بسمه تعالی

نظریه تحقق

(بخش دوم)

درس کنترل مدرن

ایمان شریفی

۱۳۹۷

❖ تحقق سیستم های یک ورودی یک خروجی

- ✓ تابع تبدیل با چند جمله ای های صورت و مخرج نسبت به هم اول
- ✓ چهار تحقق مهم: *کانونیکال کنترل کننده*

  کانونیکال کنترل پذیری

  کانونیکال رویتگر

  کانونیکال رویت پذیری

- ✓ تحقق های *سری و موازی*

❖ تحقق کانونیکال کنترل کننده

$$Y(s)=\frac{b(s)}{a(s)}U(s)=b(s)\underbrace{a^{-1}(s)U(s)}_{\xi(s)}$$

$$\Rightarrow Y(s)=b(s)\xi(s)$$

$$\Rightarrow u(t)=\xi^{n}(t)+a_{n-1}\xi^{n-1}(t)+\cdots+a_{0}\xi(t)$$

$$y(t)=b_{n-1}\xi^{n-1}(t)+b_{n-2}\xi^{n-2}(t)+\cdots+b_{0}\xi(t)$$

Define:

$$x_{1}(t)=\xi(t),x_{2}(t)=\xi^{1}(t),\cdots,x_{n}(t)=\xi^{n-1}(t)$$

❖ تحقق کانونیکال کنترل کننده

Then:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \cdots - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + u(t)$$
$$y(t) = b_{n-1}x_n(t) + b_{n-2}x_{n-1}(t) + \cdots + b_0x_1(t)$$

$$\downarrow$$

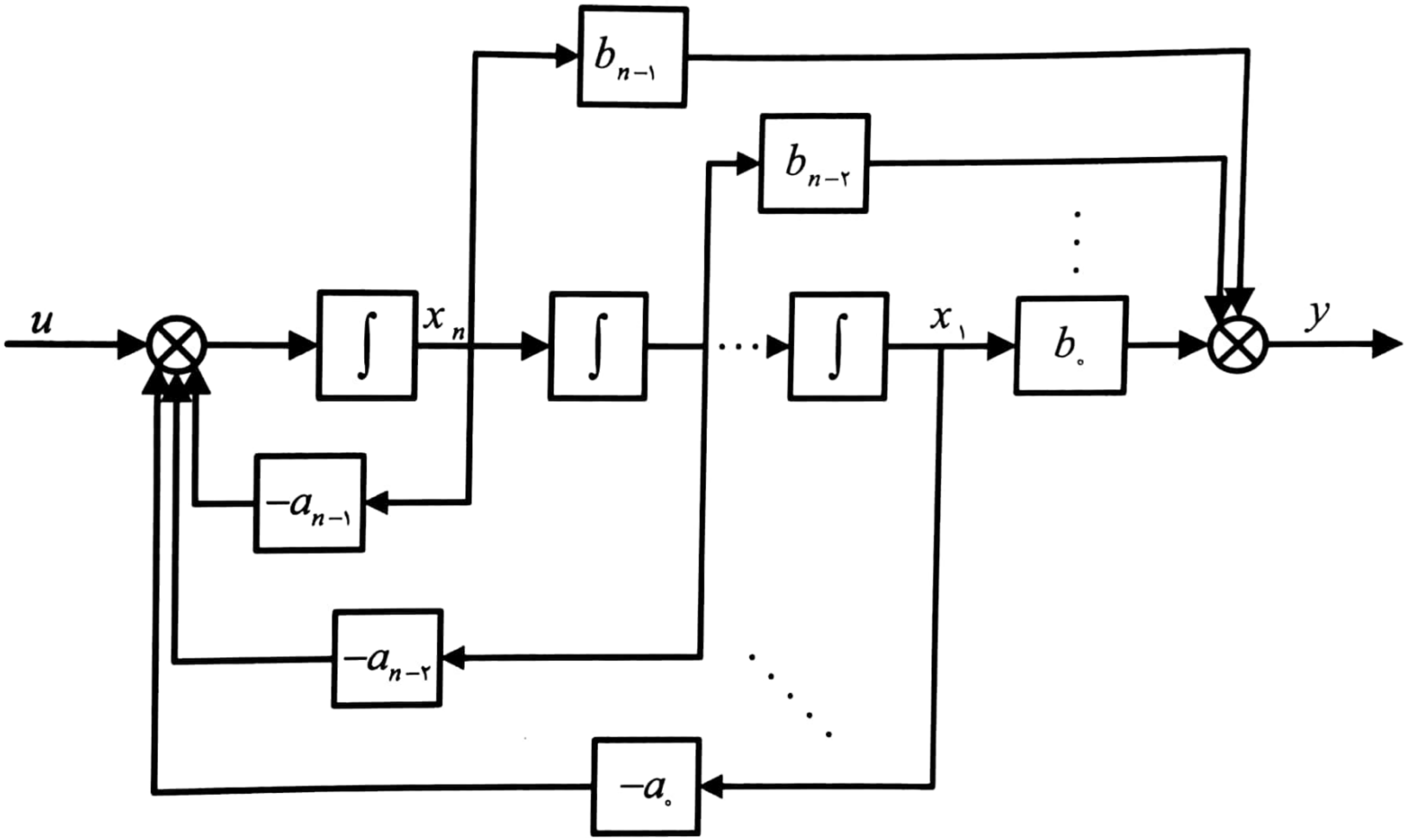
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

- ✓ تحقق *کانونیکال کنترل کننده* همواره *کنترل پذیر* است.
- ✓ تحقق *کانونیکال کنترل کننده* در صورتیکه حذف قطب با صفر نداشته باشد همواره *رویت پذیر* است.

