

1 问题引导(一): 以微分知识解决最优化问题

牛刀小试：GitModel 公司发明了一种专用于数值计算的平板电脑 GitNum, 考虑到员工生产效率的问题, GitNum 的生产成本是与生产台数相关的. 函数关系为 $C(n) = 1250n(2 - e^{-(n-5000)^2})$. 请问如何确定这批 GitNum 的生产台数使得每台的平均生产成本最小使得经济效益最大呢?

分析解决：要求平均生产成本最小, 本质上就是求平均成本函数 $\bar{C}(n) = \frac{C(n)}{n}$ 的最小值. 事实上, 初中我们就经常接触类似的最值问题, 只不过所谓的目标函数往往是最简单的二次函数. 而在高中之后我们学习了求导工具之后发现对任意可导的函数我们都可以探究其导数异号零点来确定其极值点.

诚然, 仅仅是导数零点并不足以说明其就是极值点, 如下图的函数 $y = x^3$, 我们发现 $x = 0$ 是其导数零点但在图像上仅仅只是函数的一个”拐点”.

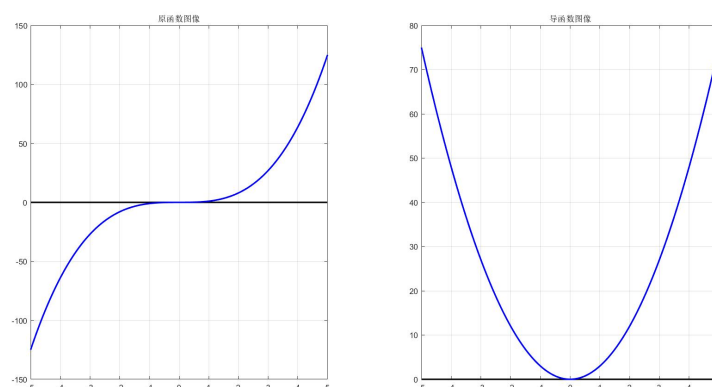


图 1: $y = x^3$ 及其导数图像

这是因为导函数 $y' = 3x^2$ 在导数零点 $x = 0$ 处仅仅是”切过” x 轴而非”穿过” x 轴! 而分析学告诉我们, 导函数 f' 在零点 x_0 处”穿过” x 轴的图像性质本质上就是 f' 在零点处附近是单调的, 亦即二阶导函数 (导数的导数) $f''(x_0) > 0$ 或 $f''(x_0) < 0$!

函数性态	导数性态	二阶导数	图像
极小值点	$f'(x_0) = 0$, 附近递增	$f''(x_0) > 0$	
极大值点	$f'(x_0) = 0$, 附近递减	$f''(x_0) < 0$	

回到问题上来, 要求 $\bar{C}(n)$ 的极值点, 我们首先需要求出导函数 $\bar{C}'(n)$ 的零点 n_0 , 如果 $\bar{C}''(n_0) > 0$, 那么 n_0 即为 $\bar{C}(n)$ 的极小值点.

代码如下 :**(给出python代码)**

经验证, $n_0 = 5000$ 确实为 $\bar{C}(n)$ 的极小值点, 即第一批 GitNum 生产台数计划为 5000 台时平均成本最小, 为 1250 元/台.

抽象提炼: 数学建模中, 优化问题是渗透到各个方面的, 小到最优参数的确定, 大到最优策略的规划. 每一个优化问题都可以以如下标准形式给出:

$$\begin{aligned} & \max f(x) \\ & \text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $f(x)$ 即是我们要求最值的函数, x 是我们用来“决策”的变量. $g_i(x) \geq 0, h_j(x) = 0$ 分别是决策变量 x 满足的条件. 当决策变量 x 没有约束时, 称为**无约束优化问题**.

