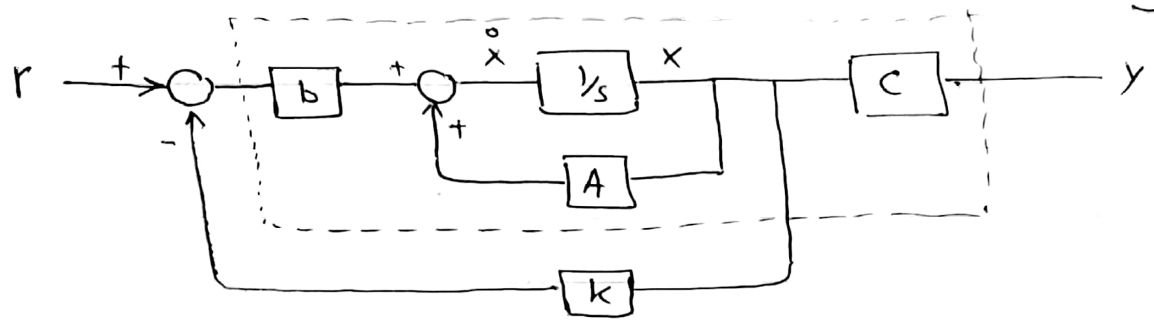
بسمه تعالی

* مشاهده کلیدی آقای ریسانن (Rissanen) بر اساس دستاوردهای کالمن در فضای حالت:

- تمامی اطلاعات حیاتی سیستم در بردار حالت موجود است و هر آنچه از خروجی و مشتق‌هایش بدست می‌آید در متغیرهای حالت نیز یافت می‌شود.
- هر آنچه با فیدبک حالت نمی‌توان انجام داد با روشهای دیگر نیز نمی‌توان انجام داد.

* نمایی از فیدبک حالت



اگر معادله مشخصه سیستم $a(s)$ باشد:

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

آنگاه با تعریف بردار بهره فیدبک حالت و کنترل کننده حالت داریم:

$$u(t) = \underbrace{-k\,x(t)}_{\text{فیدبک حالت}} + \underbrace{r(t)}_{\text{ورودی سیستم}} \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{(A-bk)}_{A_{new}}x + b\underbrace{r(t)}_{\text{ورودی}}$$

در نتیجه معادله مشخصه جدید بصورت زیر بدست می‌آید:

$$a_k(s) = \det(sI-(A-bk))$$

* در نتیجه می‌توان با انتخاب $\vec{k}$ مناسب، قطبهای سیستم را جابجا کرد.

* برای این کار، روشهای مختلفی وجود دارد که در این بخش چند روش معرفی می‌شود.

۱- روش بس و گورا (Bass and Gura):

$$a_k = \det(sI-(A-bk))$$
$$= \det\{(sI-A)[I+(sI-A)^{-1}bk]\} = \det(sI-A)\det[I+(sI-A)^{-1}bk]$$
$$= a(s)[1+k(sI-A)^{-1}b] \quad (\dagger)$$

از جبر خطی طبق قضیه‌ای می‌دانیم

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

$$\begin{cases} A \text{ is } m\times n \\ B \text{ is } n\times m \end{cases}$$

رابطه ۱-۸-۴ کتاب خاکی صدیق

در رابطه (†) کافیست بجای A ، $k_{n\times 1}$ و بجای بقیه B در معادله بالا را در نظر بگیرید تا اثبات کامل شود.

* لذا داریم:

$$a_k(s) - a(s) = a(s)\, k\,(sI-A)^{-1} b \quad (\mathrm{I})$$

* از طرفی می‌توان نشان داد:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{a(s)}\left[s^{n-1}I + s^{n-2}(A + a_{n-1}I) + s^{n-3}(A^2 + a_{n-1}A + a_{n-2}I) + \cdots\right] \quad (\ )$$

جهت اثبات رابطه بالا کافیست طرفین را در $(sI-A)$ ضرب نمایید.

