بسمه تعالی

نظریه تحقق

(بخش اول)

درس کنترل مدرن

ایمان شریفی

۱۳۹۷

- سیستمی با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

- درصورتیکه درجه صورت و مخرج با هم یکسان باشد آنگاه $d \neq 0$.
- در نتیجه:

$$\lim_{t\to\infty} g(s) = d$$

$$g(s) = \hat{g}(s) + d$$

- لذا بدون از دست رفتن کلیات می توان همواره سیستم فضای حالت برای $\hat{g}$ را در نظر گرفت.
- یعنی تحقق زیر را همواره می توان بررسی کرد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

یادآوری- قضیه تجزیه کالمن
(Kalman Decomposition Theorem)

$$\begin{bmatrix} \boxed{\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{A}}_{co}} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{x}}_{co}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{\bar{\mathbf{B}}_{co}} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [\boxed{\bar{\mathbf{C}}_{co}} \;\; \mathbf{0} \;\; \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} \;\; \mathbf{0}]\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} = \bar{A}_{\bar{c}o}\bar{x}_{\bar{c}o}$$

در محاسبه تابع تبدیل
شرایط اولیه صفر

$$\bar{x}_{\bar{c}o} = 0$$

$$\dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \overset{0}{\bar{A}_{13}\bar{x}_{\bar{c}o}} + \bar{B}_{co}u$$

$$y = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + \overset{0}{\bar{C}_{\bar{c}o}\bar{x}_{\bar{c}o}} + Du$$

سیستم
نهایی

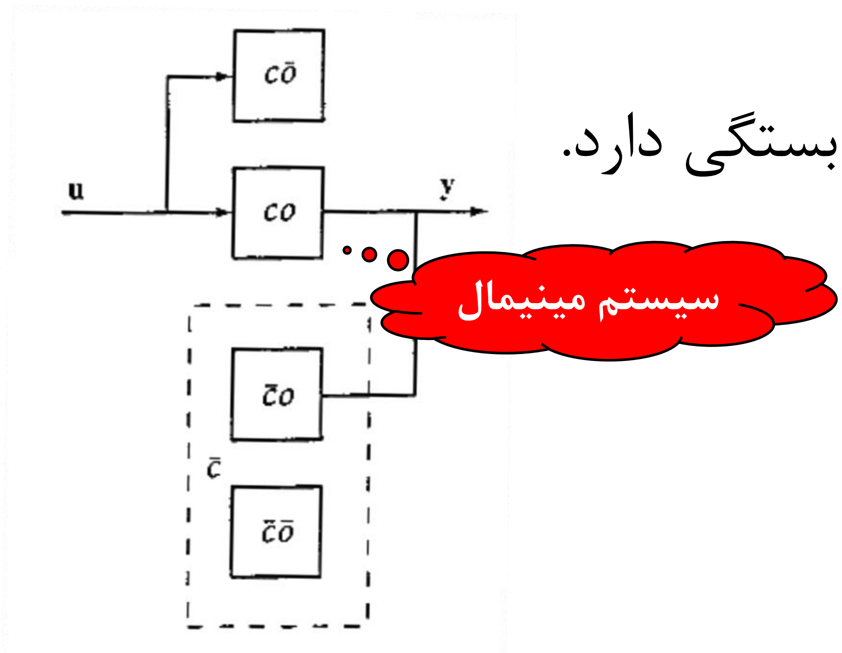
$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u \\ y = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du \end{cases}$$

تابع تبدیل
نهایی

$$G(s) = \bar{C}_{co}(sI - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u \\ y = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du \end{cases}$$

- به سیستم نهایی بدست آمده که هم رویت پذیر و هم کنترل پذیر است سیستم مینیمال گفته می شود.
- تابع تبدیل فقط به سیستم مینیمال وابستگی دارد.



- تحقق مینیمال $\Leftrightarrow$ همزمان رویت پذیر و کنترل پذیر

قضایای تحقق مینیمال

- **قضیه ۱:** دو تحقق مینیمال از یک تابع تبدیل با تبدیل همانندی به هم مرتبط هستند.

- **قضیه ۲:** اگر تابع تبدیل یک تحقق هم کنترل پذیر و هم رویت پذیر باشد (تحقق مینیمال)، هر تحقق هم مرتبه دیگر نیز هم کنترل پذیر و هم رویت پذیر است.

- **قضیه ۳:** تحقق تابع تبدیل مینیمال است اگر و فقط اگر $c\,Adj(sI - A)\,b$ و $\det(sI - A)$ نسبت به هم اول (Coprime) باشند.

