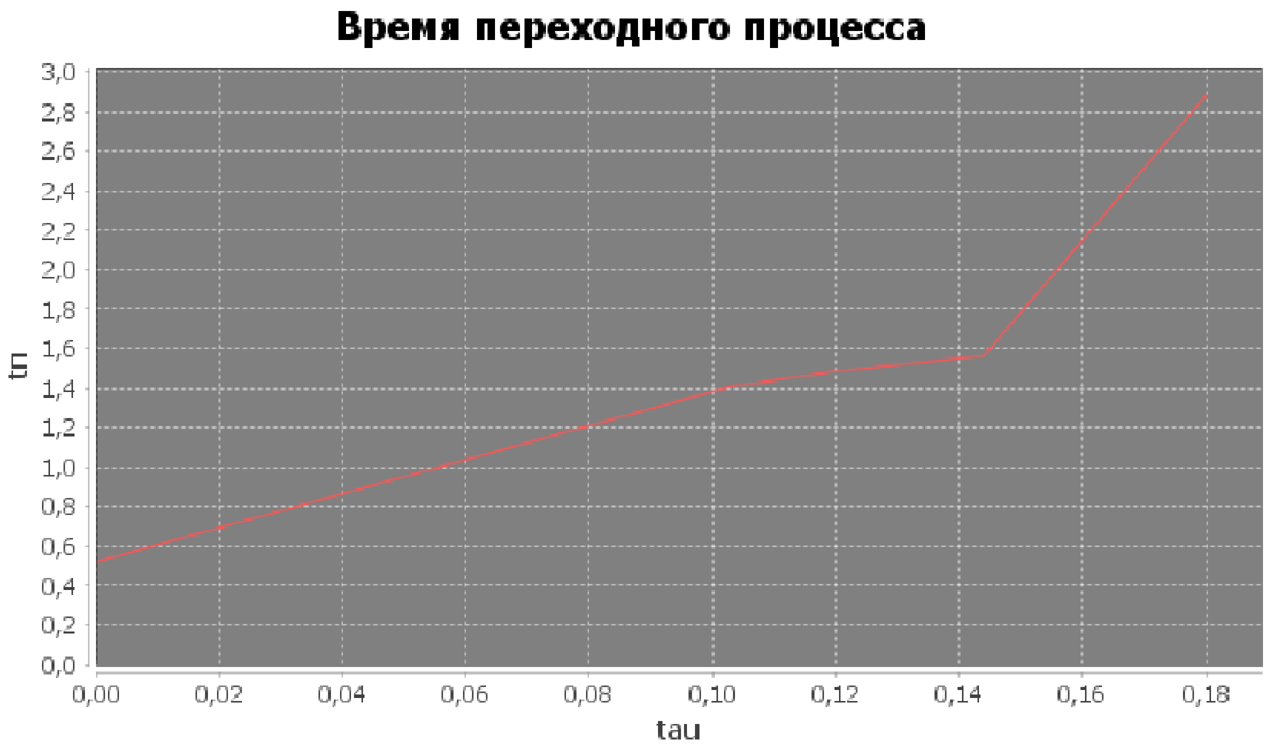

Рис. 12: Зависимость времени переходного процесса от времени запаздывания

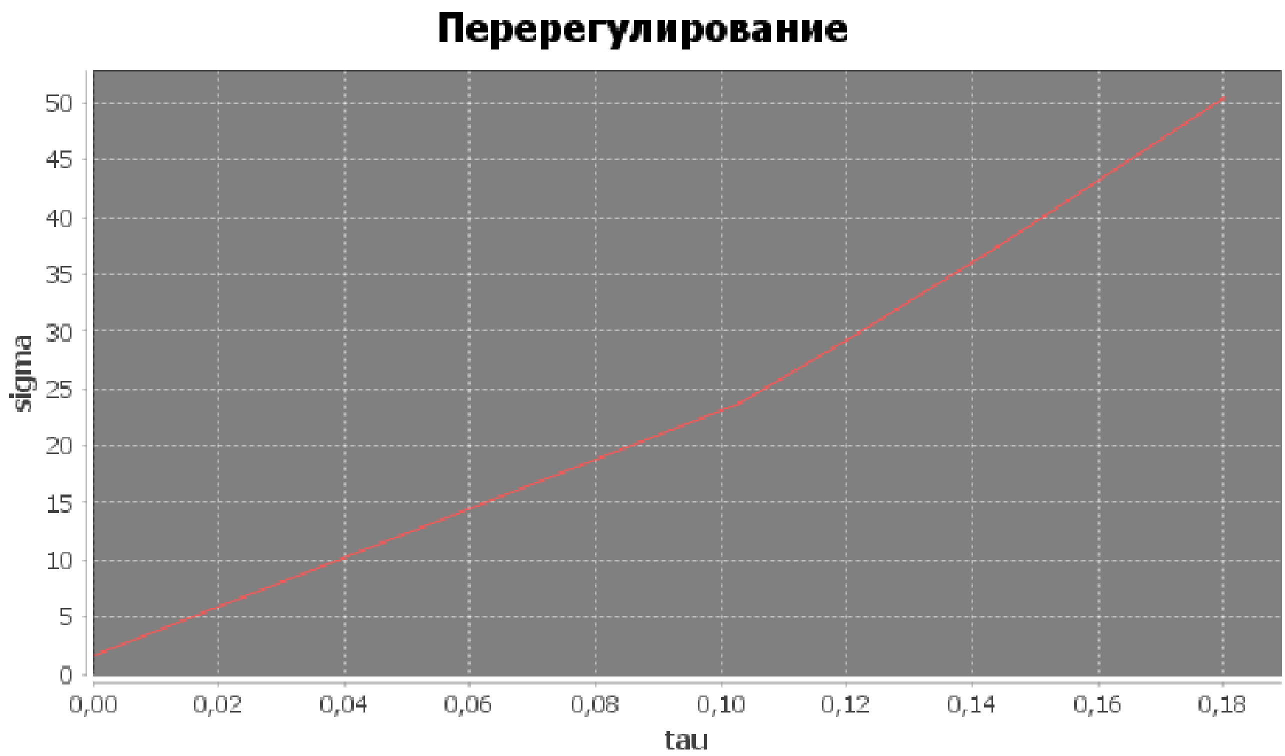

Рис. 13: Зависимость перерегулирования от времени запаздывания

При увеличении времени запаздывания так же увеличиваются и показатели качества, потому что растёт колебательность системы. При дальнейшем увеличении времени запаздывания возникают расходящиеся колебания и система становится неустойчивой.

8 Листинг моделирования

```
    public void addGraph(String title, double tau) {
     double std = 0, x, g=1, y=0, y1=0, y2=0, y3=0;
      int ns = (int) (tau/dt), i=0;
      VectorSeries y_ser = new VectorSeries("Transitional function");
      VectorSeries delay_ser = new VectorSeries(title);
      while(std < l) {
          x = g - y;

          y1 += getY(1/T1, k/T1, x, y1);
          y2 += getY(1/T2, 1/T2, y1, y2);
          y3 += getY(1/T3, 1/T3, y2, y3);

          y_ser.add(std, y3, 0, 0);

          if(i > ns) {
              y = y_ser.getYValue(i - ns);
          }
          else
              y = 0;
          i++;
          delay_ser.add(std, y, 0, 0);

          std += dt;
      }
      collection.addSeries(y_ser);
      collection.addSeries(delay_ser);
  }
  private double getY(double a0, double alpha, double x, double z) {
      double K1, K2, K3, K4;
      K1 = (-a0*z + alpha*x)*dt;
      K2 = (-a0*(z + K1/2) + alpha*x)*dt;
      K3 = (-a0*(z + K2/2) + alpha*x)*dt;
      K4 = (-a0*(z + K3) + alpha*x)*dt;
      return (K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6;
  }
```