Tema 1.1, exercitiile 1 si 3

Cercetări operaționale tema 1

1) $x_i = 1$, dacă obiectul i este adăugat
c_i = costul obiectului i
W_K = greutatea rucsacului

w_i = greutatea obiectului i

$F \subseteq \{(i,j) : 1 \leq i \neq j \leq n\}$ mulțimea configurațiilor interzise

$f_{ij} = x_i + x_j, \ \forall (i,j) \in F$

$$\max \ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W_K, \ \forall i = \overline{1,n}$$

$$f_{a,b} = x_a + x_b \leq 1, \ \forall (a,b) \in F$$

3)

d_i = cererea pentru luna i

r_i = câte unități poate produce în luna i folosind producția normală

b_i = costul unei unități în luna i folosind producția normală

c_i = costul — // — overtime

s = costul per unitate per lună de stocare

x_i = nr. de unități produse în luna i folosind producția normală

y_i = nr. de unități — // — overtime

$$\min \left[b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot y_1 + s \cdot (x_1 + y_1 - d_1) \right] + \sum_{i=2}^{n} \left[b_i \cdot x_i + c_i \cdot y_i + s \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} [x_j + y_j - d_j] + x_i + y_i - d_i \right) \right]$$

s.t.

$$x_i \leq r_i, \ \forall i = \overline{1,n}$$

$$d_1 \leq x_1 + y_1$$

$$d_i \leq x_i + y_i + \sum_{j=1}^{i-1} [x_j + y_j - d_j], \ \forall i = \overline{2,n}$$

$$x_i \geq 0, \ y_i \geq 0$$

Tema 1.1, exercitiul 5

1.5

2 tipuri de produse → tip A: 3 machine hours, \$3 cost → selling \$6
→ tip B: 4 machine hours, \$2 cost → selling \$5.4

capacities $\begin{cases} 20{,}000 \text{ machine hours} \\ \$4{,}000 \text{ cash} \end{cases}$

Păstrăm liniaritatea ⇒ exact 45%, respectiv 30% din vânzările celor 2 produse se folosesc în a finanța operații

x_A = # produse de tip A
x_B = # produse de tip B

Revenue : $6 \cdot x_A + 5{,}40 \cdot x_B$

Costs : $3 \cdot x_A + 2 \cdot x_B + \frac{45}{100} \cdot 6 \cdot x_A + \frac{30}{100} \cdot 5{,}40 \cdot x_B$

Constraints : $3 \cdot x_A + 2 x_B \le 4000 + \frac{45}{100} \cdot 6 \cdot x_A + \frac{30}{100} \cdot 5{,}40 \cdot x_B$

$3 \cdot x_A + 4 x_B \le 20\,000$

$x_A, x_B \ge 0$

Revenue : $6 \cdot x_A + 5{,}40 \cdot x_B$

Costs : $5{,}7\, x_A + 3{,}62\, x_B$

Constraints $1{,}3\, x_A + 0.38\, x_B \le 4000$

$3 x_A + 4 x_B \le 20\,000$

$x_A, x_B \ge 0$

Tema 1.1, exercitiul 6

Homework 1.1

6.

x_i = numărul de șoferi care încep să lucreze în ziua i

$i = \overline{1,7}$

x_1 începe să lucreze luni, dar lucrează și marți, miercuri, joi și vineri.

a)
$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{7} x_i \\ \text{st.} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 19 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 22 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 19 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7}, \ x_i \text{ întreg} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \min \big(150\cdot(x_1+x_4+x_5+x_6+x_7) + 140\cdot(x_1+x_2+x_5+x_6+x_7) + \\ 140\cdot(x_1+x_2+x_3+x_6+x_7) + 130\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_7) + \\ 150\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) + 190\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) + \\ 210(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\big) \\ \text{st.} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 19 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 22 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 19 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7}, x_i \text{ întreg} \end{cases}$$

