بسمه تعالی

بررسی پایداری:

* سیستم زیر را در نظر بگیرید: $\dot{x}(t) = A\,x(t) \quad (+)$

* تعداد زیادی ادبیات در مورد پایداری وجود دارد. اما در مورد سیستم‌های خطی همه آنها یکسان تعبیر خواهد شد.

* تعریف: یک معادله دیفرانسیلی پایدار است، درصورتیکه $x(t)$ شرط $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ را ارضا نماید.

* جواب یکتای معادله $(+)$ را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = A\,x(t) \longrightarrow x(t) = e^{At} x_0$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا داریم:

$$\dot{x}(t) = A\underbrace{e^{At}x_0}_{x(t)} = A\,x(t)$$

* سؤال اینجاست که آیا سیستم بالا $(\dot{x} = A\,x(t))$ پایدار است:

در پاسخ باید گفت، فرض کنید A قطری شونده است، بنابراین $A = T\Lambda T^{-1}$.

$$A^k = T\Lambda T^{-1}\, T\Lambda T^{-1} \cdots T\Lambda T^{-1} = T\Lambda^k T^{-1}$$

بنابراین:

$$e^{At} = TT^{-1} + (T\Lambda T^{-1})t + \tfrac{1}{2}(T\Lambda^2 T^{-1})t^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}(T\Lambda^k T^{-1})t^k + \cdots$$

$$= T\left(I + \Lambda t + \tfrac{1}{2}(\Lambda t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}(\Lambda t)^k + \cdots\right)T^{-1} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

* برای مرور این مطلب که $e^{\Lambda t}$ همگرا می‌شود:

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \tfrac{1}{2}(\Lambda t)^2 + \cdots = \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 t + \frac{1}{2}\lambda_1^2 t^2 + \cdots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2}\lambda_n^2 t^2 + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

همانطور که دیده می‌شود درصورتیکه همه λ_iها منفی باشد، آنگاه $e^{\Lambda t}$ به صفر همگرا می‌شود.

$$\lim_{t\to\infty} \exp(\lambda_i t) \to 0 \quad \text{iff} \quad Re(\lambda_i(A)) < 0 \quad \forall i$$

* اما متأسفانه همه ماتریس‌ها قطری‌پذیر نیستند. اما همه آنها را می‌توان با بلوک جردن قطری‌پذیر نمود.

$$A^k = TJ^kT^{-1} \quad \text{و} \quad e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

* فرض کنید بلوک جردن بصورت $J_i = \lambda_i I + N$ باشد.

* براحتی می توان نوشت $e^{\lambda_i I + N} = e^{\lambda_i I} e^{N}$ در نتیجه :

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t + Nt} = e^{\lambda_i t} e^{Nt}$$

* براحتی می توان نشان داد : $N^d = 0$ بنابراین رابطه زیر محدود است.

$$e^{Nt} = It + Nt + \tfrac{1}{2}N^2t^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}t^{k-1}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \left[I + N + \tfrac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} t^{k-1} \right]$$

- همانطور که دیده می شود همه ترم ها به فرم $t^i e^{\lambda_i t}$ برای $i \leq k$:

$$\lim_{t \to \infty} t^i e^{\lambda_i t} = 0 \quad iff \quad Re(\lambda_i) < 0$$

که در صورت تعمیم به حالت عمومی هم همین نتیجه حاصل خواهد شد.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^i}{e^{\lambda_i t}} = \lim \frac{t^i}{1 + \lambda_i t + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2} + \frac{\lambda_i^3}{3!}t^3 + \frac{\lambda_i^4}{4!}t^4 + \cdots + \frac{\lambda_i^i}{i!}t^i + \cdots}$$

همانطور که دیده می شود رابطه برابر صفر است.

* تعریف : ماتریس A ، هورویتز است ، اگر $Re(\lambda_i) < 0$ برای همه λ_i. (Hurwitz)

* نکته : قانون لیبنیز Leibniz .

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x))\cdot\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

* سیستم با ورودی $u(t)$ را در نظر بگیرید :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad x_0 = 0$$

$$\text{پاسخ} = x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\,ds \quad (+)$$

مشتق گیری از $(+)$ نتیجه می دهد :

$$\dot{x} = e^{A(t-t)}Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-s)}Bu(s)ds = Bu(t) + A\underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds}_{x(t)} = Bu(t)+Ax(t)$$

* کنترل پذیری : کنترل پذیری بررسی می‌نماید که آیا حالت سیستم با استفاده از $u(t)$ مناسب می‌تواند کنترل شود.

