中国科学院研究生院

运筹通论II

刘克

中科院数学与系统科学研究院 北京100190

邮箱地址: kliu@amss.ac.cn

第一章 预备知识

1 引言

随机乃至不确定现象是客观世界的自然表现。当人们面对客观世界进行优化决策的时候，必须要考虑到随机乃至不确定因素的影响，避免风险发生。

与确定性优化问题有着很大的不同，利用不同的手段描述不确定性，涉及到不同的分析方法。

我们这里介绍的不确定现象主要表现在能够用概率测度描述的情形，考虑的内容主要有：排队问题，马尔可夫决策过程，可靠性理论以及库存理论等等。

以排队为例，我们考虑一个单服务员的排队系统：

同样我们可以考察多服务台系统等等。

排队系统研究的内容和目的：

1）排队系统的性态问题：各种系统的概率规律，有队长、排队长、顾客的等待时间和逗留时间、忙期等的概率分布，瞬态性质，以及统计平衡下的性态。

2）排队系统的统计推断：通过观测，获得数据，利用统计方法，推断出被观测的排队系统的规律。

3）排队系统的优化问题：包括设计（静态优化问题）和运行控制（动态优化问题）等等。

排队系统的基本组成部份：

1）输入过程，有顾客总体数、到达类型、相继顾客到达的间隔时间服从的规律（分布、参数、独立与否）。
如果设$T_0=0, T_n(n\geq 1)$表示第n个顾客到达的时间，则

$$T_0=0<T_1<T_2<\cdots<T_n<T_{n+1}<\cdots$$

又令$\tau_n=T_n-T_{n-1},\ n\geq 1$，则$\{\tau_n, n\geq 1\}$表示顾客相继到达的时间间隔序列。

2）排队规则：损失制、等待制、混合制；先到先服务(FIFO)、后到先服务(LIFO)、随机服务；有优先权服务（强拆与非强拆）。

3）服务机构：服务台数目与串并联，服务时间、是否成批等等。

经典排队轮的符号表示：通常用3-5个英文字母表示，中间用斜线隔开。

$M/M/c/\infty$表示输入过程是Poisson流，服务时间服从负指数分布，系统有c个服务台平行服务$(0 < c \leq \infty)$，系统容量为无穷，于是$M/M/c/\infty$是等待制系统。

$M/G/1/\infty$，$GI/M/1/\infty$，$E_k/G/1/K$，$D/M/c/K$，$M^r/M/1/\infty$，$M^X/M/c/\infty$

描述排队系统的主要数量指标：

1.队长与等待队长。

2.顾客在系统中等待时间与逗留时间。

3.系统的忙期和闲期。

4.输出过程。

本章主要参考书目：

1) 劳斯，《随机过程》，中国统计出版社（何声武等翻译）(Sheldon M. Ross, Stochastic processes, John Wiley, 1983)

2) 严颖，成世学，程侃，《运筹学随机模型》，中国人民大学出版社，1995

3) 唐应辉，唐小我，《排队论–基础与分析技术》，科学出版社，2006

4) 董泽清，《排队论及其应用》，西安系统工程学会出版，1984

5) 徐光辉，《运筹学基础手册》，科学出版社，2000

6) DP Heyman and MJ Sobel, Stochastic Models in Operations Research Volume II, McGraw-Hill Book Company, 1982

Home Page
Title Page
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Go Back
Full Screen
Close
Quit

2 几个重要的概率分布

定长分布（单点分布）：

定义2.1：设随机变量X以概率1取常值a，即$P\{X=a\}=1$，则称X服从定长分布或单点分布，它的概率分布函数为。

$$F(t)=P\{X\le t\}=\begin{cases}0, & t<a;\\ 1, & t\ge a.\end{cases}$$

负指数分布：

定义2.2：一个连续型随机变量X，如果它的分布密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，则称X服从参数λ的负指数分布，其概率分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

可以计算其k阶矩($E[X^k]=k!/\lambda^k$)和方差($D[X]=1/\lambda^2$)

定理2.1：设连续型随机变量X服从参数$\lambda(>0)$的负指数分布，则：
1) 对任意的$t \geq 0$, $s \geq 0$, 有

$$P\{X > t + s | X > s\} = P\{X > t\} = e^{-\lambda t};$$

2) 对任意一个与X相互独立的非负随机变量Y和任意$t \geq 0$，在$P\{X > Y\} > 0$的条件下，有

$$P\{X > Y + t | X > Y\} = P\{X > t\} = e^{-\lambda t}.$$

这就是“无记忆性”或者叫做“无后效性”。

引理2.1：设$g(x)$是一元函数，则$g(x)=a^x(a>0)$的充分必要条件是
1) $g(x)$是x的连续（或单调）函数，$g(1)\neq 0$;
2) 对任意的$x, y, g(x+y)=g(x)g(y)$.
定理2.2：设X是非负值的连续型随机变量，
1) 若X具有无记忆性，则X服从负指数分布；
2) X服从参数$\lambda(>0)$的负指数分布的充分必要条件是对任意的$t\geq 0$，

$$E[X-t|X>t]=\frac{1}{\lambda}.$$

k阶埃尔朗（Erlang）分布：

定义2.3：如果连续型随机变量X，如果它的分布密度函数为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

