

运筹学通论I

胡晓东

应用数学研究所

中国科学院数学与系统科学研究院

[Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/](http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/)



Institute of Applied Mathematics
Chinese Academy of Sciences





2. 博弈论 - Gale-Shapley算法

2012年诺贝尔经济学奖授予了两名美国经济学家——哈佛大学教授**埃尔文·罗斯 (Alvin E. Roth)**和加州大学洛杉矶分校教授**罗伊德·沙普利 (Lloyd S. Shapley)** 获奖，以表彰他们对“稳定分配理论和市场设计实践”做出的贡献。

“盖尔-沙普利算法”也被称为“延迟接受算法” (**deferred-acceptance algorithm**)，它是**盖尔**和**沙普利**在1962年为了寻找稳定匹配而设计出的一个市场机制。市场一方（医疗机构）向另一方中（医学院学生）提出要约，每个学生会对自己接到的要约进行考虑，然后抓住自己青睐的（认为它是可接受的），拒绝其它的。该算法的一个关键之处在于，合意的要约不会立即被接受，而只是被“抓住” (**hold on to**)，也就是“延迟接受”。要约被拒绝后，医疗机构才可向另一名医学院学生发出新的要约。整个程序一直持续到没有机构再希望发出新的要约为止，此时学生们才最终接受各自“抓住”的要约。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续一)

例1. 匹配游戏：假如你是一位红娘。现有若干个单身男子登门求助，还有同样多的单身女子也前来征婚。如果你已经知道这些女孩儿在每个男孩儿心目中的排名，以及男孩儿们在每个女孩儿心中的排名，你应该怎样为他们进行匹配呢？



最理想的匹配方案当然是，每个人的另一半正好都是自己的“第一选择”。但绝大多数情况下都不可能实现。比方说，**男1**号最喜欢的是**女1**号，而**女1**号的最爱不是**男1**号；或者好几个男孩儿最喜欢的都是同一个女孩儿。当这种最为理想的匹配方案无法实现时，怎样的匹配方案才能令人满意呢？

2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续二)





2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续三)

理想的匹配固然重要，但是和谐才是配对的关键。如果**男1**号和**女1**号各有各的对象，但**男1**号觉得，比起自己现在的，**女1**号更好一些；**女1**号也发现，在自己心目中，**男1**号的排名比现男友更靠前。这样一来，这两人就可能抛弃各自现在的对象。如果出现了这种情况，我们就说这个配对是**不稳定的**。

A(1, 2) ——— 1(B, A)
B(1, 2) ——— 2(A, B)

A(1, 2) \ 1(B, A)
B(1, 2) / 2(A, B)

一个匹配虽然不能让每个人都得到最满意的，但它必须是**稳定的**。换言之，对于每一个人，在他/她心目中比他/她当前伴侣更好的异性，都不会认为他/她也是一个更好的选择。一个非常自然问题就是：