Tema 1.1, exercitiile 8 si 9

9

max $z = x_1 + 2x_2$

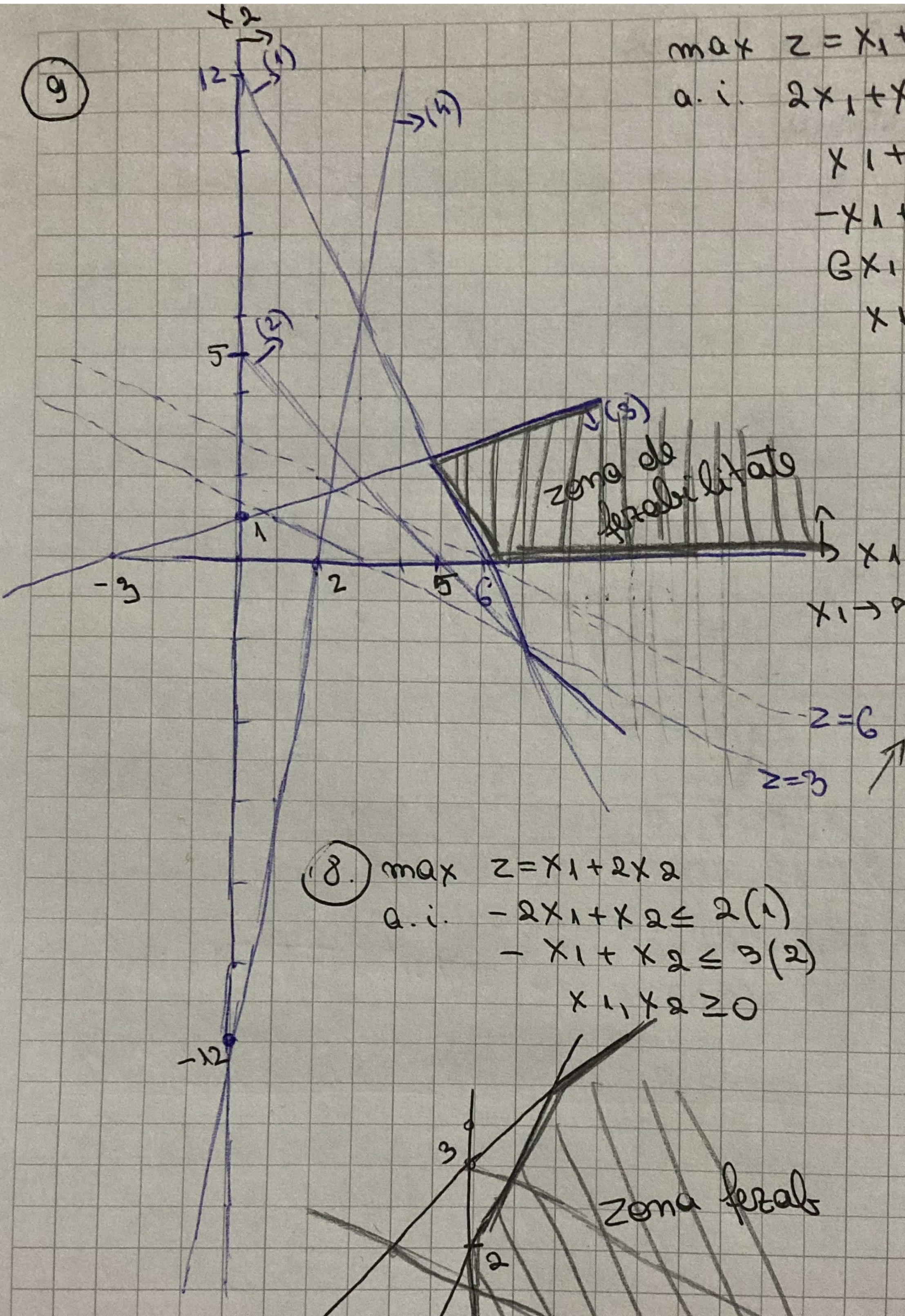
a.i. $2x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \geq 5$

$-x_1 + 3x_2 \leq 3$

$6x_1 - x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x_1 \to \infty$ nemărginit LP pb

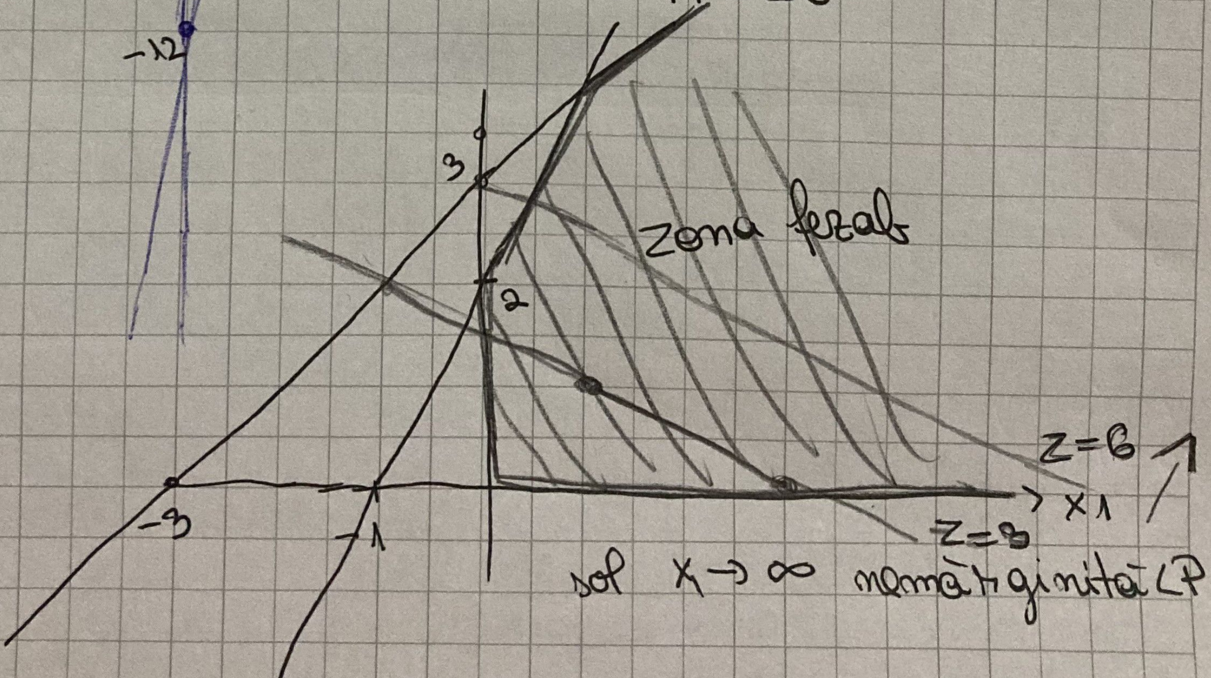
8.

