قضیه: سیستم کانونیکال جردن اشاره شده در صفحه قبلی کنترل پذیر است اگر و فقط اگر:

۱- آخرین ردیف های زیر ماتریس های B_i متناظر با بلوک های جردن متناظر با مقادیر ویژه یکسان ناوابسته خطی باشند.

۲- اگر مقدار ویژه تکراری تنها یک بلوک جردن متناظر دارد، آخرین ردیف زیر ماتریس متناظر B_n برداری غیر صفر باشد.

۳- ردیف های B_i متناظر با مقادیر ویژه غیر صفر باشند.

اثبات: بصورت شهودی از صفحه قبل بیان می شود.

مثال: صورت کانونیکال جردن زیر را در نظر بگیرید:

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \quad B_n=\begin{bmatrix}1\\ a\\ b\\ 1\end{bmatrix}$$

* توجه نمایید که a سطر آخر B_1 متناظر با بلوک جردن $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ بوده و b سطر آخر متناظر با بلوک جردن $[-1]$ است. همانطور که دیده می شود، a و b اسکالر هستند و حتماً به هم وابسته خطی هستند و بنابراین به ازای هر a و b سیستم کنترل ناپذیر است.

$$[\lambda_1 I-A\ ,\ B]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix}$$

این دو سطر همواره وابسته خطی هستند!

نکته مهم: سیستم های تک ورودی که بیش از یک بلوک جردن متناظر با قطب تکراری دارند، کنترل ناپذیر هستند.

* برای سیستم بالا اگر دو ورودی داشتیم و ماتریس B بصورت $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ بود آنگاه می توانستیم با انتخاب مناسب دو سطر $\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}$ طوریکه مستقل خطی باشند سیستم را کنترل پذیر نماییم.

نکته: در حالت کلی اگر سیستمی k بلوک جردن با مقادیر ویژه یکسان داشته باشد، حداقل k ورودی برای کنترل آن ضروری است.

رویت پذیری :

* یکی از مسائل مهم در تحلیل و طراحی سیستم های کنترل مدرن ، در فضای حالت ، بازسازی رفتار سیستم یا تخمین متغیرهای دینامیک از مشاهدات خروجی است.

* میزان وابستگی خروجی به رفتار متغیرهای حالت سیستم را رویت پذیر گویند.

سیستم قطری زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z \\ y = \begin{bmatrix} 1 & a \end{bmatrix} z \end{cases}$$

که در آن a یک عدد حقیقی است . پاسخ این سیستم به شرایط اولیه $[z_1(0)\ z_2(0)]^T$ برابر است با :

$$y = z_1(t) + a z_2(t) = e^{-t} z_1(0) + a e^{-2t} z_2(0)$$

* توجه نمایید که در صورتیکه $z_1(0) \neq 0$ ، رفتار متغیر حالت اول ($z_1(t)$) همواره در خروجی مشاهده می گردد.
* اما رفتار متغیر حالت دوم ($z_2(t)$) در صورتیکه a غیر صفر باشد مشاهده می شود.

* به ازای $a \neq 0$ هر تغییری در شرایط اولیه هیچ تأثیری در خروجی ندارد.

* رویت پذیری این سیستم و میزان وابستگی خروجی به متغیرهای حالت به مقدار a بستگی دارد.

رویت پذیری کامل: فرض کنید $y(t; t_0, x(0), u)$ ، پاسخ متغیر خروجی سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

را به ازای ورودی $u(t)$ و حالت اولیه $x(t_0) = x_0$ نشان دهد. آنگاه سیستم داده شده را کاملاً رویت پذیر گویند اگر برای هر t_0 ، زمانی مانند $t_1 > t_0$ وجود داشته باشد که

$$y(t; t_0, x_0, u) = y(t; t_0, x_0', u)$$

که در آن $t_0 \le t \le t_1$ موجب شود که حتماً شرط اولیه x_0 و x_0' با هم برابر باشند.

* به عبارت با در دسترس داشتن اطلاعات $u(t)$ و $y(t)$ در بازه ای از زمان ، $x(t_0)$ را بتوان بطور یکتا تعیین نمود.