上文即为一个最简单的无约束优化问题——目标函数有**明确表达式**, **二阶以上可导**, **定义域离散程度不高** (往往生产一批产品的数量范围是足够大的以至于我们可以将离散的整数视为连续的). 对于这样的简单优化问题, 利用数学分析的知识可以做到精确的分析. 我们给出优化领域最经典也是最实用的判别条件.

命题 1.1 (一阶最优化必要条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的可导函数. 若 x^* 是 f 的极值点则

$$f'(x^*) = 0. \quad (1.2)$$

其中 f', f'' 分别是 f 的一阶导数, 二阶导数.

命题 1.2 (二阶最优化必要条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的二阶可导函数. 若 x^* 是 f 的极大(小)值点则

$$f'(x^*) = 0, f''(x^*) \leq 0 (f''(x^*) \geq 0), \quad (1.3)$$

其中 f', f'' 分别是 f 的一阶导数, 二阶导数.

命题 1.3 (二阶最优化充分条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的二阶可导函数. 若 x^* 满足

$$f'(x^*) = 0, f''(x^*) < 0 (f''(x^*) > 0),$$

则 x^* 是 f 的极大值点.

最优化条件给出了这样一个基本事实: 不管函数 f 表达式复杂与否, 只要二阶以上可导, 我们只需要找出满足二阶导数 $f'' \leq 0 (f'' \geq 0)$ 的导数零点, 极大值点必定存在其中!

(给出python代码)

小有所成: GitModel 公司通过 GitNum 的发售赚到第一桶金后马不停蹄地投入到 GitNum 的改良研制中, 经市场调查后 GitModel 公司发现根据用户需求可推

出轻便版以及高性能版的 GitNum. 三种 GitNum 的生产成本函数以及预计售价分别如下表

表 1: 三款 GitNum 的售价以及成本函数

型号	售价	成本函数
GitNum Mini	$q_1 = 2000$	$C_1(n) = 750n(2 - e^{-(n-6000)^2})$
GitNum 标准版	$q_2 = 3000$	$C_2(n) = 1250n(2 - e^{-(n-5000)^2})$
GitNum Pro	$q_3 = 4500$	$C_3(n) = 2000n(2 - e^{-(n-3000)^2})$

在这一批生产中, GitModel 公司应该制定怎么样的生产计划即三种 GitNum 的生产台数才能使得利润与成本的比值最大化?

分析解决: 我们把三种 GitNum 的生产台数按上表顺序标记序号 $n_i, i = 1, 2, 3$, 分别用 R, Q, C 来代表收入, 利润以及成本. 问题旨在求出利润/成本 $r = \frac{Q}{C}$ 的最大值, 而我们需要同时考虑三种 GitNum 的生产台数, 也就是说, 需要求极值的函数 r 是 n_1, n_2, n_3 的多元函数!

我们逐步将各种函数列出来以得到目标函数 $\frac{Q}{C}$, 总收入函数为

$$R(n_1, n_2, n_3) = 2000n_1 + 3000n_2 + 4500n_3,$$

总成本函数为

$$C(n_1, n_2, n_3) = 750n(2 - e^{-(n-6000)^2}) + 1250n(2 - e^{-(n-5000)^2}) + 2000n(2 - e^{-(n-3000)^2}),$$

总利润函数为

$$Q(n_1, n_2, n_3) = R(n_1, n_2, n_3) - C(n_1, n_2, n_3),$$

所以总利润与总成本比值为

$$\begin{aligned} r(n_1, n_2, n_3) &= \frac{R(n_1, n_2, n_3) - C(n_1, n_2, n_3)}{C(n_1, n_2, n_3)} \\ &= \frac{R(n_1, n_2, n_3)}{C(n_1, n_2, n_3)} - 1 \\ &= \frac{2000n_1 + 3000n_2 + 4500n_3}{750n(2 - e^{-(n-6000)^2}) + 1250n(2 - e^{-(n-5000)^2}) + 2000n(2 - e^{-(n-3000)^2})} - 1. \end{aligned}$$

优化问题即为

$$\max_{n_1, n_2, n_3 \geq 1} r(n_1, n_2, n_3). \quad (1.4)$$

依样画葫芦, 该问题不过是第一个问题的变量 Plus 版, 我们仍然可以采用研究导数以及二阶导数性态的方式去求出极大值组合 (n_1^*, n_2^*, n_3^*) .