max $z = x_1 + 2x_2$

a.i. $-2x_1 + x_2 \leq 2$ (1)

$-x_1 + x_2 \leq 3$ (2)

$x_1, x_2 \geq 0$



sol $x \to \infty$ nemărginită LP

Tema 1.2, exercitiul 1

1. $\max \{ c^T x : Ax \le b, x \ge 0 \}$

x^1, x^2 soluții optimale $\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ soluții optimale.

$P = \{ x \in \mathbb{R}^n, Ax = b ; x \ge 0 \}$, $x^1, x^2 \in P$

$Ax^1 = b \quad | (\cdot \lambda) \Rightarrow A x^1 \lambda = \lambda b$

$Ax^2 = b \quad | (1-\lambda) \Rightarrow A x^2 (1-\lambda) = (1-\lambda) b$

$\oplus$

$$A x^1 \lambda + A x^2 (1-\lambda) = \lambda b + (1-\lambda) b$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \lambda x^1 + A (1-\lambda) x^2 = b$$

$$\Leftrightarrow A \cdot (\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2) = b \Rightarrow$$

$(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2)$ este o soluție fezabilă

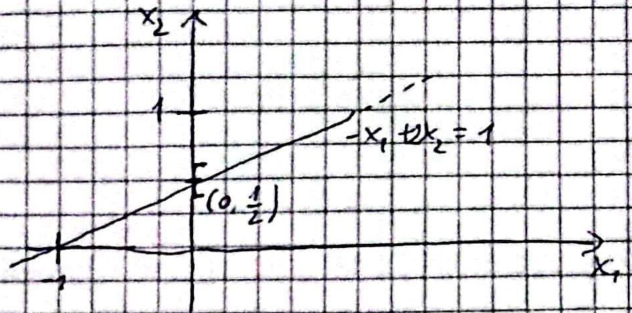
$\Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in P$

Tema 1.2, exercitiile 2 si 3

Cercetări operaționale tema 2

2) Fals, mulțimea soluțiilor optime poate fi nemărginită.

Considerăm $c = [-1, 2]$, $A = [-1, 2]$, $b = 1$ =>

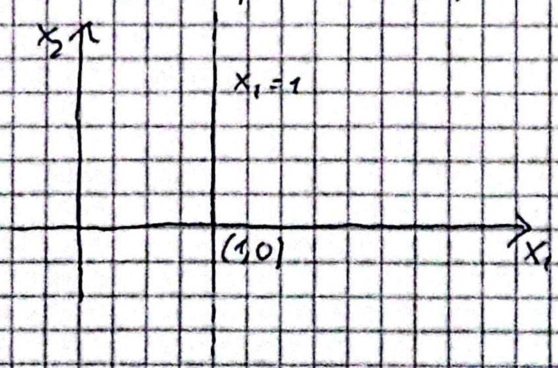


$$\Rightarrow \begin{cases} \max -x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to:} \\ \quad -x_1 + 2x_2 = 1 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

=> Întrucât soluțiile sunt din mulțimea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1+2x_2=1, x\geq 0\}$ care este nemărginită => mulțimea soluțiilor optime este nemărginită

3) Fals, pot fi mai multe soluții optime, dar doar una dintre ele să fie BFS

Considerăm $c = [1, 0]$, $A = [1, 0]$, $b = 1$ =>



$$\Rightarrow \begin{cases} \max x_1 = 1 \\ \text{subject to:} \\ \quad x_1 = 1 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

=> Există o infinitate de soluții optime, dar doar una este BFS și anume (1,0)

Tema 1.2, exercitiul 4

Adevărat

4) ~~F/A/F~~, V pot fi soluții optime cu mai mult de m variabile strict pozitive

Considerăm din nou exemplul de la problema 3 =>

=> $c = [1, 0]$, $A = [1, 0]$, $b = 1$ => $m = 1$

=> $\begin{cases} \max\ x_1 = 1 \\ \text{subject to:} \\ \quad x_1 = 1 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

=> O soluție optimă care are $m = 1$ variabile ≥ 0 este $(1, 0)$, dar există o infinitate care au $m = 2$ variabile ≥ 0

$S = \{(1, x_2) \mid x_2 \geq 0\}$

Tema 1.2, exercitiul 6

Homework 1.2

6. $\begin{cases} \min & z = c_1 x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.t.} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \le b \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$

