中国科学院研究生院

运筹通论II

刘克

中科院数学与系统科学研究院 北京100190

邮箱地址: kliu@amss.ac.cn

第二章　排队论

引言
一般性结论
$M/M/$型模型
有限源的简单排队系统
可化成M/M型排队系统
一般排队系统
特殊排队系统

Home Page
Title Page
Page 4 of 140
Go Back
Full Screen
Close
Quit

1 引言

1909年丹麦哥本哈根电话公司的A.K.Erlang发表了著名的论文“概率与电话通话理论”，开创了排队论研究的历史。到现在，已经在计算机网络、通讯、交通以及其他公共事业中的应用越来越广泛，成为分析和设计这些系统的一个必不可少的工具。

1.1. 排队模型的描述

1) 顾客到达的规律，即输入过程

若顾客相继到达，记第i个顾客的到达时间为T_i，则$T_0 = 0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots$，再记相继到达间隔为$X_i$，$X_i = T_i - T_{i-1}, i \leq 1$，通常假设$X_i(i \leq 1)$独立同分布，即假定输入过程$\{X_n, n \geq 1\}$是一个更新过程。更特殊些，假定$\{X_n, n \geq 1\}$是一个时齐的Poisson过程。

顾客有时是成批到达的，此时需要进一步说明每批顾客数的概率规律。另外，顾客源有时也需要强调。

2) 排队规则

损失制、等待制、混合制；先到先服务(FIFO)、后到先服务(LIFO)、随机服务；有优先权服务（强拆与非强拆）等等。

3) 服务机制、服务机构

服务台数目与串并联，服务时间、是否成批等等。

1.2. 排队模型的记号

经典排队轮的符号表示：通常用3-5个英文字母表示，中间用斜线隔开。

$M/M/c/\infty$表示输入过程是Poisson流，服务时间服从负指数分布，系统有c个服务台平行服务$(0 < c \leq \infty)$，系统容量为无穷，于是$M/M/c/\infty$是等待制系统。

$M/G/1/\infty$，$GI/M/1/\infty$，$E_k/G/1/K$，$D/M/c/K$，$M^r/M/1/\infty$，$M^X/M/c/\infty$

1）系统的性状研究，包括：队长、等待时间、忙期等等。

时刻$t \geq 0$系统中的顾客总数（包括正接受服务的）称为队长，记作$N(t)$，我们感兴趣的是

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\},\ n \geq 0, t \geq 0. \tag{1}$$

由于$p_n(t)$依赖于t，故称为瞬时解。称$t \to \infty$时的解为稳态解。因此，若

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n > 0,\ n \geq 0$$

存在，则称$\{p_n, n \geq 0\}$为稳态队长分布，若记N为稳态下的队长，则

$$p_n = P\{N = n\},\ n \geq 0 \tag{2}$$

稳态下的平均队长记作L，则有

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n. \tag{3}$$

系统中等待的顾客平均数记作L_q。

等待时间。时刻t到达的顾客的等待时间记作$T_q(t)$，稳态下顾客的等待时间记作T_q，顾客在系统中逗留的时间记作T。则有

$$T = T_q + S, \tag{4}$$

这里的S为完成一个顾客的服务时间。记稳态下顾客的平均等待时间及在系统中的平均逗留时间分别为：

$$W_q = E[T_q], \ \ W = E[T]. \tag{5}$$

忙期定义为从服务台开始工作到所有服务台空闲之间的间隔，闲期为服务台空闲的时间长度。

2）有关统计问题的研究。

3）最优化问题

2 一般性结论

这里介绍稳态下对一般排队系统成立的结论。一个是关于稳态概率，另一个是Little公式。后者给出了平均队长与平均到达率、平均等待时间之间的关系。

2.1. 稳态概率的有关结果

设$N(t)$为时刻t系统中的顾客数，记

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\},\ n \geq 0, \tag{6}$$

初始状态为

$$p_i(0) = \delta_{ni},\ n \geq 0$$

如果

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n > 0,\ n \geq 0$$

存在，则p_n表示系统中有n个顾客的稳态概率。直观上p_n可以理解为系统中有n个顾客的时间所占的比例。

理论与应用中需要知道稳态下当一个顾客到达或离去时发现有n个顾客在系统中的概率，记：

$$
\begin{aligned}
a_n &= P\{\text{稳态下到达顾客发现已有}n\text{个顾客在系统中}\} \\
\pi_n &= P\{\text{稳态下顾客离去时发现身后恰有}n\text{个顾客}\}
\end{aligned}
$$

a_n表示在长期运行下到达顾客发现有n个顾客在系统中这个事件所占的时间比例,而π_n为稳态下离去顾客发现他身后仍有n个顾客这一事件的比例。一般来说，p_n、a_n及π_n不总是相等的。但是：

定理2.1：对顾客单个到达及离去的任意排队系统（即非成批到达或成批服务的系统），在稳态下有：

$$a_n = \pi_n,\ n \geq 0.$$

证明：一个顾客到达系统时，见到系统中有n个顾客，于是顾客从n增加到$n+1$。一个顾客离开系统时，系统里有n个顾客，表明当他离开后系统的顾客数从$n+1$减少到n。所以在任意时间长度区间内从n到$n+1$的次数和$n+1$到n的次数最多相差1。因此，当$t\to\infty$时，稳态下从n到$n+1$或从$n+1$到n的平均转移率相等，故结论成立。

当输入过程是Poisson过程时，我们有进一步的结果。设

$$a_n(t) = P\{\text{时刻}t\text{到达的顾客发现系统中已有}n\text{个顾客}\},\ n \geq 0. \tag{7}$$

我们称$a_n(t)$为到达顾客看到的概率，而由(6)定义的$p_n(t)$为外部观察者看到的概率。

定理2.2：当输入过程是Poisson过程时，有$\forall t \geq 0$

$$p_n(t) = a_n(t),\ n \geq 0 \tag{8}$$

证明：记$N(t)$为时刻t系统中顾客数，

$$c(t,t+h)=\{一个顾客在(t,t+h)中到达\}$$

于是有

$$a_n(t)=\lim_{h\to 0^+}P\{N(t)=n|c(t,t+h)\}$$

（注意，在$(t,t+h)$中到达的顾客并非一定要进入系统，他可能立即离去而不引起状态转移）由于到达是Poisson的，因此，对任意的$t\geq 0$，$n\geq 0$，事件$c(t,t+h)$与$\{N(t)=n\}$独立，故

$$P\{c(t,t+h)|N(t)=n\}=P\{c(t,t+h)\}$$

进而有

$$P\{N(t)=n|c(t,t+h)\}=P\{N(t)=n\}$$

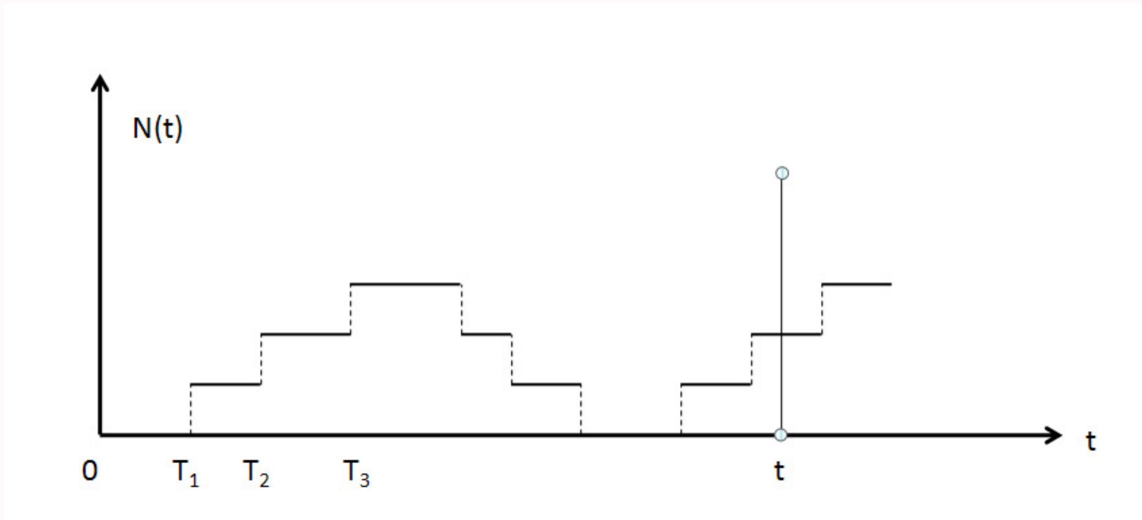
令$h\to 0^+$得到结论。

2.2. Little公式

设Little公式是排队论中普遍成立的一个关系式，它给出了在稳态平均意义下系统中顾客数L，到达率λ和逗留时间W之间的关系。记

- $N(t)$ =时刻t系统中顾客数
- $A(t) = (0,t)$中到达的顾客数
- $B(t) = (0,t)$中到达的顾客在系统中逗留时间之和
- $\lambda(t) = (0,t)$中平均到达率$= \frac{1}{t}A(t)$
- $W(t) = (0,t)$中到达顾客的平均逗留时间$= B(t)/A(t)$
- $L(t) = (0,t)$中系统的顾客平均数

如图，显然有



$$
\begin{aligned}
L(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t N(x)dx = \frac{1}{t}B(t) \\
&= \frac{1}{t}A(t)\frac{B(t)}{A(t)} = \lambda(t)W(t)
\end{aligned}
$$

假设平均到达率为λ，平均逗留时间为W，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\lambda(t) &= \lambda,\\ \lim_{t\to\infty}W(t) &= W\end{aligned}$$

存在，则平均队长L

$$\lim_{t\to\infty}L(t)=L$$

亦存在，且满足关系式

$$L=\lambda W \tag{9}$$

若相应的将$L(t)$, $B(t)$, $W(t)$和$N(t)$换成

- $L_q(t) = (0,t)$中系统的平均等待顾客数

- $B_q(t) = (0,t)$中到达的顾客的等待时间之和

- $W_q(t) = (0,t)$中到达顾客的平均等待时间

- $N_q(t) =$时刻t在系统中等待服务的顾客数

于是

$$L_q(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N_q(x)dx = \frac{1}{t}B_q(t) = \frac{1}{t}A(t)\frac{B_q(t)}{A(t)} = \lambda(t)W_q(t)$$

在$\lim_{t\to\infty} W_q(t) = W_q$存在的条件下，有

$$L_q = \lambda W_q \tag{10}$$

公式(9)和(10)通常称为Little公式。注意，上面的证明不依赖于到达或服务时间的分布，也不依赖于系统中的服务台数目和排队规则。因此，Little公式是稳态下普遍成立的一个基本关系。需要说明的是，把这些公式用于混合制、损失制或者有限源的系统时，到达率λ应当修正为到达并进入系统的率。

3 $M/M/$型模型

输入为Poisson过程，服务时间为负指数分布的一大类简单排队模型通常称为马尔科夫型排队模型。他们是排队论早期研究的对象，是构造更一般模型的基础，这里我们讨论最简单的M/M/1模型

3.1. $M/M/1/\infty$模型

假设顾客的到达为参数$\lambda(>0)$的Poisson过程，服务的负指数分布参数为$\mu>0$。我们将分为如下步骤介绍：

1）定义状态和状态空间
2）确定状态转移率
3）画出状态转移图并得到Q矩阵
4）给出微分差分方程组
5）获得数字特征
6）等待时间与逗留时间分布
7）忙期
8）输出过程
9）瞬时性质*

1）定义状态和状态空间：以系统中的顾客数$N(t)$为状态，它可能的取值是$0, 1, 2, \cdots$，因此，状态空间就是集合$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$。

2）确定状态转移率

考察

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|N(t) = i\},\ i,j \in E$$

当$j = i+1$时，在条件$N(t) = i$下，事件$N(t+\Delta t) = j$可以分解为下面两个互不相容的两个事件：

a) 在$(t, t+\Delta t)$内恰好到达一个顾客，而且正在接受服务的顾客（当$i \geq 1$）没有结束服务，其发生的概率为：

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 \leq \Delta t < \tau_1+\tau_2, \chi_1 > \Delta t\} &= P\{\tau_1 \leq \Delta t < \tau_1+\tau_2\} \times P\{\chi_1 > \Delta t\} \\ &= \frac{(\lambda \Delta t)}{1!} e^{-\lambda \Delta t} e^{-\mu \Delta t} \\ &= \lambda \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

其中$\{\tau_i, i \geq 1\}$和$\{\chi_i, i \geq 1\}$分别为顾客到达的时间间隔和顾客接受服务的时间序列。

b) 在$(t, t+\Delta t)$内至少到达两个顾客，其发生的概率为：$o(\Delta t)$。

因此，我们有：

$$P\{N(t+\Delta t) = i+1|N(t) = i\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t),\ i \geq 0. \tag{11}$$

