بسمه تعالی

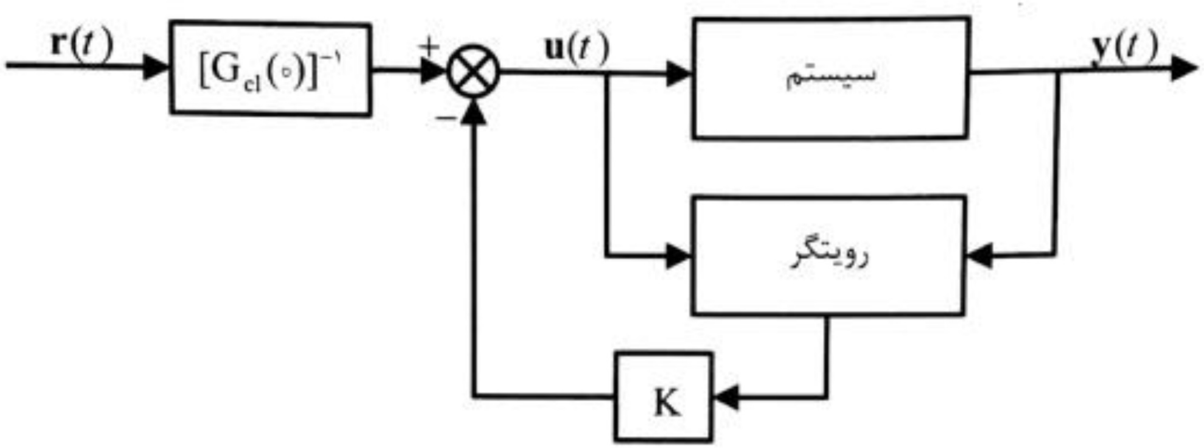
روبتگرهای خطی و طراحی جبران کننده

بخش سوم

ایمان شریفی

برگرفته از اسلایدهای کتاب اصول کنترل مدرن
دکتر علی خاکی صدیق

جبرانساز استاتیکی در مسیر ورودی مرجع



$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

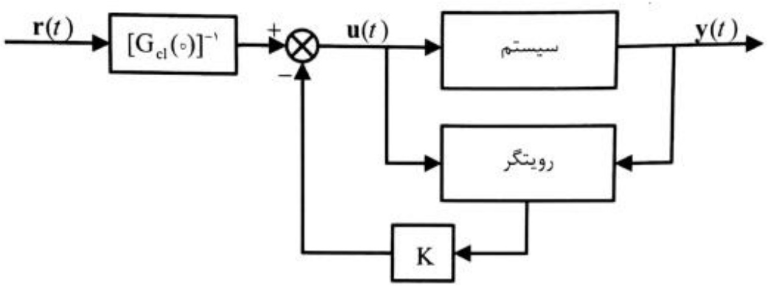
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

جبرانساز استاتیکی در مسیر ورودی مرجع



$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

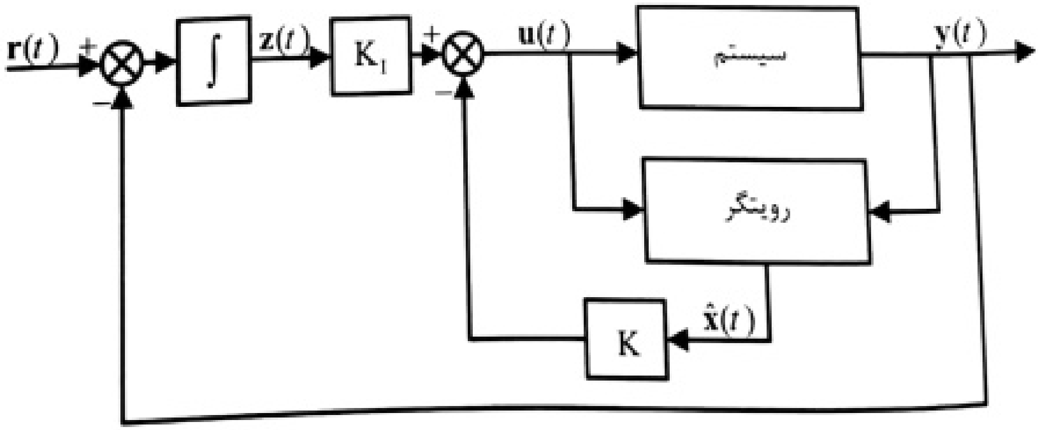
با توجه به اینکه معادله کاملا مشابه جبرانساز استاتیکی با فیدبک حالت است، لذا با رویتگر هم همان فرمول را خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A+BK & -BK \\ 0 & sI-A+LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI-A+BK)^{-1} & (sI-A+BK)^{-1} BK (sI-A+LC)^{-1} \\ 0 & (sI-A+LC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI-A+BK)^{-1} B \end{aligned}$$

