باسمه تعالی

پاسخ تمرین سری ۱

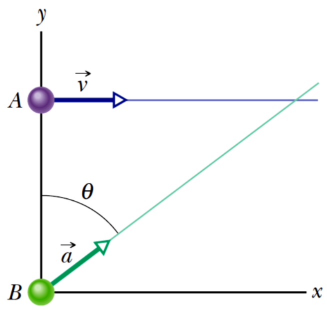
درس فیزیک ۱

تاریخ ارسال :

دوشنبه، ۲۱ آبان ۱۴۰۳

دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران

نیمسال اول سال تحصیلی ۰۴-۱۴۰۳



۱- ذره A در امتداد خط $y = 30\ m$ با سرعت ثابت v به بزرگی $3\ m/s$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذره A از محور y می‌گذرد، ذره B با سرعت اولیه صفر و شتاب ثابت a به بزرگی $0.4\ m/s^2$ مطابق شکل از مبدا شروع به حرکت می‌کند. به ازای چه زاویه ای از θ بین بردار شتاب و جهت مثبت محور y ها، این دو ذره به هم برخورد خواهند کرد؟

حرکت ذرهٔ B در صفحه، با **شتاب ثابت** است. برای حرکت ذرهٔ B در راستای قائم داریم:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow 30\ \mathrm{m} = \frac{1}{2}[(0.40\ \mathrm{m/s^2})\cos\theta]t^2$$

در صورت برخورد ذره B و A، مولفهٔ x آن‌ها باید برابر شود:

$$vt = \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow (3.0\ \mathrm{m/s})t = \frac{1}{2}[(0.40\ \mathrm{m/s^2})\sin\theta]\,t^2$$

و به دست می آوریم:

$$t = \frac{2v}{a_x} = \frac{2(3.0\ \mathrm{m/s})}{(0.40\ \mathrm{m/s^2})\sin\theta}$$

این زمان را در رابطه حرکت جانبی جایگذاری می کنیم:

$$30\ \mathrm{m} = \frac{1}{2}[(0.40\ \mathrm{m/s^2})cos\theta]\left(\frac{2(3.0\ \mathrm{m/s})}{(0.40\ \mathrm{m/s^2})\sin\theta}\right)^2$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta,$$

$$30 = \frac{9.0}{0.20}\times\frac{\cos\theta}{(1-\cos^2\theta)} \Rightarrow 1-\cos^2\theta = \frac{9.0}{(0.20)(30)}cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-1.5+\sqrt{1.5^2-4(1.0)(-1.0)}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

۲- آسانسوری با شتاب ثابت رو به بالای $2.2\ m/s^2$ صعود می‌کند. در لحظه ای که سرعت رو به بالای آن $2.4\ m/s$است، پیچی از سقف آسانسور که $2.7\ m$ بالاتر از کف آن قرار دارد می‌افتد. مطلوبست محاسبه:

الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور.

ب) مقدار جابجایی این پیچ.

معادلات حرکت (شتاب ثابت) را برای آسانسور و پیچ می‌نویسیم:

$$y_{\text{پیچ}} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2 + 2.4t + 2.7$$

$$y'_{\text{کف}} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}(2.2)t^2 + 2.4t$$

الف) در زمان برخورد پیچ با کف آسانسور:

$$y_{\text{پیچ}} = y'_{\text{کف}}$$

$$-4.9t^2 + 2.7 = 1.1t^2 \rightarrow 6t^2 = 2.7 \rightarrow t \approx 0.7s$$

ب)

$$\Delta y = y - 2.7 = -\frac{1}{2}(9.8)(0.7)^2 + 2.4(0.7) \approx -0.71m$$

۳- سرعت ذره‌ای که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند به صورت $v = \alpha\sqrt{x}$ می‌باشد که α مقدار ثابت و مثبتی است. با فرض اینکه در زمان $t = 0$ ذره در مکان $x = 0$ قرار داشته باشد:

الف) سرعت و شتاب را به صورت تابعی از زمان بیابید.

