运筹学通论I

胡晓东

应用数学研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

考虑线性规划的如下标准型:

Min $c^T x$ $\quad$ c 是一个 n-维整数向量

s.t. $Ax = b$, $\quad$ A 是一个 $(m\times n)$-维整数矩阵，其中$m < n$;

$x \geq 0$.

设 X 是一个非空的可行解集。则存在有限多个极点, $x_1, x_2, \ldots, x_k$，其中 $k > 0$，和有限多个极方向，$d_1, d_2, \ldots, d_l$ 其中$l \geq 0$。因而对任意一个解 $x\in X$, 都有$x = \sum \lambda_i x_i + \sum \mu_j d_j$, 其中 $\sum \lambda_i = 1$ 而 $\lambda_i, \mu_j \geq 0$。据此我们可以证明以下定理（证明作为练习留给同学们完成）。

定理 6. 线性规划的最优解是有限的，当且仅当对所有指标 j 都有 $c^T d_j \geq 0$。此时，至少有一个极点是最优解。

1. 线性规划 - 单纯形法（续一）

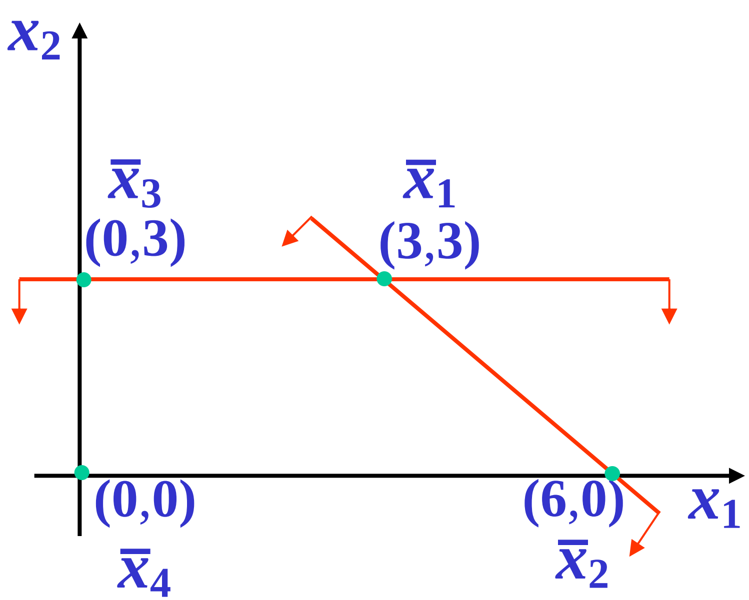
假设矩阵(A, b)的秩为 $\mathrm{rank}(A) = m$。当我们将矩阵 A 的列进行适当调整以后, 记 $A = [B, N]$，其中矩阵B 是一个 $m\times m$-维的可逆矩阵，而矩阵 N 是一个 $m\times(n-m)$-维的矩阵。则我们得到一个基础可行解 $x = [x_B, x_N]$，其中 $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$, 而 B^{-1} 是矩阵 B 的逆矩阵。

若 $x_B \geq 0$，则称 x 是一个基础可行解, B 是一个基础矩阵，而 N 是非基矩阵, x_B 的分量是基变量，而 x_N 的变量为非基变量。若 $x_B > 0$，则称 x 非退化的基础可行解；否则称其为退化的基础可行解。

一般来讲， 基础可行解的个数不超过 $\binom{n}{m}$, 亦即从 n 个物品中选取 m 件物品的不同方法数目。

1. 线性规划 - 单纯形法（续二）

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\le 6\\
x_2 &\le 3\\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
\quad\longleftrightarrow\quad
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad &= 6\\
x_2 \qquad +x_4 &= 3\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$



