تمرین سری چهارم (سری دوم بخش دکتر خلج) درس زیست شناسی مصنوعی – تئوری

امین سعیدی

۴۰۰۲۱۱۵۷۹

سوال اول

الف:

$$\frac{dD}{dt} = -K_+[D][R] + K_-[D_{occ}]$$

$$\frac{dR}{dt} = -K_+[D][R] + K_-[D_{occ}]$$

$$\frac{dD_{occ}}{dt} = +K_+[D][R] - K_-[D_{occ}]$$

ب:

According to the question: $K_+[D][R] = K_-[D_{occ}] \rightarrow [D_{occ}] = \frac{K_+}{K_-} * [D][R] \xRightarrow{\frac{K_+}{K_-}=K_m^{-1}} K_m^{-1}[D][R]$

$$D_{tot} = D + D_{occ} = [D] * \left(1 + \frac{[R]}{K_m}\right) = \frac{[D](K_m + [R])}{K_m}$$

$$\frac{D_{tot}}{D} = \frac{K_m + [R]}{K_m} \leftrightarrow \frac{D}{D_{tot}} = \frac{K_m}{K_m + [R]}$$

$$\beta(R) = \beta_0 * \frac{D}{D_{tot}} = \beta_0 * \frac{K_m}{K_m + [R]}$$

پ:

$$\frac{dx}{dt} = \beta(x) - \gamma x = \beta_0 * \frac{K_m}{K_m + x} - \gamma x$$

ت:

$$\beta(R) = \beta_0 * \frac{D_{occ}}{D_{tot}} = \beta_0 * \left(1 - \frac{D}{D_{tot}}\right) = \beta_0 * \left(1 - \frac{K_m}{K_m + [R]}\right) = \beta_0 * \frac{[R]}{K_m + [R]}$$

ث:

$$\frac{dx}{dt} = \beta(x) - \gamma x = \beta_0 * \frac{x}{K_m + x} - \gamma x$$

سوال دوم

$$x' = ax + bxy = f(x,y)$$
$$y' = cy + dxy = g(x,y)$$

الف:

fixed. Points: points in which: $x' = 0$ and $y' = 0 \rightarrow$ sloving system of equations

$$x' = 0 \rightarrow ax = -bxy \rightarrow a = -by \rightarrow y^* = -\frac{a}{b} > 0$$

$$y' = 0 \rightarrow cy = -dxy \rightarrow c = -dx \rightarrow x^* = -\frac{c}{d} > 0$$

$$\rightarrow \text{fixed.point} = (x^*, y^*) = \left(-\frac{c}{d}, -\frac{a}{b}\right)\ and\ (0,0)$$

(0,0) is unstable

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} a+by & bx \\ dy & c+dx \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} a + b\left(-\frac{a}{b}\right) & b\left(-\frac{c}{d}\right) \\ d\left(-\frac{a}{b}\right) & c + d\left(-\frac{c}{d}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I): \det(A) = -\frac{bc}{d} * \frac{ad}{b} = -ac < 0$$

$$(II): trace(A) = 0$$

$$(I)\ and\ (II) \rightarrow \left(-\frac{c}{d}, -\frac{a}{b}\right) \text{ is saddle point}$$

$$\text{Linear approximation} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \dot{x} = -\frac{bc}{d} y\ and\ \dot{y} = -\frac{ad}{b} x$$

$$\text{Finding eigenvalues and eigenvectors of A} \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & -\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

