باسمه تعالی

پاسخ تمرین سری ۳

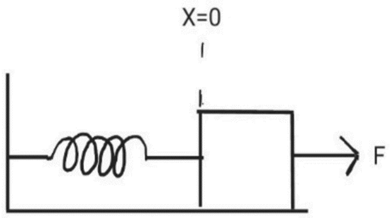
درس فیزیک ۱

تاریخ ارسال :

دوشنبه، ۱۹ آذر ۱۴۰۳

دانشکدهٔ علوم مهندسی دانشگاه تهران

نیمسال اول سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳



۱- مطابق شکل قطعه‌ای روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار گرفته است و به فنری با ثابت فنر $50\ N/m$ متصل شده است. در ابتدا فنر در طول آزاد خود است و قطعه در $x = 0$ قرار دارد. آنگاه یک نیروی خارجی با بزرگی ثابت $3\ N$ قطعه را آنقدر می‌کشد تا متوقف شود.

هنگامی که قطعه به موقعیت توقف می‌رسد:

الف) مکان قطعه کجاست؟

ب) کاری که توسط نیروی خارجی روی قطعه انجام شده چقدراست ؟

پ) کار انجام شده توسط نیروی فنر بر قطعه چقدر است ؟

ت) در حین جابجایی قطعه، مکان قطعه وقتی انرژی جنبشی آن بیشینه است، کجاست؟

ث) مقدار آن انرژی بیشینه چقدر است ؟

الف) فرض میکنیم جابجایی نهایی X_m باشد.

$$W = \Delta k$$

$$F\, X_m - \frac{1}{2} k\, X_m^2 = 0$$

$$X_m \left(F - \frac{1}{2} k\, X_m \right) = 0$$

$$X_m = \frac{2F}{k} = 0.12\ m$$

باید دقت کرد تعادل با توقف فرق دارد و استدلال زیر غلط است:

$$k\, X_m = F$$

$$X_m = \frac{F}{k}$$

ب)

$$W_F = F\, X_m = F\, \left(\frac{2F}{k}\right) = 0.36\, J$$

پ)

$$W = -\frac{1}{2} k\, X_m^2 = -\frac{1}{2}\, k\, \left(\frac{2F}{k}\right)^2 = -0.36\, J$$

ت) رابطهٔ انرژی جنبشی را در حالت کلی می‌نویسیم:

$$F\,x - \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

برای بیشینه شدن انرژی جنبشی به وسیلهٔ مشتق گیری سرعت را بیشینه می‌کنیم:

$$F\,\frac{dx}{dt} - k\,x\,\frac{dx}{dt} = m\,v\,\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$F = k\,X_c$$

$$X_c = \frac{F}{k} = 0.06\,m$$

ث)

$$X_c = \frac{F}{k}$$

$$F\left(\frac{F}{k}\right) - \frac{1}{2}\,k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$K_{max} = 0.09\,J$$

۲- یک ماشین مسابقه از حالت سکون شتاب می‌گیرد و فاصلهٔ معینی را در زمان T با موتوری با توان ثابت p طی می‌کند. اگر بتوان توان موتور را به مقدار دیفرانسیلی dp افزایش داد، چه تغییری در زمان مسابقه ایجاد می‌شود؟

$$W = \Delta k$$

$$\Longrightarrow pt = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2p}{m}t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2p}{m}t}$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{2\frac{p}{m}t^3} = \sqrt{\frac{8pt^3}{9m}}$$

فرض میکنیم کل مسافت D باشد :

$$D = \sqrt{\frac{8pt^3}{9m}} \Longrightarrow D^2 = \frac{8pt^3}{9m}$$

پس از دیفرانسیل گیری داریم :

$$0 = \frac{8}{9m}(t^3\,dp + 3t^2\,p\,dt)$$

$$\Longrightarrow\ 0 = \frac{8}{9} * \frac{t^2}{m}(t\,dp + 3p\,dt)$$

$$\Longrightarrow\ dt = -\frac{t}{3} * \frac{dp}{p}$$

۳- جسمی به جرم $2kg$ و تندی اولیه $2\ m/s$ را تحت نیروی برآیند $F = 2\beta xy\ \hat{\imath} + \beta x^2\ \hat{\jmath}$ از پایین یک سطح شیبدار (واقع در مبدا مختصات) به نقطه A به مختصات (a, b) روی سطح آن منتقل می‌کنیم. تندی جسم در این نقطه چقدر است؟