稳定的匹配总存在吗？如何找到一个稳定的匹配呢？



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续四）

构造稳定婚姻匹配的一个非常自然的想法是采取“**逐步改进**”策略：

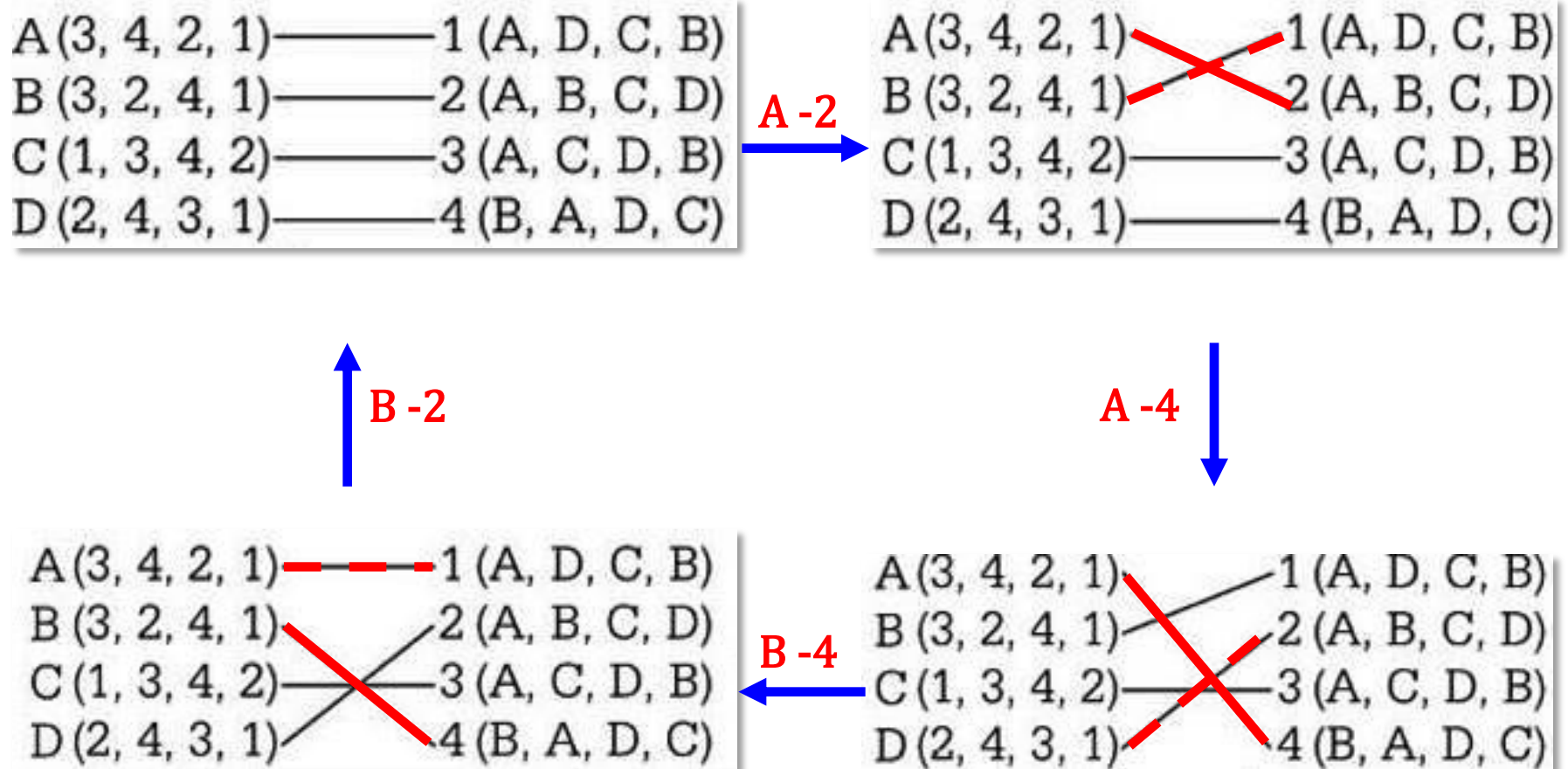
- 若两个人互相都觉得对方比自己当前的伴侣更好，就让这两个人成为一对，被甩的那两个人组成一对；
- 重复逐步改进，直到消除所有的不稳定匹配。



显然，应用上述策略所得到的“最终结果”一定满足稳定性；但这种策略不一定总能得到“最终结果”，因为它可能会陷入死循环。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续五)





