

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Цель работы - ознакомление с автоматическими системами с запаздыванием; моделирование звена запаздывания; устойчивость автоматических систем с запаздыванием; влияние запаздывания на качество переходных процессов

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В большинстве промышленных систем управления реакция на управляющее воздействие возникает только через определенный промежуток времени τ после начала этого воздействия. Такое свойство называется чистым (транспортным) запаздыванием.

Покажем на примере суть запаздывания. Пусть система управления описывается аperiodическим звеном первого порядка, которому соответствует дифференциальное уравнение

$$(1) \quad T \frac{dy}{dt} + y = ku,$$

а та же система управления, но с запаздыванием описывается уравнением

$$(2) \quad T \frac{dy}{dt} + y = ku(t - \tau),$$

соответствующее аperiodическому звену порядка с запаздыванием. Такого вида уравнения называются уравнениями с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностными уравнениями.

Введем обозначение $\hat{u}(t) = u(t - \tau)$. Тогда уравнение (2) запишется в обыкновенном виде

$$(3) \quad T \frac{dy}{dt} + y = k\hat{u}.$$

Так, если входное воздействие $u(t)$ изменяется скачком от нуля до единицы (рис. 1), то изменение величины $\hat{u}(t) = u(t - \tau)$, стоящей в правой части уравнения звена изобразится графиком (рис. 2), который изображается как скачок, возникающий позже на время τ . Используя переходную характеристику инерционного звена применительно к уравнению (3), получаем изменение выходной величины $y(t)$ в виде графика, изображенного на рис. 3. Это и будет переходная характеристика инерционного звена с запаздыванием, у которого "инерционное" свойство характеризуется постоянной времени T , а запаздывание – величиной τ .

Пусть передаточная функция разомкнутой автоматической системы с запаздыванием

$$(4) \quad W(p) = W_o(p)\ell^{-p\tau} = \frac{K(p)}{D(p)}\ell^{-p\tau},$$

где $K(p)$ и $D(p)$ – полиномы от p степени, соответственно m и n ; $W_o(p)$ – передаточная функция линейной части разомкнутой системы.

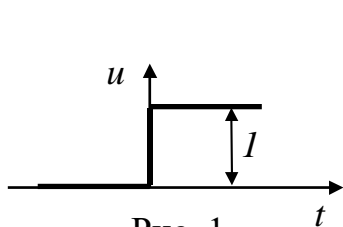


Рис. 1.

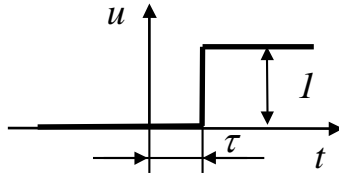


Рис. 2.

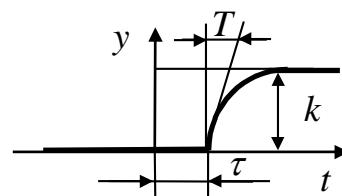


Рис. 3.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(5) \quad D(p) + K(p)\ell^{-p\tau} = 0.$$

Это трансцендентное уравнение и оно имеет бесконечно большое число корней. Поэтому для устойчивости систем первого и второго порядка недостаточно только положительности коэффициентов, а для систем более высокого порядка неприемлемы более высокого порядка неприменимы критерии устойчивости Гурвица и Рауса.

Наиболее удобен критерий Найквиста и для его применения передаточную функцию разомкнутой системы следует иметь в виде (4). С этой целью соответственно выбирают точку размыкания исследуемой системы.

В одноконтурной системе можно размыкать основную обратную связь (рис. 4). В этом случае

$$(6) \quad W(p) = W_1(p)W_2(p)\ell^{-p\tau}.$$

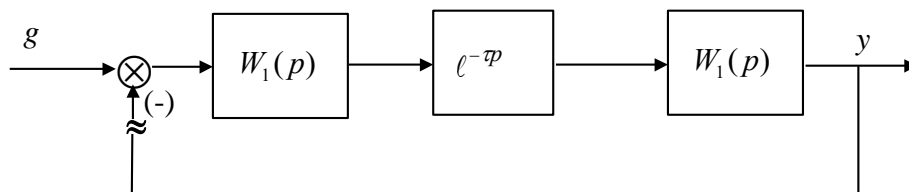


Рис. 4.