$$G_{cl}^{-1}(0) = \left[C(-A+BK)^{-1} B \right]^{-1}$$

ردیابی مبتنی بر حالت انتگرالی

$$\dot{\mathbf{z}}(t)=\mathbf{r}(t)-\mathbf{y}(t)$$
$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=(A-LC)\hat{\mathbf{x}}(t)+B\mathbf{u}(t)+L\mathbf{y}(t)$$
$$\mathbf{u}(t)=-K\hat{\mathbf{x}}(t)+K_1\mathbf{z}(t)$$



- فضای حالت حلقه بسته:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{z}}(t)\\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BK_1 & -BK\\ -C & 0 & 0\\ LC & BK_1 & A-BK-LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ I\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}C & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$

ردیابی مبتنی بر حالت انتگرالی

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\\ \mathbf{e}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ I & 0 & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{z}}(t)\\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & BK_1 & -BK\\ -C & 0 & 0\\ LC & BK_1 & A-BK-LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ I\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}C & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \dot{\mathbf{z}}(t)\\ \dot{\mathbf{e}}(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A-BK & BK_1 & BK\\ -C & 0 & 0\\ 0 & 0 & A-LC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \mathbf{e}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ I\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{r}(t)\\ \mathbf{y}(t)&=\begin{bmatrix}C & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{z}(t)\\ \mathbf{e}(t)\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

ردیابی مبتنی بر حالت انتگرالی

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK_I & BK \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

در حالت ماندگار داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK_I & BK \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{z}_{ss} \\ \mathbf{e}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -K & K_I & K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{z}_{ss} \\ \mathbf{e}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{e}_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{ss} = -K(\mathbf{x}_{ss} - \mathbf{e}_{ss}) + K_I \mathbf{z}_{ss}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} A & B & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A-LC \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{e}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ss} \\ \mathbf{u}_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \mathbf{r} \\ \\ (A-LC)\mathbf{e}_{ss} = 0 \end{cases}$$

ردیابی مبتنی بر حالت انتگرالی

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \\ \\ (A-LC)e_{ss} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} r \\ -(CA^{-1}B)^{-1} r \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{ss} \\ u_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} r \\ -(CA^{-1}B)^{-1} r \end{bmatrix} \\ u_{ss} = -K(x_{ss} - e_{ss}) + K_I z_{ss} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{ss} = K_I^{-1}(u_{ss} + Kx_{ss}) \\ \quad = K_I^{-1}\left[I - KA^{-1}B\right]G^{-1}(0) r \\ \\ y_{ss} = Cx_{ss} \\ \quad = C\left[A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} r\right] \\ \quad = r \end{cases}$$

