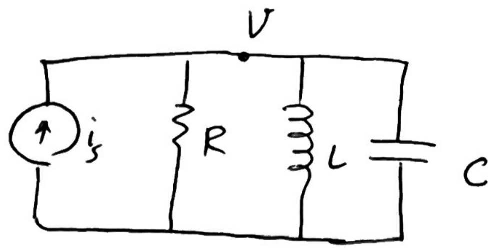
باسمه تعالی

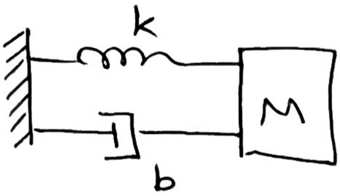
مطالب مروری کنترل خطی :

مدلسازی سیستم های کنترلی :



$$i_s = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{C}\int v\,dt$$

Force-current Analogy



$$F = m\frac{dv}{dt} + k\int v\,dt + bv$$

Force-Voltage Analogy

$$v_s = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

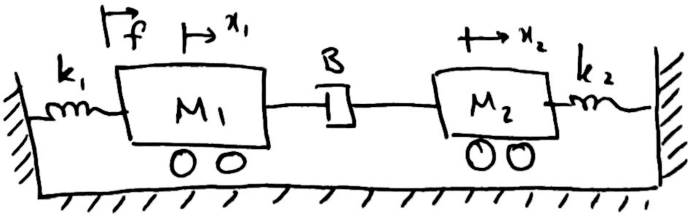
مدل مکانیکی	مدل الکتریکی
F	i
m	C
k	$1/L$
b	$1/R$

Force-Current Analogy

مدل مکانیکی	مدل الکتریکی
F	v
m	L
B	R
k	$1/C$

Force-Voltage Analogy

مثال



گره ۱ : $\sum F = m_1\ddot{x}_1 \rightarrow m_1\ddot{x}_1 = \overbrace{-B(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1x_1}^{\text{نیروی مقاوم}} + \overbrace{f}^{\text{نیروی محرک}}$

گره ۲ : $\sum F = m_2\ddot{x}_2 \rightarrow m_2\ddot{x}_2 = -B(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2x_2$

$$\rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + B(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_1 x_1 = f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + B(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

* تعریف متغیرهای حالت بصورت

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = z_1 \\ \dot{x}_1 = z_2 \\ x_2 = z_3 \\ \dot{x}_2 = z_4 \end{array}\right\}$$

* دقت کنید تعداد متغیرهای حالت منتسب به x_1 ، به تعداد مشتقات ظاهر شده از آن است ، یعنی اینجا تا $\ddot{x}_1$ پیش رفته‌ایم که مشتق دوم است ، پس حداکثر تا دو متغیر حالت به آن اختصاص می‌دهیم.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{z}_2 = \ddot{x}_1 = -\frac{B}{m_1} z_2 + \frac{B}{m_1} z_4 - \frac{k_1}{m_1} z_1 + \frac{f}{m_1} \end{cases}$$

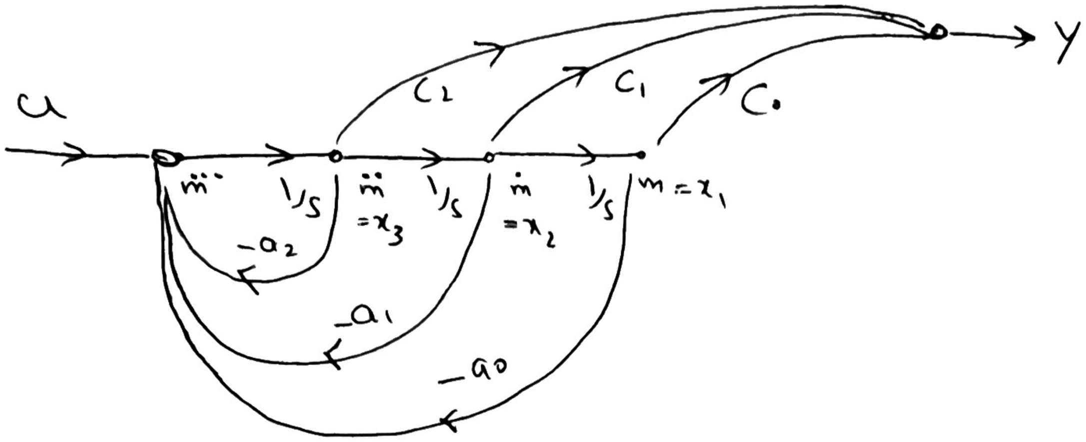
$$\begin{cases} \dot{z}_3 = z_4 = \dot{x}_2 \\ \dot{z}_4 = \ddot{x}_2 = -\frac{B}{m_2} z_4 + \frac{B}{m_2} z_2 - \frac{k_2}{m_2} z_3 \end{cases}$$