其中$\lambda > 0$为常数，则称X服从参数λ的k阶埃尔朗分布，其概率分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad t \geq 0;$$

可以计算其均值$(E[X] = k/\lambda)$和方差$(D[X] = k/\lambda^2)$。

定理2.3：设$X_1, X_2, \cdots, X_k$是相互独立服从相同参数$\lambda(>0)$的负指数分布，则$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$服从参数为$\lambda(>0)$的$k$阶埃尔朗分布。

定理2.4：设随机变量X服从k阶埃尔朗分布，则对一切$x \geq 0$，有

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\frac{X-\frac{k}{\lambda}}{\sqrt{\frac{k}{\lambda^2}}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

因此可知，当$k=1$时，E_1的分布为负指数分布，当$k\to\infty$时，E_k的分布接近正态分布。

超指数分布：

定义2.4：一个连续型随机变量X，如果它的分布密度函数为

$$f(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

其中$\alpha_i>0$，且$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$，$\lambda>0$均为常数，则称X服从超指数分布，其概率分布函数为

$$F(t)=1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e^{-\lambda_i t},\quad t\geq 0.$$

可以计算其期望$(E[X]=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i})$和方差$(D[X]=2\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i}-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right)^2)$

泊松(Poisson)分布：

定义2.5：离散型随机变量X的概率分布为

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots ,$$

其中$\lambda(> 0)$为常数，则称X服从参数为$\lambda(> 0)$的泊松分布，可以计算其期望$(E[X] = \lambda)$和方差$(D[X] = \lambda)$

3 Poisson过程

定义3.1：考虑单个到达的输入过程，令$N(t)$表示在时间$(0,t]$内到达的顾客数，则$\{N(t),\ t\geq 0\}$是连续时间参数的随机过程（计数过程）。如果满足：

1) $N(0)=0$;

2) $\{N(t),t\geq 0\}$有独立增量，即对任意的n个时刻: $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，随机变量$N(t_1)-N(0),N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$是相互独立的;

3) $\{N(t),t\geq 0\}$具有平稳增量，且对任意的$t\geq 0$和$s\geq 0$，有

$$P\{N(t+s)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中$\lambda(>0)$为常数，则称$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程、Poisson过程、Poisson流或者最简单流。

定理3.1：$\{N(t), t \geq 0\}$是参数$\lambda(>0)$的Poisson流的充分必要条件是$\{\tau_n,\ n \geq 1\}$独立、同参数$\lambda(>0)$的负指数分布，其中$\{\tau_n,\ n \geq 1\}$为到达的间隔时间序列。

定理3.2：$\{N(t), t \geq 0\}$是参数$\lambda(>0)$的Poisson流，如果在时间区间$[0, t]$之间恰好有一个顾客到达，在这个条件下，该顾客到达时刻τ的条件分布在$[0, t]$上为均匀分布。

定理3.3：设$\{N_1(t), t \geq 0\}$与$\{N_2(t), t \geq 0\}$分别是参数λ_1和λ_2的Poisson流，且它们相互独立，则合成流$\{N_1(t)+N_2(t), t \geq 0\}$是参数$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson流

定理3.4：设$\{N(t), t \geq 0\}$是参数$\lambda(>0)$的Poisson流，每一到达顾客以概率$p(0<p<1)$进入系统，令$\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$表示$[0, t]$之间到达并进入系统的顾客数，则$\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$是参数$p\lambda$的Poisson流。

4 更新过程

定义4.1：设$\{\tau_n, n \geq 1\}$是相互独立的、取非负值的随机变量序列，有共同的分布函数$F(t)$。假设$F(0) < 1$，且令

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 0 \\
S_n &= \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n, \quad n \geq 1. \\
N(t) &= \sup\{n | S_n \leq t\}
\end{aligned}
$$

则$\{N(t), t \geq 0\}$称为更新过程，$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n, \cdots$称为寿命或更新间隔时间，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$称为更新时刻，而$N(t)$称为$(0, t]$内的更新次数。

