بسمه تعالی

تحلیل پایداری

ایمان شریفی

برگرفته از اسلایدهای کتاب اصول کنترل مدرن
دکتر علی خاکی صدیق

❖ تعاریف *پایداری*

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

- مفهوم *نقطه تعادل*

مثال ۵-۱- تنها نقطه تعادل سیستم زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

مبدأ فضای حالت است. زیرا بُعد فضای پوچی ماتریس A صفر است. حال آنکه برای سیستم زیر

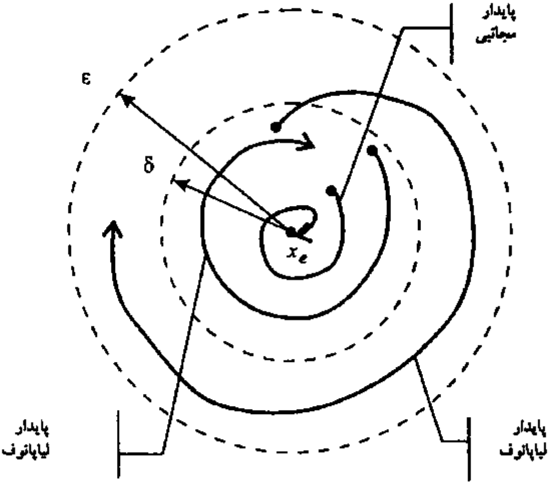
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

علاوه بر مبدأ، زیر فضای اسپن شده توسط بردار $\mathbf{x}_e = [-۲ \quad ۱]^T$ مجموعه نقاط تعادل سیستم است. در سیستم‌های غیر خطی، نقاط تعادل به صورت نقاط مجزا نیز رخ می‌دهند. سیستم غیر خطی زیر

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -sin\mathbf{x}$$

نقاط تعادلی در $\mathbf{x}_e = \pm n\pi$ برای $n = ۰,۱,۲,...$ دارد.

- **تعریف** نقطه تعادل *پایدار به مفهوم لیاپانوف*
- **تعریف** نقطه تعادل *پایدار مجانبی*



❖ پایداری سیستم های LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

برای سیستم بدون ورودی با مقادیر ویژه متمایز داریم:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e^{\lambda_i t} \mathrm{e}_i$$

- **قضیه** سیستم *پایدار به مفهوم لیاپانوف* است اگر و فقط اگر:
  - کلیه مقادیر ویژه قسمت های حقیقی غیر مثبت دارند
  - مقادیر ویژه موهومی ساده اند

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار مجانبی* است اگر و فقط اگر *پایدار مجانبی فراگیر* باشد.

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار مجانبی* است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه آن قسمت های حقیقی اکیدا منفی داشته باشند.

- **قضیه** سیستم LTI *پایدار ورودی-خروجی BIBO* است اگر و فقط اگر کلیه قطب های تابع تبدیل قسمت های حقیقی اکیدا منفی داشته باشند.

- **قضیه** سیستم LTI پایدار T یا کاملا پایدار است اگر و فقط اگر برای هر شرط اولیه حالت و هر ورودی کراندار، خروجی و تمام متغیرهای حالت سیستم کراندار باشد.

مثال ۵-۲- سیستم داده شده با معادلات زیر را درنظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=[۱ \quad ۱]\mathbf{x}(t)$$

تابع تبدیل آن عبارت است از

$$g(s)=\frac{۱}{s+۳}$$

بنابراین، پاسخ حالت-صفر سیستم پایدار BIBO است. لیکن، پاسخ حالت صفر پایدار مجانبی نیست، زیرا سیستم یک مقدار ویژه مثبت دارد.

- **قضیه** اگر سیستم LTI کنترل پذیر و رویت پذیر باشد انگاه عبارات زیر معادل اند:
  - سیستم *کاملا پایدار* است.
  - پاسخ حالت صفر سیستم *پایدار BIBO* است.
  - کلیه قطب های تابع تبدیل قسمت های حقیقی منفی دارند.
  - کلیه مقادیر ویژه ماتریس حالت قسمت های حقیقی منفی دارند.

