کنترل پذیری خروجی :

سیستم را کنترل پذیر خروجی گویند، اگر بتوان بردار خروجی غیرمقید $u(t)$ را چنان ساخت که خروجی اولیه سیستم $y(t_0)$ را به هر خروجی نهایی $y(t_1)$ در زمان محدود $t_0<t<t_1$ برساند.

قضیه : سیستم داده شده با معادله حالت و خروجی زیر :

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax+Bu\\ y &= Cx\end{aligned}\right\}$$

که در آن A، B و C به ترتیب ماتریس های ثابت $n\times n$ ، $n\times m$ و $l\times n$ است، کنترل پذیر کامل خروجی است اگر و فقط اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری خروجی Φ_{op} برابر با l باشد. که در آن

$$\Phi_{op} = [CB \quad CAB \quad \cdots \quad CA^{n-1}B]$$

اثبات : با فرض کنترل پذیری خروجی سیستم، $y(t)$ را می توان در زمان محدود $0\leq t\leq t_1$ از هر خروجی اولیه $y(0)$ به $y(t_1)=Cx(t_1)=0$ انتقال داد.

$$y(t_1)=Cx(t_1)=Ce^{At_1}\left[x(0)+\int_0^{t_1}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau\right]=0$$

$$\rightarrow Ce^{At_1}x(0)=-Ce^{At_1}\int_0^{t_1}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau=-C\int_0^{t_1}e^{A\tau}Bu(t_1-\tau)\,d\tau \qquad (+)$$

توجه کنید که $Cx(0)$ با توجه به کنترل پذیری خروجی سیستم، فضای l بعدی خروجی را اسپن می کند. با توجه به اینکه e^{At_1} غیرسینگولار است $Ce^{At_1}x(0)$ نیز فضای l-بعدی خروجی را اسپن می کند. لذا سمت راست معادله $(+)$ نیز فضای l-بعدی خروجی را اسپن می کند.

فرض کنید که B دارای m ستون باشد و بصورت $B=[b_1 \cdots b_m]$ نوشته شود.

$$e^{A\tau}=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(\tau)A^i$$

$$\int_0^{t_1}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(\tau)A^iBu(t_1-\tau)\,d\tau=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}A^ib_j \qquad (*)$$

که در آن : $\gamma_{ij}=\int_0^{t_1}\alpha_i(\tau)u_j(t_1-\tau)\,d\tau$

با جاگذاری (*) در (+) داریم:

$$Ce^{At_1}x(0) = -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}\, CA^i b_j$$

در نتیجه $Ce^{At_1}x(0)$ یک ترکیب خطی از $CA^i b_j$ برای $\begin{cases} i=0,1,\dots,n-1 \\ j=1,2,\dots,m \end{cases}$ است و لذا با توجه ماتریس Φ_{op}، اگر رتبه آن l باشد، در این صورت $Cx(0)$ نیز فضای خروجی l-بعدی را اسپن می‌کند و سیستم کنترل پذیر خروجی است.

اگر رتبه این ماتریس کمتر از l باشد بعد مجموعه تمام خروجی‌های اولیه که می‌توانند به مبدأ انتقال یابند کمتر از l است که با فرض کنترل پذیری خروجی در تناقض است.

نکته: در صورتیکه در معادلات حالت $D \neq 0$، آنگاه ماتریس کنترل پذیری خروجی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Phi_{op} = [CB \quad CAB \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D]$$

اثبات: معادله (+) بصورت زیر بدست می‌آید:

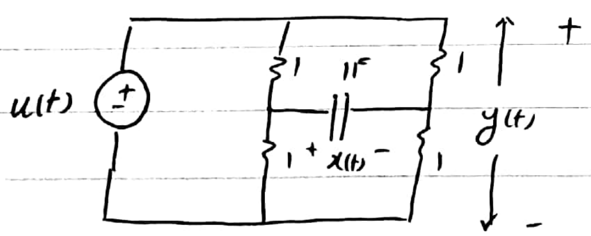
$$Ce^{At_1}x(0) = -Du(t) - C\int_0^{t_1} e^{A\tau}Bu(t_1-\tau)\,d\tau$$

که می‌توان از رابطه (*) نتیجه گرفت:

$$Ce^{At_1}x(0) = -Du(t) - \sum_{i}\sum_{j}\gamma_{ij}\, CA^i b_j$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت برای اسپن کردن فضای l-بعدی درجه آزادی D نیز اضافه می‌شود.