对固定的$t > 0$，令

$$M(t) = E[N(t)], \tag{1}$$

则$M(t)$表示$(0, t]$内的平均更新次数，称为更新函数。

$$
\begin{aligned}
N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t) && (2) \\
I_n(t) &= \begin{cases} 1, & \text{第}n\text{次更新在}(0,t]\text{内} \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} && (3) \\
M(t) &= E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n * P\{N(t) = n\} \\
&= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n(t) = 1\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). && (4)
\end{aligned}
$$

其中$F_n(t)$是F的n重卷积。

定义4.2：积分方程

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)dF(x)=a(t)+F*A(t),\quad t\geq 0. \tag{5}$$

被称为更新方程，其中$a(t)$为任意有限区间上有界的已知函数，F是已知分布，$A(t)$是未知函数，$*$是卷积符号。

关于方程(5)的解有下面的结论。

定理4.1：函数$A(t)=a(t)+M*a(t)$是方程(5)的解，其中M是由公式(1)或(4)给出的，而且$A(t)$在任意有限区间上有界；在有限区间上有界的函数类中，$A(t)$是方程(5)的惟一解

定理4.2：设$\mu = E[\tau_1] \leq \infty$（约定$\frac{1}{\infty} = 0$），则有：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

以概率1成立。

定理4.3（基本更新定理）：设$\mu = E[\tau_1] \leq \infty$（约定$\frac{1}{\infty} = 0$，则对于更新函数$M(t)$有：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{7}$$

F为格点分布是指F的增点只有可能是$n, n = 0, 1, 2, \cdots$；而Riemann直接可积是直接将区间$[0, \infty)$切成小段，做出积分和后再取极限（与一般的广义积分有区别）。

定理4.4（关键更新定理）：设$\{N(t),\ t \geq 0\}$为更新过程，更新分布F为非格点分布，均值为μ。若函数$g(t)$Riemann直接可积，则：

$$\lim_{t\to\infty} M * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} g(t)dt. \tag{8}$$

定理4.5（Blackwell定理）：设$\{N(t),\ t \geq 0\}$为更新过程，更新分布F为非格点分布，均值为μ。则：

$$\lim_{t\to\infty} [M(t) - M(t-h)] = \frac{h}{\mu}, \quad \forall h \geq 0. \tag{9}$$

定理4.6：设$\{N(t),\ t \geq 0\}$为更新过程，更新分布F为非格点分布，均值为μ，方差$\sigma^2 < \infty$，则：

$$\lim_{t\to\infty}\left[M(t) - \frac{t}{\mu}\right] = \frac{\sigma^2}{2\mu^2} - \frac{1}{2}. \tag{10}$$

更新过程的推广：交替更新过程、延迟更新过程（第一个分布不同于后面的）与平衡更新过程（第一个分布是后面的平稳剩余寿命分布）、更新报酬过程、离散更新过程等等。

5　马尔可夫链

马尔可夫链（Markov chain）是一类重要的随机过程，它的状态空间是有限的或者可数无限的。经过一段时间，系统从一个状态转移到另一个状态这种进程只依赖于当前出发时的状态，而与以前的历史无关。

定义5.1：设$\{X_n|n\geq 0\}$为一列只取非负整数的随机变量，若对任意的$n\geq 1$，任意的非负整数$i_0,i_1,\cdots,i_{n-1},i$和j，恒有：

$$\begin{aligned} & P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\} \\ = & P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}, \end{aligned} \tag{11}$$

则称$\{X_n|n\geq 0\}$为一马尔可夫链。进一步，称马尔可夫链$\{X_n|n\geq 0\}$为齐次的，若对任意非负整数i,j, 恒有：

$$P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}=P\{X_1=j|X_0=i\},\ \ \forall n\geq 0. \tag{12}$$

公式(11)表述的就是马尔可夫性或无后效性，具有极为明显的解释。为了方便，约定非负整数集合$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,\}$为状态空间，状态空间通常用$E$表示，既有$E=\mathbf{N}$。马尔可夫链也简称为马氏链，在不做出特别声明时，我们总讨论齐次马氏链

定义5.2：对于马尔可夫链$\{X_n|n \geq 0\}$，记

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j|X_0 = i\}, \ \forall i,j \in E, \ n \in \mathbf{N}, \tag{13}$$

则称其为马尔可夫链自状态i出发，经n步后转移至状态j的**n 步转移概率**。此外，称以$p_{ij}^{(n)}$，$i,j \in E$，为全部元素所组成的矩阵

$$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$$

为马尔可夫链$\{X_n|n \geq 0\}$的**n步转移概率矩阵**。

易见

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

因此$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I}$,，其中$\mathbf{I}$为单位矩阵。而$n = 1$时，$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)}$为一步转移概率矩阵，称为转移概率矩阵。

