قضیه = اگر همه آیگن ولیوهای A دارای مقدار حقیقی منفی باشد، معادله زیر یک جواب یکتا M دارد که برای هر N بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^T M + M A = -N$$

$$M = \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At}\, dt$$

اثبات:

فرض کنید جواب یکتا نباشد که در آن داریم:

$$A^T(M_1-M_2)+(M_1-M_2)A=0$$

در طرفین $e^{A^T t}(\cdot)e^{At}$ ضرب می‌کنیم:

$$e^{A^T t}\left[A^T(M_1-M_2)+(M_1-M_2)A\right]e^{At} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{A^T t}(M_1-M_2)e^{At}\right]=0$$

انتگرال‌گیری از ۰ تا ∞ می‌دهد:

$$e^{A^T t}(M_1-M_2)e^{At}\Big|_0^\infty = 0 \quad (I)$$

از طرفی چون همه مقادیر ویژه منفی حقیقی دارند پس: $\lim_{t\to\infty} e^{At}\to 0\ ,\ \lim_{t\to 0} e^{At}=I \quad (II)$

$$(I),(II) \Rightarrow 0-(M_1-M_2)=0 \Rightarrow M_1=M_2$$

برای چک کردن پاسخ M، کافیست آن را در بالا جایگزین کنیم:

$$\int_0^\infty A^T e^{A^T t} N e^{At} + \int_0^\infty e^{A^T t} N e^{At} A = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{A^T t} N e^{At}\right] dt =$$

$$= e^{A^T t} N e^{At}\Big|_\infty - e^{A^T t} N e^{At}\Big|_0 = 0 - N = -N$$

* همچنین می‌توان به راحتی نشان داد که اگر N متقارن باشد، آنگاه M نیز متقارن است.

قضیه: فرض کنید ماتریس $C(A,B)$ دارای رنک کامل نباشد. $\rho(C(A,B))=n_1<n$.

آنگاه ماتریس P^{-1} را بصورت $(+)\quad P^{-1}:=[q_1 \cdots q_{n_1} \cdots q_n]$

تشکیل می‌دهیم. n_1 ستون اولیه، هر n_1 ستون مستقل $C(A,B)$ است و بقیه ستونها می‌تواند بصورت دلخواه تشکیل شود تا جایی که P غیرسینگولار بشود. در نتیجه ماتریس تشابهی بصورت $\bar{x}=Px$ تعریف می‌شود. $x=P^{-1}\bar{x}$ در نتیجه $\bar{x}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_c\\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_c & \bar{A}_{12}\\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_c\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=[\bar{C}_c \quad \bar{C}_{\bar{c}}]\begin{bmatrix}\bar{x}_c\\ \bar{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}+Du\end{cases}\qquad \begin{aligned}\bar{A}&=PAP^{-1}\\ \bar{B}&=PB\\ \bar{C}&=CP^{-1}\end{aligned}$$

که در آن $\bar{A}_c$ یک ماتریس $n_1\times n_1$ و $\bar{A}_{\bar{c}}$ ماتریس $(n-n_1)\times(n-n_1)$ و در آن

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_c=\bar{A}_c\bar{x}_c+\bar{B}_c u\\ \bar{y}=\bar{C}_c\bar{x}_c+Du\end{cases}$$

آنگاه $(\bar{A}_c,\bar{B}_c)$ کنترل پذیر است. $\longrightarrow$ نام این قضیه را پایین پله‌ای ماتریس کنترل پذیری می‌گوییم.

ستون iام از $\bar{A}$ نمایشی است از Aq_{n_1} [در مقابل $\{q_1 \cdots q_{n_1} \cdots q_n\}$] که لذا آن

q_1 تا q_{n_1} مستقل خطی هستند و همچنین نسبت به q_{n_1+1} تا q_n مستقل هستند.

---

* یادآوری: جهت نمایش رنک کامل سطری می‌توانیم از $v^TA\neq 0$ استفاده.

قضیه : جملات زیر با هم معادل هستند ، در مورد سیستم $\dot{x} = Ax + Bu$

۱ - زوج (A,B) کنترل پذیر هستند .

۲ - ماتریس $W_t = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau = \int e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau$ غیرسینگولار برای هر $t>0$ است .