同样考察

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j|N(t) = i\},\ i,j \in E$$

当$j = i - 1$时，在条件$N(t) = i$下，事件$N(t+\Delta t) = j$可以分解为下面两个互不相容的两个事件：

c) 在$(t, t+\Delta t)$内恰好服务结束一个顾客，而且没有顾客到达，其发生的概率为：

$$\begin{aligned} P\{\tau_1 > \Delta t, \chi_1 \le \Delta t < \chi_1 + \chi_2\} &= P\{\tau_1 > \Delta t\} \times P\{\chi_1 \le \Delta t < \chi_1 + \chi_2\} \\ &= \frac{(\mu \Delta t)}{1!} e^{-\mu \Delta t} e^{-\lambda \Delta t} \\ &= \mu \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

d) 在$(t, t+\Delta t)$内至少服务两个顾客，使得状态为$i-1$，其发生的概率为：$o(\Delta t)$。

因此，我们有：

$$P\{N(t+\Delta t) = i-1|N(t) = i\} = \mu \Delta t + o(\Delta t),\ i \ge 1. \tag{12}$$

用类似的分析知道,

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad |i-j| \geq 2. \tag{13}$$

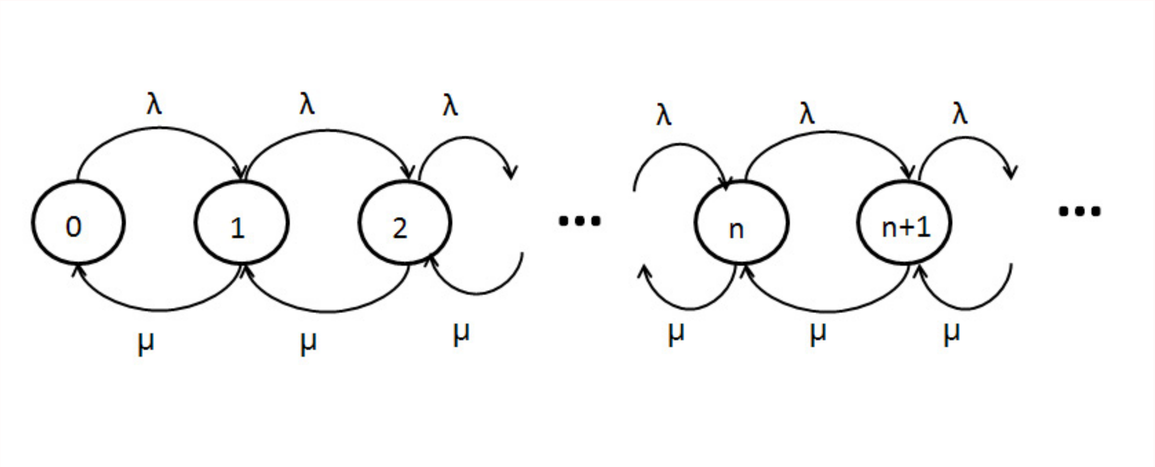
将上面的三种情况结合起来，有：

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda\Delta t + o(\Delta t) & j = i+1,\ i \geq 0 \\ \mu\Delta t + o(\Delta t) & j = i-1,\ i \geq 1 \\ o(\Delta t) & |i-j| \geq 2 \end{cases} \tag{14}$$

于是$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个可数无限状态空间E上的生灭过程，其参数为：

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda & i \geq 0 \\ \mu_i = \mu & i \geq 1 \end{cases} \tag{15}$$

3）画出状态转移图



Q矩阵

$$
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

4）给出微分差分方程组

根据Kolmogorov向前方程，

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

得到$p_j(t) = P\{N(t) = j\}$满足的方程

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_j'(t) = -(\lambda+\mu)p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + \mu p_{j+1}(t), \ \ j \geq 1 \end{cases} \tag{16}$$

令$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$，则$\rho$称为系统的交通强度(traffic indensity)。根据生灭过程的极限定理，有：

定理3.1：令$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \cdots$，则

1) 当$\rho \geq 1$时，$p_j = 0, j = 0, 1, 2, \cdots$不构成概率分布；

2) 当$\rho < 1$时，$\{p_j, j = 0, 1, 2, \cdots\}$存在，与初始分布无关，而且

$$p_j = (1-\rho)\rho^j, \ j = 0, 1, 2, \cdots \tag{17}$$

构成一个几何概率分布。

5）数字特征

如果记N为统计平衡下系统中的顾客数，L为N的数学期望，那么

$$L = E[N] = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

其方差为

$$\begin{aligned} D[N] &= \sum_{i=0}^{\infty} (i-L)^2 p_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i - L^2 \\ &= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

所以

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{18}$$

$$D[N] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2} \tag{19}$$

如果记N_q为统计平衡下系统中排队等待的顾客数，L_q为N_q的数学期望，那么

$$
\begin{aligned}
L_q &= E[N_q] = \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)p_i = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i - \sum_{i=1}^{\infty} p_i \\
&= L - (1-p_0) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = L\rho.
\end{aligned}
$$

其方差为

$$
\begin{aligned}
D[N_q] &= \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)^2 p_i - L_q^2 \\
&= \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2} = \frac{\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu-\lambda^2)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}.
\end{aligned}
$$

注意到

$$D[N_q] = \rho D[N] + \frac{\rho^3}{1-\rho}$$

所以

$$D[N] - D[N_q] = D[N](1-\rho) - \frac{\rho^3}{1-\rho} = \rho(1+\rho) \geq 0$$

故

$$D[N] \geq D[N_q]. \tag{20}$$

再有，对所有的$i \geq 0$，总有

$$P\{N \geq i\} = \rho^i. \tag{21}$$

非空排队的一些指标。记L_q'表示非空排队的期望值，则

$$L_q' = E[N_q | N_q \neq 0] = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) p_i'$$

其中p_i'是给定排队等待非空条件下，系统有n个顾客的条件概率，即

$$p_i' = P\{N = n | N \geq 2\} = p_i \div \sum_{j=2}^{\infty} p_j = \frac{p_i}{\rho^2}$$

因此

$$L_q' = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \frac{p_i}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} L_q = \frac{1}{1-\rho} (> L_q)$$

也可以计算得到

$$D[N_q | N_q \neq 0] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

6）等待时间

上面关于$M/M/1/\infty$的结论不涉及到等待制的服务规则，下面假设先来先服务。

定理3.2：在统计平衡($\rho<1$)下，顾客的等待时间分布函数为

$$W_q(t) \; = \; P\{W_q \le t\} = 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \;\; t \ge 0; \tag{22}$$

平均等待时间为：

$$\bar{W}_q = E[W_q] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \; \rho < 1; \tag{23}$$

等待时间的方差为：

$$D[W_q] = \frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}, \; \rho < 1. \tag{24}$$

证明:

1) 当$t=0$时，有

$$
\begin{aligned}
W_q(0) &= P\{W_q=0\} && (25)\\
&= P\{\text{顾客到达时看到的队长为}0\} = p_0^-. && (26)
\end{aligned}
$$

2) 当$t>0$时,

$$
\begin{aligned}
W_q(t) &= P\{W_q=0\}+P\{0<W_q\le t\} && (27)\\
&= p_0^- + \sum_{j=1}^{\infty} P\{0<W_q\le t|\text{到达看到队长为}j\}p_j^- && (28)
\end{aligned}
$$

我们知道此时有$p_j^- = p_j, j=0,1,2,\cdots$。于是

$$
\begin{aligned}
W_q(t) &= p_0^- + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_{0^+}^{t}\frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu x}dx\right\}p_j^- && (29)\\
&= (1-\rho)+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\int_{0^+}^{t}\frac{\mu(\mu x)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu x}dx\right\}(1-\rho)\rho^j && (30)\\
&= 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t>0. && (31)
\end{aligned}
$$

逗留时间

由于顾客的逗留时间等于等待时间加上服务时间，即

$$W = W_q + \chi \tag{32}$$

而且，W_q与χ相互独立，所以

$$\begin{aligned} W(t) &= P\{W \leq t\} \\ &= \int_0^t P\{W_q \leq t - x\})dP\{\chi \leq x\} \\ &= \int_0^t [1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)(t-x)}] \times \mu e^{-\mu x} dx \\ &= 1 - e^{-(\mu-\lambda)t},\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

平均逗留时间为：

$$\bar{W} = \bar{W}_q + E[\chi] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda},\ \rho < 1. \tag{34}$$

方差为

$$D[W] = D[W_q] + D[\chi] = \frac{1}{(\mu - \lambda)^2},\ \rho < 1. \tag{35}$$

7）忙期

当$N(t)$从0变到1的时刻，忙期就开始了，此后$N(t)$第一次变到0时忙期结束。根据简单流与负指数分布的性质，忙期的长度和它的起点无关，所以不妨令$t=0$时忙期开始，即$N(0)=1$，而$N(t)$第一次变为0时忙期结束。我们已经知道$\{N(t),t\geq 0\}$是生灭过程，参数$\lambda_i=\lambda,i=0,1,\cdots$，$\mu_i=\mu,i=1,2,\cdots$。我们构造一个新的生灭过程$\{\tilde{N}(t),t\geq 0\}$，它与原来$\{N(t),t\geq 0\}$的差别仅在于0是一个吸收状态。即参数为：

$$\begin{cases}\tilde{\lambda}_0=0,\\ \tilde{\lambda}_i=\lambda,\quad i\geq 1\\ \tilde{\mu}_j=\mu,\quad j\geq 1.\end{cases}\tag{36}$$

因此，忙期长度b的分布就是：

$$B(t)=P\{b\leq t\}=P\{\tilde{N}(t)=0\}.\tag{37}$$

令

$$\tilde{p}_j(t) = P\{\tilde{N}(t) = j\},\ j = 0, 1, 2, \cdots \tag{38}$$

则

$$B(t) = \tilde{p}_0(t) \tag{39}$$

容易导出$\tilde{p}_j(t)$满足的微分方程组：

$$\begin{cases} \tilde{p}_0'(t) = \mu\tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_1'(t) = -(\lambda+\mu)\tilde{p}_1(t) + \mu\tilde{p}_2(t), \\ \tilde{p}_j'(t) = \lambda\tilde{p}_{j-1}(t) - (\lambda+\mu)\tilde{p}_j(t) + \mu\tilde{p}_{j+1}(t),\ \ j \geq 2. \end{cases} \tag{40}$$

令

$$\tilde{P}(z,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{p}_j(t)\cdot z^j,\ |z|<1,$$

由方程组(40)可得

$$z\cdot\frac{\partial\tilde{P}(z,t)}{\partial t}=(1-z)(\mu-\lambda z)[\tilde{P}(z,t)-\tilde{p}_0(t)]. \tag{41}$$

取拉普拉斯(Laplace)变换，对$\Re(s)>0$，令

$$\begin{aligned}\tilde{P}^*(z,s)&=\int_0^{\infty}\tilde{P}(z,t)e^{-st}dt,\\ \tilde{p}_0^*(s)&=\int_0^{\infty}\tilde{p}_0(t)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

考虑到初始条件

$$\tilde{p}_j(0) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1. \end{cases}$$

得到

$$-z^2 + sz\tilde{P}^*(z,s) = (1-z)(\mu - \lambda z)[\tilde{P}^*(z,s) - \tilde{p}_0^*(s)]$$

所以得到

$$\tilde{P}^*(z,s) = \frac{z^2 - (1-z)(\mu - \lambda z)\tilde{p}_0^*(s)}{sz - (1-z)(\mu - \lambda z)}. \tag{42}$$

考察等式(42)右端的分母，在$|z|=1$上，而且实部$\Re(s)>0$时有

$$\begin{aligned}|-(\lambda z^2-\mu)| &\leq |\lambda z^2|+|\mu|=\lambda+\mu \\ &< |\lambda+\mu+s|=|(\lambda+\mu+s)z|\end{aligned}$$

所以利用儒歇(Rouché)定理，函数$-(\lambda z^2+\mu)+(\lambda+\mu+s)z$与$(\lambda+\mu+s)z$在$|z|<1$的圆盘里有相同的零点个数。所以，式(42)的分母在单位园里只有一个零点，为

$$a_1=\frac{\lambda+\mu+s-\sqrt{(\lambda+\mu+s)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}. \tag{43}$$

其中开方前面取负号保证了根落在单位园内。

由于$\tilde{P}^*(z,s)$在$|z|<1$收敛，所以$z=a_1$也必然是(42)式分子的零点，所以解得

$$\tilde{p}_0^*(s)=\frac{a_1^2}{(1-a_1)(\mu-\lambda a_1)}.$$

再根据$sa_1-(1-a_1)(\mu-\lambda a_1)=0$，得到

$$\tilde{p}_0^*(s)=\frac{a_1}{s}. \tag{44}$$

但是

$$\tilde{p}_0^*(s)=-\frac{1}{s}\int_{)}^{\infty}\tilde{p}_0(t)de^{-st}=\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}\tilde{p}_0'(t)dt,$$

