运筹学通论I

胡晓东

应用数学研究所

中国科学院数学与系统科学研究院

http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/index.html

Institute of Applied Mathematics

Chinese Academy of Sciences

5. 组合优化-算法设计技巧

精确算法

分而治之 (搜索、排大小序、旅行商)
动态规划 (最短路、三角剖分、背包)
分支定界 (整数线性规划、旅行商、工件排序)

近似算法或启发式算法

贪婪策略 (最小生成树、最大可满足、背包、
顶点覆盖、独立集、旅行商)
局部搜索(最大匹配、旅行商、最大割)
序贯法 (工件排序、装箱、顶点着色)
整数规划法 (顶点覆盖、最大可满足、最大割)
随机方法 (最小割、最大可满足、顶点覆盖)
在线算法 (页面调度、*k*-服务器、工件排序、装箱)
不可近似 (最大团、背包、旅行商、装箱、连通控制集等)

5.10 近似算法分类

考虑一个求最小值的组合优化问题 $\prod$，设算法 **A** 是求解该问题的一个多项式时间算法。称算法 **A** 是一个***α*-绝对近似算法** (*α*-Absolute Approximation)，如果存在一个常数 *α*，对于每一个实例 **I**，都可求出一个解

$$|\, c_{\mathrm{A}}(\mathbf{I}) - c_{\mathrm{opt}}(\mathbf{I}) \,| \le \alpha$$

称算法 **A** 是一个***α*-近似算法** (*α*-Approximation)，如果存在一个常数 *α*，对于每一个实例 **I**，都可求出一个解

$$1 \le \frac{c_{\mathrm{A}}(\mathbf{I})}{c_{\mathrm{opt}}(\mathbf{I})} \le \alpha$$

5.10 近似算法分类（续一）

算法 A 的**绝对近似比**定义如下：

$$R_A(\prod) \equiv \inf\{\, r \mid R_A(\mathbf{I}) < r, \text{所有实例 } \mathbf{I} \,\},\quad \text{其中}\quad R_A(\mathbf{I}) \equiv \frac{c_A(\mathbf{I})}{c_{opt}(\mathbf{I})}$$

其**相对近似比**定义如下：

$$R_A^{\infty}(\prod) \equiv \inf\{\, r \mid N_0, R_A(\mathbf{I}) < r, \text{所有满足 } c_{opt}(\mathbf{I}) \geq N_0 \text{ 的实例 } \mathbf{I} \,\}。$$

对于一些组合优化问题，比如排序问题，绝对近似比与相对近似比并无差别，这是因为这些问题本身具有**缩放性质**：如果将每个工件的加工时间都乘以任意一个常数 N，那么其最优值也会相应地乘以N。然而，更多的问题并不具有缩放性质。

5.10 近似算法分类（续二）

问题 $\prod$ 的**最佳可及近似比**定义如下：

$R_{\min}(\prod) \equiv \inf \{ r \geq 1 \mid$ 存在多项式时间算法 A 满足 $R_A^{\infty}(\prod) \leq r \}$。

称算法 A_ε 是一个**多项式时间近似方案 (PTAS – Polynomial Time Approximation Scheme)**，如果对于每一个实例 **I**，都可在输入 **I** 的多项式时间内，求得一个解

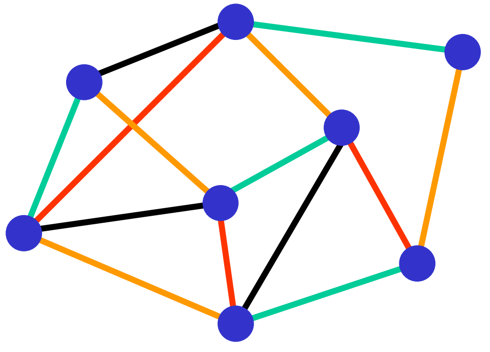
$$1 \leq \frac{c_{A_\varepsilon}(\mathbf{I})}{c_{\mathrm{opt}}(\mathbf{I})} \leq 1+\varepsilon$$

称算法 A_ε 是一个**完全多项式时间近似方案** (Fully PTAS)，如果对于每一个实例 **I**，都可在输入 **I** 和 $1/\varepsilon$ 的多项式时间内，求得一个解

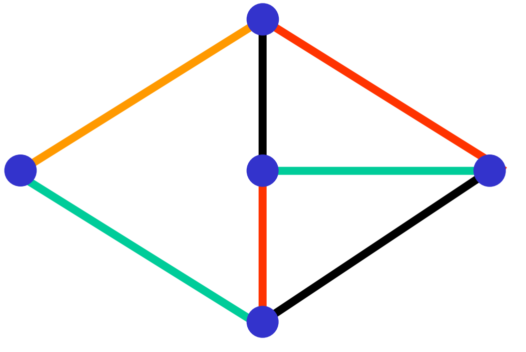
$$1 \leq \frac{c_{A_\varepsilon}(\mathbf{I})}{c_{\mathrm{opt}}(\mathbf{I})} \leq 1+\varepsilon$$

5.10 绝对近似算法

首先，回忆一下图的**边着色问题**：给定一个图，任务是给图中的每条边着一个颜色使得如果两条边有共同的端点那么应给它们着不同的颜色，目标是使用的颜色种类最少。



$\Delta(G)$ =4; 4 种颜色



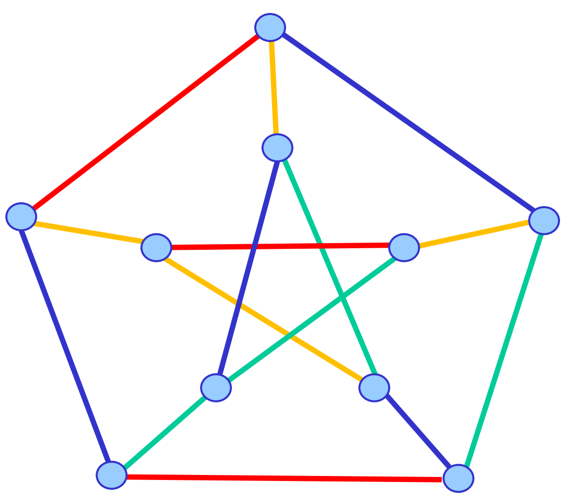
$\Delta(G)$ =3; 4 种颜色

尽管图的边着色问题是**NP-**难的，但是我们可以认为它是其中最简单的一类难解问题，因为存在求解该问题的一个近似算法其**绝对近似差值**是一个常数，**1！**

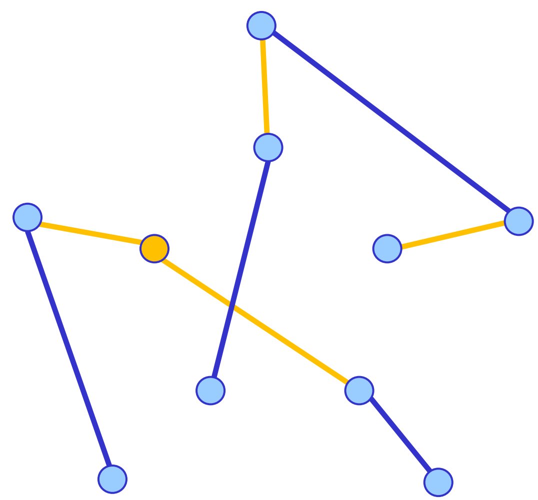
5.10 绝对近似算法（续一）

Vizing 定理 (1964) 若 G 是一个简单图，$\Delta(G)$ 是图 G 的最大顶点度数，则图 G 的边色数 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$ 或者 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 。

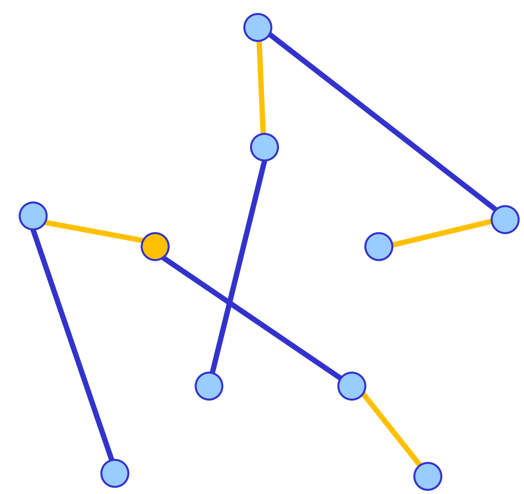
定理 1 存在一个多项式时间算法，任给一个简单图 G，它可以用最多 $\Delta(G)+1$ 种颜色对图 G 的所有边进行正常边着色。