* با قرار دادن رابطه (II) در (I) داریم:

$$\alpha_{n-1} - a_{n-1} = kb$$

$$\alpha_{n-2} - a_{n-2} = kAb + a_{n-1}kb$$

$$\alpha_{n-3} - a_{n-3} = kA^2b + a_{n-1}kAb + a_{n-2}kb$$

$$\vdots$$

از نظم مشاهده شده در رابطه بالا و معرفی ماتریس Ψ بصورت زیر و استفاده از ماتریس کنترل پذیری، داریم:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

* دقت کنید Ψ ناویژه است:

$$\alpha - a = k\,\Phi_c \Psi \Rightarrow \boxed{k = (\alpha - a)\Psi^{-1}\Phi_c^{-1}}$$

* به روش بالا برای بدست آوردن k ، روش بس گیورا در تعیین فیدبک حالت گفته می‌شود.
* همانطور که دیده می‌شود بدست آوردن k به وجود Φ_c^{-1} بستگی دارد.
در نتیجه سیستم باید کنترل پذیر باشد.

* درصورتیکه فاصله αها از a زیاد باشد یا سیستم کنترل پذیر ضعیف باشد آنگاه k بزرگ می‌شود که خوب نیست!

۲- روش آکرمن :

در این روش بردار فیدبک حالت بصورت زیر تعیین می‌شود :

$$k = \underbrace{[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]\, \Phi_c^{-1}}_{\text{آخرین ردیف } \Phi_c^{-1}} \alpha(A)$$

که در آن $\alpha(s)$ چندجمله‌ای مشخصه مطلوب است که در آن بجای s ، A قرار گرفته است (یادآوری از کیلی همیلتون)

* گاهی اوقات بجای $[0 \ \cdots \ 0 \ 1]\,\Phi_c^{-1}$ ، q_n^T گذاشته می‌شود که یعنی آخرین ردیف Φ_c^{-1} .

* دقت نمائید در این روش نسبت به روش بس گیورا ، نیازی به محاسبه چندجمله مشخصه سیستم اصلی $(a(s))$ نیست .
* اما از لحاظ بار محاسباتی کامپیوتری ، $\alpha(A)$ زمانبر است .

* برای نشان دادن صحت معادله آکرمن ، برای $n=3$ نشان می‌دهیم و برای بقیه nها بالاستقرا ثابت می‌شود :

$$I = I$$
$$\bar{A} = A - bk$$
$$\bar{A}^2 = (A - bk)^2 = A^2 - Abk - bk\bar{A}$$
$$\bar{A}^3 = (A - bk)^3 = A^3 - A^2bk - Abk\bar{A} - bk\bar{A}^2$$

* با ضرب کردن سه معادله بالا به ترتیب در α_0 ، α_1 ، α_2 و جمع آنها با هم داریم :

$$\begin{aligned}
\bar{A}^3 + \alpha_2\bar{A}^2 + \alpha_1\bar{A} + \alpha_0 I &= \alpha_0 I + \alpha_1(A - bk) + \alpha_2(A^2 - Abk - bk\bar{A}) \\
&\quad + A^3 - A^2bk - Abk\bar{A} - bk\bar{A}^2 \\
&= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + A^3 - \alpha_1 bk \\
&\quad - \alpha_2 Abk - \alpha_2 bk\bar{A} - A^2bk - Abk\bar{A} - bk\bar{A}^2
\end{aligned}$$

* با بکارگیری قضیه کیلی همیلتون برای $\bar{A}$ داریم $\alpha(\bar{A}) = 0$ در نتیجه :

$$\alpha(A) = b(\alpha_1 k + \alpha_2 k\bar{A} + k\bar{A}^2) + Ab(\alpha_2 k + k\bar{A}) + A^2bk$$
$$= [b \ \ Ab \ \ A^2b]\begin{bmatrix} \alpha_1 k + \alpha_2 k\bar{A} + k\bar{A}^2 \\ \alpha_2 k + k\bar{A} \\ k \end{bmatrix}$$

در نتیجه با ضرب طرفین در Φ_c^{-1} داریم :

$$\Phi_c^{-1}\alpha(A) = \begin{bmatrix} \alpha_1 k + \cdots \\ \alpha_2 k + \cdots \\ k \end{bmatrix}$$

با ضرب طرفین در $[0 \; \cdots \; 1]$ فقط سطر آخر دو طرف معادله محاسبه می‌شود :

$$[0 \;\; \cdots \;\; 1]\,\Phi_c^{-1}\alpha(A) = k$$

در نتیجه اثبات کامل می‌شود .

