运筹学基础 I

胡晓东

应用数学研究所

中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

Institute of Applied Mathematics

Chinese Academy of Sciences

2. 博弈论 - 婴儿归属与所罗门判案

所罗门（公元前1000-前930）是古代以色列王国的第三位国王，在位40年。《圣经·列王纪》中记载了这个充满智慧的国王判案的一个故事。

有两个妇人同住在一间屋子里，其中一个生了孩子，三天以后，另一个也生了孩子。有天夜里，一个妇人翻身时不小心把自己的孩子压死了，于是她不动声色，悄悄把自己的死婴换成了另一个婴儿。

而另一个母亲到了喂奶时，才发现孩子死了。她仔细观察，发现这个婴儿并不是自己的，而自己的孩子却在另一个妇人怀中。

2. 博弈论 - 婴儿归属与所罗门判案（续一）

两个母亲都说活着的孩子是自己的，可是屋里也没有第三人，谁也说不清，两人争执不下，便来到了所罗门王这里。

所罗门王听完情况后说，拿刀来，把活着的孩子劈成两半一人一半。活着的孩子的母亲听后，立即大哭道：“不要劈孩子，我不要自己的孩子了，让她拿去好了。”于是所罗门王断定，这个妇人才是孩子真正的母亲。

实际上，所罗门王所运用的当然不是什么神的智慧，而是运用人性（无私的母爱）来设置一种机制，从而达到区分真假母亲的目的。

2. 博弈论 - 婴儿归属与所罗门判案（续二）

后来，经济学家对这个判决很感兴趣，因为里面包含了经济学常识，他们提出一个新的问题：如果那个假母亲识破了所罗门王的意图，也哭哭啼啼说不要这个孩子，那么有什么好的办法来继续这个判决。

经济学家摩尔设计了一种拍卖机制，让两个母亲轮流出价，同时每一轮出价还附带一个罚金。在两人经济条件差不多的情况，真母亲会不顾一切，倾其所有去竞拍，而当假母亲会意识到这点时，就会放弃无谓的竞价。

不过这个设计中还是存在问题，比如恰好假母亲非常有钱，不差钱，她能够出更高的价格拍下这个孩子，那该如何是好？

2. 博弈论 - 婴儿归属与所罗门判案（续三）

因此，要区分真假母亲，还必须设计一个要付出更昂贵代价的方案。经济学家帕尔弗雷和斯利瓦斯塔瓦在《计量经济学》杂志上提出一个新的判决机制：

让两个母亲互相隔离，在不了解对方的答案的情况下，回答一个问题——谁是孩子的真母亲？如果两个人的回答一致，那么孩子就归两人一致认为的那个真母亲，而一旦两人的回答有矛盾，都声称自己是（或者不是）真母亲，那么两个人全部砍头。

此时，假母亲有两个选择：要么放弃不属于自己的孩子，要么一起掉脑袋；但她明白真母亲的决心，所以她无论如何也不会冒险声称孩子是自己的，因为说假话的代价就是掉脑袋。

婴儿归属与所罗门判案（续四）

现在让我们仅仅采用博弈论的观点，看看所罗门国王的方案是否有效，即它是否能让母亲得到自己的孩子？如果两人都说真话，母亲得到自己孩子，恶妇失去孩子，收益分别是**1**和**0**。若母亲说真话，恶妇说假话，即都称孩子是自己的，结果孩子被劈两半儿，谁也得不到，收益都是**0**。

所罗门国王的方案		恶　妇	
		说真话	假话
母亲	说真话	**1，　0**	**0，　0**
	说假话	**0，　0**	**0，　1**

显然，两个人都各有**支配策略**：**母亲说真话，恶妇说假话**，即都称自己是孩子的母亲，而且这还是一个纳什均衡策略对。**结果是：孩子被劈了，谁也得不到**。

2. 博弈论 - 婴儿归属与所罗门判案（续五）

现在让我们再看看两位经济学家提出的方案是否有效呢？如果母亲说真话，恶妇也说真话，两个人都活了下来，且母亲得到了自己的孩子；母亲的收益是**2**，恶妇的收益是**1**。

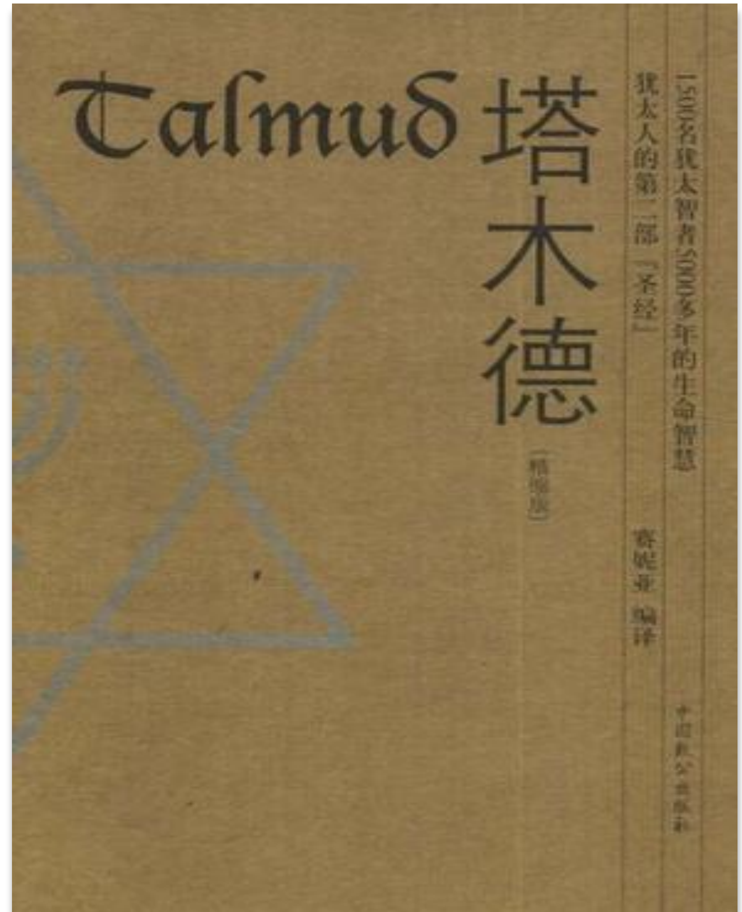
两位经济学家的方案		恶妇	
		说真话	说假话
母亲	说真话	**2，1**	**1，0**
	说假话	**1，0**	**1，2**