- **تعریف** *حوزه جذب*
- **تعریف** نقطه تعادل *پایدار مجانبی فراگیر*
- **تعریف** نقطه تعادل *ناپایدار*
- **تعریف** *پایداری داخلی*
- **تعریف** *پایداری BIBO*
- **تعریف** *پایداری- T یا کاملا پایدار*

❖ روش اول لیاپانوف

✓ بررسی پایداری سیستم های غیرخطی در نقاط کار پس از خطی سازی

- **قضیه** سیستم

$$\dot{x}(t) = f[x(t), 0] \qquad \text{and} \qquad x_e$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

Where,

$$A = \text{Jacobian of } f \text{ at } x_e$$

پایداری مجانبی ماتریس حالت پایداری مجانبی سیستم غیرخطی در نقطه کار را میدهد.

- روش دوم لیاپانوف

✓ یک اصل از نظریه کلاسیک مکانیک: *سیستم های نوسانی* بدون ورودی خارجی در صورتی پایدار هستند که *مجموع انرژی آنها* به طور پیوسته *کاهشی* باشد.

[redacted]

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n) \qquad a_{ij}\in R$$

$$\longrightarrow \quad V(x)=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=x^T Ax=\langle x, Ax\rangle$$

ماتریس متقارن

- **تعریف** تابع اسکالر *معین مثبت* $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر *نیمه معین مثبت* $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر *معین منفی* $V(x)$ در محدوده S.
- **تعریف** تابع اسکالر *نیمه معین منفی* $V(x)$ در محدوده S .
- **تعریف** تابع اسکالر *نامعین* $V(x)$ در محدوده S .

- روش های تعیین علامت توابع اسکالر.

مثال ۵-۴-کهادهای اصلی ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

عبارتند از:

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ |A|$$

به عبارت دیگر، کهادهایی که عناصر قطری آنها عناصر قطری ماتریس باشند، کهادهای اصلی هستند. همچنین، کهادهای اصلی مقدم ماتریس A عبارتند از:

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ |A|$$

یعنی کهادهائی که با حذف آخرین k ستون و k ردیف برای $k=۲,۱,۰$ بدست می‌آیند.

مثال ۵-۵- در اینجا قطعیت علامت دو صورت درجه دوّم زیر را بررسی می‌کنیم

$$V(\mathbf{x}) = 10\,x_1^2 + 4\,x_2^2 + x_3^2 + 2\,x_1x_2 - 2\,x_2x_3 - 4\,x_1x_3$$

و

$$V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 3\,x_2^2 - 11\,x_3^2 + 2\,x_1x_2 - 4\,x_2x_3 - 2\,x_1x_3$$

نخست برای اولین تابع درجه دوّم داریم

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3] \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

کهادهای اصلی مقدم ماتریس A عبارتنداز

$$10 > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

از آنجائی که کهادهای اصلی مقدم متوالی A مثبت هستند، $V(\mathbf{x})$ معین مثبت است. حال برای دوّمین تابع درجه دوم $V(\mathbf{x})$ داریم

$$V(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=[x_۱\ \ x_۲\ \ x_۳]\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \\ -۱ & -۲ & -۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

کهادهای اصلی مقدم ماتریس A در این صورت عبارتند از

$$-۱<۰,\quad \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix}>۰\ ,\quad \begin{vmatrix} -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \\ -۱ & -۲ & -۱۱ \end{vmatrix}<۰$$

و لذا $V(\mathbf{x})$ معین منفی است. همچنین، می‌توان قطعیت علامت $-A$ را نیز بررسی کرد:

$$۱>۰,\quad \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}>۰\ ,\quad \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱۱ \end{vmatrix}>۰$$

و لذا $V(\mathbf{x})$ معین منفی است.

- **روش دوم لیاپانوف**

✓ یک اصل از نظریه کلاسیک مکانیک: *سیستم های نوسانی* بدون ورودی خارجی در صورتی پایدار هستند که *مجموع انرژی آنها* به طور پیوسته *کاهشی* باشد.