۳ - ماتریس $n \times np$ (زیرماتریس کنترل پذیری) با رنک کامل n است :

$$C(A,B) = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B]$$

۴ - ماتریس $n\times(n+p)$ روبرو در هر آیگن ولیو ، رنک کامل دارد . $[A-\lambda I \;\; B]$

۵ - اگر ، همه آیگن ولیوهای ماتریس A دارای مقدار حقیقی منفی باشند آنگاه جواب یکتای

$$A W_t + W_t A^T = -BB^T$$

مثبت معین است جواب به نام ماتریس گرامیان کنترل پذیری خوانده شد ، بصورت زیر نمایش داده می‌شود :

$$W_{t_\infty} = \int_0^{\tau=\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau \qquad (\text{به } \infty \text{ توجه کنید } \tau=\infty)$$

اثبات :

$(1) \longleftrightarrow (2)$:

$$\bar{\tau} =: t-\tau \rightarrow \int_{\tau=0}^{t} e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau = \int_{\bar{\tau}=t}^{0} e^{A\bar{\tau}} B B^T e^{A^T\bar{\tau}} (-d\bar{\tau})$$

$$= \int_{\bar{\tau}=0}^{t} e^{A\bar{\tau}} B B^T e^{A^T\bar{\tau}} d\bar{\tau}$$

که این همان رابطه اشاره شده در بند (۲) است .

* با توجه به فرم انتگرال روی یک مقدار مثبت نیمه معین همواره W_t مثبت نیمه معین است . در صورتیکه غیرسینگولار باشد آنگاه مثبت معین است .

* در ابتدا نشان می‌دهیم ، در صورتیکه W_t غیرسینگولار باشد ، آنگاه سیستم (A,B) کنترل پذیر است .

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (I)$$

ادعا می کنیم برای هر $x(0)=x_0$ و $x(t_1)=x_1$ ، ورودی زیر

$$u(t)=-B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0-x_1\right] \quad (II)$$

می تواند x_0 را به x_1 در زمان دقیق t_1 برساند.

جایگذاری (I) در (II) نتیجه می دهد:

$$x(t_1)=e^{At_1}x_0-\left(\int_0^{t_1} e^{A(t-\tau)}BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}d\tau\right)W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0-x_1\right]$$

$$=e^{At_1}x_0-W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0-x_1\right]=x_1$$

* بنابراین اگر W_c^{-1} وجود داشته باشد یا به عبارت دیگر W_c غیرسینگولار باشد، آنگاه با انتخاب u مناسب می توان به هر x_1 دلخواهی دست یافت.

* حال به فرض خلف فرض کنید (A,B) کنترل پذیر اما $W_c(t_1)$ مثبت معین برای بعضی از t_1 ها نباشد.

در نتیجه بردار غیرصفر v بصورت زیر وجود دارد:

$$0=v^T W_c(t_1)v=\int v^T e^{A(t_1-\tau)}BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}v\,d\tau=\int_0^{t_1}\|B^T e^{A^T(t_1-\tau)}v\|^2 d\tau$$

که نتیجه می دهد $B^T e^{A^T(t_1-\tau)}v=0$ یا $v^T e^{A(t_1-\tau)}B=0 \quad (III)$ برای همه τ در مجموعه $[0,t_1]$

در نتیجه برطبق اصل کنترل پذیری باید:

$$\exists\, x(0): v=e^{At_1}x(0)\Rightarrow x(0)=e^{-At_1}v$$

که در آن $x(t_1)=0$ نتیجه بدهد:

$$0=v+\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

با ضرب از چپ در v^T داریم:

$$0=v^Tv+\underbrace{\int_0^{t_1} v^T e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{0}$$

$$\Rightarrow \|v\|^2=0\Rightarrow v=0 \quad \cancel{\circ\circ}$$

چون قبلاً فرض کردیم $v\neq 0$.

اگر A پایدار باشد   در قضیه قبل

$(5) \Leftrightarrow (2)$: همانطور که قبلاً نشان داده شد، پاسخ مدل (5) مشابه آنچه در بند (5) برای W_c آمده است می‌باشد. W_c (ماتریس گرامیان) همواره مثبت نیمه معین است. این ماتریس درصورتی که مثبت معین باشد بصورت دو شرطی (iff)، W_c غیرسینگولار است. که این اثبات را کامل می‌کند.