Petersen 图

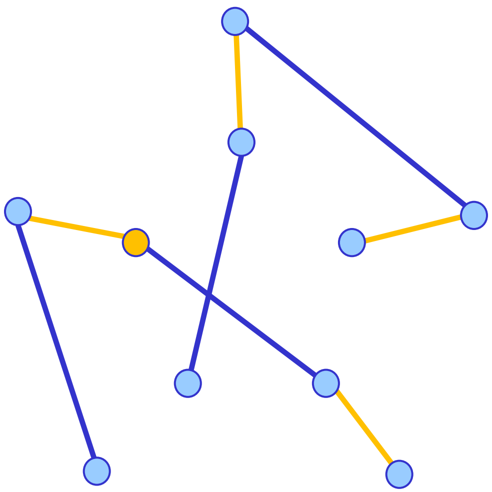


非正常4-边着色

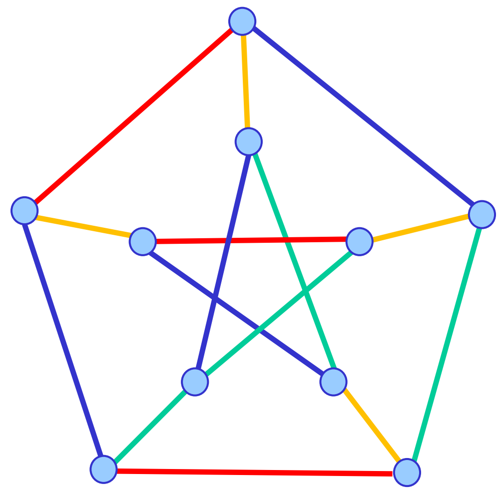


构造一个欧拉圈

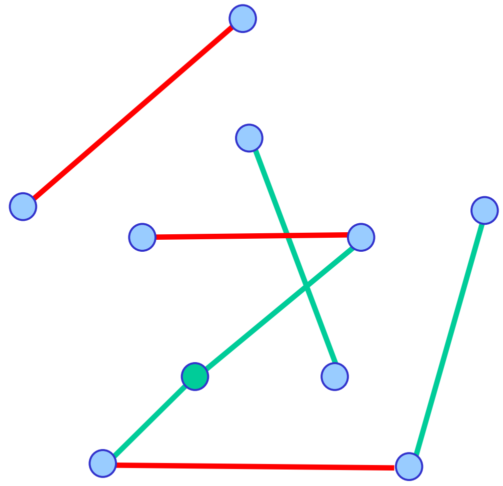
5.10 绝对近似算法（续二）



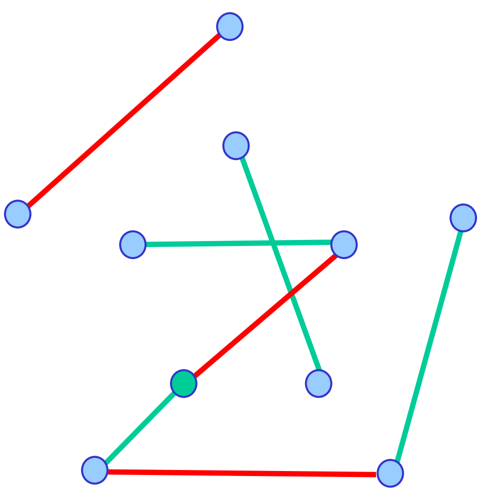
交错着色欧拉圈



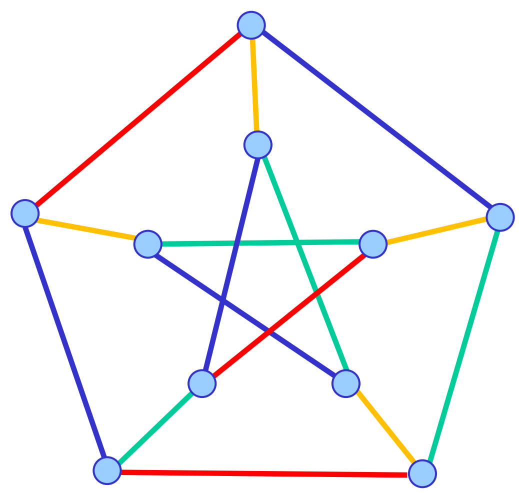
改进的4-边着色

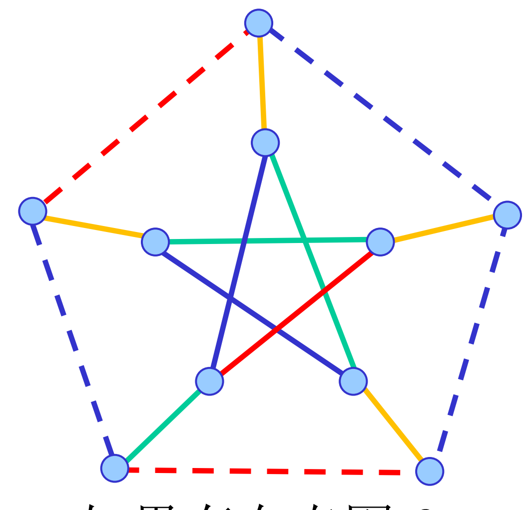


非正常4-边着色



交错着色欧拉圈





如果存在奇圈？

5.10 绝对近似算法（续三）

练习 描述一个给偶图进行正常边着色的多项式时间算法，其所用的色数恰好等于偶图的最大度数。

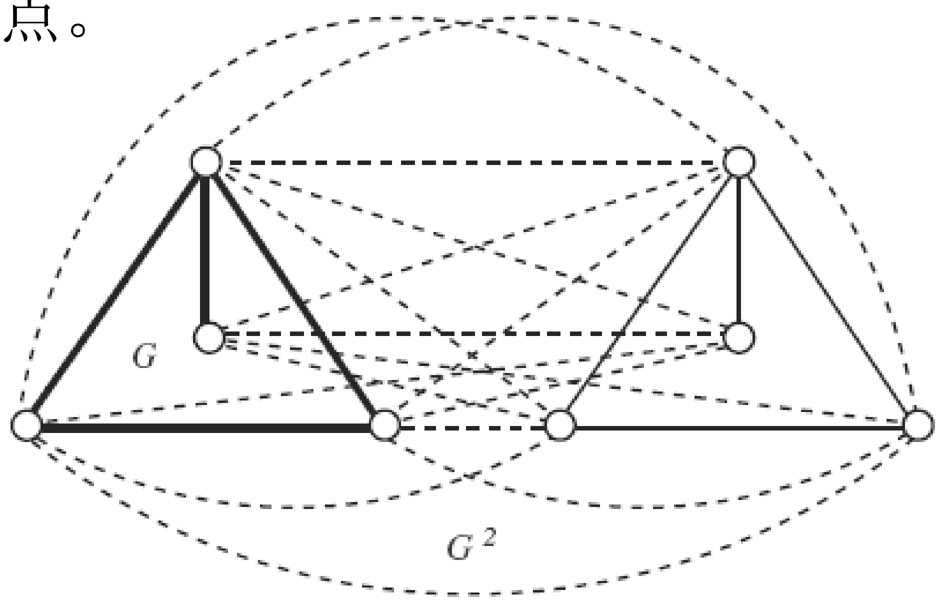
提示： 将给定的偶图 G 增加若干个顶点和若干条边，从而得到一个正则偶图 G'，其最大顶点的度数保持不变。利用匈牙利算法可求出 G' 的一个完美匹配 M_1。此时， $G' \backslash M_1$ 仍然是一个正则偶图，再利用匈牙利算法，求出它的一个完美匹配 M_2。重复此过程，即可得正则偶图 G' 的$\Delta(G)$个完美匹配分解。将每一个匹配着一种颜色，即可得到原图 G' 的$\Delta(G)$-边着色。