ماتریس هنکل

فضای لاپلاس

$$g(s)=d+c\left[\frac{1}{s}\left(I-\frac{A}{s}\right)^{-1}\right]b$$

$$=d+c\left[\frac{1}{s}\left(I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\dots\right)\right]b$$

$$=d+\frac{cb}{s}+\frac{cAb}{s^2}+\frac{cA^2b}{s^3}+\dots$$

$$g(s)=h(0)+h(1)s^{-1}+h(2)s^{-2}+\dots$$

$$\boxed{h(0)=d \quad \text{و} \quad h(i)=cA^{i-1}b}$$

فضای زمانی

$$g(t)=d\,\delta(t)+cb+cAbt+\frac{cA^2bt^2}{2!}+\dots$$

$$=d\,\delta(t)+c\left[I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\dots\right]b$$

$$=d\,\delta(t)+ce^{At}b$$

$$\boxed{h(i)=cA^{i-1}b=\left.\frac{d^{i-1}g(t)}{dt^{i-1}}\right|_{t=0}}$$

$$H(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} h(1) & h(2) & \dots & h(n_2) \\ h(2) & h(3) & \dots & h(n_2+1) \\ \vdots & \vdots & & \\ h(n_1) & h(n_1+1) & \dots & h(n_1+n_2-1) \end{bmatrix}$$

$$H(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} cb & cAb & \dots & cA^{n_2-1}b \\ cAb & cA^2b & \dots & cA^{n_2}b \\ \vdots & \vdots & & \\ cA^{n_1-1}b & cA^{n_1}b & \dots & cA^{n_1+n_2-2}b \end{bmatrix}$$

- **قضیه ۱:** دو تحقق مینیمال از یک تابع تبدیل با تبدیل همانندی به هم مرتبط هستند.
- اثبات: فرض کنید اولین تحقق شامل $\{A_0, b_0, c_0, d\}$ و دومی شامل $\{A, b, c, d\}$ باشد.
- تابع تبدیل هر دو با هم برابر است. پس:

$$g(s) = c(sI - A)^{-1}b = c_0(sI - A_0)^{-1}b_0$$

- طبق اسلاید قبل $cA^{i-1}b = c_0 A_0^{\,i-1} b_0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{bmatrix} cb & cAb & \cdots & cA^{n-1}b \\ cAb & cA^2b & \cdots & cA^n b \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ cA^{n-1}b & cA^n b & \cdots & cA^{2n-2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 b_0 & c_0 A_0 b_0 & \cdots & c_0 A_0^{\,n-1} b_0 \\ c_0 A_0 b_0 & c_0 A_0^{\,2} b_0 & \cdots & c_0 A_0^{\,n} b_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_0 A_0^{\,n-1} b_0 & c_0 A_0^{\,n} b_0 & \cdots & c_0 A_0^{\,2n-2} b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cb & cAb & \cdots & cA^{n-1}b \\ cAb & cA^2b & \cdots & cA^n b \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ cA^{n-1}b & cA^n b & \cdots & cA^{2n-2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0b_0 & c_0A_0b_0 & \cdots & c_0{A_0}^{n-1}b_0 \\ c_0A_0b_0 & c_0{A_0}^2b_0 & \cdots & c_0{A_0}^n b_0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_0{A_0}^{n-1}b_0 & c_0{A_0}^n b_0 & \cdots & c_0{A_0}^{2n-2}b_0 \end{bmatrix}$$

- رابطه بالا با رابطه زیر معادل است:

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_0A_0 \\ \vdots \\ c_0{A_0}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & A_0b_0 & \cdots & {A_0}^{n-1}b_0 \end{bmatrix}$$

ماتریس کنترل پذیری $\emptyset_o$

ماتریس رویت پذیری $\emptyset_c$

- در نتیجه ماتریس هنکل برای $n_1 = n_2 = n$ برابر ضرب ماتریس رویت پذیری در کنترل پذیری است.

$$\Phi_o \Phi_c = \Phi_{o_\circ} \Phi_{c_\circ} \xrightarrow{\Phi_{o_\circ}^{\mathrm{T}}} \Phi_{o_\circ}^{\mathrm{T}} \Phi_o \Phi_c = \Phi_{o_\circ}^{\mathrm{T}} \Phi_{o_\circ} \Phi_{c_\circ}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \Phi_{c_\circ} &= \left(\Phi_{o_\circ}^{\mathrm{T}} \Phi_{o_\circ} \right)^{-1} \Phi_{o_\circ}^{\mathrm{T}} \Phi_o \Phi_c \\ &= \mathrm{T} \Phi_c \end{aligned}$$

