中国科学院研究生院

运筹通论II

刘克

中科院数学与系统科学研究院 北京100190

邮箱地址: kliu@amss.ac.cn

第三部分　马氏决策——人力资源模型

1 问题

人力资源管理包括:招募、晋升、调动等等，见Edwards（1983）。为处理这一问题，人们建立了很多模型，如确定性模型、随机模型、排序模型等等。Altman等人（1971）对多周期单地域问题提供了非线性规划的方法。Ignall等人（1970）研究了Altman等人的线性模型. Bruce （1996）利用目标规划研究了招募的问题。用类似的线性模型, Bruce 在一定条件下得到了近视眼（myopic）策略是最优的.

Abouelmagd（1985）考虑了一种聚合的方案，即将劳力、产品和库存综合排序.发展出将马氏过程嵌入到数学规划决策模型的方法. Vajda（1978）利用Markov模型处理人口问题。利用模拟的方法Luan（1982）考虑了N个服务员的派遣问题（指服务员休息和工作）等等。

Tijms（1980）利用半马氏模型考虑了c个服务员的问题。根据队长来确定服务水平i，其中$i = 0, 1, \cdots, c$. Righter （1996）考虑了设备维修问题, 具有单服务员的有限源问题。Sennott （1989）利用semi-Markov模型研究了$M/G/1$和$G/M/m$的平均费用最优问题.

人力资源的调配和制订用人计划的很多问题都可以利用马氏决策过程来解决.这里,我们针对很多高技术服务公司面临着如何提高服务效率和服务水平但又希望降低服务费用这一具有共性的问题，建立了马氏决策管理模型，并且得到了一些公司领导层感兴趣的管理数量指标。为了说明问题，这一章还给出了实际的数例。

很多高技术服务公司，特别是IT行业、电子行业等等，为他们的产品、设备或系统提供服务或系统支持。由于顾客的多种需求，服务部门要拥有不同服务水平的服务人员来适应顾客的这种需求。对于顾客需求的多样性和服务人员水平的多重性，如何经济的安排和调配，是公司所面临的重要课题。

一般来说，公司雇有多种服务人员为随机到来的顾客提供多种服务。例如：某公司有若干个分支机构，每个分支机构都雇有三种不同水平的服务人员（可根据年限划分，如0-2年为水平3；2-5年的为水平2；5年以上的为水平1）。顾客的各种服务需求大约可分为三种，每种需求的到来分别符合独立的Poisson流，具体数据可见表8.1和表8.2。当一个服务的要求到来时,公司的决策人员马上决定派遣什么水平的服务人员去完成这一请求的服务.当一个服务人员完成这项服务后马上就会回到公司(如果公司没有再安排别的服务)或者马上去完成公司指派的另一任务(路程被计算在服务时间里).当一个服务请求到来时,如果公司没有可派遣的服务人员,公司将记录下这一服务请求(等于进入一个队列),一旦队列满额(可视为超过顾客的忍耐程度),这个新到的服务就会被损失掉.特别要求公司有雇员时,不允许有顾客等待.

表 8.1　各分支雇员数和服务到达参数（分）

	分支机构 1	分支机构 2	分支机构 3
水平 1	5	8	10
水平 2	3	2	1
水平 3	7	2	7
总雇员	15	12	18
高级服务 1	49.79	68.7	65.02
中级服务 2	9.84	12.16	10.14
初级服务 3	14.29	18,08	9.94

表 8.2　不同服务人员的平均服务时间（分）

	高级服务 1	中级服务 2	初级服务 3
水平 1	56.86	56.20	48.82
水平 2	101.70	57.75	51.86
水平 3	130.50	63.49	54.20

由于需求的不确定性和等待空间的有限性,对于固定人员构成的这一分支机构,管理者必需采取最小费用准则(最优策略),当然还要考虑在最优策略下的损失率.为了提高公司的效率,经理希望知道可能的改进方向.

2 数学模型

我们这里假定有K种服务人员和L种顾客需求，服务时间服从指数分布，需求的到达为L个独立的Poisson过程。我们的评判准则是平均费用准则。考虑顾客到达和服务结束的时刻，此时嵌入链是Markov链。

我们将用到下列记号:

n_k	第k种服务员总数 $k = 1, \cdots, K$
n_{kl}	正在服务第l种顾客的第k种服务员数 $k = 1, \cdots, K; l = 1, \cdots, L$
n_{k0}	公司中尚未派出的第k种服务员数
μ_{kl}	第k种服务员服务第l种顾客的服务率
λ_l	第l种顾客需求的到达率 $l = 1, \cdots, L$
c_{kl}	第k种服务员服务第l种顾客的平均费用率
c_l	服务第l种顾客需求的固定启动费
b_l	第l种顾客需求的队长

令$NT = \sum_{k=1}^{K} n_k$为公司的总雇员数.