易知，**只有母亲有支配策略**：说真话，而恶妇没有支配策略。而且只有双方都说真话（孩子是母亲的）或者都说假话时（孩子是恶妇的），即双方的意见是一致的，才形成了纳什均衡策略对。显然，母亲会采取支配策略，说真话，而恶妇也知道这个事实，因此，恶妇也会说真话。**结果：母亲得到自己孩子**。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案

《塔木德》是流传三千三百多年的羊皮卷，一本犹太人至死研读的书籍。犹太教口传律法的汇编，仅次于《圣经》的典籍。

《塔木德 妇女部 婚书卷》第十章第四节中记载了一场财产纠纷。在这个案例中，一名富翁在婚书中向他的 **3**位妻子许诺他死后将给大老婆**100** 枚金币，二老婆**200**枚金币，小老婆 **300**枚金币。



2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续一）

可是等他死后人们清算遗产的时候，发现这名富翁撒谎了，他的财产不够**600**枚，只有**100**枚、**200**枚或者**300**枚，那么，这时候他的**3**位妻子各应该分多少枚金币？拉比们规定的财产分配方案 (简称“塔木德方案”) 如下：

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续二）

	大老婆	二老婆	小老婆
遗产为**100**枚	**100/3**	**100/3**	**100/3**
遗产为**200**枚	**50**	**75**	**75**
遗产为**300**枚	**50**	**100**	**150**
许诺应得遗产	**100**	**200**	**300**

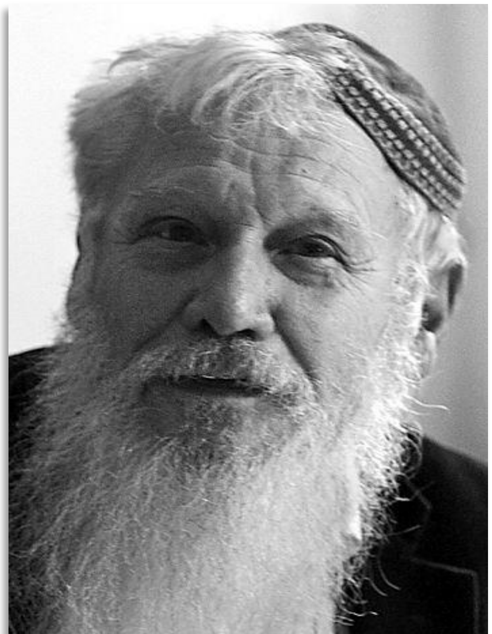
按照通常逻辑，这个表格显然存在严重的问题。因为这**3**个人应得遗产的比例为**1∶2∶3**，而在拉比们的裁决中，只有在遗产数为**300**枚的情况下这一比例才成立。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续三）

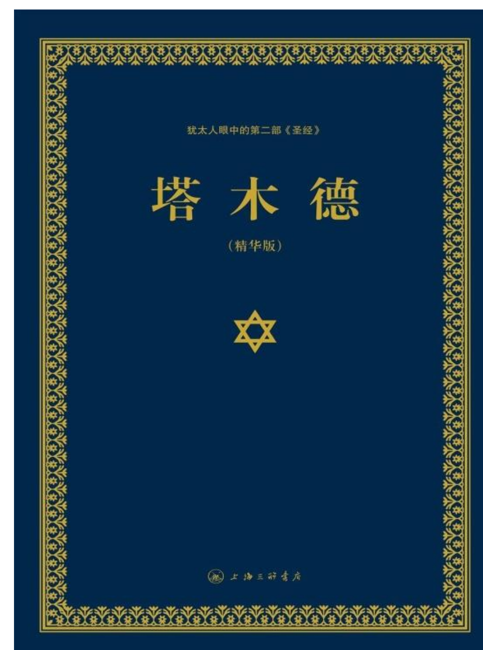
很多犹太经学家很早就看出了这种矛盾，至于为什么会发生这种矛盾，这些分配方法背后是不是存在着一个贯穿始终的分配原则，却无人能给出一个合理的解释，成了一个千古之谜。

	大老婆	二老婆	小老婆
遗产为**100**枚	**100/3**	**100/3**	**100/3**
遗产为**200**枚	**50**	**75**	**75**
遗产为**300**枚	**50**	**100**	**150**
许诺应得遗产	**100**	**200**	**300**

