高显经典力学习题解答

数据风暴中的避风港

二〇二四年十月二十二日

链接：HTTPS://GITHUB.COM/PHIYU/GAOXIAN.

编写成员均为物理专业或非物理专业的物理爱好者, 编写过程中难免有许多纰漏, 欢迎指出, 也欢迎加入 数据风暴中的避风港 大家庭（QQ 群：832100706）.

2024 年 10 月

目录

第一章　变分法

1.1　给定 $f(t)$ 的泛函

$$S[f] = -\int \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$$

其中 V 是 f 的任意函数. 求 $S[f]$ 取极值时, $f(x)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

参考解答 1.1 记 $L = \mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}$, 则

$$\frac{\partial L}{\partial f} = V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial f'} = \mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}t\, \left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2}\delta f + \mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\delta f'\right) \\ &\simeq \int \mathrm{d}t\, \left(V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-(f'(t))^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'(t)}{\sqrt{1-(f'(t))^2}}\right)\right)\delta f\end{aligned}$$

因此, Euler-Lagrange 方程为

$$-\frac{\delta S}{\delta f} = -V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}f'\mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f'}{\sqrt{1-f'^2}} + \mathrm{e}^{-V(f(t))}\frac{f''+(1-f')f'^2}{(1-f'^2)^{3/2}} - V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}f}\mathrm{e}^{-V(f(t))}\sqrt{1-f'^2} = 0$$

1.2　给定 $f(t)$ 的泛函 $S[f] = \int \mathrm{d}t\, L$, 其中 $L = (f'(t))^2 + f(t)f'(t) + \frac{1}{2}f(t)f''(t)$.

(1) 求一阶泛函导数 $\dfrac{\delta S}{\delta f}$;

(2) 将 L 改写成 $L = \tilde{L} + \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ 的形式, 要求 $\tilde{L}$ 中不包含 $f''(t)$, 求 $\tilde{L}$ 和 F;

(3) 求泛函 $\tilde{S}[f] = \int \mathrm{d}t\, \tilde{L}$ 的一阶泛函导数 $\dfrac{\delta \tilde{S}}{\delta f}$, 并比较其和 $\dfrac{\delta S}{\delta f}$ 的异同.

参考解答 2.1　*(1)*

$$\begin{aligned}\delta S = \int \mathrm{d}t\, \delta L &= \int \mathrm{d}t\, \left(\left(f' + \frac{1}{2}f''\right)\delta f + (2f'+f)\,\delta f' + \frac{1}{2}f\delta f''\right) \\ &\simeq \int \mathrm{d}t\, \left(f' + \frac{1}{2}f'' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2f'+f) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{2}f\right)\right)\delta f \\ \frac{\delta S}{\delta f} &= -f''\end{aligned}$$

(2) 假设 $F = \frac{1}{2}ff'$, *则* $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}f'^2 + \frac{1}{2}ff''$, $\tilde{L} = ff' + \frac{1}{2}f'^2$ *满足题意.*

(3)

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{S}[f] &= \int \mathrm{d}t\delta\tilde{L} = \int \mathrm{d}t\left(f'\delta f + (f+f')\delta f'\right) \\
&\simeq \int \mathrm{d}t\left(f' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+f')\right)\delta f \\
\frac{\delta\tilde{S}}{\delta f} &= -f''
\end{aligned}
$$

注意到 $\dfrac{\delta\tilde{S}}{\delta f} = \dfrac{\delta S}{\delta f}$.

1.3　给定两个函数 $n(t)$ 和 $a(t)$ 的泛函 $S[n,a] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, na^3\left(A(n) + 3B(n)\dfrac{a'^2}{n^2a^2}\right)$, 其中 A, B 是 $n(t)$ 的任意函数. 求泛函 $S[n,a]$ 取极值时, $n(t)$ 和 $a(t)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

参考解答 3.1

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}t\left(a^3\left(A(n) + 3B(n)\frac{a'^2}{n^2a^2}\right) + na^3\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} + 3\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{a'^2}{n^2a^2} - \frac{3}{2}B(n)\frac{a'^2}{n^3a^2}\right)\right)\delta n \\
-\frac{\delta S}{\delta n} &= -a^3A - 3B\frac{aa'^2}{n^2} - na^3\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} - 3n\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}n}\frac{aa'^2}{n^2} + \frac{3}{2}nB\frac{aa'^2}{n^3} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}t\left(6B\frac{aa'}{n}\delta a' + \left(3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a\right) \\
&\simeq \int \mathrm{d}t\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) + 3nAa^2 + 3B\frac{a'^2}{n}\right)\delta a \\
-\frac{\delta S}{\delta a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(6B\frac{aa'}{n}\right) - 3nAa^2 - 3B\frac{a'^2}{n} = 0
\end{aligned}
$$

第二章　位形空间