运筹学通论I

胡晓东

应用数学研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

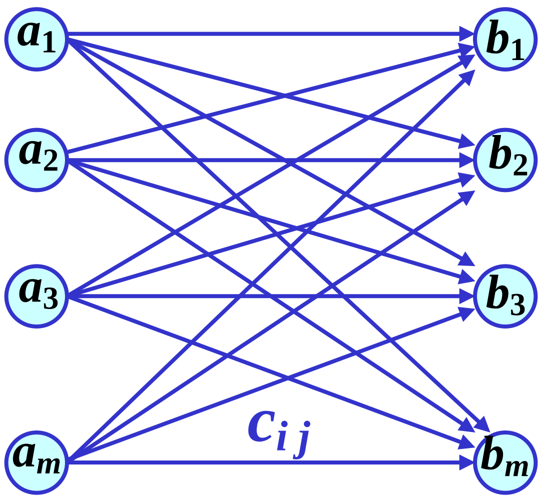
Institute of Applied Mathematics
Chinese Academy of Sciences

1. 线性规划 - 运输问题

运输问题是一大类特殊的线性规划问题。这类问题极其推广形式，**网络流问题**，都有一些特殊的结构，因而

- 可以设计出更简单和有效的求解算法；
- 可以帮助我们从直观上更容易理解求解线性规划的技巧，特别是单纯形法。

假设我们有 m 个源点，在每个源点处有 a_i 个单位的（同一种）货物，另有 n 个终点，在每一个终点处，需要 b_j 个单位的货物。从每一个源点 i 到每一个终点 j 都有一条边相连，其权为 c_{ij}。运输问题是求将货物从源点运到终点的一个运输方案使其费用最小。



1. 线性规划 - 运输问题（续一）

我们用变量 x_{ij} 表示经过边 (i, j) 的货物流量。假设在源点处的货物供给量等于终点处货物的需求量。

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\textbf{Min} & c_{11}x_{11}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \\
\textbf{s.t.} & x_{11}+\ \ldots\ +x_{1n} & & & & & =a_1 \\
 & & x_{21}+\ \ldots\ +x_{2n} & & & & =a_2 \\
 & & & \ldots\ldots & & & \\
 & & & & & x_{m1}+\ldots+x_{mn} & =a_m \\
 & x_{11} & +x_{21} & & +x_{m1} & & =b_1 \\
 & & & \ldots\ldots & & & \\
 & x_{1n} & +x_{2n} & & +x_{mn} & & =b_n
\end{array}
$$

练习 证明约束矩阵是全幺模的（亦即，矩阵的每一个行数与列数相等的子阵的行列式的值等于 -1, 0 或者 1）。

1. 线性规划 - 运输问题（续二）

运输问题的一个重要的特殊情形称为**指派问题**。假定有 m 个工人和 m 项任务。若指派工人 i 去完成任务 j，其产生的费用为（工资）c_{ij}。我们希望付给这些工人尽可能少的工资以完成这些任务。若一个基础可行解 $x_{ij} = 1$，则表示指派工人 i 去完成任务 j, $x_{ij} = 0$ 表示不指派工人 i 去完成任务 j。

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
&\text{s.t. } \textstyle\sum_j x_{ij} = 1, && i=1,\dots,m; \\
&\qquad \textstyle\sum_i x_{ij} = 1, && j=1,\dots,m; \\
&\qquad\quad x_{ij} = 1 \text{ 或 } 0, && i, j=1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
&\text{s.t. } \textstyle\sum_j x_{ij} = 1, && i=1,\dots,m; \\
&\qquad \textstyle\sum_i x_{ij} = 1, && j=1,\dots,m; \\
&\qquad\quad x_{ij} \geq 0, && i, j=1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

下面的定理说明，我们通过松弛变量 x_{ij} 的整数性约束条件，将该问题化成**线性规划问题**的标准型，从而求得原问题的一个最优解。

1. 线性规划 - 运输问题（续三）

定理 若A为全幺模矩阵，b为整数向量，则线性规划

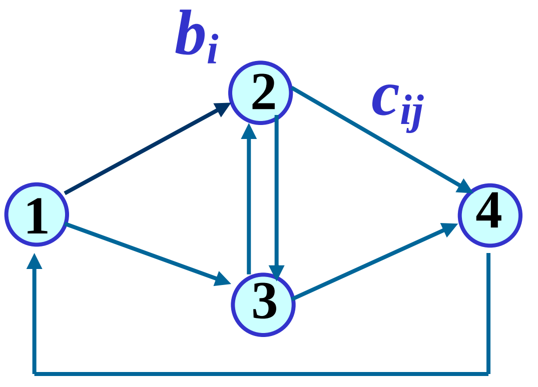
Min $c^T x$，**s.t.** $Ax = b$, $x \geq 0$ 存在一个最优解，其向量都是整数。

证明. 已经知道，如果线性规划有有限最优解，那么一定存在一个基础可行解是最优解。假设这个基础可行解是 $x = [x_B, x_N]$，其中 $x_B = B^{-1}b$, $x_N = 0$, 而 B^{-1} 是矩阵 B 的逆矩阵。注意，$B^{-1} = B^*/\|B\|$，其中B^* 是 B^*的伴随矩阵。另外，全幺模矩阵的子矩阵也是全幺模的，故 $\|B\|$ 及 B 的所有代数余子式均为 -1, 0 或者 1， B^{-1} 为一个整数矩阵，即有基础可行解 x 是一个整数解。

不过求解指派问题，我们可以不借助解**线性规划**的算法，因为它具有特殊的性质，因而有更有效的求解算法 – 匈牙利算法。

1. 线性规划 - 最小费用流

一个有向网络 G 是由 n 个节点及 m 条连接两个节点的弧构成。



每一个节点 i 都赋一个权值 b_i，它表示在该节点处有货物可供给若 $b_i > 0$ （称为源点）或者需要货物若 $b_i < 0$ （称为汇点）。当 $b_i = 0$ 时，该节点处既不需要货物也不能提供货物（称为中间节点）。 每一条弧 (i, j) 都赋有一个权重 c_{ij}，它表示通过这条弧的运输货物的单位成本。

