# 高显经典力学习题解答

数据风暴中的避风港

二〇二四年十二月五日

数据风暴中的避风港 社区成员共同编写, 本习题解答及其 LaTeX 代码符合 MIT 许可.

链接: HTTPS://GITHUB.COM/PHIYU/GAOXIAN.

编写成员均为物理专业或非物理专业的物理爱好者, 编写过程中难免有许多纰漏, 欢迎指出, 也欢迎加入 数据风暴中的避风港 大家庭（QQ 群: 832100706）.

*2024 年 12 月*

# 目录

# 第一章　变分法

**1.1**　给定 $f(t)$ 的泛函

$$S[f]=-\int \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$$

其中 $V$ 是 $f$ 的任意函数. 求 $S[f]$ 取极值时, $f(x)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

**参考解答 1.1** 记 $L=\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$, 则

$$\frac{\partial L}{\partial f}=V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2},\qquad \frac{\partial L}{\partial f'}=\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}$$

$$\begin{aligned}\delta S&=\int \mathrm{d}t\left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}\delta f+\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\delta f'\right)\\&\simeq\int \mathrm{d}t\left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\right)\right)\delta f\end{aligned}$$

因此, *Euler-Lagrange* 方程为

$$-\frac{\delta S}{\delta f}=-V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}f'\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'}{\sqrt{1-f'^2}}+\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f''+(1-f')f'^2}{(1-f'^2)^{3/2}}-V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-f'^2}=0$$

**1.2**　给定 $f(t)$ 的泛函 $S[f]=\int \mathrm{d}t\,L$, 其中 $L=(f'(t))^2+f(t)f'(t)+\frac{1}{2}f(t)f''(t)$.

**(1)** 求一阶泛函导数 $\frac{\delta S}{\delta f}$;

**(2)** 将 $L$ 改写成 $L=\tilde{L}+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 的形式, 要求 $\tilde{L}$ 中不包含 $f''(t)$, 求 $\tilde{L}$ 和 $F$;

**(3)** 求泛函 $\tilde{S}[f]=\int \mathrm{d}t\,\tilde{L}$ 的一阶泛函导数 $\frac{\delta\tilde{S}}{\delta f}$, 并比较其和 $\frac{\delta S}{\delta f}$ 的异同.

**参考解答 1.2**　*(1)*

$$\begin{aligned}\delta S=\int \mathrm{d}t\,\delta L&=\int \mathrm{d}t\left(\left(f'+\frac{1}{2}f''\right)\delta f+(2f'+f)\,\delta f'+\frac{1}{2}f\delta f''\right)\\&\simeq\int \mathrm{d}t\left(f'+\frac{1}{2}f''-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2f'+f)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{2}f\right)\right)\delta f\\\frac{\delta S}{\delta f}&=-f''\end{aligned}$$

*(2)* 假设 $F=\frac{1}{2}ff'$, 则 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}f'^2+\frac{1}{2}ff''$, $\tilde{L}=ff'+\frac{1}{2}f'^2$ 满足题意.

*(3)*

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{S}[f] &= \int \mathrm{d}t\delta\tilde{L} = \int \mathrm{d}t\left(f'\delta f + (f+f')\delta f'\right) \\
&\simeq \int \mathrm{d}t\left(f' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+f')\right)\delta f \\
\frac{\delta\tilde{S}}{\delta f} &= -f''
\end{aligned}
$$

注意到 $\dfrac{\delta\tilde{S}}{\delta f} = \dfrac{\delta S}{\delta f}$.

**1.3**　给定两个函数 $n(t)$ 和 $a(t)$ 的泛函 $S[n,a] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, na^3\left(A(n) + 3B(n)\frac{a'^2}{n^2a^2}\right)$, 其中 $A, B$ 是 $n(t)$ 的任意函数. 求泛函 $S[n,a]$ 取极值时, $n(t)$ 和 $a(t)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

**参考解答 1.3**

$$
\delta S = \int \mathrm{d}t\left(a^3\left(A(n) + 3B(n)\frac{a'^2}{n^2a^2}\right) + na^3\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} + 3\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{a'^2}{n^2a^2} - \frac{3}{2}B(n)\frac{a'^2}{n^3a^2}\right)\right)\delta n
$$

$$
-\frac{\delta S}{\delta n} = -a^3A - 3B\frac{aa'^2}{n^2} - na^3\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} - 3n\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{aa'^2}{n^2} + \frac{3}{2}nB\frac{aa'^2}{n^3} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}t\left(6B\frac{aa'}{n}\delta a' + \left(3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a\right) \\
&\simeq \int \mathrm{d}t\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) + 3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a \\
-\frac{\delta S}{\delta a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) - 3nAa^2 - 3B\frac{a'^2}{n} = 0
\end{aligned}
$$

**1.4**　给定二元函数 $f(t,x)$ 的泛函 $S[f] = \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)^2 - m^2f^2(t,x)\right]$, 其中 $m$ 是常数. 求泛函 $S[f]$ 取极值时 $f(t,x)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

**参考解答 1.4** *泛函 $S[f]$ 的 Lagrange 函数为 $L(t,x,f,f_t,f_x) = \dfrac{1}{2}(f_t^2 - f_x^2 - m^2f^2)$, 则*

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\delta L \\
&\simeq \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial f_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)\right] \\
&= \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x(-m^2f - f_{tt} + f_{xx})\delta f
\end{aligned}
$$

取极值有 $-\dfrac{\delta S}{\delta f} = 0$, 即 $f_{tt} - f_{xx} + -m^2f = 0$

**1.5**　考虑一条不可拉伸、质量均匀的柔软细绳, 长为 $l$, 质量为 $m$. 细绳两端点悬挂于相同高度, 水平距离为 $a(a<l)$.

**(1)** 选择合适的坐标, 求细绳总的重力势能 $V$ 作为细绳形状的泛函;

**(2)** 求细绳重力势能取极值时, 细绳形状所满足的欧拉-拉格朗日方程.

**参考解答 1.5** *(1)* 取细绳所在平面建立笛卡尔系, 设悬点为 $\boldsymbol{x_1}=(0,0)$, $\boldsymbol{x_2}=(a,0)$, 竖直向下为 $y$ 轴正方向, 设细绳形状为 $y=y(x)$ ( $0\le x\le a$ ), 可知细绳线密度为 $\lambda=\dfrac{m}{l}$, 则

$$\begin{aligned} V[y] &= \int -(\lambda \mathrm{d}L)gy \\ &= -\frac{mg}{l}\int_0^a y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

*(2)* 泛函 $V[y]$ 的 *Lagrange* 函数为 $L(x,y,y')=-\dfrac{mg}{l}y\sqrt{1+y'^2}$, 重力势能取极值有

$$\begin{aligned} -\frac{\delta V}{\delta y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y} \\ &= -\frac{mg}{l}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)-\sqrt{1+y'^2}\right] \\ &= -\frac{mg}{l}\left(\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{yy''}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}}-\sqrt{1+y'^2}\right)=0 \end{aligned}$$

将最后一式化简得到: $yy''-y'^2-1=0$ , 此即著名的悬链线满足的微分方程.

**1.6 考虑 3 维欧氏空间中的任意 2 维曲面, 取直角坐标, 曲面方程为 $z=z(x,y)$. 曲面上任意两固定点, 由曲面上的任一曲线连接. 曲线方程为 $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$, 这里的 $\lambda$ 是曲线的参数.**

**(1) 求曲线的长度 $S$ 作为 $x(\lambda)$ 和 $y(\lambda)$ 的泛函 $S[x,y]$;**

**(2) 求曲线长度 $S$ 取极值时, $x(\lambda)$ 和 $y(\lambda)$ 的欧拉-拉格朗日方程;**

**(3) 当曲面为以下情况时, 求解 $x(\lambda)$ 和 $y(\lambda)$:**

**(3.1) 平面 $z=ax+by+c$ ( $a$, $b$, $c$ 为常数);**

**(3.2) 球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ( $R$ 为常数);**

**(3.3) 锥面 $z=H\left(1-\dfrac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}\right)$ ( $H$, $R$ 为常数).**

**参考解答 1.6** *(1)* $S[x,y]=\displaystyle\int \mathrm{d}\lambda\sqrt{x'^2+y'^2}=\int \mathrm{d}\lambda L\left(x',y'\right)$