所以

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\tilde{p}_0'(t)dt=a_1.$$

根据拉普拉斯反演运算，得到忙期的分布密度函数

$$\tilde{p}_0'(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}\frac{1}{t}} e^{-(\lambda+\mu)t} I_1(2t \cdot \sqrt{\lambda\mu}),$$

其中

$$I_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}y\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

为修正的贝塞尔(Bessel)函数。故有

$$B(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\lambda\mu x^2)^{k-1}}{k!(k+1)!} e^{-(\lambda+\mu)x} dx \tag{45}$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} B(t) &= \lim_{t\to\infty} \tilde{p}_0^*(t) = \lim_{s\to 0^+} s\tilde{p}_0^*(s) = \lim_{s\to 0^+} a_1 \\ &= \begin{cases} 1, & \rho \le 1, \\ \frac{1}{\rho}, & \rho > 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{46}$$

当$\rho \le 1$时是分布函数，当$\rho > 1$时不是分布函数。

平均忙期长度$\bar{b}$为

$$\begin{aligned}\bar{b} &= E[b] = \int_0^\infty t dB(t) = -\frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty e^{-st} d\tilde{p}_0(t)\right]\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}[a_1]\Big|_{s=0} = \begin{cases} \frac{1}{\mu-\lambda}, & \rho < 1 \\ \infty, & \rho \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{47}$$

一个忙期所服务的平均顾客数为

$$\mu\bar{b} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \rho < 1. \\ \infty, & \rho \geq 1. \end{cases} \tag{48}$$

8）输出过程

不难看出，在忙期内相继输出的间隔时间是独立的、同参数μ的随机变量，即为参数μ的Poisson流。但是，当系统空闲后，从开始空闲时刻起到下一个顾客服务结束离开系统的时间间隔显然与服务时间不同分布。

令T_n^+表示第n个顾客服务完毕离去的时刻，则用$T_{n+1}^+ - T_n^+$表示离去的间隔时间，$(n \geq 1)$，于是对$t \geq 0$

$$\begin{aligned}
P\{T_{n+1}^+ - T_n^+ > t\} &= P\{N_n^+ = 0\} \cdot P\{T_{n+1}^+ - T_n^+ > t | N_n^+ = 0\} \\
&\quad + P\{N_n^+ \geq 1\} \cdot P\{T_{n+1}^+ - T_n^+ > t | N_n^+ \geq 1\} \\
&= P\{N_n^+ = 0\} \cdot P\{\hat{\tau}_{n+1} + \chi_{n+1} > t\} \\
&\quad + P\{N_n^+ \geq 1\} \cdot P\{\chi_{n+1} > t\}
\end{aligned}$$

其中$\hat{\tau}_{n+1}$表示剩余到达时间间隔，与χ_{n+1}独立，而N_0^+表示第n个离去顾客服务完毕离开系统时的队长。

由于

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n^+ = 0\} = \begin{cases} 1-\rho, & \rho < 1, \\ 0, & \rho \geq 1. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\{T_{n+1}^+ - T_n^+ > t\} &= (1-\rho)\left[\frac{\mu}{\mu-\lambda}e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\mu-\lambda}e^{-\mu t}\right] + \rho e^{-\mu t} \\ &= e^{-\lambda t}, t \geq 0.\end{aligned}$$

3.2. 具有可变输入的$M/M/1/\infty$模型

假设顾客的到达时并不一定都进入系统，假设顾客到达时看到队长为k时，进入系统的概率是$\alpha_k(0 < \alpha_k < 1$，而且$1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k \to 0(k \to \infty)$，设到达为参数$\lambda(> 0)$的Poisson过程，服务的负指数分布参数为$\mu > 0$，与到达彼此独立。我们依然可以按照如下步骤分析：

1）定义状态和状态空间；2）确定状态转移率；3）画出状态转移图并得到Q矩阵；4）给出微分差分方程组；5）获得数字特征；6）等待时间与逗留时间分布；7）忙期；8）输出过程等等。

我们仅对$\alpha_k = \frac{1}{k+1}$的情形给出一些结果。类似的，用$N(t)$ 表示t时刻系统中的顾客数，则状态转移率为

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{i+1}\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1,\ i \geq 0; \\ \mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1,\ i \geq 1; \\ o(\Delta t), & |i-j| \geq 2. \end{cases} \tag{49}$$

得到$\{N(t), t \geq 0\}$为$E = \{0, 1, 2, \cdots\}$上的生灭过程，其参数为：

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}, & i = 0, 1, 2, \cdots ; \\ \mu_i = \mu, & i = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{50}$$

定理3.3：令$p_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}$，$j = 1, 2, \cdots$，则对一切$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$，$\{p_j, j \geq 0\}$存在，与初始条件无关，且：

$$p_j = \frac{\rho^j}{j!} e^{-\rho}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{51}$$

构成参数为ρ的Poisson概率分布。

因此，在统计平衡下，得到平均队长

$$\bar{N} = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^j}{(j-1)!} e^{-\rho} = \rho. \tag{52}$$

平均等待队长

$$\bar{N}_q = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) p_j = \rho + e^{-\rho} - 1. \tag{53}$$

等待时间与逗留时间

定理3.4：在统计平衡下，进入系统接受服务的顾客的等待时间分布函数为

$$\begin{aligned} W_q(t) &= P\{W_q \le t\} \\ &= 1 - \frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!},\ t \ge 0, \end{aligned} \tag{54}$$

而平均等待时间为

$$\bar{W}_q = \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)} - \frac{1}{\mu}. \tag{55}$$

利用分布函数的卷积公式，可以得到顾客逗留时间的分布函数

$$W(t) = 1 - \frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho} - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{k=0}^{j} \frac{(\mu t)^k}{k!}, \ t \geq 0, \tag{56}$$

而平均逗留时间为

$$\bar{W} = \bar{W}_q + E[\chi] = \frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho} - 1)}. \tag{57}$$

类似的可以考虑具有可变服务率的$M/M/1/\infty$系统。

3.3. $M/M/\infty$模型

用$N(t)$ 表示t时刻系统中的顾客数，此时也是系统中在忙的服务台数，则状态转移率为

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,\ i\geq 0;\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\ i\geq 1;\\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2.\end{cases} \tag{58}$$

得到$\{N(t),t\geq 0\}$为$E=\{0,1,2,\cdots\}$上的生灭过程，其参数$\lambda_j=\lambda, j\geq 0$; $\mu_j=j\mu, j\geq 1$。

定理3.4：令$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, $p_j(t)=P\{N(t)=j\}$, $p_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$, $j\geq 0$，则在初始条件$p_1(0)=1$, $p_j=0(j\neq 1)$下有：

$$1)\ p_j(t)=\frac{1}{j!}[\rho(1-e^{-\mu t})]^j e^{-\rho(1-e^{-\mu t})},\ t\geq 0; \tag{59}$$

$$2)\ p_j=\frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho}. \tag{60}$$

对于$M/M/\infty$系统，平均队长$\bar{N}=\rho$, $\bar{N}_q=\bar{W}_q=0$，逗留时间就是服务时间。

3.4. $M/M/c/\infty$模型

考虑系统中有c个服务员，到达率依然是参数$\lambda(>0$的简单流，服务时间同参数μ的指数分布。用$N(t)$ 表示t时刻系统中的顾客数，此时也是系统中在忙的服务台数，则状态转移率为

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,\ i\geq 0;\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\ i=1,2,\cdots,c-1;\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\ i=c,c+1,\cdots;\\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2.\end{cases} \tag{61}$$

得到$\{N(t),t\geq 0\}$为$E=\{0,1,2,\cdots\}$上的生灭过程，其参数为

$$\lambda_j=\lambda,\ j\geq 0;\quad \mu_j=\begin{cases}j\mu, & 1\leq j<c;\\ c\mu, & j\geq c.\end{cases} \tag{62}$$

定理3.5：令$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$，$\rho_c = \frac{\lambda}{c\mu}$，$p_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}, j \geq 0$，则当$\rho_c < 1$时，有$\{p_j, j \geq 0\}$存在，与初始条件无关，且

$$p_j = \begin{cases} \frac{1}{j!}\rho^j p_0, & 1 \leq j \leq c-1, \\ \frac{1}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0, & j \geq c, \end{cases} \tag{63}$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right]^{-1}. \tag{64}$$

因为系统中有c个服务台，所以顾客到达系统需要等的概率为：

$$p = \sum_{j=c}^{\infty} p_j = \frac{1}{1-\rho_c} p_c, \ \rho_c = \frac{\lambda}{c\mu} < 1, \tag{65}$$

其中$p_c = \frac{\rho^c}{c!} p_0$。

在统计平衡下，明显的有

$$P\{N_q = 0\} = \sum_{j=0}^{c} p_j, \ P\{N_q = k\} = p_{c+k}, k \geq 1, \tag{66}$$

所以当$\rho_c < 1$时，

$$\begin{aligned} \bar{N}_q &= E[N_q] = \sum_{j=c}^{\infty} (j-c) p_j = \sum_{j=c}^{\infty} (j-c) \frac{1}{c^{j-c} \cdot c!} \rho^j p_0 \\ &= \frac{p_0 \rho^c}{c!} \sum_{j=c}^{\infty} (j-c) \left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-c} = \frac{p_0 \rho^c}{c!} \sum_{j=c}^{\infty} (j-c) \rho_c^{j-c} \\ &= \frac{\rho_c p_0 \rho^c}{c!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^j\right)' \Bigg|_{x=\rho_c} = \frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2} \cdot p_c. \end{aligned} \tag{67}$$

令N_c为系统平衡时正在被服务的顾客数，则

$$P\{N_c=k\}=p_k, k=0,1,\cdots,c-1,\ P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{\infty}p_j, \tag{68}$$

所以当，

$$\begin{aligned}\bar{N}_c &= E[N_c]=\sum_{j=0}^{c-1}jp_j+c\sum_{j=c}^{\infty}p_j\\ &= \rho,\end{aligned} \tag{69}$$

与服务台个数无关。

显然有$N=N_q+N_c$，所以平均队长$\bar{N}$为

$$\bar{N}=\bar{N}_q+\bar{N}_c=\rho+\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}\cdot p_c,\ \rho_c<1. \tag{70}$$

可以验证，当$c=1$时，结果化成为$M/M/1/\infty$系统的有关结果，当$c\to\infty$时，结果成为$M/M/\infty$的情形。

等待时间与逗留时间

假设顾客先到先服务，令p_j^-表示顾客到达系统发现已有j个顾客的平稳概率，由第二节的结果知道，$p_j^- = p_j,\ j = 0, 1, \cdots$ 。于是有

定理3.6：当$\rho_c < 1$时，在统计平衡下顾客的等待时间分布为

$$W_q(t) = 1 - \frac{p_c}{1-\rho_c} e^{-\mu(c-\rho)t},\ t \geq 0, \tag{71}$$

其平均等待时间为

$$\bar{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c. \tag{72}$$

由于逗留时间$W = W_q + \chi$，而且W_q与χ独立，由卷积公式就得到

$$W(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}\left[1 + \frac{p_c}{1-\rho_c}\mu t\right], & \rho = c-1 \\ 1 - e^{-\mu t} - \frac{p_c}{(c-\rho-1)(1-\rho_c)}[e^{-\mu t} - e^{-\mu(c-\rho)t}], & \rho \neq c-1. \end{cases} \tag{73}$$

而平均逗留时间为

$$\bar{W} = \bar{W}_q + \frac{1}{\mu}. \tag{74}$$

输出过程

令N_t表示在一个顾客离去（从此时开始计时）之后，经过时间t，在系统中的顾客数，平衡状态下有

$$P\{N_t = n\} = p_n,\ n = 0, 1, 2, \cdot.$$

又令T表示平衡时相继离去的间隔时间，以及

$$F_n(t) = P\{N_t = n, T > t\},\ t \to 0.$$

显然有

$$P\{T > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t),\ t > 0. \tag{75}$$

对$F_n(t)$建立微分差分方程：考虑增量Δt，有

$$
\begin{aligned}
F_n(t+\Delta t) &= P\{N_{t+\Delta t}=n, T>t+\Delta t\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P\{N_{t+\Delta t}=n, T>t+\Delta t, N_t=j, T>t\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t)P\{N_{t+\Delta t}=n, T>t+\Delta t | N_t=j, T>t\} \\
&= \begin{cases} F_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + F_n(t)[1-(\lambda+c\mu)\Delta t] \\ +o(\Delta t),\ c\le n \\ F_{n-1}(t)\cdot\lambda\Delta t + F_n(t)[1-(\lambda+n\mu)\Delta t] \\ +o(\Delta t),\ 1\le n<c. \end{cases} \qquad (76) \\
F_0(t+\Delta t) &= F_0(t)[1-\lambda\Delta t]+o(\Delta t). \qquad (77)
\end{aligned}
$$