Rezolvăm pt cazul $n = 2$

$$\begin{cases} \min & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} & a_1 x_1 + a_2 x_2 \le b \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \min & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + y_1 = b \\ & x_1, x_2, y_1 \ge 0 \end{cases}$$

nebazică	de bază	fezabilă	optim
$x_1 = 0, x_2 = 0$	$y_1 = b$	dacă $b \ge 0$	$z = 0$
$x_1 = 0, y_1 = 0$	$x_2 = \frac{b}{a_2}$	dacă $\frac{b}{a_2} \ge 0$	$z = c_2 x_2$
$x_2 = 0, y_1 = 0$	$x_1 = \frac{b}{a_1}$	dacă $\frac{b}{a_1} \ge 0$	$z = c_1 x_1$

Deci $z = \min \begin{cases} 0; & \text{dacă } b \ge 0 \\ c_1 x_1, & \text{dacă } \frac{b}{a_1} \ge 0 \\ c_2 x_2, & \text{dacă } \frac{b}{a_2} \ge 0 \end{cases}$

Problema este fezabilă dacă $(b \ge 0)$ sau $(\exists\, a_i < 0)$.

Problema nu este fezabilă dacă $(b < 0)$ și $(\forall i, a_i \ge 0)$.

Min $z = \min \begin{cases} 0, & b \ge 0 \\ \frac{c_i \cdot b}{a_i}, & \frac{b}{a_i} \ge 0 \end{cases}$

Tema 1.2, exercitiul 8

Homework 1.2.

8.

$$\begin{cases} \max\ z = 6x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \min\ z = x_2 - 6x_1 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 5x_2 - y_1 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 40 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

nebazică	de bază	fezabilă	optim
$x_1=0, x_2=0$	$y_1=-10, y_2=40$	NU	
$x_1=0, y_1=0$	$x_2=2, y_2=36$	DA	$z=2$
$x_1=0, y_2=0$	$x_2=20, y_1=90$	DA	$z=20$
$x_2=0, y_1=0$	$x_1=5, y_2=25$	DA	$z=-30$
$x_2=0, y_2=0$	$x_1=\frac{40}{3}, y_1=\frac{50}{3}$	DA	$\boxed{z=-80}$
$y_1=0, y_2=0$	$x_2=\frac{-50}{11}$	NU	

$x_1 = \frac{40}{3}, x_2 = 0$ soluție de bază fezabilă optimă.

Tema 1.2, exercitiul 9

Ex 2.9 $\max z = x_1 + 9x_2$

a.î. $2x_1 + x_2 \le 100$

$x_1 + x_2 \le 80$

$x_1 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\longrightarrow$

$\min z' = -x_1 - 9x_2$

a.î. $2x_1 + x_2 \le 100$

$x_1 + x_2 \le 80$

$x_1 \le 40$

$x_1, x_2 \ge 0$

$\longrightarrow$ $\min z' = -x_1 - 9x_2$

a.î. $2x_1 + x_2 + s_1 = 100$ (1)

$x_1 + x_2 + s_2 = 80$ (2)

$x_1 + s_3 = 40$ (3)

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$

$\min z = c^T x + d$

a.i. $Ax = b$

$x \ge 0$

$d = 0$

$c = (-1, -9, 0, 0, 0)^T$

$b = (100, 80, 40)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$m = 3$, $n = 5$

$C_n^m = \frac{5!}{3! \, 2!} = 10$

Var nebazice	Var bazice	Fezabilitate	Optim
$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = 100$ $s_2 = 80$ $s_3 = 40$	DA	$z = 0$
$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = 100$ $s_2 = -20$	NU	
$x_1 = s_2 = 0$	$x_2 = 80$ $s_1 = 20$ $s_3 = 40$	DA	$z = -720$ DA
$x_1 = s_3 = 0$	~~solutie~~ (3)		
$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = 50$ $s_2 = 30$ $s_3 = -10$	NU	
$x_2 = s_2 = 0$	$x_1 = 80$ $s_1 = -60$	NU	
$x_2 = s_3 = 0$	$x_1 = 40$ $s_1 = 20$ $s_2 = 20$	DA	$z = -40$
$s_1 = s_2 = 0$	$x_1 = 20$ $x_2 = 30$ $s_3 = 20$	DA	$z = -290$
$s_1 = s_3 = 0$	$x_1 = 40$ $x_2 = 20$ $s_2 = 20$	DA	$z = -220$
$s_2 = s_3 = 0$	$x_1 = 40$ $x_2 = 40$ $s_1 = -20$	NU	

Tema 1.2, exercitiul 10

Cercetări operaționale tema 2

10) $\begin{cases} \max z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{standard form}} \begin{cases} \min z = -3x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } x_1 - x_2 + y_1 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 12 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$

variabilele nebazice	variabile bazice	fezabilitate	optim
$x_1 = x_2 = 0$	$y_1 = 1$, $y_2 = 12$	DA	(1) $z = 0$ NU
$x_1 = y_1 = 0$	$x_2 = -1$, $y_2 = 14$	NU	$z = -$ NU
$x_1 = y_2 = 0$	$x_2 = 6$, $y_1 = 7$	DA	(2) $z = -6$ NU
$x_2 = y_1 = 0$	$x_1 = 1$, $y_2 = 9$	DA	(3) $z = -3$ NU
$x_2 = y_2 = 0$	$x_1 = 4$, $y_1 = -3$	NU	$z = -$ NU
* $y_1 = y_2 = 0$	$x_1 = \frac{14}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$	DA	(4) DA, dacă prob e mărginită