2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续六）

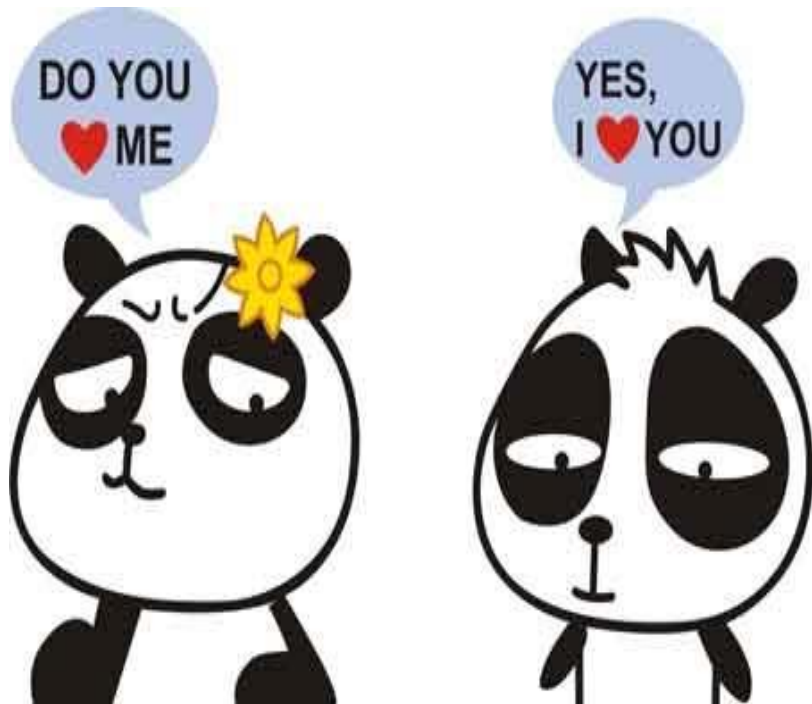
美国数学家**盖尔**和**沙普利**设计并证明了一种寻找稳定匹配的策略。不管男女各有多少人，也不管他们的偏好如何，应用这种策略后总能得到一个稳定的匹配。换句话说，他们证明了稳定匹配总是存在的。

实际上，“配对游戏”不仅有过实际应用，且该算法的应用竟比算法本身的提出还早10年。1952年美国就开始用此法给医学院的学生安排工作，即“全国住院医师配对项目”：各医院从尚未拒绝这一职位的学生中选出最佳人选并发送聘用通知，当学生收到来自各医院的聘用通知后，系统会根据他所填写的意愿表自动将其分配到意愿最高的职位，并拒绝掉其他的职位。如此反复，直到每个学生都分配到了工作。那时人们并不知道该流程可保证工作分配的稳定性，只是凭直觉认为这是很合理的。直到1962年**盖尔**和**沙普利**才系统地研究了这个流程，提出了稳定婚姻问题，并证明了该算法的正确性。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续七）

Gale-Shapley 策略/算法：男孩儿将一轮一轮地去追求他中意的女孩儿，女孩儿可以选择接受或者拒绝他的追求者。
第一轮，每个男孩儿都选择自己名单上排在首位的女孩儿，并向她表白。此时，一个女孩儿可能面对的情况有三种：



- ✓ 没有人跟她表白：
女孩儿只需要继续等待
- ✓ 只有一人跟她表白：
接受他的表白，
答应暂时和他做情侣
- ✓ 有不止一个人跟她表白：
从所有追求者中选择自己
最中意的那一位，
答应和他暂时做情侣，
并拒绝所有其他追求者。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续八）

