运筹学通论I

胡晓东

应用数学研究所

中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

Institute of Applied Mathematics

Chinese Academy of Sciences

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

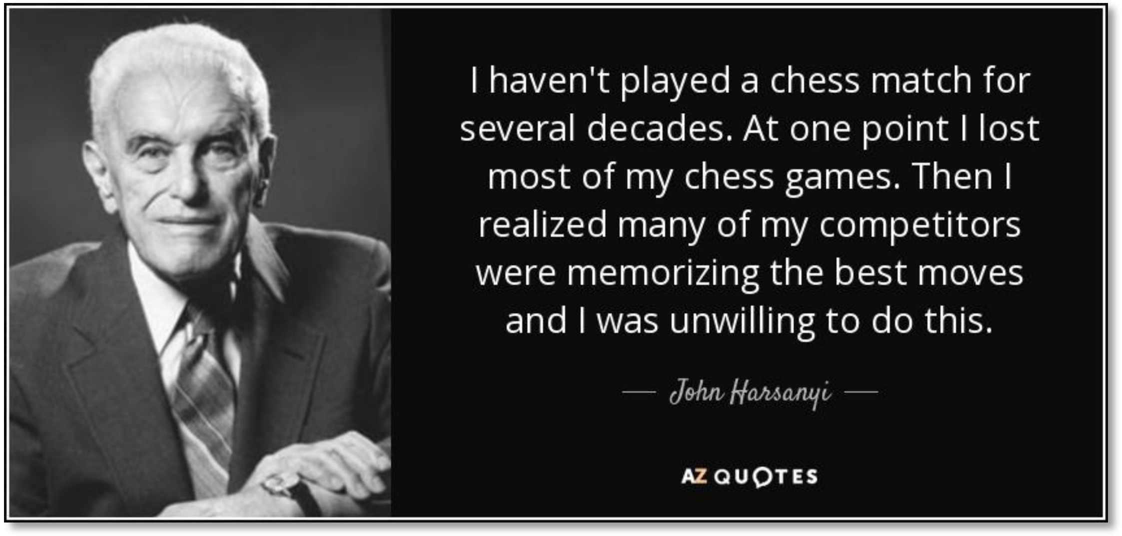
在前面我们讨论的博弈模型中，都假设每一个局中人都知道其他局中人的完美信息(perfect information)，亦即所有信息：包括偏好和支付矩阵。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

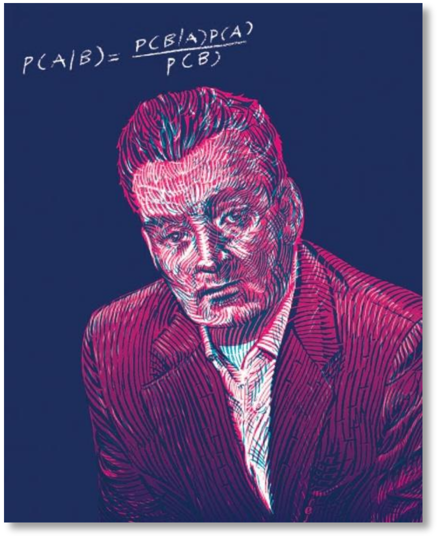
而在实际中，常常这个完美信息假设是不成立的。一个局中人未必清楚他所处的局势，有多少局中人，他们都各自有多少种选择，以及相应的收益/支付。比如，在桥牌游戏中，一个牌手，并不知道其他牌手手里的牌，因而也就无法知道每一轮的结果。再比如，在网上竞拍时，一个竞拍人并不清楚有多少人竞聘以及他们对标的物的估价(或认可的价值)。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

在有些**信息不完美**的博弈中，局中人对他所面临的局势可有一个先验概率。此时，通过引入自然选择(moves by nature)和信息集合的手段，可以将相应的不完全信息(incomplete information)博弈视为具有不完美信息(imperfect information)的完全博弈，通常称为**贝叶斯博弈**(Bayesian game)。该类博弈模型的主要分析方法是基于约翰 海萨尼(John C. Harsanyi)提出的**Harsanyi**变换，及使局中人的期望收益最大化的思路。



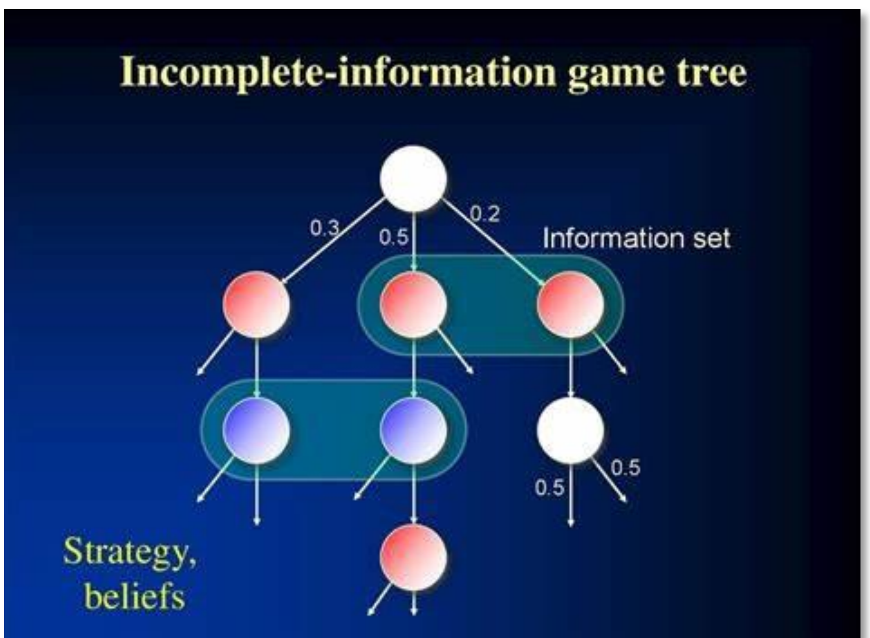
1920年-2000年；1994年获得诺贝尔经济学奖



1702年-1761年

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

在约翰 海萨尼的研究框架下，我们可以将自然 (nature) 作为一个局中人引入到贝叶斯博弈中。自然将一个随机变量赋予每个局中人。这个随机变量决定了该局中人的类型 **(type)**。这个过程类似于在纸牌游戏中，每人先抽取一张“身份牌”，自己能看到，但别的游戏者看不到，只能根据抽牌过程中的概率分布和每个玩家的行为（选择）来猜测别人的身份。



2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

例1. 鱼交易博弈。一个消费者(customer)去一个鱼市场买条鱼，根据经验该市场卖的鱼有**2/3**的鱼是新鲜的，其他**1/3**的鱼是不新鲜的；鱼贩(seller)是知道当天进货的鱼哪些是新鲜的，哪些鱼是不新鲜的。鱼贩以每条鱼**6$**价格进货，以**12$**价格出售。消费者觉得一条新鲜鱼价值**15$**，否则一分钱都不值。消费者面对鱼贩卖给他的鱼(他没有能力判断鱼是否新鲜)，需要决定是买鱼，还是不买（离开摊位，改日再来）。