1. 线性规划 - 最小费用流（续一）

最小费用流问题是求将已有的货物供给运送到所需的网络节点处使得所需费用最小。我们不妨假定，网络中货物的供给量与需求量是相等的，亦即, $\sum_i b_i = 0$。令 $x_{ij} \geq 0$ 为经弧 $(i,\ j)$ 的货物运送量。

$$\textbf{Min} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\textbf{s.t.} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

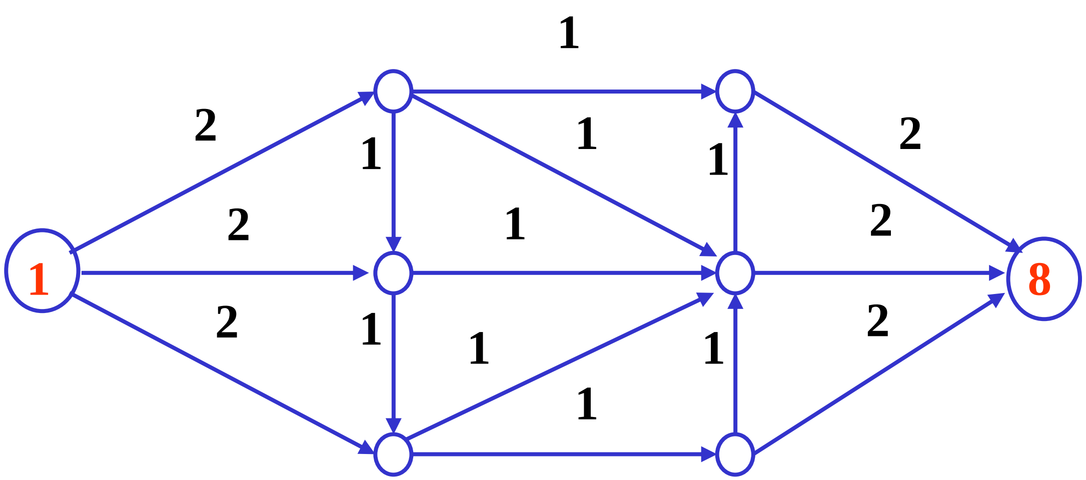
$$x_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n。$$

我们称上述等式约束为**流守恒等式**，它表示在网络中既不会产生新的流量，已有的流量也不会消失。

练习. 如何处理 $\sum_i b_i \neq 0$ 的情形呢？

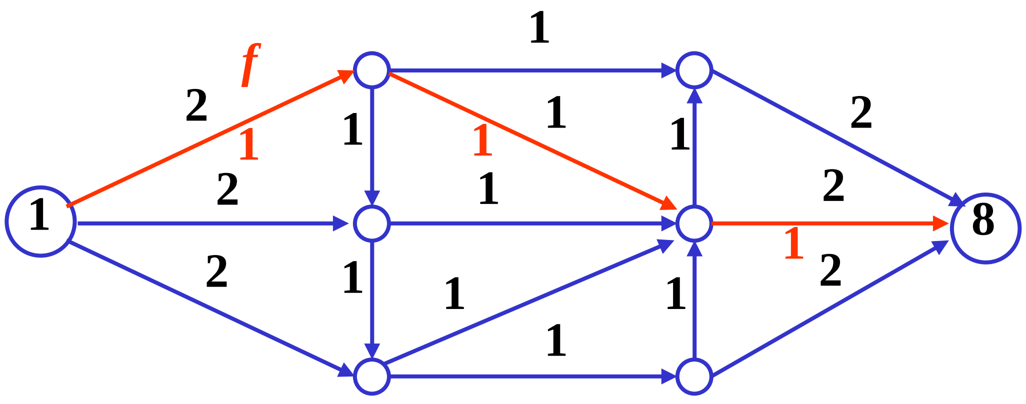
1. 线性规划 - 最大流

考虑一个有 n 个节点和 m 条弧的网络。假设网络中有一个单商品（货物）流。每一条弧 (i, j) 有一个流量的上界 b_{ij}（称为**容量**）。**最大流问题**是求从节点 1 到节点 n 的具有最大流量的货物流，这里并不涉及费用的问题。我们用 $x_{ij} \geq 0$ 表示流经弧 (i, j) 的流量。注意，令所有 $x_{ij} = 0$，即可得到该问题的一个流量 $f = 0$ 的平凡可行解。



左图给出了**最大流问题**的一个实例。

1. 线性规划 - 最大流（续一）



左图例给出了一个可行流。它的最大流又是什么呢？

Max f

s.t. $\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} - f = 0, \quad i=1;$

$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} + f = 0, \quad i=n;$

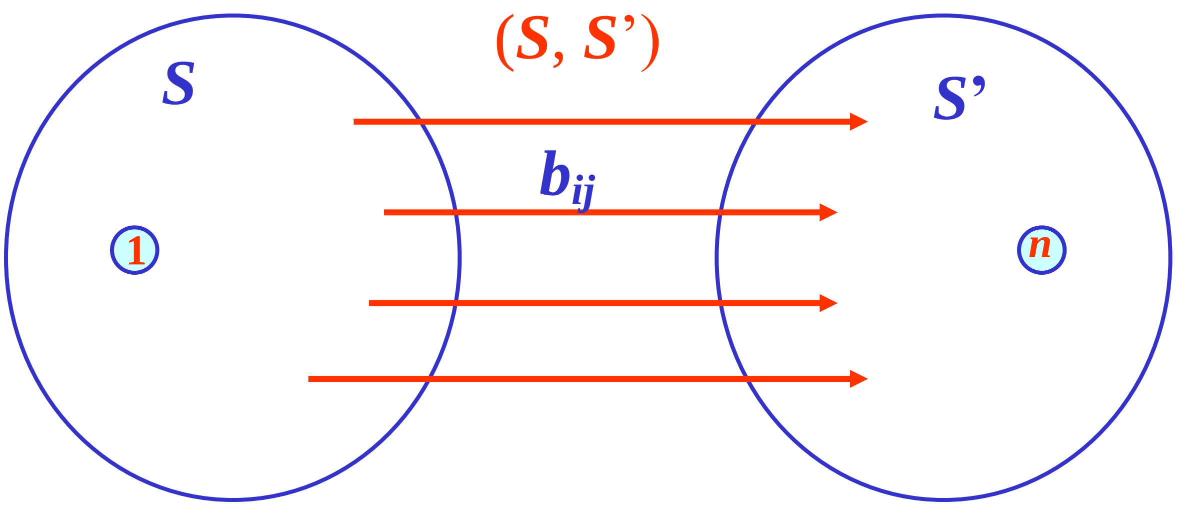
$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0, \quad i \neq 1$ 或者 n;