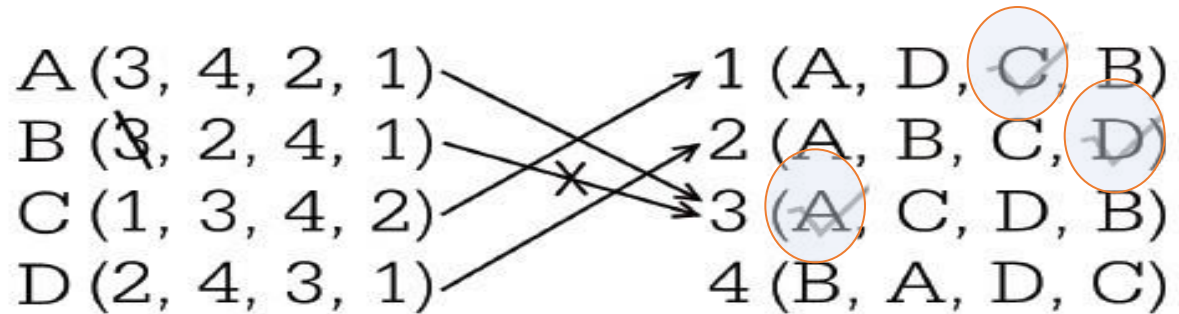
第一轮结束后，有些男孩儿已经有女朋友了，有些男孩儿仍然是单身。在第二轮追女行动中，每个单身男孩儿都从所有还没拒绝过他的女孩儿中选出自己最中意的那一个，并向她表白，**不管她现在是否是单身**。和第一轮一样，女孩儿们需要从表白者中选择最中意的一位，拒绝其他追求者。**注意**，如果这个女孩儿已经有男朋友了，当她遇到了更好的追求者时，她必须拒绝掉现在的男友，投向新的追求者的怀抱。这样，一些单身男孩儿将会得到女友，那些已经有了女友的男孩儿也可能重新变成单身。在以后的每一轮中，单身男孩儿继续追求列表中的下一个女孩儿，女孩儿则从包括现男友在内的所有追求者中选择最好的一个，并对其他人说不。

这样一轮一轮地进行下去，直到某个时候所有人都不再单身，下一轮将不会有任何新的表白发生，整个过程自动结束。此时的婚姻搭配就一定是稳定的了。

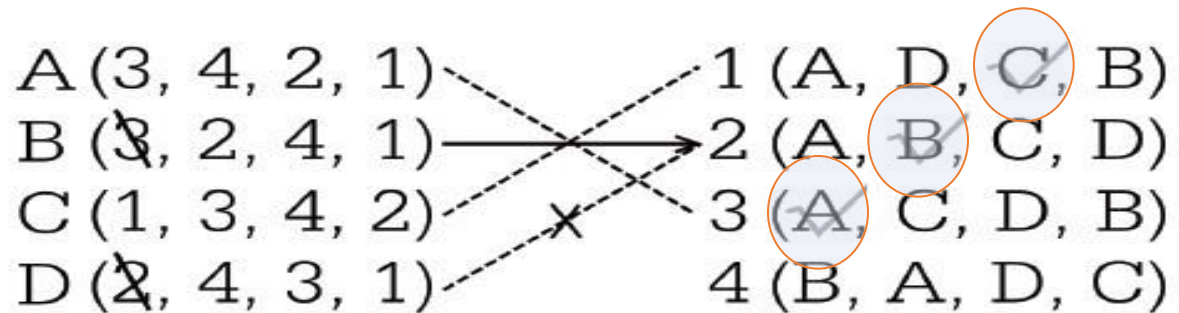


2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续九)

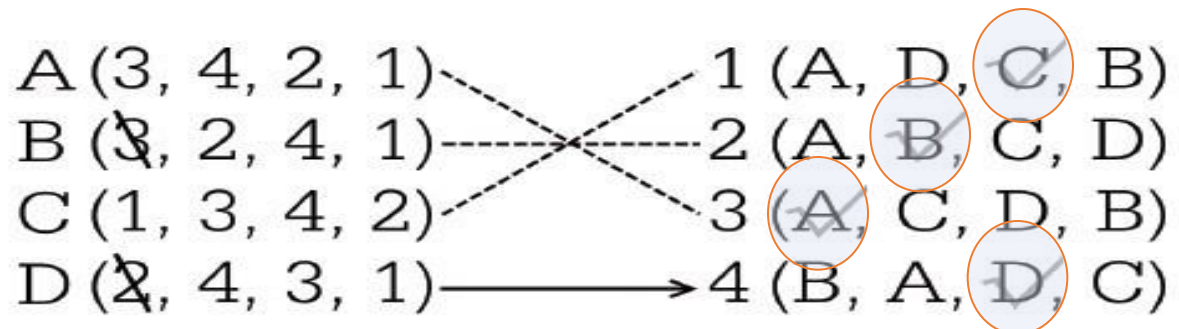
第一轮



第二轮



第三轮





2. 博弈论 - Gale-Shapley 算法 (续十)