*(2)* 先对 $x(\lambda)$ 做变分,

$$\begin{aligned} \delta S=\int \mathrm{d}\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\delta x'\right) &= \int \mathrm{d}\lambda\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)\delta x' \\ &\simeq \int \mathrm{d}\lambda\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)\delta x \end{aligned}$$

因此, $x(\lambda)$ 的 *Euler-Lagrange* 方程为

$$-\frac{\delta S}{\delta x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=\frac{x''y'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

再对 $y(\lambda)$ 做变分, 因为 $x, y$ 对称, 同理可得 $y(\lambda)$ 的 *Euler-Lagrange* 方程为

$$-\frac{\delta S}{\delta y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)=\frac{y''x'^2}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

*(3)(3.1)* 未完工

**1.7**　**假设地球质量均匀分布, 密度为 $\rho$, 半径为 $R$. 如图 1.9 所示, 在地球内部钻一个光滑隧道, 隧道处于过球心的大圆平面内. 一个物体从 $A$ 点静止滑入, 则最终将由 $B$ 点滑出. 在轨道平面取极坐标 $\{r,\phi\}$, 求轨道形状 $r(\phi)$ 满足什么方程时物体穿过隧道的时间最短.（提示：地球内部距离中心 $r$ 处质量为 $m$ 的粒子的牛顿引力势能为 $U(r)=\frac{2}{3}\pi Gm\rho r^2$, 其中 $G$ 为牛顿引力常数.）**

**参考解答 1.7** 考察 $A$、$B$ 与地球球心形成的平面, 以球心为极点, 设极坐标下 $A$ 点坐标为 $(R,\phi_1)$, $B$ 点为 $(R,\phi_2)$. 对于一个从 $A$ 静止释放的粒子, 运动到 $r(\phi)$ 处速度为

$$v(r)=\sqrt{\frac{2T}{m}}=\sqrt{\frac{2\Delta U(r)}{m}}=\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho(R^2-r^2)}$$

考虑到极坐标下线元为 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+(r\mathrm{d}\phi)^2$, 则沿着轨道从 $A$ 到 $B$ 的运动总时间为 $r(\phi)$ 的泛函, 表达式为

$$T[r]=\int\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho(R^2-r^2)}}\mathrm{d}\phi$$

该泛函的等效 *Lagrange* 函数为 $L(r,r')=\sqrt{\dfrac{r'^2+r^2}{R^2-r^2}}$, 取极值时满足欧拉-拉格朗日方程:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{r'}{L(R^2-r^2)}\right)-\frac{r(r'^2+R^2)}{L(R^2-r^2)^2}\\&=\frac{r''}{(r'^2+r^2)^{1/2}(R^2-r^2)^{1/2}}-\frac{r'^2(r''+r)}{(r'^2+r^2)^{3/2}(R^2-r^2)^{1/2}}-\frac{rR^2}{(r'^2+r^2)^{1/2}(R^2-r^2)^{3/2}}\\&=0\end{aligned}$$

最后一式整理可得 $r(R^2-r^2)r''+(r^2-2R^2)r'^2-R^2r^2=0$

**1.8**　**数学上将面积取极值的曲面称作极小曲面. 如图 1.10 所示, $\{x,y\}$-平面上给定的 $A$ 点和 $B$ 点之间有曲线 $y(x)$, 此曲线绕 $x$ 轴旋转而成旋转曲面.**

**(1)** **求此旋转曲面面积取极小值时 $y(x)$ 满足的微分方程;**

**(2)** **求 $y(x)$ 的解.**

**参考解答 1.8** 待施工

**1.9**　**并不是所有的微分方程都是欧拉-拉格朗日方程.**

**(1)** **证明 $f''(t)+2\lambda f'(t)+\omega^2 f(t)=0$（$\lambda,\omega$ 是常数）在 $\lambda\neq 0$ 时不是欧拉-拉格朗日方程;**

**(2)** **引入新变量 $q=\mathrm{e}^{\lambda t}f$, 求 $q$ 所满足的方程;**

**(3)** 求 $q$ 的方程作为欧拉-拉格朗日方程所对应的泛函 $\tilde{S}[q]$.

**参考解答 1.9** *(1)* 假设存在泛函 $S[f]=\int L(t,f,f')\mathrm{d}t$ 满足:

$$\frac{\delta S}{\delta f}=L_f-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_{f'})=f''+2\lambda f'+\omega^2 f$$

将此式化简可得到:

$$L_f-L_{f't}-L_{ff'}f'-L_{f'f'}f''=f''+2\lambda f'+\omega^2 f$$

于是应当有 $L_{f'f'}=-1$, 进而有:

$$L(t,f,f')=-\frac{1}{2}f'^2+C_1(f,t)f'+C_2(f,t)$$

其中 $C_1(f,t),C_2(f,t)$ 的具体形式待定, 将该解带入欧拉-拉格朗日方程化简有:

$$\frac{\partial C_2}{\partial f}(f,t)-\frac{\partial C_1}{\partial t}(f,t)=2\lambda f'+\omega^2 f$$

在 $\lambda\neq 0$ 的情况下, 上式不可能对所有 $f$ 恒成立, 因此原微分方程不是欧拉-拉格朗日方程.

*(2)* 将 $f(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}q(t)$ 带入原方程, 容易化简得到:

$$q''(t)+(\omega^2-\lambda^2)q(t)=0$$

*(3)* 与 *(1)* 中讨论类似, 将所用符号对应替换即可:$(S,L,f;\lambda,\omega^2)\to(\tilde{S},\tilde{L},q;0,\omega^2-\lambda^2)$, 替换后得到:

$$\begin{cases}\tilde{L}(t,q,q')=-\dfrac{1}{2}q'^2+C_1(q,t)q'+C_2(q,t)\\[2ex]\dfrac{\partial C_2}{\partial q}(q,t)-\dfrac{\partial C_1}{\partial t}(q,t)=(\omega^2-\lambda^2)q\end{cases}$$

不妨取 $C_1(q,t)=0,C_2(q,t)=\dfrac{1}{2}(\omega^2-\lambda^2)q^2$, 我们就能得到:

$$\tilde{S}[q]=\int\tilde{L}(t,q,q')\mathrm{d}t=\int-\left(\frac{1}{2}q'^2-\frac{1}{2}(\omega^2-\lambda^2)q^2\right)\mathrm{d}t$$

不难看出, 新变量 $q$ 的 *Lagrange* 函数满足谐振子的形式。

# 第二章　位形空间

**2.1**　定性画出沿着操场跑道跑步时你的世界线, 并分析其与跑道的关系.

**参考解答 2.1** *世界线在每一时刻与该时刻的位形空间交于一点, 所有这样的点的集合即在跑道上跑步的轨迹. 该路径是位形空间中的一条封闭曲线.*

**2.2**　如图2.1所示, 两个粒子由一条无质量、不可拉伸的软绳连接, 绳长为 $l$. 粒子 $m_2$ 放在固定的水平面上, 绳子穿过水平面上的小孔, 另一端悬挂粒子 $m_1$. 不考虑摩擦, 假设 $m_2$ 可以在整个水平面上运动, $m_1$ 只在竖直方向运动.

**(1)** 分析这两个粒子和绳子构成的系统的位形和约束, 给出约束方程, 并分析约束是否完整、定常约束;

**(2)** 求系统的自由度.

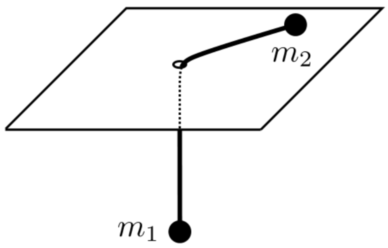


图 2.1:

**参考解答 2.2** *(1) 设无约束时的广义坐标为 $\{r_1, r_2, \theta\}$, 其中 $r_1$ 和 $r_2$ 分别是粒子与小孔之间的距离, $\theta$ 是粒子 $m_2$ 在平面上运动的角度. 约束方程为*

$$\phi(r_1, r_2, \theta) = r_1 + r_2 - l = 0$$

*注意到该约束方程是广义坐标的函数, 因此为完整约束; 且不显含时间, 因此为定常约束.*

*(2) 完整约束可减少一个自由度, 因此系统的自由度为 2, 即最少只需两个独立的广义坐标 $\{r, \theta\}$ 即可完全描述粒子的位形.*

**2.3**　如图2.2所示, 质量为 $M$ 的楔块放在水平面上, 斜角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$, 底边长 $L$. 两个质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 的粒子, 由一根无质量、不可拉伸的软绳连接, 绳长为 $l$, 两个粒子分别放在楔块的两个斜面上. 不考虑摩擦,

**(1)** 分析楔块、两个粒子以及绳子组成的系统的位形与约束，给出约束方程，并分析约束是否完整、定常约束；

**(2)** 求系统的自由度.

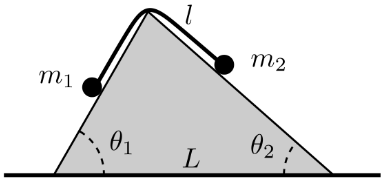


图 2.2:

**参考解答 2.3** 待施工.

# 第三章　相对论时空观

**3.1**　考虑 2 维欧氏空间, 取一般坐标 $\{u,v\}$, 与直角坐标关系为 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. 求 2 维欧氏空间度规在 $\{u,v\}$ 坐标下的形式.