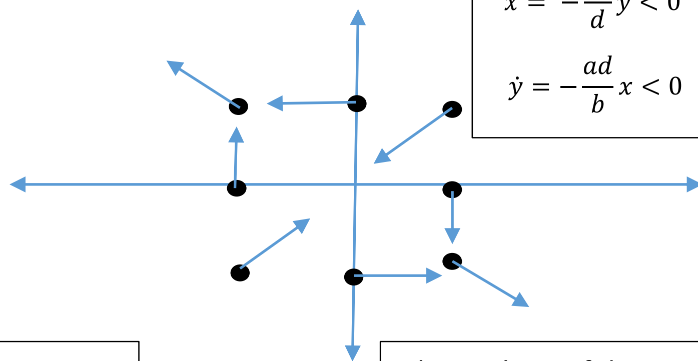
$$\rightarrow \lambda^2 - ac = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{ac} \rightarrow Av = \lambda v \text{ and } v = \begin{pmatrix} ?_1 \\ ?_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{bc}{d} ?_2 \\ -\frac{ad}{b} ?_1 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{ac} \begin{pmatrix} ?_1 \\ ?_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{v will find out}$$

ب:

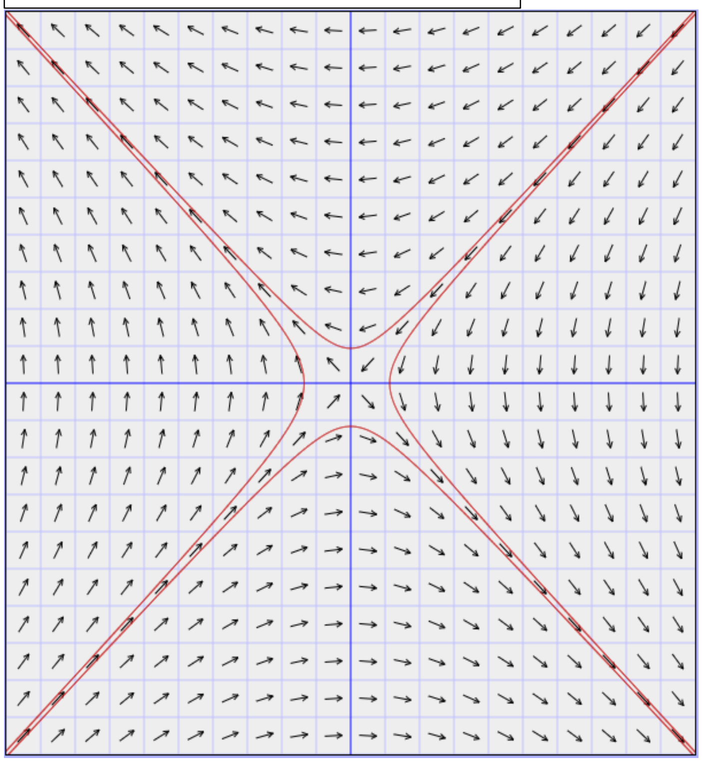
در ادامه phase plane تقریب خطی سیستم دینامیکی سوال توسط خودم برای چند نقطه رسم شده است و پس از آن به دلیل کیفیت بهتر و دقت بیشتر از [این سایت] برای رسم phase plane سیستم دینامیکی صورت سوال استفاده شده است. که تصویر آن آورده شده است.