定义5.3：非负矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$称为**随机矩阵**，如果有$\mathbf{A}$的任意一行元素之和为1。

命题5.1：马尔可夫链$\{X_n|n\geq 0\}$的n步转移概率矩阵$\mathbf{P}^{(n)}$是一个随机矩阵。特别的，1步转移概率矩阵$\mathbf{P}$是随机矩阵。

定义5.4：设$\{X_n|n\geq 0\}$是一马氏链，记

$$p_j^{(n)}=P\{X_n=j\},\ \forall j\in E$$

并称行向量$\mathbf{p}^{(n)}=(p_0^{(n)},p_1^{(n)},\cdots)$为马氏链在时刻$n$的瞬时分布，称$\mathbf{p}^{(0)}$为初始分布。如果极限

$$\lim_{n\to\infty}p_j^{(n)}=p_j,\quad \forall j\in E \tag{14}$$

存在，且有$0\leq p_j\leq 1$，$\sum_{j\in E}p_j=1$，则称$\{p_j,j\in E\}$为马氏链的平稳分布。

定理5.1：设$\{X_n|n\geq 0\}$是一马氏链，下述结论成立：

1) $P\{X_1=i_1,X_2=i_2,\cdots,X_n=i_n|X_0=i\}=p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

2) $\mathbf{P}^{(n+1)}=\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P},\ \ \mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n,\ \ \forall n\geq 0$

3) $P\{X_{n+m}=j|X_m=i\}=p_{ij}^{(n)}$

4) $\mathbf{p}^{(n)}=\mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{(n)},\ \ \forall n\geq 0.$

注意，$\mathbf{P}^{(n)}$与$\mathbf{P}^n$概念不同，定理5.1表明两者相等。另外，不难得到

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m)}\mathbf{P}^{(n)}, \quad \forall n, m \geq 0 \tag{15}$$

或者是分量形式

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad \forall i, j \in E. \tag{16}$$

上式通常称为Kolmogorov-Chapman方程，或者简称为C-K方程。

对于马氏链$\{X_n|n \geq 0\}$，记

$$\tau_j = \inf\{n \geq 1|X_n = j\}, \ \ \forall j \in E \tag{17}$$

其中约定$\inf\emptyset = +\infty$。称τ_j为马氏链首达状态j的首达时。再记

$$f_{ij}^{(n)} = P\{\tau_j = n|X_0 = i\}, \ \ \forall n \geq 1 \tag{18}$$

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\{\tau_j < \infty|X_0 = i\} \leq 1. \tag{19}$$

分别为n步首达j和有限步内首达j的概率，统称为首达概率。

定义5.5：若$f_{ii}=1$，称状态i为**常返的**，如果$f_{ii}<1$，称状态i为**非常返的**。

对于常返状态i，根据公式(19)知道$\{f_{ii}^{(n)}|n\geq 1\}$是一个离散的概率分布，记它的均值

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}=E[\tau_i|X_0=i] \tag{20}$$

为平均返回时间。

定义5.6：若$\mu_i<+\infty$，称状态i为**正常返的**，如果$\mu_i=+\infty$，称状态i为**零常返的**。

对于常返状态i，如果返回的时间可以表示成为$d,2d,3d,\cdots$(这里d是满足要求的的最大整数)，则d称为该状态的周期，如果$d>1$，称该状态是周期的；如果$d=1$，称该状态是非周期的。

定义5.7：如果存在$n \geq 1$使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，则称从状态i可以到达状态j。如果不仅从状态i可以到达状态j，也从状态j可以到达状态i，那么状态i和状态j是互通的。

定义5.8：如果状态空间E中任意两个状态都是互通的，称状态空间是不可约的，对用的马氏链也是不可约的。

定义5.9：如果马氏链是不可约的，每个状态又都是正常返的，则马氏链被称为遍历的。

定理5.2：不可约的齐次马氏链的状态或全部都是正常返的、或全部都是零常返的、或全部都是非常返的。如果有周期，则全部状态有相同的周期。

定理5.3：不可约非周期的马氏链极限

$$\lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = p_j, \quad \forall j \in E \tag{21}$$

总存在，且与初始状态无关。进一步还有

1) 如果全部状态是非常返的或全部状态都是零常返的，则

$$p_j = 0, \quad \forall j \in E \tag{22}$$

此时，不存在平稳分布。

2) 如果全部状态都是正常返的，则

$$p_j = \frac{1}{\mu_j} > 0, \quad \forall j \in E \tag{23}$$

而且$\{p_j, j \in E\}$满足等式

$$\sum_{j\in E} p_j = 1, \quad p_j = \sum_{i\in E} p_i p_{ij}, \quad \forall j \in E \tag{24}$$