$$\dot{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{B}{m_1} & 0 & \frac{B_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{B}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{B}{m_2} \end{bmatrix}}_{A} Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} f$$

تحقق های کانونیکال

$$\frac{Y}{U} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \begin{matrix} \times m \\ \times m \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} Y = c_2 \ddot{m} + c_1 \dot{m} + c_0 m \\ U = \dddot{m} + a_2 \ddot{m} + a_1 \dot{m} + a_0 m \end{cases}$$

$$\rightarrow \dddot{m} = u - a_2 \ddot{m} - a_1 \dot{m} - a_0 m$$



$$\dot{x}_3 = u - a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ Y = [c_0 \ \ c_1 \ \ c_2] \, x \end{cases}$$

تحقق کانونیکال کنترل کننده ←

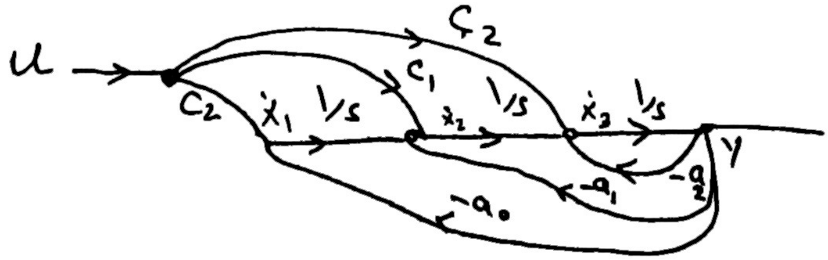
در روش دوم طرفین بسط می کنیم .

$$\dddot{y} + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = c_2 \ddot{u} + c_1 \dot{u} + c_0 u$$

$$\dddot{y} = -a_2 \ddot{y} - a_1 \dot{y} - a_0 y + c_2 \ddot{u} + c_1 \dot{u} + c_0 u$$

$$\dddot{y} = [-a_2 \ddot{y} + c_2 \ddot{u}] + [-a_1 \dot{y} + c_1 \dot{u}] + [-a_0 y + c_0 u]$$

$$Y = \int [-a_2 y + c_2 u] + \iint [-a_1 y + c_1 u] + \iiint [-a_0 y + c_0 u]$$



* دقت فرمائید که طوری عمل نمودیم که آنهایی که مثلاً دو انتگرال گیر داشتند در یکجا و آنهایی که سه انتگرال گیر داشتند در یکجا قرار گیرند و الی آخر . . .

$$\dot{x}_1 = c_0 u - a_0 x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_3 + c_1 u \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u$$
$$\dot{x}_3 = x_2 - a_2 x_3 + c_2 u$$

$$Y = x_3 = [0 \quad 0 \quad 1] X$$

تحقق کانونیکال رویتگر . (رویت کننده)

* همانطور که دیده می شود $A_c = A_0^T$, $B_c = B_0^T$, $C_c = C_0^T$.

* به این اصل دوآلیتی (Duality) گفته می شود .

