



باسمه تعالی



پاسخ تمرین سری ۵

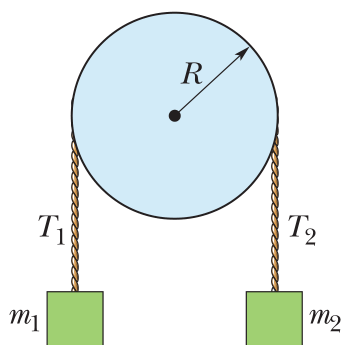
درس فیزیک ۱

تاریخ ارسال :

پنج‌شنبه، ۲۷ دی ۱۴۰۳

دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران

نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴



۱- مطابق شکل، دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 داریم. قرقره که روی محوری افقی و بدون اصطکاک سوار شده، دارای شعاع r است. وقتی سیستم را از حال سکون رها می‌کنیم، بدون اینکه نخ روی قرقره بلغزد، جسم سنگین‌تر در مدت t ، به اندازه h پایین می‌آید. مطلوبست محاسبه:

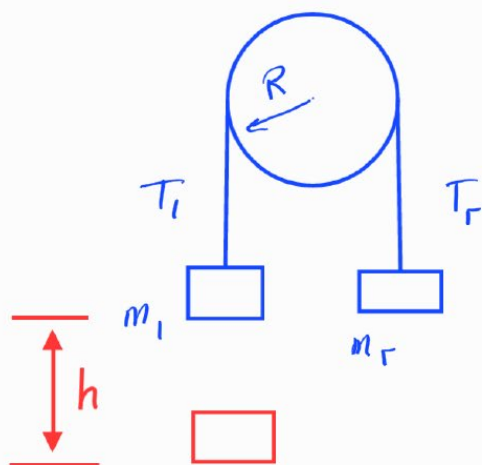
الف) شتاب این جسم؟

ب) کشش ریسمان در قسمتی که جسم سنگین‌تر را نگه می‌دارد؟

پ) کشش ریسمان در قسمتی که جسم سبک‌تر را نگه می‌دارد؟

ت) شتاب زاویه‌ای قرقره؟

ث) لختی دورانی قرقره؟



فرض کنیم $m_1 > m_2$

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ T_r - m_r g = m_r a_r \\ T_1 R - T_r R = I \alpha \\ -a_1 = a_r = R \alpha \end{cases}$$

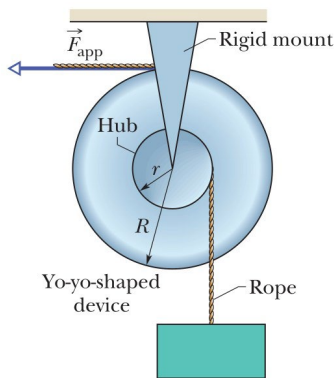
$$\text{الف) } h = -\frac{1}{2} a_1 t^2 \Rightarrow a_1 = -\frac{2h}{t^2}$$

$$\text{ب) } T_1 = m_1 (g + a_1) = m_1 \left(g - \frac{2h}{t^2} \right)$$

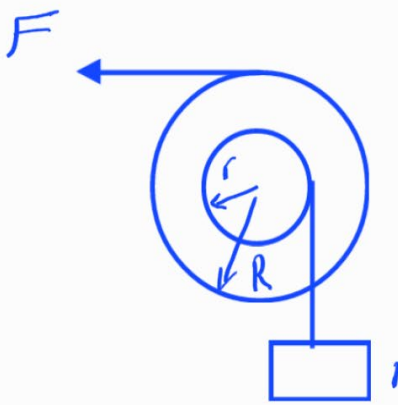
$$\text{پ) } T_r = m_r (g + a_r) = m_r \left(g + \frac{2h}{t^2} \right)$$