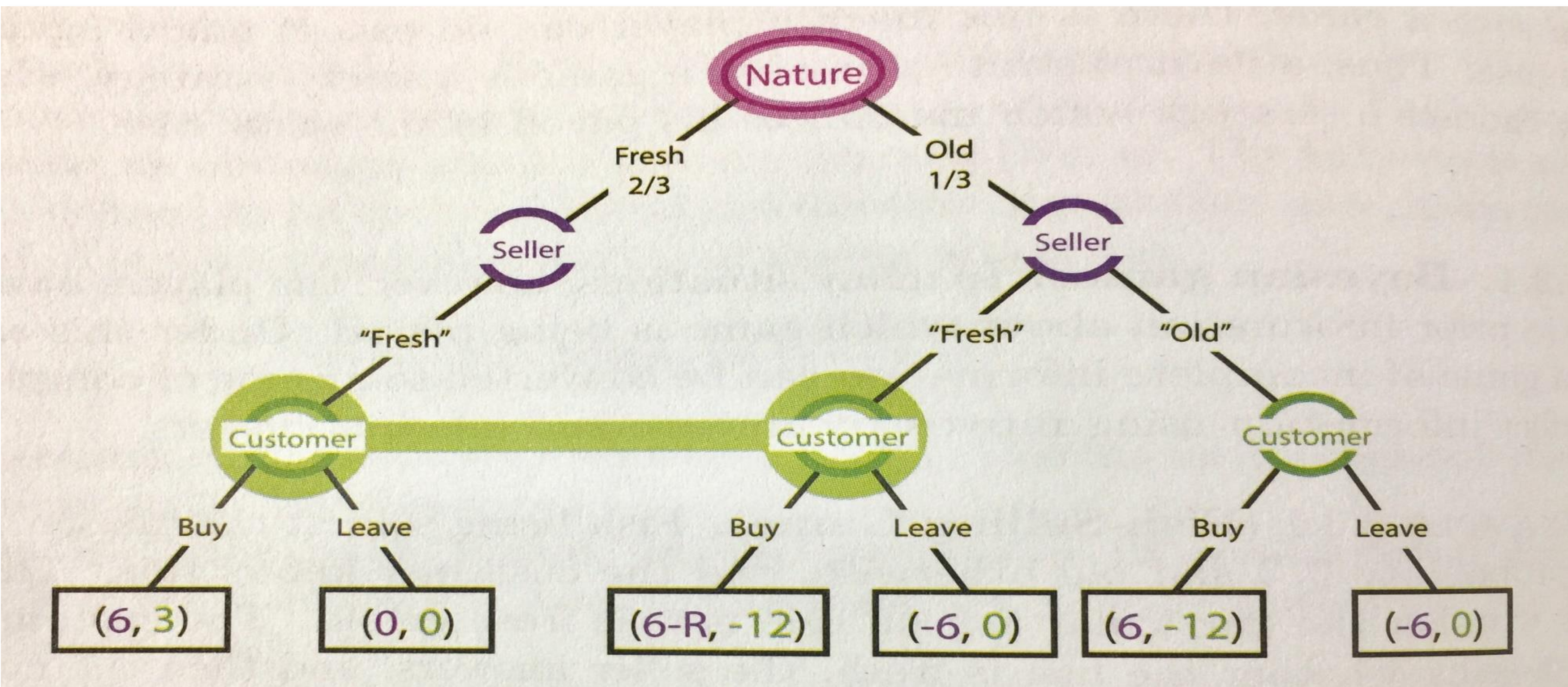
显然，若消费者买了一条新鲜的鱼，则他得到收益**3$**。鱼贩如果能将一条新鲜鱼卖个消费者，那么他可赚**6$**；若他没能将一条新鲜鱼卖给消费者，他可以转卖给另外一个鱼贩，仍然可赚**6$**；如果鱼是不新鲜的，那么鱼贩就不得不把鱼扔掉（消费者不买不新鲜的鱼）。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

然而，如果鱼贩将一条不新鲜的鱼当作新鲜的鱼买给消费者，而且消费者(被骗)买下了不新鲜的鱼，那么鱼贩得到**6-R$**的收益，其中减去的**R$**是声誉损失，而消费者得到是**-12$** (花了**12$**买了条不新鲜鱼的回家，毫无价值，只好把鱼扔掉)。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

经分析可知，因为鱼贩不会把新鲜鱼当做不新鲜的鱼买，所以他有两个可能的纯策略：**FF**永远声称他卖的鱼是新鲜的，或者**OF**永远事实求实。此时，消费者有以下对应策略：当鱼贩说鱼是不新鲜的，他离开摊位；**BL**听鱼贩怎么说的（新鲜的就买，不新鲜的就不买），**LL**总是不买（离开摊位）。

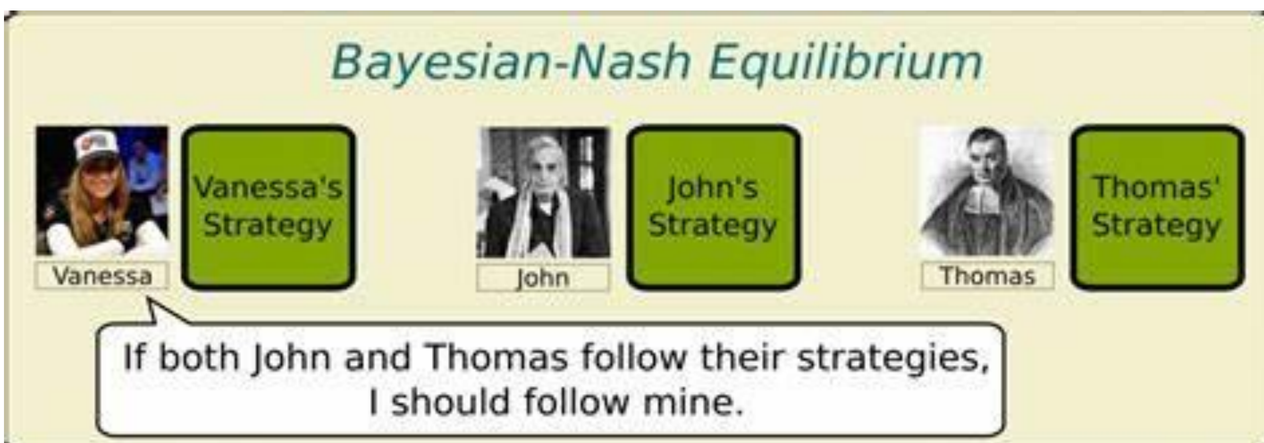


2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

由上面的博弈树，可以得到如下的支付矩阵。

	Customer		
Seller		BL	LL
	FF	(6-*R*/3, -2)	(-2, 0)
	OF	(2, 2)	(-2, 0)