$x_{ij} \leq b_{ij}, \quad i, j=1, \dots, n$。

$0 \leq x_{ij}, \quad i, j=1, \dots, n$。

1. 线性规划 - 最大流（续二）

称节点子集合 S 是一个将节点 n 与节点 1 分离的**割集**若 S 包含节点 1 但是不包含节点 n。另用 $(S, S') = \{(i, j) \mid i \in S, j \in S'\}$ 表示割集，其**容量**定义为 $c(S, S') \equiv \sum\{ b_{ij} \mid (i, j) \in (S, S') \}$。



注意，任意一个货物流都必须流经任意一个割集的弧。因而很容易地知道，任意一个货物流的流量都不可能超过任意一个割集的容量。

1. 线性规划 - 最大流（续三）

给前n个约束中的每一个约束都分别关联一个变量 w_i，每一个变量对应一个流守恒等式；另给 n 个容量约束中的每一个关联变量 u_{ij}，即得**最大流问题**的对偶问题：

(对偶问题)　**Min** $\sum u_{ij}\, b_{ij}$

s.t. $w_i - w_j + u_{ij} \geq 0,$　　对所有边 $(i, j) \in E;$

$-w_1 + w_n \geq 1,$

$u_{ij} \geq 0,$　　对所有边 $(i, j) \in E$ 。

$w_i \geq\leq 0,$

Max f

s.t. $\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} - f = 0,$　　$i=1$ ；

$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} + f = 0,$　　$i=n$ ；

$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0,$　　$i \neq 1$ 或者 n ；

$x_{ij} \leq b_{ij},$　　$i, j=1, \ldots, n$ ；

$0 \leq x_{ij},$　　$i, j=1, \ldots, n$ 。

1. 线性规划 - 最大流（续四）

引理 12. 每一个割可以确定一个可行流其割值 $c(S, S')$ 等于最大流问题的对偶解：

$u_{ij}=1$, 当 $i\in S$ 且 $j\in S'$, 否则 0, 且 $w_i=0$, $i\in S$, 否则1。

证明 (练习)：(i) 验证可行性。因为节点 i 和 j 分别可属于 S 或者 S'，所以一共有四种情形需要考虑。在每一种情形中，第一个不等式是很容易验证的，且不等式取严格不等号当且仅当 $i\in S$ 且 $j\in S'$。此外， $w_1=0$ 且 $w_n=0$ 因为 $1\in S$ 而 $n\in S'$, 从而验证了最后一个不等式。

(ii) 验证流量和割值。对偶可行解的目标函数值为

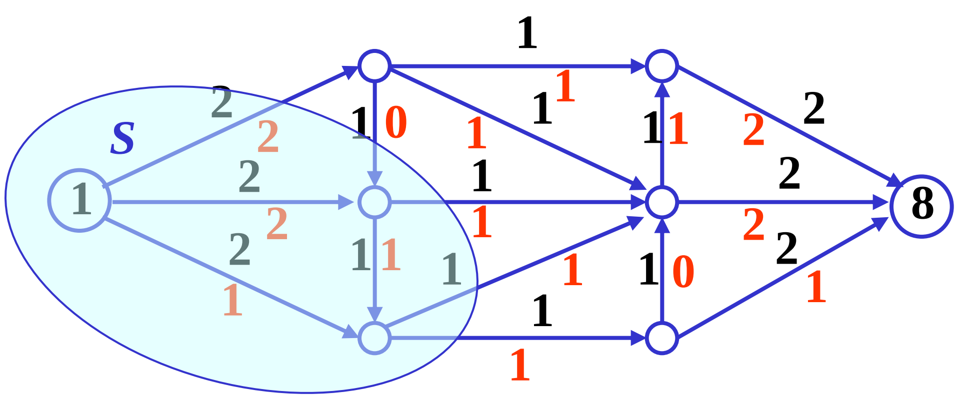
$$\sum_{(i,j)\in E} u_{ij} b_{ij} = \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S \text{ 且 } j\in S'}} b_{ij} = c(S, S').$$

1. 线性规划 - 最大流（续五）

最大流最小割定理 任意一个可行流的流量不会超过其容量 $c(S, S')$。最大流的流量与最小割的容量相等，且可行流 f 与割 (S, S') 分别是最优的当且仅当

$$x_{ij} = 0, \qquad (i, j)\in E \text{ 满足 } i\in S' \text{ 且 } j\in S;$$

$$x_{ij} = b_{ij}, \qquad (i, j)\in E \text{ 满足 } i\in S \text{ 且 } j\in S'。$$



在该例子中，最大流量为 5。 最小割值为 5。注意，割集中每一条**向前弧** 上的流量是饱和的，而每一条**向后弧**上流量为零。

1. 线性规划 - 最大流（续六）

证明 (练习)：首先回忆一下**定理7-8**（对偶和互补松弛性）。等式表示了互补松弛条件，并可表述如下：如果 $i \in S'$ 且 $j \in S$，那么对偶不等式就是严格的：$w_i - w_j + u_{ij} = 1 - 0 + 0 > 0$。因而，相应的变量 x_{ij} 一定取0。类似地，若存在边 $(i, j) \in E$ 使得 $i \in S$ 且 $j \in S'$，则有 $u_{ji} = 1$。因此，相应的约束不等式一定是严格的，亦即 $x_{ij} \le b_{ij}$。

