بسمه تعالی

رویتگرهای خطی و طراحی جبران کننده

بخش دوم

ایمان شریفی

برگرفته از اسلایدهای کتاب اصول کنترل مدرن
دکتر علی خاکی صدیق

❖ رویتگرهای مرتبه کاهش یافته

- ✓ رویتگرهای مرتبه کامل
- ✓ رویتگرهای مرتبه کاهش یافته لیونبرگر

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \rightarrow m - \text{Input}$$

$$y(t) = Cx(t) \rightarrow l - \text{Output}$$

$$z(t) = Lx(t) \rightarrow L: \ (n - l) \times n \ \text{Dimensional Matrix}$$

تخمینی از ترکیب خطی متغیرهای حالت سیستم

- معادله دینامیکی فضای حالت رویتگر مرتبه کاهش یافته لیونبرگر :

$$\dot{z}(t) = Dz\left(t\right) + Ru(t) + Ty(t)$$

این ماتریس ها را چنان انتخاب کنید که *خطای رویت*
سیستم دینامیکی رویتگر به طور مجانبی صفر شود:

$$e(t) = z(t) - Lx(t)$$

- فرض کنید که:

$$e \triangleq z - Lx$$

$$\dot{z} - L\dot{x} = Dz(t) + Ty(t) + Ru(t) - LAx(t) - LBu(t)$$

$$\dot{e} = D(e + Lx(t)) + Ty(t) + Ru(t) - LAx(t)$$

$$\dot{e} = De(t) + \underbrace{DLx(t) + TCx(t) - LAx(t)}_{0} + \underbrace{Ru(t) - LBu(t)}_{0}$$

$$LA - DL = TC$$

$$R = LB$$

شرایط وجود پاسخ؟

$$\Rightarrow z(t) - Lx(t) = e^{Dt}[z(0) - Lx(0)]$$

نرخ صفر شدن خطای رویت

درصورت پایداری سیستم، در شرایط تعادل و در زمان بینهایت $t=\infty$ داریم:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} \hat{x}(t)$$

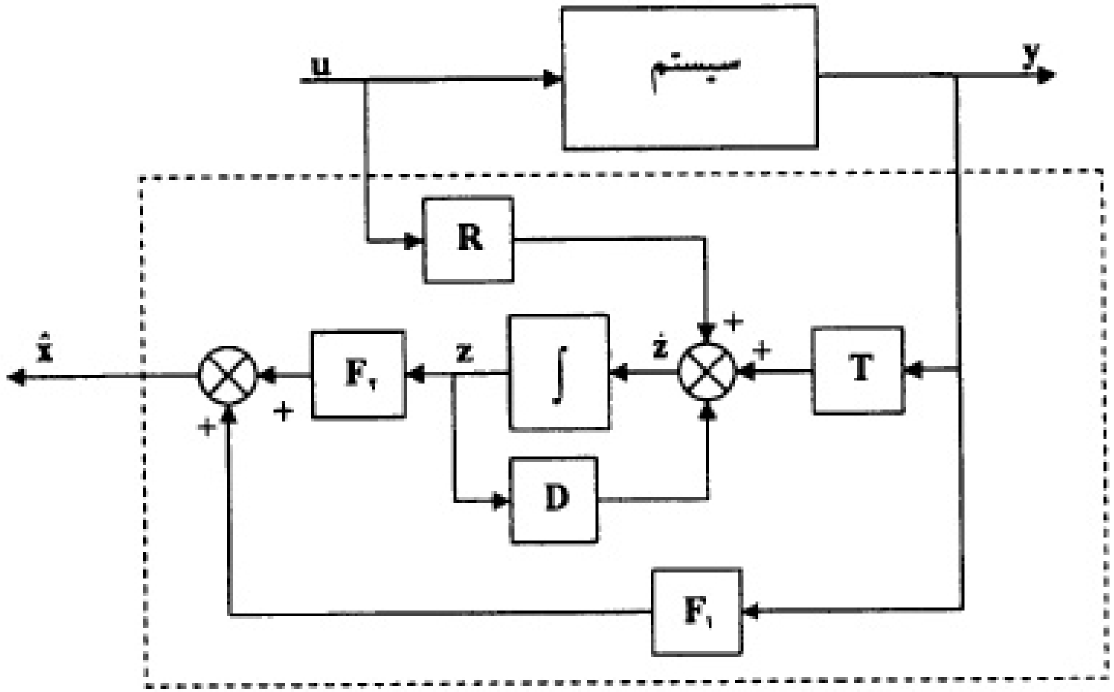
$$\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} : \text{If Full Rank} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = F_1 y(t) + F_2 z(t)$$

Where,

$$F_1 C + F_2 L = I_n$$

✓ دیاگرام بلوکی:



روینگر مرتبه کاهش یافته

$$LA - DL = TC \longrightarrow LQ(Q^{-1}AQ) - D(LQ) = T(CQ)$$

- **مراحل طراحی**

✓ تعیین ماتریس بهره رویتگر: D : with $n - l$ Eigenvalues

✓ محاسبه ماتریس تبدیل ناویژه: Q : with $CQ = \begin{bmatrix} 0_{l,n-l} & I_l \end{bmatrix}$