$$\dot{x} = -\frac{bc}{d}y < 0$$

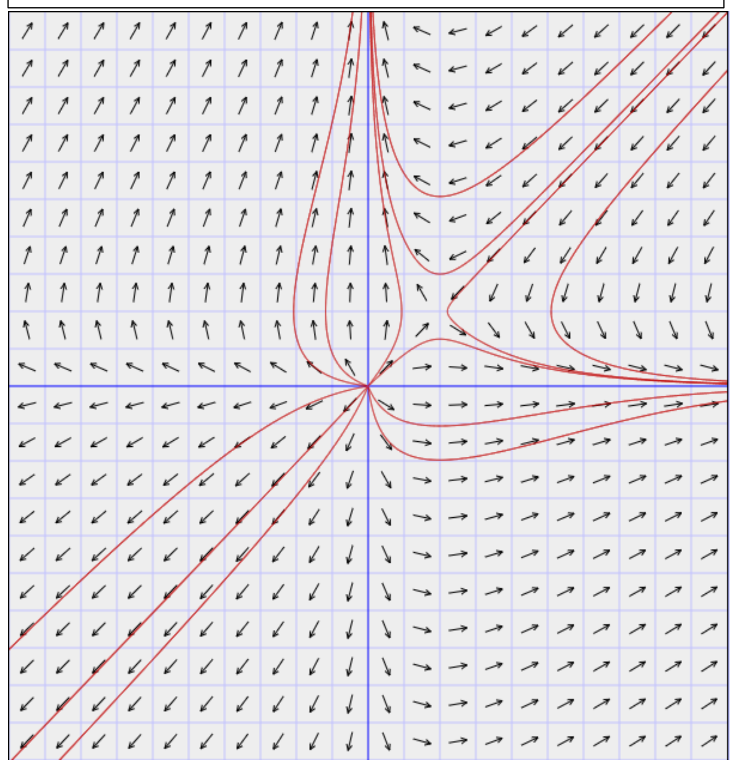
$$\dot{y} = -\frac{ad}{b}x < 0$$



phase plane of Linear approximation



phase plane of dynamic system: $a, c = 1 \;\&\; b, d = -1$



ج:

با توجه به phase plane این سیستم، میتوان دید که در ربع اول مختصات و خارج در مربع ما بین مبدا مختصات و f.p هرگاه x زیاد شود، y کم خواهد شد، به صفر نمیرسد اما کم خواهد شد، لذا میتوان نتیجه گرفت که x اثر repressor روی y دارد و برعکس. در ربع دوم و چهارم نیز همین رفتار مشاهده میشود. هنگامی که یا x یا y سمت بی نهایت میروند، آن یکی به صفر میل میکند.

سوال سوم

الف:

شبکه های ژنی محصول انتخاب تکاملی هستند. از دست دادن یک یال در شبکه آسان است: یک جهش واحد در محل اتصال X در پروموتر Y می تواند باعث از بین رفتن ارتباط دو ژن شود و زمانی که ارتباط از بین رفت یال از بین میرود و شبکه اسپارس تر میشود.

$$\text{all undirected edges without self-loops: } E_{t_1} = \text{Number of total edges of a graph with n nodes} = \binom{n}{2}$$

$$all\ directed\ edges\ with\ slef - loops: E_{t_2} = n * (n-1) + n = n^2$$

$$\rightarrow \text{according to the question, sparsity} = \frac{E}{E_{t_1}} = \frac{578}{\binom{423}{2}} = 0.006475$$

$$\rightarrow \text{according to the question, sparsity} = \frac{E}{E_{t_2}} = \frac{578}{423^2} = 0.003230 = p = \text{sparseness}$$

ب:

We have N nodes, we want to choose n nodes among them: $N(N-1) \dots (N-n) \approx N^n$ (if: $n \ll N$)

The probability of finding g arrows between these n nodes, in sparse network $= p^g$ where p is sparseness

$$\rightarrow \langle N_g \rangle = a^{-1} * N^n * p^g \rightarrow \lambda = \frac{A}{N} \rightarrow p = \frac{A}{N^2} = \frac{\lambda}{N} \rightarrow \ \langle N_g \rangle = a^{-1} * N^n * \left(\frac{\lambda}{N}\right)^g = a^{-1} * N^{n-g} * \lambda^g$$

a = symmetry factor equal to the number of permutations of the nodes that leave the graph unchanged.