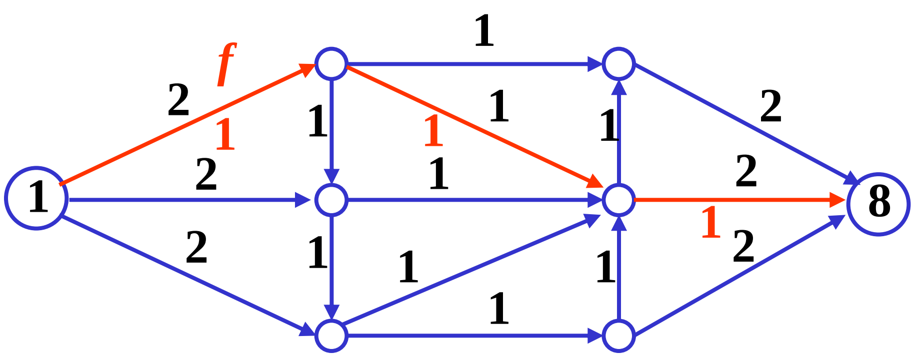
Ford-Fulkerson 标号算法的基本思想如下：搜索一条从节点1到节点 n 的路，流经其上的流量可以增加。当找不到这样的一条路时，互补松弛条件就满足了，算法也就找到了一个最优解。

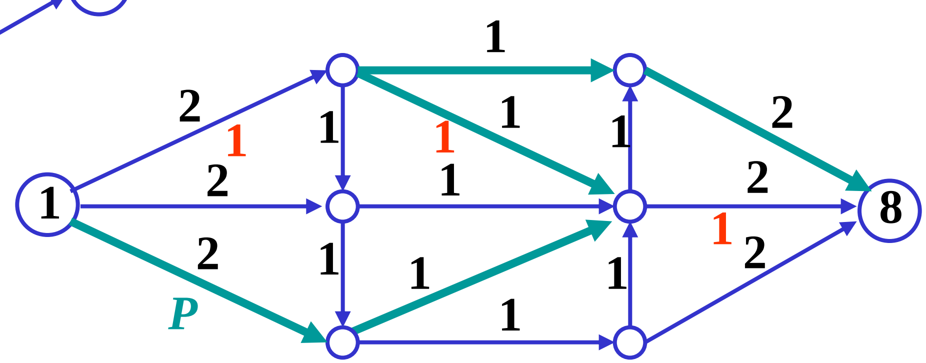
1. 线性规划 - 最大流（续七）

给定一个可行流 f, 设 P 是由有向图 G 导出的无向图中的一条从节点 1 到节点 n 的路。称 P 为一条增广路如果它满足如下条件：

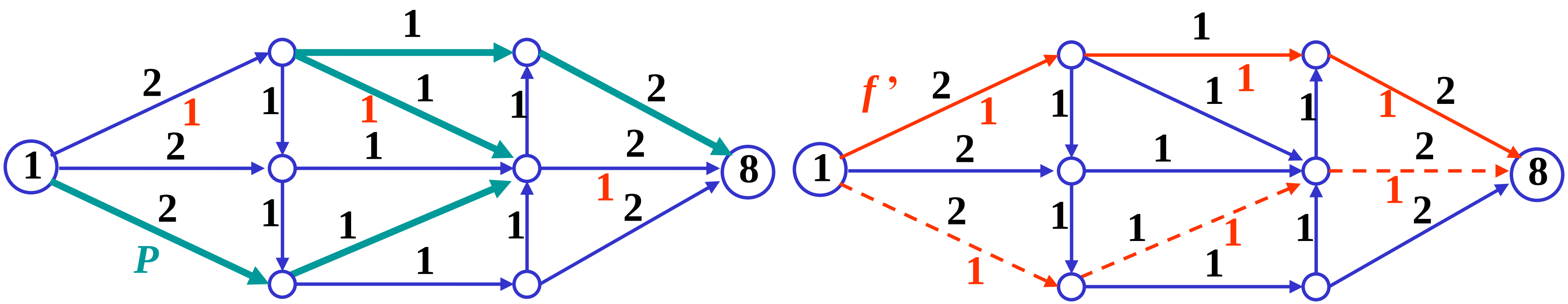
(i) $x_{ij} < b_{ij}$，对P 上每一条前行弧 $(i,\ j)$ (非饱和);