معادله سطح شیبدار $y = \frac{b}{a}x$

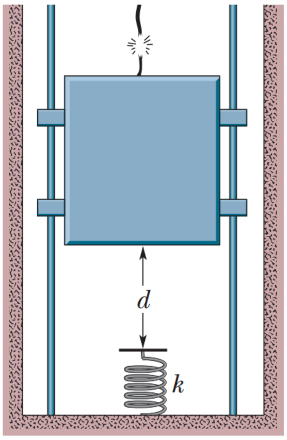
$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W = \int F\ dr = \int 2\beta xy\ dx + \beta\ x^2\ dy$$

$$\rightarrow W = \int_a^b \frac{2b}{a}\ \beta\ x^2\ dx + \beta\ x^2 \left(\frac{b}{a}\ dx\right)$$

$$\rightarrow W = \beta\ b\ a^2$$

$$v_A = \sqrt{\beta\ b\ a^2 + 4}$$



۴- جرم اتاقک آسانسوری $1800kg$ است. وقتی اتاقک ساکن است و کف آن در فاصلهٔ $d = 3.7\ m$ بالای فنری به ضریب سختی $k = 0.15\ MN/m$ قرار دارد، کابل اتصال اتاقک پاره می‌شود. یک وسیلهٔ امنیتی اتاقک را روی ریل‌هایی با نیروی اصطکاک $4.4\ kN$ نگه می‌دارد.

الف) تندی اتاقک را درست پیش از برخورد با فنر بدست آورید .

ب) مسافت بیشینه X ای که فنر فشرده میشود چقدر است؟

پ) مسافتی که اتاقک رو به بالا می‌جهد را بدست آورید.

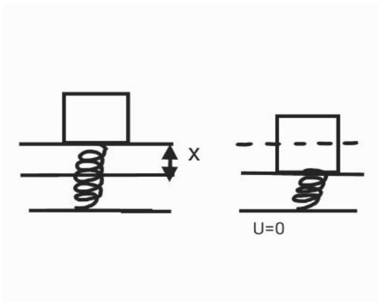
ت) پس از چندین بار بالا و پایین رفتن، اتاقک به حالت سکون می‌رسد و روی فنر متوقف می‌شود. مسافت کلی را که اتاقک تا پیش از متوقف شدن طی می‌کند بیابید. (از اصطکاک ایستایی ریل هنگام توقف اتاقک صرف نظر کنید.)

الف)

$$mgd - fd = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = 2.38\ m/s$$

ب)

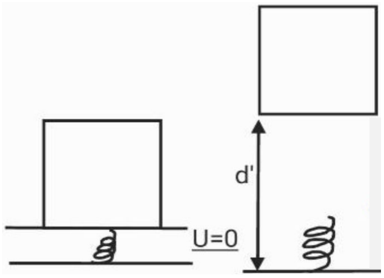


$$mgx + \frac{1}{2}mv^2 - fx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + (f - mg) * x - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$x = 0.9\ m$$

پ)



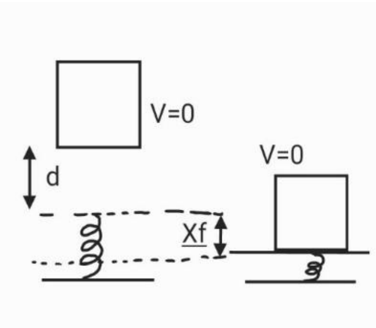
$$\frac{1}{2}kx^2 - fd' = mgd'$$

$$\rightarrow d' = \frac{1}{2} * \frac{kx^2}{mg + f} = 2.77\ m$$

ت) چون اصطکاک ایستایی قابل صرف نظر کردن است، می‌توان نوشت:

$$mg = k\,X_f \Longrightarrow\ X_f = \frac{mg}{k}$$

مسافت کل: L فشردگی نهایی فنر: X_f



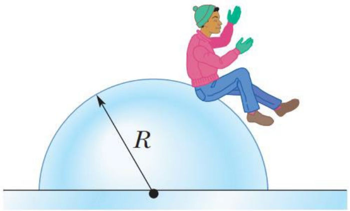
$$mg(d + X_f) - f * L = \frac{1}{2}k\left(X_f\right)^2$$