**参考解答 3.1** 由线元的定义, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\mathrm{d}u^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\mathrm{d}v^2+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\mathrm{d}u^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\mathrm{d}v^2+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此, 度规在 $\{u,v\}$ 坐标下的形式为

$$
g_{ij}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\end{pmatrix}
$$

**3.2**　考虑 3 维欧氏空间, 已知球坐标与直角坐标的关系为 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$. 求 3 维欧氏空间度规在球坐标下的形式.

**参考解答 3.2** 考虑 3 维欧氏空间中的矢量 $\boldsymbol{v}$, 由此构造坐标系的坐标基矢

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial r} &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \theta} &= r\cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+r\cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}-r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{z}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \phi} &= -r\sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+r\sin\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}
$$

则线元可以写为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{d}r & \mathrm{d}\theta & \mathrm{d}\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_{rr} & g_{r\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\phi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}=\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^i}\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial u^j}=\dfrac{\partial x}{\partial u^i}\dfrac{\partial x}{\partial u^j}+\dfrac{\partial y}{\partial u^i}\dfrac{\partial y}{\partial u^j}+\dfrac{\partial z}{\partial u^i}\dfrac{\partial z}{\partial u^j}$.

将 $g_{ij}$ 代入线元, 得

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{d}r & \mathrm{d}\theta & \mathrm{d}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\phi \end{pmatrix}$$

即 3 维欧氏空间度规在球坐标下的形式为

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

# 第四章　最小作用量原理

# 第五章　对称性与守恒律

# 第六章　辅助变量

# 第七章　达朗贝尔原理

# 第八章　两体问题

# 第九章　微扰展开

# 第十章　小振动

**10.1**　已知 $n$ 个函数 $\{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$ 线性无关的“充分”条件是其朗斯基行列式 (**Wronskian**) 非零, 定义为

$$\mathcal{W}(u_1, \ldots, u_n) := \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

其中 $u^{(i)}$ 代表对 $t$ 的 $i$ 阶导数.

**(1)** 证明 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 和其复共轭 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}$ 是线性无关的, 即 $\mathcal{W}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}) \neq 0$;

**(2)** 证明任意复函数 $u(t)$ 及其复共轭的朗斯基行列式 $\mathcal{W}(u, u^\star)$ 只有虚部, 并讨论其非零的条件.

**参考解答 10.1**　*(1) 不难求得* $\mathcal{W}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}) = 2\mathrm{i}\omega \neq 0$

*(2) 对于任意复函数* $u(t)$,

$$\mathcal{W}(u, u^\star) = \det \begin{pmatrix} u & u^\star \\ \dot{u} & \dot{u^\star} \end{pmatrix} = u\dot{u^\star} - (u\dot{u^\star})^\star = 2\mathrm{Im}(u\dot{u^\star})$$

*可见其只有虚部, 非零要求* $\mathrm{Im}(u\dot{u^\star}) \neq 0$

**10.2**　某单自由度系统, 广义坐标为 $q$, 拉格朗日量为 $L = \dfrac{1}{2}G(t)\dot{q}^2 - \dfrac{1}{2}W(t)q^2$, 其中 $G(t)$ 和 $W(t)$ 都是时间的函数.

**(1)** 若 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 为系统运动方程的任意两个线性无关的特解, 证明其朗斯基行列式 $\mathcal{W}(t) = W(q_1(t), q_2(t))$ 满足形式为 $\dot{\mathcal{W}} + f(t)\mathcal{W} = 0$ 的微分方程, 并给出 $f(t)$ 的表达式;

**(2)** 根据 **(1)** 的结果, 分析当 $G(t)$ 和 $W(t)$ 满足什么条件时 $\mathcal{W}$ 为常数.

**参考解答 10.2**　*(1) 易求得系统运动方程为*

$$G(t)\ddot{q} - \dot{G}(t)\dot{q} - W(t)q = 0$$

*转化为一阶常微分方程组为:*

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{A}(t)\mathbf{q}$$

式中

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -W/G & -\dot{G}/G\end{pmatrix},\mathbf{q}=\begin{pmatrix}q & \dot{q}\end{pmatrix}^T$$

现计算 $\dot{\mathcal{W}}$. 由线性常微分方程的 *Liouville* 定理,

$$\dot{\mathcal{W}}=\mathrm{tr}(\mathcal{A})\mathcal{W}$$

则 $f(t)=-\mathrm{tr}(\mathcal{A})=\dfrac{\dot{G}(t)}{G(t)}$.

*(2)* 由于 $\mathcal{W}\neq 0$,$\dot{\mathcal{W}}=0$ 意味着 $\dot{G}(t)=0$

**10.3** 待施工

**参考解答 10.3** 待施工

**10.4** **求习题 9.5 中系统做小振动的特征频率与简正模式, 并分析简正模式的物理意义.**

**参考解答 10.4** 待施工

**10.5** **求习题 9.6 中系统做小振动的特征频率与简正模式, 并分析简正模式的物理意义.**

**参考解答 10.5** 待施工

**10.6** **求习题 9.7 中系统做小振动的特征频率与简正模式, 并分析简正模式的物理意义.**

**参考解答 10.6** 待施工

# 第十一章　转动理论

# 第十二章 刚体

**12.1** 已知方阵的矩阵对数由 $\ln(1+M)=M-\frac{1}{2}M^2+\frac{1}{3}M^3-\cdots$ 定义.

**(1)** 给定同阶方阵 $X, Y$, 证明矩阵指数 $\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y=\mathrm{e}^Z$ 由所谓 **Baker-Campbell-Hausdorff** 公式给出, 即 $Z=X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\cdots$.

**(2)** 仿照(1)的推导, 利用无穷小三维转动生成元的对易式求 $\mathrm{e}^{-\psi J_3}\mathrm{e}^{-\theta J_1}\mathrm{e}^{-\phi J_3}=\mathrm{e}^{\phi^1 J_1+\phi^2 J_2+\phi^3 J_3}$ 的 $\phi^1,\phi^2,\phi^3$, 精确到 2 阶.

**参考解答 12.1** *(1) 把 $\mathrm{e}^X, \mathrm{e}^Y$ 展开到 3 阶即可.*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y &= (1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3)(1+Y+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{6}Y^3) \\
&= 1+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X^3+Y+\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{6}Y^3+XY+\frac{1}{2}X^2Y+\frac{1}{2}XY^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln\Big(\mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y\Big) &= X+Y+\frac{1}{2}(X^2+Y^2+2XY)+\frac{1}{6}(X^3+Y^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)- \\
&\frac{1}{2}(X+Y+\frac{1}{2}(X^2+Y^2+2XY))^2+\frac{1}{3}(X+Y)^3 \\
&= X+Y+\frac{1}{2}(X^2+Y^2+2XY)+\frac{1}{6}(X^3+Y^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)- \\
&\frac{1}{2}\left(X^2+Y^2+XY+YX+\frac{1}{2}\Big((X+Y)(X^2+Y^2+2XY)+(X^2+Y^2+2XY)(X+Y)\Big)\right) \\
&+\frac{1}{3}(X^3+Y^2X+XYX+YX^2+X^2Y+Y^3+XY^2+YXY) \\
&= X+Y+\frac{1}{2}(XY-YX)-\frac{1}{4}(2X^3+2Y^3+2YXY+2XYX+3X^2Y+3XY^2+Y^2X+YX^2) \\
&+\frac{1}{6}(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)+\frac{1}{3}(X^3+Y^2X+XYX+YX^2+X^2Y+Y^3+XY^2+YXY) \\
&= X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]
\end{aligned}
$$

