



باسمه تعالی



پاسخ تمرین سری ۴

درس فیزیک ۱

تاریخ ارسال :

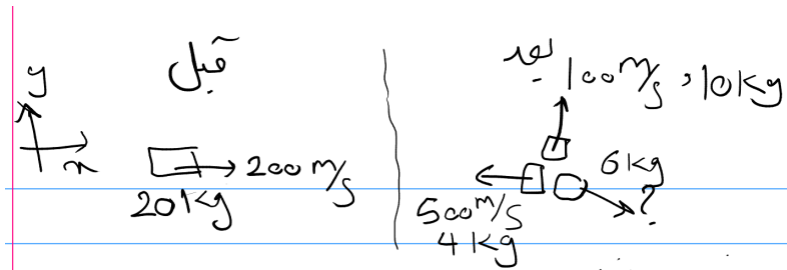
دوشنبه، ۱۰ دی ۱۴۰۳

دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران

نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

۱- یک جرم 20 کیلوگرمی با سرعت 200 m/s در جهت مثبت محور x در حال حرکت است. به دلیل یک انفجار درونی، جسم به سه قطعه تقسیم می‌شود. درست در لحظه بعد از انفجار، قطعه اول با جرم 10 kg در راستای مثبت محور y با سرعت 100 m/s و قطعه دوم به جرم 4 kg در جهت منفی محور x با سرعت 500 m/s پرتاب می‌شوند. الف) بردار سرعت قطعه سوم را پس از انفجار بیابید. ب) مقدار انرژی آزاد شده را بدست آورید.

وضعیت جرم قبل و بعد از انفجار در شکل زیر نشان داده شده است. از آنجاییکه انفجار، نیروی داخلی محسوب می‌شود، طبق اصل پایستگی تکانه می‌دانیم که تکانه سیستم قبل و بعد از انفجار یکسان است.



الف)

$$x: 20 \cdot 200 = -4 \cdot 500 + 6v_x$$

$$\rightarrow v_x = 1000 \text{ m/s}$$

$$y: 0 = 10 \cdot 100 + 6v_y$$

$$\rightarrow v_y = -\frac{1000}{6} \text{ m/s}$$

ب) با فرض اینکه انرژی انفجار تماماً صرف افزایش انرژی جنبشی سیستم شده و به صورت هیچ نوع انرژی دیگر (مانند حرارت، صوت، نور و ...) آزاد نمی‌شود، می‌توان با محاسبه تغییر انرژی جنبشی، انرژی آزاد شده را پیدا کرد.

$$\begin{cases} \Delta E_{mec} = W_{external} \\ \Delta U = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta K = W_{external}$$

$$K1 = \frac{20 \cdot 200^2}{2}$$

$$K2 = \frac{1}{2} \left[10 \cdot 100^2 + 4 \cdot 500^2 + 6 \cdot \left(1000^2 + \left(\frac{1000}{6} \right)^2 \right) \right]$$

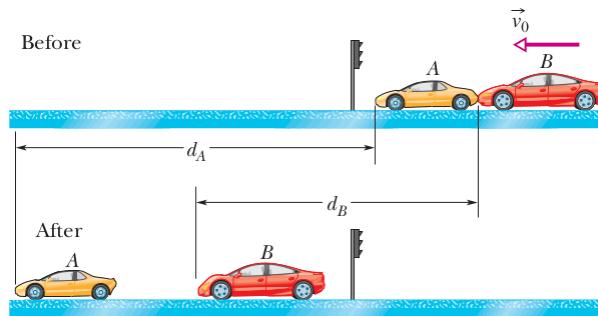
$$\Delta K \approx 32.3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

۲- اتومبیل A با جرم 1100 kg در پشت چراغ قرمز توقف کرده است که ناگهان اتومبیل B با جرم 1400 kg از پشت به آن می‌کوبد. پس از آن، هر دو اتومبیل با چرخ‌های قفل شده، شروع به لیز خوردن روی سطح به ضریب اصطکاک 0.13 می‌کنند و پس از طی مسافت‌های $d_A = 8.2 \text{ m}$, $d_B = 6.1 \text{ m}$ متوقف می‌شوند.

الف) سرعت اتومبیل‌ها را بلافاصله پس از لحظه برخورد بیابید.

ب) با فرض اینکه تکانه خطی پایسته بماند، سرعت اتومبیل B را درست قبل از لحظه برخورد بیابید.

