



باسمه تعالی



پاسخ تمرین سری ۲

درس فیزیک ۱

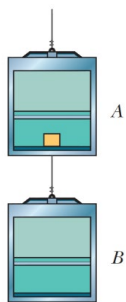
تاریخ ارسال:

یکشنبه، ۴ آذر ۱۴۰۳

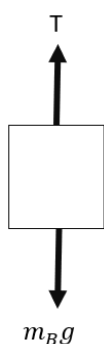
دانشکده علوم مهندسی دانشگاه تهران

نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

* توجه: در صورت نیاز به مقدار عددی شتاب جاذبه، آن را $g = 10 \frac{m}{s^2}$ در نظر بگیرید.

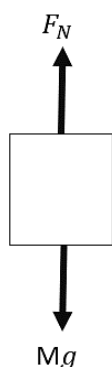


۱- در شکل روبرو کابین‌های آسانسور A و B توسط یک کابل کوتاه به یکدیگر متصل شده‌اند و می‌توان توسط کابلی که به بالای کابین A متصل شده است مجموعه را به بالا یا پایین حرکت داد. جرم کابین A برابر $1700kg$ و جرم کابین B برابر $1300kg$ می‌باشد. یک جعبه با جرم $12kg$ بر روی کف کابین A قرار گرفته است. اگر کشش کابل اتصال دو کابین $1.91 \times 10^4 N$ باشد، مقدار نیروی عمودی سطح که از کف کابین به جعبه وارد می‌شود چقدر است؟



اعمال قانون دوم نیوتون به کابین B :

$$a = \frac{T}{m_B} - g = 4.69 \frac{m}{s^2}$$



اعمال قانون دوم نیوتون به جعبه:

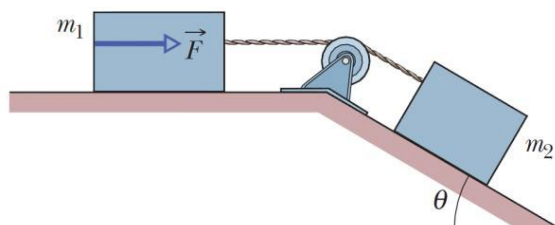
$$F_N - Mg = Ma$$

$$F_N = M(g + a) = 12(10 + 4.69) = 176.28 N$$

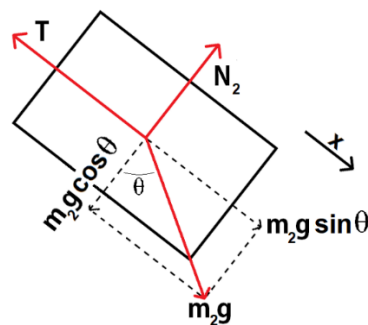
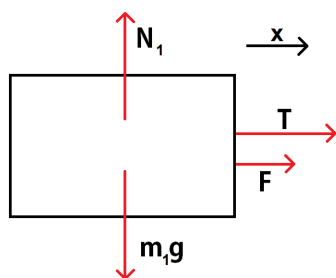
۲- در شکل روبرو جعبه‌ای به جرم $m_2 = 1.0\text{kg}$ بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که با افق زاویه $\theta = 30^\circ$ می‌سازد، قرار گرفته است. این جعبه توسط ریسمان بدون جرمی به جعبه $m_1 = 3.0\text{kg}$ که بر روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار گرفته، متصل شده است. قرقره بدون جرم و اصطکاک می‌باشد.