定理1. Gale-Shapley 算法给出的匹配是稳定的。

证明. 首先注意到，随着轮数的增加，一个男孩儿追求的对象总是越来越糟，而一个女孩儿的男友只可能变得越来越好。假设男 **A** 和女 **a** 各自有各自的对象，但与各自现有的对象相比较，男 **A** 更喜欢女 **a**。因此，男 **A** 之前肯定已经跟女 **a** 表白过。既然女 **a** 最后没有跟男 **A** 在一起，说明女 **a** 拒绝了男 **A**，也就是说她有了比男 **A** 更好的男孩儿。这就证明了，两个人虽然不是一对，但都觉得对方比自己现在的伴侣好，这样的情况是不可能发生的，即匹配一定是稳定的。

练习 针对前面所考虑的实例，让女孩儿开始追男孩儿，男孩儿拒绝女孩儿，应用**Gale-Shapley 算法**求出一个稳定匹配。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法 (续十一)

可以证明，这种男追女-女拒男的方案对男性更有利。事实上，稳定匹配往往不止一种，然而**Gale-Shapley 算法**给出的匹配可以保证，每一位男性得到的伴侣都是所有可能的稳定匹配中最理想的一个；同时每一位女性得到的伴侣都是所有可能的稳定匹配中最差的一个。

练习 考虑下面实例：

A (4, 3, 2, 1)	1 (A, D, C, B)
B (3, 2, 4, 1)	2 (A, B, C, D)
C (1, 3, 4, 2)	3 (A, C, D, B)
D (2, 4, 3, 1)	4 (B, A, D, C)

验证：分别用男追女和女追男两种方案，求出的稳定匹配为

男追女：**1 - C, 2 - D, 3 - B, 4 - A**

女追男：**1 - C, 2 - B, 3 - D, 4 - A**

2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续十一）



倘若有某位女性知道所有其他人的偏好情况，经过精心计算，她有可能发现，故意拒绝本不该拒绝的追求者（暂时答应一个较差的男性做情侣），或许有机会等来更好的男性。因而，在实际生活中应用**Gale-Shapley 算法**，不得不考虑博弈中的**欺诈**行为。



2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续十二）



Gale-Shapley 算法有一些局限。例如，它无法处理某些不分男女的稳定匹配问题：假设每个宿舍可住两个人，且 $2n$ 个学生中每一个学生对其余 $2n - 1$ 个学生的偏好评价，如何寻找一个宿舍的稳定分配呢？此时，**Gale-Shapley 算法**就失效了。而事实上，宿舍的稳定分配问题中有可能不存在稳定的分配。

4人偏好关系

A: B C D

B: C A D

C: A B D

3个可能的分配

A + B; C + D

A + C; B + D

A + D; B + C

如何评判一个宿舍分配方案的优劣是一个基本的问题。稳定匹配问题还有很多其他的变种，有些问题是属于**NP-完全**问题类，至今仍然没有（也不大可能有）一种有效的求解算法。

2. 博弈论 - Gale-Shapley算法（续十三）



1943年当沙普利还是哈佛大学的一名大学生时，他被征调入美国空间，并在中国的成都服役。他曾经因为破译前苏联气象密码而荣获银星奖章。



2012年沙普利在斯德哥尔摩。



2. 博弈论 - 匹配游戏

例2. 找对象游戏：出自麻省理工学院著名经济学家**Dan Ariely**的《**The Upside of Irrationality - The Unexpected Benefits of Defying Logic at Work and at Home**》。

- **100**位正值青春年华的大学生应邀参加了游戏。男女各半。然后制作了**100**张卡片，卡片上写了从**1**到**100**总共一百个数字。
- 奇数的**50**张卡片给男生，偶数的**50**张卡片给女生。但他们并不知道卡片上写的是什么数字。
- 工作人员将卡片拆封，然后贴在该大学生的背后。