* سیستم زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow y(t;t_0,x_0,u) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

اگر بخواهیم سیستم طبق تعریف رویت پذیری عمل نماید باید در شرایطی که خروجی یکسان باشد و ورودی یکسان باشد، حتماً شرایط اولیه یکسان باشد :

$$y(t;t_0,x_0,u) = y(t;t_0,x_0',u)$$

$$\Rightarrow Ce^{A(t-t_0)}x_0 = Ce^{A(t-t_0)}x_0'$$

اگر بخواهیم $x_0' = x_0$ باشد، باید حتماً $Ce^{A(t-t_0)}$ رنک کامل باشد :

* طبق ترکیب کیلی همیلتون و بسط تیلور e^{A} داریم :

$$Ce^{A(t-t_0)} = C\left[I + A\underbrace{(t-t_0)}{} + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2!} + \frac{A^3(t-t_0)^3}{3!} + \dots\right]$$

$$= C\left[I + A\phi_1(t-t_0) + A^2\phi_2(t-t_0) \cdots + A^{n-1}\phi_{n-1}(t-t_0)\right]$$

که در آن $\phi_i(t-t_0)$ تابعی بر حسب $(t-t_0)$ است. می توان معادله بالا را بصورت زیر نیز نوشت :

$$Ce^{A(t-t_0)} = \left[I \quad I\phi_1(t-t_0) \quad I\phi_2(t-t_0) \quad \dots \quad I\phi_{n-1}(t-t_0)\right]\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

* بنابراین ماتریس $Ce^{A(t-t_0)}$ زمانی رنک کامل است که $\left[C^T \; A^TC^T \; A^{T^2}C^T \dots A^{T^{n-1}}C^T\right]^T$ رنک کامل باشد .

نتیجه : سیستم $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ زمانی رویت پذیر است که ماتریس $\left[C^T \; A^TC^T \dots (A^T)^{n-1}C^T\right]^T$ یا $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ رنک کامل باشد.

قضیه دوگانی Theorem of Duality : زوج (A,B) کنترل پذیر است اگر و تنها اگر

زوج (A^T, B^T) رویت پذیر باشد.

اثبات : شرط کنترل پذیری بصورت زیر بود برای زوج (A,B) :

$$C(A,B) = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B] \quad (I)$$

شرط رویت پذیری بصورت روبرو بود برای زوج (A^T, B^T) :

$$O(A^T,B^T) = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ B^T (A^T)^2 \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

* همانطور که دیده می‌شود ماتریس $C(A,B) = \left[O(A^T,B^T)\right]^T$ ولذا رنک کامل بودن هر دو باهم یکسان است.

قضیه : عبارات زیر باهم یکسان هستند :

۱- زوج (A,C) رویت پذیر است.

2 - ماتریس $W_0(t)$ غیرسنگولار باشد : $\forall t \rightarrow \quad W_0(t) = \int_0^t e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$

3 - ماتریس رویت پذیری رنک کامل باشد.

۴- ماتریس $(n+q) \times n$ زیر و در همه آیگن ولیوها رنک کامل ستونی باشد : $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$
(قضیه PBH)

5 - همه آیگن ولیوهای A اگر دارای مقدار حقیقی منفی باشد آنگاه $W_0 = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$ پاسخ منحصر به فرد معادله روبرو است :

$$A^T W_0 + W_0 A = -C^T C$$

اثبات : از طریق دوگانی در مورد قضیه کنترل پذیری.

قضیه پارتیشن بندی سیستم های رویت ناپذیر :

سیستم
$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$
را درنظربگیرید که در آن رنک ناقص باشد :
$\rho(O) = \rho \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_2 < n$
و رویت ناپذیر باشد. آنگاه مشابه قضیه پارتیشن بندی سیستم های کنترل ناپذیر ، سطرهای مستقل $O(A, C)$

را جدا سازی نموده و ماتریس P را تشکیل می دهیم :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n_2} \\ \hline p_{n_2+1} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \hline P_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = Px$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u \\ y = [\bar{C}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + Du \end{cases}$$

در سیستم بدست آمده زوج $(\bar{A}_o, \bar{C}_o)$ رویت پذیر است :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ \bar{y} = \bar{C}_o \bar{x}_o + Du \end{cases}$$

اثبات : مشابه آنچه در مورد پارتیشن بندی سیستم های کنترل ناپذیر بیان شد.

مثال : مثال بیان شده در مورد سیستم زیر را درنظربگیرید :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [7 \quad 6 \quad 4 \quad 2] x(t) \end{cases}$$

دستور متلب برای محاسبه $O(A,C)$ همان $obsv(A,C)$ و یا $ctrb(A^T, C^T)$

$$rank(O(A,C)) = 2 \rightarrow rank\left(\left[O(A,C)_1 \; ; \; O(A,C)_2 \; ; \; [0\ 1\ 0\ 0] \; ; \; [0\ 0\ 0\ 1]\right]\right) = 4$$