✓ تفکیک ماتریس: $LQ = \begin{bmatrix} I_{n-l} & \widetilde{L}_{n-l,l} \end{bmatrix}$

✓ تفکیک ماتریس: $$\widetilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

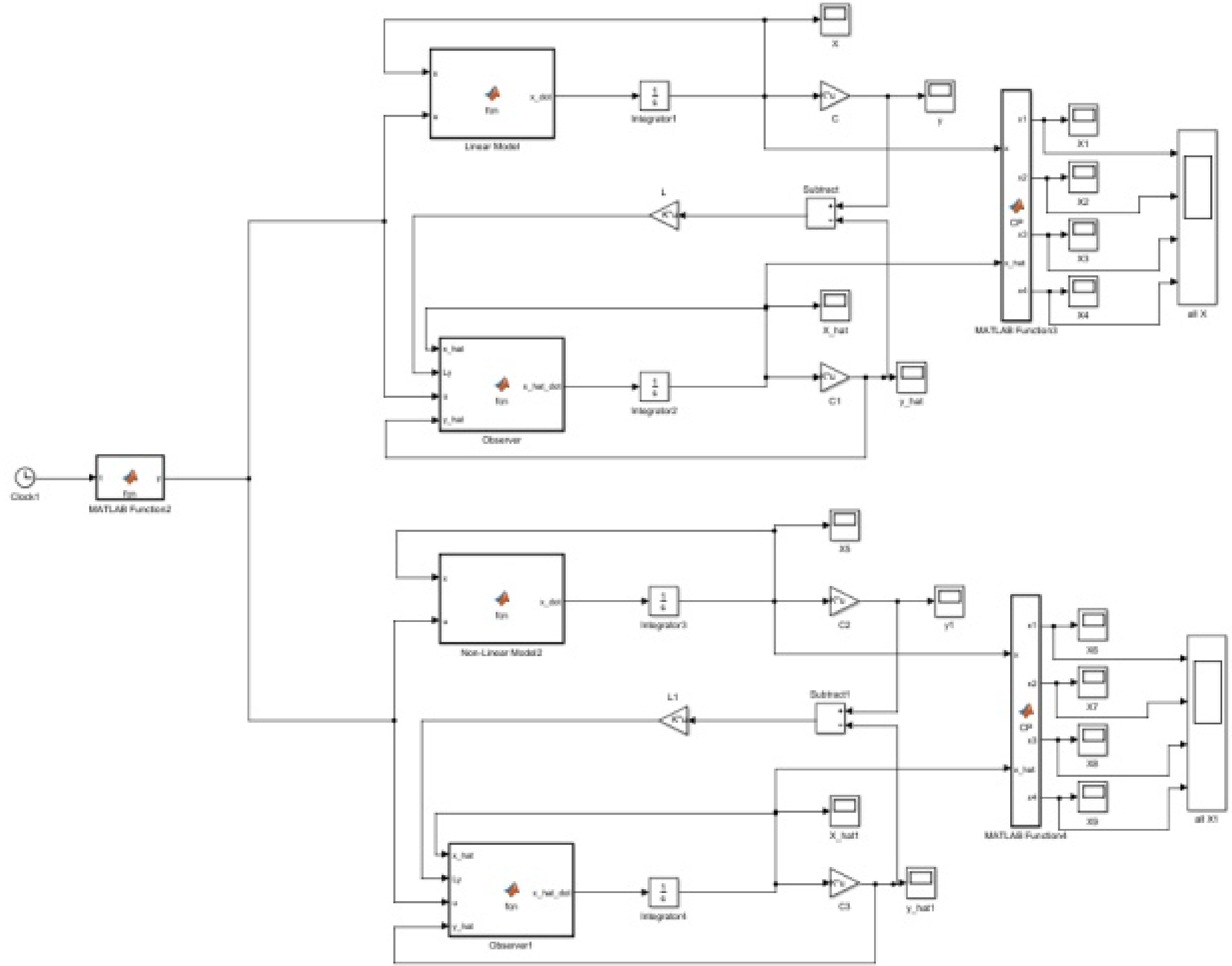
✓ تعیین ماتریس های رویتگر:

$$LQ(Q^{-1}AQ) - D(LQ) = T(CQ)$$

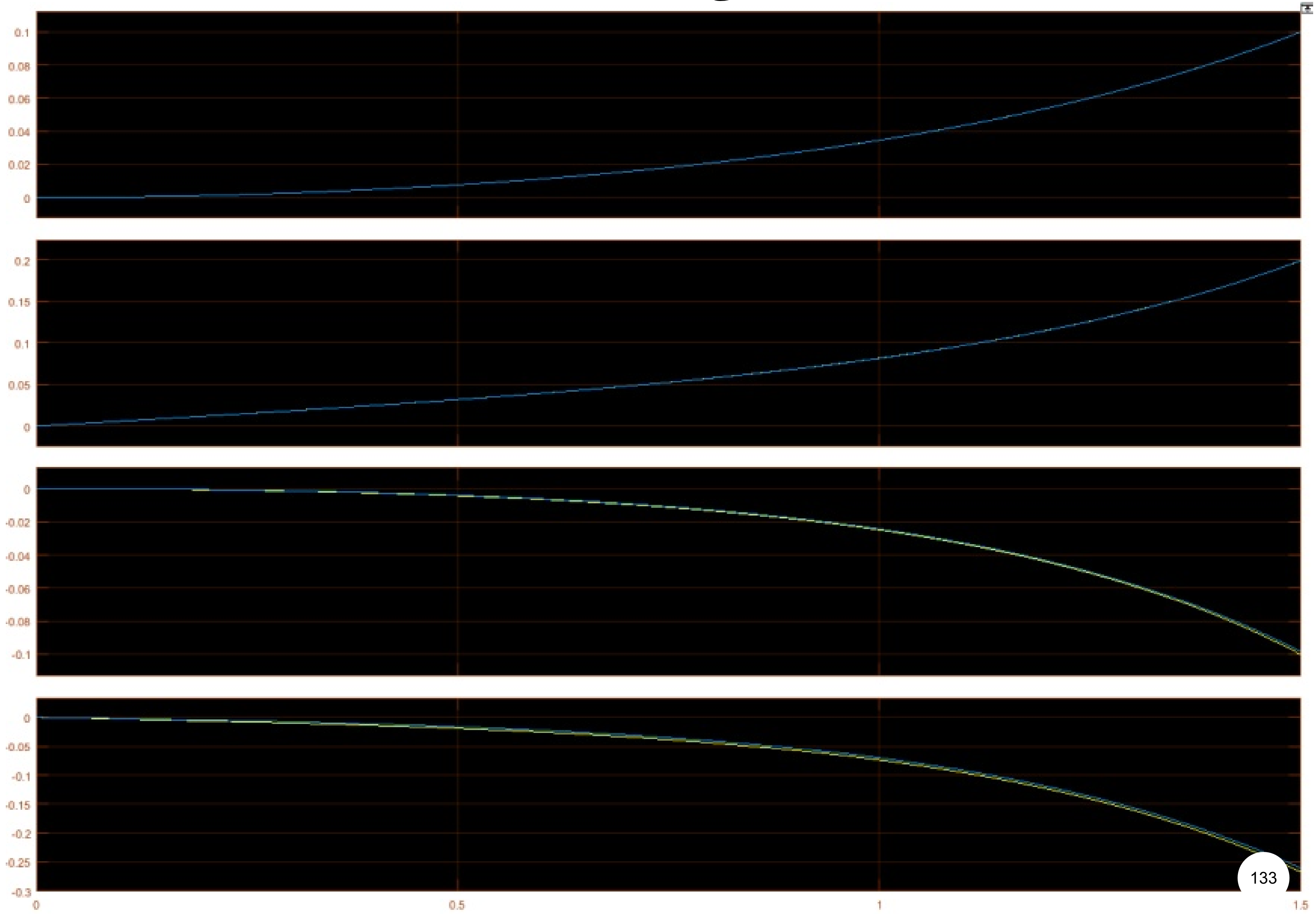
$$\Rightarrow \widetilde{A}_{11} + \widetilde{L}\widetilde{A}_{21} = D, \widetilde{A}_{12} + \widetilde{L}\widetilde{A}_{22} - D\widetilde{L} = T$$

$$L = \begin{bmatrix} I_{n-l} & \widetilde{L}_{n-l,l} \end{bmatrix} Q^{-1}, R = LB$$