因此，$\{p_j, j \in E\}$是惟一的平稳分布。

定理5.4：设马氏链$\{X_n|n\geq 0\}$是遍历的，$\mathbf{P}$是一步转移概率矩阵。记$\pi=(\pi_j,j\in E)$。则方程组

$$\begin{cases}\pi=\pi\mathbf{P};\\ \pi\geq\mathbf{0},\quad \pi\mathbf{1}=1\end{cases}\tag{25}$$

有惟一的正解

$$\pi_j=\frac{1}{\mu_j},\quad \forall j\in E.\tag{26}$$

定义5.10：称随机过程$\{X_t, t \geq 0\}$是一个可数状态的马尔可夫过程，若它有下述马尔可夫性质：对任意非负整数n和任意$n+1$个非负实数$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s$，任意$t \geq 0$以及任意$n+2$个状态$i_1, i_2, \cdots, i_n, i, j$恒有

$$\begin{aligned} & P\{X_{s+t} = j | X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n, X_s = i\} \qquad (27) \\ = \; & P\{X_{t+s} = j | X_s = i\} \qquad (28) \end{aligned}$$

定义5.11：设$\{X_t, t \geq 0\}$是一个可数状态的马尔可夫过程，记

$$p_{ij}(s,t) = P\{X_t = j | X_s = i\} \;\; \forall 0 \leq s < t, \qquad (29)$$

并称$p_{ij}(s,t)$为马尔科夫过程在时刻s处于状态i的条件下，于时刻t转移至状态j的转移概率。

称过程为齐次的，如果它的转移概率是齐次的，即对一切$0 \leq s \leq t$，$p_{ij}(s,t)$只依赖于差$t-s$，这时记

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(s, s+t), \;\; \forall s, t, \geq 0. \qquad (30)$$

并称$p_{ij}(t)$为齐次转移概率函数。

命题5.2：马尔可夫过程$\{X_t|t \geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$ 是一个随机矩阵。

定义5.12：记

$$p_j(t) = P\{X_t = j\} \;\; \forall 0 < t, j \in E, \tag{31}$$

并称以$p_j(t)$为分量的向量$\mathbf{p}(t)$为马尔科夫过程在时刻t的瞬时分布。特别的，当$t = 0$时为初始分布。

命题5.3：马尔可夫过程$\{X_t|t \geq 0\}$有类似定理5.1的结论。

定义5.13：如

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \forall i,j \in E, \tag{32}$$

则称转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$是标准的。

命题5.4：若$\mathbf{P}(t)$是标准的，则对一切$j \in E$有$p_{jj}(t) > 0,\ \forall t > 0$。

定理5.5：设$\mathbf{P}(t)$是标准的，则存在极限（可能是无穷）

$$-\infty \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ii}(t)-1}{t} \triangleq q_{ii} \leq 0, \quad \forall i \in E. \tag{33}$$

定理5.6：设$\mathbf{P}(t)$是标准的，则存在有穷极限

$$0 \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{p_{ij}(t)}{t} \triangleq q_{ij} < \infty, \quad \forall i \neq j. \tag{34}$$

记

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}), \quad \mathbf{P}'(0^+) = (p'_{ij}(0^+)) \tag{35}$$

知道$\mathbf{P}'(0^+) = \mathbf{Q}$。这说明矩阵Q就是转移概率函数$p_{ij}(t)$在$t = 0$点的右导数组成的，我们称矩阵Q为转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$的密度矩阵，也称为马氏过程的密度矩阵、转移速率矩阵或者Q矩阵。

记$q_i = -q_{ii}$，就有$0 \le q_i \le +\infty$。

定义5.14：如果下面等式成立

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i \quad \forall i \in E, \tag{36}$$

则称转移速率矩阵Q是保守的。

定理5.7：标准转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$中每一元素$p_{ij}(t)$在$(0,\infty)$中都有有限的连续导数$p'_{ij}(t)$，而且满足方程

$$p'_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p'_{ik}(s)p_{kj}(t),\quad \forall s,t>0,i,j\in E. \tag{37}$$

此外，对一切$t>0$，$\sum_{j=0}^{\infty}|p'_{ij}(t)|<\infty$，且是$t$的减函数。

将转移概率函数$p_{ij}(t)$的可微性和与C-K方程结合起来我们可以得到

$$p'_{ij}(t) = -q_i p_{ij}(t)+\sum_{k\neq j}q_{ik}p_{kj}(t) \tag{38}$$

$$p'_{ij}(t) = -p_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj} \tag{39}$$