ج) توضیح دهید که چه عواملی به فرض پایستگی تکانه در قسمت قبل خدشه وارد می‌کنند. به عبارت دیگر چه ساده‌سازی‌هایی را باید در نظر گرفت تا فرض پایستگی تکانه صحیح باشد.



الف)

$$\begin{cases} a = f_k/m \\ f_k = \mu_k mg \end{cases} \rightarrow a = \mu_k g$$

$$\begin{cases} v^2 - v_0^2 = 2ax \\ v_0 = 0 \\ a = \mu_k g \end{cases} \rightarrow v^2 = 2ax$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2\mu_k g d}$$

$$v_A = 4.6 \text{ m/s}, \quad v_B = 3.9 \text{ m/s}$$

ب) از پایستگی تکانه خواهیم داشت:

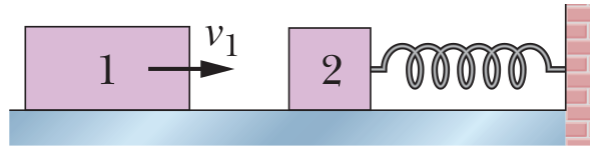
$$m_B v_0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$\rightarrow v_0 = 7.5 \text{ m/s}$$

ج) بقای تکانه بر این اصل استوار است که در مدت زمان برخورد، تنها نیروی موثر، نیروی برخورد میان دو اتومبیل است و بقیه نیروها قابل صرف نظر کردن هستند. چنانچه مدت زمان برخورد کوتاه باشد، با دقت خوبی این فرض برقرار است؛ اما اگر مدت زمان برخورد خیلی طولانی شود (اتومبیل‌ها تغییر شکل داده و مسافت زیادی در حین برخورد بلغزند) از دقت فرض پایستگی کاسته می‌شود. گرچه هنوز هم فرض پایستگی فرض خوب و معقولی است.

۳- در شکل زیر جسم ۱ با سرعت اولیه V_1 حرکت کرده و به جسم ۲ که به فنر با ثابت K بسته شده و در حال سکون است، برخورد می‌کند. چنانچه جرم ۱ پس از برخورد به جرم ۲ بچسبد؛
الف) حداکثر فشردگی فنر را بیابید.

ب) آیا انرژی مکانیکی در این برخورد ثابت می‌ماند؟ اگر تغییر می‌کند، میزان تغییر آن چقدر است؟



الف) ابتدا از پایستگی تکانه برای محاسبه سرعت پس از برخورد استفاده می‌کنیم:

$$m_1 v_1 = m_1 v + m_2 v$$

$$\rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

پس از برخورد، مسأله به این شکل می‌شود که یک جرم (با جرمی معادل دو جرم ۱ و ۲) و با سرعت v به یک فنر برخورد می‌کند. حال می‌خواهیم حداکثر فشردگی فنر را پیدا کنیم. برای این کار از بقای انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم:

$$E_1 = E_2 \rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

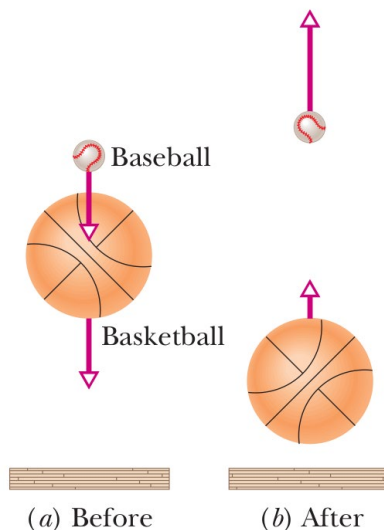
$$\rightarrow 0 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$\rightarrow x = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{(m_1 + m_2)k}}$$

ب) اشتباه متداول دانشجویان این است که از ابتدا بدون در نظر گرفتن برخورد، از رابطه بقای انرژی استفاده می‌کنند؛ در صورتیکه انرژی مکانیکی قبل و بعد از برخورد تغییر می‌کند و ثابت نیست. مقدار این تغییر از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$E_2 - E_1$$