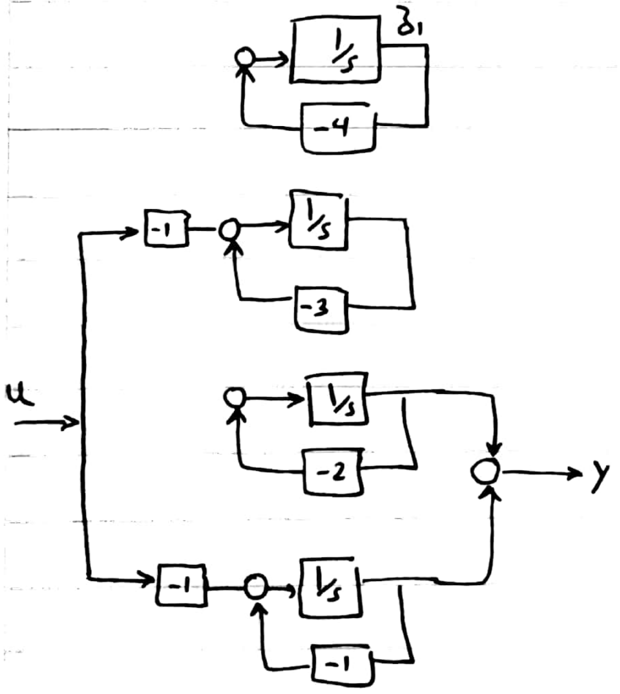
* در سطر اول $O(A,C)$ و دو سطر $[0\ 1\ 0\ 0]$ و $[0\ 0\ 0\ 1]$ نیز طوری اضافه شده‌اند که رنک کامل تولید شود.

$$P = \begin{bmatrix} O_{1,2} \\ \hdashline 0\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\ y = CP^{-1}\bar{x} \end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

توجه نمایید که در اینجا $\bar{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ و $\bar{C}_o = [1\ \ 0]$ بدست می‌آید که رنک کامل است و مقادیر ویژه آن $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ می‌باشد.



* از شکل نیز دیده می‌شود که مدهای 1- و 2- در خروجی مشاهده می‌شوند.

قضیه تجزیه کالمن Kalman Decomposition :

با ترکیب قضیه تجزیه (پارتیشن بندی) سیستم های کنترل ناپذیر و تجزیه سیستم های رویت ناپذیر داریم :

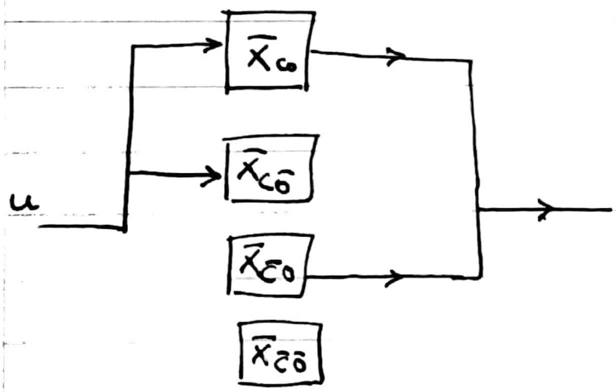
$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + Du
\end{cases}
$$

که در آن $\bar{x}_{co}$ هم کنترل پذیر هم رویت پذیر است بنابراین تابع تبدیل فقط به $\bar{x}_{co}$ بستگی دارد.

$\bar{x}_{c\bar{o}}$ کنترل پذیر و رویت ناپذیر است.

$\bar{x}_{\bar{c}o}$ کنترل ناپذیر و رویت پذیر است.

$\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر است.



اثبات : بصورت شهودی می توان دید که ابتدا با تبدیل مناسب سیستم را بصورت تجزیه کنترل ناپذیری پارتیشن بندی می کنیم :

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{c} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c} & A_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{c} \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{c} \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{c} & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \bar{x}
\end{cases}
$$

* حال در سیستم بالا تک تک عناصر را بصورت رویت پذیری تفکیک می نماییم :

$$
\bar{A}_{c} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad A_{12} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\bar{c}} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}
$$

$$\bar{B}_c \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{C}_c \rightarrow [\,\bar{C}_{co} \quad 0\,] \quad , \quad \bar{C}_{\bar{c}} \rightarrow [\,\bar{C}_{\bar{c}o} \quad 0\,]$$

پس بنابراین قضیه تجزیه کالمن ترکیب دوقضیه تجزیه کنترل ناپذیر و تجزیه رویت ناپذیر است.

* در متلب دستور minreal برای این کار مناسب است و تا حدود مناسبی این کار را انجام می دهد.

```
sys = ss(A, B, C, D)
[sys_kalman , U] = minreal(sys)
  Abar = U*A*U'
  Bbar = U*B
  Cbar = C*U'
```

نکته: با توجه به شکل تجزیه ماتریس ها، می توان نشان داد که فقط $\bar{X}_{co}$ در تابع تبدیل نقش دارد پس داریم:

$$G = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

* در مورد مثال مورد استفاده در این جزوه دستور minreal همان طور که انتظار می رود تابع تبدیل ناشی از مود (-1) را نتیجه می دهد.

$$tf(sys\_kalman) \rightarrow \frac{1}{s+1}$$

sys_kalman.A = -1 , sys_kalman.B = 1.345 , sys_kalman.C = 0.7385