对一切$i,j\in E$和$t\geq 0$成立。公式(38)和公式(39)分别称为Kolmogorov向后方程和Kolmogorov向前方程，写成矩阵形式为

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(t)(\text{向后方程}) \tag{40}$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}(\text{向前方程}). \tag{41}$$

命题5.5：设有限状态马尔科夫过程$\{X_t, t \geq 0\}$的转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$是标准的，则其密度矩阵$\mathbf{Q}$是保守的，而且满足Kolmogorov方程

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}.$$

反之，设$\mathbf{Q}$是一有限维矩阵并满足保守性条件，则存在惟一的标准转移概率矩阵$\mathbf{P}(t)$，使得$\mathbf{Q}$恰是$\mathbf{P}(t)$的密度矩阵。

定理5.8：设$q_i < \infty$，$\forall i \in E$。则Kolmogorov向后方程(40)成立的充要条件是密度矩阵$\mathbf{Q}$保守。

定理5.9：齐次不可约马氏过程存在平稳分布$\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$，且满足方程

$$(\pi_0, \pi_1, \cdots)\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{42}$$

这样，结合归一化条件

$$\begin{aligned} 0 &\leq \pi_i \leq 1 \\ \sum_{i \in E} \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

可以求得其平稳分布。

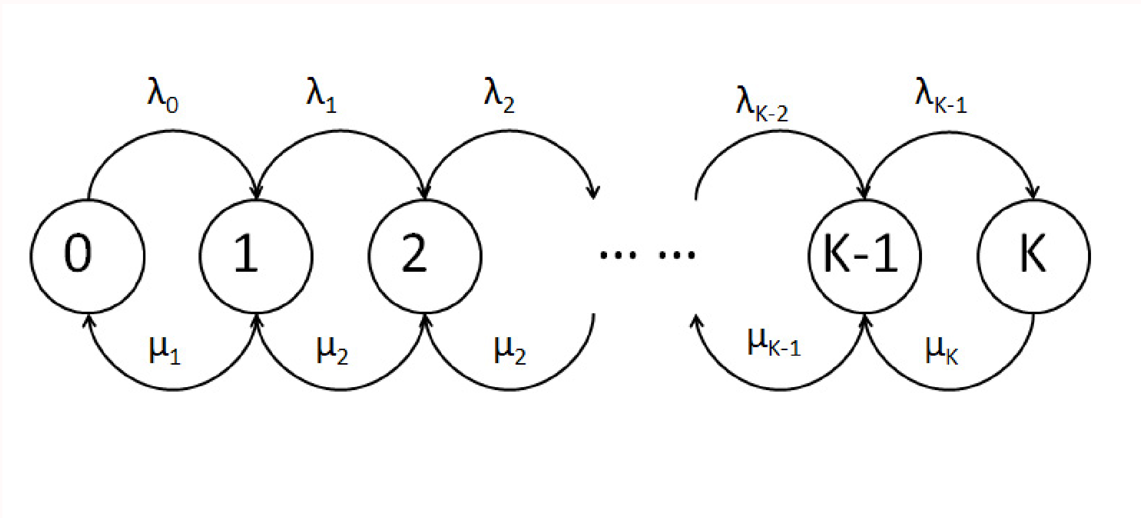
6 生灭过程

生灭过程是一类具有特殊重要性质的马氏过程，它在排队论、生物学、物理学、传染病学等领域有着广泛的应用。。

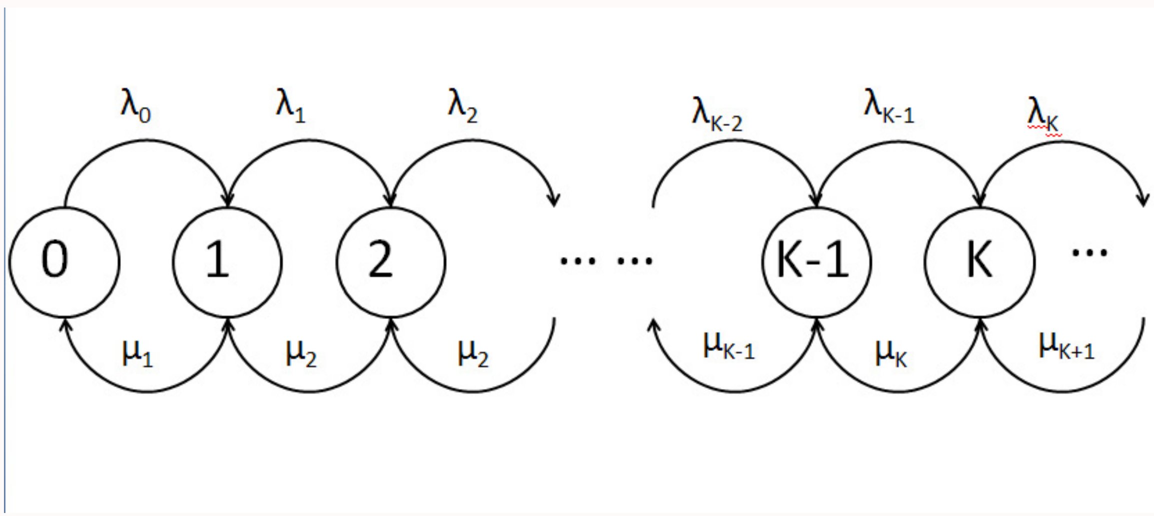
定义6.1：设$\{\lambda_i, i \geq 0\}$和$\{\mu_i, i \geq 0\}$是两个非负实数的序列。称可数状态马氏过程$\{N_t, t \geq 0\}$是一个以$\{\lambda_i, i \geq 0\}$为出生速率，以$\{\mu_i, i \geq 0\}$为死亡速率的生灭过程，如果有：

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t), \ \ \forall i \geq 0 \\
&(2) \quad p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t), \ \ \forall i \geq 1 \\
&(3) \quad \sum_{|i-j|\geq 2} p_{ij}(t) = o(t).
\end{aligned}
$$

如果状态空间E是有限的，即$E = \{0, 1, 2, \cdots, K\}$，我们称这样的生灭过程是有限状态的。对于有限状态的生灭过程，我们有如下的状态强度转移图。



如果状态空间E是可数无限的，即$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$，我们有如下的状态强度转移图。



令