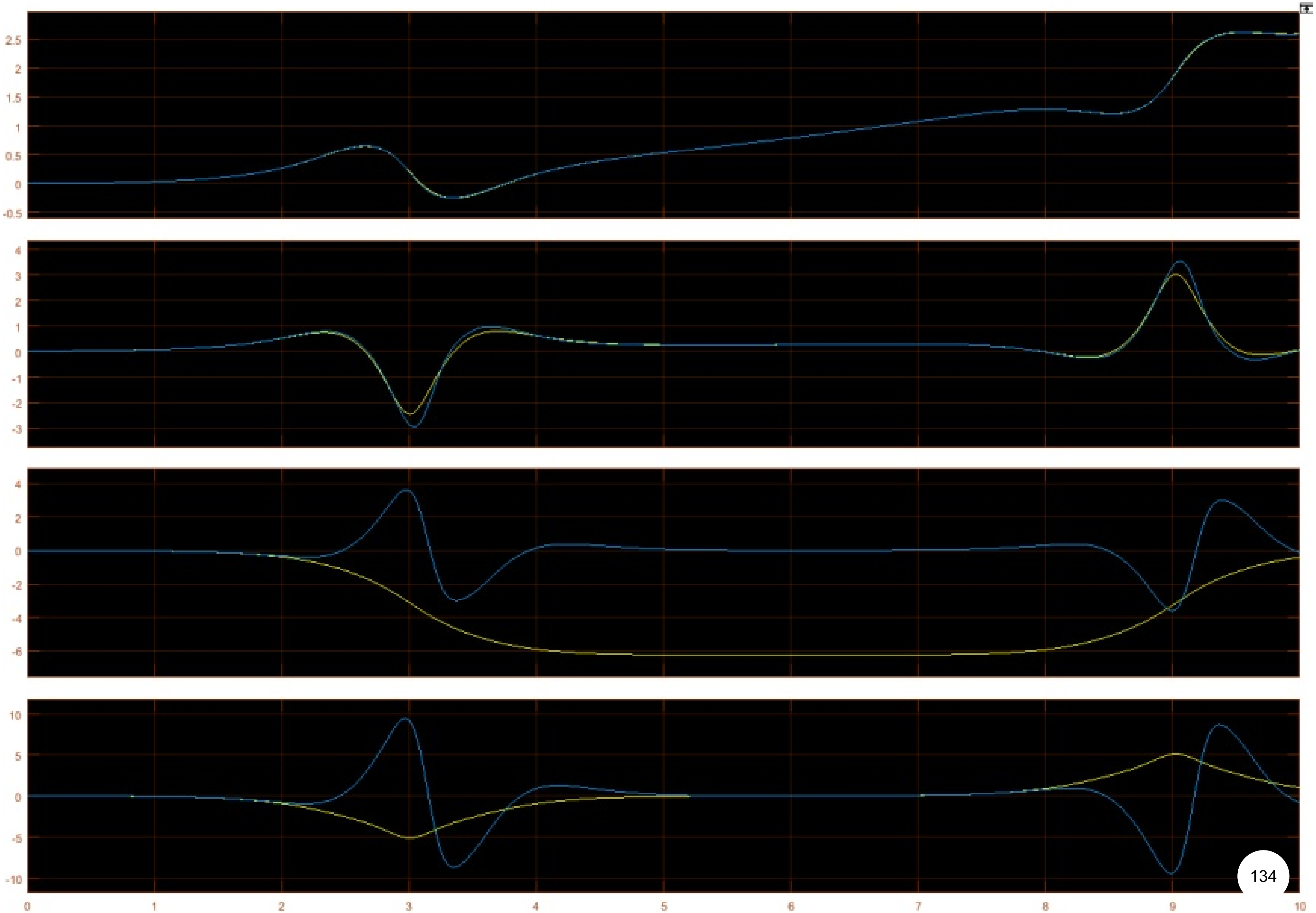
پیاده سازی فیدبک حالت بر روی مدل غیرخطی



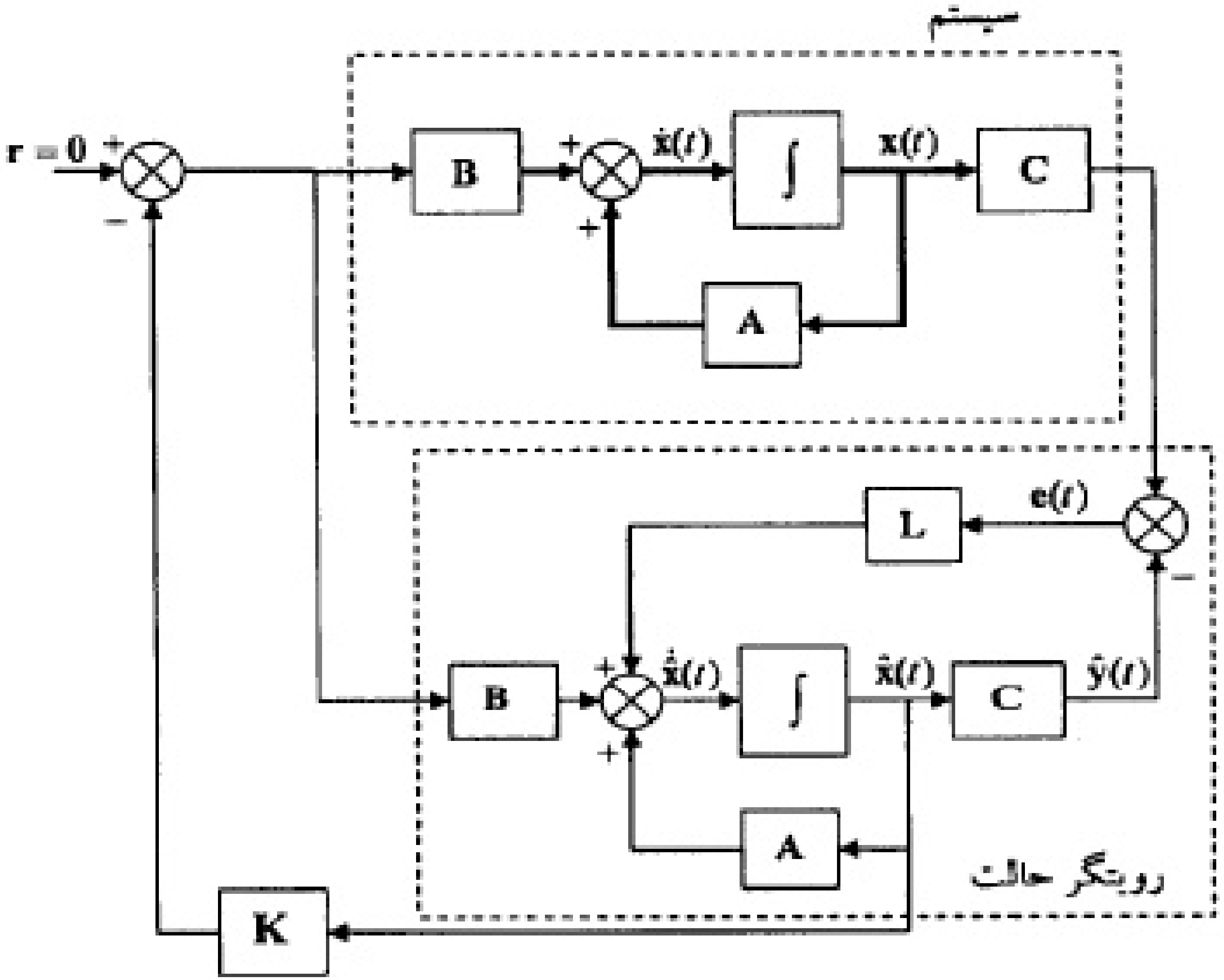
تخمینگر روی مدل غیرخطی بدون کنترل کننده بعد از ۱.۵ ثانیه