$(4) \Leftrightarrow (3)$: درصورتیکه $C(A,B)$ فول رنک ازلحاظ سطری باشد، آنگاه ماتریس $[A-\lambda I \quad B]$ در هر آیگن ولیوی از A رنک کامل دارد. درغیراینصورت یک آیگن ولیوی λ_1 وجود دارد بطوریکه رنک از دست دهد و داریم:

$$q\,[A-\lambda_1 I \quad B] = 0$$

که درنتیجه داریم: $qA = \lambda_1 q$ و $qB = 0$ درنتیجه q آیگن وکتور چپ A است.

$$qA^2 = (qA)A = (\lambda_1 q)A = \lambda_1^2 q \Rightarrow qA^k = \lambda_1^k q$$

$$q\,[B \quad AB \quad A^{n-1}B] = [qB \quad \lambda_1 qB \ \dots \ \lambda_1^{n-1} qB] = 0 \quad \times$$

چون فرض کرده بودیم $C(A,B)$ رنک کامل سطری دارد.

* برای آنکه نشان دهیم $\rho(C)<n$ موجب می‌شود که $\rho([A-\lambda I \quad B])$ در بعضی از آیگن ولیوهای A مانند λ_1 باشد باید از قضیه پارتیشن ماتریس کنترل پذیری استفاده نماییم.

- فرض کنید $\rho(C(A,B)) = n-m$ باشد آنگاه می‌توان با انتخاب مناسب P به رابطه زیر رسید:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

- حال فرض کنید λ_1 یک مقدار ویژه از $\bar{A}_{\bar{c}}$ است و q_1 بردار ویژه چپ متناظر با آن باشد یعنی:

$$q_1 \bar{A}_{\bar{c}} = \lambda_1 q_1 .$$

آنگاه داریم: $q_1(\bar{A}_{\bar{c}} - \lambda_1 I) = 0$.

حال تعریف می‌کنیم $q := [0 \quad q_1]$ و محاسبه می‌کنیم:

$$q\,[\bar{A} - \lambda_1 I \quad \bar{B}]$$

$$q\,[\bar{A}-\lambda_1 I \quad \bar{B}] = [0 \quad q_1]\begin{bmatrix} \bar{A}_c-\lambda_1 I & \bar{A}_{12} & \bar{B}_c \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}}-\lambda_1 I & 0 \end{bmatrix} = 0$$

* که نتیجه می دهد $\rho([\bar{A}-\lambda I \quad \bar{B}]) < n$ در نتیجه $\rho([A-\lambda I \quad B]) < n$ در بعضی از ویژه مقادیر A.

$(2)\leftrightarrow(3)$: در اثبات $(2)\leftrightarrow(1)$ قبلاً نشان داده شد که W_t غیرسینگولار است اگر و تنها اگر هیچ v غیرصفر وجود نداشته باشد طوری که $v^T e^{At} B = 0 \quad \forall t$.

حال نشان می دهیم W_t غیرسینگولار است اگر ماتریس $C(A,B)$ رتبه سطری کامل داشته باشد.

$$\rho(C(A,B)) < n \rightarrow v^T C = 0 \rightarrow v^T A^k B = 0 \quad \text{for } k=0,\dots,n-1$$

$$e^{At}B = \mathrm{Im}\,[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \rightarrow v^T e^{At} B = 0 \quad \times$$

این با شرط W_t غیرسینگولار در تناقض است. در نتیجه $(3) \rightarrow (2)$.

$(3) \rightarrow (2)$: فرض کنید $C(A,B)$ رتبه کامل سطری را دارد اما $W_t(t)$ غیرسینگولار است.

$$\Rightarrow \exists v \ \ni \ v^T e^{At} B = 0 \rightarrow v^T A^k B = 0 \rightarrow v^T [B \quad AB \dots A^{n-1}B] = v^T C = 0$$
$$k=1,2,\dots$$

$\times$ این با این شرط که C رتبه کامل سطری دارد در تناقض است.