❖ طراحی جایابی قطب-رویتگر از طریق تابع تبدیل

در این بخش از تابع تبدیل بجای فضای حالت استفاده می شود.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad g(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_c\hat{x}(t) + bu(t) + Ly(t) \Longrightarrow u(t) = -K\hat{x}(t) + r(t)$$

$$s\hat{X}(s) = A_c\hat{X}(s) + bU(s) + LY(s) \qquad U(s) = -K\hat{X}(s) + R(s)$$

$$\Downarrow$$

$$U(s)-R(s)=-k(sI-A_c)^{-1}[LY(s)+bU(s)]$$

$$=-\frac{k\,\mathrm{adj}(sI-A_c)L}{\left|sI-A_c\right|}Y(s)-\frac{k\,\mathrm{adj}(sI-A_c)b}{\left|sI-A_c\right|}U(s)$$

$$=-\frac{q(s)}{d(s)}Y(s)-\frac{e(s)}{d(s)}U(s)$$

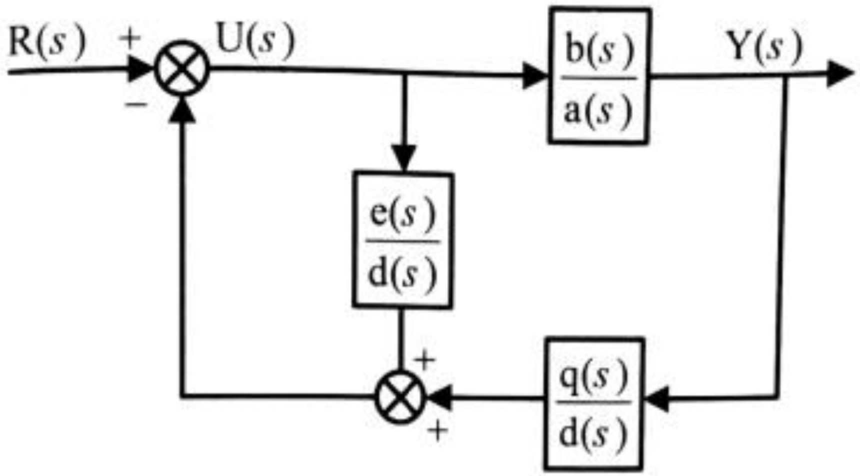
$$\Downarrow$$

$$\frac{a(s)}{b(s)}Y(s)-R(s)=-\frac{q(s)}{d(s)}Y(s)-\frac{e(s)}{d(s)}\frac{a(s)}{b(s)}Y(s)$$

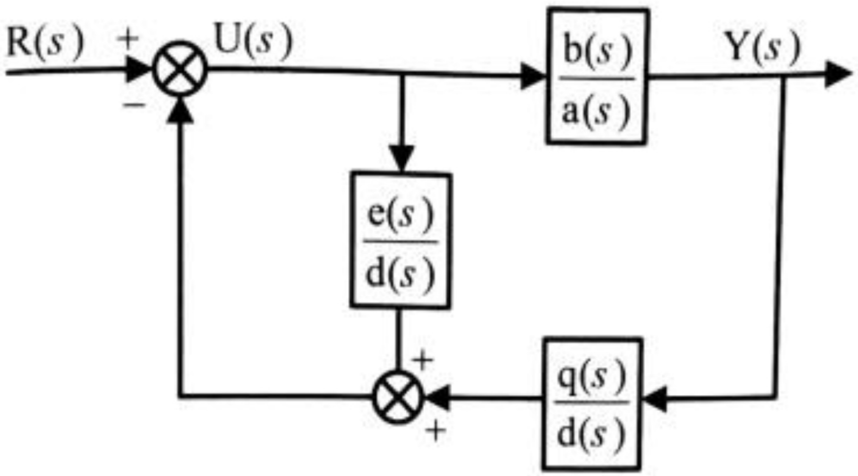
$$\Rightarrow\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)[d(s)+e(s)]+q(s)b(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)p(s)+q(s)b(s)}$$

$$\boxed{a(s)p(s)+q(s)b(s)=c(s)}$$

- اثبات می شود که شرط لازم و کافی برای حل معادله دیوفانتین جهت جایابی قطب با رویتگر کنترل پذیری سیستم اصلی $(\frac{b(s)}{a(s)})$ است. یعنی a و b نسبت به هم اول باشند.