۴- مطابق شکل زیر، یک توپ بسکتبال به جرم M و یک توپ بیسبال به جرم m ، بطور همزمان از حالت سکون و ارتفاع h از سطح زمین رها می‌شوند. (فرض کنید شعاع توپ‌ها در مقایسه با h کوچک است و می‌توان اجسام را نقطه فرض کرد.)
 الف) اگر توپ بسکتبال بطور الاستیک به زمین برخورد کرده و برگردد، سپس برخورد الاستیک دیگری با توپ بیسبال داشته باشد طوری که پس از برخورد ساکن شود؛ در اینصورت جرم توپ بیسبال m چقدر است؟
 ب) نسبت حداکثر ارتفاعی که توپ بیسبال بالا می‌رود به ارتفاع سقوط اولیه h چقدر است؟



الف) سرعت دو توپ هنگام رسیدن به زمین $\sqrt{2gh}$ است. توپ بسکتبال ابتدا به زمین خورده و با همان سرعت برمی‌گردد، سپس به توپ بیسبال برخورد می‌کند. از فرمول برخورد الاستیک داریم:

$$v_M = \frac{M - m}{M + m} v_{M_0} + \frac{2m}{M + m} v_{m_0}$$

$$\rightarrow v_M = \frac{M - m}{M + m} (\sqrt{2gh}) - \frac{2m}{M + m} (\sqrt{2gh})$$

$$\rightarrow v_M = \frac{M - 3m}{M + m} \sqrt{2gh}$$

گفته شده که بعد از برخورد سرعت توپ بسکتبال صفر می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$v_M = 0 \rightarrow m = \frac{M}{3}$$

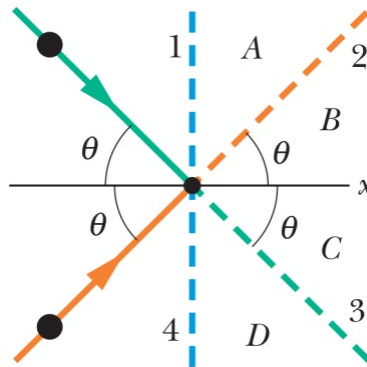
ب) از فرمول برخورد الاستیک سرعت جرم m را پس از برخورد بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}v_m &= \frac{m - M}{M + m}(-\sqrt{2gh}) + \frac{2M}{M + m}(\sqrt{2gh}) \\ \rightarrow v_m &= \frac{m - (3m)}{(3m) + m}(-\sqrt{2gh}) + \frac{2(3m)}{(3m) + m}(\sqrt{2gh}) \\ \rightarrow v_m &= \frac{-(-2m) + 6m}{4m}\sqrt{2gh} \\ \rightarrow v_m &= 2\sqrt{2gh}\end{aligned}$$

حرکت توپ بیسبال از این لحظه به بعد یک حرکت سقوط آزاد با سرعت اولیه فوق است؛ در نتیجه حداکثر ارتفاع توپ برابر می شود با:

$$h_{max} = \frac{v^2}{2g} = 4h$$

- ۵- مطابق شکل زیر، دو ذره با جرم‌های مساوی و اندازه سرعت یکسان V روی سطح بدون اصطکاکی در حال حرکت هستند. مبدا مختصات در محل برخورد دو جسم انتخاب شده و چهار خط با شماره‌های ۱ تا ۴ و چهار ناحیه با نام‌های A تا D روی شکل مشخص شده‌اند. جرم‌ها پس از برخورد روی کدام خط یا در کدام ناحیه حرکت خواهند کرد اگر برخورد:
- الف) کاملاً ناکشسان (پلاستیک) باشد.
 - ب) کاملاً کشسان (الاستیک) باشد.
 - ج) کشسان (الاستیک) اما با اتلاف انرژی باشد.
 - د) کاملاً کشسان (الاستیک) باشد.
 - ه) کاملاً ناکشسان (پلاستیک) باشد.

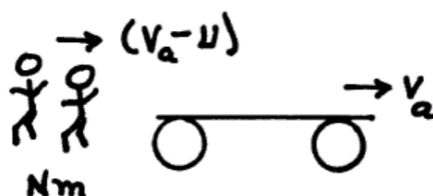


به دلیل اینکه جرم‌ها و زاویه برخوردها مساویست، شرایط تقارن کامل در این مسئله برخورد، برقرار است. با توجه به شهود فیزیکی می‌دانیم که مسیر حرکت و سرعت جرم‌ها پس از برخورد نیز باید متقارن باشد. همان‌طور که می‌دانید در مسئله ریاضی برخورد دوبعدی، تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات است و در حالت کلی غیر قابل حل است! اما در اینجا شهود فیزیکی باعث می‌شود جواب‌های غیرمتقارن حذف شوند و در نتیجه مسئله قابل حل شود.