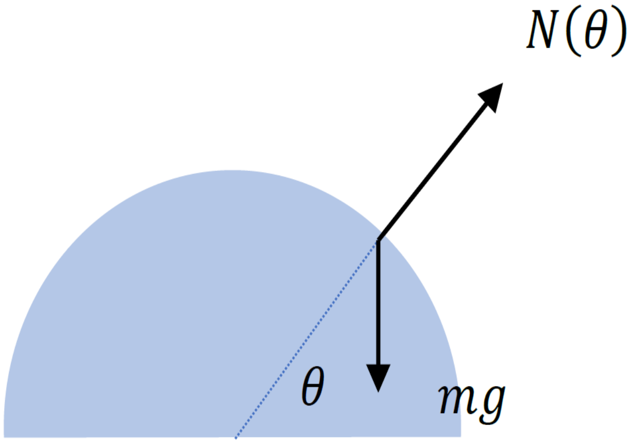
$$\rightarrow mg\left(d + \frac{mg}{k}\right) - f\,L = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$\rightarrow f\,L = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + mg\,d$$

$$\rightarrow L = 15.1\,m$$

۵- پسر بچه‌ای بالای قطعه یخی به شکل نیم‌کره نشسته است. ناگهان شروع به سر خوردن بر روی یخ می‌کند (سرعت اولیه صفر). تعیین کنید در چه ارتفاعی تماس پسر بچه با یخ قطع می‌شود؟





$$mg\sin\theta - N(\theta) = \frac{mv_\theta^2}{R}$$

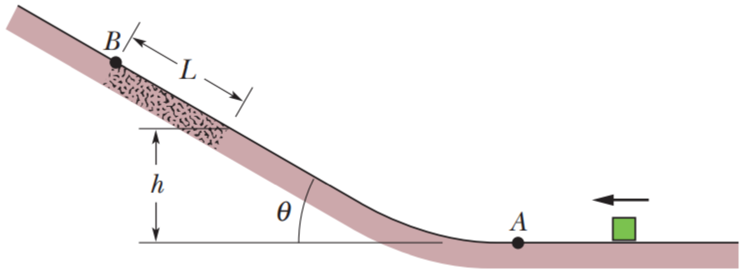
$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 + mgR\,sin\theta = mRg$$

$$\rightarrow\ N(\theta) = mg(3\,sin\theta - 2)$$

$$if\ N(\theta_c) = 0 \rightarrow sin\theta_c = \frac{2}{3}$$

$$H = R\,sin\theta_c = \frac{2R}{3}$$

۶- مطابق شکل زیر جسمی بر روی مسیر بدون اصطکاک حرکت کرده و به سطح شیبداری که زاویه $\theta = 30°$ دارد می‌رسد. بخشی از مسیر به طول $L = 0.75\ m$، که از ارتفاع $h = 2\ m$ شروع می‌شود، دارای ضریب اصطکاک $\mu_k = 0.4$ است. سرعت جسم در نقطه A برابر با $8\ m/s$ است. اگر جسم بتواند به نقطه B برسد، سرعتش در آن نقطه چقدر است؟ و اگر نتواند، بیشترین ارتفاعی که بالا می‌رود چقدر است؟



فرض کنیم جسم به اندازه x روی قسمت با اصطکاک حرکت کرده است و v_x سرعت جسم در آن لحظه است:

$$\frac{1}{2}\ m\ v_A^2 = mg(h + x\ sin\theta) + \mu_k\ mg\ cos\theta\ x + \frac{1}{2}\ m\ v_x^2$$