Если звено с запаздыванием находится в цепи местной обратной связи, то автоматическую систему следует размыкать на выходе этой связи (рис. 5). Тогда

$$(7) \quad W(p) = \frac{W_{01}(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)W_3(p)}\ell^{-p\tau}.$$

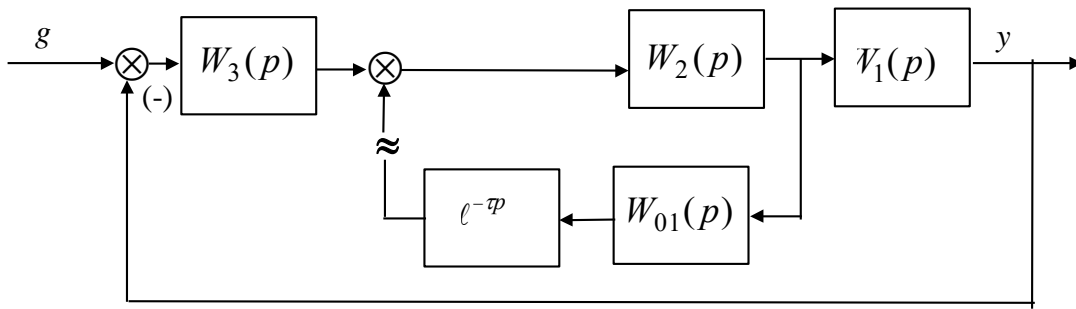


Рис. 5.

Звено с запаздыванием может быть в параллельной ветви прямой цепи системы. На входе этой ветви и нужно размыкать систему (рис. 6.). При этом

$$(8) \quad W(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)W_4(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)} l^{-p\tau}.$$

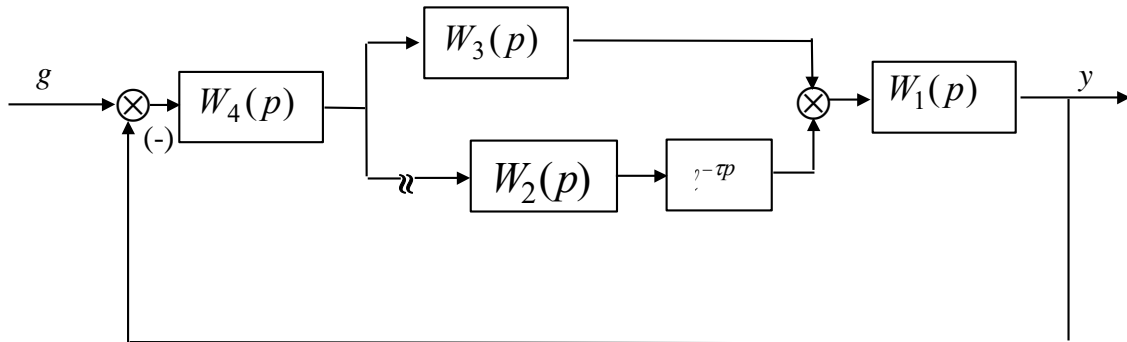


Рис. 6.

Передаточные функции $W(p)$, которые определяются равенствами (6) - (8), после подстановки передаточных функций отдельных участков системы принимают вид (4).

Рассмотрим возможность применения критерия Найквиста для исследования устойчивости систем с запаздыванием. Запишем еще раз передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии

$$W(p) = W_o(p) l^{-p\tau}.$$

Система без запаздывающего звена $\tau \rightarrow 0$ называется *предельной системой*. Ее передаточная функция в разомкнутом состоянии

$$(9) \quad W_{раз}^{\tau \rightarrow 0}(p) = W_o(p).$$

Частотные характеристики системы с запаздыванием и без него определяются соответственно выражениями

$$(10) \quad W(j\omega) = W_o(j\omega) l^{-j\omega\tau} = A(\omega) l^{j\varphi(\omega)} \cdot l^{-j\omega\tau} = A(\omega) l^{j(\varphi(\omega) - \omega\tau)}$$