经整理得到

$$\begin{cases} F_n'(t) = -(\lambda + c\mu)F_n(t) + \lambda F_{n-1}(t), \quad c \le n, \\ F_n'(t) = -(\lambda + n\mu)F_n(t) + \lambda F_{n-1}(t), \ 1 \le n < c, \\ F_0'(t) = -\lambda F_0(t). \end{cases} \tag{78}$$

结合初始条件

$$F_n(0) = P\{N_0 = n\} = p_n, \ n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{79}$$

可以得到

$$F_n(t) = p_n e^{-\lambda t}, \ t \ge 0.$$

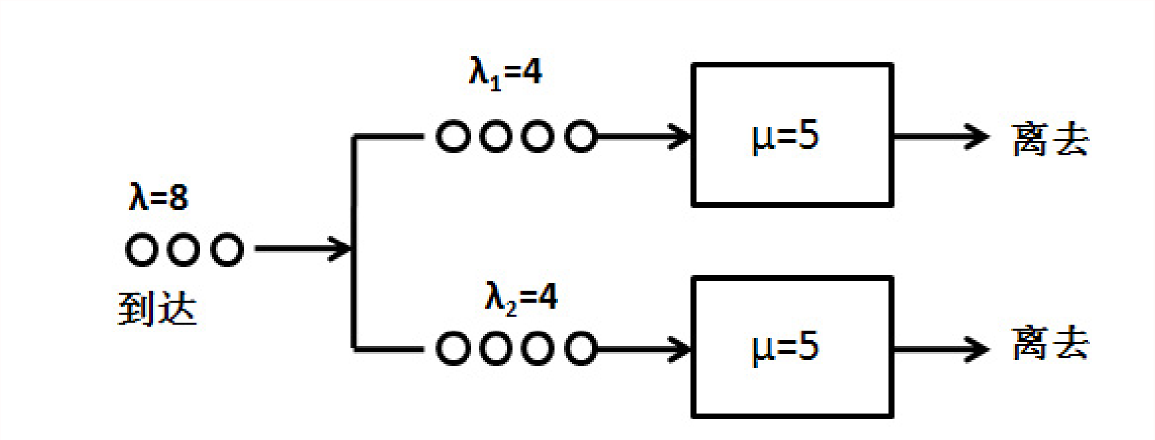
于是

$$P\{T > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = e^{-\lambda t}, \ t \le 0. \tag{80}$$

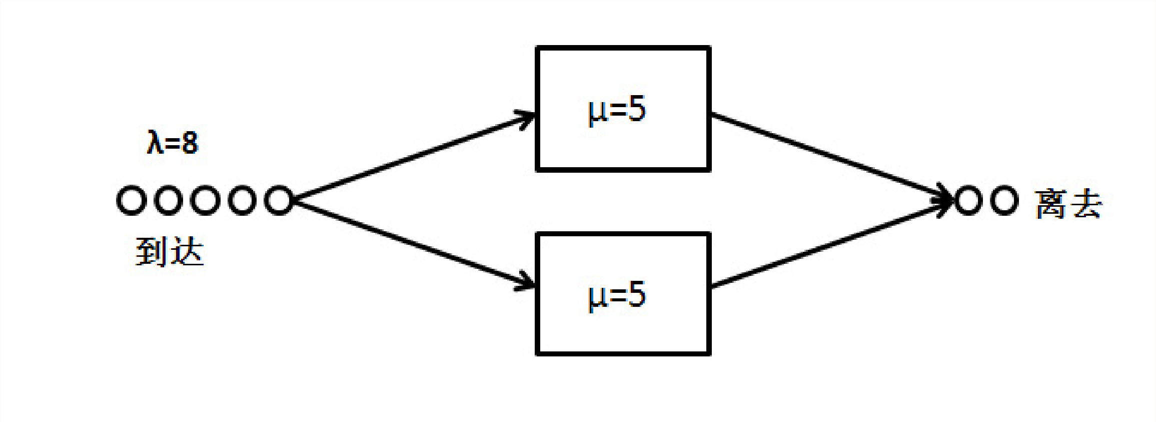
离去过程是参数λ的简单流。

例3.1：某售票点有两个窗口，顾客按照参数$\lambda = 8$人/分钟的Poisson流到达，每个窗口的售票时间均服从参数$\mu = 5$人/分钟的负指数分布，试比较以下两种排队方案的运行指标。

1）顾客到达后，以$\frac{1}{2}$的概率站成两个队列，如图：



2）顾客到达后排成一个队，排在最前面的顾客发现哪个窗口空闲，就去该窗口接受服务，如图：



解：1）实质上分为两个独立的$M/M/1/\infty$系统，每个系统顾客的到达率均为$\lambda_1=\lambda_2=4$(人/分钟) 的Poisson流，且$\rho=\frac{4}{5}$，于是

$$p_0=1-\rho=0.2;\quad \bar{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=3.2(\text{人}).$$
$$\bar{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=4(\text{人});\quad \bar{W}_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=0.8(\text{分钟})$$

2）实质上为$M/M/2/\infty$系统，$\rho=\frac{8}{5}$，$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}=0.8$，于是

$$\begin{aligned}
p_0 &= \left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right)^{-1} = 0.111;\\
\bar{N}_q &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}p_0=2.84(\text{人});\\
\bar{N} &= \bar{N}_q+\rho=4.44(\text{人});\\
\bar{W}_q &= \frac{\bar{N}_q}{\lambda}=0.355(\text{分钟});\\
P\{N\geq 2\} &= \frac{p_c}{1-\rho}=0.7104.
\end{aligned}$$

表明，采用多服务员，单一队列的各项运行指标优于多队列系统。

例3.2：在$M/M/c/\infty$排队系统中，设λ,μ已知，c待定。假设每个服务设备单位时间的成本为$e_2\mu$元，每个顾客在系统中逗留的时间成本为e_1元。需要确定最佳的c^*，使得单位时间内的平均总费用最小。

解：令$f(c)$表示单位时间内的平均总费用，则

$$
\begin{aligned}
f(c) &= ce_2\mu + e_1\bar{N} \\
&= ce_2\mu + e_1\left[\rho + \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\cdot p_0\right] \\
&= ce_2\mu + e_1\left[\rho + \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)^{-1}\right] \\
&= ce_2\mu + e_1\tilde{f}(c),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\tilde{f}(c) = \rho + \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)}\right)^{-1}
$$

利用边际分析法求最佳的c^*。因为$f(c^*)$为最小值，所以

$$f(c^*) \leq f(c^*-1),\ f(c^*) \leq f(c^*+1).$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{f}(c^*-1)-\tilde{f}(c^*) &\geq \frac{e_2}{e_1}\mu,\\ \tilde{f}(c^*)-\tilde{f}(c^*+1) &\leq \frac{e_2}{e_1}\mu.\end{aligned}$$

故，最佳的c^*应该满足：

$$\tilde{f}(c^*)-\tilde{f}(c^*+1) \leq \frac{e_2}{e_1}\mu \leq \tilde{f}(c^*-1)-\tilde{f}(c^*).$$

依次对$c=1,2,\cdots$求出$\tilde{f}(c)$的值，可以求出解。

3.5. $M/M/c/K$系统

这是一个混合制系统，系统中共有K个位置，c个服务员独立的平行工作，$c \leq K$。当K个位置被全部占用，新到的顾客就自动离开。到达的顾客依然服从参数λ的Poisson流，服务时间为参数μ的独立负指数分布。

假设$N(t)$为时刻t系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j | N(t) = i\},\ i, j = 0, 1, 2, \cdots, K,$$

类似的分析得到

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} \lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1, i = 0, 1, \cdots, K-1; \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = 1, 2, \cdots, c-1; \\ c\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = c, \cdots, K; \\ o(\Delta t), & |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

于是得到$\{N(t), t \geq 0\}$为$E = \{0, 1, \cdots, K\}$上的生灭过程，其中：

$$\lambda_i = \lambda, i = 0, 1, \cdots, K-1; \quad \mu_i = \begin{cases} i\mu, & 1 \leq i < c, \\ c\mu, & c \leq i \leq K. \end{cases}$$

定理3.7：令$\rho_c = \frac{\lambda}{\mu}$, $p_j = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = j\}$，则对一切$\rho$有

$$p_j = \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!} p_0, & 1 \leq j < c; \\ \frac{\rho^j}{c! c^{j-c}} p_0, & c \leq j \leq K, \end{cases}$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{K} \frac{\rho^n}{c! c^{j-c}} \right]^{-1}.$$

此时，系统的损失概率为

$$p = p_K = \frac{1}{c!c^{K-c}}\rho^K p_0.$$

单位时间内损失的顾客数为

$$\bar{\lambda}_e = \lambda p_K.$$

单位时间进入系统的顾客数为

$$\lambda_e = \lambda(1 - p_K).$$

平均等待队长为

$$\begin{aligned} \bar{N}_q &= \sum_{n=c}^{K}(n-c)p_n \\ &= \begin{cases} \frac{c^c}{2c!}(K-c)(K-c+1)p_0, & \rho_c = 1; \\ \frac{\rho_c\rho^c p_0}{c!(1-\rho_c)^2}[1-\rho_c^{K-c+1}-(1-\rho_c)(K-c+1)\rho_c^{K-c}], & \rho_c \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

其中$\rho_c = \frac{\lambda}{c\mu}$。

记N_c为平衡时正在接受服务的顾客数（服务台忙的个数），则

$$P\{N_c=j\}=p_j, j=0,1,\cdots,c-1;\ P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{K}p_j.$$

于是正接受服务的平均顾客数为

$$\begin{aligned}\bar{N}_c &= \sum_{n=0}^{c-1}np_n+c\sum_{n=c}^{K}p_n\\ &= \rho[1-p_K].\end{aligned}$$

进一步，得到平均队长

$$\bar{N}=\bar{N}_q+\bar{N}_c=\bar{N}_q+\rho[1-p_K].$$

等待时间与逗留时间：假定顾客先到先服务。设顾客到达时看到有j个顾客的平稳概率为$p_j^-, j=0,1,2,\cdots,K$，则$p_j^-=p_j$。但是，此顾客不一定能进入系统。记q_j为到达能进入系统的顾客看到有j个顾客的平稳概率，则

$$\begin{aligned} q_j &= P\{N^-=j|\text{新顾客能进入}\} = \frac{P\{N^-=j\}P\{\text{新顾客能进入}|N^-=j\}}{P\{\text{新顾客能进入}\}} \\ &= \frac{p_j}{1-p_K},\ j=0,1,\cdots,K-1. \end{aligned}$$

于是得到等待时间分布

$$\begin{aligned} W_1(t) &= P\{W_q\le t\} \\ &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{c-1} q_j, & t=o \\ \sum_{j=0}^{c-1} q_j + \sum_{j=c}^{K-1} q_j \int_{0^+}^t \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x}dx, & t>0. \end{cases} \end{aligned}$$

平均等待时间为

$$\bar{W}_q = \sum_{j=c}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j.$$

平均逗留时间为

$$\bar{W} = \bar{W}_q + \frac{1}{\mu}.$$

$M/M/1/K$

$$p_j = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^K}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases} \quad 0 \leq j \leq K.$$

$$\bar{N} = \begin{cases} \frac{K}{2}, & \rho = 1; \\ \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1. \end{cases}$$

$$\bar{N}_q = \begin{cases} \frac{K(K-1)}{2(K+1)}, & \rho = 1; \\ \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{(K+\rho)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1. \end{cases}$$

$$W_q(t) = \begin{cases} q_0, & t = 0; \\ 1 - \sum_{j=1}^{K-1} q_j \left[\sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}\right], & t > 0. \end{cases}$$

$$W(t) = q_0 \sum_{j=0}^{K-1} \rho^j \left[1 - e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{j} \frac{(\mu t)^i}{i!}\right], t \leq 0.$$

$M/M/c/c$

$$p_j = \frac{\frac{\rho^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}}, \tag{81}$$

该公式被称为埃尔朗(Erlang)公式。c个服务员忙的概率（或顾客损失的概率）为：

$$p_c = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}}, \tag{82}$$

是著名的埃尔朗(Erlang)损失公式，到现在还是电话交换站设计中起重要作用。此时：

$$\bar{N}_q = 0, \quad \bar{N} = \bar{N}_c = \rho(1 - p_c)$$
$$\bar{W}_q = 0, \quad \bar{W} = \frac{1}{\mu}$$