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续四）



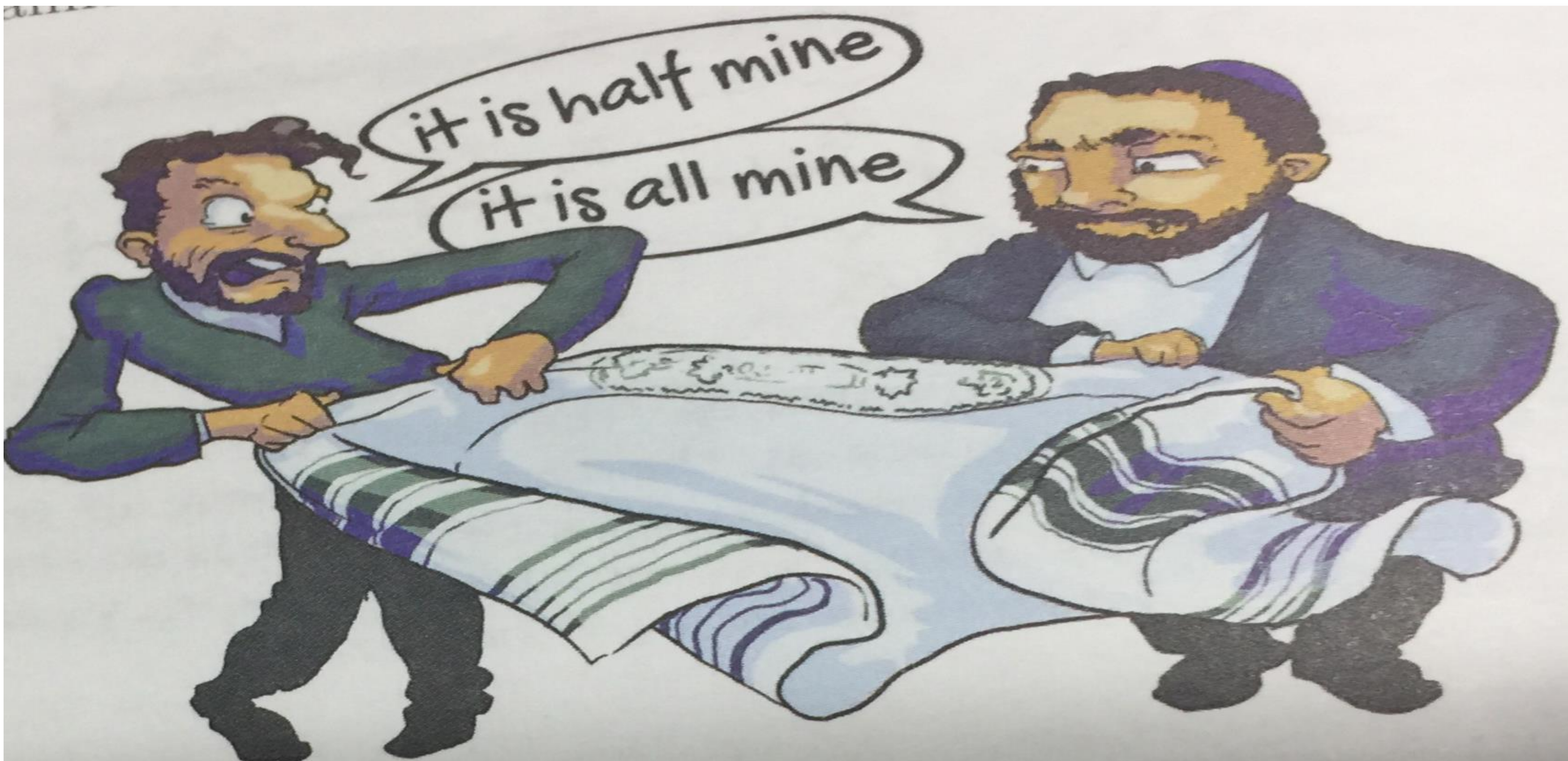
直到1985年，**罗伯特·奥曼**和另一位科学家发表了一篇题为“《塔木德》中一个破产问题的博弈论分析”的论文，这个谜才算解开。这篇论文首次从现代博弈论角度证明了古代犹太拉比们的裁决完全符合现代博弈论的原理。从此，这个犹太法典中的“三妾争产”故事就成了人类认识博弈论的最早实例之一。



解开这个谜的第一把钥匙其实仍在《塔木德》里。《塔木德损害部中门卷》第一章第一节为财产冲突的双方提供了如下解决原则：

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续五）

甲、乙两人发现一件大衣，都说是自己的。若甲发誓所拥有的要不少于**1/2**，乙发誓所拥有的也要不少于**1/2**，最后平分。若甲说，这全是我的；而乙说，这**1/2**是我的。则甲所拥有的不少于**3/4**，乙拥有的不少于**1/4**，前者拿 **3/4**，后者拿 **1/4**。



2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续六）

《塔木德》所提出的是一个不同寻常的财产争执解决原则："争执大衣原则"。它主要包含以下两项内容

1. 争执双方只分配有争议部分，不涉及无争议部分。
   所以乙将首先失去了一半大衣，只能跟甲平分半件大衣。
2. 争执中提出更高要求者的所得不得少于提出较低要求者。

罗伯特·奥曼论文的贡献在于找到了这两段之间的联系。在研究了这两段经文以后，论文提出了以下定理：塔木德方案是唯一一个与争执大衣原则相一致的解决方案。

以三妾争产问题作例子，根据塔木德方案：在遗产只有**100**枚金币时，三位妻妾都有同样的权利要求获得全部遗产，因此三人平分符合"争执大衣原则"。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续七）

在塔木德方案中，三妾中的任意两人之间，财产分配结果也符合争执大衣原则。当遗产金币数为**200**枚时，大老婆和二老婆共获得**125**枚 (等于两个人争**125**枚)，由于大老婆最多只能得到**100**枚，所以二老婆首先获得**25**枚。剩下的**100**枚由于两人都有权获得全部，所以按争执大衣原则平分，这样，大老婆获得**50**枚，二老婆获得**75**枚。此时，两人间的财产分配结果均符合大衣争执原则。