那有的同学可能会问了：一元函数分析跟多元函数分析有什么区别呢？

在多元函数 f 中，我们只能对单个变量 x 求偏导数 f_x ，这远远不足以刻画导数的全部信息。所以，梯度（全导数）以及 Hesse 矩阵的概念替代了一元函数中导数以及二阶导数。

定义 1.1. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow R$ 是 n 元函数， $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是变量。

记 f 对变量 x_i 方向的偏导数为 f'_i ，称所有偏导数组成的列向量 $[f'_1, f'_2, \dots, f'_n]^T \triangleq \nabla f$ ，为函数 f 的全导数，亦称**梯度**。

记偏导数 f'_i 对变量 x_j 方向的二阶偏导数为 f''_{ij} 称 $n \times n$ 方阵

$$\begin{bmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{bmatrix} \triangleq \nabla^2 f,$$

为函数 f 的 **Hesse 矩阵**。

最优化条件 1.1, 1.2, 1.3 的多元函数版本则如下：

命题 1.4 (一阶最优化必要条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的 n 元可导函数. 若 x^* 是 f 的极值点则

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (1.5)$$

其中 f', f'' 分别是 f 的一阶导数, 二阶导数。

命题 1.5 (二阶最优化必要条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的 n 元二阶可导函数. 若 x^* 是 f 的极大(小)值点则

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \text{ 半负定 } (\nabla^2 f''(x^*) \text{ 半正定}), \quad (1.6)$$

其中 f', f'' 分别是 f 的一阶导数, 二阶导数。

命题 1.6 (二阶最优化充分条件). 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R}^n 上的 n 元二阶可导函数. 若 x^* 满足

$$\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*) \text{ 负定 } (\nabla^2 f''(x^*) \text{ 正定}),$$

则 x^* 是 f 的极大(小)值点。

而代数学的知识告诉我们, 验证一个对称矩阵是否正(负)定只需要 **check** 其所有特征值是否大(小)于 0。

所以, 要制定最佳的生产计划 (n_1^*, n_2^*, n_3^*) 使得利润与成本比值最大, 即求解问题 1.4, 只需要求出 3 元方程组

$$\nabla r = 0$$

的解集,再挑出解集中使得 $\nabla^2 r$ 负定的解,这就是我们的最佳生产计划 (n_1^*, n_2^*, n_3^*) !

(给出python代码)