练习. 证明：(1) 若*R*<12，则**(FF, LL)**是惟一纯策略纳什均衡。(2) 若*R*≥12，则**(OF, BL)**也成为一个纯策略纳什均衡，且消费者和鱼贩从该均衡得到的收益比从另一个均衡得到的收益都要高。



2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

例2. 局中人1(女孩)想与局中人2(男孩)约会：去看芭蕾(**B**allet)或者去滑冰 (**S**kate)。女孩偏好看芭蕾，而男孩偏好去滑冰。

情形**1**：局中人2是一个活泼类型的男孩。相应的支付矩阵如下左表；其纳什均衡策略为**(B, B)**和**(S, S)** 。

1

	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

2 wishes to meet 1

2

	B	S
B	2, 0	0, 2
S	0, 1	1, 0

2 wishes to avoid 1

情形**2**：局中人2是一个安静类型的男孩。相应的支付矩阵如上右表。可以验证，它不存在纯纳什均衡策略。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

现在我们假设局中人1不清楚局中人2是属于那种类型。此时，局中人1可简单地假定：局中人2是活泼型和安静型男孩的可能性是一样的，亦即局中人2想与自己约会和不想与自己约会的概率是一样的，即都是**1/2**。以下是相应的支付矩阵。这时候双方又应该如何进行选择呢？

1

Prob. 1/2

2	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

2 wishes to meet 1

Prob. 1/2

2	B	S
B	2, 0	0, 2
S	0, 1	1, 0

2 wishes to avoid 1

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

这是一个**贝叶斯同步选择(simultaneous move)博弈**，其相应的贝叶斯纳什均衡满足如下两个条件：

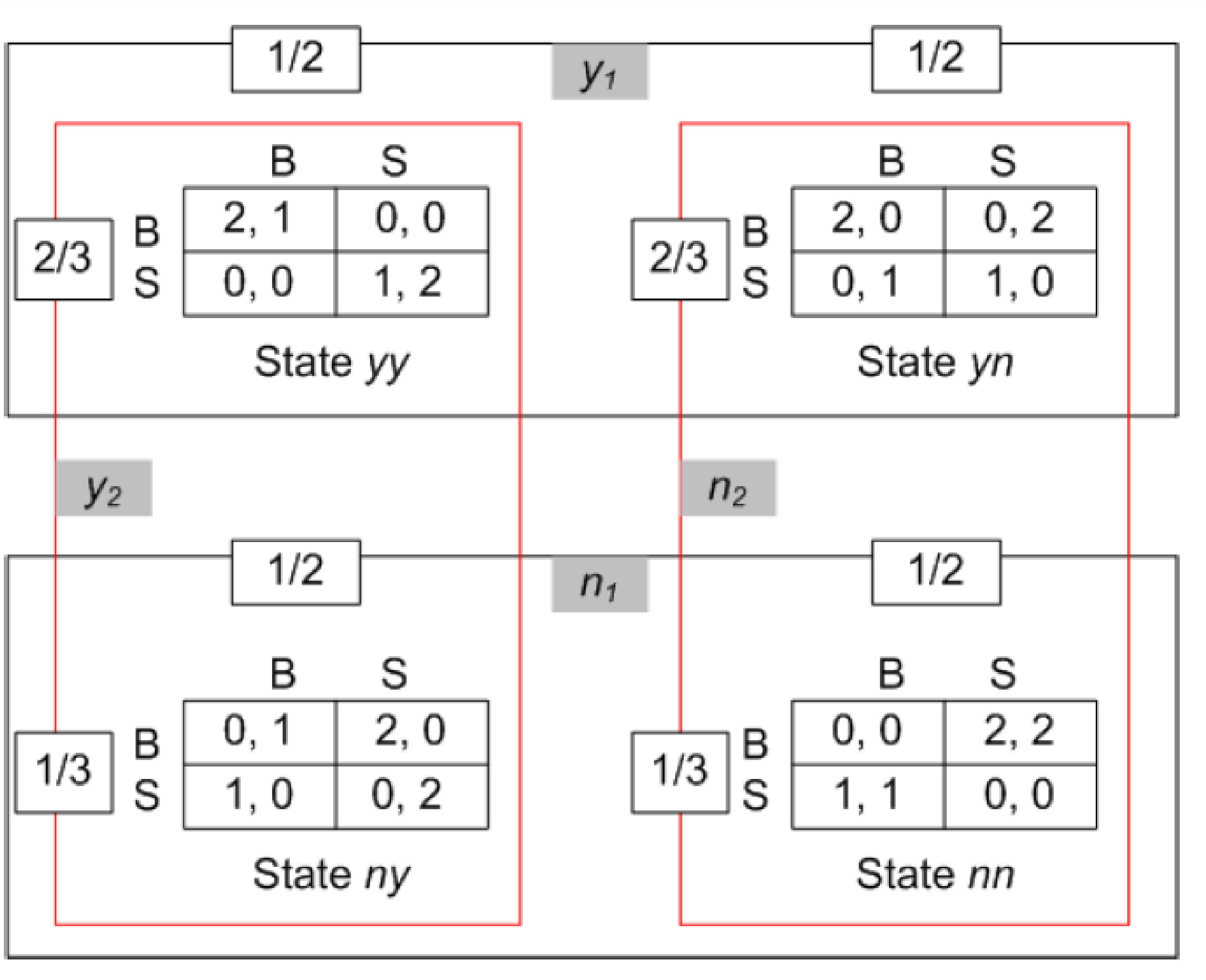
（1）在给定局中人2的两种类型所采取的相应策略下，局中人的选择是最优的。

（2）在给定局中人1的选择下，每一个类型的局中人2所采取的选择都是最优的。

上述博弈有惟一一个纯策略贝叶斯纳什均衡，**[B, (B, S)]**，其中第一个分量 **B** 表示局中人1的选择，而第二个分量 **(B, S)** 表示不同类型的局中人2所分别做的选择。可验证（练习），局中人1的期望收益是**1**，而两种类型局中人2的期望收益分别是**1**和**2**。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