* دقت کنید که Φ_c^{-1} باید موجود باشد یا به عبارت دیگر سیستم باید کنترل‌پذیر باشد .

۳- روش تحقق کانونیکال کنترل کننده :

این روش برای تحقق کانونیکال کنترل کننده بیان می‌شود . اگر تحقق سیستم گونه دیگری بود از طریق تبدیل همانندی باید به سیستم کانونیکال کنترل کننده تبدیل شود و طراحی برای آن انجام شود .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{و} \quad y = [b_0 \; \cdots \; b_{n-2} \; b_{n-1}]\, X$$

* با تعریف فیدبک حالت بصورت $u = -kx + r = [-k_0 \; \cdots \; -k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ داریم :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [-k_0 \; \cdots \; -k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + br$$

$$= \quad '' \qquad '' \quad + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ -k_0 & -k_1 & \cdots & -k_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + br$$

* در نتیجه داریم :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0-k_0 & -a_1-k_1 & \cdots & -a_{n-1}-k_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + br$$

* درنتیجه از استفاده معکوس از تحقق کنترل کننده داریم:

$$a_k = s^n + (a_{n-1}+k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a_1+k_1)s^1 + (a_0+k_0)$$

فرض کنید چندجمله‌ای مطلوب $\alpha(s)$ به صورت زیر باشد:

$$\alpha = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s^1 + \alpha_0$$

از تساوی دو رابطه بالا داریم:

$$k_0 = -a_0+\alpha_0 \, , \quad k_1 = -a_1+\alpha_1 \, , \quad \dots \, , \quad k_{n-1} = -a_{n-1} - \alpha_{n-1}$$

* درصورتیکه تحقق مورد نظر، کانونیکال کنترل کننده نباشد، چون Φ فول رنک است، طبق قضیه بیان شده در فصل قبلی حتماً یک تبدیل همانندی وجود دارد که آن را به تحقق کانونیکال کنترل کننده می‌برد. درنتیجه داریم:

$$A_c = T^{-1}AT \, , \quad b_c = T^{-1}b$$

مربوط به کانونیکال کنترل کننده: b_c, A_c

$$\begin{aligned} a_k &= \det(sI - A + bk) = \det(sI - TA_cT^{-1} + Tb_ck) \\ &= \det(sI - A_c + b_c \underbrace{kT}_{k_c}) \\ &= \det(sI - A_c + b_ck_c) \end{aligned}$$

درنتیجه کافیست k_c برای جابجایی قطب (A_c, b_c) از رابطه زیر استفاده شود:

$$\boxed{k = k_c T^{-1}}$$

* با توجه به قضیه فصل قبلی:

$$T = \Phi_c \, \Phi_{cc}^{-1}$$

ماتریس کنترل پذیری سیستم مورد نظر (Φ_c)

ماتریس کنترل پذیری تحقق کانونیکال کنترل کننده (Φ_{cc})

درنتیجه داریم:

$$\boxed{k = k_c \, \Phi_{cc} \, \Phi_c^{-1}}$$

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

معادله مشخصه عبارت است از:

$$a(s) = |sI - A| = s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2 (s+2)$$

لذا ناپایدار است. فرض کنید معادله مشخصه مطلوب بصورت زیر باشد:

$$\alpha(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a = [0 \quad -3 \quad 2] \leftarrow \text{سیستم اصلی} \\ \alpha = [6 \quad 11 \quad 6] \leftarrow \text{سیستم مطلوب} \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\Phi_c = [b \quad Ab \quad A^2 b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

در نتیجه جایابی کامل قطب امکان پذیر است.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>روش بس و گیورا</u>: طبق فرمول برای Ψ داریم: $\leftarrow$

در نتیجه فرمول می‌دهد:

$$k = [6 \quad 14 \quad 4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & +4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -10 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [5 \quad 6 \quad -5] \Rightarrow a_k(s) = \det(sI - A + bk) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

که با معادله مشخصه مطلوب $\alpha(s)$ یکسان است.