*(2) 要求是展开到 2 阶, 那么只需要取前两项. 根据 SO(3) 生成元之间的对易关系 $[J_i,J_j]=\varepsilon_{ijk}J_k$*

$$
\mathrm{e}^{-\psi J_3}\mathrm{e}^{-\theta J_1}=\mathrm{e}^{-\psi J_3+-\theta J_1+\frac{1}{2}\psi\theta J_2}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\psi J_3}\mathrm{e}^{-\theta J_1}\mathrm{e}^{-\phi J_3} &= \mathrm{e}^{-\psi J_3-\theta J_1+\frac{1}{2}\psi\theta J_2}\mathrm{e}^{-\phi J_3} \\
&= \mathrm{e}^{-\psi J_3-\theta J_1+\frac{1}{2}\psi\theta J_2-\phi J_3-\frac{1}{2}[\psi J_3+\theta J_1-\frac{1}{2}\psi\theta J_2,\phi J_3]} \\
&= \mathrm{e}^{-\psi J_3-\theta J_1+\frac{1}{2}\psi\theta J_2-\phi J_3-\frac{1}{2}\theta\phi J_2}
\end{aligned}
$$

也就是说 $\phi^1=-\theta,\phi^2=\dfrac{1}{2}(\psi-\phi)\theta,\phi^3=-\psi-\phi.$

**12.2 求质量为 $m$ 的匀质椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的相对于质心的转动惯量张量**

**参考解答 12.2** 采用广义球坐标换元 $x=ar\sin\theta\cos\phi=ax_1,y=br\sin\theta\sin\phi=by_1,z=cr\cos\theta=cz_1$, 则容易看出 $r$ 从 0 变化到 1, 且 $r=1$ 时 $x,y,z$ 满足椭球方程. 其体积元写为 $\mathrm{d}V=abcr^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=abc\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$

由于

$$
\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\le 1}(x_1^2+y_1^2+z_1^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1=\int_{r_1^2\le 1}r_1^2\times r_1^2\mathrm{d}r_1\times 4\pi
$$

立刻得到

$$
\int_{r_1^2\le 1}x_1^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1=\frac{4\pi}{15}
$$

由于球的密度 $\rho=\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi abc}$ 所以计算积分

$$
\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}\rho x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{3}{4\pi}a^2m\int_{r_1^2\le 1}x_1^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1=\frac{1}{5}ma^2
$$

因此可以得到

$$
I_{xx}=\frac{1}{5}m(b^2+c^2),I_{yy}=\frac{1}{5}m(a^2+c^2),I_{zz}=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)
$$

非对角元都是 0.

**12.3 证明刚体惯量张量三个对角元中任意一个不会大于另外两个之和.**

**参考解答 12.3** 直接计算即可

$$
\begin{aligned}
I_{xx}+I_{yy}-I_{zz} &= \int\rho(y^2+z^2+x^2+z^2-x^2-y^2)\mathrm{d}\tau \\
&= 2\int\rho z^2\,\mathrm{d}\tau\ge 0
\end{aligned}
$$

**12.4 考虑例 12.4 中的立方体.**

**(1) 求其相对质心基矢垂直于立方体表面的本体系中惯量张量;**

**(2) 证明以质心为原点的任意本体坐标系均为其惯量主轴, 并由此说明当质心绕定点转动时, 匀质立方体和匀质球不可分辨.**

**参考解答 12.4** 由于对称性可以知道其三个对角元素均为相同的, 而非对角元均为 0, 仅计算一个即可

$$
I_{xx}=\int\frac{m}{a^3}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{6}ma^2
$$

由于其转动惯量张量写为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}ma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}ma^2 \cdot I$$

其中 $I$ 是单位矩阵, 在正交变换下具有不变性

$$I' = RIR^{-1} = RR^{-1} = I,$$

因此其转动惯量张量在任何正交归一坐标系下形式不变, 也易知动能与绕质心转动球相同, 而动能一样运动自然一样.

**12.5 求例 11.5 中圆盘相对于质心角动量在本体坐标系中分量形式**

**参考解答 12.5** 本体坐标系下角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\frac{R}{L}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \omega\frac{R}{L}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \omega\,\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

由于其转动惯量张量为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{pmatrix}$$

得到其角动量

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{4}m\omega\frac{R^3}{L}\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{4}m\omega\frac{R^3}{L}\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{1}{2}mR^2\omega\,\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

**12.6 如图12.1所示, 一个宽为 $l$ 高为 $h$ 的门板绕着一边以角速度 $\omega$ 匀速旋转, 建立如图的本体系 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\}$,**

**(1) 求门板相对于 O 点的角动量在 $\{\hat{e}_i\}$ 中的分量;**

**(2) 为了维持门的旋转, 需要施加的相对于 O 点的扭矩.**

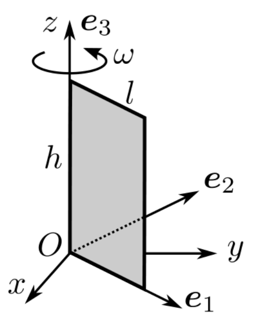


图 12.1:

**参考解答 12.6** 先求解相对于质心的角动量. 容易计算出其本体坐标系中的惯量张量为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(h^2+l^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{pmatrix}$$

于是其相对于质心的角动量为

$$\boldsymbol{L}_r = \frac{1}{12}ml^2\omega\,\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

再考虑质心相对于 $O$ 点的角动量

$$\boldsymbol{L}_c = m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}m\omega l^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{1}{4}m\omega hl\,\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

熟知相对于 $O$ 点角动量等于两项之和

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{3}m\omega l^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_3 - \frac{1}{4}m\omega hl\,\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

当然可以直接计算其相对于 $O$ 点的惯量张量.

$$I_{11} = \frac{1}{3}mh^2, I_{22} = \frac{1}{3}m(h^2+l^2), I_{33} = \frac{1}{3}mh^2$$

以及

$$I_{13} = I_{31} = -\int \rho xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{4}mhl$$

再利用角动量公式 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$ 得到一样的结果. 由熟知公式

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{body}} + \boldsymbol{\omega}\times$$

得到力矩

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} = \frac{1}{4}mhl\omega^2$$

**12.7　若自由刚体定点转动的角速度沿着某个主轴方向, 则被称为匀速转动.**

**(1) 证明任意自由刚体都有匀速转动解;**

**(2) 设初始角速度沿着 $\hat{e}_1$ 方向, 刚体收到小扰动, 角速度变为 $\omega_i \to \omega_i + \delta\omega_i$, 求 $\delta\omega_i$ 满足的微分方程并写成小振动方程的形式.**

**(3) 设刚体的主轴转动惯量为 $I_1 < I_2 < I_3$, 利用(2)的结果, 证明刚体沿着最小和最大转动惯量对应的主轴的匀速转动是稳定的, 而沿着中间转动惯量对应的主轴的转动是不稳定的.**

**参考解答 12.7** *(1)* 只需要 $\omega_1 = C, \omega_2 = \omega_3 = 0$ 或与其类似即可满足欧拉动力学方程.

*(2)* 由题知道角速度为

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1 + \delta\omega_1)\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \delta\omega_2\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \delta\omega_3\,\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

由自由转动时三个欧拉动力学方程

$$
\begin{aligned}
I_1\delta\dot{\omega}_1 &= \delta\omega_2\delta\omega_3(I_2-I_3)\\
I_2\delta\dot{\omega}_2 &= \delta\omega_3(\omega_1+\delta\omega_1)(I_3-I_1)\\
I_3\delta\dot{\omega}_3 &= (\omega_1+\delta\omega_1)\delta\omega_2(I_1-I_2)
\end{aligned}
$$

知道, 由于 $\delta\omega_2,\delta\omega_3$ 都是小量, $\delta\omega_1$ 可以忽略. 因此原运动方程化为 *2* 元的

$$
I_2\delta\dot{\omega}_2 = \delta\omega_3\omega_1(I_3-I_1) \tag{12.1}
$$

$$
I_3\delta\dot{\omega}_3 = \omega_1\delta\omega_2(I_1-I_2) \tag{12.2}
$$

在 *(2)* 两边求导后带入 *(1)* 得到关于 $\delta\omega_3$ 的二阶线性微分方程

$$
\delta\ddot{\omega}_3 + \frac{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}{I_2I_3}\omega_1^2\delta\omega_3 = 0
$$

同样可以得到

$$
\delta\ddot{\omega}_2 + \frac{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}{I_2I_3}\omega_1^2\delta\omega_2 = 0
$$

其假如存在小振动解, 本征频率为 $\Omega = \sqrt{\dfrac{(I_2-I_1)(I_3-I_1)}{I_2I_3}}\omega_1$

*(3)* 假如初始绕着 2 轴旋转, 知道其本征频率为 $\Omega = \sqrt{\dfrac{(I_1-I_2)(I_3-I_2)}{I_1I_3}}\omega_2$ 但是 $I_1<I_2<I_3$, 所以根号下小于 0, 对应解指数发散, 即不稳定.