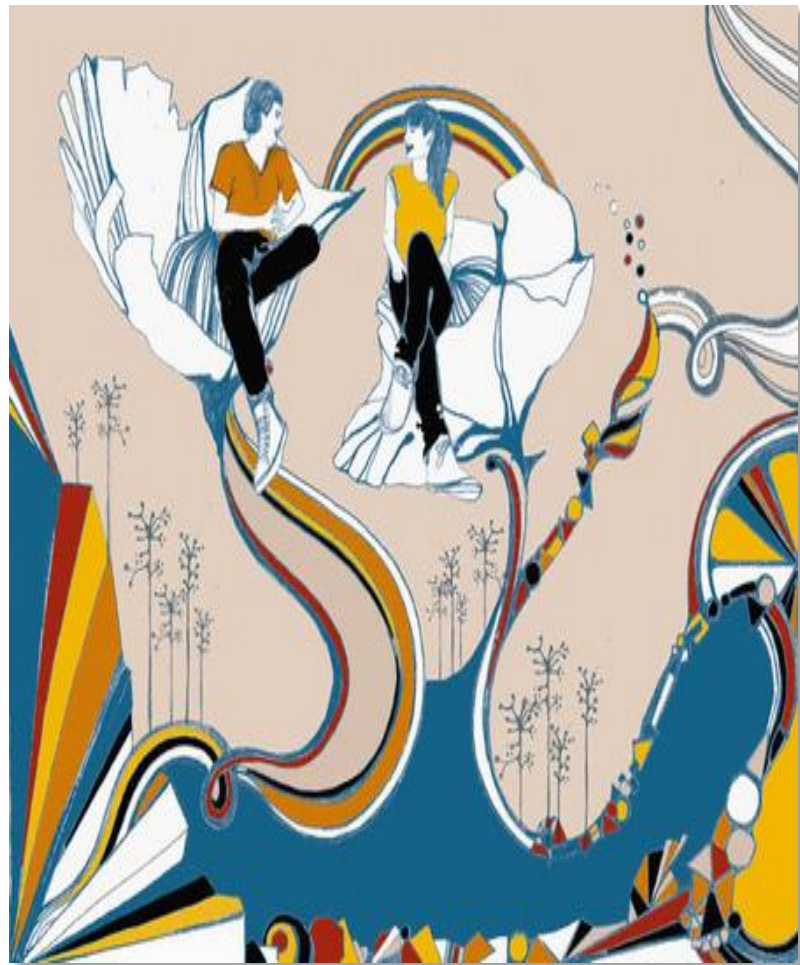




2. 博弈论 - 匹配游戏 (续一)

游戏规则:

1. 男女共**100**人，男的奇数编号，女的偶数。
2. 编号为**1~100**，但他们不知道数字最大的是**100**，最小的是**1**。
3. 编号贴在背后，自己只能看见别人的编号。
4. 大家可以说任何话，但不能把对方的编号告诉对方。
5. 游戏要求：大家每个人都去找一个异性配对，只要两人加起来的数字越大，得到的奖品越高，奖金归他们所有（平分）。
6. 配对时间有限。





2. 博弈论 - 匹配游戏（续二）

这个游戏设置很简单，就是要男女都能找到适合自己的异性，争取能凑到最大的总和。

游戏是有奖金的，奖金金额为编号总和翻**10**倍。比如，**83**号男生找到了**74**号女生配对，那么两人可以获得 **$(83+74)*10=1570$** 美元的奖金。但如果**2**号女生找到了**3**号男生配对，那么两人只能拿到**50**美元了。

游戏开始：

由于大家都不知道自己背后的数字，因此首先就是观察别人，很快分数高的男生和女生很快被大家找出来了。

例如，**99**号男生和**100**号女生。这两人身边围了一大群人，大家都想说服他们和自己配成一对。

“来跟我一起嘛！我会给你幸福的！”

“我们简直天作之合啊！”