例2 (续) 现在假设：局中人1和局中人2都只知道自己的约会意愿，但不知道对方的约会意愿。



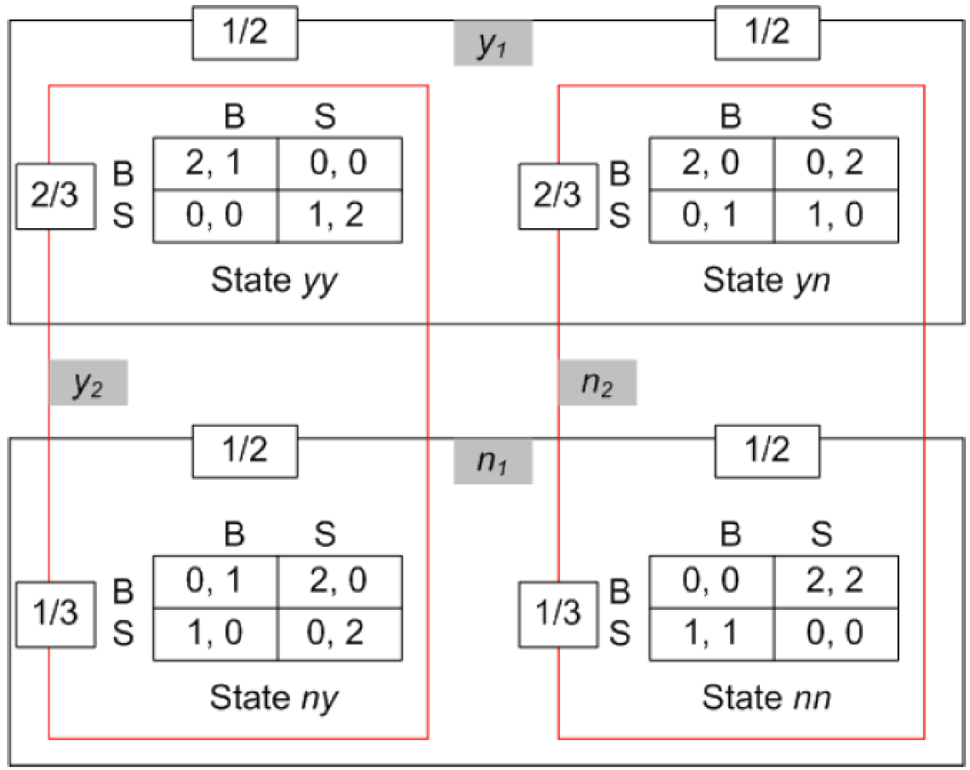
2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

上面是相应的支付矩阵，其中局中人1的两个类型分别记作 **y_1**和**n_1**，局中人2的两个类型分别记作**y_2**和**n_2**。局中人1假设局中人2与自己约会和不想与自己约会的概率都是**1/2**，而局中人2假设局中人1与自己约会和不想与自己约会的概率分别是**2/3**和**1/3**。

这个**贝叶斯（同步选择）博弈**的贝叶斯纳什均衡满足如下条件：在给定每一个类型的局中人的选择下，每一个类型的另外一个局中人所采取的相应选择都是最优的。

可以验证上述博弈有一个纯策略纳什均衡 **[(B,B), (B, S)]**。如果局中人1总是选择策略**B**，那么局中人2若是**y_2**类型，则选择**B**，否则他是**n_2**类型，选择**S**。因而局中人2的策略组**(B, S)**是对局中人**1**的策略组**(B, B)**的最优响应。

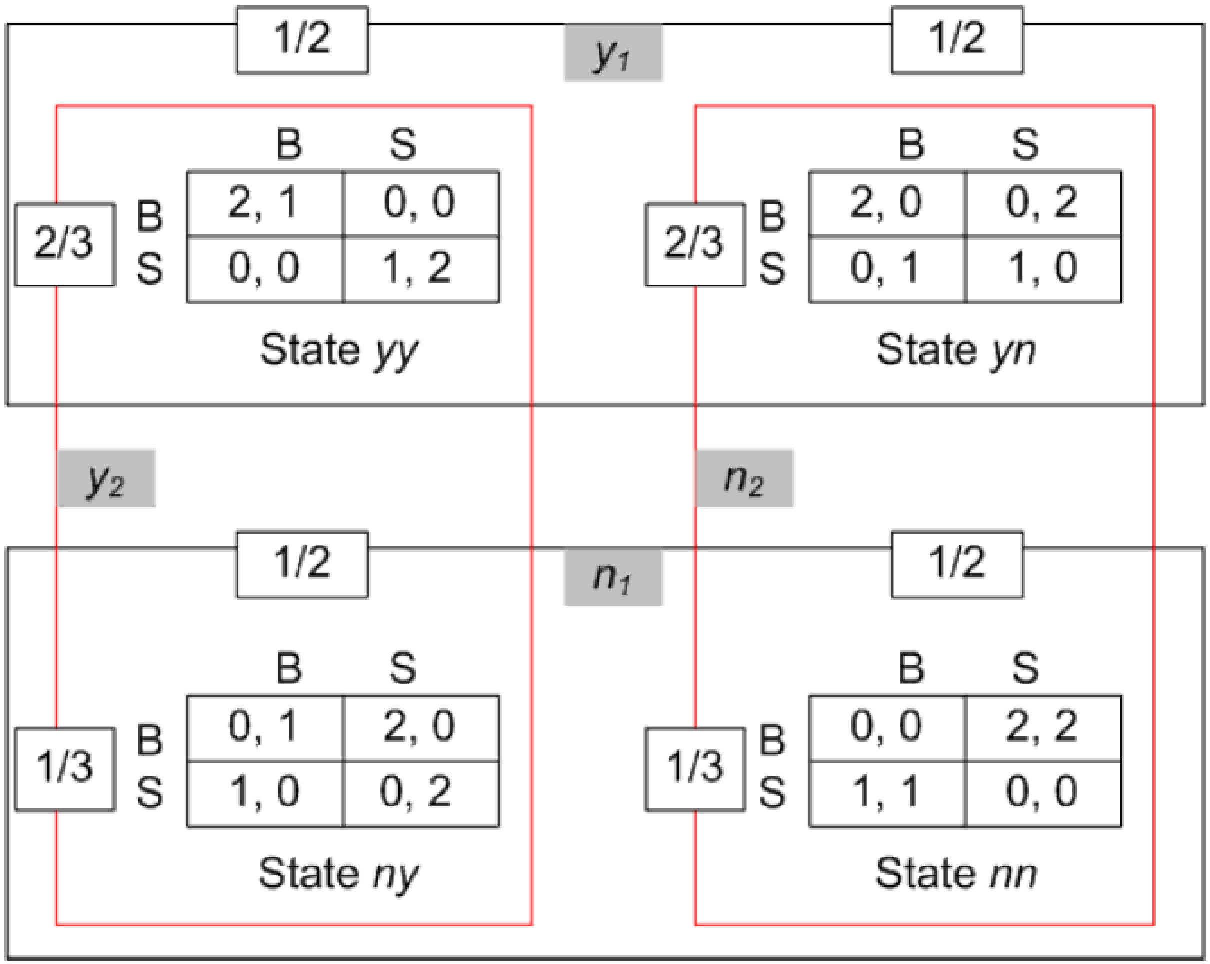
2. 博弈论 – 贝叶斯博弈



另外，局中人1的策略组**(B, B)**是对局中人2的策略组**(B, S)**的最优响应。这是因为：对于y_1类型的局中人1，其采取策略**B**的期望收益是**1**，大于其采取策略**S**的期望收益**1/2**；而对于n_1类型的局中人1，其采取策略**B**的期望收益是**1**，大于其采取策略**S**的期望收益**1/2**。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

因此，**[(B,B), (B, S)]**是一个纯策略纳什均衡。



练习. 请验证 **[(S,B), (S, S)]**是一个纯策略纳什均衡。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