الف) اگر $F = 2.3\text{N}$ باشد، کشش در ریسمان اتصال چقدر است؟

ب) بیشترین مقدار نیروی F بدون اینکه ریسمان شل شود، چقدر می‌تواند باشد؟



دیagram آزاد اجسام:



الف)

$$\begin{cases} F + T = m_1 a \\ m_2 g \sin \theta - T = m_2 a \end{cases} \rightarrow a = \frac{m_2 g \sin \theta + F}{m_1 + m_2}$$

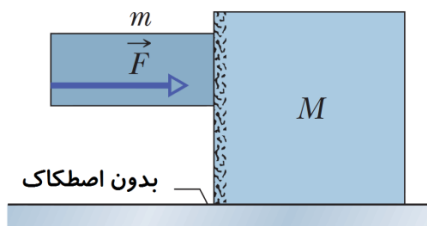
$$\rightarrow a = \frac{1 \times 10 \times 1/2 + 2.3}{1 + 3} = \frac{7.3}{4} = 1.825 \text{ m/s}^2$$

$$T = -F + m_1 a = -2.3 + 3 \times 1.825 = 3.175 \text{ N}$$

ب) اگر F به بیشینه مقدار خود برسد، کشش طناب برابر صفر می‌شود:

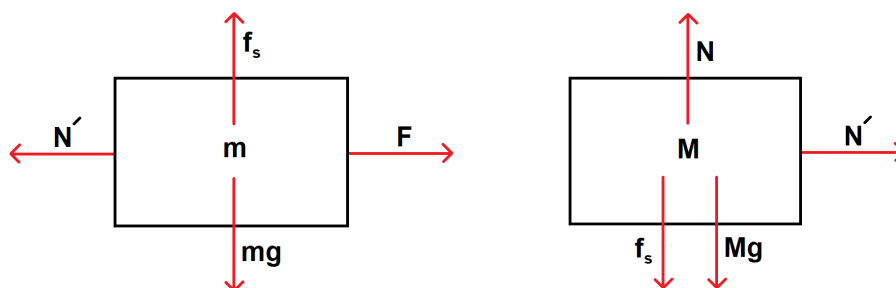
$$a = g \sin \theta = 5 \text{ m/s}^2$$

$$F = m_1 a = 3 \times 5 = 15 \text{ N}$$



۳- دو قطعه با جرم $m = 16\text{kg}$ و $M = 88\text{kg}$ که یکپارچه نیستند، مطابق شکل توسط نیروی F هل داده می‌شوند. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعات $\mu_s = 0.38$ می‌باشد و سطح زیر قطعه بزرگتر بدون اصطکاک است. کمینه مقدار نیروی افقی F که قطعه کوچکتر بر روی قطعه بزرگتر به پایین سر نخورد چقدر است؟

دیاگرام آزاد اجسام:



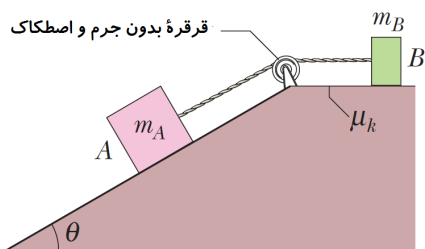
نیروی N' نیروی تماسی عمودی بین دو قطعه و f_s نیروی اصطکاک ایستایی بین دو قطعه است که بیشترین مقدار خود را دارد. با در نظر گرفتن دو قطعه به صورت یک مجموعه که با هم بر روی سطح بدون اصطکاک حرکت می‌کنند:

$$F = m_{total} a \rightarrow a = \frac{F}{m + M}$$

برای جسم m خواهیم داشت:

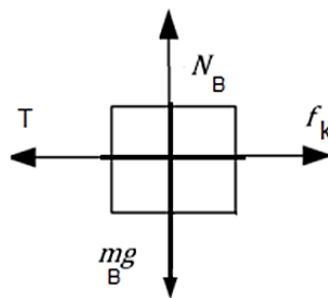
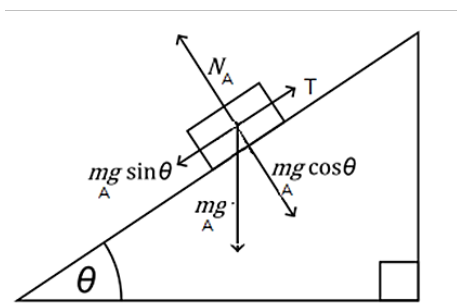
$$\begin{cases} F - N' = ma \rightarrow N' = F - m \left(\frac{F}{m + M} \right) \\ f_s - mg = 0 \rightarrow \mu_s N' - mg = 0 \rightarrow N' = \frac{mg}{\mu_s} \end{cases}$$

$$\rightarrow F = \frac{mg}{\mu_s \left(1 - \frac{m}{m + M} \right)} = \frac{16 \times 10}{0.38 \left(1 - \frac{16}{16 + 88} \right)} = 4.98 \times 10^2 \text{ N}$$