- الف) دو جسم به همدیگر می‌چسبند. با توجه به پایستگی تکانه در راستای محور y ، سرعت در راستای y صفر می‌شود و جرم‌ها روی محور x با سرعت $v \cos \theta$ حرکت می‌کنند.
- ب) انرژی جنبشی ثابت می‌ماند و با توجه به وجود تقارن، اندازه سرعت‌ها باید با قبل از برخورد یکسان باشد. از بقای تکانه نتیجه می‌شود که دو جسم پس از برخورد دقیقاً با همان زاویه‌های قبل از برخورد، بر روی خطوط ۲ و ۳ حرکت می‌کنند.
- ج) در این حالت مقداری از انرژی جنبشی تلف می‌شود و اندازه سرعت پس از برخورد کمتر می‌شود. مولفه x سرعت طبق پایستگی تکانه نمی‌تواند تغییر کند؛ پس مقدار مولفه y کم می‌شود و در نتیجه جرم‌ها پس از برخورد، در ناحیه‌های B و C حرکت می‌کنند.
- د) همان‌طور که اشاره شد، در این حالت اندازه سرعت پس از برخورد با اندازه آن قبل از برخورد یکی است.
- ه) طبق پایستگی تکانه $v \cos \theta$

- ۶- یک گاری به جرم M داریم. تعداد N مرد، هر یک به جرم m ، از روی گاری و با سرعت u نسبت به آن، از یک سمت بیرون می‌پرند. در نتیجه این حرکت، گاری به سمت مقابل حرکت می‌کند. سرعت نهایی گاری را محاسبه نمایید اگر:
 الف) مردها همه با هم از گاری بیرون بپرند.
 ب) مردها یکی یکی از گاری بیرون بپرند.

(الف)

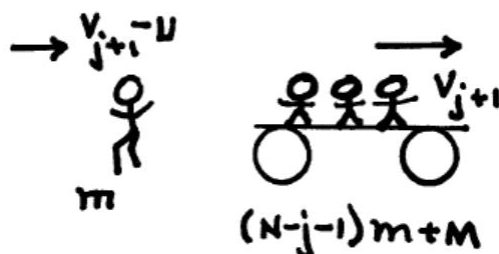


$$P_i = 0$$

$$P_f = Mv_a + Nm(v_a - u) = 0$$

$$v_a = \frac{Nm}{Nm + M} u$$

ب) فرض می‌کنیم که فرد j پریده است. پس سرعت گاری v_j است.



$$P_i = [(N - j)m + M]v_j$$

$$P_f = [(N - j - 1)m + M]v_{j+1} + m(v_{j+1} - u)$$

$$v_{j+1} = \frac{m}{(N - j - 1)m + M} u + v_j$$

$$v_b = \left[\frac{m}{Nm + M} + \frac{m}{(N - 1)m + M} + \dots + \frac{m}{m + M} \right] u$$

۷- یک قوطی نوشابه با جرم یکنواخت M و ارتفاع H ، با مقداری نوشابه به جرم m پر شده است. یک سوراخ بسیار کوچک بر سر و ته قوطی ایجاد می‌شود تا نوشابه به تدریج خالی شود. مطلوبست محاسبه:
 الف) ارتفاع h (مرکز جرم قوطی و نوشابه درونش با هم) وقتی قوطی کاملاً پر است و وقتی کاملاً خالی شود.
 ب) تغییرات ارتفاع h در حین خارج شدن نوشابه از قوطی.
 ج) مقدار x (ارتفاع لحظه‌ای سطح نوشابه نسبت به ته قوطی) وقتی که مرکز جرم به پایین‌ترین نقطه خود می‌رسد.

چون قوطی دارای جرم یکنواخت است، مرکز جرم آن در مرکز هندسی آن، یعنی روی محور مرکزی گذرنده از دو قاعده قوطی قرار دارد و فاصله آن از انتهای قوطی $\frac{H}{2}$ است. مرکز جرم نوشابه به تنهایی، در مرکز هندسی آن و به فاصله $\frac{x}{2}$ از انتهای قوطی است.

الف) وقتی قوطی نوشابه پر است، مرکز جرم در $\frac{H}{2}$ است. پس مرکز جرم قوطی و نوشابه باهم، برابر است با:

$$h = \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m\left(\frac{H}{2}\right)}{M + m} = \frac{H}{2}$$

وقتی قوطی کاملاً خالی است، مرکز جرم آن به فاصله $\frac{H}{2}$ از قاعده آن قرار دارد.