例3. 鹰鸽博弈：有一只老鹰和一只鸽子与另一只鸟同时发现食物时，但它们无法确定那只鸟是老鹰还是鸽子。它们各自可以选择与对方争夺食物或者逃走。假设它们知道，鸟群中老鹰和鸽子的个数一样多。如果假设鸽子的体力消耗比老鹰的体力消耗要小，可忽略不计，那么老鹰和鸽子的收益矩阵如下。

鹰-鹰	夺食	逃走
夺食	-2, -2	2, -1
逃走	-1, 2	-1, -1

鸽-鸽	夺食	逃走
夺食	1, 1	2, 0
逃走	0, 2	0, 0

鹰-鸽	夺食	逃走
夺食	2, -2	2, 0
逃走	-1, 2	-1, 0

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

当一只老鹰设定自己的夺食概率为 p 时，它会考虑两种选择：

（1）选择夺食，对方是鹰的概率为 **0.5**，夺食或逃走的概率分别为 p 和 $1 - p$，己方期望收益为 $-2p + 2(1 - p) = 2 - 4p$。对方是鸽子的概率为 **0.5**，不论对方夺食还是逃走，己方收益均为 **2**。故己方总收益 $0.5 \times (2 - 4p) + 0.5 \times 2 = 2 - 2p$。

（2）选择逃走，则己方收益固定为 **-1**（挨饿）。

鹰-鸟	鹰夺食	鹰逃走	鸽夺食	鸽逃走	己方期望收益
夺食	-2, -2	2, -1	2, -2	2, 0	$2 - 2p$
逃走	-1, 2	-1, -1	-1, 2	-1, 0	-1

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

类似地，当一只鸽子设定自己的夺食概率 q 时，它也会考虑两种选择。

（1）选择夺食，对方是鹰的概率为**0.5**，己方期望收益仍为 $\mathbf{2 - 4}p$。对方是鸽子的概率为**0.5**，夺食或逃走的概率分别为 q 和 $\mathbf{1} - q$，己方期望收益为 $q + \mathbf{2}(\mathbf{1} - q) = \mathbf{2} - q$。故己方总期望收益为 $0.5 \times (2 - 4p) + 0.5 \times (2 - q) = 2 - 2p - 0.5q$。

（2）选择逃走，则己方收益固定为 **0**。

鸽-鸟	鹰夺食	鹰逃走	鸽夺食	鸽逃走	己方期望收益
夺食	-2, 2	2, -1	1, 1	2, 0	$2 - 2p - 0.5q$
逃走	0, 2	0, -1	0, 2	0, 0	0

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

综上，老鹰的期望收益 $\pi_h = p(2 - 2p) – (1 - p) = -2p^2 + 3p -1$，最大值在 $p = 3/4$ 处取到，此时期望收益 $\pi_h = 1/8$。鸽子的期望收益 $\pi_d = q(2 - 2p - 0.5q) = -0.5q^2 + 0.5q$，最大值在 $q = 1/2$ 处取到，此时期望收益 $\pi_d = 1/8$。

贝叶斯博弈的均衡策略是老鹰的夺食概率取 $p = 3/4$，鸽子的夺食概率取 $q = 1/2$。显然这个均衡策略组依赖双方遭遇时的收益矩阵，以及种群中的老鹰与鸽子个数之比。在二者个数之比为 **1:1** 时，鹰和鸽子的收益 $\pi_h = \pi_d$ 相等。

Theorem

Consider a finite incomplete information (Bayesian) game. Then a mixed strategy Bayesian Nash equilibrium exists.

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

Theorem

Consider a Bayesian game with continuous strategy spaces and continuous types. If strategy sets and type sets are compact, payoff functions are continuous and concave in own strategies, then a pure strategy Bayesian Nash equilibrium exists.

贝叶斯博弈可分为**静态的**或**动态的**，**单次的**或**重复的**等。静态博弈要求所有局中人同时采取行动，而动态博弈中的局中人则是按照一定顺序依次采取行动。在单次静态博弈中，其他局中人的身份/类型只能通过概率分布去推测。而在动态博弈和重复博弈中，局中人还会面临短期收益的最大化和保密身份之间的权衡取舍。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

对于一个单人最优决策问题来说，他知道的信息多了，并不会给他的决策结果带来更差的结果。然而，对于一个多人（策略互动）决策问题，一个人知道了跟多信息，同时其他人又知道这个情况，那么这个人的决策结果是可能变差的。

例4. 考虑如下贝叶斯博弈，其中每一个局中人都假定对方的状态是等概率出现的，且$0 < \varepsilon < 1/2$。

1/2　　1　　1/2

1/2　　2　　1/2

	L	M	R
T	1, 2ε	1, 0	1, 3ε
B	2, 2	0, 0	0, 3

State ω_1

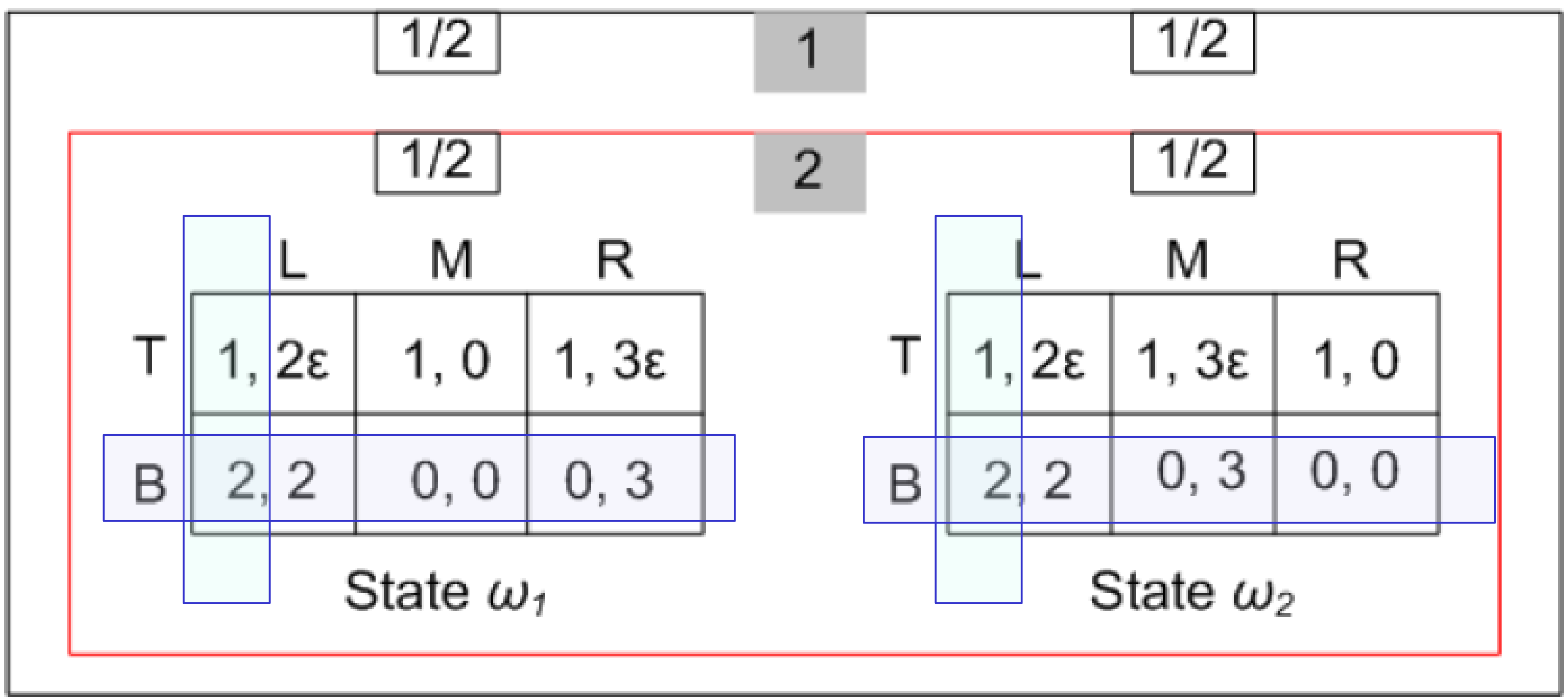
	L	M	R
T	1, 2ε	1, 3ε	1, 0
B	2, 2	0, 3	0, 0