✓ *نظریه لیاپانوف* براساس *تابع انرژی*

✓ *تابع انرژی تعمیم یافته* یا *تابع لیاپانوف*

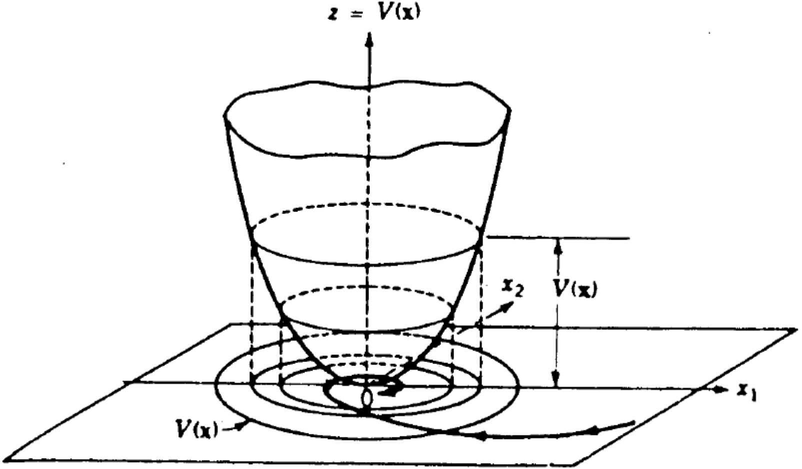
✓ تابع کاندید *لیاپانوف*

✓ ویژگی های تابع کاندید *لیاپانوف*

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$V(x) \qquad \frac{dV(x)}{dt}$$

✓ نمایش ترسیمی تابع لیاپانوف



- **قضیه ۱**

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا پایدار مجانبی است اگر تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

$$V(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

مثال ۵-۶- سیستم غیر خطی زیر با نقطه تعادل (۰,۰) را در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 - x_2^3$$

تابع معین مثبت زیر را به عنوان تابع لیاپانوف کاندید، انتخاب می‌کنیم

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

مشتق زمانی آن عبارتست از

$$\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}) = x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

با جایگزینی از معادلات سیستم در $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x})$، بدست می‌آوریم

$$\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}) = x_1(-x_1 - 2x_2^2) + 2x_2(x_1x_2 - x_2^3)$$

$$= -x_1^2 - 2x_2^4$$

تابع $\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x})$ منفی معین است و لذا نقطه تعادل آن از قضیه ۱ پایدار مجانبی است.

✓ اگر مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین باشد؟

- آیا مسیرهای سیستم مشتق تابع لیاپانوف را صفر می کنند؟
  شرط اصلاح شده پایداری مجانبی:

$$\dot{V}(x) \le 0, \qquad \dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \ne \mathrm{f}(x(t))$$

- **قضیه ۲**

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا پایدار مجانبی فراگیر است اگر تنها یک نقطه تعادل داشته باشد و تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

تابع در تمام فضای حالت پیوسته و مشتقات جزیی آن پیوسته باشند

$$V(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) \to \infty \quad \text{for} \quad \|x\| \to \infty$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \qquad \dot{V}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} \neq f(x(t))$$

مثال ۵-۷- سیستم غیر خطی زیر را با نقطه تعادل $(0,0)$ در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3$$

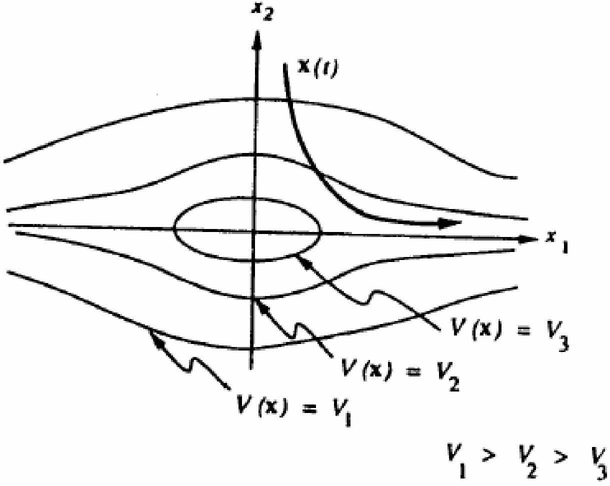
با انتخاب تابع مثبت معین زیر

$$\mathbf{V(x)} = \frac{1}{2}(x_1^4 + 2x_1^2 + x_2^2)$$

داریم

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) &= 2x_1^3\,\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1^3(x_2) + 2x_1(x_2) + x_2(-2x_1 - 3x_2 - 2x_1^3) \\ &= -3x_2^2\end{aligned}$$

لذا $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ نیمه معین منفی است. توجه کنید که به ازاء $x_2 = 0$ و $x_1 \neq 0$ ،$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ صفر خواهد شد. لیکن پاسخ $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = 0$ مسیری از سیستم نیست. زیرا معادله دوم $-2x_1 - 2x_1^3 = 0$ تنها در صورتی برقرار است که x_1 صفر باشد.