۴- در شکل مقابل، قطعه A دارای جرم 4.0 kg و قطعه B دارای جرم 2.0 kg می باشد. ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعه B و صفحه افقی زیر آن $\mu_k = 0.5$ است. سطح شیبدار با افق زاویه $\theta = 30^\circ$ می سازد و بدون اصطکاک است. نقش قرقره فقط تغییر مسیر ریسمان با جرم ناچیزی است که دو قطعه را به هم متصل کرده است. الف) مقدار کشش ریسمان چقدر است؟ ب) مقدار شتاب قطعات را بیابید.

دیاگرام آزاد اجسام:



برای قطعه A خواهیم داشت:

$$m_A g \sin \theta - T = m_A a$$

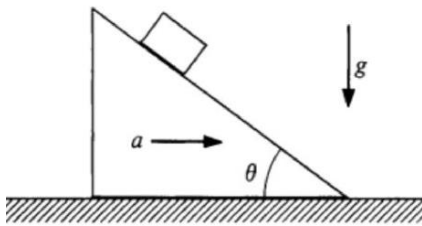
برای قطعه B خواهیم داشت:

$$T - f_k = m_B a$$

$$f_k = \mu_k N_B = \mu_k m_B g$$

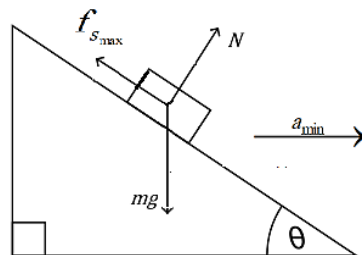
$$T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (\sin \theta + \mu_k) g = 13.33 \text{ N}$$

$$a = \left(\frac{m_A \sin \theta - \mu_k m_B}{m_A + m_B} \right) g = 1.67 \text{ m/s}^2$$

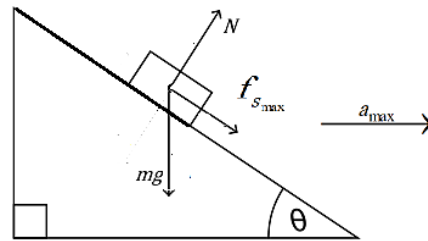


۵- یک جسم مطابق شکل روی سطح شیب داری به زاویه θ قرار دارد. ضریب اصطکاک سطح با جسم μ می‌باشد. اگر سطح شیبدار با شتاب a به سمت راست حرکت کند و $\tan\theta > \mu$ باشد، کمترین و بیشترین مقدار شتاب a برای اینکه جسم نسبت به سطح شیبدار ساکن بماند چقدر است؟

بیشترین و کمترین مقدار شتاب، به ترتیب، در حالتی است که جسم در آستانه حرکت به سمت بالا و پایین باشد.



کمترین a



بیشترین a

$$\begin{cases} N \sin \theta \pm f_{s_{\max}} \cos \theta = ma \\ N \cos \theta \mp f_{s_{\max}} \sin \theta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \sin \theta \pm \mu N \cos \theta = ma \\ N \cos \theta \mp \mu N \sin \theta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \theta \mp \mu \sin \theta}$$

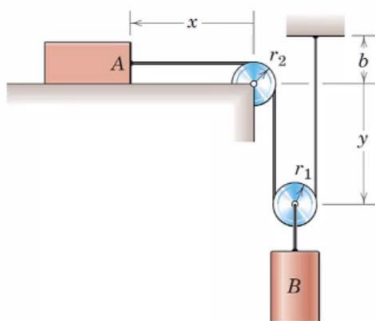
$$a = \frac{N}{m} (\sin \theta \pm \mu \cos \theta)$$

$$\rightarrow a = g \frac{\sin \theta \pm \mu \cos \theta}{\cos \theta \mp \mu \sin \theta}$$