	大老婆	二老婆	小老婆
遗产为**200**枚	**50**	**75**	**75**
许诺应得遗产	**100**	**200**	**300**

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续八）

在遗产为300枚的情况下，大老婆和二老婆争150枚，出于同样的原则，二老婆先获得50枚，然后两人平分剩下的100枚。这样大老婆获得50枚，二老婆获得100枚。

更妙的是，塔木德解决方案不仅保证财产分配中任意两人所得与争执大衣原则相一致，而且任意两人的所失也与该原则一致。当遗产为200枚时，二老婆应得200枚，实得75枚，损失125枚，小老婆损失225枚，二老婆和小老婆共损失350枚。而按争执大衣原则，由于二老婆的要求是200枚，所以小老婆先损失150枚，与此同时，由于小老婆的要求是300枚，所以二老婆也要损失50枚。这样只剩下150枚的损失由两人平分，各损失75枚，加起来正好是二老婆损失125枚，小老婆损失225枚。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续九）

《婚书》中只指明了分配方案，但原文和注解中却没有任何计算方法，故此成了一个千古之谜。根据专家们猜测，塔木德解决方案的计算方法有两个。

方法一：平分，财产总数除以分产人数。

方法二：首先找出要求最少的那一位 (我们称为第一位)，然后把其余各位看成一个集团，在这双方之间进行第一次分配。由于集团中的任何一位要求都高于第一位，所以如果第一位跟集团间的分配符合争执大衣原则的话，那么他跟集团内任何一位间的分配也应该符合该原则。然后集团成员之间再将所得用同样方法进行第二次、第三次分配，以此类推。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续十）

具体到“三妾争产”的故事，在遗产金币数为**200**枚的情况下，大老婆与二老婆小老婆集团进行第一次分配。由于大老婆只要得**100**枚，所以二老婆小老婆集团先获得**200-100=100**枚。剩余**100**枚则在双方间平分，大老婆得**50**枚，二老婆小老婆集团再得**50**枚。在第二次分配中，二老婆小老婆对她们在第一次分配中获得的**150**枚有全部要求权，因此两人平分，各得**75**枚。

应该说方法二是塔木德方案的基本计算方法，但有一个界限，就是按这种方法计算出来的结果**不能是要求少的一方比要求多的一方得的还多**。如果出现这种情况，就要换用方法一，进行平分。具体到“三妾争产”的故事，这个界限点是**150**枚，少于此数就要换用方法一。

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续十一）

比如遗产数是**120**枚，如果我们不用方法二的话，大老婆分得**50**枚，而二老婆小老婆平分**70**枚，每人所得还不到**50**枚，这就违反了争执大衣原则。

	大老婆	二老婆	小老婆
遗产为**100**枚	**100/3**	**100/3**	**100/3**
遗产为**120**枚	**40** (50)	**40** (35)	**40** (35)
遗产为**150**枚	**50**	**50**	**50**
遗产为**200**枚	**50**	**75**	**75**
遗产为**250**枚	**50**	**100**	**100**
遗产为**270**枚	**50**	**100**	**120**

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德方案（续十二）

现在我们来看看，如果将塔木德方案应用到现实社会的破产决算纠纷中会出现什么情况。假设甲欠乙70元，欠丙30元，现在甲破产了。根据甲剩余财产的数量，用塔木德方案和比例计算方法，我们可以得到

甲剩余财产	塔木德解决方案		比例计算方法	
	乙得财产	丙得财产	乙得财产	丙得财产
90	65	25	63	27
80	60	20	56	24
70	55	15	49	21
60	45	15	42	18
50	35	15	35	15
40	25	15	28	12
30	15	15	21	9
20	10	10	14	6
10	5	5	7	3

2. 博弈论 - 财产划分与塔木德规则（续十三）

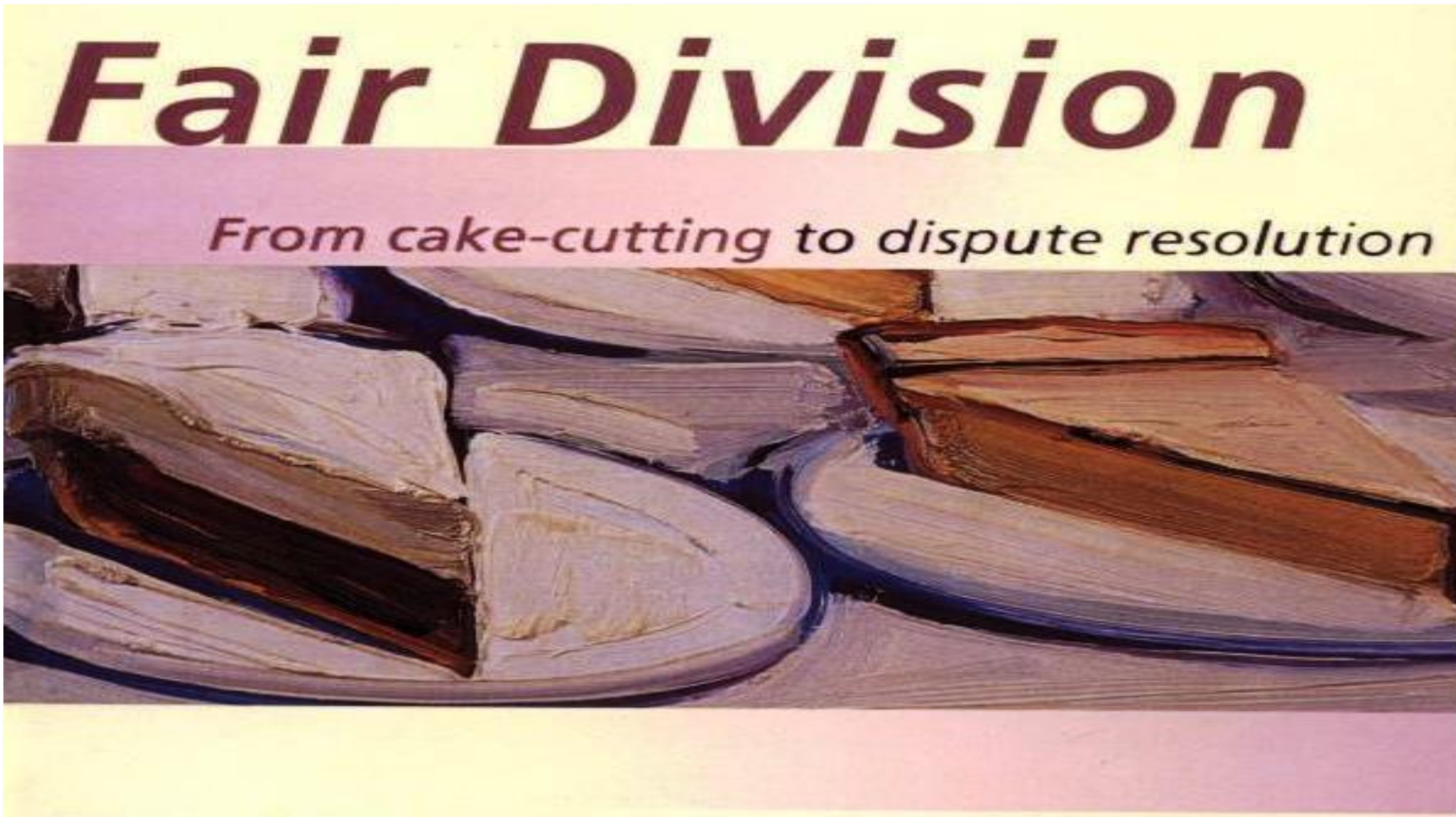
最后我们来看看塔木德方案的经济学意义。相比按比例分配而言，在总财产较少的情况下，塔木德方案的天平是向弱者倾斜的。在资源不足时，优待弱者十分重要。