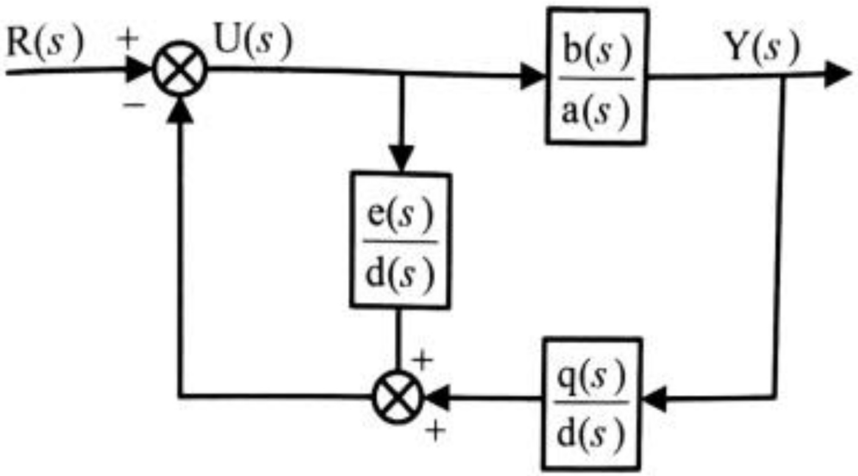
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)[d(s)+e(s)]+q(s)b(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)p(s)+q(s)b(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)[d(s)+e(s)]+q(s)b(s)}=\frac{b(s)d(s)}{a(s)p(s)+q(s)b(s)}$$

$$\boxed{a(s)p(s)+q(s)b(s)=c(s)}$$

- رویتگر حالت مرتبه کامل d(s) از مرتبه n است.
- توابع اکیدا سره فرض می شوند و لذا b, q, e همگی از درجه کمتر مساوی n-1 است.
- p از درجه n خواهد شد.
- q از درجه n-1 است.
- a از درجه n است.
- بنابراین c از درجه 2n است.



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(s)d(s)}{a(s)[d(s)+e(s)]+q(s)b(s)} = \frac{b(s)d(s)}{a(s)p(s)+q(s)b(s)}$$

$$\boxed{a(s)p(s)+q(s)b(s)=c(s)}$$

- قبلا دیده شد که n قطب مطلوب سیستم رگولاتور و n قطب مطلوب رویتگر مستقلا با استفاده از K و L تعیین میشوند.
- r(s) معادله مشخصه سیستم رگولاتور.
- d(s) معادله مشخصه رویتگر.
- در اینصورت جمله ای حلقه بسته بصورت c(s)=r(s).d(s) خواهد شد. طبق اصل جدایی پذیری
- تابع تبدیل سیستم حلقه بسته بصورت $\frac{b(s)}{r(s)}\frac{d(s)}{d(s)} = \frac{b(s)}{r(s)}$

- تابع تبدیل سیستم حلقه بسته بصورت $\frac{b(s)}{r(s)}\frac{d(s)}{d(s)} = \frac{b(s)}{r(s)}$
- حذف ایجاد شده بر n قطب مطلوب حلقه بسته تاثیری ندارد.
- می توان با انتخاب c(s)=r(s) b(s) صفرهای پایدار حلقه بسته را حذف نموده
  - آن ها را با قطبهای انتخاب شده رویتگر جایگزین نمود.
  - تنها تعدادی از صفرهای سیستم را حذف نمود.
- فرض کنید

$$b(s) = (s + z)b'(s)$$

$$c(s) = (s + z)c'(s)$$

معادله دیوفانتین بصورت زیر بدست می آید:

$$a(s)p(s) + q(s)b'(s)(s + z) = c'(s)(s + z)$$

در صورتیکه $p(s) = (s + z)p'(z)$ انگاه:

$$a(s)p'(s) + q(s)b'(s) = c'(s)$$

دیوفانتین کاهش یافته

$$\boxed{a(s)p(s)+q(s)b(s)=c(s)}$$

$$a(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0$$
$$b(s)=b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0$$
$$c(s)=s^{2n}+c_{2n-1}s^{2n-1}+\cdots+c_1s+c_0$$

$$p(s)=s^n+p_{n-1}s^{n-1}+p_{n-2}s^{n-2}+\cdots+p_1s+p_0$$
$$q(s)=q_{n-1}s^{n-1}+q_{n-2}s^{n-2}+\cdots+q_1s+q_0$$