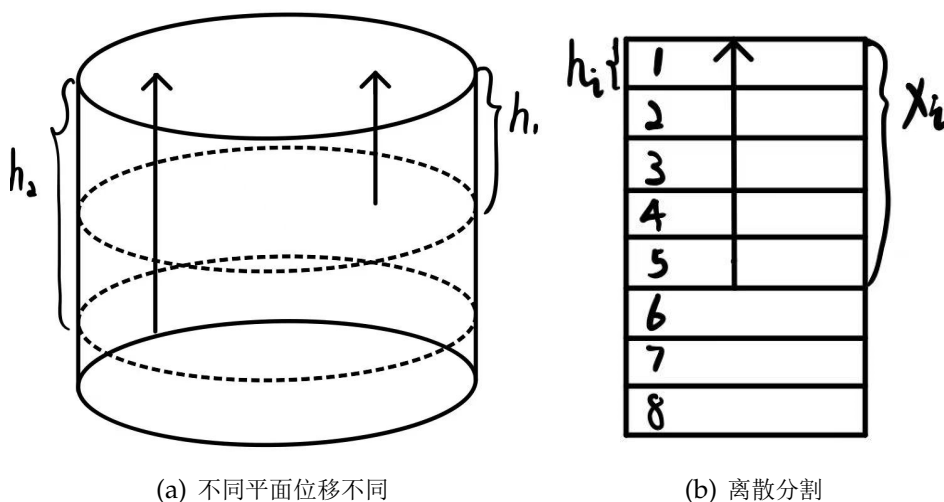
2 问题引导(二):以积分知识解决工程问题

牛刀小试: 鉴于 GitModel 公司刚上市,承接了许多数学建模相关业务. 有一家工程企业给出了这样一个任务: 该企业准备制造一批抽水机, 需要得到其各种数据来决定抽水机的性能参数. 企业首先对圆柱形的储水桶进行了抽水测试, 需要求出将桶内的水全部抽出需要做多少功.



储水桶的数据如下: 高 $5m$, 底面圆半径 $3m$.

分析解决: 为了将水抽出来, 抽水机只需要施加与水相同的重力 G 即可. 然而, 如图所示, 不同水平面上抽水的位移是不同的, 这导致我们无法将整桶水看作一个质点, 自然无法用高中物理的做功计算求出数值.



老师, 我只知道高中物理的方法, 能不能改进高中物理方法来解决这个问题呢: 整桶水无法看作一个质点, 那能否将整桶水看作 n 个单位质点呢?

众所周知, 水桶中的水是连续的整体, 如果我们将水分割成 n 个单位, 那么求出来的数值只是一个近似, 不过当 n 越来越大时, 误差就会越来越小!

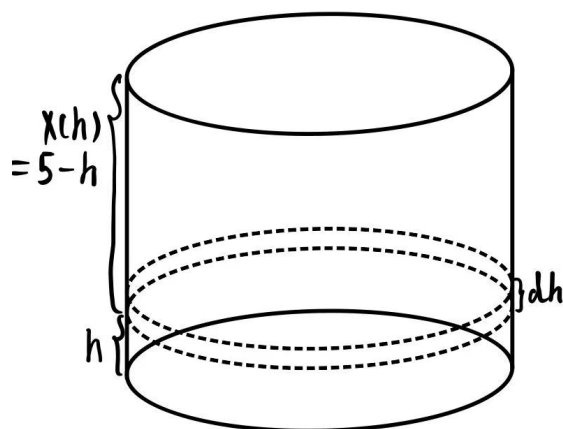
由于抽水过程水的位移只有垂直方向, 我们从高到低将水有序分割成 n 个单位, 每个单位都是一个小型水柱, 长为 $h_i = \frac{5}{n}m$, 简易计算可知单位重力为 $G_i = \rho V_i g = \rho g r^2 \pi h_i = \frac{441\pi}{n} N$. 水柱的重心在体心, 那么抽第 i 个单位的水需要的位移是 $x_i = \frac{5i}{n}m$. 所以抽水做功的近似值就是对数列 $G_i x_i$ 的前 n 项求和

$$W \approx \sum_{i=1}^n G_i x_i = \frac{441\pi}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} = 441\pi \frac{5n+5}{2n} = 1102.5\pi + \frac{5\pi}{2n}.$$

当 n 越来越大时, 误差项 $\frac{5\pi}{2n}$ 就会越来越小, 我们有理由猜测抽水做功 W 就是 $1102.5\pi \approx 3436J$!

老师, 那只是我们的猜测, 有没有更精确的方法呢?