ب) با توجه به قسمت الف، ابتدا ارتفاع مرکز جرم (نسبت به ته قوطی) کاهش یافته و سپس تا مقدار $\frac{H}{2}$ افزایش می‌یابد.

ج) وقتی ارتفاع سطح نوشابه از ته قوطی x باشد، جرم نوشابه موجود در قوطی برابر $m_p = m\left(\frac{x}{H}\right)$ است (m جرم نوشابه هنگام پر بودن قوطی است یعنی وقتی که $x = H$).

مرکز جرم نوشابه به تنهایی به صورت لحظه‌ای در فاصله $\frac{x}{2}$ از ته قوطی قرار دارد. پس:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m_p\left(\frac{x}{2}\right)}{M + m_p} \\ \rightarrow \lambda &= \frac{M\left(\frac{H}{2}\right) + m\left(\frac{x}{H}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{M + \left(\frac{mx}{H}\right)} \\ \rightarrow \lambda &= \frac{MH^2 + mx^2}{2(MH + mx)}\end{aligned}$$

برای اینکه x را وقتی که مرکز جرم به پایین‌ترین نقطه خود می‌رسد، باید مشتق h را نسبت به x گرفته و مساوی صفر قرار دهیم. آنگاه معادله را برای یافتن x حل کنیم. خواهیم داشت:

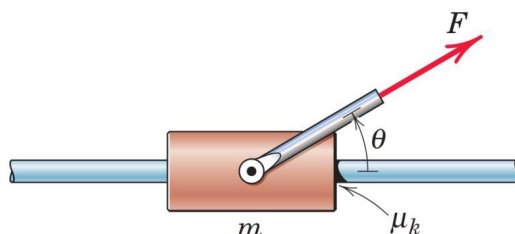
$$\frac{dh}{dx} = \frac{m^2 x^2 + 2MxHx - MxH^2}{2(MH + mx)^2} = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{MH}{m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \right)$$

توجه شود که ریشه مثبت انتخاب شد چون x باید مثبت باشد. به ازای این x خواهیم داشت:

$$h = \frac{MH^2 + mx^2}{2(MH + mx)}$$

۸- مطابق شکل زیر، لغزنده‌ای به جرم m بر روی میلهٔ زبر افقی تحت تاثیر نیروی F حرکت می‌کند. بزرگی این نیرو ثابت است ولی زاویه آن نسبت به محور افقی در حین حرکت تغییر می‌کند. فرض کنید که $F \leq mg$ است و زاویه نیرو با محور افقی به صورت $\theta = kt$ نسبت به زمان تغییر می‌کند (k یک مقدار ثابت است). اگر لغزنده هنگامی که $\theta = 0^\circ$ است دارای سرعت v_1 به سمت راست باشد، سرعت v_2 آن را هنگامی که $\theta = 90^\circ$ است بیابید. همچنین مقدار نیروی F که سبب می‌شود $v_2 = v_1$ باشد را بیابید.



$$\Sigma F_x = \frac{dP_x}{dt} \rightarrow \Delta P_x = \int_{t_0}^t \Sigma F_x dt$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F \sin \theta + N = mg$$

$$\rightarrow N = mg - F \sin \theta$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$$

چون $F \leq mg$ است، N مثبت خواهد بود.

$$\Sigma F_x = F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta)$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = F (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k mg$$

$$\theta = kt \rightarrow dt = \frac{d\theta}{k}$$

$$\rightarrow m(v_2 - v_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [F (\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - \mu_k mg] \frac{d\theta}{k}$$

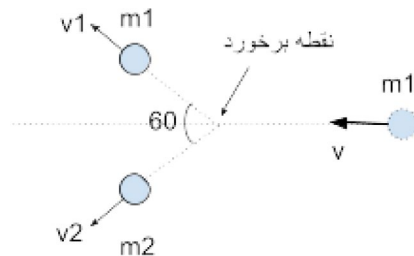
$$\rightarrow m(v_2 - v_1) = \frac{1}{k} \left[F(1 + \mu_k) - \mu_k mg \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\rightarrow v_2 = v_1 + \frac{1}{mk} \left[F(1 + \mu_k) - \mu_k mg \frac{\pi}{2} \right]$$

$$v_2 = v_1 \rightarrow F(1 + \mu_k) = \frac{\pi \mu_k mg}{2}$$

$$\rightarrow F = \frac{\pi \mu_k mg}{2(1 + \mu_k)}$$

- ۹- ذره ۱ به طور کشسان به ذره ساکن ۲ برخورد می‌کند. نسبت جرم‌های آن‌ها را بدست آورید اگر:
 الف) بعد از برخورد، دو ذره با سرعت برابر و در راستای مخالف هم حرکت کنند.
 ب) مطابق شکل زیر، دو ذره به طور متقارن نسبت به راستای حرکت ذره ۱ و با زاویه واگرایی 60° از هم دور شوند.