ماتریس معادله دیوفانتین

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 & \cdots & 0\\
a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0\\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1}\\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2}\\
0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} & 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_{n-1}\\ p_{n-2}\\ p_{n-3}\\ p_{n-4}\\ \vdots\\ p_0\\ q_{n-1}\\ q_{n-2}\\ q_{n-3}\\ \vdots\\ q_1\\ q_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_{2n-1}-a_{n-1}\\ c_{2n-2}-a_{n-2}\\ c_{2n-3}-a_{n-3}\\ c_{2n-4}-a_{n-4}\\ \vdots\\ c_n-a_0\\ c_{n-1}\\ c_{n-2}\\ c_{n-3}\\ \vdots\\ c_1\\ c_0 \end{bmatrix}$$

اثبات می شود که شرط لازم و کافی برای حل معادله دیوفانتین جهت جایابی قطب با رویتگر، کنترل پذیری سیستم اصلی $(\frac{b(s)}{a(s)})$ است. یعنی a و b نسبت به هم اول باشند.

مثال ۷-۵- تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

از معادله (۷-۵-۱۵) برای $n=2$ ، داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 - a_1 \\ c_2 - a_0 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

معادله بالا تنها در صورتی پاسخ منحصر بفرد دارد که دترمینان ماتریس ضریب غیر صفر باشد و یا

$$b_0^2 - a_1 b_1 b_0 + b_1^2 a_0 = 0$$

اگر $b_1 = 0$ باشد، b_0 نیز باید صفر باشد و در غیر اینصورت

$$b_0/b_1 = a_1/2 \pm \{(a_1/2)^2 - a_0\}^{1/2}$$

بسادگی نشان داده می‌شود، نسبت b_0/b_1 یی که دترمینان را صفرمی‌کند، قطب سیستم است. بنابراین برای $b_1 \neq 0$ و $b_0 \neq 0$ دترمینان ضرایب تنها در صورتی صفر خواهد بود که عبارت صورت فاکتور چند جمله‌ای مخرج باشد.

مثال ۷-۶- تابع تبدیل سیستم مرتبه سومی به صورت زیر داده شده است

$$g(s)=\frac{s+3}{s^{3}+7s^{2}+14s+8}$$

مطلوب است که کنترل‌کننده جایابی قطب-رؤیتگر برای این سیستم طراحی کنیم تا قطب‌های سیستم حلقه بسته در ۲- و j±۱- وقطب‌های رؤیتگر در ۴-، ۴- و ۴- قرار گیرند. چندجمله‌ای مطلوب $c(s)$ عبارتست از

$$c(s)=s^{6}+16s^{5}+102s^{4}+332s^{3}+592s^{2}+576s+256$$

صورت ماتریسی معادله دیوفانتین متناظر عبارتست از

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 14 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \\ p_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-7 \\ 102-14 \\ 332-8 \\ 592 \\ 576 \\ 256 \end{bmatrix}$$

با حل معادله بالا بدست می‌آوریم

با حل معادله بالا بدست می‌آوریم

$$p(s)=s^{۳}+۹s^{۲}+۲۵s+۱۸/۵$$

$$q(s)=۴/۵\ s^{۲}+۲۷s+۳۶$$

همچنین داریم

$$e(s)=p(s)-d(s)$$

$$=s^{۳}+۹s^{۲}+۲۵s+۱۸/۵-s^{۳}-۱۲s^{۲}-۴۸s-۶۴$$

$$=-۳s^{۲}-۲۳s-۴۵/۵$$