高显经典力学习题解答

数据风暴中的避风港

二〇二四年十月二十五日

链接：HTTPS://GITHUB.COM/PHIYU/GAOXIAN.

编写成员均为物理专业或非物理专业的物理爱好者，编写过程中难免有许多纰漏，欢迎指出，也欢迎加入 数据风暴中的避风港 大家庭（QQ 群：832100706）.

2024 年 10 月

目录

第一章　变分法

1.1　**给定 $f(t)$ 的泛函**

$$S[f]=-\int \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$$

其中 V 是 f 的任意函数. 求 $S[f]$ 取极值时, $f(x)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

参考解答 1.1 记 $L=\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$, 则

$$\frac{\partial L}{\partial f}=V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2},\qquad \frac{\partial L}{\partial f'}=\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}$$

$$\begin{aligned}\delta S&=\int \mathrm{d}t\left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}\delta f+\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\delta f'\right)\\&\simeq\int \mathrm{d}t\left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\right)\right)\delta f\end{aligned}$$

因此, *Euler-Lagrange* 方程为

$$-\frac{\delta S}{\delta f}=-V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}f'\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'}{\sqrt{1-f'^2}}+\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f''+(1-f')f'^2}{(1-f'^2)^{3/2}}-V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-f'^2}=0$$

1.2　**给定 $f(t)$ 的泛函 $S[f]=\displaystyle\int \mathrm{d}t\,L$, 其中 $L=(f'(t))^2+f(t)f'(t)+\dfrac{1}{2}f(t)f''(t)$.**

(1) 求一阶泛函导数 $\dfrac{\delta S}{\delta f}$;

(2) 将 L 改写成 $L=\tilde{L}+\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 的形式, 要求 $\tilde{L}$ 中不包含 $f''(t)$, 求 $\tilde{L}$ 和 F;

(3) 求泛函 $\tilde{S}[f]=\displaystyle\int \mathrm{d}t\,\tilde{L}$ 的一阶泛函导数 $\dfrac{\delta\tilde{S}}{\delta f}$, 并比较其和 $\dfrac{\delta S}{\delta f}$ 的异同.

参考解答 1.2 *(1)*

$$\begin{aligned}\delta S=\int \mathrm{d}t\,\delta L&=\int \mathrm{d}t\left(\left(f'+\frac{1}{2}f''\right)\delta f+(2f'+f)\,\delta f'+\frac{1}{2}f\delta f''\right)\\&\simeq\int \mathrm{d}t\left(f'+\frac{1}{2}f''-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2f'+f)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{2}f\right)\right)\delta f\\\frac{\delta S}{\delta f}&=-f''\end{aligned}$$

(2) 假设 $F=\dfrac{1}{2}ff'$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}f'^2+\dfrac{1}{2}ff''$, $\tilde{L}=ff'+\dfrac{1}{2}f'^2$ 满足题意.

(3)

$$\begin{aligned}\delta\tilde{S}[f] &= \int \mathrm{d}t\delta\tilde{L} = \int \mathrm{d}t\left(f'\delta f + (f+f')\delta f'\right) \\ &\simeq \int \mathrm{d}t\left(f' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+f')\right)\delta f \\ \frac{\delta\tilde{S}}{\delta f} &= -f''\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{\delta\tilde{S}}{\delta f} = \dfrac{\delta S}{\delta f}$.

1.3 给定两个函数 $n(t)$ 和 $a(t)$ 的泛函 $S[n,a] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, na^3\left(A(n) + 3B(n)\frac{a'^2}{n^2a^2}\right)$, 其中 A, B 是 $n(t)$ 的任意函数. 求泛函 $S[n,a]$ 取极值时, $n(t)$ 和 $a(t)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

参考解答 1.3

$$\delta S = \int \mathrm{d}t\left(a^3\left(A(n) + 3B(n)\frac{a'^2}{n^2a^2}\right) + na^3\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} + 3\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{a'^2}{n^2a^2} - \frac{3}{2}B(n)\frac{a'^2}{n^3a^2}\right)\right)\delta n$$

$$-\frac{\delta S}{\delta n} = -a^3A - 3B\frac{aa'^2}{n^2} - na^3\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} - 3n\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{aa'^2}{n^2} + \frac{3}{2}nB\frac{aa'^2}{n^3} = 0$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}t\left(6B\frac{aa'}{n}\delta a' + \left(3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a\right) \\ &\simeq \int \mathrm{d}t\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) + 3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a \\ -\frac{\delta S}{\delta a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) - 3nAa^2 - 3B\frac{a'^2}{n} = 0\end{aligned}$$

1.4 给定二元函数 $f(t,x)$ 的泛函 $S[f] = \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)^2 - m^2f^2(t,x)\right]$, 其中 m 是常数。求泛函 $S[f]$ 取极值时 $f(t,x)$ 的欧拉-拉格朗日方程。

参考解答 1.4 泛函 $S[f]$ 的 *Lagrange* 函数为 $L(t,x,f,f_t,f_x) = \dfrac{1}{2}(f_t^2 - f_x^2 - m^2f^2)$，则

$$\begin{aligned}\delta S &= \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\delta L \\ &\simeq \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x\left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial f_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial f_x}\right)\right] \\ &= \iint \mathrm{d}t\mathrm{d}x(-m^2f - f_{tt} + f_{xx})\delta f\end{aligned}$$

取极值有 $-\dfrac{\partial S}{\partial f} = 0$，即 $f_{tt} - f_{xx} + -m^2f = 0$

1.5 考虑一条不可拉伸、质量均匀的柔软细绳，长为 l，质量为 m。细绳两端点悬挂于相同高度，水平距离为 $a(a < l$。

(1) 选择合适的坐标，求细绳总的重力势能 V 作为细绳形状的泛函；

(2) 求细绳重力势能取极值时，细绳形状所满足的欧拉-拉格朗日方程。

参考解答 1.5 待施工

第二章　位形空间