$* \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 3(1 + x_2) + 2x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 3 + 3x_2 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 5x_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5} \\ x_2 = \frac{9}{5} \end{cases}$

(1) $z = 0$

(2) $z = -3 \cdot 0 - 6 = -6$

(3) $z = -3 \cdot 1 - 0 = -3$

(4) $z = -3 \cdot \frac{14}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{51}{5} \simeq -10$

Tema 1.3, exercitiul 1

3.1.

a. $\min z = -8x_1 - 9x_2 - 5x_3$

a.i. $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 3$

$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 8$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\longrightarrow$

$\min z = -8x_1 - 9x_2 - 5x_3$

a.i. $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \quad (1)$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 3 \quad (2)$

$6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 = 8 \quad (3)$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Observăm că $x = (0\ 0\ 0\ 2\ 3\ 8)^T$ este o sol de bază fezabilă (pt că $B = I_3$)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
x_4	1	1	2	1	0	0	2	$\frac{2}{1} = 2$
x_5	2	3	4	0	1	0	3	$\frac{3}{2} = 1.5$
x_6	$\boxed{6}$	6	2	0	0	1	8	$\frac{8}{6} = 1.(3)$
z	-8	-9	-5	0	0	0	0	

Cost redus negativ pt x_1, x_2, x_3

Cu regula lui Bland alegem x_1 ca column pivot (entering variable)

Min ratio pt $x_6 \Rightarrow$ pivot row $\Rightarrow$ x_6 părăsește baza (leaving variable)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	~~0÷0~~
x_5	0	$\boxed{1}$	$3.(3) = \frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
z	0	-1	$-\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{8}{6}$	$\frac{32}{3}$	

1.(6)

$3/4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$3/3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

$3/2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{8}{3} - 3/5 = \frac{-7}{3}$

Baza curentă $\{x_1, x_4, x_5\}$ nu este optimă pt că var nonbazice x_2, x_3 au costuri reduse negative

Alegem x_2 ca entering variable (Bland)

Min ratio pt $\frac{1}{3} \rightarrow x_5$ leaving variable

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	1	0	-3	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1
	0	0	1	0	1	1	11

Baza curenta $\{x_1, x_2, x_4\}$ este optimă $\Rightarrow$ optim -11

Soluția $x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{2}{3}$

Tema 1.3, exercitiul 2, cazul 1

Cercetări operaționale tema 3

2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	α_1	0	1	2	0	α_7	3
	1	1	0	-1	α_5	0	α_9
	0	α_3	0	α_4	1	2	2
z	α_2	0	0	2	α_6	α_8	1

$\alpha_9 \geq 0$

variabile bazice $\{x_3, x_2, x_5\}$ dacă $\alpha_3 = 0, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = 0$ (1)

sau

$\{x_3, x_1, x_5\}$ dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ (2)

Cazul (1): variabile bazice $\{x_3, x_2, x_5\}$, $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_9 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	α_1	0	1	2	0	α_7	3
x_2	1	1	0	-1	$\alpha_5=0$	0	α_9
x_5	0	$\alpha_3=0$	0	α_4	1	2	2
z	α_2	0	0	2	$\alpha_6=0$	α_8	1

i) $\alpha_2 \geq 0$ și $\alpha_8 \geq 0$

ii) $\alpha_2 > 0$ și $\alpha_8 > 0$

iii) $\alpha_2 \geq 0$ și $\alpha_8 \geq 0$ și ($\alpha_2 = 0$ sau $\alpha_8 = 0$)

iv) Problema este mărginită întotdeauna întrucât $\forall j \in N, \exists \alpha_{ij} > 0$

v) (Regula lui Bland)

$\alpha_2 < 0 \Rightarrow x_1$ intră în bază și $\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 > 0 \text{ și } \alpha_9 = 0 \\ \text{sau} \\ \alpha_1 \leq 0 \text{ și } \alpha_9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

și

$\Rightarrow \alpha_9 = 0$

vi) (Regula lui Bland)

$\alpha_2 \geq 0$ și $\alpha_8 < 0 \Rightarrow x_6$ intră în bază

și Indiferent de valoarea lui α_7, schimbarea în funcția obiectiv va fi $\neq 0$, întrucât va fi aleasă linia 3 dacă $\alpha_7 < 0$