State ω_2

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

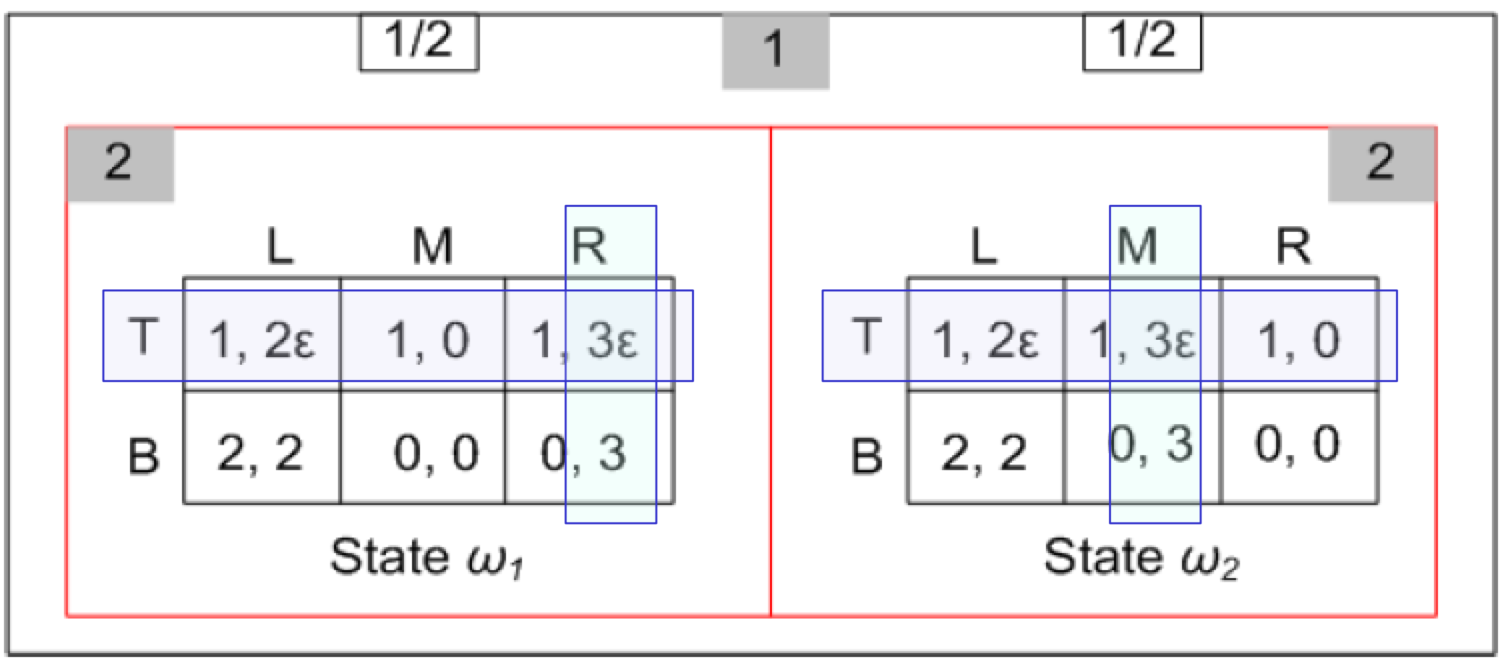
对局中人1的每一个状态，局中人2的唯一最优选择都是策略**L**。

对于局中人2的策略**L**，局中人1的唯一最优选择是**B**。因而，这个博弈存在惟一纳什均衡 **(B, L)**，每个局中人的收益都是**2**。



2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

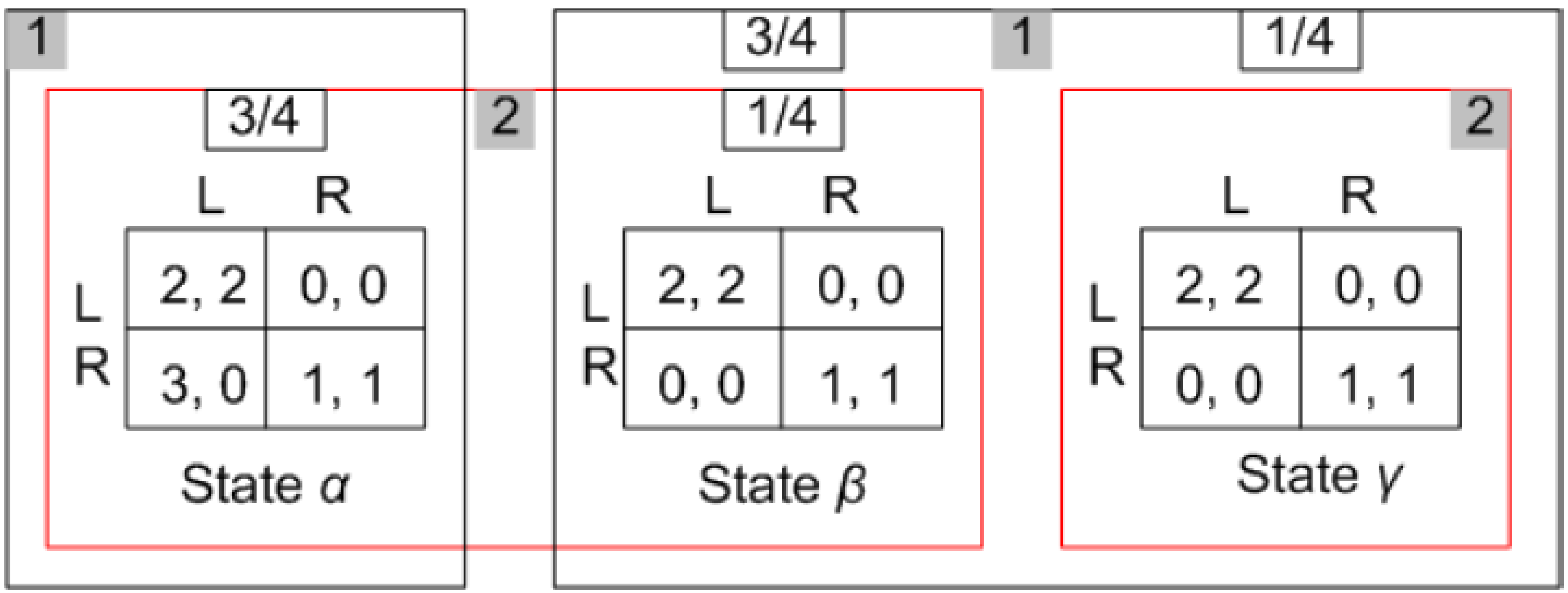
现在我们假设局中人2知道局中人1的所有信息。此时，局中人2对处于ω_1状态的局中人1有占优策略**R**，对处于ω_2状态的局中人1有占优策略**M**。同时假设，局中人1知道局中人2知道他的所有信息，他可由此推断，局中人2只会考虑策略**R**或者**M**，此时，他有占优策略**T**。因而，**[T, (R, M)]**是唯一的纳什均衡策略组，不论局中人1处于何种状态，局中人2的收益都是 **$3\varepsilon < 2$**。