回到三妾争产的故事，假如这三位妻妾都要靠遗产来生活的话，那么塔木德方案对于一房这样的穷人来说就是决定性的。假如采用按比例计算来分配遗产，那一房因为分到的遗产过少，也许很快就会流落街头。

奇妙的是，这个方案在保护了弱者的利益的同时仍然保持了博弈规则的公正性。从整个破产决算游戏来看，若采用塔木德方案，则大户小户都有胜出的机会，且至少从理论上，双方胜出的机会是相等的。因为如果财产数目超过负债额一半的话，则大户可以分得较多财产，否则小户分得更多。这种公正性可在很大程度上也保证各方玩家对规则的尊重。

2. 博弈论 - 分蛋糕

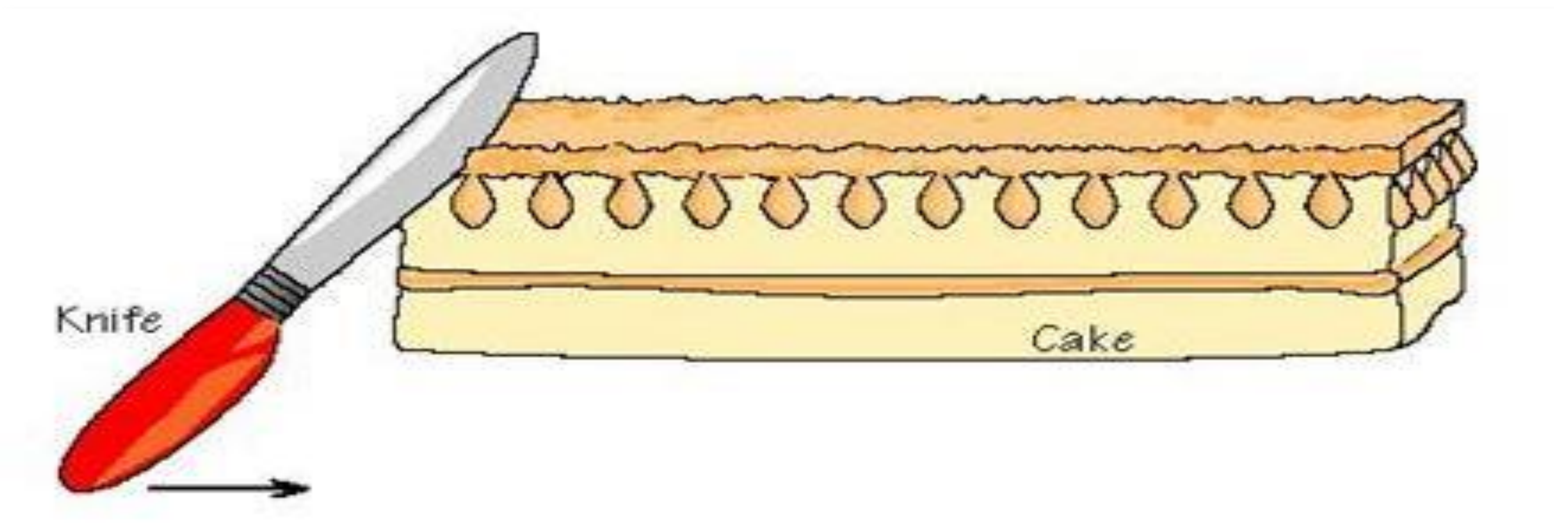
分蛋糕博弈：如何将一个蛋糕公平地分给 ***n*** 个人？ 当 ***n*=2** 时，一个非常著名的分配方案是：甲将蛋糕切成二块儿，乙选取其中其中一块儿（大的），剩下的一块儿（小的）分给甲。