تخمینگر روی مدل غیرخطی بدون کنترل کننده بعد از ۱۰ ثانیه



- طراحی سیستم های کنترل فیدبک حالت با رویتگر

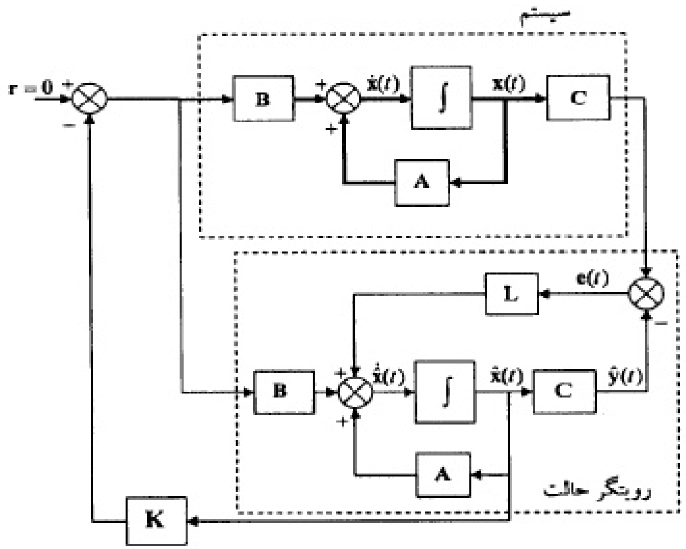


❖ طراحی سیستم های کنترل فیدبک حالت با رویتگر

- ساختار سیستم کنترل فیدبک حالت با رویتگر مرتبه کامل

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ u = -K\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u = -K\hat{x}(t) \end{cases}$$



$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - BK - LC]\hat{x}(t) + \overbrace{Ly(t)}^{LCx(t)}$$

- تحلیل سیستم حلقه بسته:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \qquad \Rightarrow \dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t)$$

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = [A - BK]x(t)$$

انتخاب ماتریس ها: طراحی رویتگر + کنترل

- اصل جداپذیری (Separation Principle)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \\ T^{-1} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} sI \quad A+BK & BK \\ 0 & sI-A+LC \end{bmatrix} =$$

$$\det(sI-A+BK)\det(sI-A+LC)$$

اصل جداپذیری

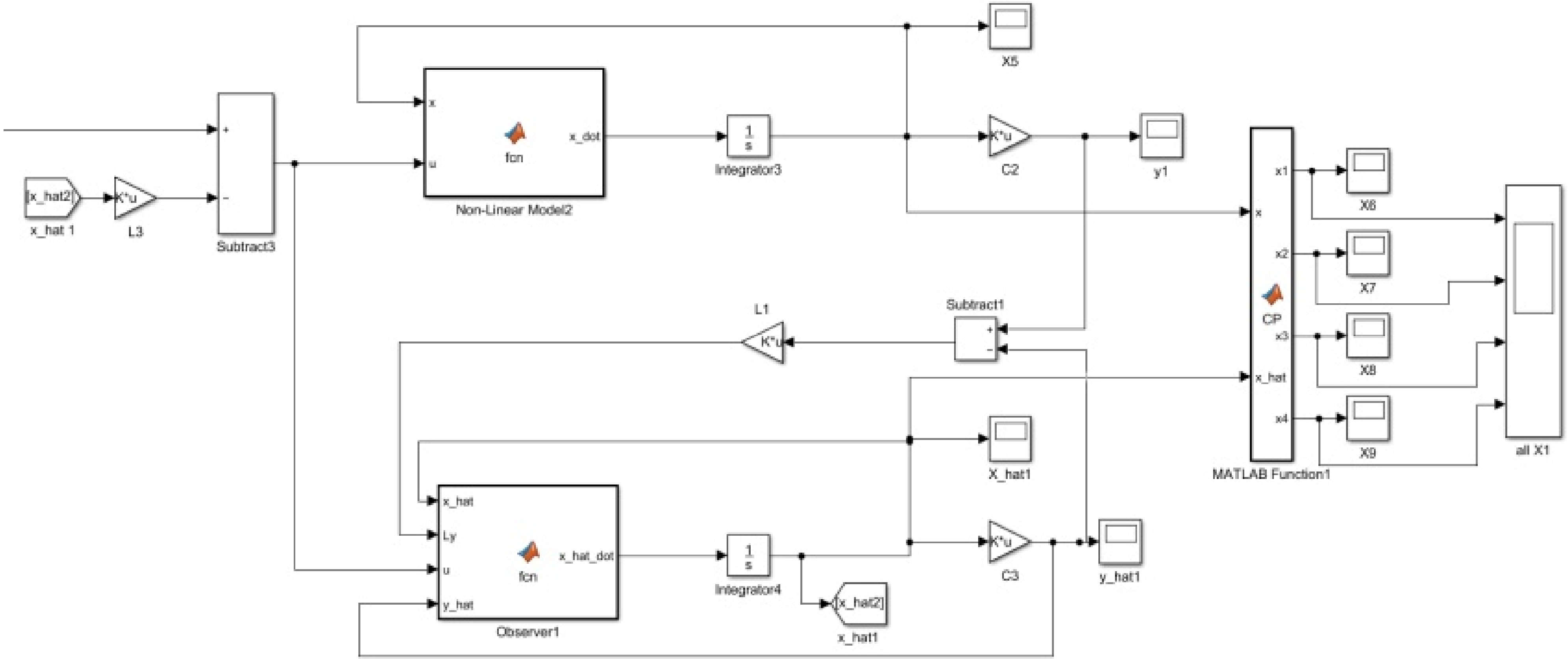
- اصل جدایی پذیری یعنی علیرغم اینکه کنترل کننده‌ی حالت بر پایه اطلاعات رویتگر طراحی می‌شود، اما رویتگر و کنترل کننده‌ی حالت مستقل از هم طراحی می‌شوند.