练习 考虑排课表问题：学校有 m 位教师，x_i， n 个班级，y_j，教师 x_i 需要给班级 y_j 上 p_{ij} 节课。如何制订一张课时尽可能少的课表。

5.10 不可绝对近似

定理 2 不存在求解**最大团问题**的近似算法其绝对近似值为一个常数，除非 **P = NP**。

证明. 用反证法和**缩放技巧**。首先，定义图 G 的 m-次幂图 G^m：将图 G 做 m 个拷贝，将不在一个拷贝中的任意两个顶点相连。可以证明，G 的最大团含有 α 个顶点当且仅当 G^m 中的最大团含有 $m\alpha$ 个顶点。



5.10 不可绝对近似（续一）

假设，存在求解最大团问题的一个近似算法 **A** 其绝对近似值为 k。用算法 **A** 求解幂图 G^{k+1} 的团，那么则有

$$\left| c_A(G^{k+1}) - c_{opt}(G^{k+1}) \right| \le k$$

因而有

$$\left| c_A(G^{k+1}) - (k+1)\, c_{opt}(G) \right| \le k。$$

可以证明：给定幂图 G^m 的一个含有 β 个顶点的团，可以在多项式时间内找到原图 G 的一个团其顶点个数为 β/m。因而，可以找到原图 G 中的一个团 C，其满足不等式

$$\left|\, |C| - c_{opt}(G) \right| \le k/(k+1) < 1$$

这意味着，C 一定是一个最大团。

5.10 不可绝对近似（续二）

定理 3 不存在求解背包问题的近似算法其绝对近似值为一个常数，除非 **P = NP**。

证明. 用反证法和缩放技巧。给定背包问题的一个整数实例 **I**，构造一个背包问题的新实例 **I'**：$s'_i = s_i$，$p'_i = (k+1)\,p_i$。容易验证，实例 **I** 的每一个可行解也都是实例 **I'** 的一个可行解，反之亦然；只是实例 **I'** 的收益是相应实例 **I** 的收益的 $k + 1$ 倍。

现假定：存在求解背包问题的一个 k-绝对近似算法 **A**，其中 k 是一个整数。将该算法用于实例 **I'**，得到一个可行解，满足：$|\,c_A(I') - c_{opt}(I')\,| \le k$，因而有

$$|\,(k+1)\,c_A(I) - (k+1)\,c_{opt}(I)\,| \le k，即\ |\,c_A(I) - c_{opt}(I)\,| \le k/(k+1)$$

这说明该可行解是一个最优解。

5.10 相对近似算法

问　题：度量空间上的 k-中心

实　例：n 个点 $V=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，及其之间的一个距离矩阵 $(d_{ij} \mid i, j=1, 2, \ldots, n)$，一个自然数 $1<k<n$

可行解：含有 k 个中心点的集合 $S \subset V$, $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, 及 V 的一个划分 $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$，其中 $s_j \in V_j$，$\forall j$; V_j 中的每个点到 s_j 的距离不大于其到其他 s_i 的距离

目　标：V_j 中点 p 到中心点 s_j 的最大距离最小，

$$\min_{j=1, \ldots, k} \max \{d(s_j, p) \mid p \in V_j\}$$

求解该问题有一个非常简单的贪婪算法：首先，任取一个点 $p \in V$，作为第一个中心点 s_1。然后，选取距离 s_1 最远的一点 $p' \in V \setminus \{s_1\}$，作为第二个中心点 s_2。重复此步骤，直到选出了 k 个中心点。最后，对每一个非中心点，分别计算其到 k 个中心点的距离，并将其放入 V_i 如果它到 s_i 的距离最短。

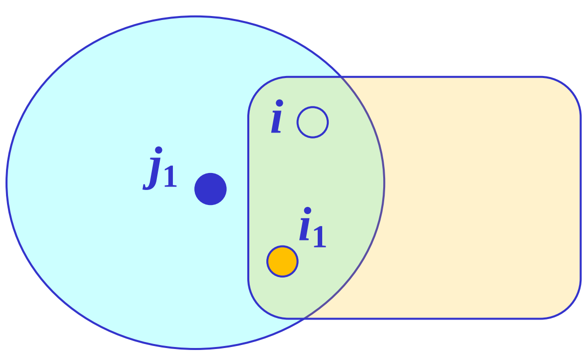
5.10 相对近似算法（续一）

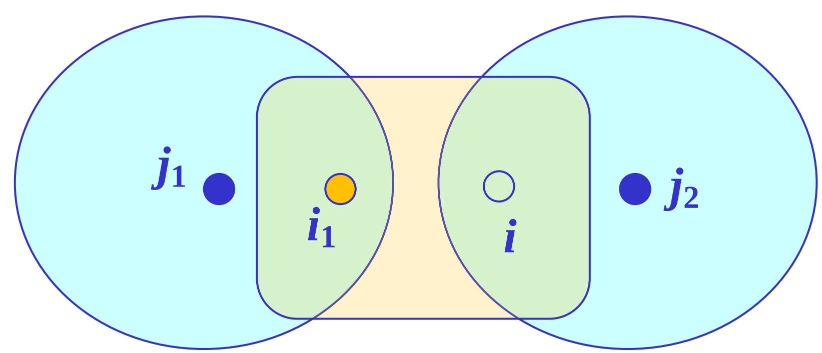
定理 4 求解 k-中心问题的贪婪算法的近似比为 2。

证明. 假设最优解为 $S_{\text{opt}}=\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$，与其相应的划分为 $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$，其直径为 d_{opt}。根据距离的三角不等式，V_j 中任意两点的距离不超过 $2d_{\text{opt}}$。

现假设贪婪算法的解为 S_G。我们分以下两种情况。

情形1. S_{opt} 中的每一个V_j 中恰好有S_G 中的一个中心点。不妨设，S_G 的中心点 i_1在S_{opt} 的中心点 j_1的邻域中，而 i 在i_1 的邻域中。不难验证，不论 i 是否在 j_1 的邻域中，都有 $d(i_1, i) \le 2d_{\text{opt}}$。

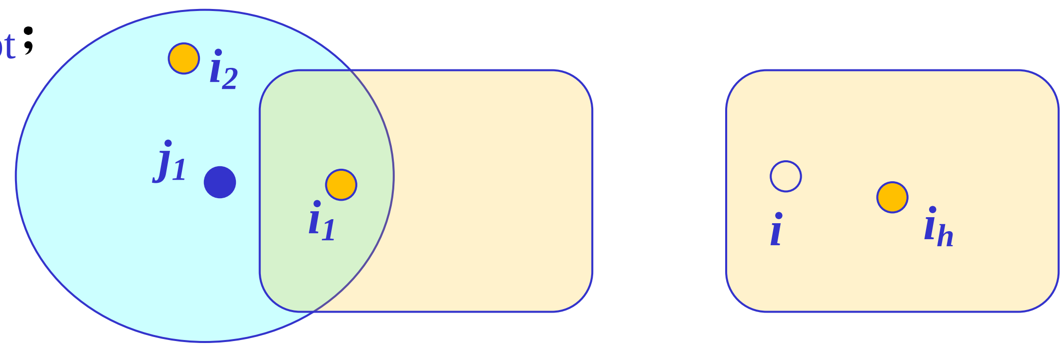




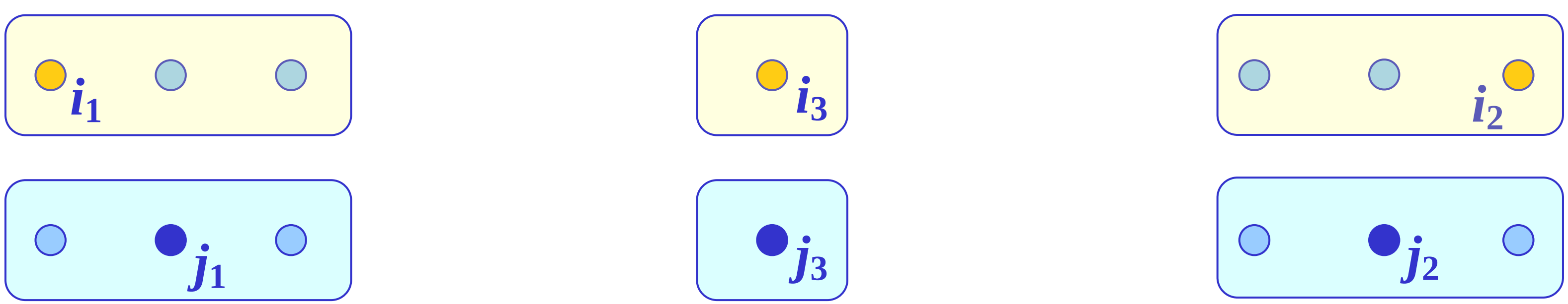
5.10 相对近似算法（续二）

情形2. S_{opt} 中的某一个V_j 中至少有S_G 中的两个中心点。不妨设S_{opt} 的中心点 j_1 的邻域中有 S_G 的两个中心点 i_1 和 i_2。根据贪婪策略， S_G 中的中心点 i_h 到其领域中的任何一个点 i 的距离都不会超过 $d(i_1, i_2) \le 2d_{\text{opt}}$；