شکل ۵–۴ تابع $V(\mathbf{x})=\frac{x_1^{2}}{1+x_1^{2}}+x_2^{2}$

مثال ۵-۸- سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید. با تعریف متغیرهای حالت x و $\dot{x}$ از معادله دیفرانسیل سیستم

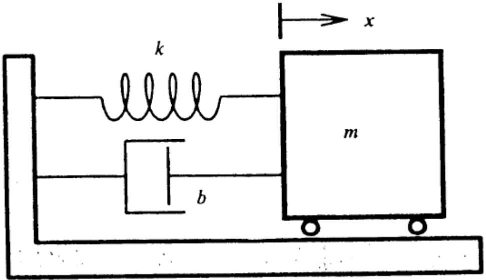
$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t)=0$$

معادلات حالت سیستم به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

تابع انرژی سیستم از حاصل جمع انرژی جنبشی و پتانسیل آن نوشته می‌شود. لذا

$$V(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$



مشتق تابع انرژی عبارتست از

$$\dot{V}(x,\dot{x}) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$
$$= \dot{x}(-b\dot{x} - kx) + kx\dot{x}$$
$$= -b\dot{x}^{۲}$$

از آنجائیکه b ضریب میراکننده است، لذا عددی مثبت است و $\dot{V}(x,\dot{x})$ تابع نیمه معین منفی است. اگر $\dot{x}=۰$ باشد، از معادله دوم حالت داریم $-k/mx+۰=۰$ و لذا $x=۰$ است. توجه کنید که اگر $x\neq ۰$ باشد، سیستم شروع به نوسان خواهد نمود و $\dot{x}\neq ۰$ است. این بدان معنی است که $\dot{x}=۰$ و $x\neq ۰$ پاسخی از معادله سیستم مکانیکی نیست. لذا، سیستم پایدار مجانبی است. در واقع، تمامی شرایط قضیه ۲ برآورده شده است و پایداری آن مجانبیِ فراگیر است. هم چنین، توجه کنید که اگر $b=۰$ باشد، عامل میراکننده‌ای در سیستم وجود ندارد و انرژی مقداری ثابت خواهد داشت. در این صورت، سیستم نوساناتی غیر میرا و غیر افزایشی خواهد داشت که متناظر با پایداری لیاپانوف است.

مثال ۵-۹- سیستم غیر خطی داده شده با معادلات زیر و نقطه تعادل $(0,0)$ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2)$$

از تابع لیاپانوف کاندید زیر برای بررسی پایداری استفاده می‌کنیم

$$V(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2$$

مشتق تابع کاندید عبارتست از

$$\dot{V}(\mathbf{x})=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$$

$$=2x_1(-x_1+x_2+x_1(x_1^2+x_2^2))+2x_2(-x_1-x_2+x_2(x_1^2+x_2^2))$$

$$=-2x_1^2-2x_2^2+2(x_1^2+x_2^2)^2$$

برای اینکه داشته باشیم $\dot{V}(\mathbf{x})<0$،

$$2(x_1^2+x_2^2)^2<2(x_1^2+x_2^2)$$

لیکن برای $x_1^2+x_2^2\neq 0$ داریم

$$x_1^2+x_2^2<1$$

بنابراین، محدوده‌ای که در آن $\dot{V}(\mathbf{x})$ معین منفی است داخل دایره واحد می‌باشد. مشاهده می‌ش

مثال: وندرپل (Van der pole)

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon < 0$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_{۱} &= x_{۲} \\ \dot{x}_{۲} &= -x_{۱} - \varepsilon(x_{۱}^{۲} - ۱)x_{۲} \end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}) &= ۲x_{۱}\dot{x}_{۱} + ۲x_{۲}\dot{x}_{۲} \\ &= ۲x_{۱}x_{۲} + ۲x_{۲}\left[-x_{۱} - \varepsilon(x_{۱}^{۲} - ۱)x_{۲}\right] \\ &= -۲\varepsilon(x_{۱}^{۲} - ۱)x_{۲}^{۲} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |x_{۱}| < ۱$$