$$\text{ت) } \alpha = -\frac{a_1}{R} = \frac{2h}{R t^2}$$

$$\text{ث) } I = (T_1 - T_r) R / \alpha$$



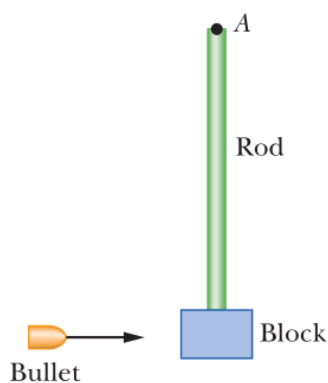
۲- یک وسیله یویو شکل به محوری افقی و بدون اصطکاک وصل شده است. شعاع خارجی وسیله R و شعاع توپی (داخلی) آن r است. میخواهیم از این وسیله برای بلند کردن یک جعبه به جرم m استفاده کنیم. اگر نیروی افقی F_{app} را به طنابی که به دور لبه خارجی این وسیله پیچیده شده وارد کنیم، جعبه که از یک طناب آویزان است با شتاب a به طرف بالا حرکت می کند. لختی دورانی این وسیله حول محور چرخش آن چقدر است؟



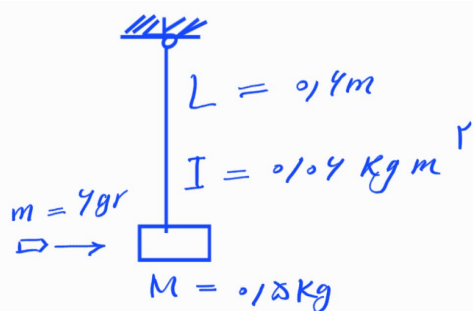
$$\begin{cases} T - mg = ma & (1) \\ FR - Tr = I\alpha & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow T = m(g + a)$$

$$(2) \Rightarrow I = \frac{FR - Tr}{\alpha}$$



- ۳- یک گلوله به جرم 6 g به طرف قطعه چوبی که به انتهای میله غیر یکنواختی به طول 0.6 m و جرم 0.5 kg متصل شده است، شلیک می‌شود. با این عمل، سامانه قطعه-میله-گلوله در صفحه حول محور ثابتی در نقطه A می‌چرخد. لختی دورانی میله به تنهایی نسبت به محور در نقطه A برابر $0.06\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ است. با فرض اینکه قطعه چوبی را می‌توان ذره در نظر گرفت:
- الف) لختی دورانی نهایی سامانه قطعه-میله-گلوله نسبت به نقطه A چقدر است؟
- ب) اگر تندی زاویه‌ای سامانه حول A بلافاصله پس از برخورد 4.5 rad/s باشد، تندی گلوله بلافاصله پیش از برخورد چقدر بوده؟



$$L = 0.4\text{ m}$$

$$I = 0.04\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

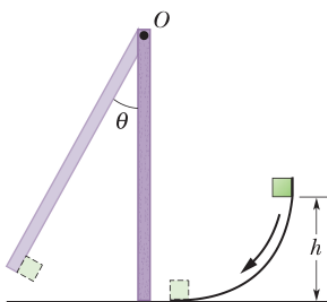
$$m = 4\text{ gr}$$

$$M = 0.15\text{ kg}$$

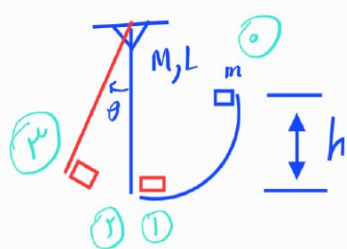
$$L_i = L_f \Rightarrow m v L = (I + m L^2 + M L^2) \omega$$

$$(0.004)(0.4) V = (0.04 + (0.004)(0.4)^2 + (0.15)(0.4)^2) (4.5)$$

$$\Rightarrow V = 302.7\text{ m/s}$$



۴- یک قطعه کوچک به جرم m روی یک سطح بدون اصطکاک از ارتفاع h به پایین می‌لغزد و سپس به میله یکنواختی به جرم M و طول L برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. محور میله پیش از توقف لحظه‌ای، حول نقطه O تا زاویه θ می‌چرخد. زاویه θ را به دست آورید.



$$\begin{cases} E_o = E_i \\ L_i = L_f \\ E_r = E_f \end{cases} \quad -f$$

قبل از برخورد: $L_i = m v L \quad v = \sqrt{2gh}$

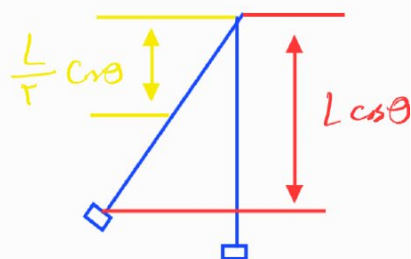
بعد از برخورد: $L_f = m v' L + I \omega \quad v' = L \omega \quad I = \frac{1}{12} M L^2$