$\bar{x}_1=(3,3,0,0),\ J=\{1,2\}$

$\bar{x}_2=(6,0,0,3),\ J=\{1,4\}$

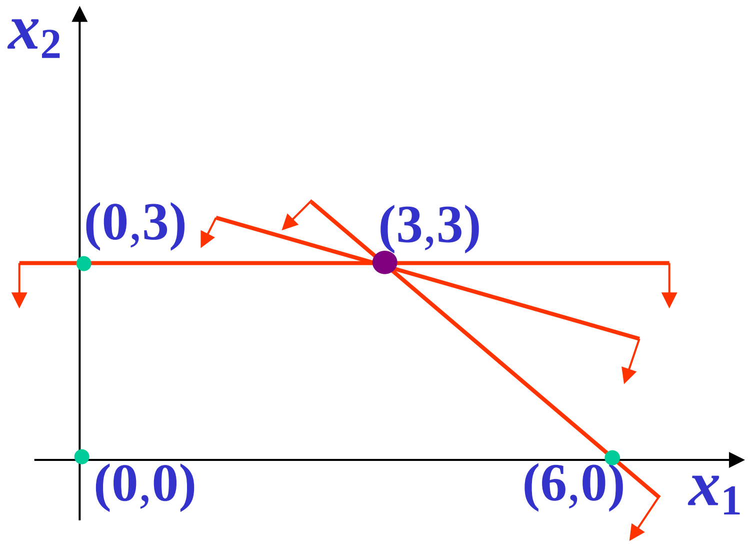
$\bar{x}_3=(0,3,3,0),\ J=\{2,3\}$

$\bar{x}_4=(0,0,6,3),\ J=\{3,4\}$

$\bar{x}_5=(0,6,0,-3),J=\{2,4\}$

1. 线性规划 - 单纯形法（续三）

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 9 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$



$\bar{x}_1 = (3,3,0,0,0), J = \{1,2,3\}$

$\bar{x}_1 = (3,3,0,0,0), J = \{1,2,4\}$

$\bar{x}_1 = (3,3,0,0,0), J = \{1,2,5\}$

退化的基础可行解

1. 线性规划 - 单纯形法（续四）

定理 7. 点 x 是一个基础可行解当且仅当它是一个极点。

证明 (练习)：(i) 假设 x 是一个极点，且 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ 是其大于 0 的变量，其他分量皆为0。利用反证法我们可以证明，$a_1, a_2, \ldots, a_p$ 是线性无关的 p 个向量。否则有 $\Sigma_j \gamma_j a_j = 0$，因而 x 可以表示为可行域中两个点 u 和 v 的凸组合，其中

$$u_j = x_j + \lambda \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \text{且}$$

$$v_j = x_j - \lambda \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p。 \qquad \text{(产生矛盾！)}$$

现在我们可以从向量$a_{p+1}, \ldots, a_n$ 选取 $m-p$ 个向量, 它们与向量 $a_1, a_2, \ldots, a_p$, 共同组成一个线性无关集合。不失一般性，假设这些向量是 $a_{p+1}, \ldots, a_m$。再根据定义，即可知，$a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_m$ 构成了一个基础可行解。

1. 线性规划 - 单纯形法（续五）

证明(练习)：(ii) 假定 $x=[x_B\ 0]$ 是一个基础可行解。利用反证法，假设 $x=\lambda u+(1-\lambda)v$，$0<\lambda<1$，且 $u=[u_B\ u_N]$ 和 $v=[v_B\ v_N]$ 都是可行解。因而有

$$x=[x_B\ 0]=\lambda[u_B\ u_N]+(1-\lambda)[v_B\ v_N]$$

又因为 u_N 和 $v_N\geq 0$，所以有 $u_N=0$ 和 $v_N=0$。由此可得

$$b=Au=Bu_B+Nu_N=Bu_B,\ u_B=B^{-1}b,$$

即有 $x=u$。类似地有 $x=v$。故 x 是一个极点。

注意：每一个基础可行解与一个极点对应，然而，有可能不止一个基础可行解都对应于同一个极点。在退化情形下，就会出现这种情况。

1. 线性规划 - 单纯形法（续六）

定理 8. 每一个非空多面体集合所定义的可行区域都至少有一个基础可行解。而且，如果相应的线性规划存在一个最优解，那么它有一个最优解是基础可行解。

证明 (练习)：(i) 假定 x 是一个可行解，并设其正的分量为 $x_1, \ldots, x_p$，其他分量皆为0。注意，如果 $a_1, \ldots, a_p$ 是线性无关的，那么 x 即是一个基础可行解。现假设$a_1, \ldots, a_p$ 是线性相关的，$\Sigma_j \gamma_j a_j = 0$。我们构造一个可行解 y 如下：

$$y_j = x_j - \lambda \gamma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad 且$$
$$y_j = 0, \qquad j = p+1, \ldots, n,$$