❖ تحقق کانونیکال کنترل کننده

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$



❖ تحقق کانونیکال رویتگر

$$Y(s)=\frac{b(s)}{a(s)}U(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

$$\Downarrow$$

$$s^nY(s)=-\left(a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0\right)Y(s)+\left(b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0\right)U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$s^nY(s)=s^{n-1}\left(-a_{n-1}Y(s)+b_{n-1}U(s)\right)+s^{n-2}\left(-a_{n-2}Y(s)+b_{n-2}U(s)\right)$$
$$+s^{n-3}\left(-a_{n-3}Y(s)+b_{n-3}U(s)\right)+\ldots.+s^0\left(-a_0Y(s)+b_0U(s)\right)$$

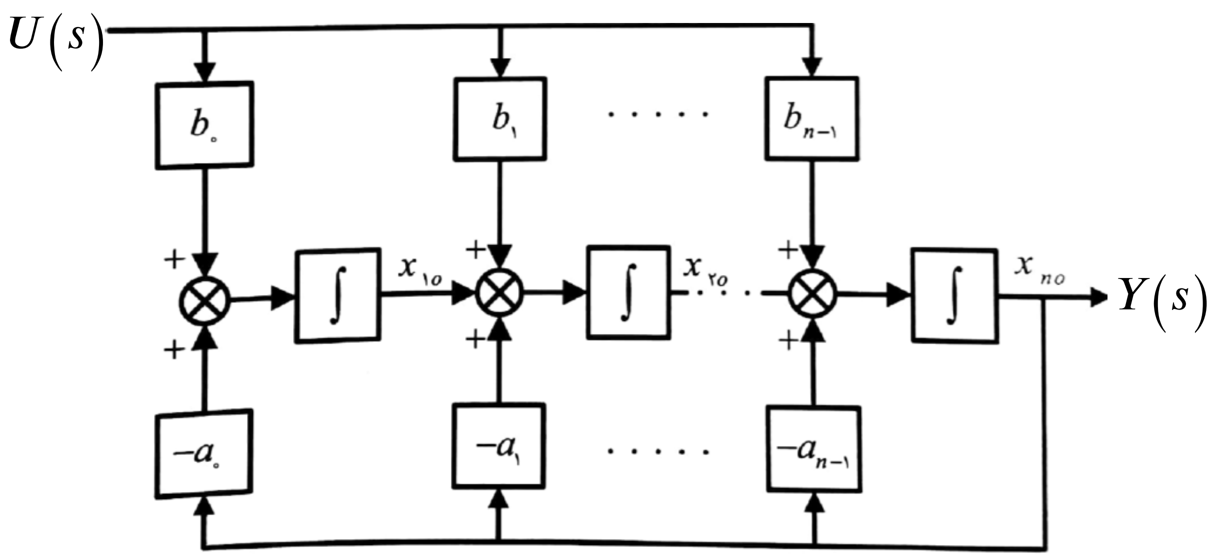
$$\Downarrow$$

$$Y(s)=\tfrac{1}{s}\left(-a_{n-1}Y(s)+b_{n-1}U(s)\right)+\tfrac{1}{s^2}\left(-a_{n-2}Y(s)+b_{n-2}U(s)\right)$$
$$+\tfrac{1}{s^3}\left(-a_{n-3}Y(s)+b_{n-3}U(s)\right)+\ldots.+\tfrac{1}{s^n}\left(-a_0Y(s)+b_0U(s)\right)$$