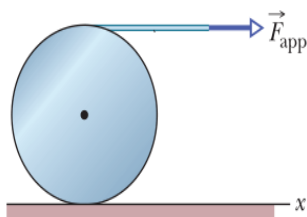
$$L_i = L_f \Rightarrow m v = m L \omega + \frac{1}{12} M L \omega$$

$$E_r = E_f :$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \left(\frac{m}{12} + \frac{M}{12} \right) L^2 \omega^2$$

$$\begin{aligned} E_r &= m g (L - L \cos \theta) + M g \left(\frac{L}{12} - \frac{L}{12} \cos \theta \right) \\ &= g L (1 - \cos \theta) \left(m + \frac{M}{12} \right) \end{aligned}$$



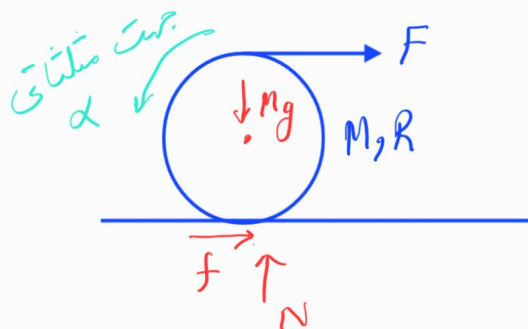


۵- مطابق شکل، نیروی افقی F_{app} را توسط طنابی که به دور استوانه توپر یکنواختی پیچیده شده است، وارد می‌کنیم. جرم استوانه M و شعاع آن R است و استوانه به طور هموار روی سطح افقی می‌غلتد. مطلوبست محاسبه:

الف) شتاب مرکز جرم استوانه؟

ب) شتاب زاویه‌ای استوانه نسبت به مرکز جرم آن؟

ج) نیروی اصطکاک وارد بر استوانه؟



$$F_{net, x} = ma_x$$

$$\tau_z = I_{com, z} \alpha$$

$$a_x = -R\alpha \quad (1)$$

$$x: F + f = Ma_x \quad (2)$$

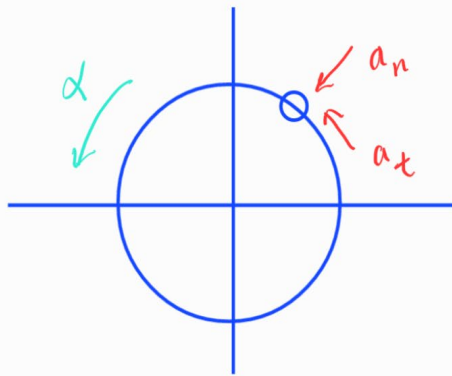
$$z: -FR + fR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow -F + f = \frac{1}{2}MR\alpha \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow F - f = \frac{1}{2}Ma_x \quad (4)$$

$$(2) + (4) \Rightarrow 2F = \frac{3}{2}Ma_x \Rightarrow a_x = \frac{4}{3} \frac{F}{M}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3} \frac{F}{MR} \Rightarrow f = +\frac{1}{3}F$$

۶- یک خودرو دور یک میدان به شعاع 10 m حرکت می‌کند، طوری که شتاب زاویه‌ای آن به صورت ct است و $c = 0.1\text{ rad/s}^3$ ثابت است. اگر تندی خودرو در لحظه $t = 0$ برابر صفر باشد، مطلوبست اندازه بردار شتاب خودرو در لحظه $t = 4$ (دقت کنید که ذره هم شتاب مماسی دارد و هم شتاب جانبی به مرکز).



$$\alpha = ct$$

-۴

$$c = 0.1\text{ rad/s}^3$$

$$R = 10\text{ m}$$

$$a_t = R\alpha = Rct \quad a_n = \frac{v}{R}$$

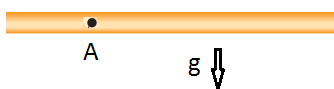
$$\omega = \frac{1}{r} ct^2 \quad v = R\omega$$

$$t = 4\text{ s} \quad \alpha = 0.4\text{ rad/s}^2 \quad \omega = 0.8\text{ rad/s} \quad v = 8\text{ m/s}$$