2. 博弈论 - 分蛋糕（续一）

当 $n > 2$ 时，又该如何进行公平地分配呢？为了叙述和分析方便，我们考虑一个简单情形，将蛋糕假设为一个单位常的区间 $[0, 1]$，需要将其分成 n 个区间分别分配给 n 个人。我们假定每个人 p_i 都有一个分布函数 $F_i(x)$，用来表示 p_i 认为区间 $[0, x]$的价值。p_i 分得的区间$I_i = [a_i, b_i]$ 的价值 $\mu_i(I_i)=F_i(b_i) - F_i(a_i)$。

我们称一个分配方案是**公平的**，如果它给每个人 p_i 分配的蛋糕价值 $\mu_i(I_i) \geq 1/n$。



2. 博弈论 - 分蛋糕（续二）

移动刀法(moving knife algorithm)：（1）将刀从单位区间的左边开始，向右连续地移动，直到有人喊“停”，并在停止处切下蛋糕。（2）喊“停”的人取走刀左侧的蛋糕。（3）重复步骤（1）和（2）直到所有人都取得了一块儿蛋糕。

当我们采用上述的移动刀法产生分配方案，每一个人 p_i 会采取一个**安保策略 (safe strategy)**：（1）$n = 1$ 时，取走整个蛋糕；（2）$n \geq 2$ 时，在第一轮，每个人 p_i 根据自己的测算，只要看到刀左侧价值 $\mu_i(I_i)$ 至少有 **1/*n***大，就立即喊“停”；若有人先于他喊“停”，则他在余下的 ***n*-1** 个人的博弈中，重复使用此策略。

2. 博弈论 - 分蛋糕（续三）

定理 1. 在 n人分蛋糕博弈中，任何一个采取安保策略的人都一定可以得到一块儿蛋糕 I_i，他认为其价值 $\mu_i(I_i)\geq 1/n$。

尽管上述定理告诉我们分蛋糕的方案是公平的，但是它并不是一个无忌妒方案(envy-free)：蛋糕最后分配完了以后，每一个人都不会忌妒有人比他分得的蛋糕价值大。我们看如下的一个示例。

	第一块	第二块	第三块
p_1	1/3	0	2/3
p_2	0	1/2	1/2
p_3	0	0	1

2. 博弈论 - 分蛋糕（续四）

p_1 分得了第一块儿，因为他认为其价值**1/3**，随后 p_2 分得了第二块儿，因为他认为其价值 **1/2**，最后 p_3 分得了第三块儿。显然，p_1 会忌妒 p_3，因为 p_1 认为 p_3 分得的第三块儿对他来说价值 **2/3**，而他仅得到了价值为 **1/3** 的一块儿蛋糕。

我们称一个分配方案 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ 是一个 ϵ-无忌妒方案，如果对于所有的 $1 \le i$，$j \le n$，都有 $\mu_i(I_j) \le \mu_i(I_i) + \epsilon$。

定理2. 在一个 n人分蛋糕博弈中，若每一个人的分布函数$F_i(x)$都是严格单调增且连续的，则一定存在一个无忌妒方案。

练习. 设计一个存在无忌妒方案的 **3**-人分蛋糕博弈。
提示：1/3, 1/3, 1/3; 1/4, 1/4, 2/4; 1/5, 2/5, 2/5。

2. 博弈论 - 旅行者困境

旅行者困境是1994年由**考希克·巴苏**（**Kaushik Basu**）提出的一种二人非零和博弈，博弈双方都为了让自己收益最大化，而不考虑对方收益。

航空公司丢失了两位互相不认识旅行者的旅行包。两个旅行包正好都是一样的，且里面有相同价值的古董，两位旅行者都向航空公司索赔**100**美元。为了评估出古董的真实价值，公司经理将两位旅行者分开以避免两人合谋，分别让他们写下古董的价值，其金额要不低于**2**美元，并且不高于**100**美元。同时还告诉两人：若两个数字是一样的，则会被认为是真实价值，他们能获得相应金额的赔偿。否则，写下较小金额的旅行者，会被认为是写了真实价值，而两人获得这个金额的赔偿。同时，写下较小金额的旅行者还会获得**2**美元额外奖励，写下较大的金额的旅行者会有**2**美元的惩罚。两位旅行者应该写下多少呢？

2. 博弈论 - 旅行者困境（续一）

	100	99	98		3	2
100	100, 100	97, 101	96, 100		1, 5	0, 4
99	101, 97	99, 99	96, 100		1, 5	0, 4
98	100, 96	100, 96	98, 98		1, 5	0, 4
3	5, 1	5, 1	5, 1		3, 3	0, 4
2	4, 0	4, 0	4, 0		4, 0	2, 2

如果两个旅行者都是理性人，那么他们会都写**2**美元，因为他们这样选择的结果是该博弈的一个纳什均衡。然而，实验中，大多数测试者都会选择**100**美元，或者接近**100**美元。并且，旅行者们会因为在博弈中严重偏离纳什均衡而获得比理性行为高很多的收益。

2. 博弈论 - 古诺模型

安东尼·奥古斯丁·库尔诺（**Antoine Augustin Cournot**，1801年-1877年）是法国数学家、经济学家和哲学家，数理统计学的奠基人。他最先力图用数学方法解决经济问题，是数理经济学的创始人之一。1838年他提出了古诺模型又称古诺双寡头模型。

在多个企业面对一个共同市场时，一个企业采取的行动常常会影响到其他企业的收益。在经济理论模型中，需求曲线揭示了一个商品的价格与其销量之间的关系。通常价格越低，销量越高。为了分析和计算方便起见，我们假定 $P = a - bQ$，即价格 P 与销量 Q 成线性关系（在实际中并非总是如此）。