* در اینجا اهمیتی نمی‌دهیم که آیا $u(t)$ چگونه انتخاب می‌شود.

تعریف : برای (A,B) ، حالت x_f دسترسی‌پذیر است (Reachable) در صورتیکه برای هر T_f ثابت ، $u(t)$ وجود داشته باشد که :

$$x_f = \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)}Bu(s)ds$$

تعریف : سیستم (A,B) دسترسی‌پذیر است (Reachable) در صورتیکه برای هر نقطه $x_f \in R^n$ دسترسی‌پذیر باشد.

* برای سیستم بالا ، برای زمان ثابت t ، مجموعه نقاط قابل دسترس بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$R_t := \left\{ x : x = \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \text{ for some function } u \right\}$$

- نگاشت Γ خطی است :

اثبات :

$$\Gamma : u \to x$$

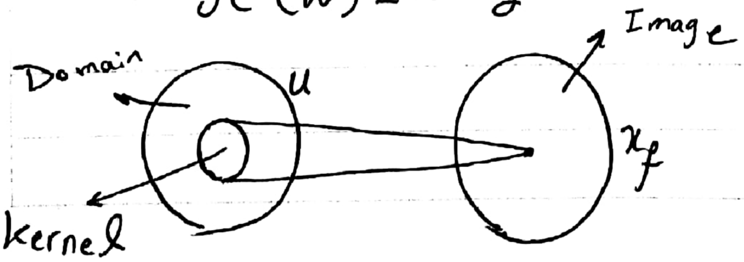
$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \to \Gamma u = \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)}B(\alpha u_1 + \beta u_2)ds$$

$$= \alpha \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)}Bu_1(s)ds + \beta \int_0^{T_f} e^{A(T_f-s)}Bu_2(s)ds = \alpha\Gamma u_1 + \beta\Gamma u_2$$

در نتیجه می‌توان دید که $R_t = \mathrm{Image}(\Gamma)$.

یادآوری :

$$\mathrm{Image}(W) = W.$$



تعریف: برای یک سیستم (A,B)، ماتریس کنترل پذیری بصورت $C(A,B) \triangleq [B \;\; AB \;\; A^2B \cdots A^{n-1}B]$

تعریف: برای (A,B)، زیرفضای (subspace) کنترل پذیری بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{AB} = \text{Image}\,[B \;\; AB \;\; A^2B \cdots A^{n-1}B]$$

تعریف: سیستم (A,B) کنترل پذیر است اگر $C_{AB} = \text{Im}\, C(A,B) = R^n$

* اما چگونه می‌توان رابطه بین R_t و C_{AB} ایجاد نمود؟!

تعریف: گرامیان کنترل پذیری محدود در زمان برای زوج (A,B) بصورت زیر:

$$W_t := \int_0^t e^{As} BB^T e^{A^T s}\, ds$$

که در آن دیده می‌شود W_t ماتریس مثبت معین نیمه (positive semi-def.).

* قضیه زیر رابطه‌ای بین تعاریف بالا برقرار می‌نماید:

قضیه: $R_t = C_{AB} = \text{Image}(W_t)$.

یا به عبارت دیگر $\text{Image}(W_t) = \text{Image}(\Gamma_t) = \text{Image}\, C(A,B)$.

* نتیجه بسیار مهم آنست که R_t به زمان بستگی ندارد.
* $C(A,B)$ هیچ چیزی نمی‌گوید که چگونه $u(t)$ بدست آمده است.
* $u(t)$ را می‌توان از طریق W_t بدست آورد.

اثبات:

نشان می‌دهیم $R_t \subset C_{AB}$ برای هر $t \geq 0$:

Using Cayley-Hamilton:

$$\begin{cases} e^{At} = \left[I + At + \cdots + \dfrac{A^m t^m}{m!} + \cdots\right] \\ A^n = -a_{n-1}A^{n-1} + \cdots - a_0 I \end{cases} \longrightarrow e^{At} = \left[I\phi_0(t) + A_1\phi_1(t) + \cdots + A^{n-1}\phi_{n-1}(t)\right]$$

چون ϕ اسکالر است:

$$\Gamma_t u = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s)\, ds = B\int_0^t \phi_0(t-s) u(s) ds + \dots + A^{n-1} B \int_0^t \phi_{n-1}(t-s) u(s)\, ds$$