否则 i 应该是 S_G 的一个中心点。



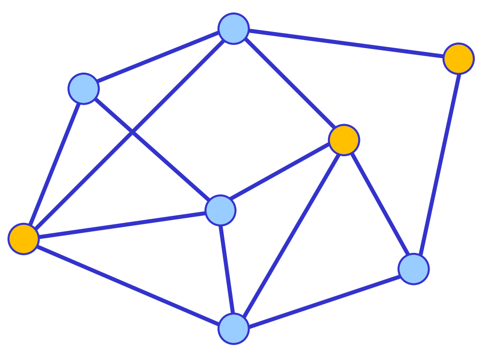
最后，考虑将贪婪算法应用于如下实例，其中 $k = 3$。最优的 3 个中心点为 j_1, j_2, j_3，而贪婪算法先后选取了i_1, i_2 和 i_3。



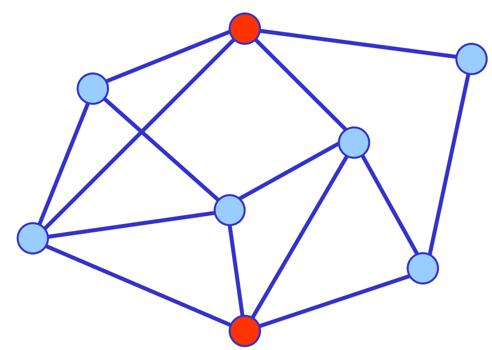
5.10 不可相对近似

定理 5 不存在求解度量空间上的 ***k*-**中心问题的近似算法其近似比小于 **2**，除非 **P=NP**。

证明. 反证法，假设存在求解度量空间上的 ***k*-**中心问题的一个 α-近似算法 **A**，$\alpha < 2$。考虑控制集问题的判定形式：给点一个图 $G(V, E)$ 和一个正整数 $k < |V|=n$。是否存在含有 k 个顶点的控制集 $D \subseteq V$（使得G 的每一个顶点或属于 D 或与D 中一个顶点相邻）。

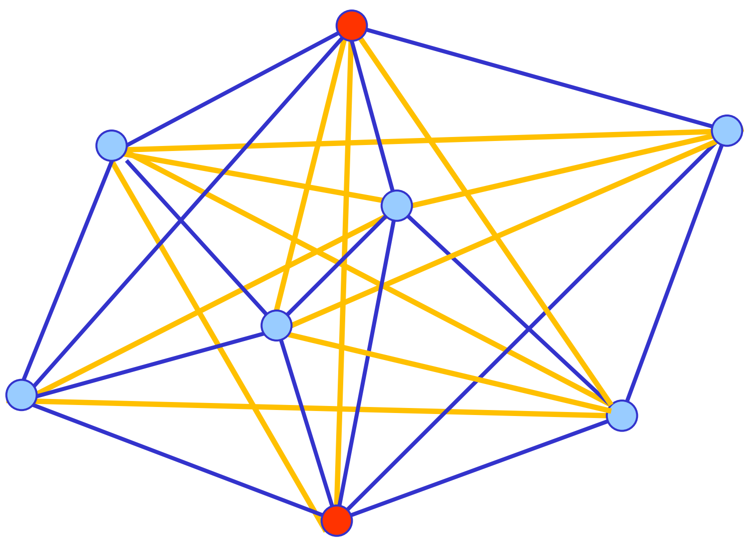


极小控制集



最小控制集

5.10 不可相对近似（续一）



现构造 ***k*-**中心问题的一个实例：点集 ***V*** 中两个点之间的距离是 **1** 如果它们在图 ***G*** 中有边相连，否则它们之间的距离为 **2**。容易验证，图 ***G*** 中有含有 ***k*** 个顶点的控制集，当且仅当的 ***k*-**中心问题的最小距离为 **1**。

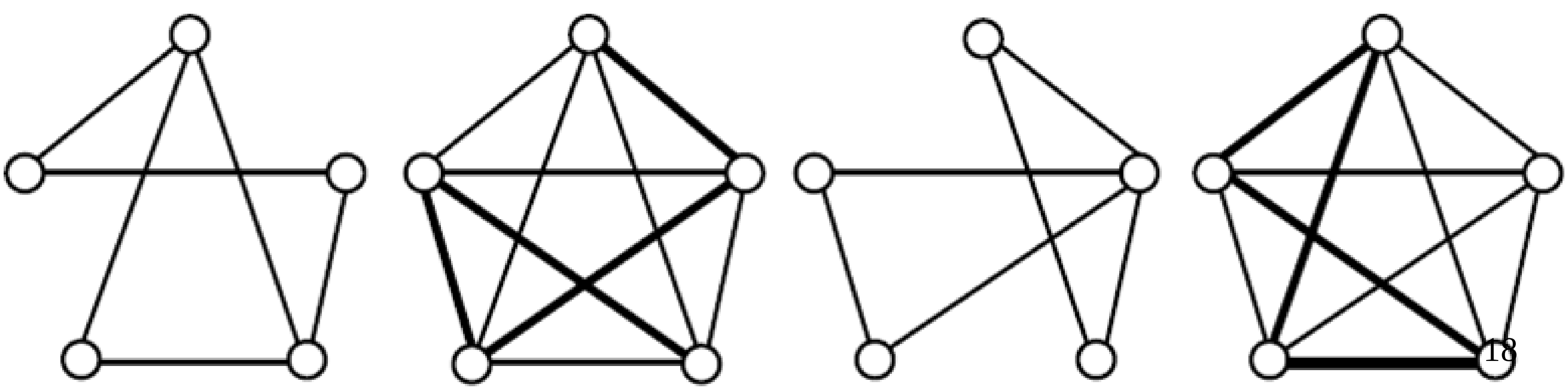
显然，算法 **A** 应用于 ***k*-**中心问题的上述实例，并根据所得解的距离值，即可判定法 **A**是否存在含有 ***k*** 个顶点的控制集。

