معادله حالت و خروجی سیستمی بصورت زیر است :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

الف) با استفاده از دستور sys = ss(A,B,C,D) در متلب می‌توان سیستم بالا را وارد نمود.

ب) دستور g=tf(sys) به g تابع تبدیل را منتسب می‌کند.

دستورات روبرو می‌توانند چندجمله‌ای را تولید کنند : num=g.num{:} و g.den{:}

$$g = \frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s+1}$$

همانطور که دیده می‌شود تابع تبدیل درجه چهارم به تابع تبدیل درجه یک کاهش یافته که بیانگر حذف صفر و قطب است.

n= poly2sym(num) → n1 = factor(n) → [x+3, x+2, x+4]

d =poly2sym(den) → d1 = factor(d) → [x+1, x+2, x+3, x+4]

می‌توان با محاسبه دستی و یا با متلب از طریق دستور jordan ماتریس های مدال را بدست آورد.

$$[V, J] = \text{jordan}(sys.A) \rightarrow J = V^{-1} A V$$

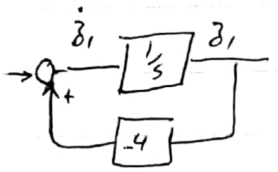
$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} z$$

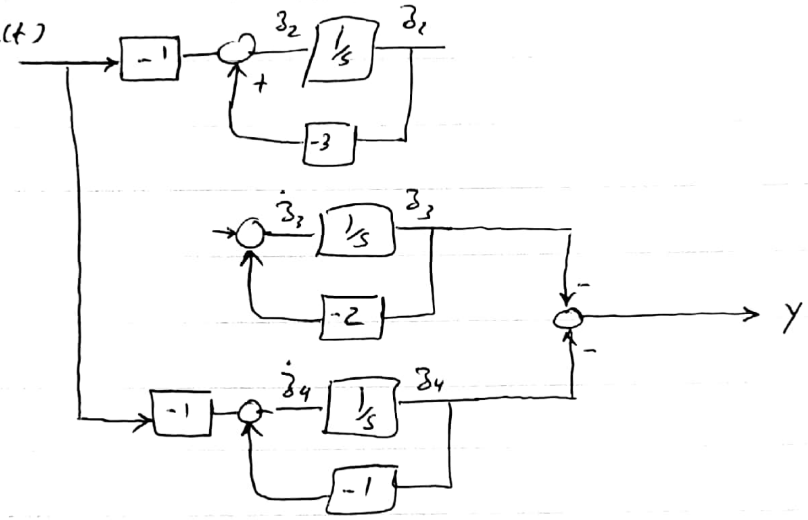
یادآوری

$$x = Vz \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = (V^{-1} A V) z + (V^{-1} B) u \\ Y = (C V) z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -4 z_1 \\ \dot{z}_2 = -3 z_2 - u \\ \dot{z}_3 = -2 z_3 \\ \dot{z}_4 = -z_4 - u \\ y = -z_3 - z_4 \end{cases}$$



نه کنترل پذیر و نه رویت پذیر



کنترل پذیر و غیر رویت پذیر

رویت پذیر و غیر کنترل پذیر

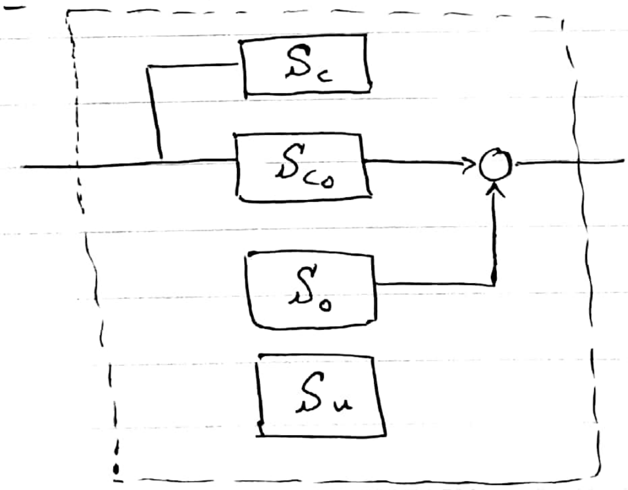
کنترل پذیر و رویت پذیر

* همانطور که دیده می شود ، ورودی u فقط بر متغیرهای z_2 و z_4 تأثیر می گذارد و z_1 و z_3 از ورودی تأثیری نمی پذیرند.

* همچنین دیده می شود که خروجی فقط از متغیرهای z_3 و z_4 تأثیر می پذیرد.

* بنابراین متغیرهای z_3 و z_4 رویت پذیر و متغیرهای حالت z_2 و z_4 کنترل پذیر هستند.

* همانطور که دیده می شود z_4 هم در ورودی و هم در خروجی حضور دارد. بنابراین فقط z_4 در تابع تبدیل حضور دارد.