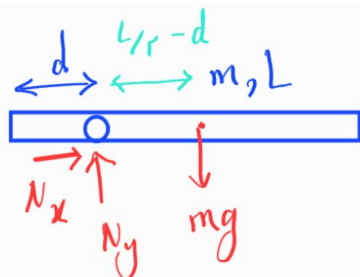
$$a_t = 4\text{ m/s}^2 \quad a_n = 0.8\text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \cong 4.08\text{ m/s}^2$$

$\leftarrow d \rightarrow$



۷- میله‌ای یکنواخت به جرم m و طول L مطابق شکل در نقطه A لولا شده است. به ازای چه مقدار d شتاب زاویه‌ای میله بیشینه است؟



$$\tau_A = I_A \alpha \quad -V$$

$$I_A = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{r} - d\right)^2$$

$$\tau_A = -mg\left(\frac{L}{r} - d\right) \quad \begin{matrix} x \\ \frac{L}{r} - d \end{matrix}$$

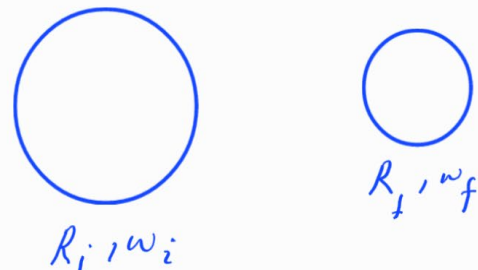
$$\rightarrow \alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = -g \frac{\frac{1}{r} L^2 + x^2}{\frac{1}{12} L^2 + \left(\frac{L}{r} - d\right)^2} = \frac{-gx}{\frac{1}{12} L^2 + x^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = -g \frac{\left(\frac{1}{12} L^2 + x^2\right) - x(2x)}{\left(\frac{1}{12} L^2 + x^2\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{12} = x^2 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{12}} \quad d = \frac{L}{r} - x$$

- ۸- ستاره‌ای حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، دوران می‌نماید. ستاره به علت جاذبه در خودش می‌رُمبد، طوری که شعاع آن نصف می‌شود. اگر ستاره را به شکل کره در نظر بگیریم:
- الف) سرعت زاویه‌ای ستاره چند برابر می‌شود؟
- ب) انرژی جنبشی ستاره چند برابر می‌شود؟

- ۸

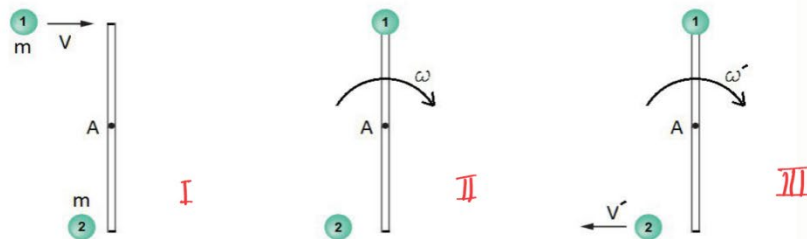


$$\tau_{ext} = 0 \Rightarrow L_i = L_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\omega} m R_i^r \omega_i = \frac{r}{\omega} m R_f^r \omega_f \Rightarrow \frac{\omega_f}{\omega_i} = \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^r = r$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2} I_f \omega_f^r}{\frac{1}{2} I_i \omega_i^r} \stackrel{(1)}{=} \frac{\omega_f}{\omega_i} = r$$

۹- میله‌ای یکنواخت به جرم M و طول L مطابق شکل در نقطه A لولا شده است. میله در ابتدا ساکن است (شکل سمت چپ). ذره ۱ به جرم m که با تندی v در راستای افقی حرکت می‌کند، به میله برخورد و به آن می‌چسبد (شکل وسط). سرعت زاویه‌ای در این حالت چقدر است؟ بلافاصله پس از آن یک برخورد کشسان بین انتهای دیگر میله و ذره ۲ که ساکن است، صورت می‌گیرد (شکل سمت راست). پس از این برخورد، سرعت زاویه‌ای میله و سرعت ذره ۲ چقدر است؟ (با فرض نبود جاذبه)