и

$$W(j\omega) = W_o(j\omega).$$

Из выражения (10) следует, что для построения АФЧХ системы с запаздыванием необходимо построить годограф системы без запаздывания (предельной системы) и каждый вектор этой АФЧХ повернуть на угол $\omega\tau$. При возрастании ω значение $\omega\tau$ также возрастает и так как при больших значениях ω модуль $W_0(j\omega)$ обычно мал, то АФЧХ системы с запаздыванием закручивается вокруг нуля. На рис. 7 цифрой 1 обозначена АФЧХ предельной системы; цифрой 2 – АФЧХ системы с запаздыванием.

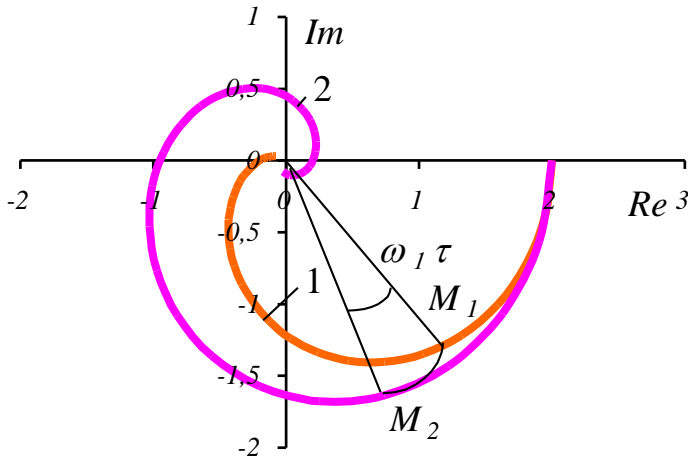


Рис. 7.

Допустим, что предельная система устойчива. Тогда согласно критерия устойчивости Найквиста для устойчивых в разомкнутом состоянии систем, АФЧХ не должна охватывать точку $-1, j0$. Будем теперь увеличивать τ от нуля и следить за деформацией АФЧХ, соответствующей $W_0(j\omega)$. Может получиться, что для некоторого значения $\tau = \tau_{кр}$ при $\omega = \omega_{кр}$ АФЧХ пройдет через точку $-1, j0$.

Если при $\tau < \tau_{кр}$ АФЧХ разомкнутой системы не будет охватывать точку $(-1, j0)$, а при $\tau > \tau_{кр}$ АФЧХ эту точку охватывает, то это соответствует тому, что при $\tau = \tau_{кр}$ система находится на границе устойчивости.

Тем самым при возрастании τ точка $(-1, j0)$ оказывается внутри АФЧХ разомкнутой системы и система станет неустойчивой.

Если продолжать увеличивать τ , то это в общем случае может привести к тому, что АФЧХ разомкнутой системы изменяясь, не будет охватывать точку $(-1, j0)$ и система вновь станет устойчивой. Дальнейшее увеличение τ вновь может привести к неустойчивости. Значения τ , при которых АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку $(-1, j0)$, называют *критическими*. Эти критические значения $\tau_{кр}$ и частоты $\omega_{кр}$ определяются из уравнения

$$(11) \quad W_p(j\omega_{кр}) = W_1(j\omega_{кр})e^{-j\tau_{кр}\omega_{кр}} = 1,$$

которое можно представить двумя уравнениями

$$(12) \quad \text{mod } W_p(j\omega_{кр}) = \text{mod } W_1(j\omega_{кр}) = A_1(\omega_{кр}) = 1,$$

$$(13) \quad \arg W_p(j\omega_{кр}) = \arg W_1(j\omega_{кр}) - \omega_{кр}\tau_{кр}.$$

Из выражения (13) следует, что критические значения $\tau_{кр}$ можно найти из условия

$$(14) \quad \tau_{кр} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_{кр}} = \frac{\gamma}{\omega_{кр}},$$

где $\varphi = -\arg W_1(\omega_{кр})$; γ – угол между вектором $W_p(j\omega_{кр})$ и отрицательным направлением действительной оси.