* همانطور که دیده می شود نمی توان S_o و S_u را کنترل کرد در صورتیکه ناپایدار باشند، این ویژگی را حفظ می کند سیستم ناپایدار می ماند. بنابراین درصورتیکه سیستم (S_o و S_u) پایدار باشد چون می توان بقیه حالتهای موجود در S_c و S_{co} را با طراحی کنترل کننده پایدار نمود، به سیستم "پایدار پذیر" گویند.

* به همین کیفیت، سیستمی را که زیرسیستم رویت ناپذیر آن پایدار باشد، آشکار پذیر می نامیم.

* حال به رابطه های $(sI-A)^{-1}B$ و $C(sI-A)^{-1}$ توجه نمائید:

```
syms s
phi = (s*eye(4) - A)^-1
Cont = simplify(phi*B)
```

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{-2(s+2)}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{(s+3)} \\ \frac{-1}{s+3} \end{bmatrix} = (sI-A)^{-1}B$$

* همانطور که دیده می شود فقط مودهای $(s+1)$ و $(s+3)$ در مخرج $(sI-A)^{-1}B$ ظاهر شده اند و $(s+2)$ و $(s+4)$ در همه عناصر مخرج حذف شده اند. این یعنی مدهای $\lambda=-2$ و $\lambda=-4$ حتماً کنترل ناپذیرند.

* همین کار را به طور مشابه برای $C(sI-A)^{-1}$ انجام می دهیم:

```
Obs = simplify(C*phi)
```

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{7s+11}{(s+1)(s+2)} & \frac{3(2s+3)}{(s+1)(s+2)} & \frac{(4s+6)}{(s+1)(s+2)} & \frac{(2s+3)}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = C(sI-A)^{-1}$$

* همانطور که دیده می شود مدهای $(s+3)$ و $(s+4)$ از صورت و مخرج تمامی عناصر $C(sI-A)^{-1}$ حذف شده اند لذا $\lambda=-4$ و $\lambda=-3$ حتماً رویت ناپذیرند.

نتیجه گیری: درصورت حذف صفر و قطب از همه عناصر $(sI-A)^{-1}B$ و $C(sI-A)^{-1}$، آن قطب ها، مدهای به ترتیب کنترل ناپذیر و رویت ناپذیرند.

* روش بعدی استفاده از دستور ctrb و rank(ctrb) است:

- دستور ctrb همان ماتریس کنترل پذیری است $[B \ AB \ A^2B \ldots]$ است.
- در مورد این سؤال داریم:

```
rank(ctrb(A,B))  →  ans = 2
```

- با توجه به قضیه دوگانی می توان تحت رویت پذیری را از همان ctrb بدست آورد:

$$\text{rank}(\text{ctrb}(A^T, C^T)) \Rightarrow \text{ans} = 2$$

- حال می خواهیم سیستم را به مدهای کنترل پذیر و کنترل ناپذیر پارتیشن بندی کنیم:

* ابتدا باید ماتریس کنترل پذیری $C(A,B)$ را بدست آورد، و دو ستون مستقل خطی آن (چون رنک 2 بود) به دلخواه انتخاب نماییم. سپس دو ستون مستقل خطی بصورت دستی اضافه نماییم که مجموع به رنک چهار برسیم:

$$T = [\underbrace{C_{AB}(1),\ C_{AB}(2)}_{Q_1},\ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{Q_2}]$$

کدهای متلب بصورت زیرند:

```
C = ctrb(A,B)
CC = [ C(:,1:2), [1;0;0;0], [0;0;0;1] ]
A-bar = CC^-1 * A * CC
B-bar = CC^-1 * B
```

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda(\bar{A}_c) = \{-3,-1\}, \quad \lambda(\bar{A}_{\bar{c}}) = \{-4,-2\}$$

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \ \Big/ \ \bar{A}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\bar{c}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$C(\bar{A}_c, \bar{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (\bar{A}_c, \bar{B}_c)$$ کنترل پذیر

$$C(\bar{A}_{\bar{c}}, \bar{B}_{\bar{c}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow (\bar{A}_{\bar{c}}, \bar{B}_{\bar{c}})$$ کنترل ناپذیر

* اثبات قضیه تجزیه ماتریس های کنترل پذیر و ناپذیر:

$$C(A,B) = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B], \quad \rho(C(A,B)) < n = n_1$$

فرض کنید n_1 ستون مستقل خطی از $C(A,B)$ از ماتریس P^{-1} در قسمت Q_1 و $n-n_1$ ستون دیگر را بصورت دستی اضافه می نماییم:

$$Q = P^{-1} = [q_1 \cdots q_{n_1} \ \vdots \ q_{n_1+1} \cdots q_n] = [Q_1 \ \vdots \ Q_2]$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$PQ=\begin{bmatrix}P_1\\ \cdots\\ P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1 \ \vdots\ Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}P_1Q_1&P_1Q_2\\P_2Q_1&P_2Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&0\\0&I\end{bmatrix}$$

$$P_1Q_1=I\ ,\quad P_1Q_2=0\ ,\quad P_2Q_1=0\ ,\quad P_2Q_2=I$$

مجدداً توجه نمایید که Q_1 ستون های مستقل خطی از Q هستند پس داریم :

$$Im(B)\subset Im(Q_1)\Rightarrow\left[P_2Q_1=0\Rightarrow P_2B=0\right]\quad(I)$$