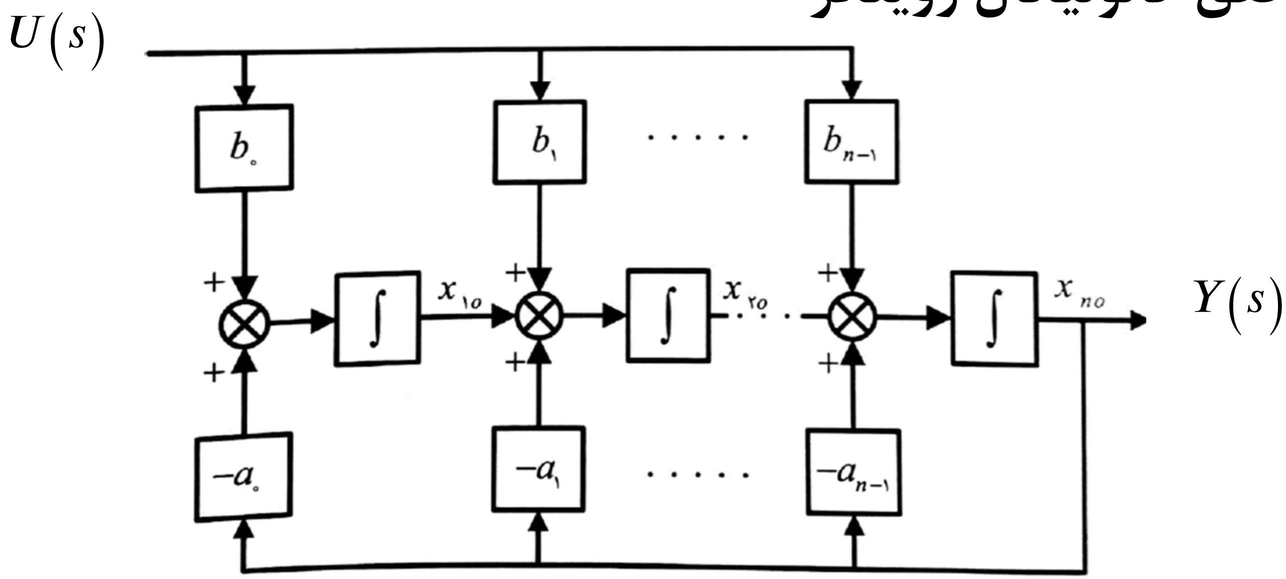
❖ تحقق کانونیکال رویتگر

$$Y(s) = \frac{1}{s}(-a_{n-1}Y(s) + b_{n-1}U(s)) + \frac{1}{s^2}(-a_{n-2}Y(s) + b_{n-2}U(s))$$
$$+ \frac{1}{s^3}(-a_{n-3}Y(s) + b_{n-3}U(s)) + \ldots. + \frac{1}{s^n}(-a_0Y(s) + b_0U(s))$$

❖ با استفاده از قانون جمع آثار



❖ تحقق کانونیکال رویتگر



❖ فضای حالت برای نمودار بلوک دیاگرامی بالا

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ \vdots\\ b_{n-2}\\ b_{n-1}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}x(t)$$

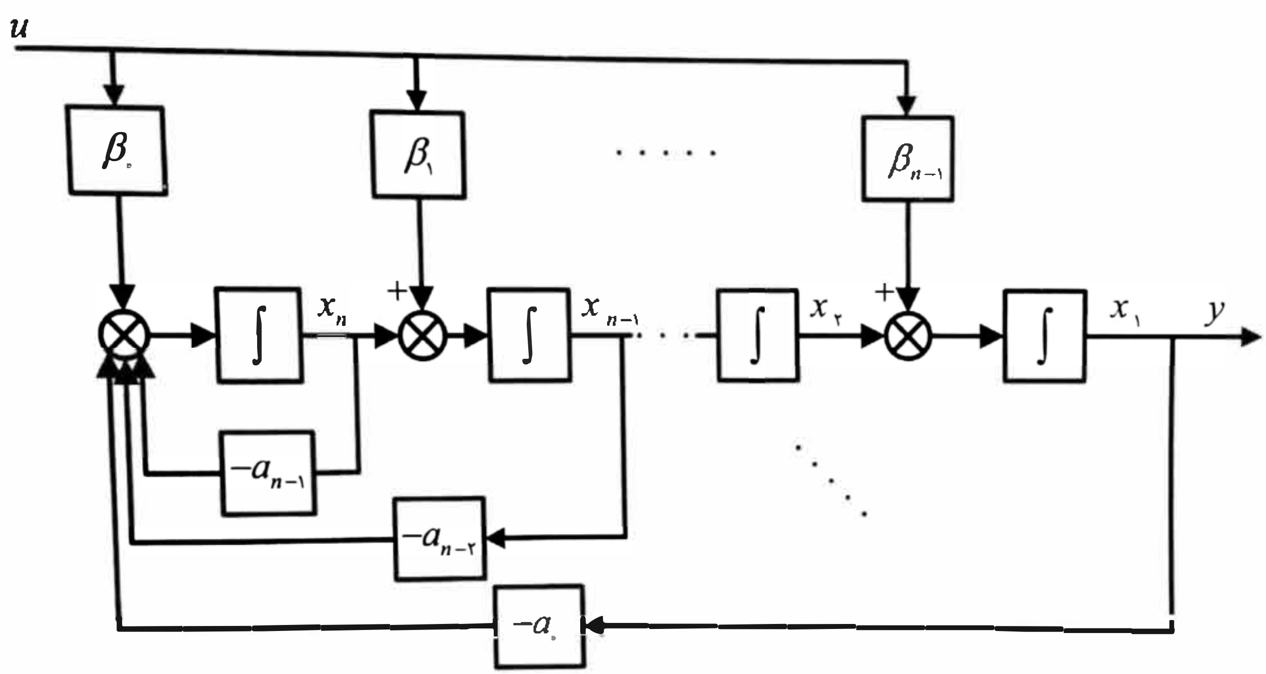
- ✓ تحقق *کانونیکال کنترل کننده* دوگان تحقق *کانونیکال رویتگر* است.
- ✓ تحقق *کانونیکال رویتگر* همواره *رویت پذیر* است و در صورتیکه حذف قطب با صفر نداشته باشد همواره *کنترل پذیر* است.
- ✓ دوگانی:

تحقق کانونیکال رویتگر	تحقق کانونیکال کنترل کننده
$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&-a_0\\1&0&0&\cdots&-a_1\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&-a_{n-2}\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-2}\\b_{n-1}\end{bmatrix}u(t)$ $y(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}x(t)$	$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$ $y(t)=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{n-1}\end{bmatrix}x(t)$

❖ تحقق کانونیکال رویت پذیری

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\ \beta_{n-2}\\ \vdots \\ \beta_1\\ \beta_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}x(t)$$