(ii) $x_{ji} > 0$， 对 P 上每一条后退弧 $(i,\ j)$。

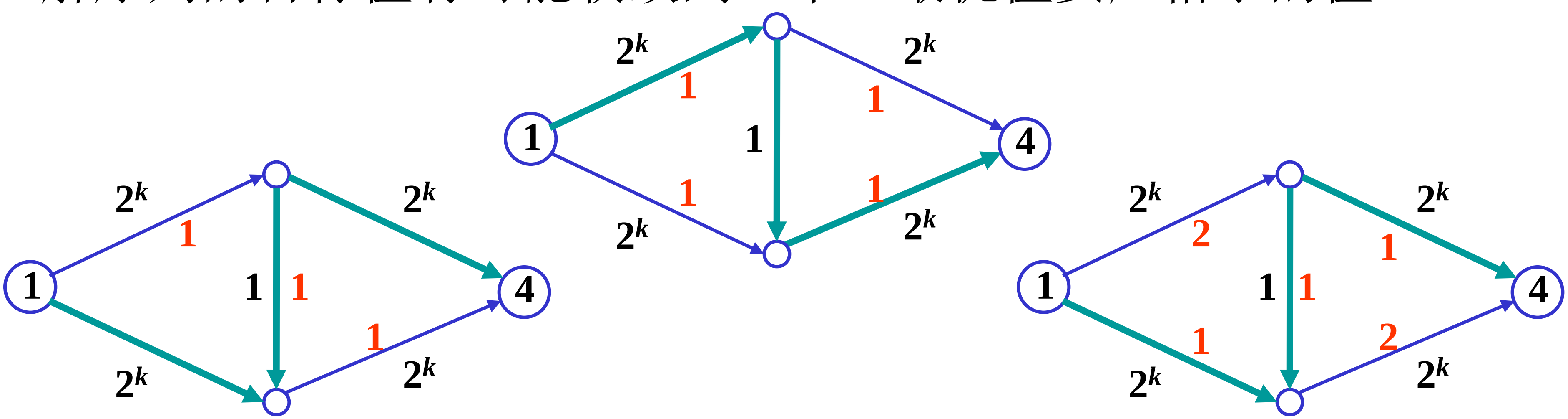




1. 线性规划 - 最大流（续八）



可以证明，若**Ford-Fulkerson 标号算法**终止，则其所得解即为一个最优解。然而，当容量 b_{ij} 为有理数时，该算法有可能无法终止。实际上，还可能出现更糟糕的情况，算法生成的解序列的目标值有可能收敛到一个比最优值要严格小的值。



1. 线性规划 - 目标规划

假设某工厂生产两种产品，受到原材料供应和设备工时的限制。在单件利润等有关数据已知的条件下，要求制定一个获利最大的生产计划。具体数据如下：

产　品	I	II	限量
原材料 (公斤/件)	**2**	**1**	**11**
设备工时 (小时/件)	**1**	**2**	**10**
利润 (元/件)	**8**	**10**	

问该工厂应制造两种产品各多少件，才能获取利润为最大？

1. 线性规划 - 目标规划（续一）

设产品I和产品II的产量分别为 x_1 和 x_2，其线性规划为：

$$\max\ 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优值为 **62**

最优解为 $x_1 = 4$，$x_2 = 3$

工厂在实际决策中，还需要考虑一系列其他因素：

1. 产品I的产量不超过产品II的产量；
2. 超限量使用原材料，需要高价采购，成本增加；
3. 应尽可能利用设备，但不希望加班；
4. 应尽可能达到或超过计划利润56元

1. 线性规划 - 目标规划（续二）

目标规划的数学模型主要涉及如下基本概念：

- 偏差变量

  对决策变量 x_i，引入正、负偏差变量 d_i^+ 和 d_i^-，

  分别表示决策值超过或不足目标值的部分

- 绝对约束（硬约束）和目标约束（软约束）
- 优先因子和权系数（具有主观性）

  一个目标规划问题若有若干个目标时，为了区分主次不同，可赋予优先因子 $p_i >> p_{i+1}$，并赋予相应权重 w_i^+ 和 w_i^-

- 目标函数

  + 恰好达到目标值 $\min f(d^+ + d^-)$

  + 不超过目标值，但允许不足目标值 $\min f(d^+)$

  + 不低于目标值，但允许超过目标值 $\min f(d^-)$

1. 线性规划 - 目标规划（续三）

$$\min \; p_1 d_1^- + p_2(d_2^- + d_2^+) + p_3 d_3^-$$

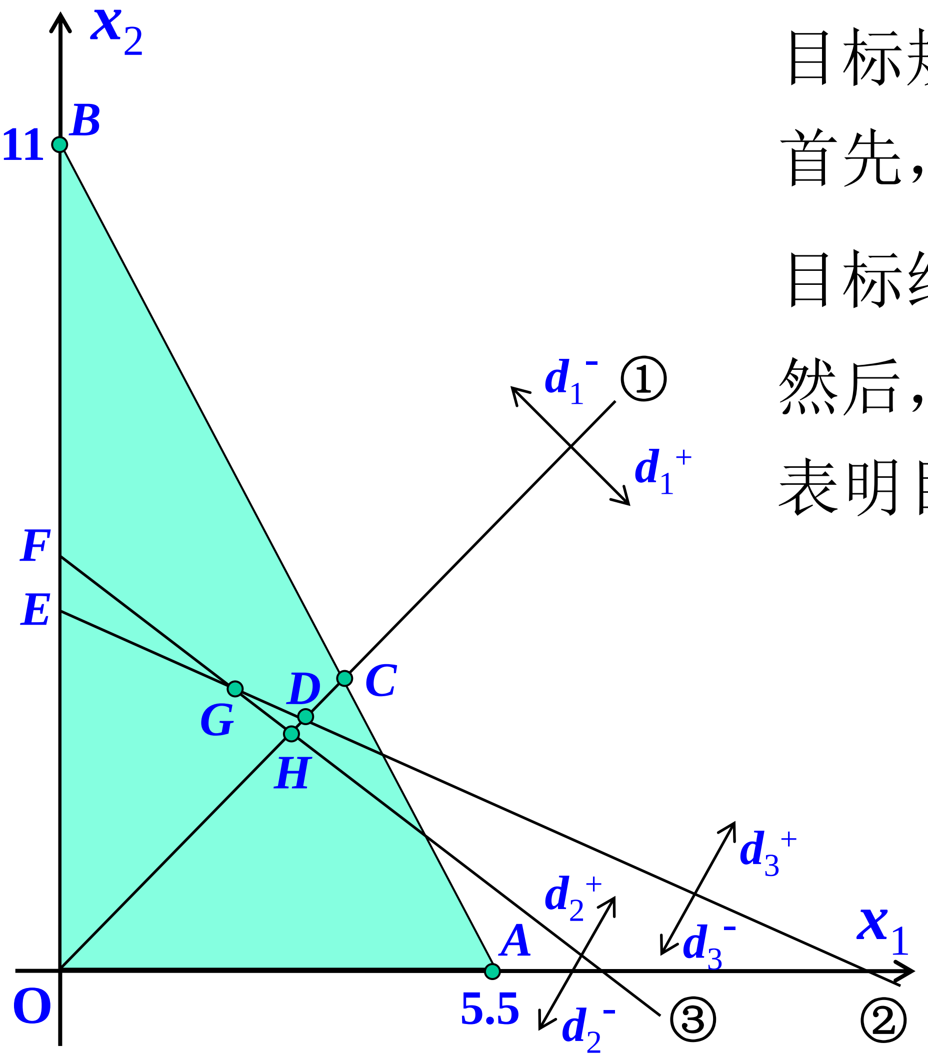
$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & ① \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & ② \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & ③ \\ x_1,\; x_2,\; d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