2. 博弈论 - 古诺模型（续一）

另外，我们假定生产一个商品的成本为 c，即生产销量Q的总成本为cQ。

当市场被一个企业所垄断的时候，该企业所需要考虑的问题是：应该生产多少商品Q，才能使得其收益 U最大？
即最大化 $U=PQ-cQ=(a-bQ)Q-cQ=-bQ^2+(a-c)Q$。

不难求得，当 $Q^*=(a-c)/2b$ 时，U的取值最大，亦即

$$U^*=-b(Q^*)^2+(a-c)Q^*=\frac{(a-c)^2}{4b}$$

可以看出来，当市场被一个企业所垄断的时候，因为没有竞争，所以这个企业的决策过程是求解一个单纯的优化问题。

2. 博弈论 - 古诺模型（续二）

现在我们考虑市场有两个企业，企业甲和企业乙，它们制造的是完全一样的产品。不妨设，甲的产量是Q_1，乙的产量是Q_2，总产量即是Q_1+Q_2。此时，价格 $P = a - b(Q_1 + Q_2)$ 。甲和乙都希望各自的利益能够最大化。

如前，我们有

$$U_1 = P\,Q_1 - c\,Q_1 = (a - bQ_1 - bQ_2)\,Q_1 - cQ_1 = -bQ_1^2 + (a - c - bQ_2)Q_1,$$

$$U_2 = P\,Q_2 - c\,Q_2 = (a - bQ_1 - bQ_2)\,Q_2 - cQ_2 = -bQ_2^2 + (a - c - bQ_1)Q_2$$

从企业甲的立场分析：假设他知道企业乙的产量Q_2，他应该如何确定其最优产量Q_1呢？如果Q_2是一个固定量，那么他的收益U_1便是其产量Q_1的一个二次函数。不难求得，当

$Q_1^* = (a - b\,Q_2 - c)/2b$ 时， U_1^*达到最大值。同理，当

$Q_2^* = (a - b\,Q_1 - c)/2b$ 时， U_2^*达到最大值。

2. 博弈论 - 古诺模型（续三）

两家企业都是理性地进行决策，则他们确定的各自产量 Q_1* 和Q_2* 应该形成一个纳什均衡，亦即

$Q_1^* = (a - b\,Q_2^* - c)/2b$， 且 $Q_2^* = (a - b\,Q_1^* - c)/2b$。

不难得到，$Q_1^* = (a - c)/3b = Q_2^*$。

从以上分析可知，当市场只有一个垄断企业时，其产量为 $(a - c)/2b$，当市场有两家相互竞争企业时，他们的总产量是 $2(a - c)/3b$，即产量会增加，而价格会降低，他们各自的收益均为$U_1^* = U_2^* = (a - c)^2/9b$，总的收益是 $2(a - c)^2/9b$，比只有一个垄断企业时的收益要小。

2. 博弈论 - 古诺模型（续四）

注意： 当两家企业形成一个联盟时，他们会如同一家企业垄断市场，每一家企业仅仅生产只有一家垄断企业时产量的一半，即$(a-c)/4b$，以垄断价格销售，它的收益也会相应减半为$(a-c)^2/8b$。而这个收益却是比两家企业不形成联盟（各自独立决策）形成的纳什均衡策略组所产生的收益要高。

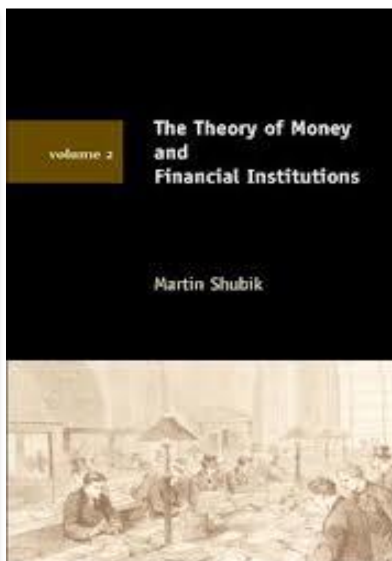
这是一个有些**令人吃惊的结果：** 两家企业理性地竞争，各自的收益比他们互相合作所带来的各自收益要小。这与囚徒两难博弈是十分类似的。

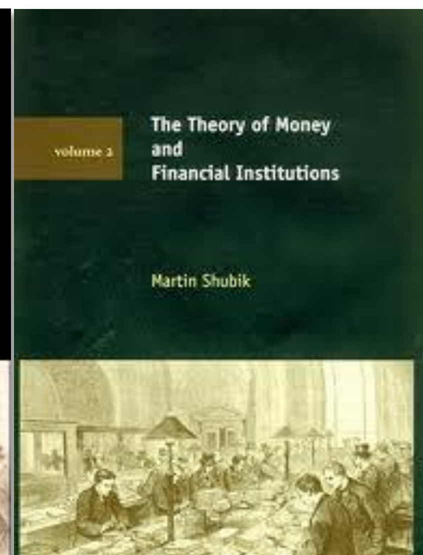
练习. 考虑如下两人博弈：甲、乙各自秘密地从0到100中选取一个自然数，n_1和 n_2。甲的收益是 $(100 - n_1 - n_2)\, n_1$，而乙的收益是 $(100 - n_1 - n_2)\, n_2$。请问甲、乙两人应该如何选定 n_1和 n_2呢？