❖ تحقق کانونیکال رویت پذیری

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} x(t)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$g(s)=\frac{\mathrm{b}(s)}{\mathrm{a}(s)}=\frac{\mathrm{c}_{ob}\mathrm{Adj}(s\mathrm{I}-\mathrm{A}_{ob})\mathrm{b}_{ob}}{\left|s\mathrm{I}-\mathrm{A}_{ob}\right|}$$

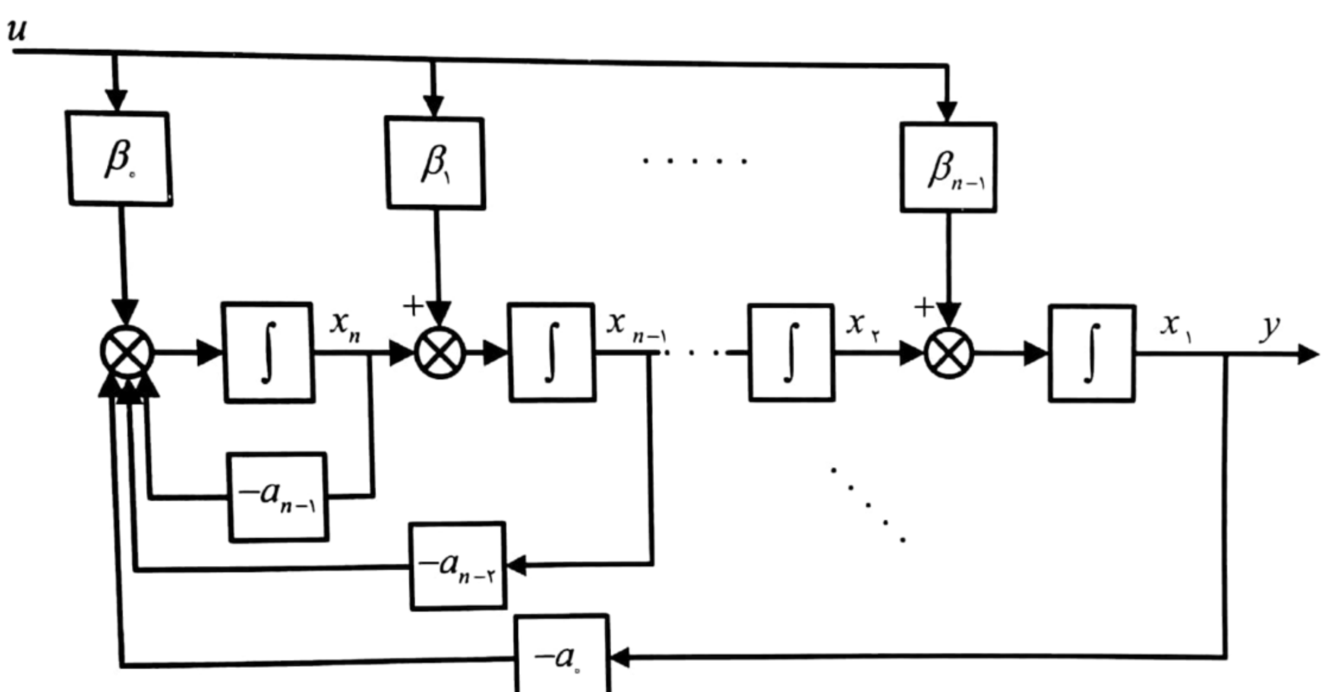
$$\begin{aligned}
\mathrm{b}(s) &\triangleq \mathrm{c}_{ob}\mathrm{Adj}(s\mathrm{I}-\mathrm{A}_{ob})\mathrm{b}_{ob}\\
&=\mathrm{c}_{ob}\left[s^{n-۱}\mathrm{I}+s^{n-۲}(\mathrm{A}_{ob}+a_{n-۱}\mathrm{I})+\ldots+(\mathrm{A}_{ob}^{n-۱}+a_{n-۱}\mathrm{A}_{ob}^{n-۲}+\ldots+a_{۲}\mathrm{A}_{ob}+a_{۱}\mathrm{I})\right]\mathrm{b}_{ob}\\
&=s^{n-۱}\mathrm{c}_{ob}\mathrm{b}_{ob}+s^{n-۲}(\mathrm{c}_{ob}\mathrm{A}_{ob}\mathrm{b}_{ob}+a_{n-۱}\mathrm{c}_{ob}\mathrm{b}_{ob})+\ldots+(\mathrm{c}_{ob}\mathrm{A}_{ob}^{n-۱}\mathrm{b}_{ob}+a_{n-۱}\mathrm{c}_{ob}\mathrm{A}_{ob}^{n-۲}\mathrm{b}_{ob}+\ldots\\
&\qquad +a_{۲}\mathrm{c}_{ob}\mathrm{A}_{ob}\mathrm{b}_{ob}+a_{۱}\mathrm{c}_{ob}\mathrm{b}_{ob})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{n-۱}&=h_{۱}\\
b_{n-۲}&=h_{۲}+a_{n-۱}h_{۱}\\
&\vdots\\
b_{۰}&=h_{n}+a_{n-۱}h_{n-۱}+\ldots+a_{۲}h_{۲}+a_{۱}h_{۱}
\end{aligned}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{bmatrix}h_{۱}\\ h_{۲}\\ \vdots\\ h_{n}\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}۱ & ۰ & \ldots & ۰ & ۰\\ a_{n-۱} & ۱ & \ldots & ۰ & ۰\\ \vdots & & & & \\ a_{۱} & a_{۲} & \ldots & a_{n-۱} & ۱\end{bmatrix}^{-۱}
\begin{bmatrix}b_{n-۱}\\ b_{n-۲}\\ \vdots\\ b_{۰}\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\\beta_{n-2}\\\vdots\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}x(t)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\\beta_{n-2}\\\vdots\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\-a_{n-1}&1&\cdots&0&0\\\vdots&&&&\\0&0&\cdots&1&0\\-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_{n-1}\\b_{n-2}\\\vdots\\b_1\\b_0\end{bmatrix}$$