2.1. 状态空间

现在我们定义状态.记$s = (N(K,L), B(L), r)$为状态, 其中$N(K,L)$为一向量,具有形式$(n_{10}, n_{11}, \cdots, n_{1L-1}, n_{20}, \cdots, n_{KL-1})$,描述了公司人员的工作现状,包括在公司尚未派出的各类人员分布以及在外为各类顾客服务的人员状况;$B(L)$也为一向量且具有形式$(b_1, b_2, \cdots, b_L)$,描述了正在等待服务的顾客情况,包括各类顾客的人数;而r取值于集合$\{L, L-1, \cdots, 1, 0\}$,是描述最近一个到达的顾客情况的量.

首先令$\bar{X}$为集合

$$\bar{X}=\left\{(N(K,L),B(L),r)\;\middle|\;\begin{array}{l}\sum_{j=0}^{L-1} n_{ij}\le n_i,\ \sum_{l=1}^{L} b_l\le b;\ n_{ij},\ b_l\ge 0,\\ i=\overline{1,K},\ j=\overline{0,L-1},\ l=\overline{1,L},\ r=\overline{0,L}\end{array}\right\},$$

其中$\overline{a_1,a_2}$表示$a_1,a_1+1,\cdots,a_2$,而$b>0$是允许队长.

我们用X_1描述公司里仍有雇员且无顾客等待的所有可能状态,此时$r = 0$.那么

$$X_1 = \left\{ (N(K,L), B(L), 0) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{K} n_{k0} > 0,\ \sum_{l=1}^{L} b_l = 0, \right\} \subset \bar{X}.$$

用X_2描述公司里只有一个雇员且有等待的顾客的所有可能状态.那么

$$X_2 = \left\{ (N(K,L), B(L), 0) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{K} n_{k0} = 1,\ \sum_{l=1}^{L} b_l > 0, \right\} \subset \bar{X}.$$

用X_3描述公司里仍有空闲的服务人员但是刚好有一个顾客到达.那么

$$X_3 = \left\{ (N(K,L), B(L), j) \middle| \sum_{k=1}^{K} n_{k0} > 0,\ \sum_{l=1}^{L} b_l = 0,\ j = \overline{1,L} \right\} \subset \bar{X}.$$

其中状态$(N(K,L), B(L), j)$表示新到的需求恰好是第j种顾客. 最后,用X_4描述公司里无雇员的所有可能状态.则

$$X_4 = \left\{ (N(K,L), B(L), 0) \middle| \sum_{k=1}^{K} n_{k0} = 0,\ 0 < \sum_{l=1}^{L} b_l \leq b, \right\} \subset \bar{X}.$$

令X为状态空间,即X_1, X_2, X_3和X_4的并.很明显,如果队长的限制b确定之后,X就是所有的可能状态.

2.2. 决策时刻与行动集

决策有可能在时间区间$[0,\infty)$上的任何一点发生.也就是说,任何时候只要面临着公司需要指派哪个雇员去服务某个需求或者指派一个雇员去服务哪一个正在等待的顾客,那就是决策时刻.在没有顾客到达或者服务人员没有结束任何服务的时候, 整个系统的情况没有任何变化,所以公司不会改变任何已经指派好的工作.所以,尽管决策时刻可能发生在0到∞之间的任意点,但是实际上决策时刻只是在有新的顾客到达或者服务人员结束某个服务时才需要公司做决策.根据我们前面的各种假设条件,系统变化的过程是一个马氏过程,决策时刻只是$[0,\infty)$上的可数个点,这正是第6章中连续时间MDP或者SMDP的情形.

对于嵌入马氏链,有选择的做决策只可能发生在X_2和X_3中的状态上. 对于X_2中的状态来说,可以选择该雇员服务那类顾客(在同一类中,以先到先服务为原则),对于X_3中的状态来讲,我们要指派那一类空闲的服务人员去服务这个顾客.而对于那些X_1和X_4中的状态，决策者没有选择的机会(也就是说,此时可行的行动只有一个,就是什么都不做,记为0).