<u>روش آکرمن</u>:

$$q_3^T = [0 \quad 0 \quad 1] \Phi_c^{-1} = [0.0278 \quad 0.1111 \quad -0.1389]$$

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} 24 & 48 & -24 \\ -26 & -28 & 26 \\ -52 & -56 & 52 \end{bmatrix} \Rightarrow k = q_3^T \alpha(A) = [5 \quad 6 \quad -5]$$

<u>تحقق کانونیکال کنترل کننده</u>

از معادله مشخصه اصلی $a(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \Phi_{cc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T = \Phi_c \Phi_{cc}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -13 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_c = [-2+6 \quad 3+11 \quad 0+6] = [4 \quad 14 \quad 6] \Rightarrow k = k_c \Phi_{cc} \Phi_c^{-1}$$

$$= [5 \quad 6 \quad -$$

تأثیر فیدبک حالت بر صفرهای سیستم :

فرض کنید تابع تبدیل سیستم اصلی $g(s)$ باشد، آنگاه :

$$g(s) = c(sI-A)^{-1}b = \frac{c\,Adj(sI-A)b}{|sI-A|}$$

* همانطور که دیده می‌شود، صفرهای سیستم از طریق چندجمله‌ای $c\,Adj(sI-A)\,b$ بدست می‌آید.

* از طرفی در جبر خطی داریم: $\det\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix} = \det(A)\det[B-CA^{-1}D]$.

* لذا داریم:

$$\begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} = |sI-A|\,|c(sI-A)^{-1}b| = |c\,Adj(sI-A)\,b|$$

* بنابراین می‌توانیم بجای صفرهای سیستم از رابطه $\begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & 0 \end{vmatrix}$ استفاده نماییم.

* حال صفرهای سیستم حلقه بسته را حساب می‌نماییم. توجه نمایید که فقط بجای A در بالا باید بگذاریم: $A-bk$.

$$\text{صفرهای حلقه بسته با فیدبک حالت} : \begin{vmatrix} sI-A+bk & b \\ -c & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{bmatrix} sI-A & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} sI-A & b \\ -c & 0 \end{vmatrix}$$

* همانطور که دیده می‌شود، صفرهای حلقه بسته تغییری نمی‌کند.

تأثیر فیدبک حالت بر کنترل پذیری و رویت پذیری :

$$\text{سیستم اصلی} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \Phi_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

$$\text{سیستم با فیدبک حالت}\ u=-kx+r : \begin{cases} \dot{x} = (A-bk)x + Br \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \Phi_{c_k} = [B \quad (A-Bk)B \quad \cdots \quad (A-Bk)^{n-1}B]$$

for $n=4$

$$\Phi_{c_k} = \Phi_c \begin{bmatrix} 1 & -kB & -k(A-Bk)B & -k(A-Bk)^2B \\ 0 & 1 & -kB & -k(A-Bk)B \\ 0 & 0 & 1 & -kB \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi_{c_k} \text{ is fullrank}$$

* در نتیجه سیستم حلقه بسته کنترل پذیر است اگر و فقط اگر سیستم حلقه باز کنترل پذیر باشد.

رویت پذیری و سیستم می نیمال را در نظر بگیرید. در این سیستم (A,B) کنترل پذیر و (C,A) رویت پذیر است. در قسمت قبلی نشان داده شد که $(A-BK, B)$ کنترل پذیر می ماند. اما ممکن است قطبهای سیستم در اثر جابجایی با صفرهای سیستم (که جابجا نمی شوند طبق نقطه صفر قبلی!) حذف شوند در حذف صفر و قطب موجب رویت ناپذیری شود. (اما کنترل پذیری سیستم حفظ شده است).