2. 博弈论 - 匹配游戏（续三）

是的，有些人天生就自带“女神”/“男神”光环.....谁都想和最好的“女神”/“男神”配对。

但人类的一夫一妻制决定了，人不可能同时和N个人配对，因此他们(高分者)变得非常挑剔，他们虽然不知道自己的分数具体是多少，但他们知道一定是比普通人的要高。

为什么?看看围在自己身边的狂蜂浪蝶就知道了，从这些追求者们殷切的眼神中就能够看出来。

自小是女神的人为什么被外界看起来更加“高贵冷艳傲慢”，是因为从小到大她们都有太多乱七八糟的浪蜂浪蝶扑过来了。追求者太多，哪有时间去一一好口相向?只能高冷艳一点把不合格的拒之门外才是最佳策略。

那些碰壁的追求者迫于无奈只能退而求其次，原本给自己的目标是一定要找90+的人配对，慢慢的发现80+也可以了，甚至70+或者60+也凑合着过了。



2. 博弈论 - 匹配游戏（续四）

但那些数字太小的人就很悲催了，他们到处碰壁，到处被拒，被嫌弃。

据一位学生事后表示，在参加了这场游戏之后，他对人生的理解都有了不同.....因为他在短短几小时里就感受到了人间的冷暖——他们背后的数字太小了(基本都是个位数)，要找一个愿意配对的人简直是难上加难。

最后他们想出来的办法无外乎两条路：

一个是大家自己找个差不多的凑合凑合算了，比如 **5** 号和 **6** 号俩人配成一对，虽然奖金只有**110**美元，那也好过没有。

二是和对方商量，如果你愿意和我配对，那么拿到奖金的时候就不是对半分，我愿意给你更多，比如三七分或四六分等等，或者事后再请你吃饭，虽然请客吃饭花的钱肯定多过奖金数额，但是找不到人配对实在是太没面子了。



2. 博弈论 - 匹配游戏（续五）

经过了漫长的配对过程，眼看时间就要到了，还有少数人没有成功配对，这些人没办法了，只能赶紧的草草找人完成任务。因为单身一人的话是拿不到奖金的.....

最后的倒数阶段，没有配对的都胡乱找了个人。当然也有坚持不配对，单身结束游戏的大学生。游戏结束。

心理学家发现，绝大多数人的配对对象其背后的数字都非常接近自己的数字，换言之中国古人说的“门当户对”还是很有道理的。

比如**55**号男生，他的对象有**80%**的可能性是**50-60**之间的女生，俩人数字相差**20**以上的情况非常罕见。

大家猜**100**号女生的配对对象是谁？

有意思的是，**100**号女生的配对对象竟然不是**99**号男生，也不是**97**或**95**号男生，竟然是**73**号男生，两人相差了**27**！

为什么会相差这么多？



2. 博弈论 - 匹配游戏 (续六)

原来**100**号女生被众多的追求者冲昏了头，她采取的策略是“捂盘惜售”(因为她并不知道**100**是最大值，也不知道自己就是**100**号)，她还在等待更大数字的男人，等到大家都配对完毕，她终于开始慌了。于是她在剩下的男生里找了一个数字最大的，就是那位**73**号幸运儿。她最后也尝试过去找**90+**的男生，但是人家都已经有了女伴了，让他们抛弃现有的女伴跟她配对并不现实，何况已经配对了他们不会为了这点钱而损自己名声。





2. 博弈论 - 匹配游戏 (续七)

从中我们还可以总结出一些经验:

1、因为人太多地方太小,你并不可能跑去看每个人背后的数字。(空间,圈子,地域限制)

2、你只要看谁边上围着的人多,谁就是数字较大的人,而那些身边孤苦伶仃门可罗雀的人,肯定是数字小的,通过这个方法你可以立刻筛选出目标对象。(多数决择,光环效应)

3、小数字的人追求大数字的人一般都很辛苦,因为要大数字的人接受小数字的人总不是那么甘心,因此追求方要付出更大的努力才行,但更大的可能是你再怎么努力,对方也不理你。(女神与屌丝)

思考题 这个游戏能不能视为人类恋爱行为的一个合理模型呢?