**12.8 设对称陀螺相对质心的主轴转动惯量为 $I_1=I_2=\lambda I_3$, 若陀螺绕质心自由转动, 初始章动角为 $\theta_0$, 证明进动角速度 $\dot{\psi}$ 与自转角速度 $\dot{\varphi}$ 满足 $\dot{\psi}=(\lambda-1)\dot{\phi}\cos\theta_0$**

**参考解答 12.8** 这题还是用欧拉动力学方程. 由于 $I_1=I_2$, 立刻得到 $\omega_3=C$ 由此得到关于 $\omega_1,\omega_2$ 的方程

$$
\begin{aligned}
\lambda\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3(\lambda-1)\\
\lambda\dot{\omega}_2 &= \omega_2\omega_3(-\lambda+1)
\end{aligned}
$$

因此解得

$$
\omega_1 = A\cos\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\omega_3t+\varphi\right), \omega_1 = A\sin\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\omega_3t+\varphi\right)
$$

也就是说, 有守恒量 $\omega_1^2+\omega_2^2=C$ 于是可以知道总角动量大小守恒, 因为

$$
L^2 = \lambda^2I_3^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+I_3^2\omega_3^2
$$

正文中已经给出, $z$ 轴角动量分量 $p_\psi$ 也守恒, 即

$$
\cos\theta = \frac{p_\psi}{L} = \cos\theta_0
$$

为常数！由欧拉运动学方程得到

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\sin^2\theta\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2=C'$$

即 $\dot{\phi}=\dfrac{A}{\sin\theta_0}$ 是一个常数

但是由于

$$L^2=\lambda^2I_3^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+I_3^2\omega_3^2=\lambda^2I_3^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+L^2\cos^2\theta$$

于是可以得到

$$\dot{\phi}=\frac{L}{\lambda I_3}$$

由于 $p_\psi=L\cos\theta=I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta_0)$ 解得

$$\dot{\psi}=\frac{L(\lambda-1)}{I_3\lambda}\cos\theta_0$$

即得到题给式子

$$\dot{\psi}=(\lambda-1)\dot{\phi}\cos\theta_0$$

# 第十三章　哈密顿正则方程

**13.1**　求二元函数 $L = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey$ 的对 $x, y$ 的勒让德变换.

**参考解答 13.1**

$$\begin{aligned} H &= \sum \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i - L \\ &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \end{aligned}$$

**13.2**　考虑函数 $L = \dfrac{1}{2}(q^1v^2 - q^2v^1) - V(q^1, q^2)$, 其中 $\{q^1, q^2\}$ 为被动变量,$\{v^1, v^2\}$ 为主动变量，$V$ 是任意函数.

**(1)** 分析 $L$ 对 $\{v^1, v^2\}$ 的黑塞矩阵，判断其是奇异还是正规系统；

**(2)** 定义新变量 $p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial v^1}, p_2 \dfrac{\partial L}{\partial v^2}$, 求 $\{q^1, q^2, p^1, p^2\}$ 之间的约束关系.

**参考解答 13.2**　*(1)* 黑塞矩阵为

$$\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然为奇异系统。

*(2)*

$$p_1 = \frac{1}{2}q^1, p_2 = -\frac{1}{2}q^2$$

这就是约束关系。

**13.3**　考虑例 4.4 中的双摆, 求系统的哈密顿量和哈密顿正则方程.

**参考解答 13.3** 由正文得到

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot\theta_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)$$

由广义动量的定义

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

解得

$$\dot\theta_1=\frac{p_1-\frac{l_1}{l_2}p_2}{m_1l_1^2+m_2l_1^2(1-\cos^2(\theta_1-\theta_2))}$$
$$\dot\theta_2=\frac{\frac{(m_1+m_2)l_1}{m_2l_2}p_2-\cos(\theta_1-\theta_2)p_1}{m_1l_1+m_2l_1(1-\cos^2(\theta_1-\theta_2))}$$

代入哈密顿量表达式得到

$$\begin{aligned}H&=\sum_i p_i\dot\theta_i-L\\&=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot\theta_2^2+m_2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\\&=\frac{1}{2}p_1\dot\theta_1+\frac{1}{2}p_2\dot\theta_2-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\\&=\frac{p_1^2-(\frac{l_1}{l_2}+\cos(\theta_1-\theta_2))p_1p_2+(1+\frac{m_1}{m_2})\frac{l_1}{l_2}p_2^2}{2l_1^2(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)\end{aligned}$$

正则方程

$$\begin{aligned}\dot\theta_1&=\frac{p_1-(\frac{l_1}{l_2}+\cos(\theta_1-\theta_2))p_2}{l_1^2(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}\\\dot\theta_2&=\frac{-(\frac{l_1}{l_2}+\cos(\theta_1-\theta_2))p_1+(1+\frac{m_1}{m_2})\frac{l_1}{l_2}p_2}{l_1^2(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}\\\dot p_1&=-\frac{2p_1p_2\sin(\theta_1-\theta_2)l_1^2(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}{4l_1^4(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))^4}\\&-\frac{2m_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)(p_1^2-(\frac{l_1}{l_2}+\cos(\theta_1-\theta_2))p_1p_2+(1+\frac{m_1}{m_2})\frac{l_1}{l_2}p_2^2)}{4l_1^4(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))^4}\\&-(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1\\\dot p_2&=-\frac{2p_1p_2\sin(\theta_1-\theta_2)l_1^2(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))}{4l_1^4(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))^4}\\&-\frac{2m_2\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)(p_1^2-(\frac{l_1}{l_2}+\cos(\theta_1-\theta_2))p_1p_2+(1+\frac{m_1}{m_2})\frac{l_1}{l_2}p_2^2)}{4l_1^4(m_1+m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))^4}\\&-m_2gl_2\sin\theta_2\end{aligned}$$

**13.4**　**考虑例 4.5 中的顶端自由滑动的单摆, 求系统的哈密顿量和哈密顿正则方程.**

**参考解答 13.4** 解得

$$p_x=m\dot x+ml\dot\theta\cos\theta$$
$$p_\theta=ml^2\dot\theta+m\dot xl\cos\theta$$

反解得到

$$\dot x=\frac{lp_x-p_\theta\cos\theta}{ml\sin^2\theta}$$
$$\dot\theta=\frac{p_\theta-p_xl\cos\theta}{ml^2}$$

$$
\begin{aligned}
H &= \sum p_i q^i - L \\
&= \frac{1}{2}\Big(\dot{x}(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) + l\dot{\theta}(l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\Big) - mgl\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}p_x\dot{x} + \frac{1}{2}p_\theta\dot{\theta} - mgl\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}p_x\frac{lp_x - p_\theta\cos\theta}{ml\sin^2\theta} + \frac{1}{2}p_\theta\frac{p_\theta - p_x l\cos\theta}{ml^2} - mgl\cos\theta \\
&= \frac{p_x^2}{2m\sin^2(\theta)} - \frac{p_x p_\theta}{2ml}\cos\theta(\frac{1}{\sin^2\theta} + 1) + \frac{p_\theta^2}{2ml^2}
\end{aligned}
$$

哈密顿正则方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_x}{m\sin^2\theta} - \frac{p_\theta}{2ml}\cos\theta(\frac{1}{\sin^2\theta} + 1) \\
\dot{\theta} &= -\frac{p_\theta}{2ml}\cos\theta(\frac{1}{\sin^2\theta} + 1) + \frac{p_\theta}{ml^2} \\
\dot{p}_x &= 0 \\
\dot{p}_\theta &= \frac{p_x^2}{m\sin^3\theta}\cos\theta - \frac{p_x p_\theta}{2ml}\sin\theta - \frac{p_x p_\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta}
\end{aligned}
$$

**13.5 已知系统的广义坐标为 $L = a\dot{x}^2 + b\dfrac{\dot{y}^2}{x} + c\dot{x}\dot{y} + fy^2\dot{x}\dot{z} + g\dot{y}^2 - k\sqrt{x^2 + y^2}$, 其中 $a, b, c, d, f, g, k$ 都是常数.**

(1) 求系统的哈密顿量和哈密顿正则方程.