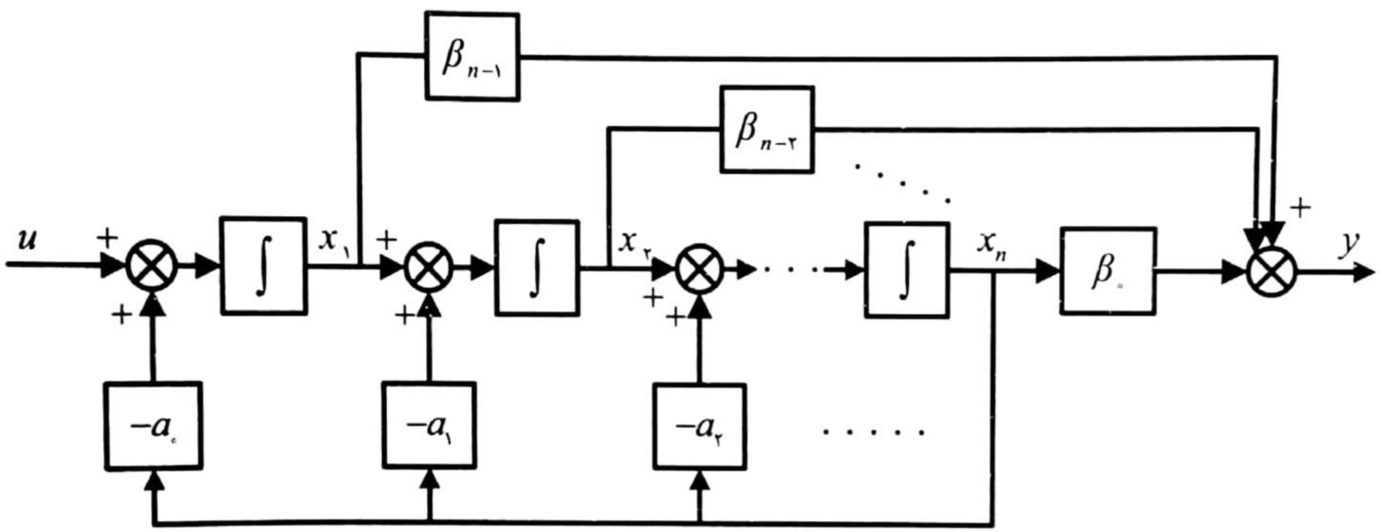
$$\boxed{\beta_{n-1} = h_1, \beta_{n-2} = h_2, \cdots, \beta_0 = h_n}$$

- ✓ در تحقق *کانونیکال رویت پذیری* ماتریس رویت پذیری همان ماتریس واحد است.
- ✓ در تحقق *کانونیکال رویت پذیری* ماتریس کنترل پذیری همان ماتریس هانکل است و در صورتیکه حذف قطب با صفر نداشته باشد همواره *کنترل پذیر* است.

❖ تحقق کانونیکال کنترل پذیری

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}\beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \cdots & \beta_0\end{bmatrix}x(t)$$



✓ تحقق کانونیکال کنترل پذیری دوگان تحقق کانونیکال رویت پذیری است.

✓ در تحقق کانونیکال کنترل پذیری ماتریس کنترل پذیری ماتریس واحد است. (تمرین)

✓ در تحقق کانونیکال کنترل پذیری ماتریس رویت پذیری ماتریس هانکل است و درصورتیکه حذف قطب با صفر نداشته باشد همواره رویت پذیر است. (تمرین)

تحقق کانونیکال رویت پذیری	تحقق کانونیکال کنترل پذیری
$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\\beta_{n-2}\\\vdots\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}u(t)$ $y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}x(t)$	$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&-a_0\\1&0&0&\cdots&-a_1\\\vdots&&&&\\0&0&0&\cdots&-a_{n-2}\\0&0&0&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$ $y(t)=\begin{bmatrix}\beta_{n-1}&\beta_{n-2}&\beta_{n-3}&\cdots&\beta_0\end{bmatrix}x(t)$

$$\begin{bmatrix}\beta_{n-1}\\\beta_{n-2}\\\vdots\\\beta_1\\\beta_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0\\-a_{n-1}&1&\cdots&0&0\\\vdots&&&&\\0&0&\cdots&1&0\\-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{n-1}\\b_{n-2}\\\vdots\\b_1\\b_0\end{bmatrix}$$