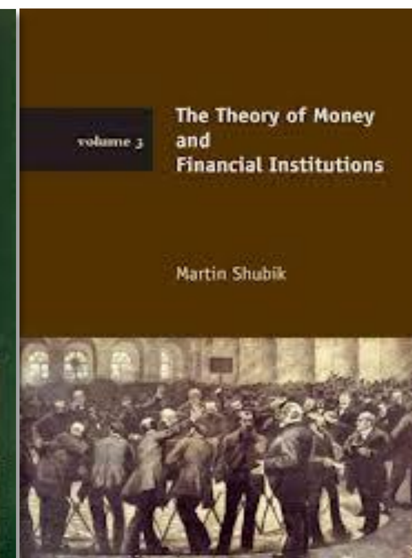
（提示：纳什策略为 $n_1=n_2=100/3$；最优策略为$n_1=n_2=25$）

2. 博弈论 - 拍卖一百美元

这个游戏是由耶鲁大学经济学家**舒贝克 (M. Shubik)** 设计的：准备一张百元大钞，告诉他们你要将这张百元大钞拍卖给出价最高的那位朋友，大家互相竞价，以**5**元为单位，到没有人再加价为止。出价最高的人，只要付给你他所开的价码，即可获得这张百元大钞，但出价第二高的人，虽无法获得百元大钞，仍需将他所开的价码付给你。







2. 博弈论 - 拍卖一百美元（续一）

上述游戏设置了一个具体而微的“人生陷阱”，参与竞价的人，在这个“陷阱”里越陷越深，不能自拔，最后都付出了痛苦的代价。

在日常生活里，大至商场上的竞争，小至等候公车，都有“陷阱”在等待着你。譬如公车平常是十五分钟一班，当你花在等待的时间超过十分钟后，你会开始烦躁不安，但通常你会继续等下去，等到超过十五分钟公车还不来时，你除了咒骂外，也开始感到后悔——你应该在十五分钟前就走路或坐计程车去的。但通常你还会继续等下去，因为你已投资了那么多的时间，不甘心现在改坐计程车，结果就越陷越深，无法自拔，直到公车姗姗来迟，你心理的困境才获得解脱。

2. 博弈论 - 拍卖一百美元（续一）

人生有很多“目标”，并不像公车那样“必定会来临”，而且投资的也不是你“个人的时间”而已。如何避免蹈入陷阱在人生道上，如何避免蹈入这类“陷阱”，也是一门不小的学问，心理学家鲁宾[**Ruben Ardila** 1942 -] 的建议是：

- ☑ 确立你投入的极限及预先的约定：
  譬如投资多少钱或多少时间？
- ☑ 极限一经确立，就要坚持到底：譬如邀约异性，
  自我约定“一次拒绝就放弃”，
  不可改为“五次里面有三次拒绝才放弃”。
- ☑ 自己打定主意，不必看别人：事实证明，
  两个陌生人在一起等公车，“脱身”的机会就大为减少，
  因为“别人也在等”！
- ☑ 提醒自己继续投入的代价。
- ☑ 保持警觉。

2. 博弈论 - 其他模型

练习 试分析钱包悖论（又称**钱包游戏**）：

甲和乙两人进行一场赌博。赌法是：由第三者丙计算甲、乙钱包里面的钱，钱少者可以赢走钱多者的钱。

甲认为：若乙的钱比我少，我可能输掉我现有的钱。但若乙的钱比我多，我赢了，就会得到多于我现有的钱。我能够赢的钱比输的钱多，所以这场赌博对我有利。而乙的想法也是如此。

二人想法的逻辑都正确，但若认为二人的想法都正确，又将做出这场赌博对甲、乙二人都有利的错误结论。

[这个悖论是比利时数学家**Maurice Kraitchik**于**1953**年提出]

2. 博弈论 - 其他模型（续一）

少数者博弈；智猪博弈；雪堆博弈（鹰鸽博弈）

假设猪圈里有两头猪，一头大猪，一头小猪。猪圈的一边有个踏板，每踩一下踏板，在远离踏板的猪圈的另一边的投食口就会落下少量的食物。当小猪踩动踏板时，大猪会在小猪跑到食槽之前刚好吃光所有的食物；若是大猪踩动了踏板，则还有机会在小猪吃完落下的食物之前跑到食槽，争吃到另一半残羹。

假设猪圈里有一头大猪、一头小猪。猪圈的一头有猪食槽，另一头安装着控制猪食供应的按钮，按一下按钮会有**10**个单位的猪食进槽，但是谁按按钮就会首先付出**2**个单位的成本，若大猪先到槽边，大小猪吃到食物的收益比是**9：1**；同时到槽边，收益比是**7：3**；小猪先到槽边，收益比是**6：4**。

练习：假设两头猪一样聪明，会出现什么结果？

2. 博弈论 - 其他模型（续二）

英格兰式拍卖；荷兰式拍卖；日本式拍卖；投标式拍卖

英国式拍卖法：最常见的拍卖方式，竞标者出价由下往上喊，喊价最高者得标，竞标者可多次重复提高出价，常见于拍卖场富士比拍卖会，台湾的夜市竞标皆以此法拍卖。

荷兰式拍卖法：创于荷兰的郁金香拍卖场而得名，卖方由高往低喊价，过程中如有人愿意购买，此价即为成交价。此外，台湾的蔬果、鱼肉批发市场亦是以此种方式拍卖，常应用于有一定数量之商品拍卖时。

最高价得标拍卖法：密封投标金额，投标者只能出价一次，开标时最高价者得标并依价付款（或者次高价付款），广泛应用在土地、公用工程（**google**、**百度**等广告）的竞标上。

2. 博弈论 - 其他模型（续三）

欺诈游戏 讲述一个平凡的女大学生神崎直，某天突然得到一大笔现金并卷入“欺诈游戏”的故事. 赢了就能得手一大笔金钱，输了就要背负巨额债款，欺诈游戏就是这样一个只有两个极端的金钱和欲望的游戏。女大学生和男欺诈师等在不断升级的游戏中必须利用**心理学**、**数学**（**博弈论**）等知识去解决困境。