5.10 不可相对近似（续二）

定理 6 不存在求解一般的**旅行商问题**的近似算法其近似比为常数，除非 **P=NP**。

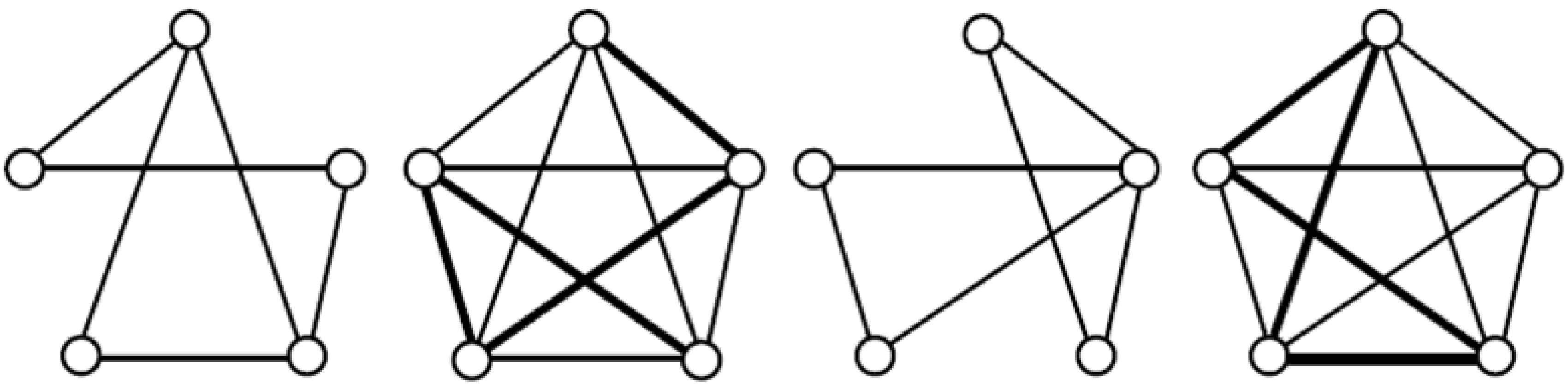
证明. 反证法，假设存在求解一般的旅行商问题的 α-近似算法。我们要用其设计一个求解哈密顿问题的多项式时间算法，这就会产生矛盾，因为哈密顿问题是一个**NP-C**问题。

任给哈密顿问题的一个实例， $G(V, E)$。我们下面构造旅行商问题的一个实例 **I**：边赋权的完全图 H，原图 G 中的边赋权为 **1**，其他的边赋权为 $\alpha|V|$。



5.10 不可相对近似（续三）

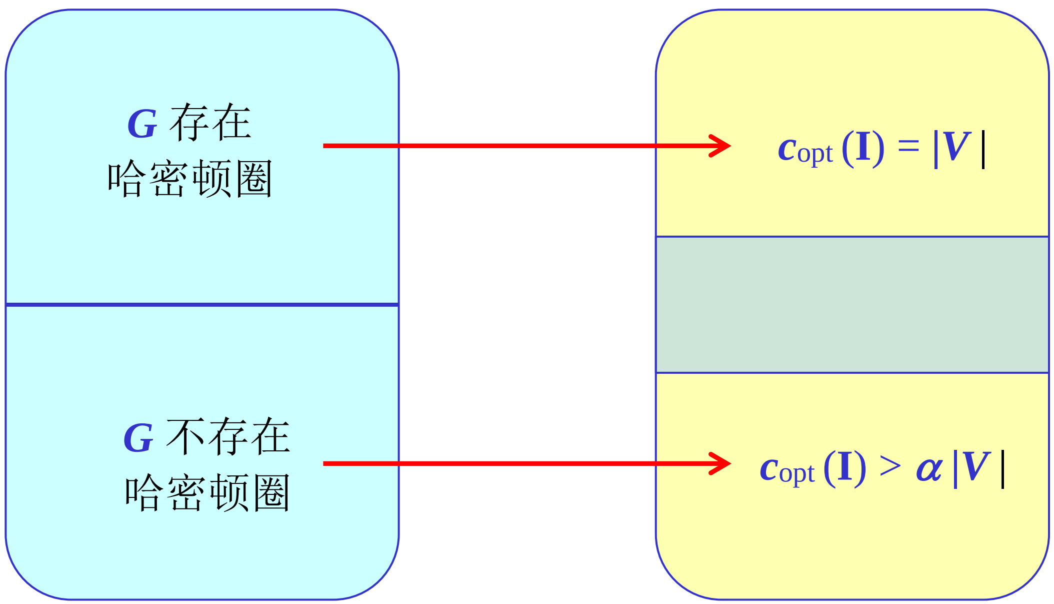
可以验证：若图 ***G*** 存在一个哈密顿圈，则图 ***H*** 有一个最优解其权值为 $c_{opt}(\mathbf{I}) = |V|$。否则，即有 $c_{opt}(\mathbf{I}) \geq (\alpha+1)|V| - 1$。



现在考虑用该算法求解旅行商问题的实例 **I**。如果图 ***G*** 中存在哈密顿圈，那么算法产生的近似解的权值 $c(\mathbf{I}) \leq \alpha\, c_{opt}(\mathbf{I}) = \alpha|V|$；否则其权值$c(\mathbf{I}) \geq c_{opt}(\mathbf{I}) \geq (\alpha+1)|V| - 1$。这样通过计算该近似算法产生的解的权值，就可以判定原图 ***G*** 是否存在一个哈密顿圈，也就给出了哈密顿圈问题的一个多项式时间算法。

5.10 不可相对近似（续四）

上述定理的证明是基于哈密顿圈问题到旅行商问题的一个多项式时间归约。若 ***G*** 含有或者不含有哈密顿圈这两种情况下，所输出的图 ***H*** 的最短环游的长度之间存在一个 α 倍的间隙。根据这个间隙即可知，除非该问题可以多项式时间内求得精确解(亦即， **P =NP**)，否则不存在求解哈密顿问题的 α -近似算法。



哈密顿圈问题　　旅行商问题

5.10 不可相对近似（续五）

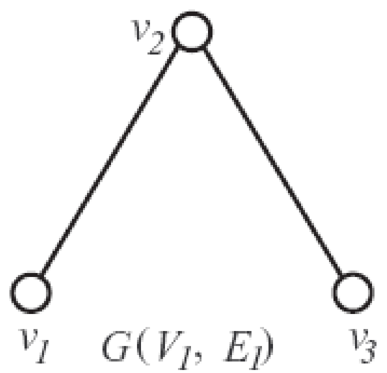
定理 7 对任意常数 ε，$k > 0$，不存在求解**最大团问题**的近似算法，对于任意实例 I，都有 $|c_A(I) - c_{opt}(I)| \le k\, c_{opt}(I)^{1-\varepsilon}$

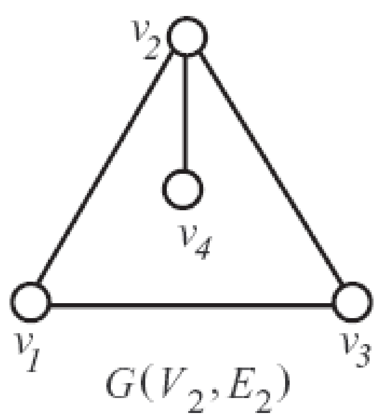
上述定理排除存在求解最大团问题一个近似算法，其相对近似比为 1，这种可能性；但是一般认为这是非常不可能出现的情形。若假设，最大团问题的最佳可及近似比不是 1，则可以证明也不存在求解该问题的一个近似算法其近似比为一个常数。

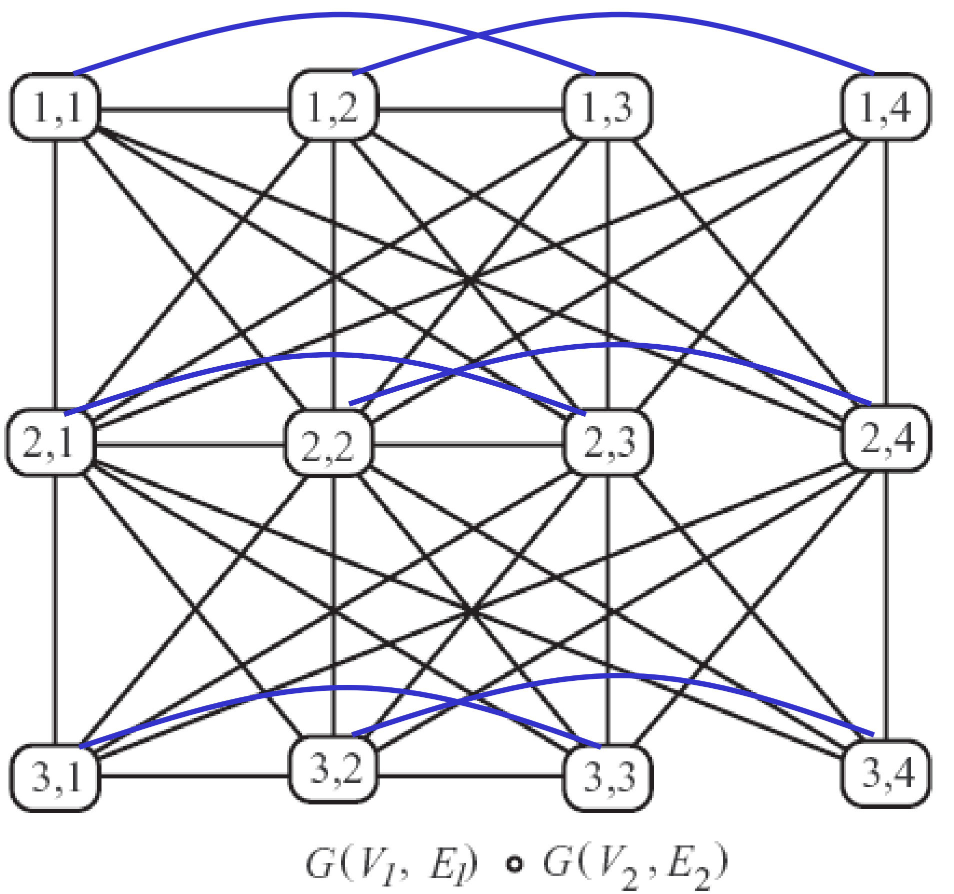
换言之，如果最大团问题存在一个近似算法其近似比为一个常数，那么该问题存在近似比为任意一个常数的近似算法。因而，这样的结果表明，求最大团问题的近似解是一个非常难的，因为通常认为其最佳可及近似比不是 1。