最优值为 **0**，其对应的最优解为 $x_1 = 2$，$x_2 = 4$，

$d_1^- = 0$，$d_1^+ = 2$，$d_2^- = 0$，$d_2^+ = 0$，$d_3^- = 0$，$d_3^+ = 0$

注意：目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。上例中可先后次序恰好满足 $d_1^- = 0$，$d_2^- + d_2^+ = 0$，$d_3^- = 0$。一般情况并非如此，还可出现非可行解。故通常称目标优化问题的最优解为满意解。

1. 线性规划 - 目标规划（续四）



目标规划的图解法：

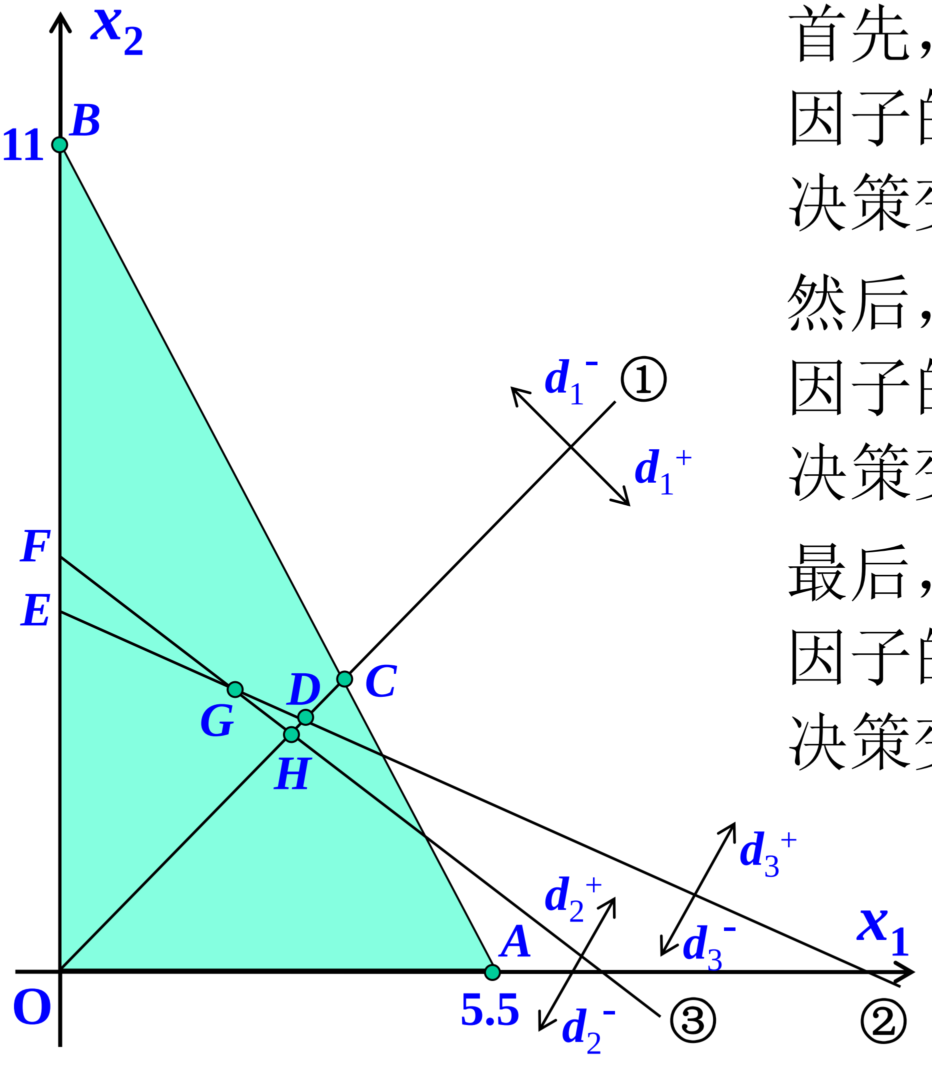
首先，画出各个约束条件，

目标约束条件，令 $d_i^-, d_i^+ = 0$；

然后，在相应直线旁标上 d_i^-, d_i^+，

表明目标约束可以沿该方向平移。

1. 线性规划 - 目标规划（续五）



首先，考虑如何实现具有 p_1 优先因子的目标：要满足 $d_1^+ = 0$，决策变量需要在△OBC中。

然后，考虑如何实现具有 p_2 优先因子的目标：要满足 $d_2^-, d_2^+ = 0$，决策变量需要在线段ED上。

最后，考虑如何实现具有 p_3 优先因子的目标：要满足 $d_3^- = 0$，决策变量需要在线段GD上。

G的坐标是 (2, 4)，

D的坐标是 (10/3, 10/3)。

G和D的凸组合都是该目标规划的解。

1. 线性规划 - 目标规划（续六）

思考题　试分析辛普森悖论((**Simpson’s Paradox**, 1951)：在分组比较中都占优势的一方，却在总评中反而是失势的一方。

“校长，不好了，有很多男生在校门口抗议，他们说今年研究所女生录取率**42%**是男生**21%**的两倍，我们学校遴选学生有性别歧视”。

校长满脸疑惑的问秘书：“我不是特别交代，今年要尽量提升男生录取率以免落人口实吗？”