* در صورتیکه حذف صفر و قطب در سیستم جدید نداشته باشیم رویت پذیری تضمین شده است.

مثال:
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = [1 \quad 2]\, x \implies \begin{cases} \Phi_c \\ \Phi_o \end{cases} \text{are full rank}$$

فرض $u = [1/2 \quad 1/2]\, x(t) + r(t)$
$$\implies \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y = [1 \quad 2]\, x \end{cases}$$

سیستم حلقه بسته کنترل پذیر است اما رویت ناپذیر است. چون صفر سیستم در $s=-1/2$ با قطب جدید در $-1/2$ حذف شده.

فیدبک در سیستم های MIMO: در اینگونه سیستمها k یکتا بدست نمی آید.

مثال:
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

فرض کنید معادله مشخصه مطلوب s^2+2s+3 باشد.

$$u = -kx \implies \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -k_1 & 1-k_2 \\ -k_3 & -k_4 \end{bmatrix} x$$

$$\implies \begin{vmatrix} \lambda+k_1 & k_2-1 \\ k_3 & \lambda+k_4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_1+k_4)\lambda \quad k_3(k_2-1) + k_1k_4 = \lambda^2+2\lambda+3$$

توجه کنید که به ازای k های مختلف می توان رابطه بالا را ارضا نمود:

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \ldots$$

* علت این اتفاق آن است که در سیستم چند ورودی، درجه آزادی وجود دارد.

* از این واقعیت جهت بهینه سازی عملکرد استفاده می شود.

طراحی پیش جبران ساز استاتیکی در مسیر ورودی مرجع (مسأله رگولاتوری)

* فرض کنید در سیستم $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ ورودی فیدبکی گونه‌ای طراحی شود که ضمن پایداری حلقه‌بسته برای ورودی مرجع $r = cte$ رابطه ردیابی بصورت $\lim_{t\to\infty} y(t) = r$ برقرار باشد. به عبارت دیگر مسأله رگولاتوری باشد.

* به عبارت دیگر سیستم حلقه‌بسته پایدار داریم:

$$\begin{cases} 0 = Ax(\infty) + Bu(\infty) \\ r = y(\infty) = Cx(\infty) \end{cases}$$

با تفاضل رابطه بالا از رابطه فضای حالت داریم:

$$\dot{x}(t) = A(x(t) - x(\infty)) + B[u(t) - u(\infty)]$$
$$y(t) - r = C[x(t) - x(\infty)]$$

با تعریف $\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(\infty) \\ u'(t) = u(t) - u(\infty) \\ y'(t) = y(t) - \underbrace{y(\infty)}_{r} \end{cases}$ می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = Ax'(t) + Bu'(t) \\ y'(t) = Cx'(t) \end{cases}$$

* اکنون فیدبک حالت زیر را چنان طراحی می‌کنیم که سیستم حلقه‌بسته پایدار باشد:

$$u'(t) = -Kx'(t) \implies \dot{x}'(t) = (A - BK)x'(t)$$

بنابراین:

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$$

و یا می‌توان گفت: $\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} [y(t) - r] = 0$ که نشان دهنده ردیابی سیستم است.

$$u(t) - u(\infty) = -K[x(t) - x(\infty)] \to u(t) = -Kx(t) + \underbrace{u(\infty) + Kx(\infty)}_{u_a}$$

* توجه نمایید که u_a مقدار ثابتی است. کافیست رابطه بالا را در سیستم حلقه‌بسته جایگزین نماییم:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bu_a \qquad (+)$$

نتیجه مهم!