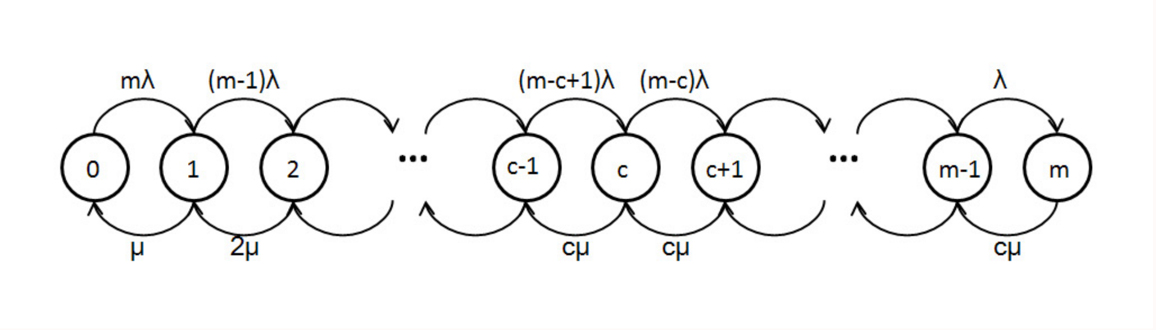
说明：对$M/M/c/K$系统，令$K \to \infty$成为$M/M/c/\infty$系统；令$c = 1, K \to \infty$就成为$M/M/1/\infty$系统；令$c \to \infty$则成为$M/M/\infty$系统。

4 有限源的简单排队系统

4.1. $M/M/c/m/m$系统

假设有c个工人看管m台$(m \geq c)$机器，机器运转时会发生故障停产，这时需要工人进行适当的修理，修复后立即投入运转。设每台机器连续正常运转时间ζ均服从参数$\lambda > 0$的负指数分布。m台机器独立运转，一旦发生故障，有空闲的工人立即对其修理，，修复时间η均服从参数$\mu > 0$的负指数分布。如果没有空闲的工人，发生故障的机器就等待修理，直到有空闲的工人为止，而且设修理与运转独立，每个工人之间的修理也相互独立。

用$N(t)$表示t时刻发生故障的机器数目，状态空间显然为：$E=\{0,1,\cdots,m\}$，用类似前面的方法，可以得到状态转移图：



定理3.8：设$p_j=\lim_{t\to\infty}P\{N(t)=j\}, j=0,1,2\cdots,m$，则$\{p_j, 0\le j\le m\}$存在，且

$$p_j=\begin{cases}\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\rho^j p_0, & j=0,1,\cdots,c-1;\\ \begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\frac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,\cdots,m,\end{cases}$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}, p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\rho^j+\sum_{j=c}^{m}\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\frac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j\right]^{-1}$，而$\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}$表示从$m$中取$j$的组合数。特别的，当$c=1$时，有：

$$\begin{aligned}p_j &= \frac{m!}{(m-j)!}\rho^j p_0, j=1,2,\cdots,m;\\ p_0 &= \left[\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j\right]^{-1}.\end{aligned}$$

用N和N_q分别表示在统计平衡下发生故障与等待修复的机器数，则

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \sum_{j=0}^{m} jp_j = \sum_{j=0}^{c-1} \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!}\rho^j p_0 + \frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m} \frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}}p_0, \\ \bar{N}_q &= \sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j.\end{aligned}$$

平均忙的修理工人数为

$$\bar{N}_c = \sum_{j=1}^{c-1} jp_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j.$$

平均运行的机器数、单位时间发生故障率平均数、单位时间内平均修复的机器数分别为：

$$\begin{aligned}
\bar{N}_m &= \sum_{j=1}^{m}(m-j)p_j = m-\bar{N};\\
\lambda_e &= \lambda\sum_{j=1}^{m}(m-j)p_j = \lambda(m-\bar{N});\\
\lambda_\mu &= \mu\left(\sum_{j=0}^{c-1} j\cdot p_j + c\sum_{j=c}^{m} p_j\right) = \mu\cdot\bar{N}_c.
\end{aligned}$$

显然，统计平衡下单位时间内平均修复的机器数等于发生故障的平均数，即

$$\lambda_e = \lambda_\mu.$$

假设机器先故障先维修。令p_j^-表示在统计平衡下一台机器发生故障时已有j台机器早已处于故障状态的概率，此时只有$m-j$台在工作，利用负指数分布的性质，有

$$p_j^- = \frac{m-j}{m-\bar{N}} p_j,\ j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

所以，该故障机器的等待修理时间W的分布函数为：

$$\begin{aligned} W_q(t) &= \sum_{j=0}^{c-1} p_j^- + \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- \int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x} dx \\ &= 1 - \sum_{j=c}^{m-1} p_j^- e^{-c\mu t} \left\{ 1 + c\mu t + \cdots + \frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!} \right) ,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

在所有修理工忙的条件下，新故障的机器必须等$j-c+1$台修好后才能得到修理，而每个修理工独立负指数分布，故有平均等待时间为：

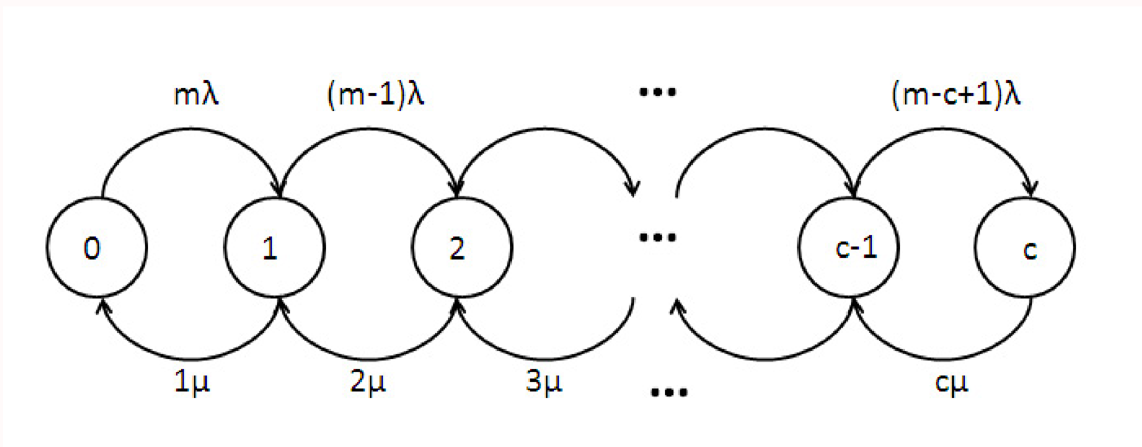
$$\bar{W}_q = \sum_{j=c}^{m-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot p_j^- = \frac{\bar{N}}{\lambda(m-\bar{N})}.$$

4.2. $M/M/c/c/m$系统

假设有m台($m \geq c$)机器运转，c个工人负责维修，当c个工人都忙时，再发生故障的机器不等待维修，而是送到其他地方维修、或去大修。其他假设同前。可以得到$p_{ij}(\Delta t)$满足

$$p_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} (m-i)\lambda\Delta t + o(\Delta t), & j = i+1, i = 0, 1, \cdots, c-1, \\ i\mu\Delta t + o(\Delta t), & j = i-1, i = 1, 2, \cdots, c, \\ o(\Delta t), & |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

用$N(t)$表示t时刻发生故障的机器数目，状态空间显然为：$E=\{0,1,\cdots,m\}$，用类似前面的方法，可以得到状态转移图：



Home Page
Title Page
Page 84 of 140
Go Back
Full Screen
Close
Quit

定理3.9：设$p_j=\lim_{t\to\infty}P\{N(t)=j\},j=0,1,2\cdots,c$，则$\{p_j,0\le j\le c\}$存在，且

$$p_j=\frac{\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}\rho^j}{\sum_{k=0}^{c}\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}\rho^k},\ j=0,1,\cdots,c$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，而$\begin{pmatrix}m\\j\end{pmatrix}$表示从$m$中取$j$的组合数。

分布$\{p_j,0\le j\le c\}$被称为恩格塞特(Engset)分布，而

$$p_c(m)=\frac{\begin{pmatrix}m\\c\end{pmatrix}\rho^c}{\sum_{k=0}^{c}\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}\rho^k}$$

称为恩格塞特损失公式，这是损失的概率。

当$m=c$时，即m台机器和m个维修工时，

$$p_j = \frac{\binom{m}{j}\rho^j}{(1+\rho)^m},\ j=0,1,\cdots,m$$

平均故障机器数为

$$\bar{N} = \sum_{j=0}^{m} jp_j = \frac{m\rho}{1+\rho}.$$

4.3. 其他类似系统

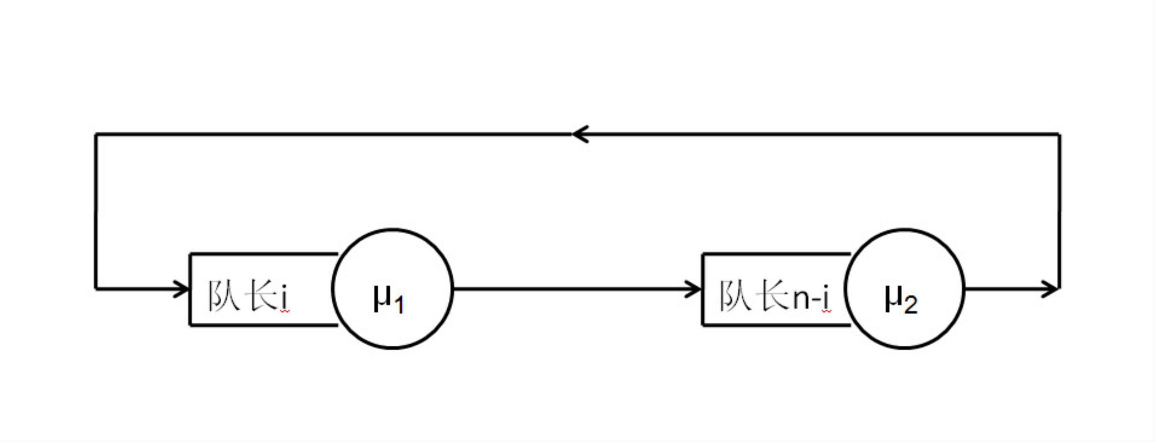
1) $M/M/c/m+K/m$系统

有m台机器正常工作，另有K台机器备用，有c个维修工人。当运转的机器发生故障时，发生故障的机器立刻由维修工修理，修好后转入备用。如果出于正常运转的机器台数不足m台时，只好缺额生产。

关心的问题是：故障的机器数、优化问题等等（唐应辉的书69页例3.3.1）。

2) 两阶段循环排队系统

循环排队系统具有广泛的应用，例如运输车辆在仓库和生产厂之间的运货、轮番作业的设备等等。这里介绍一个简单的问题：假设n部汽车在生产厂（I号服务台）和仓库（II号服务台）之间来回运输。