所以在状态空间X上的行动集合$A(\cdot)$定义为：

$$
\begin{array}{ll}
A(s) = \{0\}, & s \in X_1; \\
A(s) = \{l | b_l > 0,\ l = \overline{1, L}\}, & s \in X_2; \\
A(s) = \{k | n_{k0} > 0,\ k = \overline{1, K}\}, & s \in X_3; \\
A(s) = \{0\}, & s \in X_4,
\end{array}
$$

其中0表示“什么都不做”。行动$l \in A(s)$, $s \in X_2$表示由当前在公司里的唯一空闲的人员去服务一个在等待的第l类顾客的需求.相反，$k \in A(s)$, $s \in X_3$表示由第k种服务人员去服务这个刚刚到达的顾客.

2.3. 转移速率与转移概率

转移概率是依赖于当前系统所处的状态和决策者选取的行动的。因为在本章的条件下，过程是马氏过程，所以转移概率可以直接利用马氏过程的转移速率得到。转移速率可以分为下面的几种情况确定：

情况一：对于X_1中的状态s，只有可能发生两种转移，既转移到$s' \in X_1$或者转移到$s' \in X_3$，其转移速率为：

$$q(s'|s,0) = \begin{cases} n_{ij}\mu_{ij}, & s'(\in X_1)\text{表示一个}i\text{类人员恰好完成一个}j\text{类服务}, \\ \lambda_j, & s'(\in X_3)\text{表示一个}j\text{类的服务需求到来}. \end{cases}$$

情况二：对于X_2中的状态s, $n_{k0} > 0$,并且采取行动l,会有两种可能的转移发生:1）转移到状态$s' \in X_1 \cup X_2$，其转移速率为

$$q(s'|s,l) = \begin{cases} n_{ij}\mu_{ij}, & i \neq k, \\ n_{ij}\mu_{ij}, & i = k\text{且}j \neq l, \\ (n_{ij}+1)\mu_{ij}, & i = k\text{且}j = l, \end{cases}$$

这里$s' \in X_1 \cup X_2$表示一个i类人员恰好完成一个j类服务；以及2）转移到状态$s' \in X_4$，其转移概率为

$$q(s'|s,l) = \lambda_j, \qquad s'(\in X_4)\text{表示一个}j\text{类的服务需求到来.}$$

情况三：对于X_3中的状态s, 第l种服务需求刚刚到达且决策者选取行动k(即派遣第k类人员去服务). 依然有两种转移会发生: 1）转移到状态$s' \in X_1$，其转移速率为

$$q(s'|s,k) = \begin{cases} n_{ij}\mu_{ij}, & i \neq k, \\ n_{ij}\mu_{ij}, & i = k \text{且} j \neq l, \\ (n_{ij}+1)\mu_{ij}, & i = k \text{且} j = l, \end{cases}$$

这里$s' \in X_1$表示一个i类人员恰好完成一个j类服务；以及2）转移到状态$s' \in X_3 \cup X_4$，其转移概率为

$$q(s'|s,k) = \lambda_j, \qquad s'(\in X_3 \cup X_4)\text{表示一个}j\text{类的服务需求到来}.$$

情况四：对于X_4中的状态s也有两种转移会发生:1）转移到状态$s' \in X_2$或者$s' \in X_4$，其转移速率为

$$\begin{array}{ll} q(s'|s,0)=n_{ij}\mu_{ij}, & s'(\in X_2)\text{表示一个}i\text{类人员恰好完成一个}j\text{类服务}, \\ q(s'|s,0)=\lambda_j, & s'(\in X_4)\text{表示一个}j\text{类的服务需求到来}. \end{array}$$

除了上面定义的元素以外，转移速率矩阵的非对角元素皆为0。转移速率矩阵的对角元素定义为：

$$q(i|i,a) = \sum_{\substack{j \in X \\ j \neq i}} -q(j|i,a),$$

对一切的$a \in A(i)$.这样,对任意的确定性策略$f \in F$,我们可以得到转移速率矩阵$Q(f)$.

根据连续时间的MDP理论,我们可以得到嵌入马氏链的一步转移概率矩阵$P(f)$为:

$$P(f) = \lambda^{-1}[Q(f)] + I, \tag{1}$$

其中λ满足

$$0 < \lambda = \sup_{i \in S, a \in A(i)} -q(i|i,a) \le M.$$

事实上,$Q(f)$的每一行除以该行对应的对角线上的元素后在加上一个单位矩阵,也得到一个嵌入马氏链的转移概率矩阵$P'(f)$. 利用这两个不同的方法得到的模型其最优策略和最优策略对应的值函数是相同的.下面的模型是指已经离散化了的模型.