5.10 不可相对近似（续六）

为了使用缩放技巧，定义两个图 $G_1(V_1, E_1)$ 和 $G_2(V_2, E_2)$ 的乘积图 $G_1 \circ G_1 = G(V, E)$： $V=V_1 \times V_2$； $\{(u_1, u_2), (v_1,v_2)\} \in E$ 如果 $(u_1, v_1) \in E_1$ 或者 $u_1 = v_1$ 且 $(u_2, v_2) \in E_2$。图的乘积运算 $\circ$ 是不可交换的。自然地，可以定义图 G 的 n 次幂： $G^n = G^{n-1} \circ G$。







5.10 不可相对近似（续七）

引理 1 对自然数 $n > 0$，$c_{opt}(G^n) = c_{opt}(G)$。且任给 G^n 中的一个团 C，可以在多项式时间内求得原图 G 的一个团C' 使得 $|C'| \geq \lceil |C|^{1/n} \rceil$。

定理 8 对最大团问题，或者$R_{min} = \infty$ 或者$R_{min} = 1$。

证明： 假设 $R_{min} < \infty$，则存在一个近似算法 A 其 $R_A = r$。现对于任意固定的实数 $\varepsilon > 0$， 设计一个算法 A_ε 使其 $R_{A_\varepsilon} < 1+ \varepsilon$。算法 A_ε 如下：首先选取一个实数 n 满足 $r^{1/n} < 1+ \varepsilon$，然后针对幂图 G^n 运行算法 A。易知，算法 A 可找到 G^n 中的一个团，其顶点个数至少为 $c_{opt}(G^n)/r = c_{opt}^n(G)/r$。由**引理1**可知，可以找到原图 G 中的一个团，其顶点个数至少为

$$\frac{c_{opt}(G)}{r^{1/n}} > \frac{c_{opt}(G)}{1+ \varepsilon}$$

5.10 不可相对近似（续八）

定理 9 不存在求解**装箱问题**的近似算法其近似比小于 **3/2**，除非 **P=NP**。

证明. 我们证明如果 $\mathbf{P \neq NP}$，那么装箱问题不存在近似算法其近似比为 $\mathbf{3/2 - \varepsilon}$，其中 ε 为大于 **0** 的任意一个实数。现在考虑划分问题的判定形式：给定一个含有限多个实数的集合 **I**，其实数之和为 W，是否可以将其分成两个不相交的子集合使得两个子集合中的实数之和都为 $W/2$。这是一个**NP-C**问题。

下面我们构造装箱问题的一个实例 **I'**：每一个物品 x_i 的权重为 w_i，箱子的容积为 $W/2$。容易验证：若实例 **I** 的答案为“是”，则装箱问题实例 **I'**的最优解为 **2**；否则其最优解为 **3**。

5.10 不可相对近似（续九）

假设存在一个求解装箱问题的近似算法 **A** 其近似比为 $3/2 - \varepsilon$。下面说明，如何通过应用该算法于实例 **I’**，求解划分问题的实例 **I**。下面考虑两种情形：

(1) 划分问题实例 **I** 的答案为“是”。此时有

$$c_A(I') \le (3/2 - \varepsilon)\, c_{opt}(I') = (3/2 - \varepsilon)\, 2 = 3 - 2\varepsilon.$$

(2) 划分问题实例 **I** 的答案为“否”。此时有

$$c_A(I') \ge c_{opt}(I') = 3.$$

综上所述，划分问题实例 **I** 的答案为“是”，当且仅当算法 **A** 可以将装箱问题实例 **I’** 的所有物品放入 **2** 个箱子中。亦即，算法 **A** 可以在多项式时间内求解划分问题。

5.10 ($\rho \ln n$)-近似算法

有一类组合优化问题，对其中的每一个问题都存在一个正实数 ρ，使得它没有($\rho \ln n$)-近似算法。最小集合覆盖问题在这类问题的($\rho \ln n$)-不可近似性研究中起到了关键性的作用。

问　题：最小集合覆盖

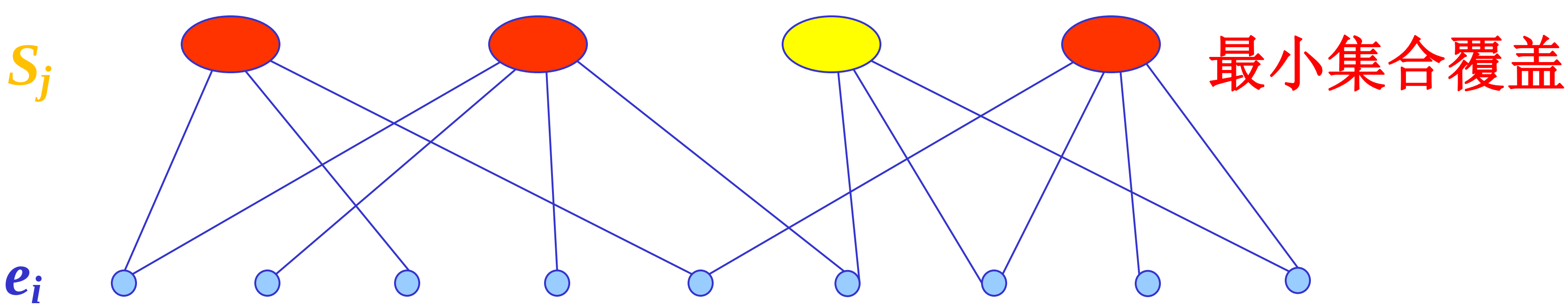
<u>实　例</u>：一个基本集合 $S=\{e_i \mid i=1,2, \ldots , n\}$，

一个子集族 $F=\{S_j \subseteq S \mid j=1,2 , \ldots , m\}$，其中 $\cup S_j = S$；

另外，一个权函数 $c(S_j)$

<u>可行解</u>：子集族 F 的一个子族 F'

<u>目　标</u>：子族 F' 所含有的子集的权之和最小



5.10 ($\rho \ln n$)-近似算法（续一）

求解最小集合覆盖问题有一个非常著名的贪婪算法：初始时，F' 为空族；每一次选取一个最有效的子集 S_k 放入 F' 中，并从 S 中去掉 S_k 中的元素；重复此步骤直到 S 成为空集。

第一步. $F' := \varnothing$

第二步. 当 $F' \neq S$ 时，选取最小 $\alpha(S_k) = \dfrac{c(S_k)}{|S - S_k|}$

置元素效率 $p(e_i) := \alpha(S_k)$，$\forall e_i \in S_k$

$F' := F' \cup S_k$

第三步. 输出 F'