其中 $\lambda = \min \{ x_j/\gamma_j : \gamma_j > 0\} = x_k/\gamma_k > 0$。容易验证，$y$ 是一个可行解，且它最多有 $p-1$ 个正分量。

1. 线性规划 - 单纯形法（续七）

证明 (练习)： (ii) 假设 x 是一个最优解。如果它不是一个基础可行解，那么它可以表示为两个基础可行解的凸组合。其中目标函数值小的基础可行解一定也是一个最优解。定理证毕。

我们是否可以将所有的基础可行解都列出来，然后找出目标函数值最少的那个基础可行解（即一个最优解）呢？回答是否定的，这是因为

(1) 基础可行解的数目很大；
(2) 这个方法也没有告诉我们线性规划无有限最优解的情形；
(3) 这个方法也没有告诉我们线性规划无可行解的情形。

1. 线性规划 - 单纯形法（续八）

假设我们有一个基础可行解 $x_0^T = [B^{-1}b\ \ 0]$。其目标函数值为$z_0 = c_B B^{-1}b$。现考虑任意一个可行解 $x^T = [x_B\ x_N]$。 则我们有 $b = Ax = Bx_B + Nx_N$。因而 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - \sum_j B^{-1}a_j x_j$，其中 $j \in J$ 对应的是非基变量。

再用 z 表示可行解 x 的目标函数值。 则有

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - \sum_j B^{-1}a_j x_j) + \sum_j c_j x_j$$

$$= z_0 - \sum_j (c_B B^{-1}a_j - c_j)\, x_j = z_0 - \sum (z_j - c_j)\, x_j,$$ 其中 $z_j = c_B B^{-1}a_j$。

因为我们希望最小化目标函数值 z，所以当 $z_j - c_j > 0$ 时，我们增加 x_j 的值有助于减少当前的目标函数值。 实际上，此时将 x_j 的值增加得愈多愈好。这里我们可以选择指标 j 与其对应的值 $z_j - c_j$ 最大。

1. 线性规划 - 单纯形法（续九）

然而，当将 x_j 的数值增加以后，当前的基础可行解就变成为:

$$x_B = B^{-1}b - \sum_j B^{-1}a_j x_j = B^{-1}b - B^{-1}a_j x_j = b' - y_j x_j,$$

其中 $y_j = B^{-1}a_j$， $b' = B^{-1}b$。

如果 $y_{ij} \leq 0$, 那么相应的分量 x_i 就会随着 x_j 的增加而增加，分量 x_i 仍然是非负的。但是如果 $y_{ij} > 0$, 那么 x_i 就会随着 x_j 的增加而减少。为了保证变量是非负的，我们只能增加 x_j 的值使得有一个基础变量 x_r 的值减少到0，亦即

$$\frac{b'_r}{y_{rj}} = \min\left\{ \frac{b'_i}{y_{ij}} \,\middle|\, y_{ij} > 0 \right\}。$$

在非退化情形下，$b'_r > 0$, $x_j = b'_r / y_{rj} > 0$ ，$x_r = 0$。最重要的结果是 $z < z_0$，也就是说目标函数值严格地减少了。

1. 线性规划 - 单纯形法（续十）

随之产生的两个问题是：

(i) 如果每一个非基变量 x_j 都满足 $z_j-c_j\leq 0$，那么该怎么办呢？此时不需做任何事，当前的基础可行解即是一个最优解。

(ii) 如果所有的分量都不大于0，$y_j\leq 0$，那么又该怎么办呢？此时，也不需要做任何事，所解的线性规划问题不存在有界最优解。

定理 9. 任给一个非退化的线性规划问题，单纯形方法可以在有限步迭代后终止，且或者输出一个最优的基础可行解，或者确认所给问题不存在有限最优解。

1. 线性规划 - 单纯形法（续十一）

然而要实现上面的算法，还需要考虑如下两个问题：

- 如何求得一个初始的基础可行解呢? (有很多种方法)
- 如何处理退化的情形呢? (有很多种方法)