درصورتیکه تعریف کنیم: $y_i = \int_0^t \phi_i(t-s) u(s)\, ds$.

$$\Gamma_t u = B y_0 + A^1 B y_1 + \dots + A^{n-1} B y_{n-1} = [B\ A^1B \dots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = C(A,B) \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

بنابراین $\Gamma_t u \in Im[B\ AB \dots A^{n-1}B]$. لذا اثبات می‌شود: (I) $R_t \subset C_{AB}$

یادآوری: متمم عمودی برای زیرفضا که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S \subset X, \quad S^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = x^T y = 0 \quad \forall y \in S\}$$

For any $x \in \mathbb{R}^n$: $x = x_s + x_{s\perp}$ $\forall x_s \in S$ & $x_{s\perp} \in S^{\perp}$

که در آن x_s و $x_{s\perp}$ یکتا است.

تعریف: اپراتور Projection بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_s = Px$$

if $x_s \in S$ & $x - x_s \in S^{\perp}$

قضیه (II): برای هر $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ داریم: $[Im(M)]^{\perp} = \ker[M^T]$.

اثبات:

نشان می‌دهیم: $Im(M)^{\perp} \subset \ker[M^T]$ & $\ker[M^T] \subset [Im(M)]^{\perp}$

Suppose $x \in [Im(M)]^{\perp}$.

if $x^T y = 0$ for any $y \in Im[M] \xrightarrow{y = Mz} x^T M z = 0 \quad \forall z$

$\longrightarrow z^T M^T x = 0 \quad \forall z . \longrightarrow$ choose $z = M^T x \longrightarrow x^T M M^T x = \|M^T x\|^2 = 0$

$\longrightarrow x \in \ker[M^T] \longrightarrow [Im(M)]^{\perp} \subset \ker[M^T]$

حال نشان می‌دهیم $\ker[M^T] \subset [Im(M)]^{\perp}$.

فرض کنید $x \in \ker[M^T] \longrightarrow M^T x = 0 \longrightarrow y^T M^T x = x^T \underbrace{M y}_{z \in Im(M)}^T = x^T z = 0$

For any $z \in Im(M) \longrightarrow x \in [Im(M)]^{\perp}$

درنتیجه اثبات کامل می‌شود. $\square$.

* قبلاً نشان داده شده بود که $R_t \subset C_{AB}$.

\- حال نشان خواهیم داد: $Im(W_t) \subset R_t$

قضیه: $Im(W_t) \subset R_t$.

اثبات: $x \in Im(W_t)$ for some $t > 0 \longrightarrow x = W_t z$ for some z.

let $u(s) = B^T e^{A^T(t-s)} z \longrightarrow \Gamma_t u = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds =$

$$= \int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} z \, ds$$

$$= W_t z = x \rightarrow x \in Im(\Gamma_t) = R_t$$

$\square$.

قضیه (III): $Im(C(A,B)) \subset Im(W_t)$.

برهان خلف / فرض $x \notin Im(W_t)$ & $x \in [Im(W_t)]^{\perp}$

با توجه به قضیه در قسمت یادآوری:

$x \in \ker(W_t^T) \rightarrow W_t^T x = 0$

$$x^T W_t^T x = \int_0^t x^T e^{A(t-s)} \underbrace{B B^T e^{A^T(t-s)} x}_{u(s)} ds = \int_0^t u^T(s) u(s) ds = 0$$

که در آن $u(s) = B^T e^{A^T(t-s)} x$، این نتیجه می‌دهد

$u(s) = B^T e^{A^T(t-s)} x = 0$ for all $s \in [0,t]$

for all $s \in [0,t]$:

$$\frac{d^k}{ds^k} B^T e^{A^T s} x = B^T (A^T)^k e^{A^T s} x = 0$$

$$@\, s=0 \rightarrow B^T (A^T)^k x = 0 \quad \forall k \rightarrow x^T [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] = 0$$

$$\rightarrow C(A,B)^T x = 0 \rightarrow x \in \ker C(A,B)^T \rightarrow x \in \operatorname{Im}\left(C(A,B)\right)^{\perp}$$

طبق قضیه قبل
در صفحات یادآوری

$$\rightarrow x \notin \operatorname{Im}\left(C(A,B)\right)$$

در نتیجه فرض کامل می‌شود. □

$R_t = \operatorname{Im}(W_t) = \operatorname{Im}(C(A,B))$ از روابط و قضایای (I)، (II)، III نتیجه می‌گیریم