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید:



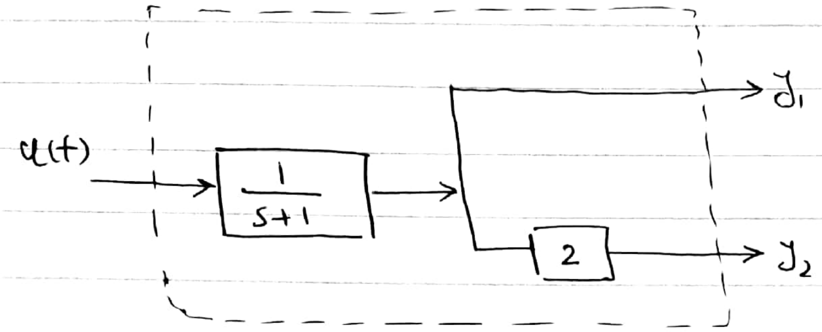
$$\dot{x} = -x$$
$$y(t) = u(t)$$

این سیستم کنترل پذیر حالت و رویت پذیر حالت نیست چون x نه خروجی خود را نشان می‌دهد و نه از ورودی تأثیر می‌پذیرد.

* اما این سیستم کنترل پذیر خروجی است. چون $\Phi_{op} = D = 1$ و $\text{rank}(\Phi_{op}) = 1$.

مثال : سیستم نشان داده شده در شکل زیر دارای تابع تبدیل $G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{2}{s+1}\end{bmatrix}$ است.

دارای معادلات حالت زیر است:



$$\begin{cases}\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x(t)\end{cases}$$

این سیستم کنترل پذیر حالت و رویت پذیر است.

این سیستم کنترل پذیر خروجی نیست.

$$Rank(\Phi_{op})=Rank\left(\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}\right)=1$$

کنترل پذیر تابعی : برای این‌که خروجی سیستم را به گونه‌ای تغییر دهیم که خروجی‌ها هر ورودی مرجع از قبل تعیین شده‌ای را در هر بازه زمانی دنبال کند، کنترل پذیر تابعی گویند.

همانطور که از تعریف دیده می‌شود، کنترل پذیری تابعی رابطه تنگاتنگی با معکوس پذیری سیستم دارد.

فرض کنید : $\underset{l\times 1}{y}(s)=\underset{l\times m}{G(s)}\cdot \underset{m\times 1}{u(s)}$. همانطور که دیده می‌شود برای رساندن $y_d(t)$ به y باید $y(s)=y_d(s)$

$$y(s)=G(s)\underbrace{\left[G^{\dagger}(s)\,y_d(s)\right]}_{u(s)}\quad,\quad G^{\dagger}=\underset{m\times l}{G^T}\left[GG^T\right]^{-1}_{l\times l}$$

اگر سیستم دارای m ورودی و l خروجی باشد آنگاه در صورتیکه $l\le m$ باید حتماً $Rank(G)=l$ باشد تا $G^{\dagger}$ وجود داشته باشد.

* لذا شرط لازم برای کنترل پذیری تابعی آنست که تعداد ورودی‌ها مساوی یا بیشتر از تعداد خروجی باشد.

* $Rank(G)=l$ یعنی آن که ردیف‌های $G(s)$ روی میدان توابع گویا ناوابسته خطی باشند.

* با تعمیم نتایج بدست آمده از کنترل پذیری حالت و رویت پذیری می‌توان نشان داد که سیستم کنترل پذیر خروجی است اگر ردیف‌های ماتریس تابع تبدیل آن ناوابسته خطی باشند.

مثال : ماتریس تبدیل سیستمی عبارت است از

$$G=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

ردیف های G ناوابسته خطی می باشد. لذا سیستم کنترل پذیر تابعی است.
اما یک تحقق مرتبه ۴ از آن بصورت زیر است:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

کنترل پذیر حالت نیست.

---

* یکی از مسائل در کنترل صنعتی تعقیب خروجی در حالت ماندگار است و برای سیگنال های پله ای است.
- یادآوری می شود:

$$\lim_{s\to 0} s\,y(s)=y(\infty)\xrightarrow[\text{ورودی}]{\text{پله واحد}}\lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s}G(s)\right)=G(0)$$

لذا برای سیستمهایی که تعداد ورودی و خروجی یکسان هستند (G مربعی است) باید $|G(0)|\neq 0$ باشد تا بتواند پله واحد را تعقیب نماید.

مثال : سیستم زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

$$\Phi_c=[B\ \ AB\ \ A^2B]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Rank}(\Phi_c)=3 \Rightarrow$$ کنترل پذیر

$$\Phi_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{Rank}(\Phi_o)=3 \Rightarrow$$ رویت پذیر

$$\phi_{op} = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{Rank}(\phi_{op}) = 2 \rightarrow$$ کنترل پذیر خروجی

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 1/s^2 & 1/s^3 \end{bmatrix} \Rightarrow |G(s)| = \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^4} = 0 \quad \forall s \Rightarrow$$ کنترل پذیر تابعی نیست