Значение $\tau_{кр}$ может быть определено графически. Для этого на комплексной плоскости $W(j\omega)$ проведем окружность единичного радиуса (рис. 8). Точки пересечения годографа $W_1(j\omega)$ с этой окружностью определяют частоты пересечения $\omega_{кр1}, \omega_{кр2}, \dots$, а отношения углов $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ к значениям $\omega_{кр1}, \omega_{кр2}, \dots$ – предельные времена запаздывания. В общем случае таких точек может быть несколько.

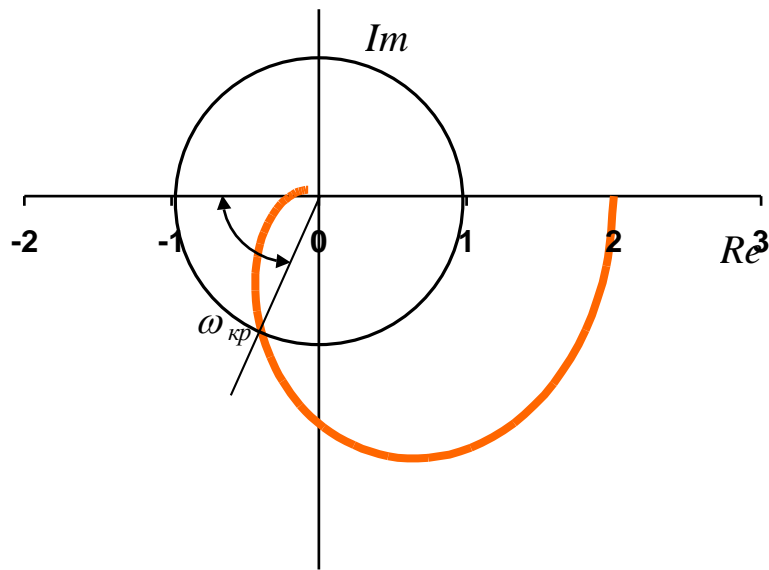


Рис. 8.

Отметим, что если годограф $W_1(j\omega)$ целиком лежит в окружности единичного радиуса, т.е. нет точек пересечения, то система устойчива при любом значении τ .

Пример. Автоматическая система состоит из инерционного звена с передаточной функцией $W_1(p) = \frac{k_1}{Tp + 1}$ и звена запаздывания $W_2(p) = e^{-p\tau}$.

Требуется определить критическое время запаздывания $\tau_{кр}$ при $k_1 > 1$.

Решение. Выражение для амплитудно-частотной характеристики инерционного звена имеет вид

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}.$$

Приравняв его к единице и возведя обе части в квадрат имеем

$$k_1^2 = \omega_{кр}^2 T_1^2 = 1.$$

Отсюда

$$\omega_{кр}^2 = \frac{k_1^2 - 1}{T_1^2}.$$

Зная $\omega_{кр}$ определим угол φ из выражения для инерционного звена

$$\varphi = -\arg W_1(j\omega_{кр}) = -\arctg(\omega_{кр}T_1)$$

и затем по формуле (14) вычислим критическое значение времени запаздывания. Годограф $W_1(j\omega)$ для данного случая показан на рис. 9, где

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_{кр}} = \frac{\pi - \arctg \omega_{кр}T_1}{\omega_{кр}}.$$

При $\tau < \tau_{кр}$ система устойчива; при $\tau > \tau_{кр}$ система неустойчива.

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы представлена в

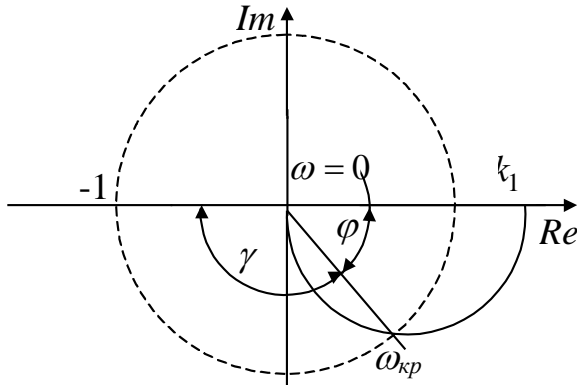


Рис. 9.