$$p_i(t) = P\{N_t = i\}, \quad \forall i \in E,\ t \geq 0.$$

为系统在t时刻处于状态i的概率。系统在$t+\Delta t$时刻系统处于状态i这一事件可以分解为下面的4个不相交事件之和：

1) 在时刻t处于状态i，而在$t+\Delta t$时系统仍处于状态i，其概率为$p_i(t) \times (1 - \lambda_i \Delta t - \mu_i \Delta t) + o(\Delta t)$；

2) 在时刻t处于状态$i-1$，而在$t+\Delta t$时系统处于状态i，其概率为$p_{i-1}(t)\lambda_{i-1}\Delta t + o(\Delta t)$；

3) 在时刻t处于状态$i+1$，而在$t+\Delta t$时系统处于状态i，其概率为$p_{i+1}(t)\mu_{i+1}\Delta t + o(\Delta t)$；

4) 在时刻t处于其它状态（即非$i-1$、i或者$i+1$），而在$t+\Delta t$时系统处于状态i，其概率为$o(\Delta t)$。

事实上我们仅仅需要验证1)，即

$$P\{N_{t+\Delta t}=i|N_t=i\}=1-\lambda_i\Delta t-\mu_i\Delta t+o(\Delta t).$$

利用全概率公式

$$\begin{aligned}1&=\sum_{j=0}^{\infty}P\{N_{t+\Delta t}=j|N_t=i\}\\&=P\{N_{t+\Delta t}=i-1|N_t=i\}+P\{N_{t+\Delta t}=i|N_t=i\}\\&\quad+P\{N_{t+\Delta t}=i+1|N_t=i\}+\sum_{|i-j|\geq 2}P\{N_{t+\Delta t}=j|N_t=i\}\\&=\mu_i\Delta t+P\{N_{t+\Delta t}=i|N_t=i\}+\lambda_i\Delta t+o(\Delta t).\end{aligned}$$

所以

$$P\{N_{t+\Delta t}=i|N_t=i\}=1-\lambda_i\Delta t-\mu_i\Delta t+o(\Delta t).$$

由全概率公式我们有

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)(1-\lambda_i\Delta t-\mu_i\Delta t)+p_{i-1}(t)\lambda_{i-1}\Delta t+p_{i+1}(t)\mu_{i+1}\Delta t+o(\Delta t).$$

类似的，对$i=0$有

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda_0\Delta t)+p_1(t)\mu_1\Delta t+o(\Delta t).$$

当状态空间有限时，对$i=K$有

$$p_K(t+\Delta t) = p_K(t)(1-\mu_K\Delta t)+p_{K-1}(t)\lambda_{K-1}\Delta t+o(\Delta t).$$

将前面的式子右端不含Δt的项移到左边，用Δt通除两端，然后令Δt下降趋于0，根据马氏过程的结论得到Kolmogorov向前微分差分方程组

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= \lambda_{i-1}p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t), & (43) \\ p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t). & (44) \end{aligned}$$