秘书赶紧回答说：“确实有交代下去，我刚刚也查过，的确是有注意到，今年法学院录取率是男性**75%**，女性只有**49%**；而商学院录取率是男性**10%**，女性为**5%**。二个学院都是男生录取率比较高，校长这是我作的调查报告。”

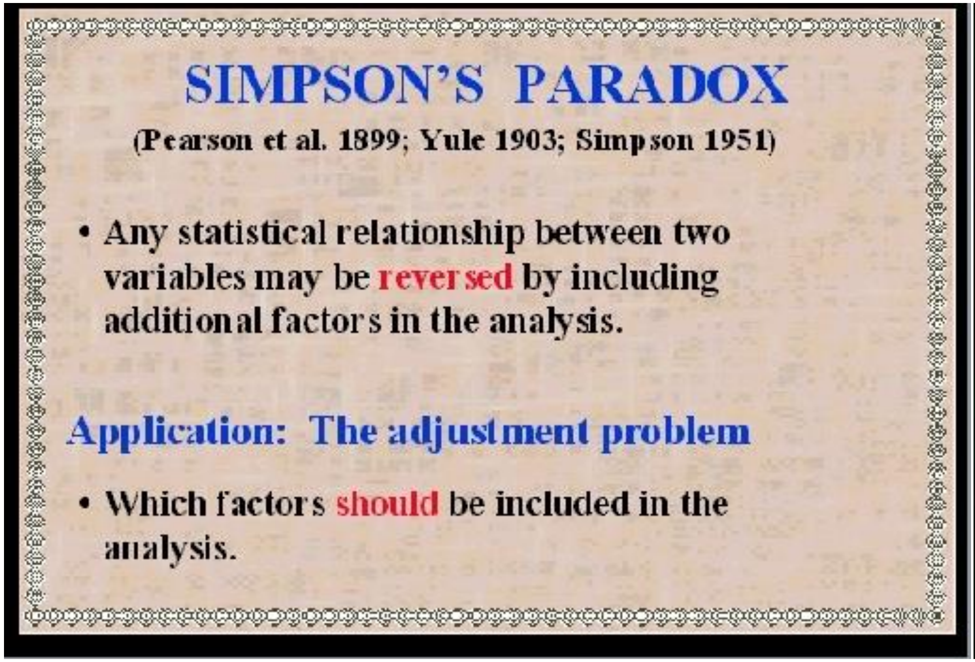
1. 线性规划 - 目标规划（续七）

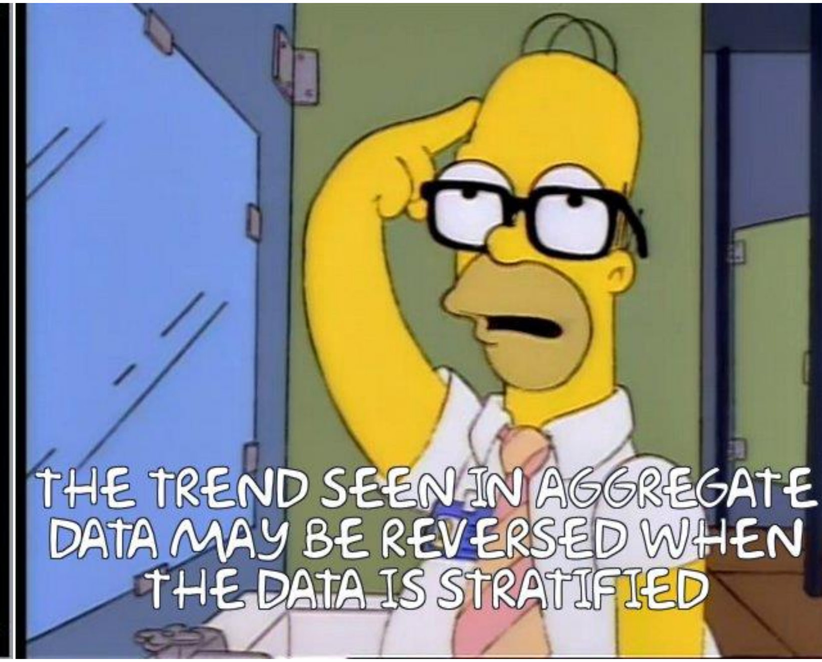
学　院	女生申请	女生录取	女生录取率	男生申请	男生录取	男生录取率	合计申请	合计录取	合计录取率
商学院	100	49	49%	20	15	75%	120	64	53.3%
法学院	20	1	5%	100	10	10%	120	11	9.2%
总　计	120	50	42%	120	25	21%	240	75	31.3%

“秘书，你知道为什么个别录取率男皆大于女，但是总体录取率男却远小于女吗？”

此例这就是统计上著名的辛普森悖论(**Simpson’s Paradox**)，该现象于20世纪初就有人讨论，但一直到1951年E.H.辛普森在他发表的论文中，该现象才算正式被描述解释。

1. 线性规划 - 目标规划（续八）





辛普森悖论的应用：两个队**A**和**B**欲比赛**100**场篮球以总胜率评价强弱。于是**A**队专找高手挑战**20**场而胜**1**场，另外**80**场找平手挑战而胜**40**场，结果胜率**41**%；另**B**队挑高手挑战**80**场而胜**8**场，而剩下**20**场平手打个全胜，结果胜率为**28**%，比**41**%小很多。然而，仔细观察挑战对象，**B**队实力明显强于**A**队！

1. 线性规划 - 总结

线性规划可以视为伟大的革命性进展中的一部分，它赋予人类一种表述一般目标的能力，并在面对充满巨大复杂性的实际情况下，为能“最好”地实现其目标而给出了一条详细的决策方案。我们要达到这些目标所取的工具是：将现实世界中的问题用数学术语公式化（模型），解决模型所需的技巧（算法），执行算法的每一步所需的动力（计算机和软件）。