двух составляющих

$$W_1(p) = \frac{kpT_2}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

и

$$W_2(p) = e^{-\tau p}.$$

Требуется определить значения времени запаздывания, при которых система устойчива.

Решение. Для удобства изложения хода решения передаточную функцию $W_1(p)$ представим

$$W_1(p) = W_{11}(p)W_{12}(p) = \frac{k}{T_1p + 1} \cdot \frac{pT_2}{T_2p + 1}.$$

Тем самым, уравнение (12) для случая имеет вид

$$A_1(\omega_{кр}) = A_{11}(\omega_{кр}) \cdot A_{12}(\omega_{кр}) = 1,$$

где

$$A_{11}(\omega_{кр}) = \frac{k}{\sqrt{T_1^2 \omega_{кр}^2 + 1}}, \quad A_{12}(\omega_{кр}) = \frac{T_2 \omega_{кр}}{\sqrt{T_2^2 \omega_{кр}^2 + 1}}.$$

После выполнения необходимых преобразований получим

$$k_1^2 = \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2} \right)^2 + \left(\omega_{кр} T_1 - \frac{1}{\omega_{кр} T_2} \right)^2,$$

или

$$\omega_{кр} T_1 - \frac{1}{\omega_{кр} T_2} = \pm \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2} \right)^2} = \pm a.$$

Откуда

$$\omega_{кр1} = \frac{+a + \sqrt{a^2 + 4 \frac{T_1}{T_2}}}{2T_1},$$

$$\omega_{кр1} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4 \frac{T_1}{T_2}}}{2T_1},$$

при этом $\omega_{кр1} > \omega_{кр2}$.

Таким образом, для рассматриваемого случая существуют две частоты пересечения $\omega_{кр1}$ и $\omega_{кр2}$, которым соответствуют два различных угла φ

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega_{кр1}^2 T_1 T_2 - 1}{\omega_{кр1} (T_1 + T_2)};$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega_{кр2}^2 T_1 T_2 - 1}{\omega_{кр2} (T_1 + T_2)}.$$

Из построений, представленных на рис. 10, следует, что $\varphi_1 > 0$, а $\varphi_2 < 0$ и, тем самым

$$\gamma_1 = \pi - \varphi_1 < \gamma_2 = \pi - \varphi_2.$$

Рассматривая последовательно увеличение τ от нуля до бесконечности на основании уравнения

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_{кр}} = \frac{\gamma}{\omega_{кр}}$$

можно сделать вывод, что при

$$\tau < \frac{\gamma_1}{\omega_{кр1}} = \tau_{кр1}$$

система устойчива; при

$$\tau_{кр1} < \tau < \frac{\gamma_2}{\omega_{кр2}} = \tau_{кр2}$$

система неустойчива.

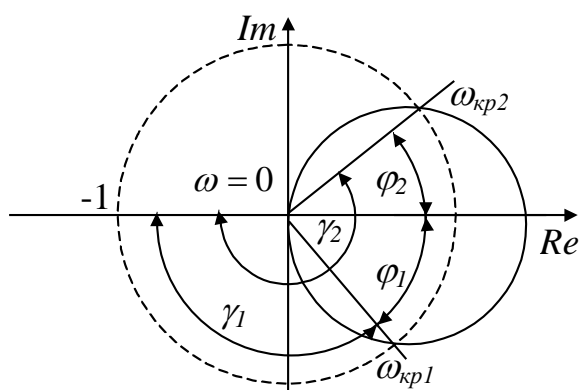


Рис. 10.

система устойчива.

Далее при

$$\tau_{кр1} + \frac{2\pi}{\omega_{кр1}} < \tau < \tau_{кр2} + \frac{2\pi}{\omega_{кр2}}$$

система неустойчива.