❖ تحقق های موازی و سری

$$g(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

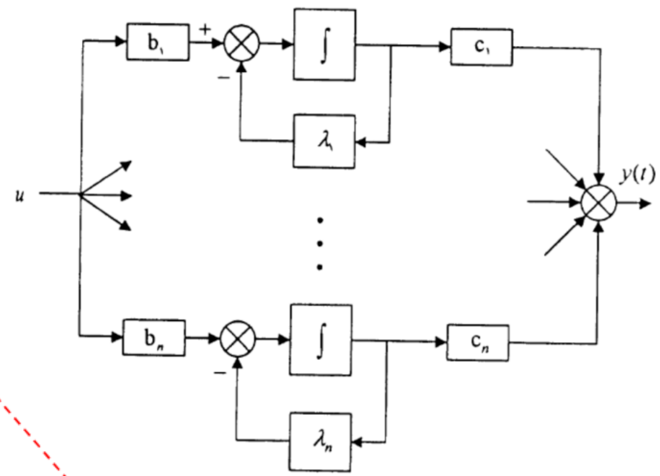
$$\downarrow$$

$$\frac{b(s)}{a(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{g_i}{s-\lambda_i}$$

$$\downarrow$$

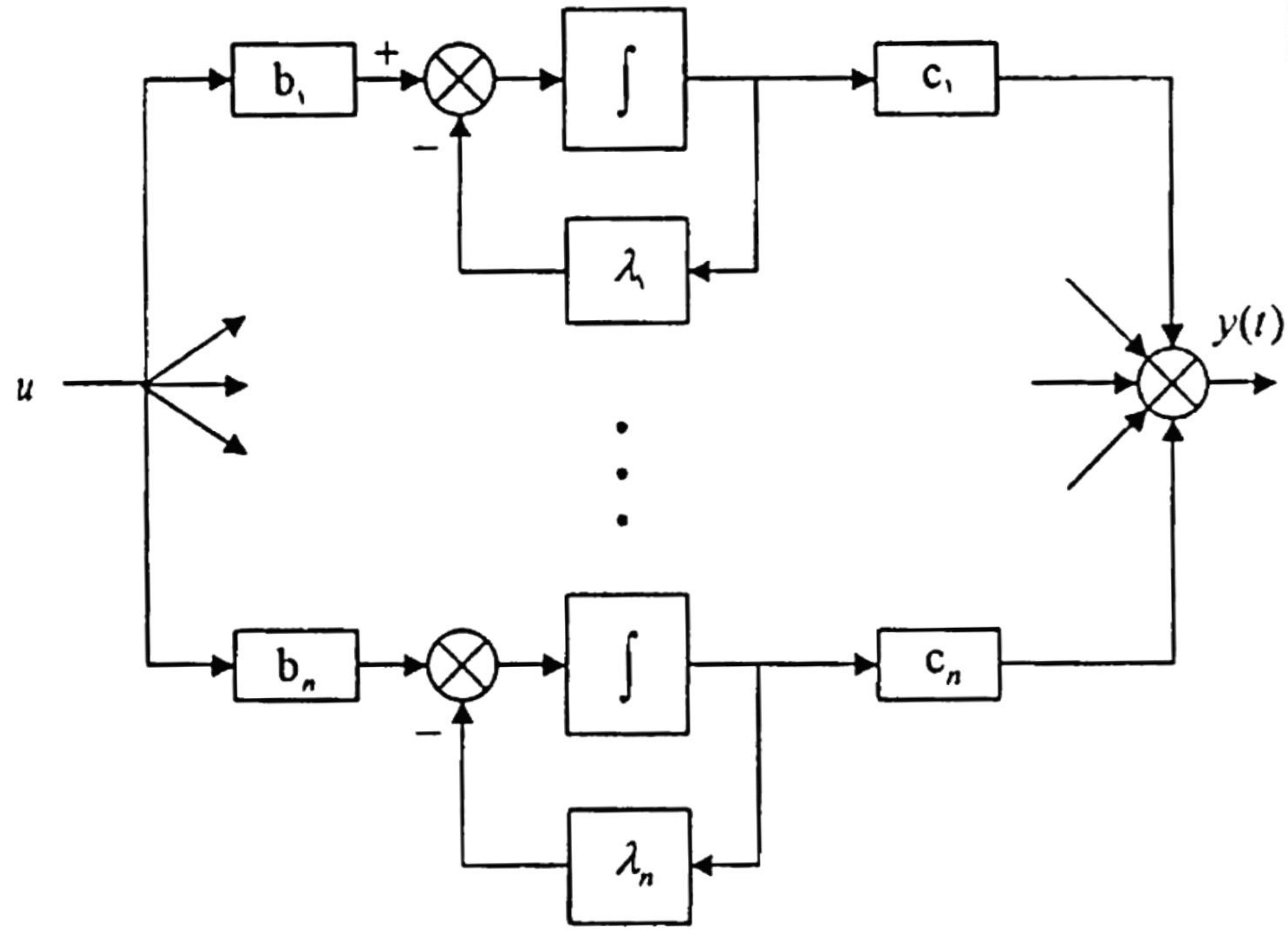
$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{bmatrix}z(t)$$



شکل ۴-۷ دیاگرام بلوکی تحقق قطری

$$b_i c_i = g_i$$



شکل ۴-۷ دیاگرام بلوکی تحقق قطری

مثال ۴-۳- تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$g(s) = \frac{2s^2+5s+7}{s^3+3s^2+7s+5}$$