ب) سرعت میانگین ذره را در بازه زمانی که ذره طول S از ابتدای مسیر خود را پیموده است، بیابید.

برای حل مسئله، به تکنیک ضرب مشتق‌ها در فرمول شتاب دقت کنید.

الف)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \alpha\sqrt{\mathrm{x}}\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\int_0^{\mathrm{v}} dv = \int_0^{\mathrm{t}} \frac{\alpha^2}{2} dt \Rightarrow v = \frac{\alpha^2}{2} t$$

ب)

$$\Delta x = s = \int v\,dt = \int \frac{\alpha^2}{2} t\,dt = \frac{\alpha^2}{4} t^2 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{s}}{\alpha}$$

$$v_{avg} = \frac{\int v(t)dt}{\int dt} = \frac{s}{\frac{2\sqrt{\mathrm{s}}}{\alpha}} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{۲}$$

۴- بردار شتاب ذره‌ای روی صفحه افقی xy توسط $a = 3v_x\ i + 4t\ j$ داده می‌شود که در آن a بر حسب متر بر مجذور ثانیه و t بر حسب ثانیه و v_x سرعت در راستای x بر حسب متر بر ثانیه است. ابتدا ذره در بردار مکان $r = 20i + 40j(m)$ و دارای بردار سرعت $v = 5i + 2j(m/s)$ است. در زمان $t = 4\ s$ بردار مکان ذره را برحسب بردارهای یکه بیابید.

مؤلفه‌های بردار شتاب ثابت نیستند و باید از روش انتگرال استفاده کنیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \to 3v_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int_5^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^t 3\,dt$$

$$ln\frac{v_x}{5} = 3t \to v_x = 5e^{3t}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \to \int_{20}^{x} dx = \int_0^t v_x dt$$

$$\int_{20}^{x} dx = \int_0^t 5e^{3t} dt \ \to\ x = \frac{5}{3}(e^{3t} - 1) + 20$$

$$x(t = 4) = \frac{5}{3}(e^{12} - 1) + 20 \approx 271 \times 10^3\mathrm{m}$$

به طریق مشابه:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \to \int_2^{v_y} dv_y = \int_0^t 4t\ dt$$

$$v_y = 2t^2 + 2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \to \int_{40}^{y} dy = \int_0^t v_y\ dt$$

$$\to y = \frac{2}{3}t^3 + 2t + 40 \to y(t = 4) \approx 91\ (m)$$

$$r(t = 4) = 271000\ i + 91\ j$$

۵- دو ذره در یک میدان گرانشی با شتاب جاذبه g قرار دارند. در یک زمان دو ذره از یک نقطه با سرعت‌های $3\,m/s, 4\,m/s$ ولی در جهت مخالف هم در راستای افق پرتاب می‌شوند. فاصله بین ذرات را وقتی که بردار سرعت‌های آن‌ها بر هم عمودند، بیابید.

با توجه به جهت دلخواه مختصات و قوانین حرکت در دو بعد:

$$v_1 = -v_{1x}\,\hat{\imath} - gt\,\hat{\jmath}$$

$$v_2 = v_{2x}\,\hat{\imath} - gt\,\hat{\jmath}$$

حال اگر دو بردار سرعت بر هم عمود باشند:

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \rightarrow -v_{1x}v_{2x} + (gt)^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{v_{1x}v_{2x}}{g}}$$

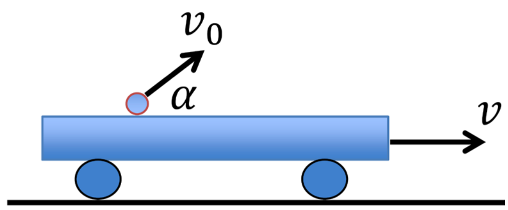
و مسافتهای پیموده شده افقی در این دو زمان:

$$x_1 = v_{1x}t,$$
$$x_2 = v_{2x}t$$

در نتیجه فاصلهٔ بین دو پرتابه:

$$L = x_1 + x_2 = (v_{1x} + v_{2x})t = (v_{1x} + v_{2x})\frac{\sqrt{v_{1x}v_{2x}}}{g} = 2.42\,\mathrm{m}$$