$$\Phi_o \Phi_c = \Phi_{o_\circ} \Phi_{c_\circ} \xrightarrow{\Phi_c^{\mathrm{T}}} \Phi_o \Phi_c \Phi_c^{\mathrm{T}} = \Phi_{o_\circ} \Phi_{c_\circ} \Phi_c^{\mathrm{T}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \Phi_o &= \Phi_{o_\circ} \mathrm{T} \Phi_c \Phi_c^{\mathrm{T}} \left(\Phi_c \Phi_c^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \\ &= \Phi_{o_\circ} \mathrm{T} \end{aligned}$$

$$\Phi_c = T^{-1}\Phi_{c_o} = T^{-1}\begin{bmatrix} b_o & A_o b_o & \dots & A_o^{n-1} b_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T^{-1}b_o & (T^{-1}A_o T)T^{-1}b_o & \dots & (T^{-1}A_o^{n-1}T)T^{-1}b_o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \Phi_{o_o} T$$

$$= \begin{bmatrix} c_o \\ c_o A_o \\ \vdots \\ c_o A_o^{n-1} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} c_o T \\ c_o T(T^{-1}A_o T) \\ \vdots \\ c_o T(T^{-1}A_o^{n-1}T) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$A = T^{-1}A_o T$$

$$b = T^{-1}b_o$$

$$c = c_o T$$

- **قضیه ۳:** تحقق تابع تبدیل مینیمال است اگر و فقط اگر $c\,Adj(sI\ -\ A)\,b$ و $\det(sI\ -\ A)$ نسبت به هم اول (Coprime) باشند.

<u>**اثبات**:</u>

- ($\leftarrow$) فرض کنید (A,b,c) مینیمال ولی b(s)/a(s) کاهش پذیر است. در این صورت با استفاده از تابع تبدیل کاهش یافته می توان تحققی با بعد کمتر بدست آورد که این تناقض است.

- ($\rightarrow$) فرض کنید (A,b,c) غیرمینیمال اما b(s)/a(s) کاهش ناپذیر است. آنگاه هر تحقق مینیمال g تابع تبدیل با مخرج درجه کمتر از n دارد. بنابراین b(s)/a(s) نمیتوانسته کاهش ناپذیر باشد که این تناقض است.

تعریف پارامترهای مارکوف:

$$\left\{D, CA^{i-1}b, i = 1, 2, \cdots\right\}$$

قضیه مرتبه تحقق می نیمال تابع تبدیل (با داشتن پارامترهای مارکوف) عبارت است از:

$$n = \max_{n_1, n_2} rank\,[H(n_1, n_2)]$$

اثبات:

$$H(n,n) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \Phi_o \Phi_c$$

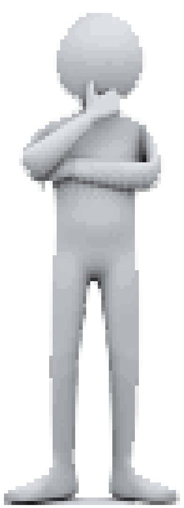
- اگر سطر یا ستونی بخواهد اضافه شود باید بصورت cA^n یا $A^n b$ باشد که از قضیه کیلی همیلتون به ترتیب به بقیه سطرها و ستونها وابسته خطی است.

- لذا رتبه $H(n,n)$ نمیتواند از n بیشتر باشد و برای $n_1, n_2 > n$ داریم
$$rank(H(n_1, n_2)) = n$$

تعریف پارامترهای مارکوف:

$$\left\{D, CA^{i-1}b, i=1,2,\cdots\right\}$$

$$\begin{bmatrix} cb & cAb & \cdots & cA^{n-1}b \\ cAb & cA^2b & \cdots & cA^nb \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ cA^{n-1}b & cA^nb & \cdots & cA^{2n-2}b \end{bmatrix}$$



مثال ۴-۱- تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$g(s)=\frac{۲s+۱}{s^۲+۴s+۳}$$

که از بسط سری بی‌نهایت آن پارامترهای مارکوف را بدست می‌آوریم:

$$h(۰)=۰$$
$$h(۱)=۲$$
$$h(۲)=-۷$$
$$h(۳)=۲۲$$
$$h(۴)=-۶۷$$
$$h(۵)=۲۰۲$$
$$\vdots$$

ماتریس‌های هانکل متناظر عبارتست از

$$H(۱,۱)=[۲],\ H(۲,۲)=\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ -۷ & ۲۲ \end{bmatrix},\ H(۳,۳)=\begin{bmatrix} ۲ & -۷ & ۲۲ \\ -۷ & ۲۲ & -۶۷ \\ ۲۲ & -۶۷ & ۲۰۲ \end{bmatrix}, \ldots$$

از آنجائیکه رتبه[H(۲,۲)] = رتبه[H(۳,۳)] = ۲، لذا مرتبه تحقق می‌نیمال تابع تبدیل ۲ است.