- اصل جدایی پذیری یعنی علیرغم اینکه کنترل کننده‌ی حالت بر پایه اطلاعات رویتگر طراحی می‌شود، اما رویتگر و کنترل کننده‌ی حالت مستقل از هم طراحی می‌شوند.

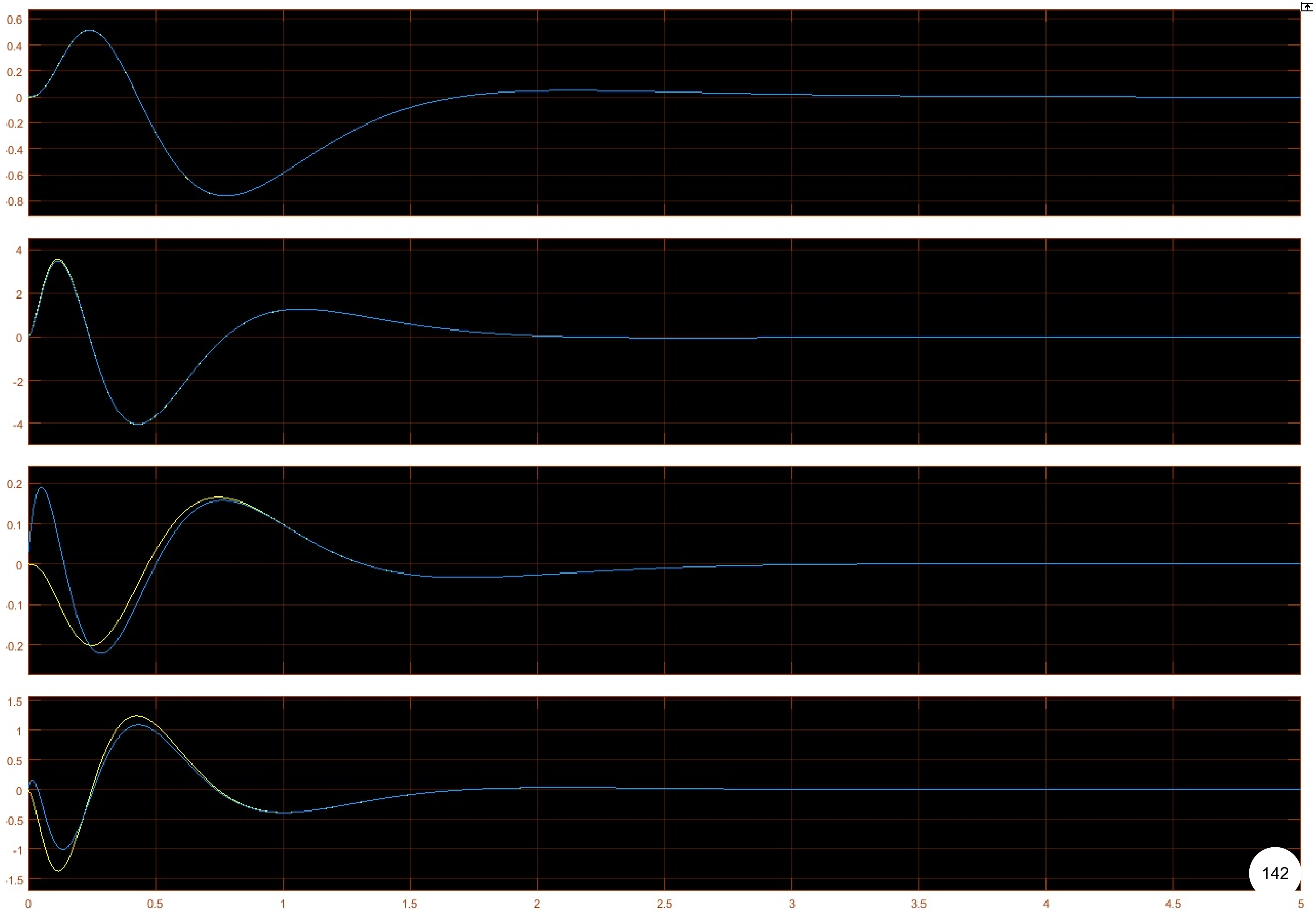
طراحی کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از رویتگر

```
>> k=place(A,B,[-2,-2.5,-3,-3.5])

k =

  -16.6896  -25.3522 -275.2805 -117.1060

>> L=place(A',C',[-6,-7.5,-9,-10.5])'

L =

   1.0e+03 *

    0.0330
    0.4093
   -0.7252
   -2.1204
```