(2) 求系统的运动常数.

**参考解答 13.5** *(1) 系统广义动量*

$$
\begin{aligned}
p_x &= 2a\dot{x} + c\dot{y} + fy^2\dot{z} \\
p_y &= \frac{2b\dot{y}}{x} + c\dot{x} + 2g\dot{y} \\
p_z &= fy^2\dot{x}
\end{aligned}
$$

反解得到

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{p_z}{fy^2} \\
\dot{y} &= \frac{p_y - \frac{cp_z}{fy^2}}{\frac{2b}{x} + 2g} \\
\dot{z} &= \frac{(p_x - \frac{2ap_z}{fy^2})(\frac{2b}{x} + 2g) - cp_y + \frac{c^2p_z}{fy^2}}{fy^2(\frac{2b}{x} + 2g)}
\end{aligned}
$$

哈密顿量

$$
\begin{aligned}
H=&\sum_i p_i\dot{x}^i-L\\
&=2a\dot{x}^2+c\dot{y}\dot{x}+fy^2\dot{z}\dot{x}+\frac{2b\dot{y}^2}{x}+c\dot{x}\dot{y}+2g\dot{y}^2+fy^2\dot{x}\dot{z}\\
&-(a\dot{x}^2+b\frac{\dot{y}^2}{x}+c\dot{x}\dot{y}+fy^2\dot{x}\dot{z}+g\dot{y}^2-k\sqrt{x^2+y^2})\\
&=a\dot{x}^2+c\dot{x}\dot{y}+fy^2\dot{x}\dot{z}+g\dot{y}^2+\frac{b\dot{y}^2}{x}+k\sqrt{x^2+y^2}\\
&=a\frac{p_z^2}{f^2y^4}+c\frac{p_z}{fy^2}\frac{p_y-\frac{cp_z}{fy^2}}{\frac{2b}{x}+2g}+p_z\frac{(p_x-\frac{2ap_z}{fy^2})(\frac{2b}{x}+2g)-cp_y+\frac{c^2p_z}{fy^2}}{fy^2(\frac{2b}{x}+2g)}\\
&+g\frac{(p_y-\frac{cp_z}{fy^2})^2}{2(\frac{2b}{x}+2g)}+k\sqrt{x^2+y^2}\\
&=-a\frac{p_z^2}{f^2y^4}+\frac{p_xp_z}{fy^2}+g\frac{(p_y-\frac{cp_z}{fy^2})^2}{2(\frac{2b}{x}+2g)}+k\sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

由哈密顿正则方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_z}{fy^2}\\
\dot{y}&=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{g(p_y-\frac{cp_z}{fy^2})}{\frac{2b}{x}+2g}\\
\dot{z}&=\frac{\partial H}{\partial p_z}=-\frac{2ap_z}{f^2y^4}+\frac{p_x}{fy^2}+\frac{gc(p_y-\frac{cp_z}{fy^2})}{(\frac{2b}{x}+2g)fy^2}\\
\dot{p}_x&=-\frac{\partial H}{\partial x}=--\frac{b(p_y-\frac{cp_z}{fy^2})^2}{4(b+gx)^2}-\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
\dot{p}_y&=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{4p_z^2}{f^2y^5}(4a-\frac{gc^2}{4(\frac{b}{x}+g)})-\frac{2p_z}{fy^3}(p_x-\frac{gcp_y}{2(\frac{b}{x}+g)})\\
\dot{p}_z&=0
\end{aligned}
$$

*(2)* 可以知道 $p_z, H$ 是守恒量。

**13.6 某单自由度系统的运动方程为 $\dot{q}=q^2+qp, \dot{p}=p^2-qp$，利用 (13.29) 判断其是否为哈密顿系统.**

**参考解答 13.6** 由正文得到

$$
\begin{aligned}
u&=q^2+qp\\
v&=p^2-qp
\end{aligned}
$$

计算得到

$$\frac{\partial u}{\partial q}=2q+p,\frac{\partial u}{\partial p}=q$$
$$\frac{\partial v}{\partial q}=-p,\frac{\partial v}{\partial p}=2p-q$$

明显不满足 $\frac{\partial u}{\partial q}=-\frac{\partial v}{\partial p}$, 不是哈密顿系统.

**13.7** 某单自由度系统运动方程为 $\dot{q}=p$ 和 $\dot{p}=-\omega^2 q-2\lambda p$, 其中 $\omega$ 和 $\lambda$ 都是常数;

**(1)** 利用 (13.29) 判断其是否为哈密顿系统;

**(2)** 引入新变量 $Q=q$ 和 $P=p\mathrm{e}^{2\lambda t}$, 求 $Q$ 和 $P$ 的运动方程, 判断其是否为哈密顿系统并求哈密顿量.

**参考解答 13.7** *(1)*

$$\frac{\partial u}{\partial q}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial p}=-2$$

显然不是

*(2)* 由题设易知道 $\dot{p}+2\lambda p=\dot{P}\mathrm{e}^{-2\lambda t}$ 于是其运动方程写为

$$\dot{Q}=P\mathrm{e}^{-2\lambda t}$$
$$\dot{P}=-\omega^2 Q\mathrm{e}^{2\lambda t}$$

此时 $\frac{\partial u}{\partial Q}=\frac{\partial v}{\partial P}=0$ 满足哈密顿系统的微分条件

由哈密顿方程得到

$$\frac{\partial H}{\partial P}=P\mathrm{e}^{-2\lambda t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial Q}=\omega^2 Q\mathrm{e}^{2\lambda t}$$

于是, 由全微分条件得到

$$H=\frac{1}{2}Q^2\mathrm{e}^{2\lambda t}+\frac{1}{2}P^2\mathrm{e}^{-2\lambda t}$$

**13.8** 某单自由度系统的运动方程为 $\dot{q}=aq+bp$ 和 $\dot{p}=cq+dp$

**(1)** 利用 (13.29) 判断 $a,b,c,d$ 满足什么条件时, 系统为哈密顿系统;

**(2)** 求对应的哈密顿量.

**参考解答 13.8** *(1)* 由正文得到

$$\frac{\partial u}{\partial q} = a$$
$$\frac{\partial v}{\partial p} = d$$

要求满足 $a = -d$ 即可;

*(2)* 由上一题得到

$$\frac{\partial H}{\partial p} = aq + bp$$
$$\frac{\partial H}{\partial q} = ap - cq$$

由 $H = H(q,p)$ 的全微分条件

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq \\ &= (aq+bp)dp + (ap-cq)dq \\ &= -cqdq + a(qdp+pdq) + apdp \\ &= -cqdq + ad(pq) + apdp \end{aligned}$$

积分即得到

$$H = -\frac{1}{2}cq^2 + apq + \frac{1}{2}p^2$$

**13.9　考虑与标量场相互作用的相对论性粒子的拉格朗日量式 (4.40), 其中 $\Phi(t,\mathbf{x}) = \dfrac{V(t,\mathbf{x})}{mc^2}$.**

**(1) 求粒子的哈密顿量和正则方程;**

**(2) 求非相对论极限下哈密顿量的领头阶近似.**

**参考解答 13.9** 由于我的习惯, 本题采用约定

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*(1)* 我们考虑三维形式的拉格朗日量和哈密顿量, 由相对论性点粒子与标量场耦合的作用量

$$S = -\int mce^{\Phi}ds = -\int mce^{\Phi}\frac{ds}{dt}dt =$$

并且考虑到 $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$ 得到三维拉格朗日量

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\mathrm{e}^{\Phi}$$

以及广义动量

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}\mathrm{e}^{\Phi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

反解得到

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{pc}}{\sqrt{m^2c^2\mathrm{e}^{2\Phi} + p^2}}$$

最后得到哈密顿量

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\mathbf{v} - L = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4\mathrm{e}^{2\Phi}}$$

而前面已经得到了一个正则方程

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{pc}}{\sqrt{m^2c^2\mathrm{e}^{2\Phi} + p^2}}$$