قطبهای سیستم $-1 \pm 2j$ و -1 هستند. لذا اگر بسط کامل کسرهای جزئی $g(s)$ را بنویسیم، داریم

$$g(s) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{j}{4}}{s+1+2j} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{j}{4}}{s+1-2j} + \frac{1}{s+1}$$

این نمایش چندان سودمند نیست، زیرا بهره‌های مختلط در صورت دارد. لذا عبارات مختلط مزدوج را در یک عبارت با ضرایب حقیقی بازنویسی می‌کنیم:

$$g(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{s+1}$$

اکنون می‌توانیم هر عبارت را به صورت جداگانه تحقق دهیم. توجه کنید که عبارات متناظر با

قطبهای مختلط مزدوج مرتبه دوم خواهند بود و می‌توان از هر کدام از تحققهای کانونیکال برای آنها استفاده کرد. بنابراین

کانونیکال کنترل کننده

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hdashline 1 \end{array}\right] u(t)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

مثال ۴-۴- تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$g(s) = \frac{2s^2+10s+11}{s^3+5s^2+8s+4}$$

قطبهای سیستم در ۱- و ۲- و ۲- هستند. بسط کسرهای جزئی $g(s)$ عبارتست از

$$g(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{3}{s+1}$$

این تابع تبدیل از حاصل جمع دو قسمت متناظر با قطب در ۱- و قطب تکراری در ۲- بدست می‌آید. تحقق فضای حالت این تابع تبدیل به صورت بلوک جردن در خواهد آمد. بسادگی با توجه به مکرر بودن قطب در ۲- و در نظر گرفتن دو بلوک جداگانه در ماتریس حالت، داریم

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\left[\begin{array}{c:cc} -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]\mathbf{x}(t)+\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline 0 \\ 1 \end{array}\right]\mathbf{u}(t)$$

$$y(t)=\left[\begin{array}{c:cc} 3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

تحقق حاصلضرب یا سری، تحققی است که در آن تحقق‌ها پشت‌سرهم وارد می‌شوند.

برای نمونه با تابع تبدیل داده شده در زیر

$$\frac{\mathrm{b}(s)}{\mathrm{a}(s)}=\frac{s^2+7s+12}{s^3+3s^2+7s+5}$$

می‌توان به یکی از دو صورت زیر برخورد کرد

$$\frac{\mathrm{b}(s)}{\mathrm{a}(s)}=\frac{s+3}{s^2+2s+5}\,\frac{s+4}{s+1}$$

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s^۲+۷s+۱۲}{s^۲+۲s+۵}\,\frac{۱}{s+۱}$$

و سپس هر کدام از توابع تبدیل را به صورت جداگانه تحقق داد. سرانجام، تحقق کل سیستم نوشته می‌شود.

تبدیل همانندی بین تحقق ها

- در قسمت قبلی تبدیل همانندی بین دو تحقق مینیمال محاسبه شد.

$$\Phi_{c_0} = \left(\Phi_{o_0}^{T}\,\Phi_{o_0}\right)^{-1}\Phi_{o_0}^{T}\,\Phi_o\,\Phi_c = T\Phi_c$$

$$A = T^{-1}A_0T \qquad b = T^{-1}b_0 \qquad c = c_0T$$

- در این قسمت شرایط ساده تری بیان میشود.
  - بدیهی است اولین شرط لازم برای وجود همانندی بین دو تحقق هم مرتبه بودن آنهاست.
  - شرط لازم دیگر برابری مقادیر ویژه آنهاست.
- در قسمت بعدی قضیه مربوطه بیان می شود.

- **قضیه:** یک تبدیل همانندی یکتا بین دو تحقق هم مرتبه از g(s) مانند (A_1,b_1,c_1) و (A_2,b_2,c_2) وجود دارد اگر:

1. $\det(sI - A_1) = \det(sI - A_2)$
2. هر دو تحقق کنترل پذیر یا رویت پذیر باشد.

- در صورت کنترل پذیر بودن دو تحقق:

$$T = \phi_c(A_1, b_1)\,\phi_c^{-1}(A_2, b_2)$$

- در صورت رویت پذیر بودن دو تحقق:

$$T = \phi_o^{-1}(A_1, c_1)\phi_o(A_2, c_2)$$

- اثبات برای حالت کنترل پذیری.
  - اثبات رویت پذیری از طریق دوالیتی.

$$\mathbf{x}_1(t) = T\mathbf{x}_2(t) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T^{-1}A_1T = A_2 \\ T^{-1}b_1 = b_2 \\ c_1T = c_2 \\ \\ T = \Phi_{c1}\Phi_{c2}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow T^{-1}A_1T = \Phi_{c2}\Phi_{c1}^{-1}A_1\Phi_{c1}\Phi_{c2}^{-1}$$

$$\Phi_{c2} = T^{-1}\Phi_{c1} \Rightarrow T = \Phi_{c1}\Phi_{c2}^{-1}$$

تبدیل همانندی به فرم کنترل کننده

$$\overline{T} = \left(\Phi_{c1}\Phi_{cc}^{-1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\Phi_{c1}\Phi_{cc}^{-1}\right)^{-1} b_1 = b_c \\ b_c = \phi_{cc}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi_{c1}^{-1}b_1 = \Phi_{cc}^{-1}b_c = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_{c1}^{-1}b_1 = \Phi_{cc}^{-1}b_c = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T \Rightarrow T^{-1}b_1 = \Phi_{c2}\Phi_{c1}^{-1}b_1 = \Phi_{c2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T = b_2$$

