بسمه تعالی

سیستم‌های کنترل بهینه خطی

ایمان شریفی

برگرفته از اسلایدهای کتاب اصول کنترل مدرن
دکتر علی خاکی صدیق

❖ مقدمه

- ✓ *مساله کلیدی جایابی مقادیر ویژه و طراحی رویتگر*: انتخاب محل قطب ها
- ✓ *انتخاب محل قطب ها* :
  - سرعت پاسخ و دینامیک خطای تخمین
- ✓ *قطب های سریع* :
  - سرعت سریع پاسخ و دینامیک سریع خطای تخمین
  - اشباع محرک ها
  - امکان ناپایداری سیستم حلقه بسته غیرخطی
  - مساله نویز
- ✓ *انتخاب بهینه محل قطب های حلقه بسته*

❖ فرموله سازی مساله کنترل بهینه خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \longrightarrow \text{سیستم خطی}$$

✓ معیار انتگرال درجه دوم:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x^T(t) Q x(t) dt$$

✓ ماتریس وزنی مثبت نیمه معین

✓ میزان انحراف از صفر با وزن دهی حالت ها

- چند مثال :

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix} \qquad Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

- و یا:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} y^T(t)Qy(t)dt$$

- یک مساله مهم: *دامنه سیگنال کنترل*
- اصلاح شاخص یا معیار عملکرد:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)dt$$

✓ **ماتریس وزنی مثبت معین**
✓ **میزان انحراف از صفر ورودی ها با وزن دهی ورودی ها**
✓ **اهمیت نسبی ورودی ها با حالت ها**

- و یا:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)dt+x^T(t_1)Sx(t_1)$$

❖ مساله کنترل بهینه خطی

سیگنال کنترل $u(t)$ را برای بازه زمانی $t_0 \le t \le t_1$ چنان تعیین کنید که شاخص عملکرد زیر حاقل شود:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt + x^T(t_1)Sx(t_1)$$

✓ ساده سازی:

- رفتار حالت ماندگار $t_1 \to \infty$
- $S = 0$
- $t_0 = 0$

❖ حل مساله کنترل بهینه خطی به روش دوم لیاپانوف

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad u(t) = -Kx(t)$$

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt$$

سیستم حلقه بسته:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

شاخص عملکرد:

$$J = \int_0^\infty x^T(t)[Q + K^T RK]x(t)dt$$

فرض کنید که:

$$x^T(t)[Q + K^T RK]x(t) = -\frac{d}{dt}[x^T(t)Px(t)]$$

$$\Rightarrow x^T(t)[Q + K^T RK]x(t) = -x^T(t)[(A - BK)^T P + P(A - BK)]x(t)$$

$$\Rightarrow [Q + K^T RK] = -[(A - BK)^T P + P(A - BK)]$$

که با توجه به پایداری حلقه بسته نیز درست است. هم چنین شاخص عملکرد برابر است با:

$$x^T(0)Px(0)$$

$$[Q + K^T R K] = -[(A - BK)^T P + P(A - BK)] \quad \text{و} \quad R = T^T T$$

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0$$

$$A^T P + PA + \underbrace{\left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]^T}_{0} \underbrace{\left[TK - (T^T)^{-1} B^T P\right]}_{0} - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$$

گین فیدبک
حالت بهینه

معادله ریکاتی

$$\boxed{K = T^{-1}(T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P} \quad \text{و} \quad \boxed{A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0}$$

می توان نشان داد که:

$$\frac{\partial J}{\partial K}=0 \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial K}=0 \Rightarrow \qquad TK=(T^{T})^{-1}B^{T}P$$

$$\Rightarrow K=T^{-1}(T^{T})^{-1}B^{T}P=R^{-1}B^{T}P \qquad \text{(Optimal Gain Matrix)}$$

با استفاده از این مقدار ماتریس بهره بهینه، معادله ماتریسی ریکاتی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\boxed{A^{T}P+PA-PBR^{-1}B^{T}P+Q=0}$$

- ✓ قطب های سیستم حلقه بسته، قطب های بهینه

❖ قضیه (کنترل بهینه خطی)

برای سیستم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

کنترل کننده فیدبک حالت که شاخص عملکرد زیر را می نیمم کند:

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt$$

عبارت است از:

$$u(t) = -Kx(t)$$

که در آن:

$$K = R^{-1}B^T P$$

و

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

مقدار شاخص عملکرد نیز برابر است با: $x^T(0)Px(0)$

سیستم کنترل‌پذیر حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} u(t)$$

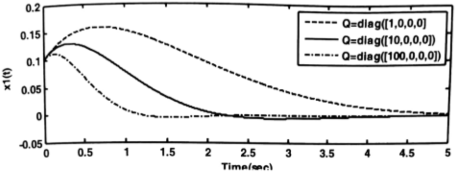
$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathrm{R} = ۱ \Rightarrow \int_۰^{\infty} \left[x_۱^۲(t) + u^۲(t) \right] \mathrm{d}t$$

معادله ماتریسی ریکاتی

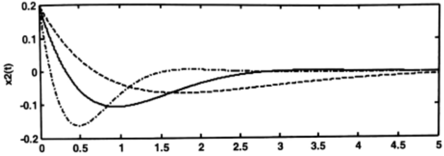
$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} [۱] \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۱ \\ ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{k} = [۱]^{-۱} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۱ \\ ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow u(t) = -x_۱(t) - \sqrt{۲} x_۲(t)$$

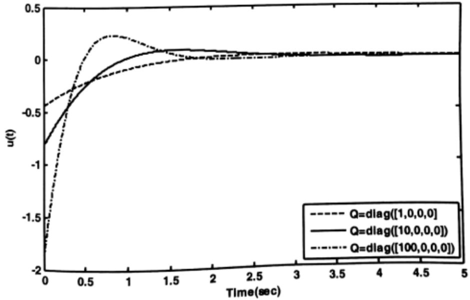


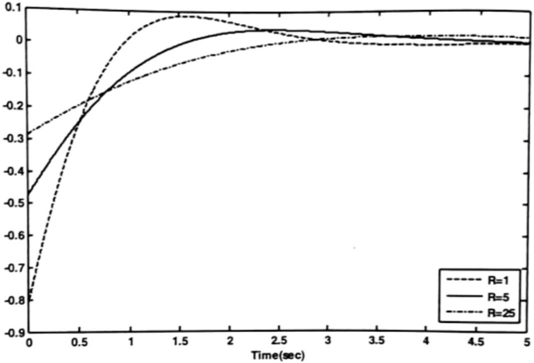
(الف)



(ب)

شکل ۸-۱ رفتار حالت‌های سیستم برای مقادیر مختلف در نظر گرفته شده ماتریس وزنی Q در مثال ۸-۱




0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time(sec)
R=1
R=5
R=25