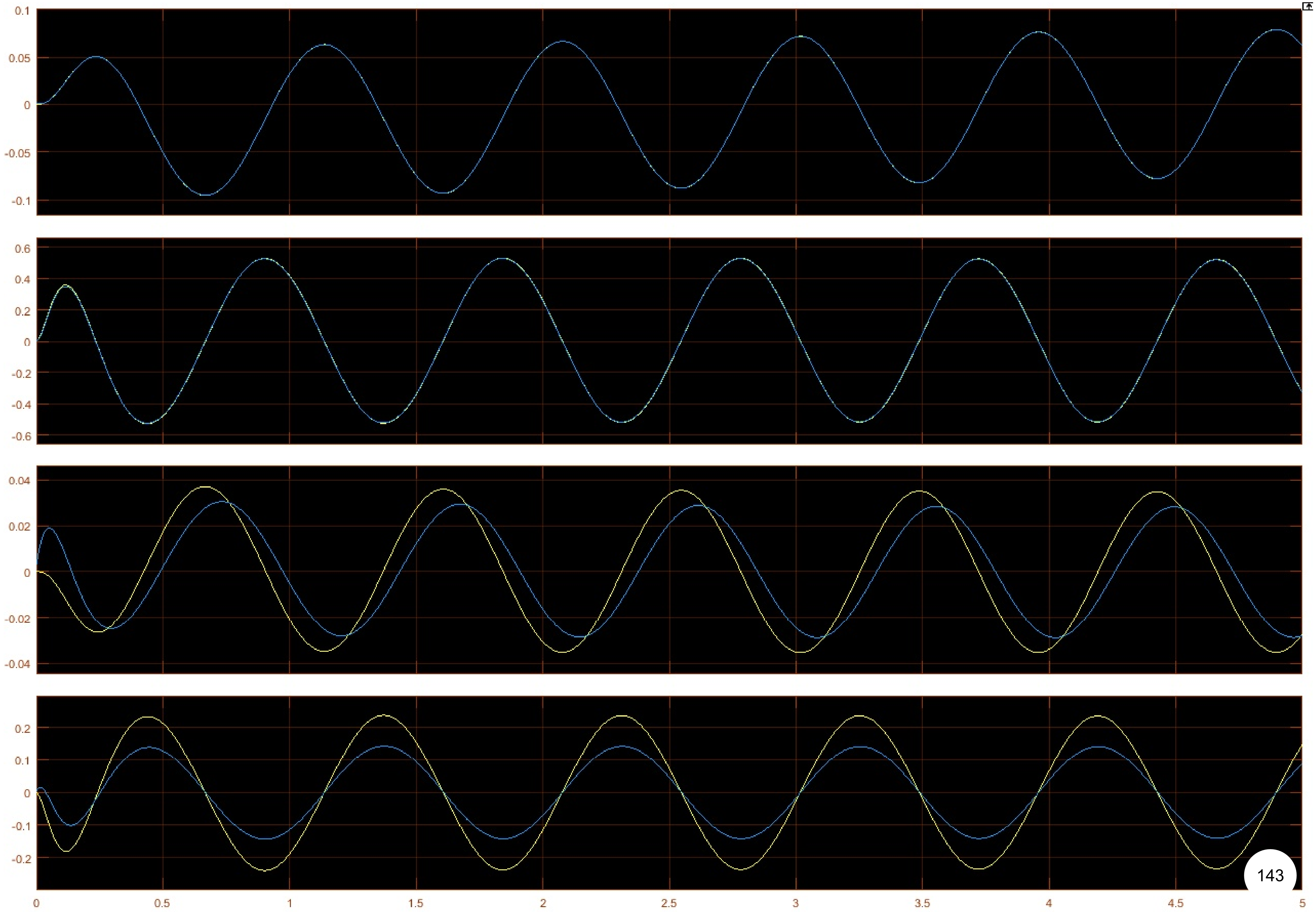
طراحی کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از رویتگر



کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از رویتگر بعد از ۵ ثانیه

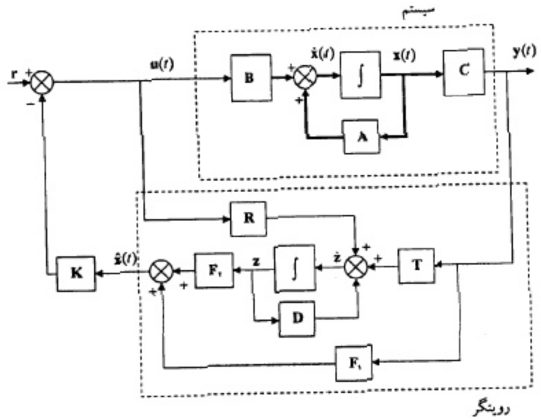


کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از رویتگر برای سیستم غیرخطی بعد از ۵ ثانیه



• ساختار سیستم کنترل فیدبک حالت با رویتگر مرتبه کاهش یافته

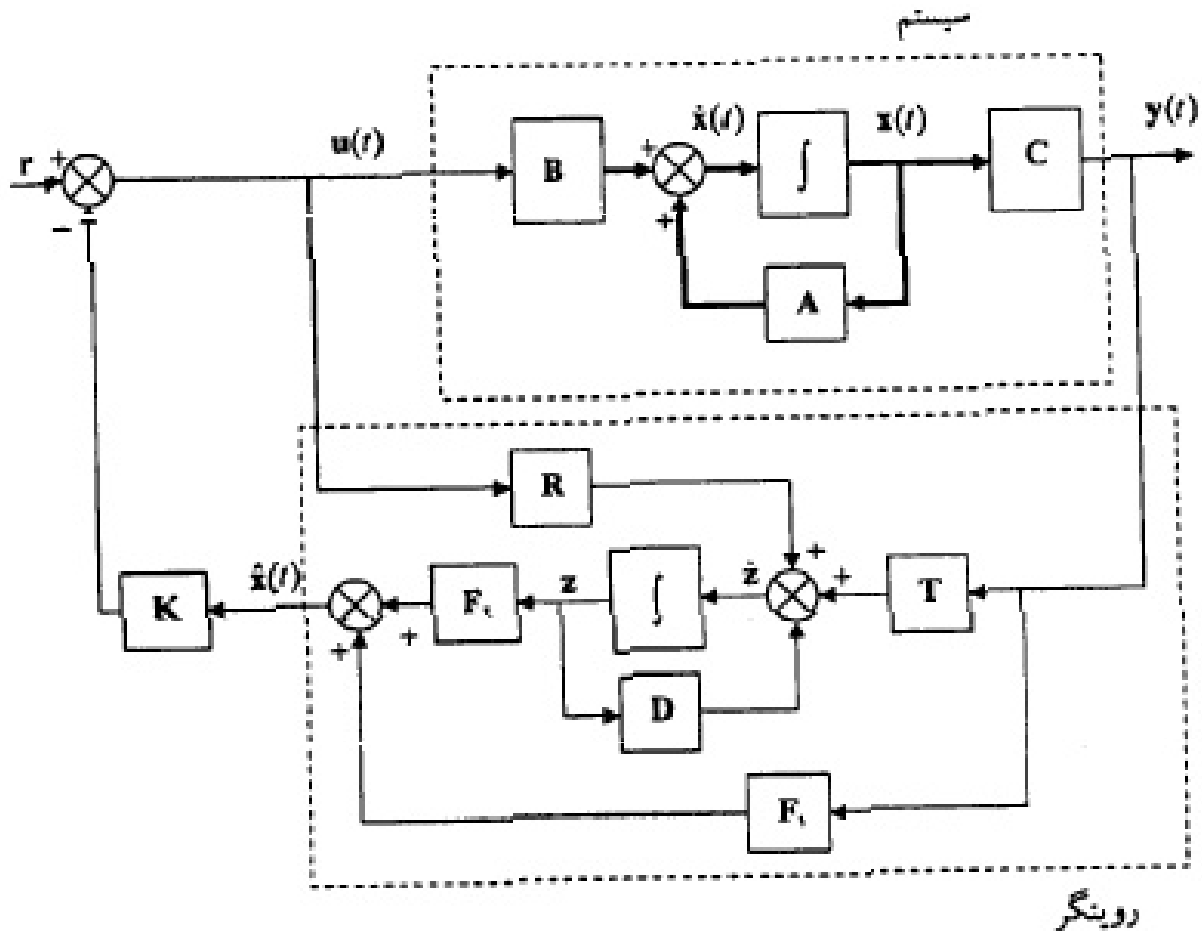
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = -Kx(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Dz(t) + Ru(t) + Ty(t) \\ \hat{x}(t) = F_1 y(t) + F_2 z(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad \Rightarrow u(t) = -KF_1Cx(t) - KF_2 z(t)$$

• دیاگرام بلوکی حلقه بسته:



- تحلیل سیستم حلقه بسته:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad \Rightarrow u(t) = -KF_1Cx(t) - KF_2z(t)$$

$$\text{C-L System} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKF_1C & -BKF_2 \\ TC - LBKF_1C & D - LBKF_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - L\dot{x}(t), T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BKF_2 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

انتخاب ماتریس ها: طراحی رویتگر + کنترل