Tema 1.3, exercitiul 2, cazul 2

Cazul (2): variabile bazice $\{x_3, x_1, x_5\}$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_9 \geq 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	$\alpha_1=0$	0	1	2	0	α_7	3
x_1	1	1	0	-1	$\alpha_3=0$	0	α_9
x_5	0	α_5	0	α_4	1	2	2
z	$\alpha_2=0$	0	0	2	$\alpha_6=0$	α_8	1

i) $\alpha_8 \geq 0$

ii) $\alpha_8 > 0$

iii) $\alpha_8 = 0$

iv) Problema este mărginită întrucât $\forall j \in N, \exists a_{ij} > 0$

v) x_1 nu poate intra în bază deoarece face parte deja din bază

vi) $\alpha_8 < 0 \Rightarrow x_6$ intră în bază

Asemănător cazului precedent, valoarea funcției obiectiv va fi $\neq 0$ indiferent de valoarea lui α_7

Tema 2.2, exercitiul 1

1. b. $\min z = 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 - 6x_4$

(P) a.i. $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \geq 24$

$2x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 \geq 17$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ x_4 oarec

(D) $\max w = 24y_1 + 17y_2$

a.i. $4y_1 + 2y_2 \leq 2$

$3y_1 - 7y_2 \leq -9$

$5y_1 - 4y_2 \leq 5$

$8y_1 - 6y_2 = -6$

$y_1, y_2 \geq 0$

(DD) $\min v = 2t_1 - 9t_2 + 5t_3 - 6t_4$

a.i. $4t_1 + 3t_2 + 5t_3 + 8t_4 \geq 24$

$2t_1 - 7t_2 - 4t_3 - 6t_4 \geq 17$

$t_1, t_2, t_3 \geq 0$ t_4 oarec

$DD \overset{x=t}{\equiv} P$

Tema 2.2, exercitiile 1 a) si 2 (inceputul)

Cercetări operaționale tema 2.2

1.
a)

$$(P)\begin{cases} \min\ z = 6x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 & (y_1) \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 9 & (y_2) \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 5 & (y_3) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ unrestricted} \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max\ z = y_1 + 9y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.}\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 6 & (x_1) \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 1 & (x_2) \\ -y_1 - 2y_2 + 8y_3 = 1 & (x_3) \\ y_1 \text{ unrestricted},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$(DD)\begin{cases} \min\ z = 6x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ unrestricted} \end{cases}$$

2

$$(P)\begin{cases} \max\ z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{s.t.}\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 12 & (y_1) \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 7 & (y_2) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 10 & (y_3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \min\ z = 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \\ \text{s.t.}\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Tema 2.2, exercitiul 2 continuare

Tema 2.2

2. (continuare)

Ş.p. că x este optim pt (P). Fie y soluţia optimă pt. duală =>

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 > 0 \\ x_4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - 3y_2 + y_3 = 4 \quad (1) \\ \cancel{y_1 + 2y_2 + 3y_3 =} \\ 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 1 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow y_1 = 1 \\ -3y_2 + y_3 = 3 \\ 3y_2 - y_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_3 = 3 + 3y_2 \\ 3y_2 - 3 - 3y_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_3 = 3 + 3y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

∃ o infinitate de soluţii de forma $y^* = (1, y_2, 3+3y_2)$ cum ar fi $y^* = (1, 0, 3)$

$$(P)\ z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \xrightarrow{x^* = (0, 10.4, 0, 0.4)} 4 \cdot 10.4 + 0.4 = 42$$

$$(D)\ z = 12y_1 + 7y_2 + 10y_3 \xrightarrow{y^* = (1, 0, 3)} 12 + 30 = 42$$

$\Rightarrow x^*$ şi y^* sunt optime pt (P) şi (D)

Tema 2.2, exercitiul 3

3. (P) min $z = c^T x$
a.i. $Ax >= b$
$x \geq 0$

(D) max $w = b^T y$
a.i $A^T y \leq c$
$y \geq 0$

Pentru A antisimetrică
$A^T = -A$
și $b = -c$ obținem

(P) min $z = c^T x$
a.i. $Ax >= -c$
$x \geq 0$

(D) max $w = -c^T y$
a.i. $-Ay \leq c \ (\cdot -1)$
$y \geq 0$

$\Rightarrow$ (D') max $w = -c^T y$
a.i. $Ay \geq -c$
$y \geq 0$

$\xrightarrow{\text{pb de min}}$ (D'') min $w = c^T y$
$Ay \geq -c$
$y \geq 0$

$D'' \equiv P$
echivalente

Tema 2.2, exercitiul 6

c. (P1) $\min z = c^T x$
a.i. $Ax = b$
$x \geq 0$

(P2) $\min z = c^T x$
a.i. $Ax = \bar{b}$
$x \geq 0$

x_* optimala pt (P1)
y_* optimala pt duala D1 pt P1
$\bar{x}$ optimala pt (P2)

Dem ca $y_*^T(\bar{b} - b) \leq c^T(\bar{x} - x_*)$

strong duality $\Rightarrow c^T x_* = b^T y_*$

(D1) $\max w = b^T y$
a.i. $A^T y \leq c$
y oarecare

(D2) $\max w = \bar{b}^T y$
$A^T y \leq c$
y oarecare

$A^T y_* \leq c \overset{(\,)^T}{\Rightarrow} y_*^T A \leq c^T \quad | \cdot x_*$