اگر در این رابطه به ازای $x = L$ به دست بیاوریم $v_{x=L}^2 \geq 0$، یعنی جسم می‌تواند به نقطهٔ B برسد (اگر مقدار منفی به دست بیاوریم یعنی نمی‌توانسته به بالا برسد). با محاسبه از رابطه بالا به دست می‌آوریم:

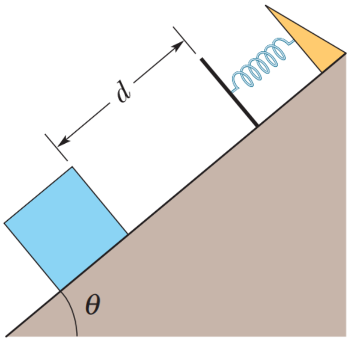
$$v_B^2 = 12.36\ (m/s)^2$$

$$\rightarrow\ v_B = 3.51\ m/s$$

اگر جسم نمی‌توانست به نقطهٔ B برسد، برای پیدا کردن بیشترین مقدار پیشروی در سطح اصطکاک‌دار، در رابطه بالا مقدار $v_x = 0$ قرار می‌دادیم و معادله را برای x حل می‌کردیم.

۷- فنری با ضریب سختی k، در بالای سطح شیبدار بدون اصطکاکی که با افق زاویه $30°$ می‌سازد، نصب شده است. جسمی به جرم m از پایین سطح و از فاصلهٔ d نسبت به انتهای آزاد فنر روی سطح به سمت بالا پرتاب می‌شود.
با فرض اینکه انرژی جنبشی اولیه جسم E_K باشد:
الف) کاهش انرژی جنبشی جسم را نسبت به انرژی جنبشی اولیه آن (ΔE_K) در لحظه‌ای که جسم، فنر را به اندازه $x = d/5$ می‌فشارد به دست آورید. (جواب تابعی از (وزن جسم) $d\ ,k\ ,W$ است.)
ب) با فرض اینکه جسم بعد از فشردن فنر به اندازه $x = 3d/2$ متوقف شود، انرژی جنبشی اولیه جسم را بیابید.
ج) جواب‌های دو قسمت قبل را با فرض معلوم زیر، به صورت عددی بیابید.

$$d = 0.4\ m\ , k = 100\ N/C\ , W = 10\ N$$



الف) نقطهٔ شروع حرکت جسم در پایین سطح شیبدار را نقطهٔ A و لحظه‌ای که فنر به اندازه x فشرده می‌شود را نقطهٔ B فرض می کنیم. طبق قانون بقای انرژی داریم:

$$E_{K_A} + U_A = E_{K_B} + U_B$$

$$E_{K_A} + 0 = E_{K_B} + mg(d + x)\ sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}k\ x_B^2$$

$$\rightarrow E_{K_B} - E_{K_A}\ = \ -\left(mg\frac{3d}{5} + \frac{1}{50}kd^2\right)$$

$$\rightarrow\ \ \Delta E_K\ = -d\left(\frac{30W + kd}{50}\right)$$

ب)

$$E_{K_A}{}' + U_A{}'\ = E_{K_B}{}' + U_B{}'$$

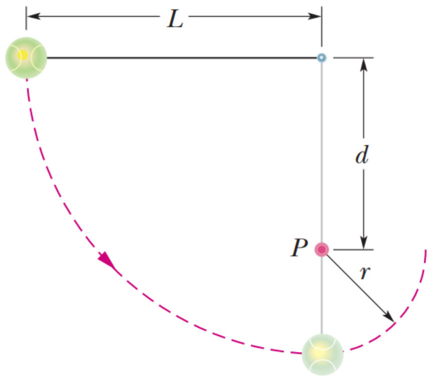
$$E'_{K_A} + 0 = 0 + mg(d + x'_B)\ sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\ k\frac{9d^2}{4}$$

$$\rightarrow\ E_{K_A}{}' = \frac{5}{4}Wd + \frac{9}{8}kd^2 = \frac{d}{4}(5W + 4.5kd)$$

ج)