در حالت تعادل داریم :

$$0 = (A-Bk)x(\infty) + Bu_a \Rightarrow x(\infty) = -(A-Bk)^{-1}Bu_a \Rightarrow r = -C(A-Bk)^{-1}Bu_a$$

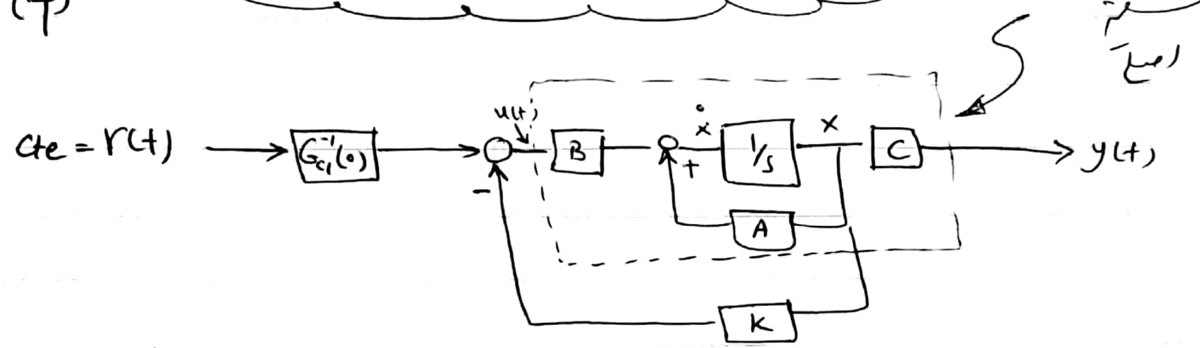
به عبارت دیگر :

$$u_a = \left[-C(A-Bk)^{-1}B\right]^{-1} r \qquad (I)$$

* همچنین از قبل می‌دانیم که تابع تبدیل سیستم به صورت $C(SI-A_{new})^{-1}B = G_{cl}(s)$ است که در $S=0$ داریم :

$$G_{cl}(0) = C(A-Bk)^{-1}B \quad (II) \Leftarrow$$ مقدار بهره تابع تبدیل

$$\begin{matrix}(I)\\(II)\\(+)\end{matrix} \Rightarrow \boxed{u(t) = -kx(t) + \left[G_{cl}(0)\right]^{-1} r}$$



* توجه نمایید این سیستم برای سیستم با ورودی و خروجی با تعداد یکسان است به عبارت دیگر $G(s)$ باید مربعی باشد.

* شرط لازم و کافی برای وجود $G_{cl}^{-1}(0)$ آن است که سیستم حلقه باز صفری در مبدأ نداشته باشد.

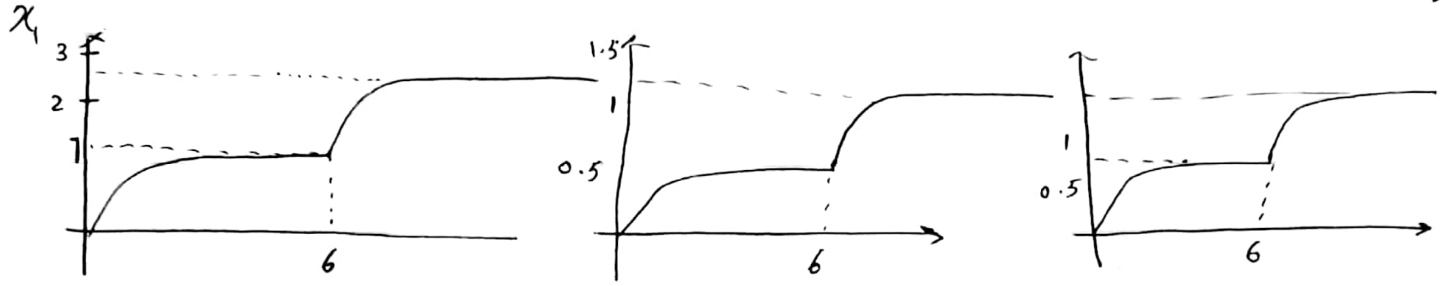
* در سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی در صورتیکه تعداد خروجی کمتر از ورودی باشد می‌توان از ایده معکوس مجازی استفاده نمود.