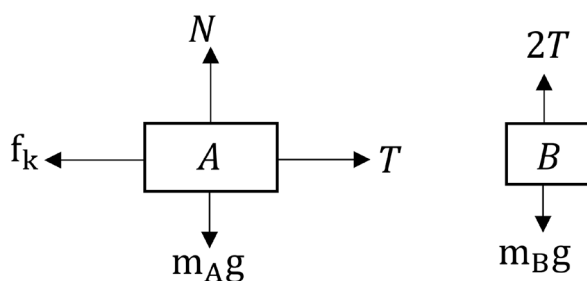
$$a_{\max} = \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

$$a_{\min} = \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

۶- در شکل زیر کلیه ریسمان‌ها بدون جرم و قرقره‌ها بدون جرم و اصطکاک فرض شوند. در صورتیکه $m_B = 2 * m_A = 10 \text{ kg}$ باشد و ضریب اصطکاک جرم A با سطح زیرینش $\mu_s = \mu_k = 0.2$ باشد، کشش ریسمان را بیابید.



دیگرام آزاد اجسام:



با توجه به شکل، درباره طول ریسمان می‌توان نوشت:

$$x + 2y = \text{cte} = \text{طول ریسمان}$$

اگر از رابطه فوق دو مرتبه مشتق زمانی بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

بنابراین شتاب جسم A دو برابر شتاب جسم B است.

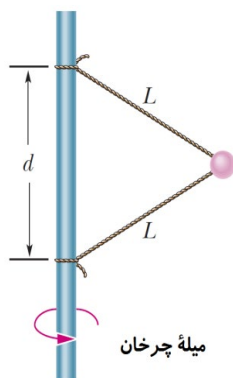
$$\begin{cases} m_B g - 2 T = m_B * a \\ T - \mu_k m_A g = m_A * 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_B g - 2 \mu_k m_A g = (m_B + 4 m_A) * a$$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_B - 2 \mu_k m_A}{m_B + 4 m_A}$$

$$T = m_A g \left[\mu_k \frac{2 m_B - 4 \mu_k m_A}{m_B + 4 m_A} \right] = 5 \times 10 \left[0.2 \frac{20 - 4}{10 + 20} \right] = 36.67 \text{ N}$$

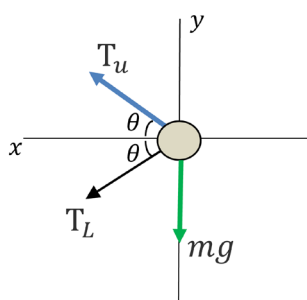
دقت شود که اگر سیستم شتاب نداشت، کشش ریسمان از بیشینه اصطکاک ایستایی بیشتر بود! بنابراین حتما سیستم شتابدار است.



۷- توپی به جرم 1.34 kg توسط دو ریسمان بدون جرم هر یک به طول $L = 1.7\text{ m}$ به یک میله عمودی چرخان متصل شده است. دو ریسمان کاملاً کشیده هستند و فاصله محل اتصال آنها به میله $d = 1.7\text{ m}$ می‌باشد. کشش در ریسمان بالایی 35 N است. مطلوبست محاسبه:

- الف) مقدار کشش در ریسمان پایینی
 ب) مقدار نیروی خالص وارد شده به توپ (F_{net})
 ج) مقدار سرعت توپ
 د) جهت نیروی F_{net}

کشش در ریسمان‌ها، نیروی مرکزگرا را تامین می‌کند. اگر جهت مثبت محور x را سمت چپ (مرکز مسیر دایره ای حرکت) در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



$$x : T_u \cos \theta + T_L \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$y : T_u \sin \theta - T_L \sin \theta - mg = 0$$

$$T_L = T_u - \frac{mg}{\sin \theta}$$

$$d = L \rightarrow \theta = 30^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 1/2 \\ \cos \theta = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