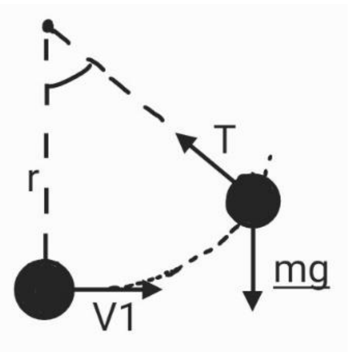
$$\Delta E_K\ = -2.72\ J,\ \ E_{K_A}{}' = 23\ J$$

۸- در شکل زیر به یک سر ریسمانی به طول $L = 120cm$ به توپی بسته شده است. میخی در نقطهٔ p کوبیده شده است. طول d حداقل چقدر باشد که اگر توپ درحالی که ریسمان افقی است رها شود، بتواند دور میخ بچرخد؟



از زمان شروع حرکت تا هنگام گیرکردن ریسمان به میخ در نقطهٔ p داریم:

$$mgl = \frac{1}{2} * mv_1^2$$



بعد از گیرکردن ریسمان تا انتها خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} * mv_1^2 = mgr(1 - cos\theta) + \frac{1}{2} * mv_\theta^2$$

$$v_\theta^2 = v_1^2 - 2gr(1 - cos\theta)$$

$$\sum f_n = m * a_n = m\frac{v^2}{r}$$

$$T - mgcos\theta = m\frac{v_1^2}{r} - 2mg(1 - cos\theta)$$

$$\rightarrow T = m\frac{v_1^2}{r} + mg(3cos\theta - 2)$$

$$\rightarrow T = \frac{2mgl}{r} + mg(3cos\theta - 2)$$

$$\rightarrow T = mg(\frac{2l}{r} - 2 + 3cos\theta)$$

$$at\ \theta:\ T_{max}=0, \qquad T_{min}=\pi$$

$$\rightarrow\ mg\left(\frac{2l}{r}-5\right)<T<mg\left(\frac{2l}{r}+1\right)$$

برای آنکه توپ بتواند حول میخ بپیچد، کشش نخ باید در همهٔ نقاط مثبت باشد. طبق روابط بالا دیده می‌شود که کمترین کشش نخ در بالاترین نقطه اتفاق می‌افتد و این نقطه، نقطهٔ بحرانی است.

$$T>0\rightarrow mg\left(\frac{2l}{r}-5\right)>0$$

$$\rightarrow r<\frac{2}{5}l$$

$$\rightarrow r_{max}\ =48\ cm$$

$$\rightarrow d_{min}\ =l-r_{max}=72\ cm$$

۹- انرژی پتانسیل یک ذره در یک میدان جاذبه عبارت است از $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ که در آن a, b ثابت‌های مثبت هستند. مطلوبست:
الف) مقدار r_0 که در آن ذره در حالت تعادل قرار دارد. (پایدار یا ناپایدار بودن این حالت را بررسی کنید.)
ب) اندازه ماکزیمم نیروی جاذبه را به دست آورید.

الف)

$$F = -\frac{du}{dr}$$

$$F = 0 \rightarrow 2ar^{-3} - br^{-2} = 0$$

$$\rightarrow r_0 = \frac{2a}{b}$$

مختصات نقطهٔ تعادل پیدا شد. حال باید بررسی کرد که تعادل در این نقطه پایدار است یا نه. برای این کار مشتق دوم محاسبه می‌شود:

$$\frac{d^2u}{dr^2}(r = r_0) \lesseqgtr 0$$

$$\rightarrow 6ar_0^{-4} - 2br_0^{-3} \lesseqgtr 0$$

$$\rightarrow \frac{b^4}{(2a)^3} > 0$$

پس تعادل در نقطهٔ r_0 پایدار است.