5.10 ($\rho \ln n$)-近似算法（续二）

考虑最小集合覆盖问题的如下实例： $S=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，

$S_1=\{e_1\}$, $S_2=\{e_2\}$, …, $S_n=\{e_n\}$, $S_{n+1}=S$,
$c(S_1)=1/n$, $c(S_2)=1/(n-1)$, …, $c(S_n)=1$, $c(S_{n+1})=1+\varepsilon$。

当将贪婪算法应用于该实例，可得近似解 $F'=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$，权值为调和数 $H_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n$。容易验证，该实例的最优解为 $F_{\text{opt}}=\{S_{n+1}\}$，其权值为 $1+\varepsilon$。

定理 10 求解最小集合覆盖问题的贪婪算法的近似比为调和数 $H_n = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n$。

5.10 ($\rho \ln n$)-近似算法（续三）

证明. 不妨设，S 中的元素是以 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 顺序被贪婪算法先后覆盖的。显然，在每一次选取 S_k 时，覆盖尚未被覆盖的元素所需的最小权值不会超过 c_{opt}。因而，在未被选取的子集中一定存在一个子集，其效率最多为 $c_{\text{opt}}/|S\backslash F'|$。如果此时元素 e_k 会被子集 S_k 覆盖，那么至少还应有 $n-k+1$ 个元素未被覆盖。又因为 e_k 是被最有效的子集 S_k 覆盖的，所以有

$$p(e_k) \le \frac{c_{\text{opt}}}{|S\backslash F'|} \le \frac{c_{\text{opt}}}{n-k+1}$$

注意到，每个被选取的子集的权值都平均分配给了其所新覆盖的元素。故所有被选取的子集的权值之和不会超过

$$\frac{c_{\text{opt}}}{1} + \frac{c_{\text{opt}}}{2} + \cdots\cdots + \frac{c_{\text{opt}}}{n}。$$

5.10 $(\rho \ln n)$-不可近似性

回忆一下，$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = r$，其中 r 为欧拉常数。因此，下述定理表明，贪婪算法是求解最小集合覆盖问题的最好可能的算法。

定理 11 对于任意正实数 $\rho<1$，最小集合覆盖问题都不存在 $(\rho \ln n)$-近似算法，除非 $NP \subseteq DTIME(n^{O(\log\log n)})$，其中 n 是基本集合 S 所含有元素的个数。而且，即使输入的子集族 C 所含有的子集的个数不超过集合 S 所含元素的个数，结论仍然成立。

在**定理 11** 中，$DTIME(n^{O(\log\log n)})$ 表示由所有确定性图灵机可在 $n^{O(\log\log n)}$ 时间内决定是否接受的问题类。下面我们就应用**定理 11**，得到其他组合优化问题的 $(\rho \ln n)$-不可近似性。

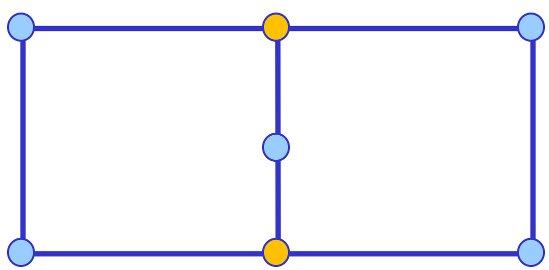
5.10 ($\rho \ln n$)-不可近似性（续一）

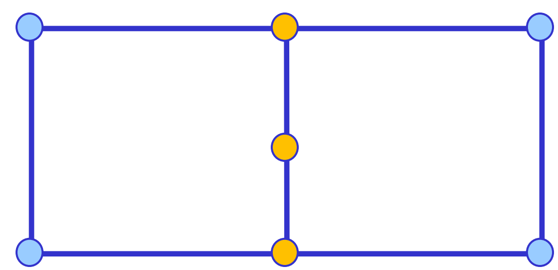
问　题: 连通控制集

实　例: 一个连通图 $G(V, E)$

可行解: 图 G 的连通控制集 $D \subseteq V$: G 的每一个顶点或属于 D 或与D 中一个顶点相邻，且其诱导子图是连通的

目　标: D 含有的顶点个数最小





定理 12 对于任意正实数 $\rho < 1$，连通控制集问题都不存在 $(\rho \ln n)$-近似算法，除非 $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{DTIME}\,(n^{O(\log \log n)})$。

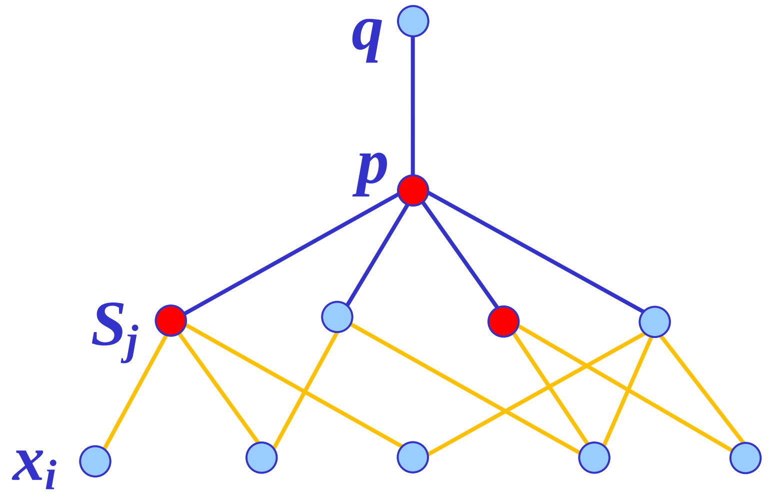
5.10 $(\rho \ln n)$-不可近似性（续二）

证明. 反证法。假设存在求解连通控制集问题的一个$(\rho \ln n)$-近似算法 A，其中 $\rho < 1$。选取一个正整数 $k_0 > \rho/(1-\rho)$，则有 $\rho(1 + 1/k_0) < 1$。设 ρ' 是一个正数，且满足 $\rho(1+1/k_0) < \rho' < 1$。我们证明存在求解最小集合覆盖问题的 $(\rho' \ln n)$-近似算法。

考虑最小集合覆盖问题的 一个实例，其中不妨设 $m \le n$。首先，对于每个最多含有 k_0 个子集的族 F'，我们检查它是否是基本集合 S 的一个覆盖。由于总共有 $O(n^{k_0})$个这样的子集族，故这个步骤可以在 n 的多项式时间内完成。

如果未找到最多含有 k_0 个子集的集合覆盖，我们就构造连通控制集问题的一个实例 $G(V, E)$：顶点集 V 有 $m+n+2$ 个顶点，其中 $m + n$ 个顶点分别对应于 S 中的 n 个元素和 F 中的 m 个子集。另外两个记为 p 和 q。边集 E 包含，(p, q), (S_j, p), $j = 1, 2, \ldots, m$，和 (x_i, S_j) 若 $x_i \in S_j$。

5.10 (ρ ln n)-不可近似性（续三）



容易验证：

(1) 如果子族 ***F'*** 是一个含有 k 个子集的集合覆盖，那么图 ***G*** 就存在一个含有 $k+1$ 个顶点的连通控制集。

(2) 如果图 ***G*** 存在一个含有 k 个顶点的连通控制集 ***D***，那么我们就可以找到一个最多含有 $k-1$ 个子集的集合覆盖 ***F'***。

5.10 (ρ ln n)-不可近似性（续四）

最后，假设最小集合覆盖 F_{opt} 含有 k 个子集。根据预处理过程，可知 $k > k_0$。再根据上述两个性质可知，图 G 的最小连通控制集含有 $k+1$ 个顶点。当我们对图 G 应用求解连通控制集问题的 (ρ ln n)-近似算法 A 时，可以得到图 G 的一个连通控制集 D，它含有的顶点个数不超过 $\rho \ln (m+n+2)(k+1)$。

另由性质(2)可知，我们可以得到 S的一个集合覆盖 F'，它所含有的子集个数不超过

$$\rho \ln (m+n+2)(k+1) - 1 < \rho \left(1+ \frac{1}{k_0}\right) \left(1 + \frac{\ln 3}{\ln n}\right)(\ln n)k。$$