(الف)

$$T_L = 35 - \frac{(1.34 \times 10)}{1/2} = 8.2\text{ N}$$

(ب)

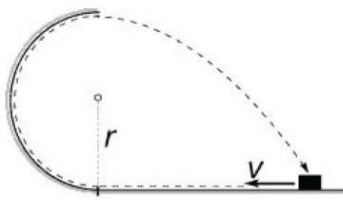
$$F_{net} = (T_u + T_L) \cos \theta = (35 + 8.2) \sqrt{3}/2 = 37.41\text{ N}$$

(ج)

$$R = L \cos \theta = 1.41\text{ m}$$

$$F_{net} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{\frac{R \times F_{net}}{m}} = 6.41\text{ m/s}$$

(د) جهت نیروی خالص به سمت چپ است. (مرکز گرا در جهت شعاع)



۸- یک مسیر بدون اصطکاک، شامل یک بخش افقی با طول نامعلوم است که به یک مسیر نیم‌دایره‌ای عمودی با شعاع r متصل می‌شود. جسمی از ابتدای مسیر افقی با سرعت v شروع به حرکت می‌کند و پس از دور زدن مسیر نیم‌دایره‌ای، به همان ابتدای مسیر سقوط می‌کند. کمینه طول بخش افقی چقدر است؟

جسم باید به بالاترین نقطه مسیر نیم دایره‌ای برسد و سپس حرکت آن پرتابی (با زاویه پرتاب افقی) می‌شود. اگر قرار باشد جسم به بالاترین نقطه مسیر برسد نیروی عکس‌العمل عمودی سطح هیچ جای مسیر نباید صفر شود مگر در بالاترین نقطه. پس در بالاترین نقطه می‌توانیم بنویسیم:

$$mg + N = ma \rightarrow mg + N = m * \frac{v^2}{r}$$

از آن جایی که به دنبال طول کمینه بخش افقی مسیر هستیم و گفته شده جسم پس از بازگشت به ابتدای مسیر سقوط می‌کند، باید حالتی را بیابیم که $N = 0$ در بالاترین نقطه مسیر رخ دهد. در این صورت سرعت پرتابه کمینه می‌شود.

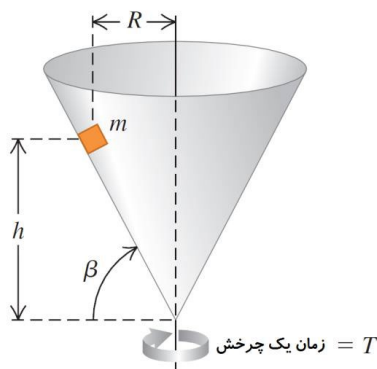
$$mg = m * \frac{v_{min}^2}{r} \rightarrow v_{min} = \sqrt{rg}$$

جسم پس از پرتاب، حرکت پرتابی دارد. پس زمان لازم برای رسیدن جسم به زمین برابر خواهد بود با:

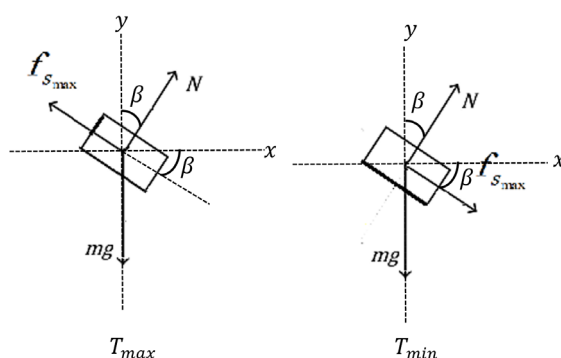
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{4r}{g}}$$

$$x = v_{min} \times t = \sqrt{rg} \times \sqrt{\frac{4r}{g}} = 2r$$

۹- قطعه کوچکی به جرم m در داخل یک مخروط معکوس که حول یک محور عمودی گذرنده از راس آن می‌چرخد قرار گرفته است. زمان لازم برای یک گردش کامل مخروط برابر T است. دیواره‌های مخروط با افق زاویه β می‌سازند. همچنین ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه و مخروط μ_s می‌باشد. اگر بخواهیم که قطعه در ارتفاع h نسبت به راس مخروط باقی بماند (روی سطح مخروط نسبت به آن حرکت نکند)، بیشینه و کمینه T را بر حسب مولفه‌های h, β, g, μ_s بیابید.