ب)

$$F = 2ar^{-3} - br^{-2}$$

$$\frac{dF}{dr} = 0 \rightarrow -6ar^{-4} + 2br^{-3} = 0$$

$$r = \frac{6a}{2b} = \frac{3a}{b}$$

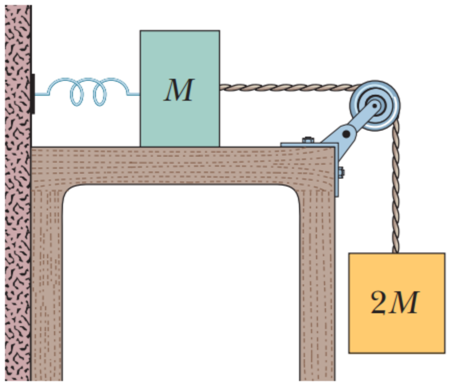
$$\rightarrow F_{max} = 2a\left(\frac{3a}{b}\right)^{-3} - b\left(\frac{3a}{b}\right)^{-2} = -\frac{1}{27}\frac{b^3}{a^2}$$

۱۰- دو جسم به جرم های $M, 2M$ مطابق شکل زیر به فنر بدون جرمی به سختی k متصل شده‌اند و سطح میز بدون اصطکاک است. درحالیکه فنر طول آرامش خود را دارد، دو جسم را از حالت سکون رها می‌کنیم.

الف) انرژی جنبشی ترکیب دو جسم درحالیکه جسم آویخته به اندازه d پایین می‌آید چقدر است؟

ب) انرژی جنبشی جسم آویخته هنگام پایین آمدن به اندازه d چقدر است؟

ج) بیشترین مسافت پیموده شده توسط جسم آویخته، قبل از توقف لحظه‌ای چقدر است؟ (فرض کنید طول میز به قدر کافی بزرگ است که جرم M از روی آن نمی‌افتد.)



الف) برای زمین و جرم M انرژی پتانسیل گرانشی ثابت است. مکان اولیه جرم $2M$ را سطح مبدا گرانش در نظر می‌گیریم. پس می‌توان نوشت:

$$U + K = U_0 + K_0$$

$$U_0 + K_0 = 0 \;\rightarrow\; U + K = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}kd^2 - 2Mgd + K = 0$$

$$\rightarrow\; K = 2Mgd - \frac{1}{2}kd^2$$

ب)

$$K_M = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$K_{2M} = \frac{1}{2}(2M)v^2$$

$$K = K_M + K_{2M}$$

$$\rightarrow\quad K_{2M} = \frac{2}{3}K$$

$$\rightarrow\quad K_{2M} = \frac{2}{3}\left(2Mgd - \frac{1}{2}kd^2\right)$$

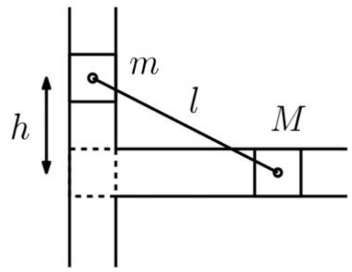
ج) توقف لحظه‌ای یعنی جایی که $U = K = 0$ باشد. پس خواهیم داشت:

$$K_{2M} = 0$$

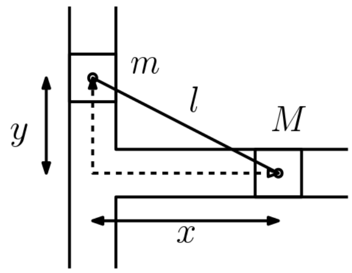
$$\rightarrow 2Mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

$$\rightarrow\ d = 4\frac{Mg}{k}$$

۱۱-مطابق شکل دو جرم در شیارها می‌توانند بدون اصطکاک حرکت کنند و توسط میلهٔ صلب به هم متصل شده‌اند. مجموعه تحت نیروی وزن خود از حالت سکون و ارتفاع h شروع به حرکت می‌کند. سرعت جرم m هنگامی که به محل تقاطع دو شیار (نشان داده شده با خط چین در شکل) می‌رسد، چقدر خواهد بود؟



رابطهٔ قیدی حرکت بین دو جرم:



$$x^2 + y^2 = l^2$$

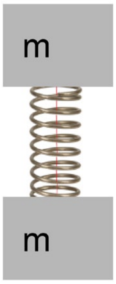
$$\rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