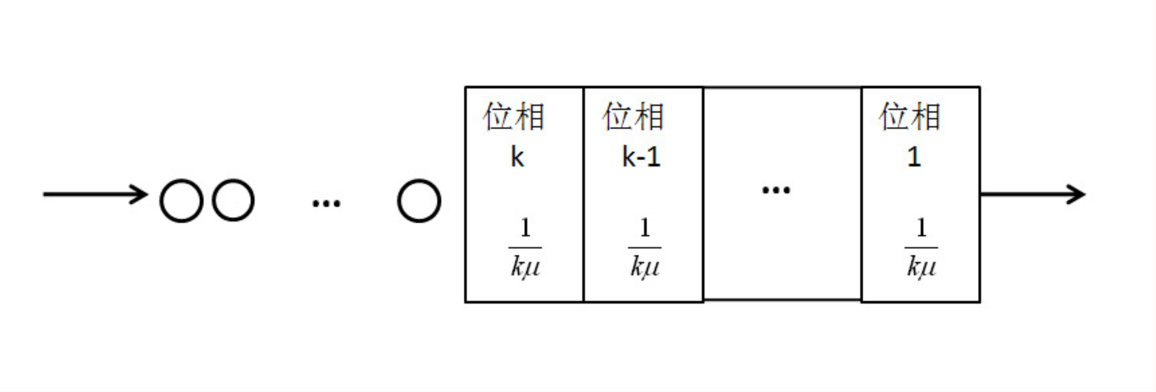


I号服务台的平均队长、平均等待队长、等待时间分布以及均值；同样求得II号服务台的平均队长、平均等待队长、等待时间分布以及均值等等。（唐应辉的书69-72页）

5 可化成M/M型排队系统

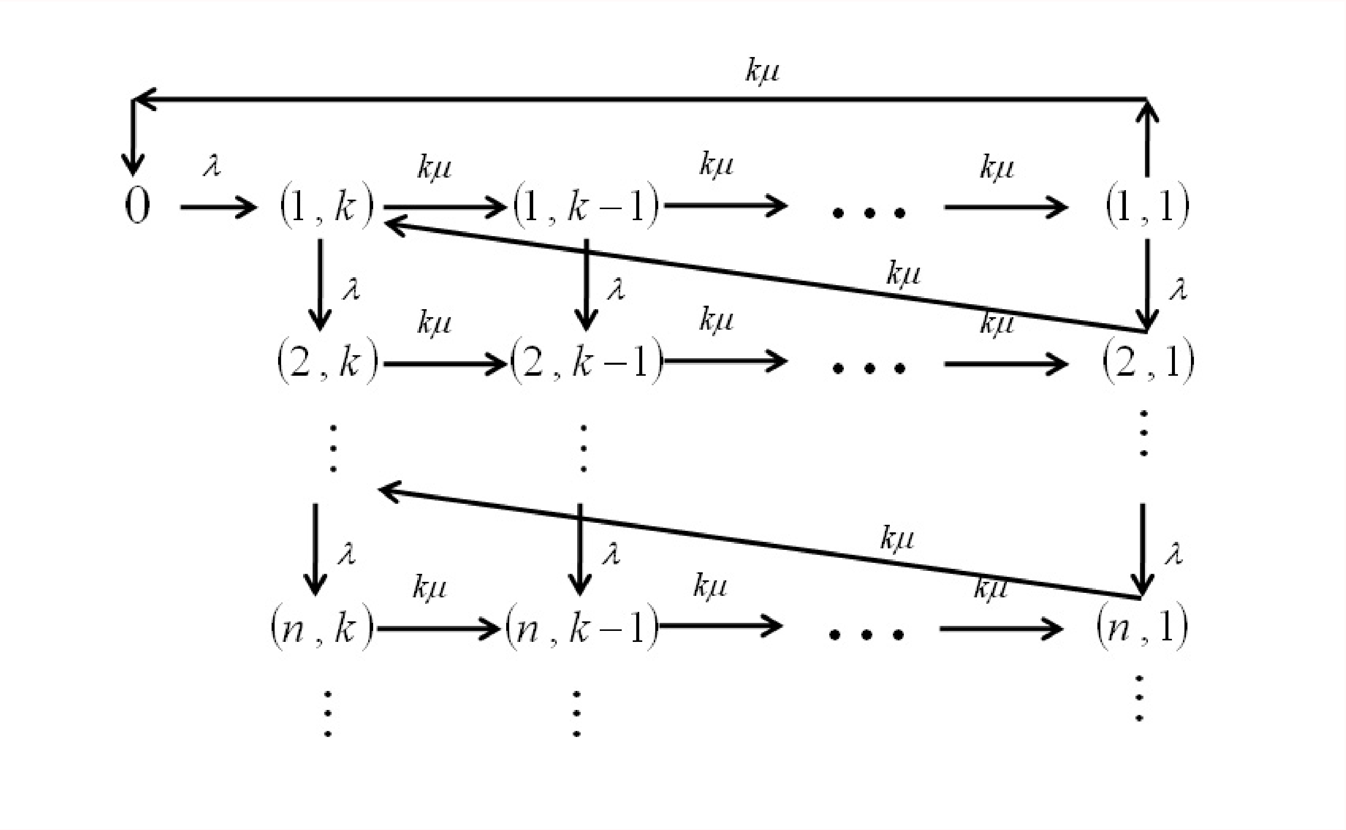
5.1. $M/E_k/1/\infty$排队系统

到达依然是Poisson流，而服务时间为k级Erlang分布。把每个顾客的服务时间假想为k个位相（独立，同负指数分布），每个位相平均服务时间$\frac{1}{k\mu}$，依照降次排列，即：



此时用$N(t)$表示时刻t系统的状态为一个二元组(n,i)，其中n表示系统中的顾客数，而i表示正在接受服务的顾客所处的位相。状态空间为$E=\{(n,i)|i=1,2,\cdots,k;n=1,\cdots\}\bigcup\{0\}$。

因此，状态空间为$\{(n,i)|n=0,1,\cdots,i=1,2,\cdots,k\}$。状态转移图为：



令$p_{n,i}(t)=P\{N(t)=(n,i)\}$，考虑$t+\Delta t$时刻的状态概率与$t$时刻的状态概率的关系，有：

$$
\begin{aligned}
p_{n,i}(t+\Delta t) &= p_{n,i}(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t)+p_{n,i+1}(t)k\mu\Delta t+p_{n-1,i}(t)\lambda\Delta t \\
&\quad +o(\Delta t), n\geq 2, 1\leq i\leq k-1, \\
p_{n,k}(t+\Delta t) &= p_{n,k}(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t)+p_{n+1,1}(t)k\mu\Delta t+p_{n-1,k}(t)\lambda\Delta t \\
&\quad +o(\Delta t), n\geq 2, i=k, \\
p_{1,i}(t+\Delta t) &= p_{1,i}(t)(1-k\mu\Delta t)+p_{1,i+1}(t)k\mu\Delta t \\
&\quad +o(\Delta t), n=1, 1\leq i\leq k-1, \\
p_{1,k}(t+\Delta t) &= p_{1,k}(t)(1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t)+p_{0}(t)\lambda\Delta t+p_{2,1}(t)k\mu\Delta t \\
&\quad +o(\Delta t), n=1, i=k, \\
p_{0}(t+\Delta t) &= p_{0}(t)(1-k\mu\Delta t)+p_{1,1}(t)k\mu\Delta t+o(\Delta t), n=0.
\end{aligned}
$$

前两组为一般排队方程，后三组（个）为初始方程。

继续，可以得到微分差分方程组。由于所有状态构成一个不可约类，令$t \to \infty$可以得到统计平衡时的差分方程组：

$$\begin{aligned}
0 &= -(\lambda + k\mu)p_{n,i} + k\mu p_{n,i+1} + \lambda p_{n-1,i}, n \geq 2, 1 \leq i \leq k-1; \\
0 &= -(\lambda + k\mu)p_{n,k} + k\mu p_{n+1,1} + \lambda p_{n-1,k}, n \geq 2; \\
0 &= -(\lambda + k\mu)p_{1,i} + k\mu p_{1,i+1}, 1 \leq i \leq k-1; \\
0 &= -(\lambda + k\mu)p_{1,k} + k\mu p_{2,1} + \lambda p_0; \\
0 &= -\lambda p_0 + k\mu p_{1,1}.
\end{aligned}$$

这组方程的解释是：将状态转移图看成是一个电网，状态为节点，转移关系为电流方向，在平衡时，满足吉尔霍夫定律。

上面的差分方程组求解不易，而且位相是人为划分的，我们真正关心的是在统计平衡下，系统中有n个顾客的概率$p_n, n \geq 0$，即

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} p_{n,i}.$$

我们先引进几个母函数

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n p_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} x^n p_{n,i} + p_0; \qquad (83)\\ G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} x^{k(n-1)+i} p_{n,i} + p_0; \qquad (84)\\ H(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} x^n y^i p_{n,i}. \qquad (85)\end{aligned}$$

分别为顾客数分布、位相数分布和状态分布的母函数。

分别用$x^{k(n-1)+i}, x^{kn}, x^i$和$x^k$分别乘到差分方程组的相应项，求和后用$k\mu$通除，并令$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$，$r = \frac{\lambda}{k\mu}$得到

$$\frac{1}{x}[G(x) - p_0] - (1+r)G(x) + p_0 + rx^k G(x) = 0.$$

整理后有

$$G(x) = \frac{(1-x)p_0}{1 - x(1+r) + rx^{k+1}}. \tag{86}$$

为了得到p_0，我们用边界条件$G(1) = 1$和洛毕达法则有

$$1 = G(1) = \lim_{x \to 1} G(x) = \frac{p_0}{1 - kr}.$$

故

$$p_0 = 1 - kr = 1 - \rho. \tag{87}$$

在$k = 1$时与$M/M/1/\infty$结论一致。这里也说明，服务员空闲的概率p_0与k无关。

可以利用$G(x)$求在统计平衡时，顾客在系统的平均等待时间$\bar{W}_q$。当顾客到达系统时，看到系统处于状态(n,i)的概率是$p_{n,i}$，利用负指数分布的强无后效性，新顾客的平均等待时间为$\frac{(n-1)k+i}{k\mu}$。所以

$$\begin{aligned}\bar{W}_q &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-1)k+i}{k\mu}p_{n,k}+0\cdot p_0,\\ &= \frac{1}{k\mu}\frac{d}{dx}G(x)\Big|_{x=1} = \frac{(k+1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}\\ &= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}-\frac{(k-1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)}.\end{aligned}$$

以及

$$\bar{W} = \bar{W}_q+\frac{1}{\mu}$$

再根据Little公式，得到$L_q=\lambda\bar{W}_q$和$L=\lambda\bar{W}$ 得到相应的指标。

利用类似的方法，用$x^n y^i, x^n y^k, xy^i$和x^k分别乘以差分方程组的相应项，可以得到

$$(1+r-rx-\frac{1}{y})H(x,y)+(1-\frac{y^k}{x})\sum_{n=1}^{\infty}x^n p_{n,1}+ry^k(1-x)p_0=0.$$

令$y=(1+r-rx)^{-1}$得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n p_{n,1}=\frac{rx(1-x)p_0}{1-x(1+r-rx)^k}.$$

得到

$$H(x,y)=\frac{rxy(1-x)p_0}{1-y(1+r-rx)}\left(\frac{1-(1+r-rx)^k}{1-x(1+r-rx)^k}\right).$$

再根据

$$P(x) = p_0 + H(x,1),$$

有

$$P(x) = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(1-x)}{1-x\left(1+\frac{\lambda}{k\mu}-\frac{\lambda}{k\mu}x\right)^k}.$$

将$P(x)$反演可以得到p_n的一般表达形式，过程较繁琐。通过将$P(x)$在$x=1$处的泰勒展开，可以得到

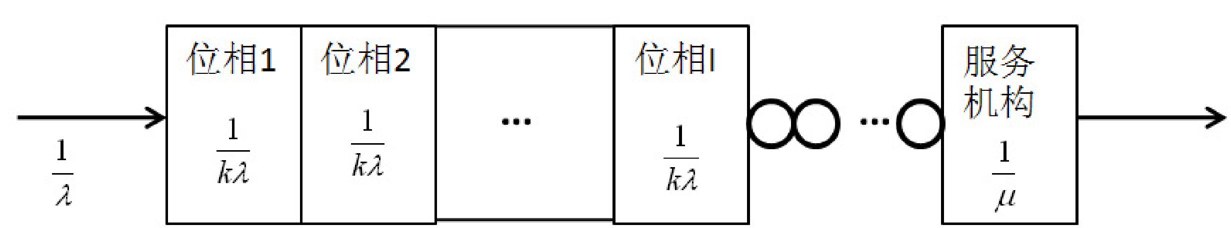
$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \frac{d}{dx}P(x)\bigg|_{x=1} = \frac{2k\lambda\mu-\lambda^2(k-1)}{2k\mu(\mu-\lambda)} = \lambda\bar{W};$$