For a feedback loop of three nodes, $a = 3$, and for the FFL $a = 1$

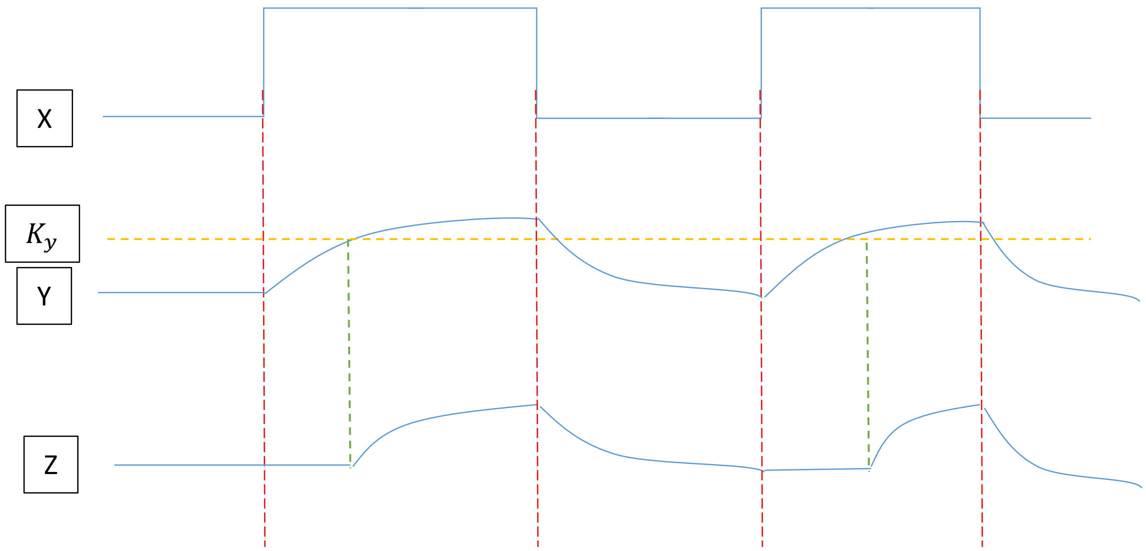
ج:

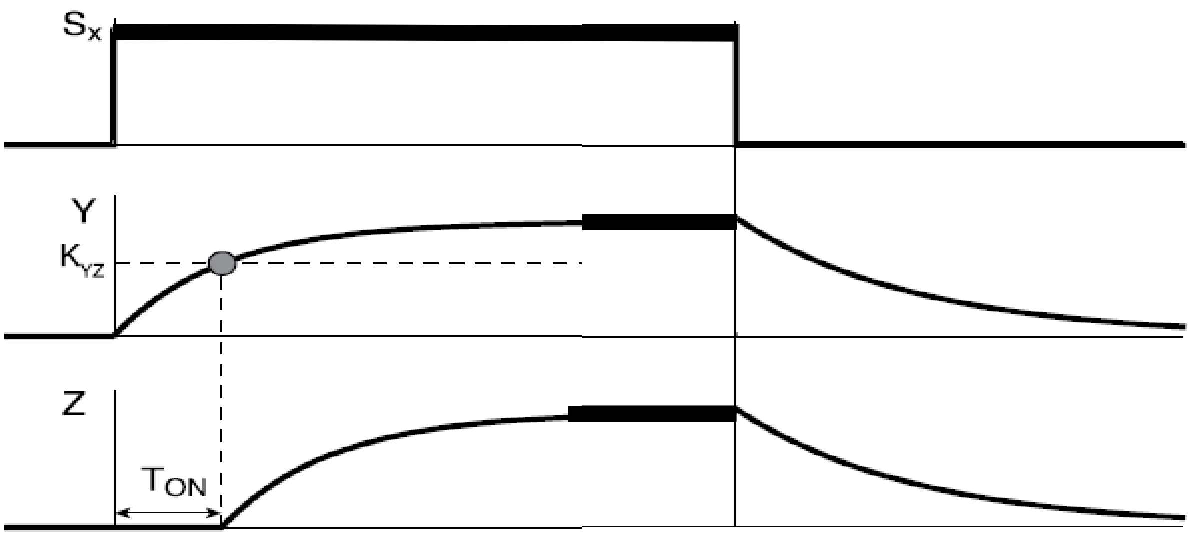
$$\text{FFL} \rightarrow n = g = 3 \rightarrow N^0 \rightarrow \langle N_g \rangle = a^{-1} * N^{n-g} * \lambda^g = 1 * \ N^0 * \lambda^3 = \lambda^3$$

$$\text{FBL} \rightarrow n = g = 3 \rightarrow N^0 \rightarrow \langle N_g \rangle = a^{-1} * N^{n-g} * \lambda^g = 3^{-1} * \ N^0 * \lambda^3 = \frac{\lambda^3}{3}$$