因此我们只需要考虑 $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ 经过计算得到

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{m^2c^4\mathrm{e}^{2\Phi}}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4\mathrm{e}^{2\Phi}}}\nabla\Phi$$

*(2)*

$$\begin{aligned} H &= mc^2\mathrm{e}^{\Phi}\sqrt{\frac{p^2}{m^2c^2\mathrm{e}2\Phi} + 1} \\ &= mc^2\mathrm{e}^{\Phi}(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2\mathrm{e}2\Phi}) \\ &= mc^2(1 + \frac{V}{mc^2})(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2\mathrm{e}^{2\Phi}}) \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + V \end{aligned}$$

**13.10** 考虑电磁场中相对论性带电粒子的拉格朗日量式 (4.50).

**(1)** 求粒子的哈密顿量和哈密顿正则方程;

**(2)** 由哈密顿正则方程得到等价的关于 x 的二阶微分方程;

**(3)** 求非相对论极限下哈密顿量的领头阶近似.

**参考解答 13.10** 先考虑正文中提及的三维形式

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A}$$

其广义动量写为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\boldsymbol{A}$$

反解得到

$$\mathbf{v}=\frac{\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}}{\sqrt{m^2+\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{c^2}}}$$

其哈密顿量

$$\begin{aligned}
H&=\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{p}-L\\
&=\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+q\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{v}-(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-q\varphi+q\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{A})\\
&=\frac{mc^2}{sqrt1-\frac{v^2}{c^2}}+q\varphi\\
&=\sqrt{m^2c^4+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2c^2}+q\varphi
\end{aligned}$$

其中一个正则方程就是

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}}{\sqrt{m^2+\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{c^2}}}$$

而另一个是

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}=-\frac{c\nabla(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{2\sqrt{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}}-q\nabla\varphi$$

我们来处理分母上的式子

由矢量分析公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

得到

$$\nabla(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2=2((\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})\cdot\nabla)(-q\boldsymbol{A})+2(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})\times(\nabla\times(-q\boldsymbol{A}))$$

我们得到第二个哈密顿方程

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=+\frac{((\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})\cdot\nabla)(q\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})\times(\nabla\times(q\boldsymbol{A}))}{\sqrt{m^2c^2+(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}}-q\nabla\varphi$$

利用磁感应强度和磁势的关系 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 以及第一个哈密顿方程，我们可以将上式写成更具有启发性的形式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-q\nabla\varphi+q\mathbf{v}\times\boldsymbol{B}+q(\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

同时，注意到

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\boldsymbol{A}$$

以及

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

上式改写为

$$\frac{d(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})}{dt}=q\boldsymbol{E}+q\mathbf{v}\times\boldsymbol{B}$$

和我们在非相对论中所得到的形式十分相似.

*(2)* 注意到可以从第一个哈密顿方程解得到

$$\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

就是机械动量, 我们立刻得到关于 $\mathbf{x}$ 的二阶微分方程

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=q\boldsymbol{E}+q\mathbf{v}\times\boldsymbol{B}$$

*(3)*

$$\begin{aligned}H&=mc^2\sqrt{1+\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{m^2c^2}}+q\varphi\\&=mc^2(1+\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{2m^2c^2})+q\varphi\\&=mc^2+\frac{(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2}{2m}+q\varphi\end{aligned}$$

实际上我们可以直接从四维形式出发, 我们知道相对论性点粒子的作用量写为 *(*由于我的度规约定这里从后面都和非相对论情况差一个符号，但是这不要紧*)*

$$S=\int mcds=\int mc\sqrt{u_\mu u^\mu}d\tau$$

其中 $u^\mu$ 是四维速度. 这种形式的作用量在得到哈密顿量是遇到困难, 对其变分容易知道其具有等价的形式

$$S=\int\frac{1}{2}mu_\mu u^\mu d\tau$$

加入电磁场后只是在作用量中简单加入一项

$$S_{int}=\int qu_\mu A^\mu d\tau$$

因此可以从作用量 $S=\int\mathcal{L}d\tau$ 得到拉格朗日量

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}mu_\mu u^\mu+qu_\mu A^\mu$$

而对应的广义动量

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^\mu}(\frac{1}{2} m u_\nu u^\nu + q u_\nu A^\nu) \\ &= m u_\mu + q A_\mu \end{aligned}$$

于是得到

$$u_\mu = \frac{p_\mu - q A_\mu}{m}$$

于是对应的哈密顿量

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\mu u^\mu - \mathcal{L} \\ &= (m u_\mu + q A_\mu) u^\mu - (\frac{1}{2} m u_\mu u^\mu + q u_\mu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2} m u_\mu u^\mu \\ &= \frac{(p_\mu - q A_\mu)(p^\mu - q A^\mu)}{2m} \end{aligned}$$

对应的正则方程是

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = u_\mu = \frac{p_\mu - q A_\mu}{m}$$

和

$$\frac{dp_\nu}{d\tau} = q \frac{(p_\mu - q A_\mu)}{m} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}$$

注意到

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} u_\nu$$

上式也可写为熟知的形式

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = e F_{\mu\nu} u^\nu$$

**13.11 某单自由度系统的哈密顿量为 $H = \dfrac{p^2}{2m} + \mathbf{A} \cdot p + V(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{x}$ 为坐标,$\mathbf{p}$ 为共轭动量,$\mathbf{A}$ 为外矢量场.**

**(1) 求该系统的拉格朗日量;**

**(2) 求系统的哈密顿正则方程**

**(3) 若 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ 为常矢量,$V(\mathbf{x}) = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}$ 且 $\mathbf{f}$ 也为常矢量, 求哈密顿正则方程在初始条件 $\mathbf{x}(0) = 0, \mathbf{p}(0) = 0$ 下的解**

**参考解答 13.11** *(1)* 由哈密顿正则方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} + \boldsymbol{A}$$

因此拉格朗日量

$$L = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \boldsymbol{p} - H = \frac{1}{2} m (\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \boldsymbol{A})^2 - V(\mathbf{x})$$

*(2)* 已经得到

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{p}}{m}+\boldsymbol{A}$$

另一个哈密顿正则方程为

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\nabla V-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\boldsymbol{A}$$

*(3)* 由第一个哈密顿方程对时间求导得到

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{p}}{mdt}=\frac{\boldsymbol{f}}{m}$$

由初始条件 $\boldsymbol{p}(0)=0=m(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(0)-\boldsymbol{A})$ 解得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{f}\frac{t^2}{2m}$$

**13.12** 某单自由度拉格朗日量系统为

$$L=\frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\dot{q}^2-\frac{1}{2}\omega\sin(2\omega t)q\dot{q}-\frac{1}{2}\omega^2\cos(2\omega t)q^2$$

**(1)** 求该系统的哈密顿量和哈密顿正则方程;

**(2)** 哈密顿量 $H$ 是否为运动常数?

**(3)** 引入新的变量 $\tilde{q}=\cos(\omega t)q$, 求用新变量表达的拉格朗日量, 记为 $\overline{L}$

**(4)** 求 $\overline{L}$ 对应的哈密顿量 $\overline{H}$, 并说明其描述什么物理系统

**(5)** 证明 $H$ 和 $\overline{H}$ 的哈密顿正则方程等价, 即可以互相导出.

**参考解答 13.12** *(1)*

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\dot{q}\cos(\omega t)-\frac{1}{2}\omega\sin 2\omega tq$$

因此有

$$\begin{aligned}H&=p\dot{q}-L\\&=\frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\dot{q}^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2\cos(2\omega t)\\&=\frac{1}{2}\cos^2(\omega t)(\frac{p}{\cos^2(\omega t)}+\omega\tan(\omega t)q)^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2\cos(2\omega t)\\&=\frac{1}{2}\frac{p^2}{\cos^2\omega t}+\omega\tan\omega tqp+\frac{1}{2}\omega^2q^2\cos(2\omega t)\end{aligned}$$

由哈密顿正则方程

$$\begin{aligned}\dot{q}&=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{\cos^2(\omega t)}+\omega\tan(\omega t)q\\\dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\omega\tan(\omega t)p-\omega^2\cos^2(\omega t)q\end{aligned}$$

*(2)* 不是

*(3)* 由题给条件反解得到 $\dot{q}=\dfrac{\dot{\tilde{q}}+\omega\tilde{q}\tan(\omega t)}{\cos(\omega t)}$