$$L_q = \frac{\lambda^2(k+1)}{2k\mu(\mu-\lambda)} = \lambda\bar{W}_q.$$

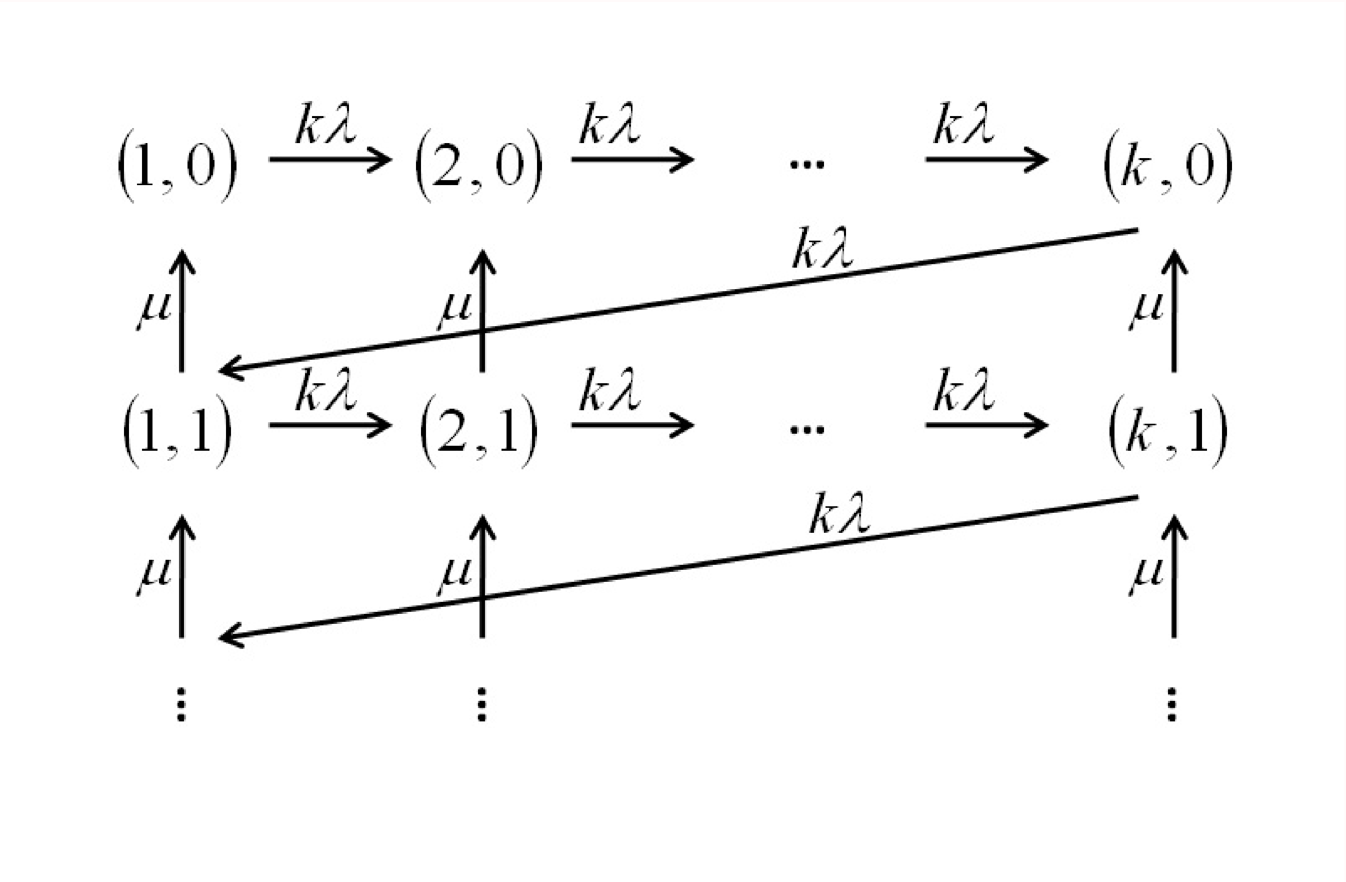
证明了Little公式在这种情况下成立。

5.2. $E_k/M/1/\infty$排队系统

$E_k/M/1/\infty$排队系统的相继到达顾客的间隔时间是k阶Erlang分布，具体的分析技术在于：将顾客的到达划分为k个位相处理，图形表示为：



用(i,n)表示系统的状态，即系统里有n个顾客，正在到达的顾客处于位相i。所以，状态空间为$E=\{(i,n)|i=1,2,\cdots,k;n=0,1,\cdots\}$。状态转移图为：



在统计平衡下，用$p_{i,n}$表示处于状态(i,n)的概率，类似的我们有：

$$\begin{cases} 0 = k\lambda p_{i-1,n} - (k\lambda+\mu)p_{i,n} + \mu p_{i,n+1}, & 2 \le i \le k, n \ge 1; \\ 0 = k\lambda p_{k,n-1} - (k\lambda+\mu)p_{1,n} + \mu p_{1,n+1}, & i = 1, n \ge 1; \\ 0 = k\lambda p_{i-1,0} - (k\lambda+\mu)p_{i,0} + \mu p_{i,1}, & 2 \le i \le k, n = 0; \\ 0 = -k\mu p_{1,0} + \mu p_{1,1}, & i = 1, n = 0. \end{cases}$$

前两个是一般方程，后两个是初始方程。

我们令$p_{in}=B_i\omega^n$代入一般方程，得到

$$\begin{aligned}(k\rho+1-\omega)B_i &= k\rho B_{i-1}, 2\le i\le k,\\ (k\rho+1-\omega)\omega B_1 &= k\rho B_k,\end{aligned}$$

其中$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$。从上面两个方程得到

$$B_i=\left(\frac{k\rho}{k\rho+1-\omega}\right)^{i-1}B_1,\ \ \omega=\left(\frac{k\rho}{k\rho+1-\omega}\right)^k.$$

得到特征方程

$$\omega(k\rho+1-\omega)^k=(k\rho)^k.$$

显然$\omega=1$是特征方程的一个根，但不是我们要的，因为$p_{i,n}$不会不依赖n。进一步注意到B_i能表示为$u=\frac{k\rho}{k\rho+1-\omega}$的方幂和常数$B_1$的乘积，而且有$u^k=\omega$。因此我们可以令$p_{i,n}=Au^{kn+i-1}$，带入两个一般方程，都化为$(n\ge 1)$：

$$\begin{aligned}0 &= k\rho-(k\rho+1)u+u^{k+1} &(88)\\ &= (u-1)(u^k+u^{k-1}+\cdots+u-k\rho), &(89)\end{aligned}$$

所以有

$$0=u^k+u^{k-1}+\cdots+u-k\rho.$$

利用Rouché定理，我们可以证明：当$\rho < 1$时，公式(89)在$(0,1)$内仅有一个一个根记作r，即

$$r^k + r^{k-1} + \cdots + r = k\rho < k.$$

因此，在统计平衡下，状态的概率为：

$$p_{i,n} = Ar^{kn+i-1}, 1 \le i \le k, n > 0.$$

$n = 0$的概率，可以通过初始方程组得到：

$$\begin{aligned}
p_{k,0} &= \frac{1}{k\rho}[(k\rho+1)p_{1,1} - p_{1,2}] = Ar^{k-1}, \\
p_{k-1,0} &= \frac{A}{k\rho}[k\rho r^{k-2} - r^{k-1}], \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
p_{2,0} &= \frac{A}{k\rho}[k\rho r - r^2 - \cdots - r^{k-1}], \\
p_{1,0} &= \frac{A}{k\rho}[k\rho - r - r^2 - \cdots - r^{k-1}].
\end{aligned}$$

相继到达被分为k个位相是人为的，实际上我们感兴趣的是$n(\geq 0)$个顾客在系统的概率（注意不包括正在到达的顾客）p_n。当$n \geq 1$时，

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} p_{i,n} = Ar^{nk}\frac{1-r^k}{1-r},$$

而当$n = 0$时

$$p_0 = \frac{A(1-\rho)r^k}{\rho(1-r)}$$

再利用$\{p_n, n \geq 0\}$为概率分布确定参数A，得到

$$A = \frac{\rho(1-r)}{r^k},$$

故有

$$p_0 = 1-\rho, p_n = \rho(1-r^k)r^{(n-1)k}, n \geq 1.$$

于是可以得到相应的数量指标

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\rho}{1-r^k} \\
D(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - L^2 = \frac{\rho(1-\rho+r^k)}{(1-r^k)^2} \\
L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = \frac{\rho r^k}{1-r^k} \\
D(N_q) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)^2 p_n - L_q^2.
\end{aligned}
$$

以及其他数量关系，如有：一个顾客进入系统时发现系统中已有n个顾客的概率q_n、等待时间分布、逗留时间分布等等。

5.3. $E_k/E_l/1/\infty$排队系统

5.4. $M/PH/1/\infty$排队系统

该系统的特点是服务时间是PH分布。

定义5.1：考虑一个连续时间、具有$m+1$个状态$(m \geq 1)$的马氏过程，其中状态$1, 2, \cdots, m$是瞬时状态，$m+1$是吸收状态。进一步假设这个过程的初始分布向量为(α, α_{m+1})。则连续时间的PH分布就是从上面的过程出发到达吸收状态的时间分布。

这个过程的转移速率矩阵可以写成

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} S & S^0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix},$$

其中S是一个$m \times m$的矩阵，$S^0 = -S\mathbf{1}$，而$\mathbf{1}$为一个$m \times 1$的、每个分量都是1的向量。

直到过程吸收的时间记为X，它服从的分布就是PH型分布，具体记为$PH(\alpha, S)$，分布与密度具体为

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - \alpha exp(Sx)\mathbf{1}, \\ f(x) &= \alpha exp(Sx)S^0, \end{aligned}$$

其中$x > 0$，$exp(\cdot)$为指数型矩阵。它的高阶矩为

$$E[X^n] = (-1)^n n! \alpha S^{-n}\mathbf{1}.$$

常见的一些PH分布：退化分布是0-PH的分布；指数分布是1-PH的；Erlang分布是2或以上的PH分布；定长分布是k阶Erlang分布的极限情况，可以看成无穷阶的PH分布；超指数分布是2或以上的PH分布。（参考：http://en.wikipedia.org/wiki/Phase-type_distribution）

对于$M/PH/1/\infty$排队系统，服务是PH型分布函数，我们用二元状态描述系统的状态，即(n,i)，其中n表示系统中的顾客数，i表示正在接受服务的顾客所处的phase。所以，状态空间为$E=\{(n,i)|n\geq 1, 1\leq i\leq m\}\bigcup\{0\}$。此时的转移速率矩阵具有形式

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & & & \\ C_{-1} & Q_0 & Q_1 & & \\ & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

其中Q_{-1},Q_0和Q_1均为$m\times m$的矩阵，$C_0=-\lambda, C_1=\lambda\alpha$，以及$C_{-1}=S^0$。为了问题有意义，显然有$\alpha_{m+1}=0$。

上面的马氏过程通常简称为QBD过程，求解它的平稳分布需要求出率矩阵R，即二次矩阵方程

$$R^2Q_{-1}+RQ_0+Q_1=\mathbf{0},$$

的最小非负解，然后就有

$$\begin{aligned}\pi_n&=R^{n-1}\pi_1, n>1,\\ \pi_0C_0+\pi_1C_{-1}&=\mathbf{0},\\ \pi_0C_1+\pi_1(Q_0+RQ_{-1})&=\mathbf{0},\\ \sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\mathbf{e}&=1.\end{aligned}$$

由此得到相应的排队数量指标。

5.5. $PH/M/1/\infty$排队系统

$PH/M/1/\infty$排队系统也被称为Markov到达排队系统。描述这类系统的状态依然用二维向量表示，即(i,n)，其中i表示将要到达的顾客所处的位相(phase)，n表示系统中的顾客数目，所以状态空间为

$$E = \{(i,n)|1 \le i \le m, n \ge 0\}.$$

类似的，可以给出相应的Q矩阵，进行细致分析。

5.6. $PH/PH/1/\infty$排队系统

描述这类系统的状态依然用三维向量表示，即(i,n,j)，其中i表示将要到达的顾客所处的位相(phase)，n表示系统中的顾客数目，而j表示正在接受服务的顾客所处的位相。所以状态空间为

$$E=\{(i,n,j)|1\le i\le m, n\ge 1\}\bigcup\{i|1\le i\le m\}.$$

类似的，可以给出相应的Q矩阵，进行细致分析。

6 一般排队系统

6.1. $M/G/1/\infty$排队系统

针对$M/G/1/\infty$系统，Kendall(1951)首先使用了嵌入马氏链的分析方法。虽然系统的队长过程$\{N(t), t \geq 0\}$不再是马氏过程，但是在$\{N(t), t \geq 0\}$中可以找到一个嵌入的离散参数的马氏链，利用马氏链的理论得到嵌入链的极限概率分布，然后证明该极限分布就是原过程$\{N(t), t \geq 0\}$当$t \to \infty$的平稳分布。从而达到分析$M/G/1/\infty$排队系统的目的。

对于$M/G/1/\infty$系统，输入过程仍然是参数为λ的Poisson过程，顾客的相继服务时间$\{\chi_i, i \geq 1\}$相互独立、同一般分布$G(t), t \geq 0$，密度函数为$g(t)$，平均服务时间$\frac{1}{\mu}$满足

$$0 < \frac{1}{\mu} = \int_0^\infty t dG(t) < \infty,$$

其中积分为斯蒂尔吉斯积分。记

$$G^*(s) = \int_{0^-}^\infty e^{-st} dG(t)$$

为$G(t)$的拉普拉斯-斯蒂尔吉斯变换。

依然用$N(t)$表示时刻t系统中的顾客数，记$T_n'(n \geq 1)$表示第n个顾客服务结束的时间，$N_n = N(T_n'+), n \geq 1$为第n个顾客刚离开系统时留在系统中的顾客数。则有下面的结论：

定理6.1：$\{N_n,\ n \geq 1\}$为一不可约、非周期的齐次马氏链，其一步转移概率为：

$$
\begin{aligned}
p_{ik} &= P\{N_{n+1} = k | N_n = i\} \\
&= \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t), & i = 0; \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} e^{-\lambda t} dG(t), & k \geq i-1, i \geq 1; \\ 0, & k < i-1, i \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

证明：设v_n表示在第n个顾客的服务时间χ_n内到达的顾客数，则容易知道$\{v_n, n \geq 1\}$相互独立同分布

$$a_k = P\{v_n = k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t),\ k \geq 0,$$

而且

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n - 1 + v_{n+1} & N_n \geq 1; \\ v_{n+1}, & N_n = 0. \end{cases}$$

根据$\{v_n, n \geq 1\}$相互独立、同分布，所以可以去掉它的下标并记为v，即

$$N_{n+1} = \begin{cases} N_n - 1 + v & N_n \geq 1; \\ v, & N_n = 0. \end{cases}$$

可以看到，当知道N_n时，N_{n+1}只与到达过程有关系，与历史$N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}$无关，所以$\{N_n, n \geq 1\}$是时齐马氏链，状态空间为$E = \{0, 1, \cdots\}$。