سوال چهارم

الف:





ب:

$$\frac{dy}{dt} = \beta_y \theta(X^* > K_{xy}) - \alpha_y y$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta_z \theta(X^* > K_{xy}) \theta(Y^* > K_{zy}) - \alpha_z z$$

$$y^* = y_{st}(1 - e^{-\alpha_y t}), y_{st} = \frac{\beta_y}{\alpha_y} = \frac{f(\lambda_x)}{\alpha_y} = \frac{f(\lambda_x)}{\alpha}$$

Assume T_{on}, is the time needed for Y^* to reach its threshold $\rightarrow \mathrm{Y}^*(T_{on}) = Y_{st} * (1 - e^{-\alpha_y T_{on}}) = K_{yz}$

$$\rightarrow T_{on} = \frac{1}{\alpha_y} * \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_{yz}}{Y_{st}}}\right) = \frac{1}{\alpha} * \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_{yz}}{\frac{f(\lambda_x)}{\alpha}}}\right) = \frac{1}{\alpha} * \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{K_{yz} * \alpha}{f(\lambda_x)}}\right) = \frac{1}{\alpha} * \ln\left(\frac{f(\lambda_x)}{f(\lambda_x) - K_y * \alpha}\right)$$

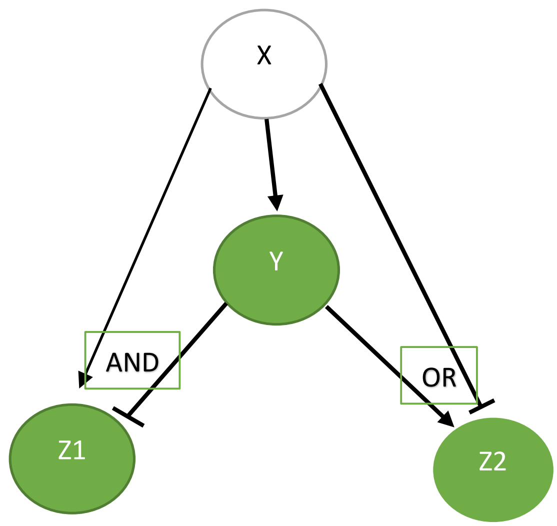
پ:

از آن جایی که با فعال شدن x ژن y شروع به فعال شدن میکند، در نتیجه x فعال کننده y است.

اگر نوع گیت ورودی به z1 را and در نظر بگیریم، z1 با فعال نبودن y و فعال شدن x شروع به فعال شدن میکند و هنگامی که ایکس فعال است و y نیز فعال است، شروع به غیر فعال شدن، لذا x یک فعال کننده برای z1 و y یک غیرفعال کننده برای z1 است.

مشاهده میشود که z2 با فعال نبودن y و فعال نبودن x فعال است و هنگامی که ایکس فعال است و y فعال نیست، شروع به غیر فعال شدن میکند. و همچنین هنگامی که هم x و هم y فعال اند، z2 فعال است. اگر گیت or باشد، x یک غیرفعال کننده و y یک فعال کننده خواهد بود.

شکل به صورت مقابل خواهد بود:



سوال پنجم

$$\dot{x} = x + y - x(x^2 + y^2) = f(x,y)$$

$$\dot{y} = -(x - y) - y(x^2 + y^2) = g(x,y)$$

$$\text{Cartesian-Polar Coordinates} \rightarrow x = r * \cos(\theta)\,, y = r * \sin(\theta)\,, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