特别的，当状态空间有限时还有

$$p_K'(t) = \lambda_{K-1}p_{K-1}(t) - \mu_K p_K(t). \tag{45}$$

求解上面的方程组，就可以得到时刻t系统的状态概率分布$\{p_i(t), i \in E\}$，即生灭过程的瞬时解。

定理6.1(生灭过程微分差分方程组解的存在性)：

1) 对有限状态$E = \{0,1,2,\cdots,K\}$的生灭过程，若满足$p_i(t) \geq 0$，$\sum_{j=0}^{K} p_j(t) \leq 1$，则对任给的初始条件，方程组(43), (44)和(45)的解存在、惟一，而且

$$p_i(t) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{K} p_j(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

2) 对可列无限状态$E = \{0,1,2,\cdots,\}$的生灭过程，若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_2}{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_1} \right) = \infty, \tag{46}$$

而且满足$p_i(t) \geq 0$，$\sum_{j=0}^{K} p_j(t) \leq 1$，则对任给的初始条件，方程组(43)和(44)的解存在、惟一，而且

$$p_i(t) \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{K} p_j(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

定理6.2(极限定理)：令$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$，$j \in E$。

1) 对有限状态$E = \{0, 1, 2, \cdots, K\}$的生灭过程，$\{p_j, j = 0, 1, \cdots, K\}$存在，与初始条件无关，且

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{K} p_j = 1,$$

即$\{p_j, j = 0, 1, \cdots, K\}$为平稳分布。

2) 对可列无限状态$E = \{0, 1, 2, \cdots, \}$的生灭过程，若有条件

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} < \infty, \text{ 收敛} \tag{47}$$

以及

$$\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \frac{1}{\lambda_j} = \infty \text{ 发散} \tag{48}$$

成立，则$\{p_j, j = 0, 1, \cdots\}$存在，与初始条件无关，且

$$p_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

即$\{p_j, j = 0, 1, \cdots, \}$为平稳分布。

定理6.3：在$p_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$存在的条件下，$j\in E$，有

$$\lim_{t\to\infty}p_j'(t)=0,\quad j\in E.$$

证明：由上面的定理知道，微分差分方程组右端的极限存在，于是$\lim_{t\to\infty}p_j'(t)$存在，$j\in E$。

若存在一个状态$j_0\in E$，使得$\lim_{t\to\infty}p_j'(t)=d\neq 0$，不妨设$d>0$，存在$t_0>0$，当$t\geq t_0$时，有

$$p_j'(t)\geq\frac{d}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}p_{j_0}(t) &= \lim_{t\to\infty}\left[p_{j_0}(t_0)+\int_{t_0}^{t}p_{j_0}'(s)ds\right]\\ &\geq p_{j_0}(t_0)+\lim_{t\to\infty}\frac{d}{2}(t-t_0)=\infty.\end{aligned}$$

这与$p_{j_0}(t)\leq 1$矛盾。（证毕）

因此，在$\{p_j, j \in E\}$存在的条件下，令$t \to \infty$，就得到了平衡方程。

1) 对有限状态生灭过程，我们有：

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \\ (\lambda_j + \mu_j) p_j = \lambda_{j-1} p_{j-1} + \mu_{j+1} p_{j+1}, \ \ j = 1, 2, \cdots, K-1 \\ \lambda_{K-1} p_{K-1} = \mu_K p_K, \end{cases} \tag{49}$$

再结合$\sum_{j=0}^{K} p_j = 1$，可解得

$$p_j = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \right) p_0, \ \ j = 1, 2, \cdots, K \tag{50}$$

其中

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{K} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}}.$$

特别的，当$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{K-1} = \lambda$，$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K = \mu$时，有

$$\begin{cases} p_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0, & j = 1, 2, \cdots, K, \\ p_0 = 1 \Big/ \sum_{j=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j. \end{cases} \tag{51}$$

2) 对$E=\{0,1,2,\cdots\}$的可数无限状态生灭过程，有

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1, \\ (\lambda_j+\mu_j)p_j = \lambda_{j-1}p_{j-1} + \mu_{j+1}p_{j+1}, \quad j=1,2,\cdots \end{cases} \tag{52}$$

再结合$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$，可解得

$$p_j = \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)p_0, \quad j=1,2,\cdots \tag{53}$$

其中

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}}.$$

特别的，当$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda$，$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu$时，只要$\frac{\lambda}{\mu} < 1$，则$\{p_j, j \in E\}$存在，而且

$$p_j = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{54}$$

谢谢大家！