۶- ارابه‌ای با سرعت ثابت v_0 در حرکت است. ناگهان از درون ارابه، ذره‌ای با سرعت v_0 نسبت به ارابه و زاویه α نسبت به افق پرتاب می‌شود. α چقدر باشد تا برد پرتاب بیشینه شود؟



برای حرکت پرتابی داریم:

$$x = (v_{0x} + v)t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_{0y}t$$

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x} + v}\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x} + v}\right)$$

برد پرتابه با قرار دادن $x = R, y = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x = R,\ y = 0 \Rightarrow R = \frac{2v_{0y}(v_{0x} + v)}{g}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0 \sin(\alpha)\,(v_0 \cos(\alpha) + v)}{g}$$

برای بیشینه نمودن برد خواهیم داشت:

$$\frac{dR}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \cos(\alpha)\left(\cos(\alpha) + \frac{v}{v_0}\right) - \sin^2(\alpha) = 0$$

$$2\cos^2(\alpha) + \frac{v}{v_0}\cos(\alpha) - 1 = 0$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{v}{4v_0} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{4v_0}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)$$

مقادیر قابل قبول عبارت است از: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

۷- بچه‌ای در شهربازی سوار یک گردونهٔ افقی شده و حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در $t = 0$، در دستگاه مختصات افقی xy سرعت بچه $v_1 = 3i + 4j(m/s)$ است. در $t = 5\ s$ سرعت بچه $v_2 = -3i - 4j(m/s)$ است.

الف) بزرگی شتاب مرکزگرا را بیابید.

ب) شتاب متوسط بچه در بازه زمانی $t_2 - t_1$ که کمتر از یک دوره تناوب است را بیابید.

الف) از صورت مسئله متوجه می‌شویم که در ۵ ثانیه جهت سرعت برعکس شده است. پس دورهٔ تناوب حرکت دایره‌ای برابر خواهد شد با: $T = 2 \times 5 = 10 \quad s$

$$v = \sqrt{(3.00\,\mathrm{m/s})^2 + (4.00\,\mathrm{m/s})^2} = 5.00\,\mathrm{m/s}\,,$$

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 7.96\,m$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 3.14\ \frac{m}{s^2}$$

ب)

$$a_{\mathrm{avg}} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(-3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath})\,m/s - (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\,m/s}{5\,s - 0\,s}$$

$$= -1.2\ \frac{m}{s^2}\hat{\imath} - 1.6\ \frac{m}{s^2}\hat{\jmath}$$

$$\left|a_{\mathrm{avg}}\right| = \sqrt{(-1.2)^2 + (-1.6)^2} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

۸- دانشجویی در حال قایقرانی بر روی رودخانه است. در حالیکه وی در حال حرکت در خلاف جهت حرکت آب است، به طور اتفاقی بطری آب آشامیدنی همراه او در داخل آب می‌افتد. با گذشت ۶۰ دقیقه از این اتفاق و در حالیکه او ۲ کیلومتر از محل افتادن بطری دور شده است، ناگهان متوجه گم شدن بطری می‌شود، در این هنگام او با تغییر جهت حرکت قایق، در جهت جریان آب پارو زده و پس از طی ۵ کیلومتر (از نقطه دور زدن) به بطری می‌رسد.

الف) با فرض میزان تلاش و توان یکسان و یکنواخت پاروزنی دانشجو در کل مسیر، سرعت جریان آب را بیابید.