$\underbrace{y_*^T A x_*}_{b} \leq c^T x_*$

$y_*^T b \leq c^T x_*$ (strong duality $\Rightarrow c^T x_* = b^T y_* = y_*^T b$)

$y_*^T A \leq c^T \quad | \cdot \bar{x}$

$y_*^T \underbrace{A\bar{x}}_{\bar{b}} \leq c^T \bar{x}$

$y_*^T \bar{b} \leq c^T \bar{x} \Rightarrow y_*^T \bar{b} - c^T \bar{x} \leq 0$

↳ aici e A pt ∀ v

$\Rightarrow y_*^T \bar{b} - y_*^T b - c^T \bar{x} + c^T x_* \leq 0$

$\leq 0 \qquad = 0 \qquad$ V

Tema 2.7, exercitiul 7 inceputul

7. (P) $\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$

a.i. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \le b$

$x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}$

(D) $\max w = b \cdot y_1$

a.i. $a_1y_1 \le c_1$

$a_2y_1 \le c_2$

$\vdots$

$a_my_1 \le c_m$

$y_1 \le 0$

- Pt $a_i > 0$ constrângerile devin:

$y_1 \le \frac{c_{i_1}}{a_{i_1}}$

$y_1 \le \frac{c_{i_2}}{a_{i_2}}$

$\vdots$

$y_1 \le \frac{c_{i_k}}{a_{i_k}}$

Alegem cel mai mic raport pt a nu depăși nicio margine impusă de constrângeri.

$\alpha = \min\left\{\frac{c_i}{a_i} : a_i > 0\right\}$

Dacă $\nexists\, a_i > 0 \Rightarrow \alpha = \infty$

- Pt $a_i < 0$ constrângerile devin

$y_1 \ge \frac{c_{i_1}}{a_{i_1}}$

$y_1 \ge \frac{c_{i_2}}{a_{i_2}}$

$\vdots$

$y_1 \ge \frac{c_{i_k}}{a_{i_k}}$

Alegem cel mai mare raport pt a nu ajunge sub marginea inferioară impusă de constrângeri

$\beta = \max\left\{\frac{c_i}{a_i} : a_i < 0\right\}$

Dacă $\nexists\, a_i < 0 \Rightarrow \beta = -\infty$

- Pt $a_i = 0$
  - dacă $c_i < 0 \Rightarrow$ (D) nefez $\Rightarrow$ (P) unbounded sau nefez
  - dacă $c_i \ge 0 \Rightarrow$ nu avem constrângere

$y_1 \in [\beta, \alpha]$

- Dacă $\beta > \alpha \Rightarrow \nexists$ sol $\Rightarrow$ (D) nefez $\Rightarrow$ (P) unbounded sau nefez
- Dacă $\beta <= \alpha$ avem urm cazuri

Știind că $y_1 \le 0$ avem urm cazuri

① $\beta > 0 \Rightarrow$ (D) nefez $\Rightarrow$ (P) unbounded sau nefez

② $\beta \le 0$ și $\alpha > 0 \Rightarrow y_1 \in [\beta, 0]$

③ $\beta \le 0$ și $\alpha \le 0 \Rightarrow y_1 \in [\beta, \alpha]$

Pt $b < 0$, pentru a maximiza $w = b \cdot y_1$, sol $y_1 = \beta$ (cât mai mic)

$b \ge 0$, =//= , sol $y_1 = \alpha / 0$ (cât mai mare)

<u>Strong Duality</u> $\Rightarrow z^* = w^*$

Pt $b < 0$, $w^* = b \cdot \beta = z^*$

Aleg $x_i^* \ne 0$ pt care $a_i < 0$ și raportul $\frac{c_i}{a_i}$ este maxim (practic cum am ales β)

$x_j^* = 0,\ j \ne i$

Avem $z^* = w^* \Rightarrow c_i \cdot x_i^* = b \cdot \beta \Rightarrow x_i^* = \frac{b \cdot \beta}{c_i}$

Verificăm dacă sol este fezabilă

$a_i \cdot x_i^* \le b \Leftrightarrow a_i \cdot \frac{b \cdot \beta}{c_i} \le b \Leftrightarrow \cancel{a_i} \cdot \frac{b}{\cancel{a_i}} \cdot \frac{\cancel{c_i}}{\cancel{c_i}} \le b$ (A)

Cum sol celor 2 pb sunt fezab și $w^* = z^* \xRightarrow{\text{cor ii.}} y_1 = \beta$ sol opt pt (D) și x^* sol opt pt (P)

Tema 2.2, exercitiul 7 continuare

Pt $b \geq 0$, $w^* = b \cdot \alpha' = z^*$ (unde $\alpha' = \min(\alpha, 0)$) — 7. Continuare

Aleg $x_i^* \neq 0$ pt $a_i > 0$ și rap $\frac{c_i}{a_i}$ min (practic cum am ales α)

Avem $z^* = w^* \Rightarrow c_i \cdot x_i^* = b \cdot \alpha \Rightarrow x_i^* = \frac{b \cdot \alpha}{c_i}$, $\alpha < 0$