2. 博弈论 - 匹配游戏（续八）

我们每个人在遇到一个异性的时候，出于本能的就会开始评价对方的价值，这完全是下意识的。但人类的价值非常难评估，没有谁会把数字贴在自己的背后，人们还往往会故意夸大自己的价值。至于夸大的手段、浮夸的工具各种各样。

我们在生活中所遇到的人也远远超过了**100**个，我们面临的是一个更加复杂的环境，这让我们做出决定的难度成倍增加。正因为选择的难度很大，因此人类进化出了一些很简单的指标。比如，我们更倾向于基于别人的判断来决定自己的判断。

游戏让我们知道，如果爱情是一场精确的匹配游戏，最最重要的是你自身的价值有多高(即背后的数字大小)，而你采取什么办法去恋爱可能都是次要的。但和这个实验有个很重要的不同就是：人类社会实在太复杂了，一个人的价值并不是那么容易就能体现出来的。而且我们很难去判别一个人的价值。



2. 博弈论 - 匹配游戏（续九）

还有一点就是，我们每个人眼中的价值标准都不一样，所以我们可以看到这么多元的爱情。张生与崔莺莺，白瑞德与郝思嘉，罗密欧与朱丽叶……这些故事代代传颂，足以证实每个年代都有在世人看来“不可能”的爱情正在发生。

这里的世人是谁？就是那些“大多数人”。是你的邻居三姑八姨婆九舅舅隔壁学校的同学，甚至是你的父母。

这个社会的风潮是由这些“大多数人”去决定的，所以当你看到社会的价值倾向时，你看到的就是大多数人的标准。但大多数人的就一定是正确的吗？他们也许都不自知该用什么样的标准来对待爱情。

人云亦云是他们大多数人“发表意见”的最佳策略。对某些邻居三姑八姨婆来说，婚姻就是一桩买卖，女人是有折旧率的，所以越早嫁出去越好；男人的选择是对女人选择租赁而非购买……



2. 博弈论 - 匹配游戏（续十）

其实，作为理性的经济人，这可能没错。婚姻本质就是一种利益交换，就像经济学里所有东西都可以量化，用等额的货币来取代。但是我们都是有感情有弱点的动物。婚姻的神奇在于，这种利益交换有时候是不对等的，而让它不对等的原因，是我们所说的变量。这个变量叫“感情”。

一个教经济学的老头，曾经给学生说过爱情的经济学：

“姑娘，有一天一个百万富翁向你求婚，他愿意给你一切，这本来是一件非常美好的事情。算一下，你以为自己赚了一百万。但同时又有一个千万富翁看上你了，那么你和百万富翁结婚的机会成本就是一千万。也就是说，如果你嫁给了百万富翁，那么你会亏损九百万。”这是经济学。

“我非常庆幸，我的太太经济学没有学好，那时候她非常漂亮我却没钱，但她还是嫁给我了。”这是爱情。

至于你，是被这些思潮所裹挟，还是有自己的爱情观，完全取决于你。

2. 博弈论 – 复习题



复习题 假设有三个男生 $\{a, b, c\}$ ，和三个女生 $\{x, y, z\}$ ，每一个男生/女生对每一个女生/男生都有不同的喜爱程度，如下面的两个表所示。请给出男生和女生之间的所有稳定匹配。

a: $x > y > z$

b: $y > x > z$

c: $y > x > z$

x: $c > b > a$

y: $a > b > c$

z: $c > a > b$





2. 博弈论 – 复习题（续一）

复习题 假设有五个男孩 {1, 2, 3, 4, 5} 和五个女孩 {a, b, c, d, e}, 每一个男生/女生对每一个女生/男生都有不同的喜爱程度, 如下图表所示。(1) 请问图中所示的匹配是稳定的吗? (2) 请给出男生和女生之间的所有稳定匹配。 答案: 1E, 2B, 3D, 4C, 5A