همچنین واضح است که :

$$Im(AQ_1)\subset Im(Q_1)\Rightarrow\left[P_2Q_1=0\Rightarrow P_2AQ_1=0\right]\quad(II)$$

از طرفی برای تبدیل های تشابهی داریم :

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}P_1\\ \cdots\\ P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\ \vdots\ Q_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P_1AQ_1&P_1AQ_2\\P_2AQ_1&P_2AQ_2\end{bmatrix}\overset{\text{از }(II)}{=\!=\!=}\begin{bmatrix}\underbrace{P_1AQ_1}_{\bar{A}_c}&P_1AQ_2\\0&\underbrace{P_2AQ_2}_{\bar{A}_{\bar{c}}}\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=PB=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}P_1B\\P_2B\end{bmatrix}\overset{(I)}{=\!=}\begin{bmatrix}P_1B\\0\end{bmatrix}$$

* دیمانسیون P_2AQ_2 برابر $(n-n_1)$ است. که از قبل می دانیم تعداد مدهای کنترل ناپذیر هم همینقدر است.
* همانطور که دیده می شود متناظر با P_2AQ_2 ، سطرهای B ، صفر است. پس کلیه مدهای کنترل ناپذیر در زوج (P_2AQ_2, B) جمع شده اند.

* لذا با این روش توانستیم مدهای کنترل ناپذیر سیستم را از مدهای کنترل پذیر جدا نماییم و اثبات کامل شد.

نکته : بند 4 از قضیه قبلی (که درجه ای $[A-\lambda I\quad B]$ باید رنک کامل می داشت تا سیستم کنترل پذیر باشد) آزمون PBH (پاپوف - بلویچ - هوتوس) گفته می شود.

نکته : همانطور که در تعریف پایدار پذیری گفته شد، درصورتیکه مدهای کنترل ناپذیر سیستم، پایدار باشد آنگاه سیستم پایدار پذیر است. لذا درصورتیکه $\bar{A}_{\bar{c}}=P_2AQ_2$ پایدار باشد، سیستم پایدارپذیر است.

کنترل پذیری از صورت های کانونیکال جردن:

فرض کنید ماتریس J و B در سیستم $\dot{z} = Jz + Bu$ بصورت زیر تعریف شود:

$$J = \begin{bmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & & & 0 \\ & J_{p_2}(\lambda_1) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & J_{p_\alpha}(\lambda_1) & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & \\ 0 & & & & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{p_1} \\ B_{p_2} \\ \vdots \\ B_{p_\alpha} \\ \cdots \\ B_{k+1} \\ B_{k+2} \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

* همانطور که دیده می شود در این سؤال فرض شده است که مقدار ویژه λ_1 (تکراری) در بلوک $J_{p_1}(\lambda_1)$ به تعداد p_1 بار و در $J_{p_\alpha}(\lambda_1)$ به تعداد p_α بار تکرار شده است. و بقیه λ_{k+1} تا λ_n غیر تکراری هستند.

* از آزمون PBH می توان به رابطه زیر دست یافت:

$$[\lambda_1 I - J \ \ B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ & & & & 0 \end{matrix} & & & & & \begin{matrix} b_{1p_1} \\ \vdots \\ b_{p_1p_1} \end{matrix} \\ \hline & \ddots & & & & \vdots \\ \hline & & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ & & & & 0 \end{matrix} & & & \begin{matrix} b_{1p_\alpha} \\ \vdots \\ b_{p_\alpha p_\alpha} \end{matrix} \\ \hline & & & \lambda_1 - \lambda_{k+1} & & b_{k+1} \\ \hline & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \lambda_1 - \lambda_n & b_n \end{array}\right]$$

* از ساختار معادله بالا می توان بطور بدیهی دید که اولین $p_i - 1$ $(i = 1, \ldots, \alpha)$ ردیف در هر کدام از بلوک های جردن متناظر با λ_1، ناوابسته خطی هستند. لذا ردیف های $[\lambda_1 I - J \ \ B]$ ناوابسته خطی هستند اگر و تنها اگر ردیف های $b_{p_1p_1}$، ....، $b_{p_\alpha p_\alpha}$ (متناظر با ردیف های صفر در بلوک های جردن) ناوابسته خطی باشند. همچنین برای λ_{k+1}، ....، λ_n ماتریس $[\lambda I - J \ \ B]$ تنها و تنها درصورتی رنک از دست می دهد که ردیف های متناظر در B_n به عبارت دیگر b_{k+1}، ....، b_n، صفر باشد.