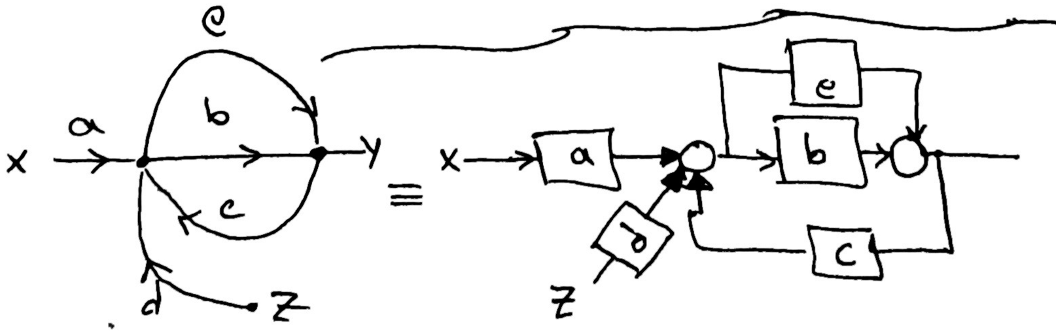
تحقق کانونیکال کنترل پذیری :

$$A_{c_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b_{c_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{c_0} = [\beta_{n-1} \; \beta_{n-2} \; \cdots \; \beta_0]$$

تحقق کانونیکال رویت پذیری : برطبق اصل دوآلیتی :

$$A_{o_0} = A_{c_0}^T$$
$$C_{o_0} = b_{c_0}^T \quad , \quad b_{o_0} = C_{c_0}^T$$

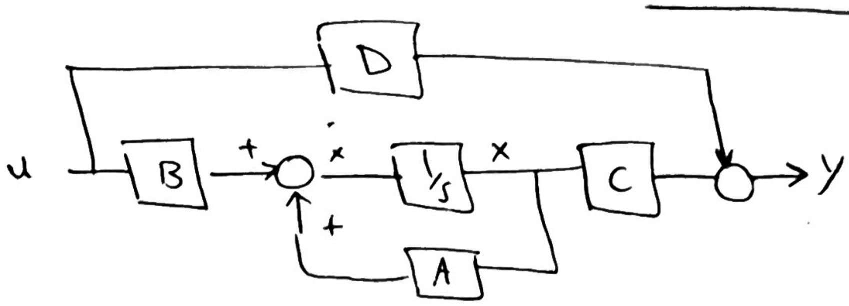


* به عمل بلند شدن
و نزدیک شدن e لغت شود
و تفاوت با c لغت شود .

5

فضای حالت :

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$



تبدیل به حوزه S :
$$\begin{cases} SX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \qquad (I)\\ Y=CX(s)+DU(s)\end{cases}$$

$$(I)\longrightarrow (sI-A)X(s)=x(0)+BU(s)\longrightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)+(sI-A)^{-1}x(0)$$

* تبدیل معکوس به فضای زمانی :

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}BU(s)+(sI-A)^{-1}x(0)\right\}$$

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\}+\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\,x(0)\quad,\quad \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\underset{\text{تعریف}}{\triangleq}\Phi(t)$$

$$x(t)=\Phi(t)*Bu(t)+\Phi(t)\,x(0)$$

$$x(t)=\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau+\Phi(t)\,x(0)$$

* همانطور که بیان شد ، تعریف داریم : $\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\triangleq\Phi(t)$ که ماتریس انتقال حالت است .

یادآوری : $\mathcal{L}^{-1}\{(s-a)^{-1}\}=e^{at}\Longrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=e^{At}$

یادآوری : قبل از ادامه بحث چند یادآوری مهم خواهیم داشت :

قضیه لایبنیز :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)\,dt\right)=f(x,b(x))\cdot\frac{d}{dx}b(x)-f(x,a(x))\cdot\frac{d}{dx}a(x)+\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt$$

لم:

$$e^{at}=1+\frac{(at)^1}{1!}+\frac{(at)^2}{2!}+\frac{(at)^3}{3!}+\cdots$$

$$e^{At}=I+(At)^1+\frac{(At)^2}{2!}+\frac{(At)^3}{3!}+\cdots$$

قضیه کیلی ـ همیلتون: هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند.