线性不等式组的求解

$Ax \le b$,　　A 是一个 $(m\times n)$-维矩阵，

b 是一个 m-维向量，其中$m < n$

可以转化为求如下线性规划问题

$$\min \quad y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

s.t. $Ax + y = b$, A 是一个 $(m\times n)$-维矩阵，

y 和 b 都是 m-维向量，其中 $y \ge 0$, $m < n$

练习题：求满足 $x_1 - x_2 \le 5$, $- x_1 - 2x_2 \le -3$ 的 x_1 和 x_2 。

1. 线性规划 - 单纯形法（续十二）

Dantzig 原来以为这样一种简单的方法可能效率很低：沿着一个棱从一个极点到一个极点的移动，在到达最优点时，可能要花很长时间。他后来发现在几乎所有的情况，寻找问题的解仅仅需要通过约束个数那么多次的移动就可以完成。

Haimovich 定理[1983] 在平均意义下，单纯形法从一个基础可行解到另一个基础可行解的搜索步数不会超过

$\mathbf{Min}\{\, n/2,\ (m-n+1)/2,\ (m+1)/8 \,\}$ 对于 $\max\{\, cx \mid Ax\leq b \,\}$ and

$\mathbf{Min}\{\, n/2,\ (m+1)/2,\ (m+n+1)/8 \,\}$ 对于 $\max\{\, cx \mid Ax\leq b,\ x\geq 0 \,\}$

Smale 定理 [1983] 对任意固定的 m，和线性规划问题 $\max\{c^T x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$，单纯形法从一个基础可行解到另一个基础可行解的平均搜索步数不会超过 $O((\log n)^{m^2+m})$。

1. 线性规划 - 单纯形法（续十二）

Klee 和 **Minty** 将 n-维立方体的一个变形做为一个线性规划问题的可行解区域，证明单纯形算法，在最坏情况下，会搜索到可行解区域的所有 2^n 个极点。

Klee-Minty 定理[1972] 采用**Dantzig** 给出的极点移动策略的单纯形法不是一个多项式时间算法。

一个巨大的挑战： 设计一个极点移动策略使得单纯形法是一个多项式时间算法；或者证明不存在这样的策略。

练习. 设 x 是线性系统，$Ax = b, x \geq 0$，的一个极点。则存在一个费用向量 c 使得 x 是线性规划 $\min\{ c^T x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ 的唯一最优解。

1. 线性规划-椭球算法

在1979年春天，**L. G. Khachian** 证明了，求解线性规划的一个算法是多项式时间算法，从而解决了一个长期未解的公开难题。他的工作是基于其他学者研究非线性规划的成果。他所采用的方法与以前处理线性规划的算法完全不同，该方法完全摒弃了利用线性规划的组合结构的套路。

为了讨论和表述简单起见，我们考虑如下三个问题：

线性规划: 求解最小值问题 $\min\{\, c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$; (**LP**)

线性不等式组: 求解不等式组 $Ax \leq b$; (**LI**)

线性严格不等式组: 求解不等式组 $Ax<b$. (**LSI**)

定理 10. 若存在求解线性严格不等式组 **LSI** 的多项式时间算法，则存在求解线性规划 **LP** 的多项式时间算法。

1. 线性规划-椭球算法 (续一)

设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是线性规划的一个基础解，另令
$\alpha = \max\{|a_{ij}| \mid i, j\}$，$\beta = \max\{|b_j| \mid j = 1, \ldots, m\}$ 。

则有 $|x_j| \le m!\alpha^{m-1}\beta$。这对非基变量也成立，因为 $x_j = 0$。对于基变量，x_j 是矩阵B^{-1} 中元素与向量b 中元素相乘的 m 项之和。根据线性规划问题输入的整数性假设，分子至少是1，而行列式为矩阵 A 的 $m-1$个元素的 $(m-1)!$ 项乘积的和。

再记 $L = mn + \lceil \log|P| \rceil$，其中 P 是A, b 和 c 中非0 整数的乘积。L 称为线性规划 LP 问题的输入规模。

定理 11. 线性规划 LP 的所有基础可行解都是有理数向量，且它们分量和分母的绝对值都不超过 2^L。

1. 线性规划-椭球算法(续二)

引理 6. 假设线性规划LP的两个基础可行解 x 和 y 满足 $k2^{-2L} < c^Tx, c^Ty \le (k+1)2^{-2L}$ 其中 k 是一个整数，则 $c^Tx=c^Ty$.