2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

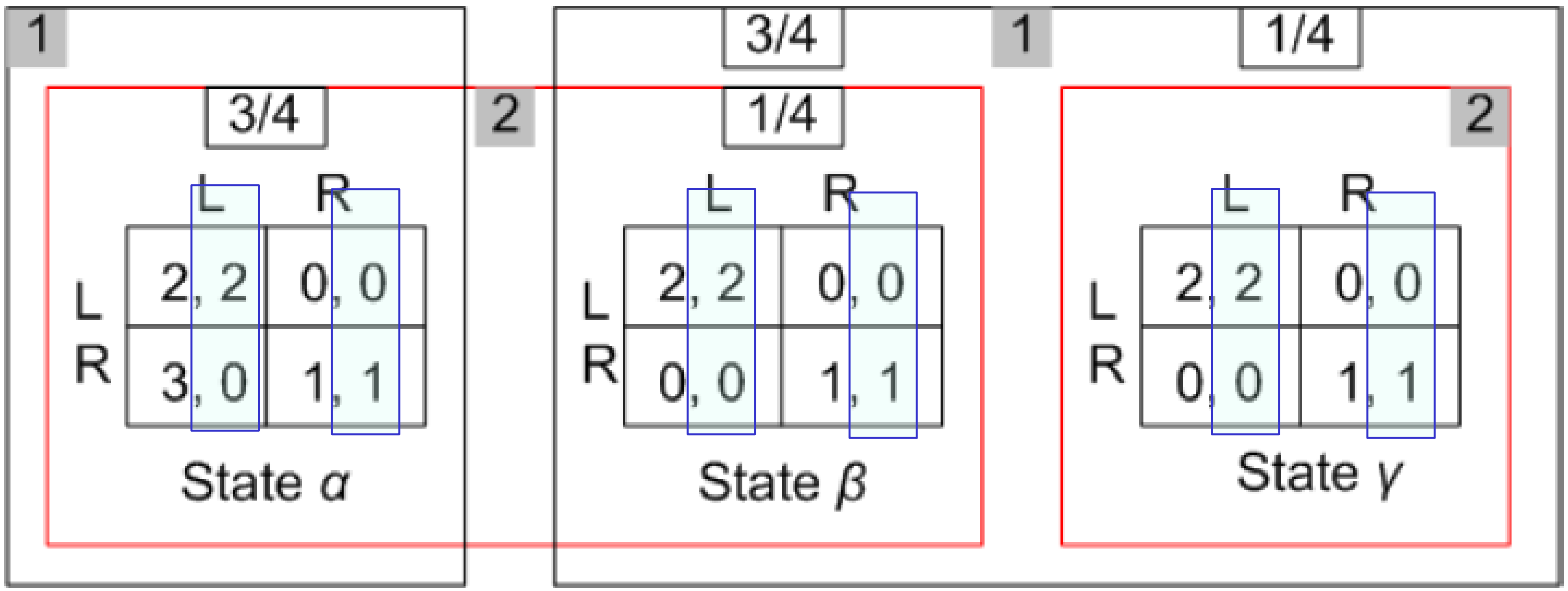
贝叶斯博弈模型不仅可以刻画局中人偏好的不确定性，而且还可以刻画局中人对彼此信息了解的不确定性。

例5. 局中人1可以将状态α与其他状态区分开来，但是他不能区分状态β和状态γ。局中人2可以将状态γ与其他状态区分开来，但是他不能区分状态α和状态β。



2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

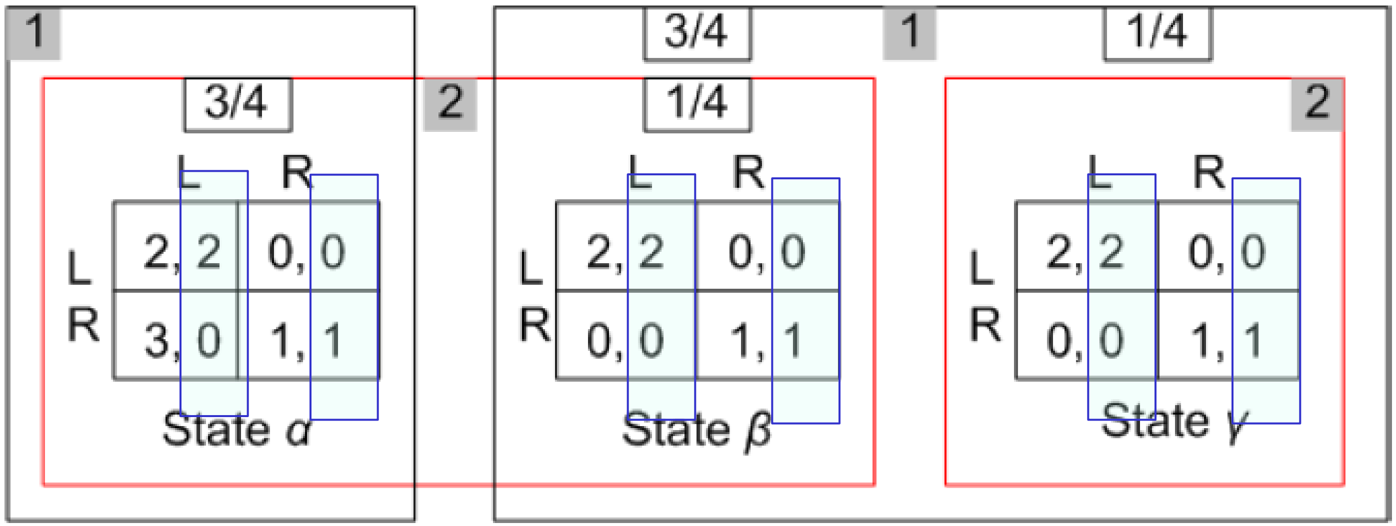
注意：局中人2在所有状态下的偏好是一样的，而局中人1在状态β和状态γ下的偏好是一样的。