Примечание. Приведенные выше выражения для определения $\omega_{кр}$ нуждается в уточнении и должно быть записано так

$$\tau_{кр} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_{кр}} + \frac{2m\pi}{\omega_{кр}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Тем самым в приведенном выше примере можно рассматривать и такие значения τ , при которых

$$\tau_{кр2} < \tau < \tau_{кр1} + \frac{2\pi}{\omega_{кр1}}$$

2.ИССЛЕДОВАНИЕ

В лабораторной работе исследуется одна из автоматических систем, структурные схемы которых представлены на рисунках.

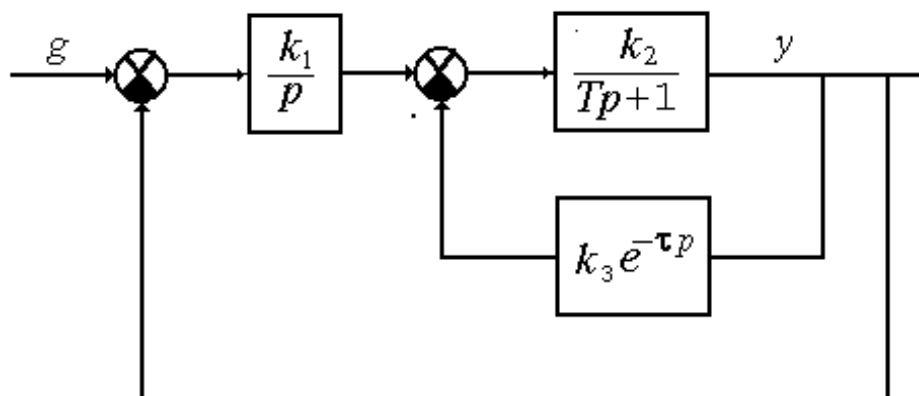


Рис. 11.

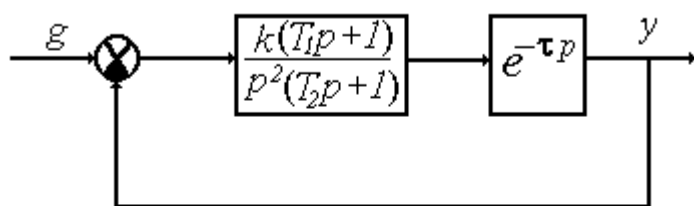


Рис. 2.

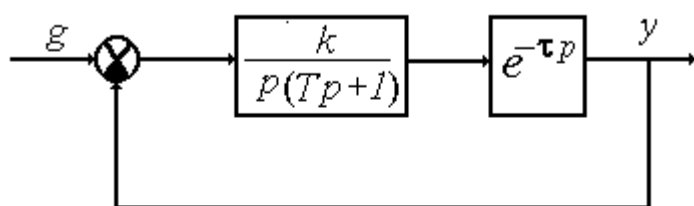


Рис. 3.

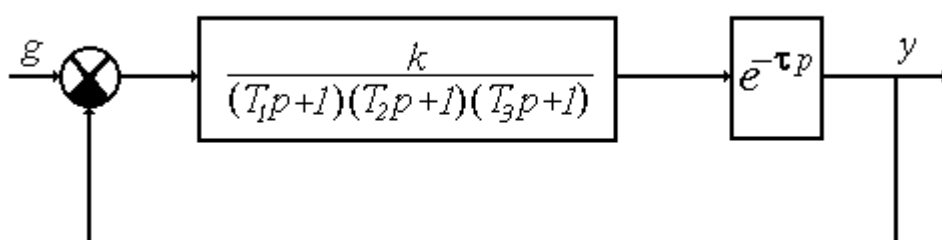


Рис.4

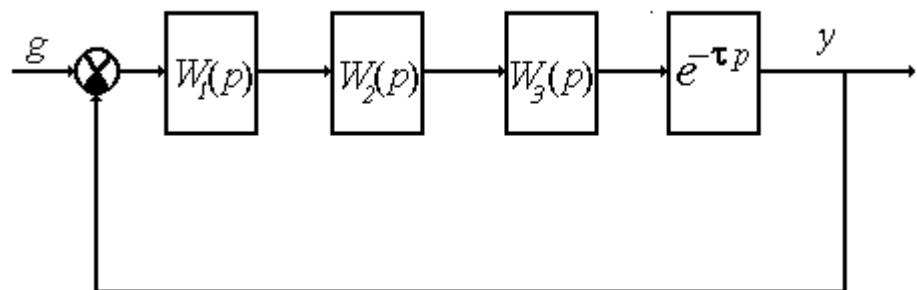


Рис. 5.