2.4. 费用与准则

考虑启动费为c_l, 它依赖于要服务的需求种类$l = \overline{1, L}$; 运行费用率为c_{kl}依赖于服务人员的水平$k = \overline{1, K}$和要求服务的设备种类$\overline{1, L}$. 由于服务时间的分布是指数分布，则在状态s时采取行动a的一步期望费用为：

$$c(s, a) = \begin{cases} 0 & s \in X_1 \cup X_4 \\ c_l + \int_0^\infty c_{kl} t d(1 - e^{-\mu_{kl} t}) & \text{否则,且是}k\text{类人服务}l\text{种需求}. \end{cases}$$

用平稳策略f时,平均费用准则为:

$$g(f,s)=\liminf_{n\to\infty}\frac{E_f\left\{\sum_{i=0}^{n}c(Y_i,f(Y_i))\middle|\,s\right\}}{E_f\left\{\sum_{i=0}^{n}\tau_i\middle|\,s\right\}},\tag{2}$$

其中Y_i是决策时刻i的状态,τ_i决策时刻i的平均逗留时间, s是初始状态.这样我们就构造了一个连续时间的MDP模型(也可以看成是一个SMDP问题). 由于状态空间和行动集都是有限的集合,所以我们有下面的引理8.1和定理8.1.

引理8.1：在本章的假设下,由任意策略$f \in F$诱导的嵌入马氏链是遍历的.

证明思路:直接证明任意两个状态互相可以到达,再根据状态集合是有限的.

定理8.1：上面导出的马氏决策问题对于平均准则,存在确定性平稳最优策略. 即存在确定性平稳策略f^*满足

$$g(f^*, s) \leq g(f, s),$$

对一切$f \in F$和$s \in X$, 即f^*为最优策略.,而且它在一般的策略类里也是最优的.

证明思路:直接验证定理6.14的条件.

3 相关参数分析

前面我们已经将这个人力资源管理的问题转变成为一个MDP问题了,并且知道存在最优的平稳策略.为了计算方便, 可以将这个问题转换为离散化模型利用第4章的方法求解,这里就不再详述了.下面,为了要解决公司关心的问题,讨论一下相关的参数.

公司首先关心的就是损失掉的顾客所占的比例,即损失率和顾客立即得到服务的比例,即立即满足率.我们有下面的性质.

性质8.1：任意平稳策略$f \in F$，损失率$p_f(LR)$为

$$p_f(LR) = \sum_{\substack{(N(K,L),B(L),r) \in X_4 \\ b_1+b_2+\cdots+b_L=b}} q_f^*((N(K,L),B(L),r)) \tag{3}$$

立即满足率$p_f(ISR)$为

$$\begin{aligned} p_f(ISR) &= \sum_{(N(K,L),B(L),0)\in X_1} q_f^*((N(K,L),B(L),0)) \\ &\quad + \sum_{\substack{(N(K,L),B(L),r) \in X_3 \\ n_{10}+n_{20}+\cdots+n_{K0} > 1}} q_f^*((N(K,L),B(L),r)) \end{aligned} \tag{4}$$

其中b为允许队长,q_f^*为对应于策略f平稳概率分布(参见性质4.8).

其次,公司还关心的就是系统里的平均顾客数和在系统里的平均等待顾客数.

性质8.2：令$f\in F$为一平稳策略,q_f^*为对应于策略f稳态概率分布. 则在系统里的平均顾客数(简记为AC)为:

$$L_f=\sum_{n=1}^{NT+b} n\times\sum_{s\in X_L(n)} q_f^*(s), \tag{5}$$

其中NT和b的定义如前.

令

$$X_L(n) = \left\{ s \in X \,\middle|\, \sum_{l=1}^{L} [b_l + \sum_{k=1}^{K} n_{kl}] = n \right\},$$

$n = \overline{0, NT + b}$.在系统里的平均等待顾客数(简记为AWC)为:

$$W_f = \sum_{n=1}^{b} n \times \sum_{s \in X_q(n)} q_f^*(s), \tag{6}$$

其中

$$X_q(n) = \left\{ s \in X_2 \cup X_4 \,\middle|\, \sum_{l=1}^{L} b_l = n \right\}, \tag{7}$$

$n = \overline{0, b}$.

最后,在得到“n个顾客在等待” 的概率和“n个k水平服务员忙”的概率之后,我们能够得到:k水平服务员平均忙数, k水平服务员的效率和整个人力系统的效率.