برای n=3 $\Phi_{c1}^{-1}A_1\Phi_{c1} = \begin{bmatrix} b_1 & A_1b_1 & A_1^2b_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_1b_1 & A_1^2b_1 & A_1^3b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$

$$A_1^3b_1 = -a_3A_1^2b_1 - a_2A_1b_1 - a_1b_1$$

برای A_1 و A_2 صدق می کند.

$$\Rightarrow \Phi_{c1}^{-1}A_1\Phi_{c1} = \Phi_{c2}^{-1}A_2\Phi_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

محاسبه در اسلاید بعدی

$$\Rightarrow T^{-1}A_1T = \Phi_{c2}\Phi_{c1}^{-1}A_1\Phi_{c1}\Phi_{c2}^{-1} = \Phi_{c2}\Phi_{c2}^{-1}A_2\Phi_{c2}\Phi_{c2}^{-1} = A_2$$

با استفاده از پارامترهای مارکوف داریم:

$$c_1b_1 = c_2b_2 \qquad c_1A_1b_1 = c_2A_2b_2 \quad \ldots$$

$$\Rightarrow c_1\Phi_{c1} = c_2\Phi_{c2} \quad \Rightarrow c_2 = c_1\Phi_{c1}\Phi_{c2}^{-1} = c_1T$$

$$\Phi_{c1}^{-1} A_1 \Phi_{c1} = \begin{bmatrix} b_1 & A_1 b_1 & A_1^2 b_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 b_1 & A_1^2 b_1 & A_1^3 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}$$

```
syms alpha1 alpha2 alpha3

A = sym('A', [3 3])

b = sym('b', [3 1])
```

```
Z=[b A*b A^2*b]^-1 *  [A*b A^2*b -alpha1*b-alpha2*A*b-alpha3*A^2*b];
```

```
simplify(Z)
```

```
ans =


[ 0, 0, -alpha1]
[ 1, 0, -alpha2]
[ 0, 1, -alpha3]
```

❖ تحقق سیستم های غیر اسکالر

✓ انواع سیستم ها:

SISO, SIMO, MISO, MIMO

✓ سیستم SIMO :

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{n_1(s)}{a_1(s)} \\ \dfrac{n_2(s)}{a_2(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_l(s)}{a_l(s)} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{n_1(s)}{a_1(s)} \\ \dfrac{n_2(s)}{a_2(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_l(s)}{a_l(s)} \end{bmatrix} \longrightarrow G(s)=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_l(s) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$a(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$b_i(s)=b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0 \qquad (i=1,\cdots,l)$$

$$\downarrow$$

تحقق های اسکالر $\longleftarrow$ $$g_i(s)=\frac{b_i(s)}{a(s)} \qquad (i=1,\cdots,l)$$

تحقق نهایی به صورت کانونیکال کنترل کننده:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x\left(t\right)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n-1} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2n-1} \\ & & & \\ b_{l0} & b_{l1} & \cdots & b_{ln-1} \end{bmatrix} x(t)$$

مناسب برای SIMO

مثال ۴-۶- تحقق کانونیکال کنترل‌کننده تابع تبدیل زیر را بدست آورید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{۱}{(s^۲+۱)(s+۱)} \\ \dfrac{s}{(s+۱)(s+۲)} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} s+۲ \\ \\ s(s^۲+۱) \end{bmatrix} ۱/(s^۲+۱)(s+۱)(s+۲)$$

$$b_۱(s)=s+۲$$

$$b_۲(s)=s^۳+s$$

$$a(s)=(s^۲+۱)(s+۱)(s+۲)=s^۴+۳s^۳+۳s^۲+۳s+۲$$

$$A_c=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۲ & -۳ & -۳ & -۳ \end{bmatrix} \quad b_c=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad C_c=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

✓ سیستم MISO :

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{n_1(s)}{a_1(s)} & \dfrac{n_2(s)}{a_2(s)} & \cdots & \dfrac{n_m(s)}{a_m(s)}\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$G(s)=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix}b_1(s) & b_2(s) & \cdots & b_m(s)\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$a(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0$$

$$b_i(s)=b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0 \qquad (i=1,\cdots,m)$$

$$\downarrow$$

تحقق های اسکالر $\longleftarrow$ $$g_i(s)=\frac{b_i(s)}{a(s)} \qquad (i=1,\cdots,m)$$

تحقق نهایی به صورت کانونیکال رویت گر:

$$
\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} b_{10} & b_{20} & \cdots & b_{m0} \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ \vdots & & & \\ b_{1n-1} & b_{2n-1} & \cdots & b_{mn-1} \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x(t)
$$

مناسب برای MISO

مثال ۴-۷- تحقق‌کانونیکال رؤیتگر تابع تبدیل زیر را بدست آورید

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{۱}{s^۲} & \frac{s+۳}{(s+۱)(s+۲)} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=[(s+۱)(s+۲) \quad s^۲(s+۳)]/s^۲(s+۱)(s+۲)$$

$$b_۱(s)=s^۲+۳s+۲$$

$$b_۲(s)=s^۳+۳s^۲$$

$$a(s)=s^۴+۳s^۳+۲s^۲$$

$$A_o=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} B_o=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ \\ ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$c_o=[۰ \quad ۰ \quad ۰ \quad ۱]$$