ب) سرعت قایق به همین میزان تلاش برای پاروزنی در یک دریاچه آرام چقدر است؟

فرض می‌کنیم $v_{c/w}$ سرعت قایق نسبت به آب و $v_{w/G}$ سرعت آب نسبت به زمین باشد. واحدهای زمان و مسافت به ترتیب کیلومتر و ساعت فرض می‌شوند.

می‌دانیم که در هنگام حرکت در خلاف جهت آب:

$$v_{c/w} - v_{w/G} = 2$$

در هنگام حرکت موافق جهت حرکت آب در مدت زمان tداریم:

$$(v_{c/w} + v_{w/G})t = 5$$

همچنین برای بطری می‌توان نوشت:

$$v_{w/G}(t+1) = 3$$

با حل همزمان این سه رابطه برای $v_{w/G}$ به معادله زیر خواهیم رسید:

$$2(v_{w/G})^2 + v_{w/G} - 6 = 0$$

الف) ریشه معادله فوق عبارتست از:

$$v_{w/G} = 1.5\,\mathrm{km/h}$$

ب) در این حالت خواهیم داشت:

$$v_{c/w} = 2\,\mathrm{km/h} + v_{w/G} = 3.5\,\mathrm{km/h}$$

۹- در یک تعقیب و گریز، ماشین سارقین با تندی $180\ Km/h$ در مسیر مستقیمی در حال حرکت است. یک مامور پلیس کنار جاده، گلوله‌ای را با تندی $360\ m/s$ به سمت ماشین شلیک می‌کند به طوریکه گلوله از هر دو در عقب ماشین عبور کرده و سوارخ‌های به جا مانده از آن کاملا روبه‌روی هم قرار دارند. فرض کنید که گلوله پس از ورود به ماشین منحرف نمی‌شود اما تندی آن ۲۰٪ کاهش می‌یابد. نسبت به حالت عمود بر ماشین، گلوگاه با چه میزان انحراف شلیک شده است؟

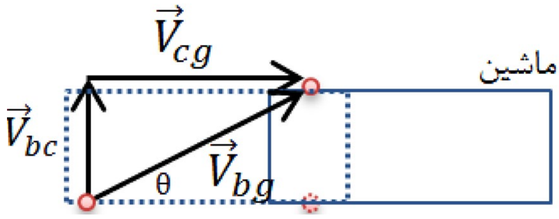
سرعت ماشین نسبت به زمین:

$$\overrightarrow{V_{cg}} = 180\frac{Km}{h}\hat{\imath}$$

سرعت گلوله نسبت به زمین را با $\overrightarrow{V_{bg}}$ و سرعت گلوله نسبت به ماشین را با $\overrightarrow{V_{bc}}$ نشان می‌دهیم. در اثر برخورد با بدنه ماشین، ۲۰ درصد از انرژی گلوله کم می‌شود (از اثر گرمایش روی گلوله صرف نظر می‌کنیم).

پس از رابطه نسبی بین سرعت‌ها داریم:

$$0.8\overrightarrow{V_{bg}} = \overrightarrow{V_{bc}} + \overrightarrow{V_{cg}}$$



چون دو سوراخ عبور گلوله از بدنهٔ ماشین دقیقا روبروی یکدیگر قرار دارند یعنی مؤلفهٔ افقی سرعت گلوله (داخل ماشین) نسبت به زمین با سرعت جلو رفتن ماشین برابر بوده:

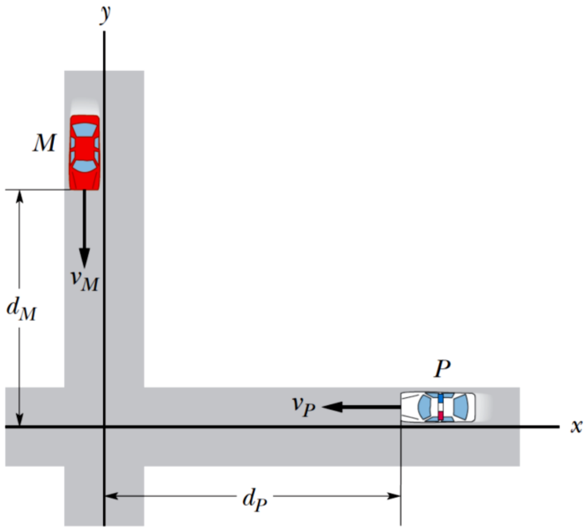
$$0.8\ \overrightarrow{V_{bg}}\cos\theta = \overrightarrow{V_{cg}}$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{180 \times 1000}{0.8 \times 360 \times 3600} = 0.173$$

$$\rightarrow \theta \approx 80°$$

لذا جواب نهایی یعنی انحراف از حالت عمود بر مسیر در شلیک گلوله، $10°$ است.

۱۰-دو اتومبیل مطابق شکل با سرعت‌ها و فاصله‌های نشان داده در حال حرکت به سمت یک تقاطع هستند. می‌خواهیم با استفاده از حرکت نسبی تعیین کنیم حداقل فاصله این دو اتومبیل چه میزان خواهد بود. همچنین در چه شرایطی این حداقل فاصله برابر صفر می‌شود. (یعنی دو اتومبیل به هم برخورد می‌کنند.)



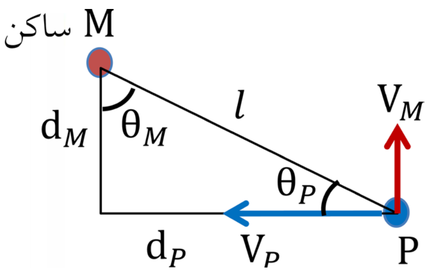
الف) دستگاه مختصات متصل به اتومبیل M را در نظر بگیرید. سرعت اتومبیل P از دید M داری دو مولفه است که یکی در راستای خط واصل دو اتومبیل و دیگری در راستای عمود بر آن است. این دو مولفه را بدست آورید.

ب) حال حرکت نسبی اتومبیل P از دید اتومبیل M را توصیف کنید.

ج) با توجه به قسمت ب حداقل فاصله این دو اتومبیل را در طی زمان بدست آورید.

د) با توجه به قسمت ج توضیح دهید که شرط لازم و کافی برای برخورد در تقاطع طبق رابطهٔ $\frac{d_M}{v_M} = \frac{d_P}{v_P}$ است.

سرعت نسبی P از دید M برآیند دو بردار روبرو است:



الف) مولفه در راستای خط واصل:

$$V_{rel} = V_P cos\theta_P + V_M cos\theta_M = \frac{V_P d_P + V_M d_M}{l}$$

مولفه در راستای عمود بر خط واصل:

$$V_{rel} = V_P sin\theta_P - V_M sin\theta_M = \frac{V_P d_M - V_M d_P}{l}$$

زاویهٔ سرعت نسبی با راستای خط واصل:

$$tan\phi = \frac{V_{\mathrm{P}} d_M - V_M d_{\mathrm{P}}}{V_{\mathrm{P}} d_{\mathrm{P}} + V_M d_M}$$

ب) با توجه به ثابت بودن سرعت اتومبیل‌ها در طی زمان، سرعت نسبی آن‌ها هم ثابت خواهد ماند. بنابراین اتومبیل P از دید M با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کند.

ج) کمترین فاصله، برابر است با فاصله M از خط مسیر حرکت نسبی که می‌شود: $l\ sin\phi$

د) با توجه به حرکت نسبی، شرط لازم و کافی برای برخورد هنگامی است که سرعت نسبی، در راستای خط واصل دو اتومبیل باشد؛ لذا باید مولفهٔ سرعت نسبی عمود بر راستای خط واصل صفر باشد. پس طبق الف خواهیم داشت:

$$\frac{d_M}{V_M} = \frac{d_p}{V_p}$$