考察一步转移概率

$$p_{ik} = P\{N_{n+1} = k | N_n = i\} = \begin{cases} P\{v = k - i + 1\}, & i \geq 1; \\ P\{v = k\}, & i = 0. \end{cases}$$

当$i \geq 1$时，

$$P\{v = k - i + 1\} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} e^{-\lambda t} dG(t), & k \geq i - 1; \\ 0, & k < i - 1. \end{cases}$$

当$i = 0$时

$$P\{v = k\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t).$$

证毕。

嵌入马氏链$\{N_n, n \geq 1\}$的一步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

其中

$$a_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k a_k &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t) \\ &= \int_0^\infty \lambda t dG(t) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho. \end{aligned}$$

即在一个顾客的服务时间内平均到达的顾客数是ρ。

定理6.2：1）令$\{p_{ij},\ i,j=0,1,\cdots\}$为一步转移概率，如果不等式

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \le y_i - 1, i \ne 0$$

存在一个满足条件

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j} y_j < \infty$$

的非负解，则该马氏链为正常返。

2）嵌入马氏链$\{N_n, n \ge 1\}$为正常返的充分必要条件是$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$。

只证明2）：充分性。设$\rho < 1$，定义

$$y_j = \frac{j}{1-\rho} \geq 0, j = 0, 1, 2, \cdots$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j &= \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} \frac{j}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho}[a_0(i-1) + a_1 i + a_2(i+1) + \cdots] \\
&= \frac{1}{1-\rho}[(i-1)(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots) + a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots] \\
&= \frac{i-1+\rho}{1-\rho} = y_i - 1. \\
\sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j} y_j &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{j}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

即$\{y_j, j \geq 0\}$满足定理部分1）的条件，知道嵌入马氏链$\{N_n, n \geq 1\}$为正常返的。

必要性。设嵌入马氏链$\{N_n, n \geq 1\}$是正常返的，我们知道

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n = j\} = p_j^+ > 0, j = 0, 1, 2, \cdots$$

存在，且$\{p_j^+, j \geq 0\}$是$\{N_n, n \geq 1\}$惟一的平稳分布，满足

$$\begin{aligned} p_j^+ &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i^+ \cdot p_{ij}, j \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ &= 1. \end{aligned}$$

由一步转移概率矩阵知道

$$p_j^+ = p_0^+ a_j + \sum_{i=1}^{j+1} p_i^+ a_{j-i+1}, j \geq 0.$$

引入母函数

$$P^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ z^j, \quad \tilde{A}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad |z| < 1.$$

就可以得到

$$\begin{aligned} P^+(z) &= p_0^+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} p_i^+ a_{j-i+1} z^j \\ &= p_0^+ \tilde{A}(z) + \frac{1}{z} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i^+ z^i \right) \left(\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1} z^{j-i+1} \right) \\ &= p_0^+ \tilde{A}(z) + \frac{1}{z} [P^+(z) - p_0^+] \tilde{A}(z). \end{aligned}$$

于是得到

$$P^+(z) = \frac{p_0^+ (1-z) \tilde{A}(z)}{\tilde{A}(z) - z}.$$

根据$P^+(1)=\tilde{A}(1)=1$，利用洛毕达法则

$$
\begin{aligned}
1=\lim_{z\to 1^-}P^+(z) &= \lim_{z\to 1^-}\frac{-\tilde{A}(z)p_0^+ + p_0^+(1-z)\tilde{A}'(z)}{\tilde{A}(z)-1} \\
&= -\frac{p_0^+}{\tilde{A}'(1)-1}.
\end{aligned}
$$

又因为

$$\tilde{A}'(1)=\sum_{j=0}^{\infty} j a_j = \rho,$$

所以

$$1=-\frac{p_0^+}{\rho-1},$$

即$\rho = 1-p_0^+ < 1$。证毕。

推论6.1：对于嵌入马氏链$\{N_n,\ n\geq 1\}$，

1) 当$\rho=\frac{\lambda}{\mu}\geq 1$时，此马氏链是零长返或非长返的，$n$步转移概率的极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0, i,j=0,1,2,\cdots,$$

且不存在平稳分布。

2) 当$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$时，马氏链为正常返的，$n$步转移概率的极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\lim_{n\to\infty} P\{N_n=j\}=p_j^+>0.$$

进一步，$\{p_j^+, j\geq 0\}$为惟一的平稳分布，有递推表达式

$$\begin{cases} p_0^+=1-\rho, \\ p_j^+=\frac{1}{a_0}\left[p_{j-1}^+-p_0^+a_{j-1}-\sum_{k=1}^{j-1}p_k^+a_{j-k}\right],\ \ j\geq 1; \end{cases}$$

其中，当$k\leq 0$时，$\sum_{i=1}^{k}=0$。

推论6.2：

1) 对任意正整数m，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n^+ \le m\} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} p_j^+, & \rho < 1; \\ 0, & \rho \ge 1. \end{cases}$$

2) 对$M/G/1/\infty$系统，若$\rho < 1$时，平稳分布$\{p_j^+, j \ge 0\}$的母函数为：

$$P^+(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\tilde{A}(z)}{\tilde{A}(z) - z}, \quad |z| < 1.$$

记$p_n(t) = P\{N(t) = n\}, n \geq 0, t \geq 0$。利用忙期循环的方式定义再生过程(PASTA)，根据再生过程的理论知道

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n,\ n \geq 0,$$

存在。p_n的物理含义是在统计平衡下，任意时刻在系统中有n个顾客的概率。问题是，$\{p_n, n \geq 0\}$与$\{p_n^+, n \geq 0\}$的关系如何。

定理6.3：对$M/G/1/\infty$系统，若$\rho < 1$，则$p_n = p_n^+$，$n = 0, 1, \cdots$。

证明：任给$\{N(t), t \geq 0\}$的一个实现$\{N(\omega, t), t \geq 0\}$。令$A_n(t)$表示该样本函数在$(0, t)$之间从状态$n$向上跳跃一个单位的次数，$D_n(t)$表示该样本函数在$(0, t)$之间向下跳跃一个单位到状态$n$的次数。由于到达和离去都是单个发生的，我们又

$$|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1. \tag{90}$$

设$A(t)$和$D(t)$分别表示样本函数$N(\omega, t)$在$(0, t)$之间的到达总数和离去的总数。在统计平衡下，概率为1的样本函数应有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{A(t)} = 1. \tag{91}$$

现在用$A(t)$除(90)的两边，令$t \to \infty$得

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{A_n(t)}{A(t)} - \frac{D_n(t)}{A(t)} \right| \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} = 0.$$

这是因为当$t \to \infty$的时候$A(t) \to \infty$。

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{A_n(t)}{A(t)}-\frac{D_n(t)}{A(t)}\right|=0,$$

这蕴含了

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_n(t)}{A(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{D_n(t)}{A(t)}.$$

用(91)和上式，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_n(t)}{A(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{D_n(t)}{A(t)}\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{D(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{D_n(t)}{D(t)}.$$

由于到达是Poisson流，在我们的假设下，到达流与状态过程$\{N(t), t \geq 0\}$是独立的，而且有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)} = p_n,\ n \geq 0;$$

而

$$p_n^+ = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{D(t)},\ n \geq 0.$$

所以得到结论。证毕。

$M/G/1/\infty$系统的数量指标。根据上面的分析，知道$P^+(z)$是稳态概率分布$\{p_n, n \geq 0\}$的母函数，所以平均队长为

$$
\begin{aligned}
L = \bar{N} &= \left.\frac{d}{dz} P^+(z)\right|_{z=1} \\
&= (1-\rho) \left.\frac{-\tilde{A}(z)[\tilde{A}(z) - z] + (1-z)[\tilde{A}(z) - \tilde{A}'(z)]}{[\tilde{A}(z) - z]^2}\right|_{z=1} \\
&= \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)},
\end{aligned}
$$

其中利用了洛毕达法则、$\tilde{A}'(1) = \rho$以及$\tilde{A}''(1) = \lambda^2\sigma^2 + \rho^2$。以及

$$
L_q = \bar{N}_q = \frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)}.
$$

利用Little公式，有

$$
\begin{aligned}
\bar{W} &= \frac{L}{\lambda} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)} \\
\bar{W}_q &= \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\bar{N}_q}{\lambda} = \frac{\lambda\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)}.
\end{aligned}
$$

在先来先服务原则下的等待时间分布。在统计平衡下，

$$\begin{aligned} p_n &= p_n^+ = \int_0^\infty P\{\text{在}T\text{内到达}n\text{个顾客}\Big| T=t\}dW(t) \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW(t), n \ge 0, \end{aligned}$$

其中$W(t)=P\{T\le t\}$为逗留时间分布。则其母函数

$$\begin{aligned} P^+(z) &= \sum_{n=0}^\infty p_n z^n = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t z)^n}{n!} dW(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} dW(t) = W^*[\lambda(1-z)], \end{aligned}$$

其中$W^*(s)$是$W(t)$的拉普拉斯-斯蒂尔吉斯变换。同样，我们有

$$\tilde{A}(z) = G^*[\lambda(1-z)].$$

根据$P^+(z)$和$\tilde{A}(z)$的关系式，我们有

$$W^*[\lambda(1-z)] = (1-\rho)\frac{(1-z)G^*[\lambda(1-z)]}{G^*[\lambda(1-z)]-z}$$

令$\lambda(1-z)=s$，则

$$W^*(s) = (1-\rho)\frac{(1-z)G^*(s)}{s-\lambda[1-G^*(s)]}. \tag{92}$$

$$P(z) = (1-\rho)\frac{(1-z)G^*[\lambda(1-z)]}{G^*[\lambda(1-z)]-z}. \tag{93}$$

等待时间与服务时间之和为逗留时间，分布是卷积，拉普拉斯变换是乘积形式，所以对等待时间也有

$$W_q^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda[1-G^*(s)]}. \tag{94}$$

公式(92)，(93)和(94)通常被称为普拉可-辛钦变换公式。

6.2. $GI/M/1/\infty$排队系统

相继到达间隔时间是独立同分布的，服务时间为负指数分布，平均服务时间为$1/\mu$，单个服务员，允许无限排队。

设T_n是从$t = 0$开始第$n(n \geq 1)$个顾客的到达时刻。令$\tau_n = T_n - T_{n-1}$（令$T_0 \equiv 0$, $\tau_0 \equiv 0$），$\{\tau_n\}(n \geq 1)$，独立同分布，分布函数为$A(t)$，单位时间到达λ个顾客。再设$\{\tau_n\}$与服务时间也独立。

令$N(t)$表示时刻t在系统中的顾客数，此时$\{N(t), t > 0\}$一般不具有马氏性。考虑嵌入马氏链的方法。令

$$N_n = N(T_n-), \quad n \geq 1,$$

即N_n表示第n个顾客到达时发现系统已有的顾客数（不包括第n个顾客）；特别记：

$$N_0 = N(0) - 1$$

$N(0)$为开始时刻$(t = 0)$在系统的顾客数。

令B_n表示在τ_{n+1}期间服务完的顾客数，显然有$B_n \le N_n + 1$且

$$N_{n+1} = N_n + 1 - B_n$$

由于服务时间服从负指数分布，对任意正整数b

$$\begin{aligned} P\{B_n = b\} &= \sum_{k=b-1}^{\infty} P\{B_n = b, Nn = k\} \\ &= \sum_{k=b-1}^{\infty} P\{Nn = k\} P\{B_n = b | N_n = k\} \\ &= \sum_{k=b-1}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} P\{N_n = k\} P\{B_n = b | N_n = k, \tau_{n+1} = t\} dA(t) \\ &= P\{N_n \ge b-1\} \int_{0-}^{\infty} \frac{(\mu t)^b}{b!} e^{-\mu t} dA(t). \end{aligned}$$

由约定知$P\{N_0 \ge -1\} = 1$，所以当$b = 0$时也成立。

定理6.4：$\{N_n, n \geq 0\}$为马氏链，状态-1是非常返的，状态$\{0,1,2,\cdots\}$构成一个非周期类。在不考虑状态-1时，其一步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-\sum_{j=0}^{1} b_j & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-\sum_{j=0}^{2} b_j & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\ 1-\sum_{j=0}^{3} b_j & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

其中：

$$b_k = \int_{0-}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} dA(t), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

可以类似$M/G/1/\infty$的方法得到遍历的充要条件等等。

6.3. $GI/G/1/\infty$排队系统

以系统变空以后第一个顾客到达为嵌入马氏链的时间点，展开分析。

7 特殊排队系统

7.1. 串联排队系统

两个等待空间均无限的串联排队系统、两个等待时间均为0的排队系统。

7.2. 有优先权的排队系统

强拆优先权排队系统、非强拆优先权排队系统、强拆继续排队系统和强拆重复排队系统。

7.3. 成批到达与成批服务的排队系统

批量固定到达、批量不确定到达系统，批量固定服务系统等等。

7.4. 休假排队系统

7.5. 可修排队系统

谢谢大家！