Здесь $W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$; $W_2(p) = \frac{k_2}{T_2^2 p^2 + 2\zeta T_2 p + 1}$; $W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p + 1}$.

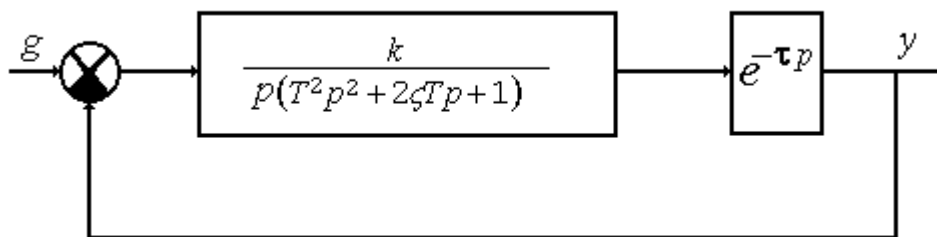


Рис. 6.

Варианты

№	Структурная схема	k_1	k_2	k_3	k	T_1	T_2	T_3	T	ζ
1	Рис.1	1.0	0.5	3.0	—	—	—	—	2.0	—
2	Рис.2	—	—	—	0.05	0.5	0.2	—	—	—
3	Рис.3	—	—	—	10.0	—	—	—	0.05	—
4	Рис.4	—	—	—	50	25	0.1	0.01	—	—
5	Рис.5	20	5	0.1	—	0.5	0.2	1	—	0.25
6	Рис.6	—	—	—	580	—	—	—	0.0014	0.5
7	Рис.1	0.5	0.8	1.5	—	—	—	—	2.0	—
8	Рис.2	—	—	—	0.1	0.5	0.2	—	—	—
9	Рис.3	—	—	—	5.0	—	—	—	0.1	—
10	Рис.4	—	—	—	75.0	25.0	0.1	0.01	—	—
11	Рис.5	10.0	10.0	0.1	—	0.5	0.2	1.0	—	0.2
12	Рис.6	—	—	—	540.0	—	—	—	0.0014	5.0
13	Рис.1	0.75	0.1	1.4	—	—	—	—	2.0	—
14	Рис.2	—	—	—	0.01	0.5	0.2	—	—	—
15	Рис.3	—	—	—	2	—	—	—	0.2	—
16	Рис.4	—	—	—	100.0	25.0	0.1	0.01	—	—
17	Рис.5	20.0	50.0	0.01	—	0.5	0.2	1.0	—	0.2
18	Рис.6	—	—	—	500.0	—	—	—	0.0014	5.0
19	Рис.1	0.5	0.1	0.5	—	—	—	—	2.0	—
20	Рис.2	—	—	—	0.05	0.7	0.2	—	—	—
21	Рис.3	—	—	—	1.0	—	—	—	0.5	—
22	Рис.4	—	—	—	150	25.0	0.1	0.01	—	—
23	Рис.5	100.0	1.0	0.01	—	0.4	0.2	1.0	—	0.25
24	Рис.6	—	—	—	400	—	—	—	0.0014	—
25	Рис.1	0.6	1.5	0.8	—	—	—	—	2.0	—
26	Рис.2	—	—	—	0.04	0.6	0.2	—	—	—
27	Рис.3	—	—	—	1.25	—	—	—	0.4	—
28	Рис.4	—	—	—	125.0	20.0	0.1	0.01	—	—
29	Рис.5	125.0	0.75	0.01	—	0.4	0.2	1.0	—	—
30	Рис.6	—	—	—	375.0	—	—	—	0.0014	—

3.3АДАНИЕ

3.1.Построить АФЧХ системы с запаздыванием.