如果让我总结我在线性规划方面早期或许是最重要的贡献，那么我会说有三个：

1.认识到多数的实际计划关系都可以用一组线性不等式来刻画
2.用一个目标函数作为选取一个较好计划而设定的一基本规则
3.发明了单纯形法，使得有关经济的不太复杂的线性规划模型变成了对大而复杂系统进行实际规划的一个基本工具

1. 线性规划 - 总结（续一）

　　这种能力开始于二战结束后不久的1947年，随着计算能力的突飞猛进而同步发展。由于其在决策科学中的发展太迅猛了，因此很少有人能记住那些开创这一工作的伟大先驱者们。他们当中的几位是：

J. V. Neumann
L. Kantorovich
W. Leontief
T. Koopmans

前两位是著名数学家，而后三位曾获得了诺贝尔经济学奖(**K. J. Arrow, P. A. Samuelson, H. A. Simon**)。

思考题： **Dantzig** 本人为何没获诺贝尔经济学奖呢？

1. 线性规划 - 总结（续二）

Von Neumann Theory Prize
in Operational Research in 1975;

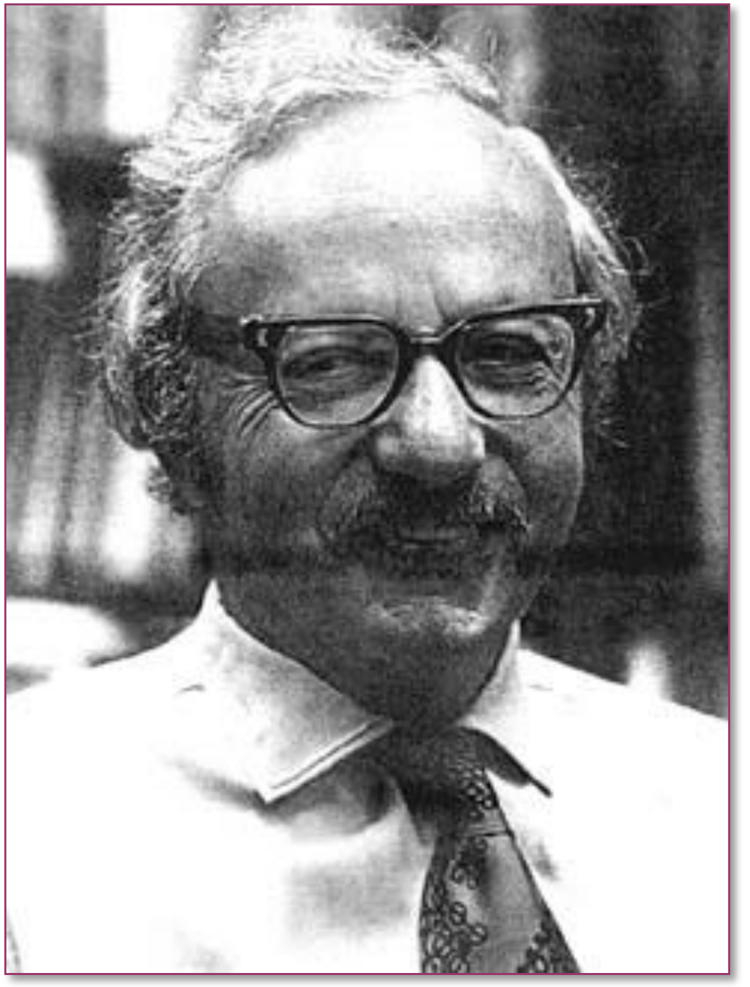
The National Medal of Science
of USA in 1976;

National Academy of Sciences Award
of USA in 1977;

Harvey Prize
in Science and Technology in 1985;

Silver Medal
from the OR Society of Britain in 1986;

Special Recognition Award
from Math Programming Society in 1994.



1. 线性规划 - 总结（续三）

自1947年由我首次提出（与军事计划活动相联系）线性规划这一概念以来，线性规划及其推广得到了广泛的应用。在学术界，决策科学家（运筹学家和管理学家），数值分析学家，数学家和经济学家就这个专题出版了几百部著作并发表了无以记数的论文。

在1950年代早期，后来被我们统称为数学规划的许多领域也已开始出现了。线性规划在其迅速发展的过程中扮演了一个核心角色。我将就其中的每一个略加叙述。

非线性规划 (1951)
网络流理论 (1950)
随机规划 (1955)
整数规划 (1958)
计算复杂性 (1970)

1. 线性规划 - 总结（续四）

- **J V Neumann Theory Prize Winners**
  (INFORMS, since 1975; **Yinyu Ye**: 2009)
- **The Dantzig Prize**
  (Math Programming Society, since 1979; **Jong-Shi Pang**: 2003)
- **The Fulkerson Prize**
  (Math Programming Society, since 1979)
- **The Beale-Orchard-Hays Prize**
  (Math Programming Society, since 1985)
- **The Tucker Prize**
  (Math Programming Society, since 1988)
- **George B. Dantzig Dissertation Award**
  (INFORMS, since 1994)

1. 线性规划 - 总结（续五）

- 1939年苏联数学家Л.В.康托罗维奇在《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题
- **1947年美国数学家G.B.丹齐克提出单纯形法**
- **1947年美国数学家J.von诺伊曼提出对偶理论**
- 1951年美国经济学家T.C.库普曼斯把线性规划用到经济领域
- 1954年C.莱姆基提出对偶单纯形法
- **1956年A.塔克提出互补松弛定理**
- 1960年G.B.丹齐克和P.沃尔夫提出分解算法
- 1975年T.C.库普曼斯与Л.В. 康托罗维奇一起获诺贝尔经济学奖
- 1979年苏联数学家L. G. 卡奇扬提出椭球算法
- 1984年印度数学家N.卡马卡提出内点法

练习. 求出下述线性规划问题的所有最优解。

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z &= 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\textbf{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le 9, \\
& 5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

练习. 考虑下述线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z &= x_1 - x_2 + x_3 \\
\textbf{s.t.} \quad & x_1 - x_3 \ge 4, \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

应用对偶理论证明该问题无最优解。