当然有! 事实上, 我们能分割水柱是因为每个单位水柱中所有水的位移是近似相同的, 当分割到什么程度时单位中所有水的位移是相同的呢: 分割至质点大小的时候, 如图所示, 这时每个单位水柱的位置及其位移可以用距离桶底的高度 h 来完美表达! 这便是高中物理常用的微元法, 而此时数列求和即变为积分!



$$\begin{aligned}
& \text{单位长度 } h_i \xrightarrow{n \text{ 越来越大}} \text{长度微分 } dh, \\
& \text{单位重力 } G_i \xrightarrow{n \text{ 越来越大}} \text{重力微分 } dG = \rho g r^2 \pi dh = 88.2\pi dh, \\
& \text{单位位移 } x_i \xrightarrow{n \text{ 越来越大}} \text{位移函数 } x(h) = 5 - h, \\
& \text{做功总和 } \sum_{i=1}^n G_i x_i \xrightarrow{n \text{ 越来越大}} \text{做功积分 } \int_0^5 x(h) dG = \int_0^5 88.2\pi(5 - h) dh.
\end{aligned}$$

python 提供积分代码如下, 结果即为 $3436J$, 这与我们的猜测是相符的.

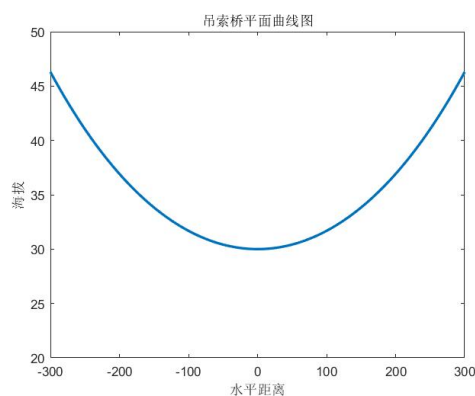
抽象提炼: 本质上, 微元法其实就是分析学中积分的应用: 将连续变化的函数 (变力做功, 恒力变位移做功, 连续型随机变量期望值等等连续物理量) 先微分再积分得到相关量, 这在处理非离散或离散程度小的建模问题中尤为常见.

小有所成: 紧接着 GitModel 公司又接到另一家工程企业的任务: 由于吊桥的年久失修导致一些铁链生锈而质良发生了改变, 为保证安全必须重新测量铁链的总体质量, 而体积巨大难以拆卸重组的铁链无法直接测量其质量, 仅能靠检测每块铁环的质量来估计整体变化的质量, 然而逐块检测是一项巨大的工程, 需要耗费巨额的时间与人力.

据专家分析, 若以桥梁中心为原点建立空间坐标系, 铁链的 y 轴坐标可以近似相同. 铁链上每块铁环的密度仅与其所处的横向距离以及海拔 (x, z) 有关, 经数值拟合可得到密度 (kg/m^3) 与位置 (m) 的函数为 $\rho(x, z) = 7860 \left(1 + 1.5^{2 - \frac{z}{10} - 0.1 \left(\frac{x}{50} \right)^2} \right)$ 及铁链的垂直面曲线方程为 $z = 30 \cosh \frac{x}{300}$, 铁环的体积为 0.015m^3 . GitModel 公司如何通过不直接检测的方式来估计铁链的质量呢?



(c) 吊索桥图示



(d) 平面曲线

分析解决: 我们发现, 这其实也是类似于上文问题的离散程度小的问题 (因为铁

链的铁环数足够多使得我们可以近似于连续问题), 每块铁环可以当作圆柱形状的微元, 其具有密度与位置的函数 $\rho(x, z)$, 长度微分 ds 以及体积微分 dV 那么我们同样可以应用积分来求出质量.

那么该问题是否可以照搬上文的方法呢? 我们接着往下分析两个问题的不同. 应该注意到: 第一个问题是位移在垂直直线上的分布, 而该问题是密度 (质量) 在曲线上的分布, 这代表着我们无法通过常规积分的方式来求, 因为我们的坐标轴不是一条直线!