بیشینه و کمینه T زمانی اتفاق می‌افتد که جسم به ترتیب در آستانه لغزش به سمت پایین و بالای مخروط باشد:



$$\begin{cases} N \sin \beta \pm f_{s\max} \cos \beta = m \frac{v^2}{R} \\ N \cos \beta \mp f_{s\max} \sin \beta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \sin \beta \pm \mu_s N \cos \beta = m \frac{v^2}{R} \\ N \cos \beta \mp \mu_s N \sin \beta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \beta \mp \mu_s \sin \beta}$$

$$v^2 = Rg \frac{\sin \beta \pm \mu_s \cos \beta}{\cos \beta \mp \mu_s \sin \beta}$$

$$v_{min} = \sqrt{Rg \frac{\sin \beta - \mu_s \cos \beta}{\cos \beta + \mu_s \sin \beta}}$$

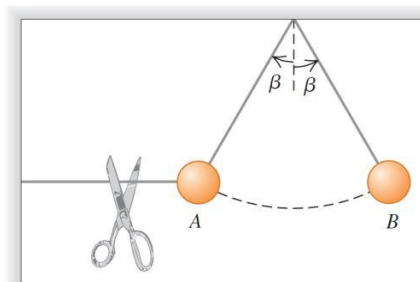
$$v_{max} = \sqrt{Rg \frac{\sin \beta + \mu_s \cos \beta}{\cos \beta - \mu_s \sin \beta}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow T = 2\pi R * \sqrt{\frac{1}{Rg} \frac{\cos \beta \mp \mu_s \sin \beta}{\sin \beta \pm \mu_s \cos \beta}}$$

$$R = \frac{h}{\tan \beta} \Rightarrow T = 2\pi * \sqrt{\frac{h}{g \tan \beta} \frac{\cos \beta \mp \mu_s \sin \beta}{\sin \beta \pm \mu_s \cos \beta}}$$

$$T_{max} = 2\pi * \sqrt{\frac{h}{g \tan \beta} \frac{\cos \beta + \mu_s \sin \beta}{\sin \beta - \mu_s \cos \beta}}$$

$$T_{min} = 2\pi * \sqrt{\frac{h}{g \tan \beta} \frac{\cos \beta - \mu_s \sin \beta}{\sin \beta + \mu_s \cos \beta}}$$



۱۰- یک توپ توسط دو ریسمان در موقعیت A در حالت سکون ثابت شده است. در یک لحظه، ریسمان افقی بریده می‌شود و توپ همانند یک آونگ شروع به حرکت رفت و برگشتی می‌کند. نقطه B دورترین نقطه‌ای است که توپ در زمان حرکت رفت و برگشتی خود در سمت راست به آن می‌رسد. نسبت کشش ریسمان متصل به توپ در نقطه B به کشش آن قبل از بریده شدن ریسمان افقی چقدر است؟

معادله $\sum F = ma$ را برای توپ در هر یک از موقعیت‌ها می‌نویسیم. قبل از بریده شدن ریسمان، توپ ساکن است و مولفه عمودی کشش باید با وزن توپ برابر باشد:

$$T_A \cos \beta = W$$

$$\rightarrow T_A = \frac{W}{\cos \beta}$$

در طی مسیر دایروی، توپ در حالت کلی شتاب دارد. $(T - W \cos \theta = m * \frac{v^2}{r})$

اما در نقطه B از آنجا که سرعت v به صورت لحظه‌ای صفر می‌شود، شتاب مرکزگرای آن نیز صفر خواهد بود.

$$F_r = ma_r$$

$$T_B = W \cos \beta$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{T_B}{T_A} = \cos^2 \beta$$