Verif dacă sol e fezab

$a_i \cdot x_i^* \leq b \Leftrightarrow a_i \cdot \frac{b \cdot \alpha}{c_i} \leq b \Leftrightarrow a_i \cdot \frac{b}{c_i} \cdot \frac{c_i}{a_i} \leq b$ (A)

Cum sol celor 2pb sunt fezab și $w^* = z^* \Rightarrow y_1 = \alpha$ sol pt (D) și x^* sol pt (P)

Când $\alpha = 0 \Rightarrow z^* = w^* = 0$

$\Rightarrow$ sol $x_i^* = 0$, $i = \overline{1,m}$ este fezabilă pt (P)

Știm că $b \geq 0$ deci $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m \leq b \Rightarrow 0 \leq b$ ✓

$y_1 = 0$ știm că e fez

Cor ii $\Rightarrow x_i^*$ sol optimală pt (P)

și y_1 sol optimală pt (D)

Tema 2.3, exercitiul 1 a) (inceputul)

Cercetări operaționale tema 2.3

1.

a)
$$\begin{cases} \min\ z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

standard form
$$\begin{cases} \min\ z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5 = 5 \quad (-1) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \min\ z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Primul tableau simplex dual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	1	1	2	1	0	0	4
$\underline{x_5}$	-3	-2	$\underline{-4}$	0	1	0	$\underline{-5}$
x_6	2	3	1	0	0	1	9
z	2	2	1	0	0	0	0

$\cdot\left(\frac{1}{4}\right) +$ Row$_3$, Row$_4$
$\cdot\left(\frac{1}{2}\right) +$ Row$_1$

$$\left|\frac{2}{-3}\right| \quad \left|\frac{2}{-2}\right| \quad \left|\frac{1}{-4}\right|$$
$$\quad\ \ \| \qquad\quad \| \qquad\quad \|$$
$$0{,}6 \qquad 1 \qquad 0{,}25$$
min (sub 0,25)

Tema 2.3, exercitiul 1 a) continuare

Cercetări operaționale tema 2.3

1. a) (continuare)

Al doilea tablou simplex dual

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$
x_6	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{31}{4}$
z	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$

Ultimul tablou este fezabil, deci optim pentru primală și duală. Soluția optimă este $x^* = (0, 0, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 0, \frac{31}{4})$ iar valoarea optimă a funcției obiectiv este $\frac{5}{4}$

Tema 2.3, exercitiul 2

Cercetări operaționale tema 2.3

2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	0	α_3	0	-1	1	α_6	3	2
x_3	α_1	-2	0	α_5	-1	0	-1	α_8
x_6	0	1	1	-1	-2	0	α_7	α_9
z	α_2	1	α_4	1	2	0	3	-5

i) ~~α_2, α_3~~, Dacă considerăm $\hat{c}_6 = 0$ în loc de $\hat{c}_6 = 1$

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_6 = 1$

baza $= \{x_1, x_3, x_6\}$

~~$x_1 = 0, x_2 =$~~

$x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha_8$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = \alpha_9$, $x_7 = 0$

ii) $\alpha_8 < 0$ sau $\alpha_9 < 0$

iii) $\alpha_8 < 0$ ~~$\alpha_5 < 0$~~

și $\left|\frac{1}{-2}\right| < \left|\frac{1}{\alpha_5}\right| \Rightarrow \alpha_5 < 2$

iv) Problema va fi mereu fezabilă. Poate fi nefezabilă dacă considerăm $a_{3,4}, a_{3,5} \geq 0$ și $\alpha_7 \geq 0$, $\alpha_9 \leq 0$ sau dacă considerăm $a_{2,2}, a_{2,5}, a_{2,7} \geq 0$ și $\alpha_8 \leq 0$

v) $\alpha_8 < 0$ sau $\alpha_9 < 0$

Cazul $\alpha_8 < 0$: $\left|\frac{1}{-2}\right| < \left|\frac{1}{\alpha_5}\right| \Rightarrow \alpha_5 > 2$ (Regula lui Bland)

și $-\frac{\alpha_8}{\alpha_5} + \alpha_9 < 0$

cazul $\alpha_9 < 0$: $\alpha_7 > 0$ (Regula lui Bland)

și $\alpha_9 + \alpha_8 < 0$

Tema 2.2, exercitiul 8

Cercetări operaționale tema 2.2

8. Din corolarul dualității slabe => dacă primala este nemărginită atunci duala nu are soluție fezabilă.

$$(P)\begin{cases} \min z = x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s.t } 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

standard form

$$\begin{cases} \min z = x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s.t } 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - y_1 = 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + y_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min z = x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \text{s.t } -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + y_1 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + y_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	RHS
y_1	-2	-2	-2	+1	0	-2
y_2	1	4	-1	0	1	1
z	1	-3	-1	0	0	0

Întrucât $\bar{c}_3 < 0$, iar $\bar{a}_{i3} \leq 0$, $i = \overline{1,2}$ => problema este nemărginită => duala nu are o soluție fezabilă