当然, 分析学同样提供了在曲线上的积分方式, 我们称为曲线积分. 本问题就是一个经典的**第一型曲线积分**问题——知道曲线上每个点 (x, z) 上的分布函数 $\rho(x, z)$, 求曲线的质量 $M = \int_L m(x, z)ds$, 其中, 类似于我们对坐标 x 做微分 dx , 曲线上的坐标可以用长度来表示, 所以我们对曲线的长度做了微分 ds 后进行积分处理. 与直线积分有所不同的是, 我们无法以曲线为轴, 但仍然可以将曲线放在坐标系中, 此时由勾股定理我们可以求出长度微分的表达式, 如下:

$$\begin{aligned} \text{单位长度 } s_i &= \sqrt{x_i^2 + z_i^2} \xrightarrow{\text{分割越来越细}} \text{长度微分 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}, \\ \text{单位体积 } V_i &= s_i r^2 \pi \xrightarrow{\text{分割越来越细}} \text{体积微分 } dV = r^2 \pi ds, \\ \text{单位质量 } m_i &= \rho(x, z) V_i \xrightarrow{\text{分割越来越细}} \text{质量函数 } \rho(x, z) dV, \\ \text{总质量 } \sum_{i=1}^n \rho(x_i, z_i) V_i &\xrightarrow{\text{分割越来越细}} \text{质量积分 } \int_L \rho(x, z) dV = \int_L \rho(x, z) r^2 \pi ds. \end{aligned}$$

注: 当 $\rho(x, z)$ 恒等于 1 时, 事实上就是在求曲线的长度.

在进行铁链质量数值估算之前, 我们先给出第一型曲线积分的计算方式. 往往我们计算曲线积分需要知道曲线 L 的参数方程 $x = x(t), z = z(t)$ 以及参数 t 的取值范围 $[a, b]$. 问题中提到铁链的近似方程为 $z = 30 \cosh \frac{x}{300}$, 也就是说, 铁链曲线的参数方程可用 x 作为参数, 其范围 $[-300, 300]$ 在实际测量中非常易求, 我们将铁链曲线方程写成如下参数形式:

$$\begin{cases} z(x) = 30 \cosh \frac{x}{300} \\ x(x) = x \end{cases}, x \in [-300, 300]$$

那么, 铁链的质量可由如下曲线积分计算方式给出:

定义 2.1 (第一型曲线积分的计算方式). 设平面曲线 L 的参数方程为 $x = x(t), z = z(t), t \in [a, b]$, $\rho(x, z)$ 为定义在 L 上的连续函数, 则

$$\int_L \rho(x, z) ds = \int_a^b \rho(x(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

我们代入问题给出的方程 $\rho(x, z), z(x)$ 以及单位铁环的体积 $0.14m^3$ 即可得到铁链的总质量计算式为

$$11.79 \int_{-300}^{300} \left(1 + 1.5^{2-3 \cosh \frac{x}{300} - 0.1 \left(\frac{x}{50} \right)^2} \right) \sqrt{100 + \sinh^2 \frac{x}{300}} dx.$$

第一型曲线积分python代码如下(给出python代码) 铁链质量的估算值为 172.3561t.

发散思维：有了直线积分, 曲线积分, 我们自然会问：有没有平面积分以及曲面积分呢? 当然! 事实上, 由于我们还会接触变力曲线做功, 这代表在每个点上的分布函数不再是标量函数而是向量函数! 分析学还给出了第二类曲线积分以及曲面积分.

实例	计算工具
计算三维体积	二重(平面)积分
计算三维曲面面积	第一型曲面积分
计算变力曲线做功	第二型曲线积分
计算曲面流量	第二型曲面积分

深入思考：有一位爱钻牛角尖的同学发出了提问——老师, 这样的方法还是太”数学”了, 并且理想很丰满, 现实很骨感, 万一**没有函数表达式呢?** 又万一有函数表达式但**积分太难算了呢?**

别急, 数学家也想到了应用性的问题, 理论总是要落地的嘛! 所以有了计算机之后, 许多数值计算的方法也被发明了出来, 其中就包括了**数值积分**的方法——计算机可以通过数值方法对许多**不连续函数**甚至是**无法写出表达式**的函数进行积分! 这便很好地解决了积分在实际应用上的问题.