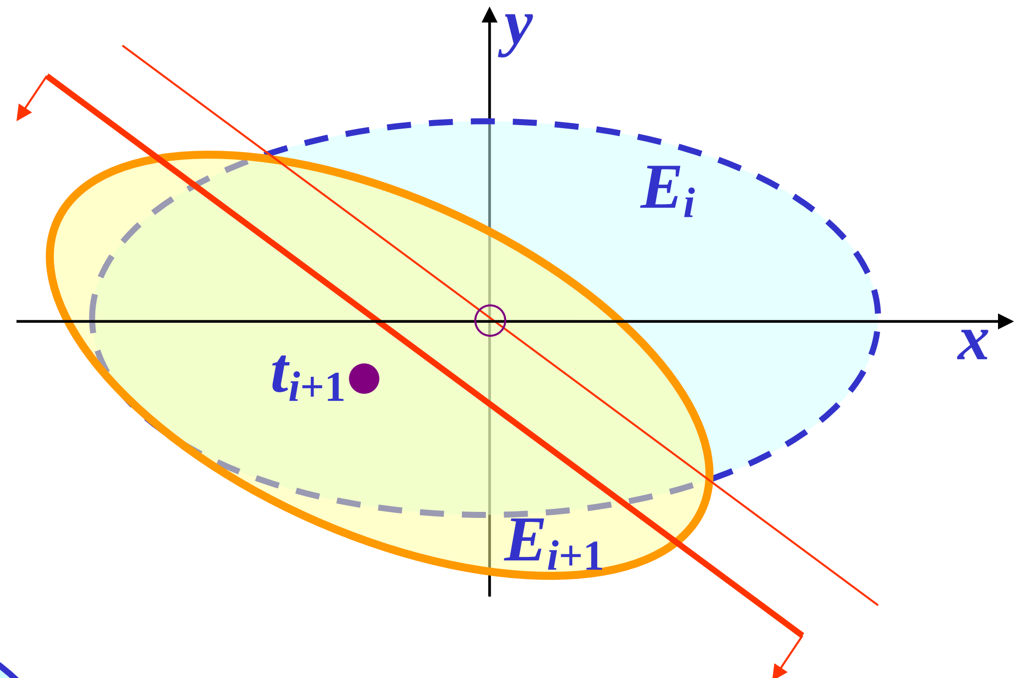
引理 7. 线性规划 LP 存在多项式时间算法当且仅当线性不等式组 LI 存在多项式时间算法。

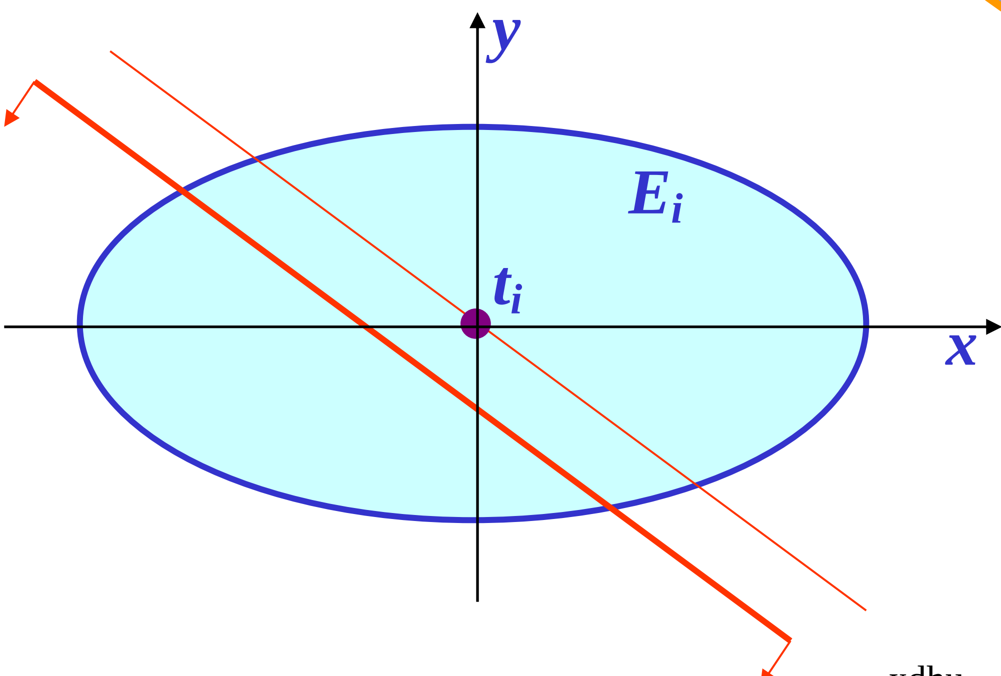
引理 8. 线性不等式组 LI $Ax \le b$ 有解当且仅当严格线性不等式组 LSI $Ax < b+\varepsilon$ 有解，其中 $\varepsilon = 2^{-2L}$。