* توجه نمائید که معادله مشخصه $det(sI-A)$ است که در مخرج $(sI-A)^{-1}$ ظاهر شده بود.

$$p(s):=det(sI-A)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_0$$

$$p(A_{n\times n})=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_0 I_{n\times n}=\emptyset$$

نتیجه فرعی قضیه کیلی همیلتون: A^n را می‌توان براساس ضرایب توانهای کمتری از A^n نوشت:

$$A^n=-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}-\cdots-a_0 I$$

* نکته مهم: ما در درس کنترل مدرن از نتیجه فرعی قضیه کیلی همیلتون که در بالا بیان شد و همچنین سری تیلور e^{At} به مراتب استفاده خواهیم نمود.

مثال: ثابت کنید $Ae^{At}=e^{At}A$.

پاسخ: کافیست از بسط تیلور e^{At} ماتریس A را از چپ و از راست در آن ضرب نموده و مقایسه نمائیم.

مثال: $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$، ماتریس انتقال حالت $(\Phi(t))$ را محاسبه نمائید:

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}\longrightarrow (sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+4s+3}\begin{bmatrix}s+4 & 1\\ -3 & s\end{bmatrix}=\Phi(s)$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+3}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+3}\right\}\\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3}{s^2+4s+3}\right\} & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s}{s^2+4s+3}\right\}\end{bmatrix}\longrightarrow \Phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ، A^{100} را محاسبه نمائید:

---

* با توجه به قضیه کیلی همیلتون ، درصورتیکه یک چند جمله‌ای مانند $F(A)$ از هر درجه‌ای بالاتر از n داشته باشیم می توانیم آن چند جمله‌ای را به درجات با بیشتر تا $n-1$ نوشت:

$$F(A) = A^m + b_{m-1}A^{m-1} + \dots + b_0 \longrightarrow F(\lambda) = \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + b_0$$

$$\frac{F(\lambda)}{P(\lambda)} = \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)} + Q(\lambda) \longrightarrow F(\lambda) = R(\lambda) + P(\lambda)\,Q(\lambda)$$

که $P(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه

$$F(A) = R(A) \xleftarrow{\text{کیلی همیلتون}} F(\lambda_i) = R(\lambda_i) \xleftarrow{\text{if } \lambda = \lambda_i}$$

وقتی دو چندجمله‌ای با هم برابر باشند، لذا مشتقات آنها نیز با هم برابرند:

$$F^{(l)}(A) = R^{(l)}(A) \qquad (\text{مشتق } l \text{ ام})$$

حال برمی‌گردیم به مثال قبل: چون A ، 2×2 است پس A^{100} را می‌توان براساس ضریبی از A^0 و A^1 نوشت:

$$* \ \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^{100} = \alpha_1 A + \alpha_2 I \longrightarrow \dfrac{\partial A^{100}}{\partial A} = \dfrac{\partial(\alpha_1 A + \alpha_2)}{\partial A} \\ 100A^{99} = \alpha_1 I \end{cases}$$

چون ریشه مضاعف داریم مشتق‌گیری کردیم

$$\begin{cases} \lambda_1^{100} = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2 \longrightarrow 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 100\lambda_1^{99} = \alpha_1 \longrightarrow -100 = \alpha_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -100 \\ \alpha_2 = -99 \end{cases}$$

$$\longrightarrow A^{100} = -100A - 99I = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -99 & -100 \\ 100 & 101 \end{bmatrix}$$

(Similarity Transformation) = تبدیل همانندی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & (I) \\ y = Cx \end{cases}$$

$$z = Px \rightarrow \dot{z} = P\dot{x} \rightarrow P^{-1}\dot{z} = \dot{x} \xrightarrow{(I)} P^{-1}\dot{z} = AP^{-1}z + Bu$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{z} = (PAP^{-1})\, z + (PB)\, u \\ y = (CP^{-1})z \end{cases}$$