3.2.Определить графическим способом $\tau_{кр}$.

3.3.Определить аналитическим путем $\tau_{кр}$.

3.4.Прибегая к моделированию заданной автоматической системы подтвердить правильность вычисления значения $\tau_{кр}$, т.е. представить три переходных процесса при $\tau < \tau_{кр}$, $\tau = \tau_{кр}$, $\tau > \tau_{кр}$.

3.5.Прибегая к моделированию заданной автоматической системы оцените влияние запаздывания на качество переходных процессов по трем-четырем характеристикам.

4. СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ОТЧЕТА

4.1.Структурная схема исследуемой автоматической системы с заданными значениями параметров.

4.2.Описание процесса построения АФЧХ для заданной автоматической системы.

4.3.Описание процесса определения $\tau_{кр}$ графическим способом, при этом АФЧХ с помощью которой определяется $\tau_{кр}$ должна иметь необходимые обозначения, разметку и т.п.

4.4.Аналитические выражения с необходимыми пояснениями, с помощью которых определено значение $\tau_{кр}$.

4.5.Графики переходных функций с необходимыми, позволяющими работать с графиками, т.е. последние должны иметь масштабы, обозначения функций и т.п.

4.6.Доказательство правильности определения $\tau_{кр}$. В основе доказательства должны быть полученные путем моделирования графики переходных функций.

4.7.Анализ влияния запаздывания на качество переходных процессов путем построения зависимостей $I_j = f(\tau)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) при $\tau < \tau_{кр}$, где I_j , ($j = 1, 2, 3, \dots$) - выбранные Вами показатели качества переходных процессов.

4.8.Соображения по выбору и выбранные значения шага интегрирования Δt и величины интервала интегрирования L .

4.9.Листинг фрагмента программы, относящегося к моделированию исследуемой автоматической системы.

4.10.Текстовая часть отчета должна соответствовать ГОСТу 2.105-79; графики выполняются с учетом ГОСТа 2319-81; список использованной литературы представляется с учетом ГОСТа 7.1-81.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Передаточная функция разомкнутой линейной системы равна

$$W(p) = \frac{k}{p} \ell^{-p\tau}.$$

Покажите, что критическое время запаздывания определяется соотношением $\tau_{кр} = \frac{\pi}{k}$, т.е. замкнутая система будет устойчивой при $\tau < \tau_{кр} = \frac{\pi}{k}$.

2. Передаточная функция разомкнутой линейной системы равна

$$W(p) = \frac{k}{p} \ell^{-\sqrt{p}\tau}$$

Покажите, что устойчивость замкнутой системы не зависит от τ и замкнутая система будет устойчивой при $k < \ell^\pi \approx 23.14$.

3. Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + p \frac{\tau}{n}\right)^n} = \ell^{-p\tau},$$

т.е. звено запаздывания может приближенно рассматриваться как последовательное соединение большого числа инерционных звеньев первого порядка с соответствующими постоянными времени.

4. Докажите, что звено запаздывания имеет передаточную функцию вида

$$W_{зан}(p) = \ell^{-p\tau}.$$

В основу доказательства положите разложение в ряд Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. – М., Л.: Гос. энергетическое изд-во, 1962. – 600 с.
2. Теория автоматического управления. Ч. 1./Л. С. Гольдфарб, А. В. Балтрушевич, Г. К. Круг, А. В. Нетушил, Е. Б. Пастернак; Под ред. А. В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1967. – 424 с.
3. Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
4. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
5. Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал): Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1977. – 464 с.
6. Топчеев Ю. И., Цыпляков А. П. Задачник по теории автоматического регулирования: Учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления/В. А. Бесекерский, А. Н. Герасимов, С. В. Лучко, А. В. Небылов, Л. Ф. Порфирьев, Е. А. Фабрикант, С. М. Федоров, В. И. Цветков; Под ред. В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

8. Основы теории автоматического управления: Учебник для авиационных вузов/В. С. Булыгин, Ю. С. Гришанин, Н. Б. Судзиловский и др. Под ред. Н. Б. Судзиловского. – М.: Машиностроение, 1985. – 512 с.