از رابطهٔ بالا هنگامی که $y = 0$ است نتیجه می‌شود $\frac{dx}{dt} = 0$ یا به بیان دیگر، سرعت جرم M صفر است. از طرفی چون نیروی پایستار وزن بر مجموعه عمل می‌کند و اتلاف نداریم، میتوانیم رابطهٔ بقای انرژی مکانیکی را بین لحظهٔ اول و لحظهٔ $y = 0$ بنویسیم:

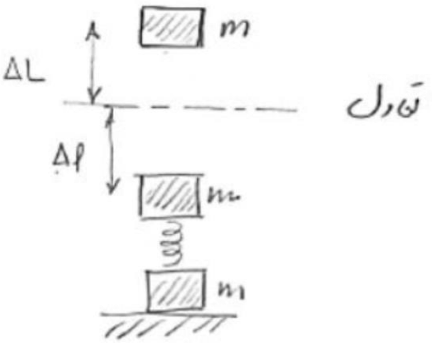
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M(0)^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

پس سرعت جسم برابر با سرعت سقوط آزاد آن از ارتفاع h خواهد بود. توجه کنید که رابطهٔ به دست آمده تنها برای نقطهٔ خاص $y = 0$ برقرار است. برای دیگر y ها سرعت جسم m با سرعت سقوط آزاد تفاوت خواهد داشت.



۱۲- در شکل مقابل، جسم پایینی روی زمین قرار دارد و هر دو جسم جرم برابر m دارند. فنر به اندازهٔ Δl فشرده می‌شود و سپس دو جسم با ریسمان به هم بسته می‌شوند. اگر ریسمان ناگهان پاره شود، کمترین مقدار Δl چقدر باشد تا جرم پایین در آستانه جدا شدن از سطح زمین قرار بگیرد؟



شکل مقابل، وضعیت دو جرم را زمانی که جرم پایین در حال جدا شدن از سطح زمین می باشد، نشان می دهد. در این لحظه جرم بالایی از حالت آزاد فنر نیز گذشته و به اندازه ΔL نیز بالاتر رفته است. سرعت جرم پایین هنوز صفر است اما جرم دارای انرژی جنبشی می باشد.
مقدار این انرژی جنبشی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$W_{spring} + W_{gravity} = \Delta K$$

$$\Delta K = K_f - K_i$$

$$\rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$W_{spring} = \int_{-\Delta l}^{0}(-kx)dx \; + \int_{0}^{\Delta L}(-kx)dx$$

$$\rightarrow W_{spring} = \left(-\frac{1}{2}kx^2\right)_{\Delta l}^{0} + \left(-\frac{1}{2}kx^2\right)_{0}^{\Delta L}$$

$$\rightarrow W_{spring} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$

$$W_{gravity} = \int_{-\Delta l}^{\Delta L}(-mg)dx$$

$$\rightarrow W_{gravity} = -mg(\Delta l + \Delta L)$$

با جایگذاری در رابطهٔ اول نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 - mg(\Delta l + \Delta L)$$

در این معادله علاوه بر Δl که مدنظر سوال است، دو مجهول دیگر (ΔL و v_f) نیز وجود دارد که مقادیر آن‌ها باید مشخص شوند:

۱. در این معادله هر اندازه Δl (مقدار فشردگی اولیه فنر) بزرگتر باشد، سرعت نهایی جرم بالایی بیشتر خواهد بود. ازآنجاکه دنبال کمترین مقدار Δl هستیم، پس سرعت نهایی را صفر درنظر می‌گیریم.

$$v_f = 0$$

۲. در لحظه جدا شدن جرم پایینی از زمین، نیروی عکس‌العمل سطح صفر خواهد بود؛ پس نیروی کشش فنر برابر وزن جرم پایین است.

$$k\Delta L = mg$$

$$\rightarrow \ \Delta L = \frac{mg}{k}$$

در نهایت با قرار دادن این مقادیر در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$(\Delta l)^2 - \frac{2mg}{k}\Delta l - 3\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \Delta l = \begin{cases} -mgk \ \boxtimes \\ 3\dfrac{mg}{k} \ ☑ \end{cases}$$