引理 9. 如果存在求解严格线性不等式组 LSI 的多项式时间算法，则存在求解线性不等式组 LI 的多项式时间算法。

1. 线性规划-椭球算法(续三)

求解严格不等式组 LSI 的迭代算法的主要思想是：如果有一个解，那么让椭球始终包含一个解。





在每一次迭代步骤中，用一个更小的椭球替代现有的椭球，而且新的小椭球包含一个解（若解存在）。

1. 线性规划-椭球算法(续四)

进行足够多次这样的迭代步骤以后，将椭球的体积逐渐地缩小，我们或者发现一个解，或者确认不存在解。

引理 10. 椭球算法在进行了 i 次迭代以后, 椭球 E_i 的体积为 $\mathrm{Vol}(E_i) < 2^{-1/(n+1)}\mathrm{Vol}(E_{i-1})$，其中 $i > 2$.

引理 11. 如果输入规模为L的线性严格不等式组LSI 有解，则位于球体 $\|x\| \le n2^L$ 的解的体积至少是 $2^{-(n+2)L}$。

定理 12. 经过 $32n(n+1)L$ 次迭代步骤，修改的椭球算法或者收敛到一个解，或者确认严格线性不等式组无解。

1. 线性规划 - 对偶定理

每一个 (原始) 线性规划问题都有一个与之紧密相连的 (对偶) 线性规划问题，它有一些非常重要的性质。求对偶问题可以帮助我们求解原始问题的解，对偶问题的解有许多非常重要的性质，这些性质为我们提供了原始问题最优解的一些非常有用的性质。

原始问题		对偶问题
$\text{Min } c^T x$ $\text{s.t. } Ax = b,$ $x \geq 0$	标准型	$\text{Max } b^T w$ $\text{s.t. } A^T w \leq c,$ w 无限制
$\text{Min } c^T x$ $\text{s.t. } Ax \geq b,$ $x \geq 0$	规范型	$\text{Max } b^T w$ $\text{s.t. } A^T w \leq c,$ $w \geq 0$

1. 线性规划 - 对偶定理（续一）

我们下面给出原始问题与对偶问题之间的关系。

原始问题

Min $c^T x$

s.t. $a_i^T x = b_i$

$a_j^T x \ge b_j$

$x_k \ge 0$

x_l 无限制

对偶问题

Max $b^T w$

s.t. w_i 无限制

$w_j \ge 0$

$w A_k \le c_k$

$w A_l = c_l$

其中 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = A_{m\times n} = (A_1\ A_2 \ldots A_k \ldots A_n)$

练习 对偶问题的对偶问题是原始问题。

1. 线性规划 - 对偶定理（续二）

定理 10. 若原始问题有最优解，则它的对偶问题也有最优解，且两个最优解的目标函数值相等。

证明 (练习) 设 x 和 w 分别是原始问题标准型和其对偶问题的可行解。则有$c^Tx \geq w^TAx = w^Tb$。这说明两个问题都不可能有无界的解。由单纯形算法可知，原始问题有一个最优解 x 满足 $c^Tx = c_B^Tx_B = c_B^TB^{-1}b$。因此对偶问题有一个最优解$c_B^TB^{-1}$（为何？单纯形算法的最优解判定条件$c_BB^{-1}a_j - c_j \leq 0, j \in N$, 以及 $c_BB^{-1}a_i - c_i = 0, i \in B$, 即 $c_BB^{-1}B - c_B = 0$）。