تمرین :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1.25 & 0.741 \\ 1.11 & -2.36 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1.25]\, x(t) \end{cases}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \{-0.74, -2.87\} \Rightarrow$$ با فرض $$\begin{cases}\lambda_{1_d} = -2 \\ \lambda_{2_d} = -3\end{cases} \Rightarrow K = [2.083, 0.8]$$

$$u(t) = -kx(t) + 6.48\, r \Leftarrow$$ مقدار حالت ماندگار تابع تبدیل به صورت $g(0) = 0.154$



طراحی فیدبک حالت با کنترل انتگرال گیر (مسأله رگولاتوری)

$$\begin{cases} \dot{x} = A x(t) + B u(t) \\ y = C x(t) \end{cases}$$

در صورت اضافه کردن انتگرال گیر یعنی یک حالت به سیستم اضافه نموده ایم :

$$\dot{q} = r - y(t) = r - C x$$

سیستم افزوده

Augmented $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای طراحی فیدبک حالت در سیستم جدید، کافیست ماتریس کنترل پذیری بصورت :

$$\bar{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^nB \\ 0 & -CB & -CAB & \cdots & -CA^{n-1}B \end{bmatrix} =$$

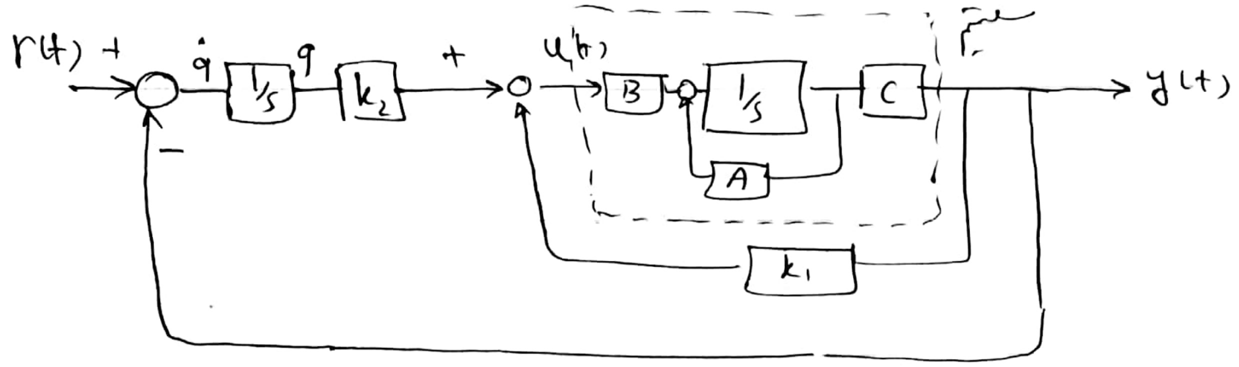
$$= \left[\begin{array}{c|c} B & A\Phi_c \\ \hline 0 & -C\Phi_c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline 0 & -C \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \Phi_c \end{array}\right]}_{\text{رتبه کامل}}$$

* در نتیجه سیستم بالا رتبه کامل است اگر و فقط اگر $\left[\begin{array}{c|c} B & A \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$ رتبه کامل باشد.

$$u(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk_1 & Bk_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

+ با انتخاب مناسب ماتریس های بهره فیدبک k_1 ، k_2 ، سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود و لذا در حالت ماندگار:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{q}(t) = \lim_{t\to\infty} (r - y(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = r = cte$$



+ برای مشخص شدن نقطه قوت این روش در کنترل رگولاتوری انتگرالی نسبت به روش قبلی، فرض کنید در سیستم اغتشاش داریم: $(d = cte)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk_1 & Bk_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذا داریم: $\lim_{t\to\infty} \dot{q} = \lim_{t\to\infty} (r - y(t)) = 0$

+ در نتیجه سیستم در حضور اغتشاش ثابت d ، ورودی مرجع r را تعقیب می نماید.

+ همانطور که دیده می شود با آوردن انتگرال گیر، سیستم حلقه باز نوع یک می شود.