因此，在状态γ下，每一个局中人都知道对方的偏好，而局中人2知道：局中人1知道他的偏好。但是，局中人1并不知道：局中人2知道他的偏好（局中人1认为可能处于状态β，此时局中人2并不知道是处于状态α还是状态β。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

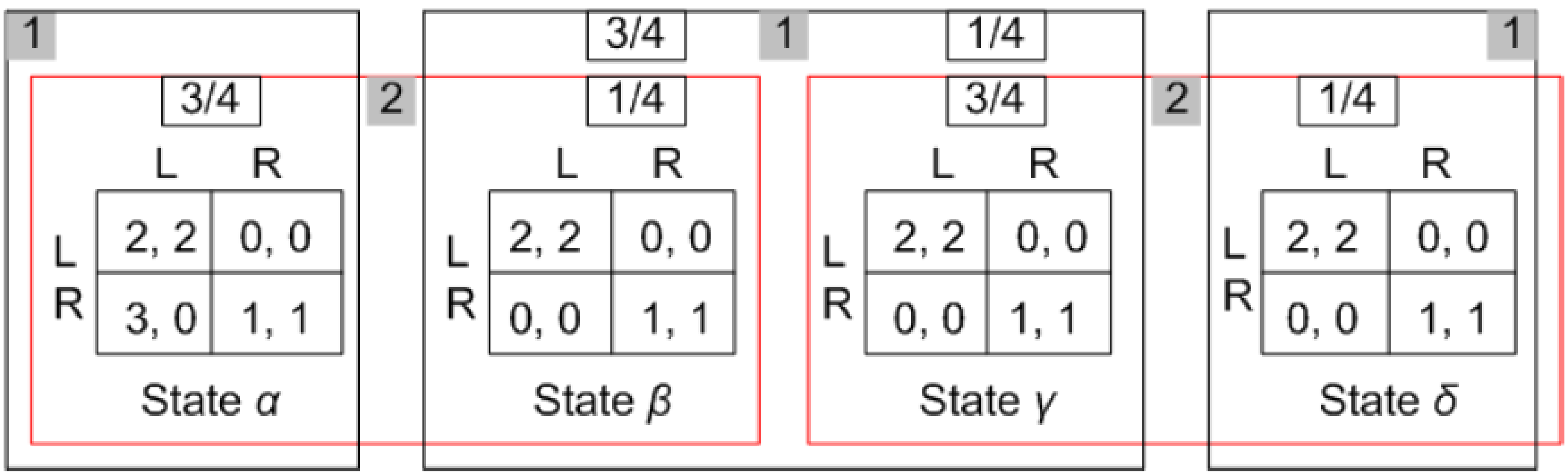
如果两个局中人都得知是在状态γ下，那么**(L, L)**和**(R, R)**就都是纳什均衡。



然而，整个博弈只有惟一一个纳什均衡**(R, R)**：(1) 考虑局中人1在状态α下的选择，**R**是占优策略。(2) 考虑当局中人2知道是处于状态α还是β下，她的选择。若局中人1在状态下，**R**是更好的。(3) 考虑当局中人1知道是处于状态β还是γ下，她的选择。若两个局中人处在状态α和β下，**R**是更好的。(4) 考虑当局中人2处于状态γ下，他更好的选择是**R**。

2. 博弈论 – 贝叶斯博弈

例5 (续). 将上述的博弈做如下拓展。在状态γ下，局中人2知道局中人1的偏好，但是局中人2并不知道：局中人是否知道局中人2知道局中人1的偏好（局中人2并不知道是处于状态 γ 还是 δ 下；若处于状态γ下，局中人1知道可以是状态β；若是状态β，局中人会以为是状态α，此时，局中人1的偏好是不同）。

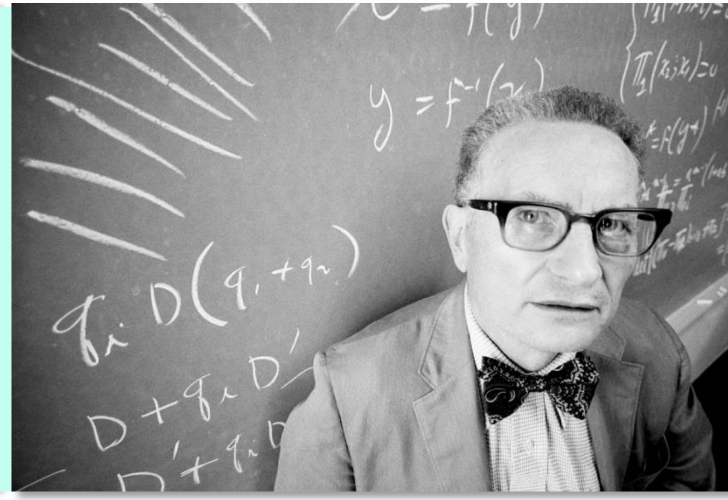


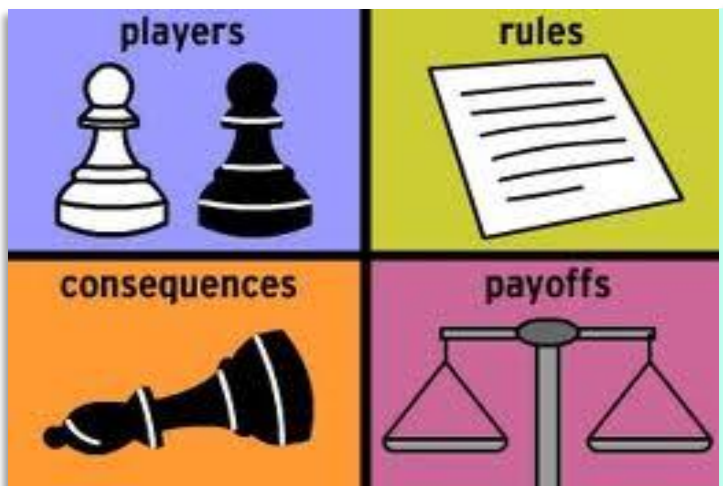
综上，整个博弈还是只有惟一一个纳什均衡**(R, R)** 。

2. 博弈论 - 小结

"To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory."

-- Paul Samuelson
Nobel Laureate (1991)





博弈：参与人
策略
目标

非合作博弈：策略选择过程

合 作 博 弈：最后结果
（过程中是强制性的）