مثال: وندرپل (Van der pole)

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0, \quad \varepsilon<0$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_۱\\ x_۲\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}x\\ \int_۰^t x\,dt\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\dot{x}_۱&=-x_۲-\varepsilon\left(\frac{x_۱^۲}{۳}-۱\right)x_۱\\ \dot{x}_۲&=x_۱\end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(\mathbf{x})=x_۱^۲+x_۲^۲ \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x})=۲x_۱\dot{x}_۱+۲x_۲\dot{x}_۲=۲x_۱\left[-x_۲-\varepsilon\left(\frac{x_۱^۲}{۳}-۱\right)x_۱\right]+۲x_۱x_۲$$

$$=-۲\varepsilon x_۱^۲\left(\frac{x_۱^۲}{۳}-۱\right) \quad\Rightarrow\quad |x_۱|<\sqrt{۳}$$

محدوده ای که انتخاب دوم به ما می دهد بیشتر است!

- **قضیه۳**(ناپایداری سیستم)

سیستم در نزدیکی نقطه تعادل در مبدا *ناپایدار* است اگر تابع اسکالری وجود داشته باشد که:

$$V(x) \geq 0, \quad V(0) = 0,$$

$V(x)$ Continuous in S with continuous partial derivatives

$$\dot{V}(x) > 0, \qquad \dot{V}(0) = 0$$

مثال ۵-۱۱- سیستم غیر خطی زیر را با نقطه تعادل (۰,۰) در نظر بگیرید

$$\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^4)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)$$

اگر معادلات خطی سازی شده سیستم را حول نقطه تعادل (۰,۰) بدست آوریم، داریم

$$\dot{x}_1 = 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1$$

و لذا مقادیر ویژه سیستم خطی شده $\pm 2j$ ه از این نتیجه نمی‌توان استنباط درستی در رابطه با پایداری سیستم غیرخطی داشت. اک . تابع زیر به عنوان تابع لیاپانوف سیستم استفاده می‌کنیم

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

مشتق تابع لیاپانوف می‌دهد

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{V}}(\mathbf{x}) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\
&= x_1\left[2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^4)\right] + x_2\left[-2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^4)\right] \\
&= x_1^2(x_1^2 + 2x_2^4) + x_2^2(x_1^2 + x_2^4)
\end{aligned}$$

که تابعی مثبت است. لذا، از قضیه ۳ داریم که نقطه تعادل (۰,۰) ناپایدار است.

❖ تحلیل پایداری لیاپانوف سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان

سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

- ✓ شرایط لازم و کافی پایداری سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان بر اساس مقادیر ویژه و معادله مشخصه

- ✓ روش جبری لیاپانوف برای بررسی پایداری سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان

مثال ۵-۱۲- تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک منفی واحد عبارتست از

$$g(s)=\frac{k}{s(s+a)} \qquad (a>0)$$

با استفاده از متغیرهای فاز، نمایش فضای حالت سیستم حلقه بسته برای ورودی مرجع صفر، عبارتست از

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-k\,x_1-a\,x_2$$

تابع لیاپانوف معین مثبت زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{V(x)}=\frac{1}{2}\,p_1x_1^2+\frac{1}{2}\,p_2x_2^2=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

که در آن p_1 و p_2 مثبت ولی نامعین هستند. مشتق $\mathbf{V(x)}$ برابر است با

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})&=p_1x_1\dot{x}_1+p_2x_2\dot{x}_2\\&=p_1x_1x_2-p_2kx_2x_1-ap_2x_2x_2\\&=\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}0 & \dfrac{p_1-p_2\,k}{2}\\ \dfrac{p_1-p_2\,k}{2} & -ap_2\end{bmatrix}\mathbf{x}\\&=-\mathbf{x}^T\,\mathbf{N}\mathbf{x}\end{aligned}$$

تابع $\dot{V}(\mathbf{x})$ همواره نیمه معین منفی است، اگر N- نیمه معین منفی باشد. ماتریس N- نیمه معین منفی است، اگر کلیه کهادهای اصلی N مثبت یا صفر باشند. بنابراین

$$ap_۲ \geq ۰$$

$$\frac{-(p_۱-p_۲k)^۲}{۴} \geq ۰$$

اوّلین معادله همواره برآورده می‌گردد و برای دوّمین معادله داریم $p_۱-p_۲k=۰$ زیرا در غیر اینصورت منفی خواهد بود، لذا $p_۱=p_۲k$ از آنجائی که $p_۱>۰$ و $p_۲>۰$ لذا $k>۰$. بنابراین $\dot{V}(\mathbf{x})=-ap_۲x_۲^۲$ که نیمه معین منفی است. بسادگی نشان داده می‌شود که تمامی شرایط قضیه پایداری مجانبی فراگیر ۵-۸ برآورده می‌شود. لذا سیستم پایدار مجانبی فراگیر است.