الف) از پایستگی انرژی داریم:

$$\begin{aligned}
 m_1 v_1 &= m_2 v - m_1 v \\
 \rightarrow m_1 v_1 &= (m_2 - m_1) v \\
 \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \\
 m_1 v_1^2 &= (m_2 + m_1) \left(\frac{m_1 v_1}{m_2 - m_1} \right)^2 \\
 \rightarrow \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)^2} &= 1 \\
 \rightarrow m_1^2 + m_1 m_2 &= m_1^2 + m_2^2 - 2 m_1 m_2 \\
 \rightarrow 3 m_1 m_2 &= m_2^2 \\
 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

ب) اگر زاویه حرکت هر ذره با خط افق (نقطه‌چین) را $\theta = 30^\circ$ در نظر بگیریم، با توجه به بقای تکانه خطی در راستای x و y داریم:

$$\begin{cases} m_1 v = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos \theta \\ m_1 v_1 \sin \theta = m_2 v_2 \sin \theta \rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \end{cases} \rightarrow m_1 v = 2 m_1 v_1 \cos \theta$$

$$\rightarrow v_1 = v_2 \cos \theta, \quad v_2 = \frac{m_1 v}{2 m_2 \cos \theta}$$

با توجه به پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\rightarrow m_1 v^2 = m_1 \left(\frac{v}{2 \cos \theta} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 v}{2 m_2 \cos \theta} \right)^2$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} + \frac{m_1}{4 m_2 \cos^2 \theta}$$

$$\rightarrow 4 m_2 \cos^2 \theta = m_2 + m_1$$

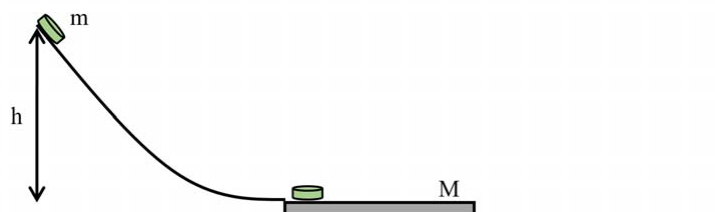
$$\rightarrow m_2 (4 \cos^2 \theta - 1) = m_1$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4 \cos^2 \theta - 1$$

۱۰- دیسک کوچکی به جرم m از ارتفاع h از حال سکون حرکت کرده و در پایین سطح شیبدار به تخته‌ای به جرم M که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد می‌رسد. بین تخته و دیسک اصطکاک وجود دارد که باعث می‌شود تخته سرعت گرفته و از سرعت دیسک کم شود تا نهایتاً دیسک نسبت به تخته حرکت نکند.

الف) در لحظه‌ای که سرعت تخته $\frac{m}{2(m+M)}\sqrt{2gh}$ است، سرعت دیسک نسبت به آن چقدر است؟

ب) نهایتاً دیسک نسبت به تخته متوقف شده و هر دو با هم حرکت می‌کنند. کار نیروی اصطکاک در کل فرآیند چقدر است؟



سرعت جرم هنگام ورود به تخته برابرست با:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

الف) اگر v_1 سرعت دیسک نسبت به تخته و v_2 سرعت تخته نسبت به زمین باشد:

$$mv_0 = m(v_1 + v_2) + Mv_2$$

$$\rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

ب) اصطکاک، نیروی داخلی مجموعه دیسک و تخته به حساب می‌آید. از پایستگی تکانه خواهیم داشت:

$$mv_0 = (M + m)v$$

$$\rightarrow v = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh}$$

طبق پایستگی انرژی، کاهش انرژی مکانیکی سیستم برابر با کار اصطکاک است:

$$W_f = mgh - \frac{1}{2}(m + M)v^2$$

$$\rightarrow W_f = \frac{mM}{M + m}gh$$