显然，当 n 充分大时，F'即是最小集合覆盖问题的最优解的一个 (ρ'ln n)-近似。

5.10 (ρ ln n)-不可近似性（续五）

问　题: 最小权连通顶点覆盖
实　例: 一个连通图 $G(V, E)$ 和定义在 V 上的一个权函数
可行解: 图 G 的连通顶点覆盖 $C \subseteq V$: G 的每条边的至少一个端点属于 C，且其诱导子图是连通的
目　标: C 含有的顶点权值之和最小

最小权连通顶点覆盖问题存在一个 $(1+\ln n)$-近似算法。采用类似证明**定理 10** 的方法，我们可以证明如下定理，它说明这个算法的近似比是最好可能的。

定理 13 对于任意实数 $0 < \rho < 1$，最小权连通顶点覆盖问题都不存在 $(\rho \ln n)$-近似算法，除非 $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{DTIME}(n^{O(\log\log n)})$，其中 n 是图 G 中的顶点个数。

证明. 练习。

5.10 n^c-不可近似性

有一类组合优化问题，对其中的每一个问题都存在一个正实数 c，使得它没有n^c-近似算法。图的顶点着色问题和最大团/最大独立集问题是人们最早利用概率可验证明系统的性质证明n^c-不可近似的几个组合优化问题。

定理 14 对于任意实数 $\varepsilon > 0$，最大团问题和最大独立集问题都不存在 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法，除非 P =NP，其中 n 是给定图 G 的顶点个数。

问　题：最大集合填装

实　例：一个基本集合 $S=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，

它的一个子集族 $F=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$，其中 $\cup S_j = S$。

可行解： F 的一个集合填装：互不相交的子集构成的子族 F'

目　标：子族 F' 含有的子集个数最多

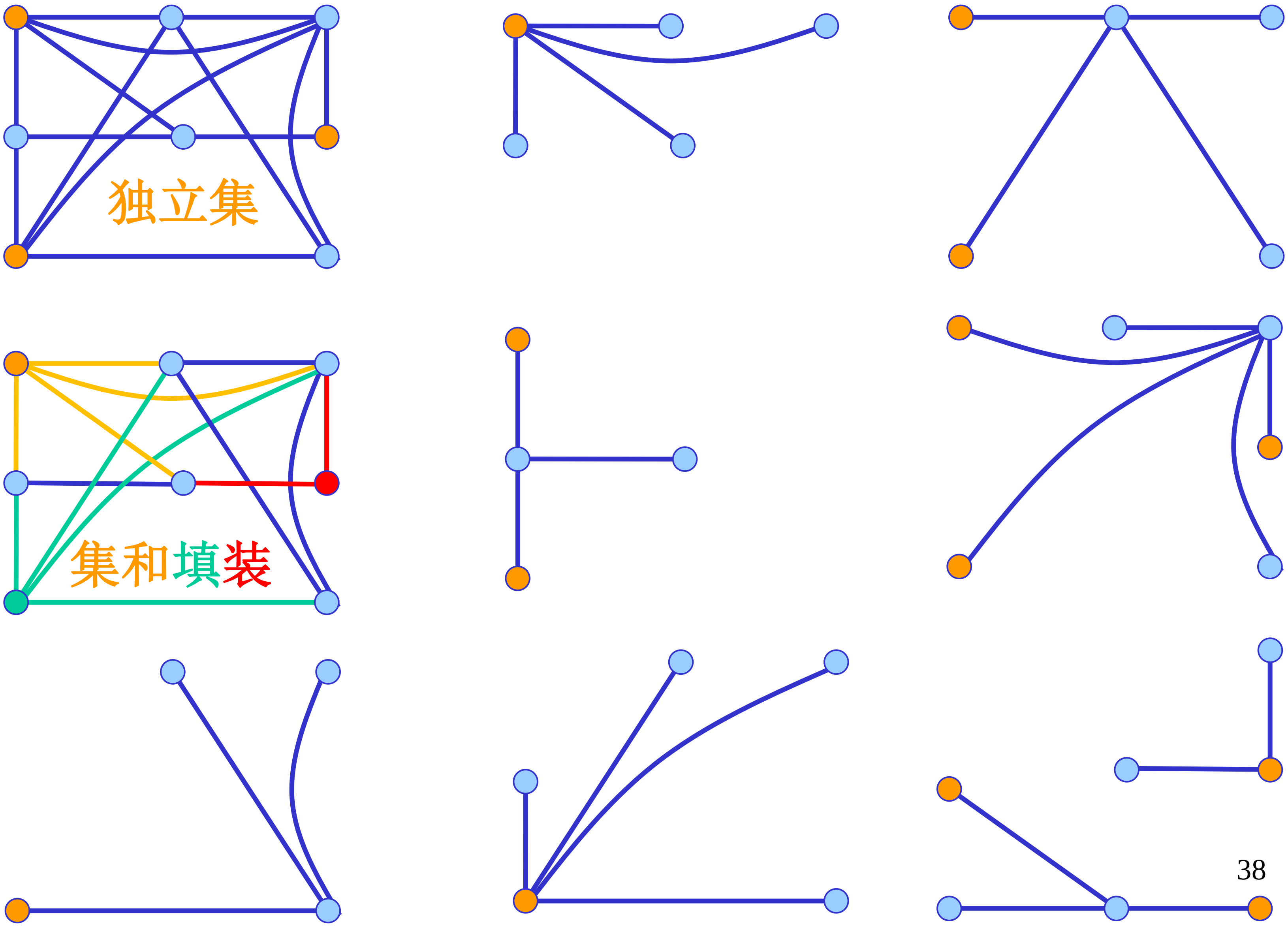
5.10 n^c-不可近似性（续一）

定理 15 对于任意实数 $\varepsilon > 0$，最大集合填装都不存在 $n^{1-\varepsilon}$-近似算法，除非 **P =NP**，其中 n 是给定子集族 F 所含子集的个数。

证明. 将最大独立集问题归约到最大集合填装问题：给定最大独立集问题的一个实例 $G(V, E)$，对每一个顶点 $v \in V$，记 E_v 为所有与顶点 v 关联的边的集合。现考虑最大集合填装问题的实例 (E, F)，其中 $F = \{E_v \mid v \in V\}$。

显然，顶点子集合 $V' \subseteq V$ 是图 G 的一个独立集，当且仅当 $F' = \{E_v \mid v \in V'\}$是子集族 F 的一个集合填装。

5.10 n^c-不可近似性（续二）



5.10 n^c-不可近似性（续三）

显然，顶点子集合 $V' \subseteq V$ 是图 G 的一个独立集，当且仅当 $F' = \{E_v \mid v \in V'\}$ 是子集族 F 的一个集合填装。

值得指出的是，除了以上讨论的有关 n^c-不可近似性和 $(\rho \ln n)$-不可近似性的一些基本结果，还有一些问题，求解它们的近似算法的最好性能比严格地位于这两个不可近似界之间。

问　题：有向斯坦纳树
实　例：一个边赋权的有向图 $G(V, E)$，
　　　　一个源点 $s \in V$ 和一个结点集 P
可行解：一棵有向树 T，它包含从 s 到 P 中每一个结点的路
目　标：树 T 上的所有弧的权值之和最小

人们已知，对于任意实数，有向斯坦纳树问题都存在 n^c-近似算法，也就是说它的难度要比最大团问题的难度低。

5.10 近似计算复杂性分类

对于**NP**-难解的组合优化问题 $\prod$，我们可以依据求解其近似解的计算难易程度，将它们化为如下 4 类。

（1）有 α-绝对近似算法，这类问题最容易求解，但非常少（例如，图的边着色等）。

（2）最佳可及近似比 $R_{min}(\prod)=1$，亦即存在多项式时间近似方案。通常认为这类问题也容易求解（例如，背包问题等）。

（3）最佳可及近似比 $R_{min}(\prod)$ 为一常数，亦即有 α-近似算法。通常认为这类问题比较容易求解（例如，背包，顶点覆盖等）。

（4）最佳可及近似比 $R_{min}(\prod)$ 没有常数上界。通常认为这类问题最难求解（例如，集合覆盖，最大团等）。


谢谢大家！
by wallcoo.com