- **حالت کلی:**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{and} \quad V(x) = x^T P x$$

ماتریس متقارن

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \\ &= x^T (A^T P + PA) x \\ &= -x^T Q x\end{aligned}$$

ماتریس متقارن

$$\boxed{A^T P + PA = -Q}$$

<u>معادله لیاپانوف</u>

- **مراحل ارزیابی پایداری به روش دوم لیاپانوف**

  - ✓ گام ۱: انتخاب ماتریس Q PD یا PSD:
  - ✓ گام ۲: حل معادله لیاپانوف

    $$A^T P + PA = -Q$$

  - ✓ گام ۳: تعیین علامت ماتریس: P
  - ✓ گام ۴: تعیین پایداری از علامت ماتریس

  - ماتریس گام ۱ PD یا PSD ؟

- **قضیه ۴**

سیستم داده شده با

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر

$$Q \quad \text{PD Matrix} \quad \Rightarrow \quad P \quad \text{PD Matrix}$$

مثال ۵-۱۳- پایداری حالت تعادل سیستم خطی زیر را بررسی می‌کنیم

$$\dot{x}_1=-x_1-2x_2$$

$$\dot{x}_2=x_1-4x_2$$

مشاهده می‌شود که نقطه تعادل این سیستم مبداء یا $\mathbf{x}=0$ است. نخست ماتریس Q را برابر با I قرار داده و معادله زیر را برای P حل می‌کنیم

$$A^TP+PA=-Q$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات زیر را برای عناصر ماتریس P بدست می‌آوریم

$$-2p_{11}+2p_{12}=-1$$

$$-2p_{11}-5p_{12}+p_{22}=0$$

$$-4p_{12}-8p_{22}=-1$$

و با حل این دستگاه داریم

$$p_{11}=\frac{23}{60} \qquad p_{12}=-\frac{7}{60} \qquad p_{22}=\frac{11}{60}$$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{۲۳}{۶۰} & -\frac{۷}{۶۰} \\ -\frac{۷}{۶۰} & \frac{۱۱}{۶۰} \end{bmatrix}$$

بسادگی، مشاهده می‌شود که $\mathbf{P}$ مثبت معین است و به این ترتیب بنابر قضیه ۵-۱۰ سیستم سیستم پایدار مجانبی است.

مثال ۵-۱۴- سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۰ & -۳k \\ ۲k & -۵k \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

نقطه تعادل سیستم، (۰ ، ۰) است. نخست ماتریس Q را برابر I قرار داده و معادله لیاپانوف را حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۲k \\ -۳k & -۵k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۳k \\ ۲k & -۵k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$۲kp_{۱۲}+۲kp_{۱۲}=-۱$$

$$۲kp_{۲۲}-۳kp_{۱۱}-۵kp_{۱۲}=۰$$

$$-۳kp_{۱۲}-۵kp_{۲۲}-۳kp_{۱۲}-۵kp_{۲۲}=-۱$$

سه معادله خطی در سه مجهول داریم که از حل آن بدست می‌آوریم

$$p_{11}=\frac{7}{12k} \qquad p_{12}=-\frac{1}{4k} \qquad p_{22}=\frac{1}{4k}$$

و لذا علامت ماتریس **P** با $\frac{7}{12k}$ و

$$|\mathbf{P}| = \begin{vmatrix} \frac{7}{12k} & -\frac{1}{4k} \\ -\frac{1}{4k} & \frac{1}{4k} \end{vmatrix} = \frac{1}{12k^2}$$

تعیین می‌گردد، که برای تمامی $k>0$ معین مثبت است و بنابر قضیه ۴ سیستم برای $k>0$ پایدار مجانبی است.