原始 \ 对偶	有限最优	无界	无解
有限最优	♠	×	×
无界	×	×	♣
无解	×	♣	♥

1. 线性规划 - 对偶定理（续三）

互补松弛定理 向量x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解当且仅当

$$u_i \equiv w_i\,(a_i^T x - b_i) = 0,\ \text{所有}\ i;\quad v_j \equiv (c_j - w^T a_j)\,x_j = 0,\ \text{所有}\ j\ 。$$

原始问题		规范型	对偶问题	
Min	$c^T x$		Max	$w^T b$
s.t.	$Ax \ge b,$		s.t.	$w^T A \le c,$
	$x \ge 0$			$w \ge 0$

上述定理表明，当向量 x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解时，若对偶问题中的约束不等式不取等号，则规范型中原始问题相对应的变量一定取 0。对称地有，若非负变量是严格大于 0 的，则相对应的 约束不等式一定取等号。

1. 线性规划 - 对偶定理（续四）

互补松弛定理 向量x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解当且仅当

$$u_i \equiv w_i (a_i^T x - b_i) = 0,\ \text{所有 } i;\quad v_j \equiv (c_j - w^T a_j)\, x_j = 0,\ \text{所有 } j\text{。}$$

证明 (练习)：根据对偶性，我们有 $u_i \geq 0$ 和$v_j \geq 0$，对所有的指标 $i,\ j$。若令 $u = \sum u_i \geq 0$ 和 $v = \sum v_j \geq 0$。则有

$u = 0$ 且 $v = 0$ 当且仅当定理中的条件成立。

下面仅需要验证 $u + v = c^T x - w^T b$。因为条件成立当且仅当 $u + v = 0$，或者等价地有 $c^T x = w^T b$。

1. 线性规划 - 对偶定理（续五）

现在，我们看一下线性规划问题及其（最优）解的经济学解释。

原始问题	对偶问题
$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min y = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i=1,2,\ldots,m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ge c_j,\ \ j=1,2,\ldots,n$
$x_j \ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,n$	$w_i \ge 0,\ \ i=1,2,\ldots,m$

线性规划问题可以视为一种资源分配模型：原始问题有 n 种活动和 m 种资源，c_j 表示活动 j 的单位收入，b_i 表示资源 i 的最大可用量，a_{ij} 表示资源 i 在活动 j 中的单位消耗量，x_j 表示活动 j 开展的量，w_i 表示资源 i 的单位价值（影子价格）。

1. 线性规划 - 对偶定理（续六）

对偶定理告诉我们，当目标函数有限时，一定有

$$\text{收入} = z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{n} b_i w_i = y = \text{资源的价值}$$

当原始问题的解 $\{x_j\}$ 与对偶问题的解 $\{w_i\}$ 分别是最优解时，$z = y$，亦即

收入= Σ 资源 *i* 的数量 × 每单位资源 *i* 产生的收入金额

换言之，如果从全部活动中得到的总收入小于资源的总价值，相应的原始解和对偶解都不是最优的；只有当资源完全被利用时，才能实现收入最大化：收入的金额 = 资源的价值 。

经济学家通常将对偶问题的最优解 $\{w_i\}$ 称为**影子价格**，它是在最大收入的活动安排下，对资源所作的一种结果估计：当某种资源的市场价格低于影子价格时，应买进该种资源安排活动将使得收入增加；反之，应卖出该种资源。

1. 线性规划-对偶定理（续七）

成本 $= \sum a_{ij} w_i$

$= \sum$ 每单位活动 j 对资源 i 的需求量 $\times$ 资源 i 的单位成本

实际上，对偶变量 w_i 可视为每单位资源 i 的估算成本。因而，

$\sum a_{ij} w_i$ 可视为产生一个单位活动 j 所需全部资源的估算成本；

单纯性算法求线性规划（最大值）问题的最优性条件表明：

仅当未用（非基）活动 j 的简约费用为负时 $z_j - c_j < 0$，对它增加投入才能够提高收入。换言之，如果一项活动的单位收入超过它的单位估算成本，那么增加该项活动的投入可以增加收入。