注意到在坐标变换下拉格朗日量数值不变, 因此有

$$\begin{aligned}
\overline{L} &= \frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\frac{(\dot{\tilde{q}}+\omega\tilde{q}\tan(\omega t))^2}{\cos^2(\omega t)}-\frac{1}{2}\omega\sin(2\omega t)\frac{\tilde{q}}{\cos(\omega t)}\frac{\dot{\tilde{q}}+\omega\tilde{q}\tan(\omega t)}{\cos(\omega t)}-\frac{1}{2}\omega^2q^2\cos(2\omega t)\\
&=\frac{1}{2}(\dot{\tilde{q}}-\omega\tilde{q}\tan(\omega t))^2(\tilde{q}\dot{\tilde{q}}+\omega\tilde{q}^2\tan(\omega t))-\frac{1}{2}\omega^2q^2\cos(2\omega t)\\
&=\frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^2-\frac{1}{2}\omega^2\tilde{q}\tan^2(\omega t)-\frac{1}{2}\omega^2\tilde{q}^2\frac{\cos(2\omega t)}{\cos^2(\omega t)}\\
&=\frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^2-\frac{1}{2}\omega^2q^2
\end{aligned}$$

描述的物理系统: 谐振子. 由上式,$\tilde{p}=\dot{\tilde{q}}$, 用勒让德变换容易得到哈密顿量

$$H=\frac{1}{2}\tilde{p}^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$$

容易得到新的哈密顿正则方程

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{q}}&=\tilde{p}\\
\dot{\tilde{p}}&=-\omega^2\tilde{q}
\end{aligned}$$

由于

$$\tilde{p}=\dot{\tilde{q}}=\dot{q}\cos(\omega t)-\omega\sin(\omega t)q$$

*(4)* 证明两者导出同样的运动方程即可

$$\dot{\tilde{p}}=\ddot{q}\cos(\omega t)-2\omega\sin(\omega t)q-\omega^2\sin(\omega t)q$$

即

$$\ddot{q}\cos(\omega t)-2\omega\sin(\omega t)q-\omega^2\sin(\omega t)q+\omega^2\cos(\omega t)q=0$$

由原来的广义动量和广义速度之间的关系可以得到

$$\dot{p}=\ddot{q}\cos(\omega t)-\omega\dot{q}\sin(\omega t)-\omega^2\sin(2\omega t)q-\frac{1}{2}\omega\sin(2\omega t)q\dot{q}$$

代入得到自洽的结果.

**13.13** 已知某单自由度系统的哈密顿量为

$$H=\frac{p^2}{2m}-b\mathrm{e}^{-\lambda t}pq+\frac{mb}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda+b\mathrm{e}^{-\lambda t})q^2+\frac{k}{2}q^2$$

**(1)** 求该系统的拉格朗日量 $L$;

**(2)** 利用分部积分, 将 $L$ 化为等价的不显含时间的形式, 记为 $\overline{L}$;

**(3)** 求 $\overline{L}$ 对应的哈密顿量 $\overline{H}$, 并说明其描述什么物理系统;

**(4) 证明 $H$ 和 $\overline{H}$ 的哈密顿正则方程等价, 即可以互相导出.**

**参考解答 13.13** *(1)* 由哈密顿正则方程,

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}-b\mathrm{e}^{-\lambda t}q$$

解得

$$p=m(\dot{q}+qb\mathrm{e}^{-\lambda t})$$

而

$$\begin{aligned}
L&=p\dot{q}-H\\
&=(\frac{p}{m}-b\mathrm{e}^{-\lambda t}q)p-\frac{p^2}{2m}+b\mathrm{e}^{-\lambda t}pq-\frac{1}{2}mb\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda+b\mathrm{e}^{-\lambda t})q^2-\frac{1}{2}kq^2\\
&=\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2}mb\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda+b\mathrm{e}^{-\lambda t})q^2-\frac{1}{2}kq^2\\
&=\frac{1}{2}m(\dot{q}+b\mathrm{e}^{-\lambda t}q)^2-\frac{1}{2}mb\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda+b\mathrm{e}^{-\lambda t})q^2-\frac{1}{2}kq^2\\
&=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+mb\mathrm{e}^{-\lambda t}\dot{q}q-\frac{1}{2}(mb\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}+k)q^2\\
&=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2+mb\mathrm{e}^{-\lambda t}\dot{q}q-\frac{1}{2}mb\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}q^2\\
&=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mb\mathrm{e}^{-\lambda t}q^2)\\
&=\overline{L}+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mb\mathrm{e}^{-\lambda t}q^2)
\end{aligned}$$

*(2)*

$$\overline{L}=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$$

*(3)*

$$\overline{H}=\frac{\overline{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2$$

其中 $\overline{p}=m\dot{q}$, 描述的系统是谐振子.

*(4)* 只需证两者化为相同的二阶微分方程即可由原来的哈密顿正则方程,

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=b\mathrm{e}^{-\lambda t}p-mb\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda+b\mathrm{e}^{-\lambda t})q-kq$$

而前面得到

$$p=m(\dot{q}+b\mathrm{e}^{-\lambda t}q)$$

因此

$$\begin{aligned}
\dot{p}&=\frac{d}{dt}(m(\dot{q}+b\mathrm{e}^{-\lambda t}q))\\
&=m\ddot{q}-\lambda mb\mathrm{e}^{-\lambda t}q+b\mathrm{e}^{-\lambda t}\dot{q}
\end{aligned}$$

可以知道化为

$$\ddot{q} + \frac{k}{m} q = 0$$

**13.14　某单自由度系统的拉格朗日量为** $L = \frac{1}{2} m \mathrm{e}^{\lambda t} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$, 其中 $m, \lambda$ 都是正的常数.

(1) 求该系统的哈密顿量和哈密顿正则方程;

(2) 根据哈密顿正则方程在初始条件 $q(0) = 0, p(0) = p_0$ 下的解;

(3) 根据 (2) 的解, 在相平面上定性画出系统随时间演化的相轨迹, 说明其物理意义.

**参考解答 13.14**　*(1)*

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q} = m \mathrm{e}^{\lambda t}} \dot{q}$$

因此

$$H = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m \mathrm{e}^{\lambda t} \omega^2 q^2$$

正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p}{m}$$
$$\dot{p} = m q \omega^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

*(2)* 消元得到

$$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega^2 q = 0$$

代入初始条件解得

$$q = \frac{p_0}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \sinh\Big(\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} t\Big) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}$$

**13.15　质量为 $m$ 的粒子在重力作用下束缚在旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上运动, 选取柱坐标系 $\{r, \phi, z\}$, 不考虑摩擦**

**(1) 写出粒子的劳斯函数**

**(2) 写出劳斯函数表达的运动方程**

**参考解答 13.15**　*(1)*

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - m g z + \lambda (z - r^2)$$

注意到可遗坐标为 $\phi$, 且有 $p_\phi = m r^2 \dot{\phi}$

$$\begin{aligned} R &= p_\phi \dot{\phi} - L \\ &= \frac{p_\phi^2}{2 m r^2} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + m g z - \lambda (z - r^2) \end{aligned}$$

*(2)*

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\phi &= 0 \\
m\ddot{r} &= \frac{p_p hi}{mr^3} - 2\lambda r \\
m\ddot{z} &= -g + \lambda
\end{aligned}
$$

**13.16** 考虑一维谐振子, 对拉格朗日量 $L(t, \dot{q}, q)$ 中广义坐标和广义速度同时做勒让德变换 $\{q, \dot{q}\} \to \{f, p\}$

**(1)** 求变换得到的 $G = G(t, f, p)$

**(2)** 写出用 $\{f, p\}$ 表达的运动方程，并证明其与拉格朗日方程等价.

**参考解答 13.16** *(1)*

$$f = \frac{\partial L}{\partial q} = -\omega^2 q, p\dot{q}$$

$$G = \frac{1}{2}p^2 - \frac{f^2}{2\omega^2}$$

*(2)* 运动方程

$$
\begin{aligned}
\dot{f} + \omega^2 p &= 0 \\
\dot{p} &= f
\end{aligned}
$$

即 $\ddot{f} + \omega^2 f = 0$, 显然和拉格朗日方程导出的运动方程等价.

# 第十四章　泊松括号

# 第十五章　正则变换

# 第十六章　哈密顿-雅可比理论

# 第十七章　可积系统