性质8.3：$f \in F$为一平稳策略,q_f^*为对应于策略f稳态概率分布. 则有"n个顾客在等待"的概率为

$$p_f(W = n) = \sum_{s \in X_q(n)} q_f^*(s), \tag{8}$$

其中$X_q(n)$的定义见(7), "n个k水平服务员忙"的概率为

$$p_f(k, n) = \sum_{s \in X_b(k,n)} q_f^*(s), \tag{9}$$

其中

$$X_b(k, n) = \left\{ s = (n_{kl}, B(L), r) \in X \;\middle|\; \sum_{l=1}^{L} n_{kl} = n, \right\}$$

分别对所有的$n, k = \overline{1, K}$.

k水平服务员平均忙数为

$$C(k)=\sum_{n=1}^{n_k} n p_f(k,n) \tag{10}$$

$n=\overline{1,n_k}$且$k=\overline{1,K}$, 此时k水平服务员的效率为

$$\eta_f(k)=\frac{C(k)}{n_k}. \tag{11}$$

整个人力系统的效率为

$$\eta_f=\frac{\sum_{k=1}^{K} C(k)}{NT}, \tag{12}$$

其中$C(k)$由(10)式定义.

这样,公司可以根据他的实际情况决定他的决策.如果他认为损失率过高,就可以首先考虑增加服务水平效率最高类别的服务人员.反之,如果他认为公司的运行费用过高时,可以减少服务水平效率最低类别的服务人员.但是要注意,如果为减少损失的顾客数目而增加服务水平效率最高类别的服务人员,是会造成公司的运行费用提高的;相反,如果为了减少公司的运行费用而减少服务水平效率最低类别的服务人员,则会增加损失的顾客数目.

4 数例

考虑第8.1节中的数例,如果取等待的顾客数最多为5时,即$b = 5$以及其他参数见表8.3.

表 8.3　启动费与各水平服务人员的费用率

	高级服务 1	中级服务 2	初级服务 3
启动费	20	10	5
	水平 1	水平 2	水平 3
费用率	5	4	3

利用第8.1节中的数值,求解分支机构1的MDP问题得到最优的值函数为42.5225还可以得到最优策略下的各项参数(最优策略的表现),见表8.4. 由于状态空间中的状态过于庞大,我们这里不可能将其列出来,我们在表8.4仅列出了解这个问题需要的状态数目.我们还考虑到经济增长5%以后各项参数的变化情况,此时最优值为44.6904,其他参数参见表8.4.

表 8.4　分支机构 1 最优策略的表现

	X_1 中状态数目	X_2 中状态数目	X_3 中状态数目	X_4 中状态数目
	126840	869880	380520	415800
	总状态数 $\lvert X\rvert$ =1793040			
	$p_f(LR)$	$p_f(ISR)$	AC	AWC
	0.00814136	0.79958	11.2593	0.39433
增 5%	0.01184470	0.74842	11.8273	0.52463
	η	$\eta(1)$	$\eta(2)$	$\eta(3)$
	0.72433	0.56919	0.69901	0.84599
增 5%	0.75351	0.61706	0.73357	0.85953

增5%表示经济增加5%后的相应指标数值.决策者如果认为人力资源系统的效率过低而且目前的损失率足以忍受,就可以重新确定人力资源的分配.从计算结果来看,我们建议可以减少高技术水平的人员数目对于减少费用来说是最为有效的.针对分支机构2和分支机构3我们将计算结果分别列入表8.5和表8.6, 最优策略的值函数分别为38.0369和48.8126;当经济增长5%后,最优值函数分别为39.9086和51.5313.

表 8.5 分支机构 2 最优策略的表现

	X_1 中状态数目	X_2 中状态数目	X_3 中状态数目	X_4 中状态数目
	14880	160380	44640	89100
	总状态数			
	$\lvert X \rvert$ =309000			
	$p_f(LR)$	$p_f(ISR)$	AC	AWC
	0.00686975	0.800328	8.60579	0.36825
增 5%	0.00980665	0.755314	9.05408	0.47866
	η	$\eta(1)$	$\eta(2)$	$\eta(3)$
	0.68646	0.61256	0.81064	0.85788
增 5%	0.71462	0.64890	0.82502	0.86709

表 8.6　分支机构 3 最优策略的表现

	X_1 中状态数目	X_2 中状态数目	X_3 中状态数目	X_4 中状态数目
	131052	762300	390456	392040
	总状态数			
	$\|X\|$ =1674948			
	$p_f(LR)$	$p_f(ISR)$	AC	AWC
	0.00240022	0.911640	12.0856	0.14397
增 5%	0.00385287	0.885485	12.6817	0.20943
	η	$\eta(1)$	$\eta(2)$	$\eta(3)$
	0.66343	0.51838	0.80550	0.85034
增 5%	0.69290	0.56230	0.82205	0.86103

谢谢大家！