دران معادله را درست در نظر می‌گیریم

$$L_I = L_{II} : \quad mv \frac{L}{r} = \left(\underbrace{I}_{\text{میله}} + \underbrace{m(\frac{L}{r})^2}_{\text{ذره 1}} \right) \omega \quad I = \frac{1}{12} ML^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2mv}{(\frac{1}{3}M + m)L} \quad (1)$$

$$L_{II} = L_{III} : \quad I_t \omega = I_t \omega' + m v' \frac{L}{r} \quad I_t = \left(\frac{M}{12} + \frac{m}{3} \right) L^2$$

$$\left(\frac{M}{12} + \frac{m}{3} \right) L^2 (\omega - \omega') = m v' \frac{L}{r} \Rightarrow \omega - \omega' = \frac{2m v'}{(\frac{M}{3} + m)L} \quad (2)$$

$$E_{II} = E_{III} : \quad \frac{1}{r} I_t \omega^2 = \frac{1}{r} I_t \omega'^2 + \frac{1}{r} m v'^2$$

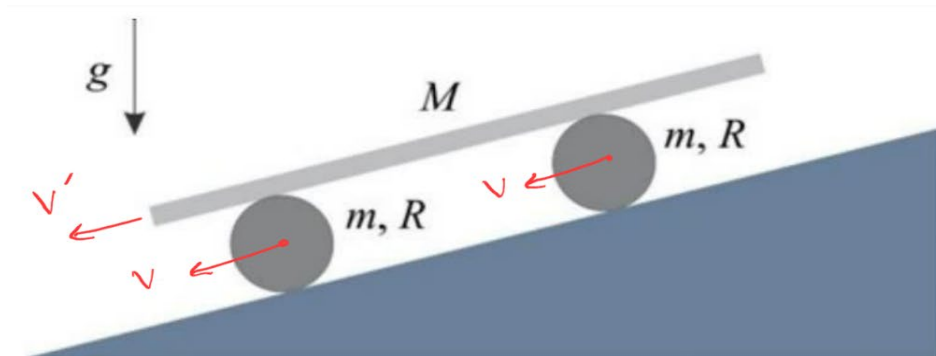
$$\Rightarrow \left(\frac{M}{12} + \frac{m}{3} \right) L^2 (\omega^2 - \omega'^2) = m v'^2 \quad (3)$$

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \omega + \omega' = \frac{2v'}{L} \Rightarrow v' = \frac{L}{r} (\omega + \omega') \quad (4)$$

$$(2), (4) \Rightarrow \omega' = \frac{M}{M + 4m} \omega \Rightarrow v' = \frac{2M + 4m}{M + 4m} \frac{L}{r} \omega \quad (5)$$

$$(1), (5) \Rightarrow v' = \frac{2M + 4m}{M + 4m} \times \frac{2m}{M + 3m} v$$

۱۰- مطابق شکل یک تخته به جرم M روی دو استوانه به جرم m و شعاع R قرار گرفته و کل سیستم از حالت سکون روی سطح شیب‌داری شروع به حرکت می‌کند. اگر تخته روی استوانه‌ها و استوانه‌ها روی سطح شیب‌دار بغلتند، در صورتی که استوانه‌ها به اندازه h پایین بیایند، سرعت استوانه‌ها را بیابید (فرض کنید h طوری است که تماس تخته با استوانه‌ها کماکان حفظ می‌شود).



توجه می‌کنیم که سرعت و جایگاهی تخته ۲ برابر سرعت و جایگاهی مرکز استوانه‌ها است:

$$h' = 2h \quad v' = 2v$$

$$v = R\omega$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta K &= 2 \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right] + \frac{1}{2} M v'^2 \\ &= m v^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + 2 M v^2 \\ &= \left(\frac{5}{2} m + 2M \right) v^2 \end{aligned}$$

$$\Delta U = -2(mgh) - Mgh' = -2mgh - 2Mgh = -2(m+M)gh$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{m+M}{\frac{5}{2}m + 2M} (2gh)$$