الف:

$$\text{fixed. Points: points in which: } \dot{x} = 0 \; and \; \dot{y} = 0 \rightarrow \text{sloving system of equations}$$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow x + y = \; x(x^2 + y^2) \rightarrow y = x(-1 + x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = 0 \rightarrow -x + y = \; y(x^2 + y^2) \rightarrow x = -y(-1 + x^2 + y^2)$$

$$2y = \; y(x^2 + y^2) + x(x^2 + y^2) = (x + y)(x^2 + y^2)$$

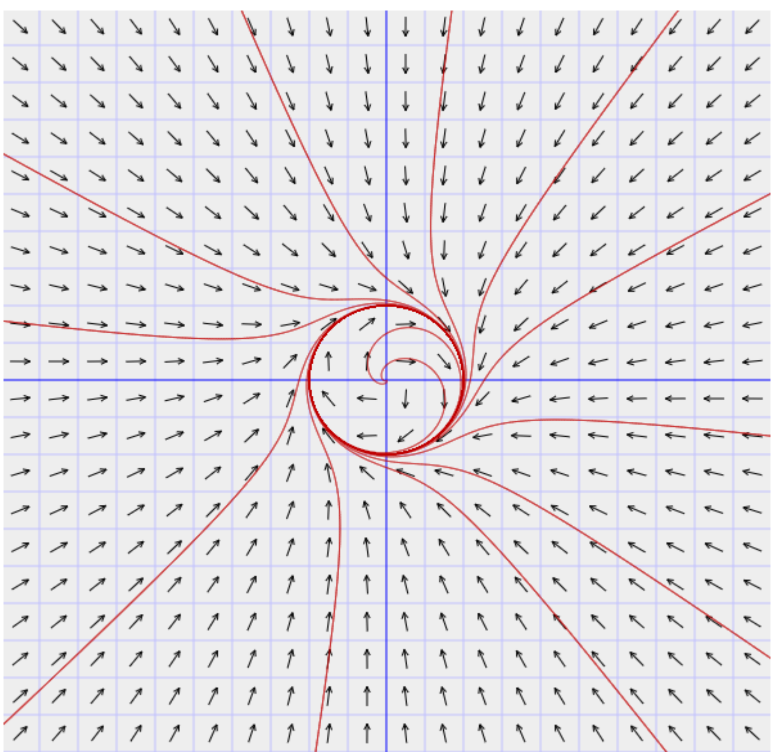
$$2x = \; x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) = (x - y)(x^2 + y^2)$$

$$\rightarrow \text{fixed.point} = (x^*, y^*) = (0{,}0) \rightarrow spiral$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ 1 - 3y^2 - x^2 & -1 - 2xy \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ب:

در اینجا روش کار را به درستی بلد نبودم، به همین دلیل دوباره برای کیفیت بهتر و دقت بیشتر از این سایت برای رسم phase plane سیستم دینامیکی صورت سوال استفاده کردم. که تصویر آن آورده شده است. با توجه به این تصویر یک چرخه حدی پایدار حول نقطه (صفر،صفر) مشاهده میشود.



سوال پنجم (با استفاده از این لینک)

الف و ب:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \ y - x(x^2 + y^2) \\ -x + \ y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

$$1\ f.p \to x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

fixed. Points: points in which: $\dot{x} = 0$ *and* $\dot{y} = 0 \to$ sloving system of equations

$$\dot{x} = 0 \to x + y = \ x(x^2 + y^2) \to y = x(-1 + x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = 0 \to -x + y = \ y(x^2 + y^2) \to x = -y(-1 + x^2 \ \ + y^2)$$

$$\to \text{fixed.point} = (x^*, y^*) = (0,0) \to spiral$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & 1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}_{x^*,y^*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I)\text{: } \det(A) = \ 1 + 1 = \ 2 > 0$$

$$(II)\text{: } trace(A) = 1 + 1 = 2$$

$$(I)\ and\ (II) \to \text{unstable f.p}$$

Cartesian-Polar Coordinates $\to x = r * \cos(\theta)\,, y = r * \sin(\theta)\,, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta' = \frac{\cos(\theta)}{r} * g_2(r,\theta) - \frac{\sin(\theta)}{r} * g_1(r,\theta)$$

$$r' = \cos(\theta) * g_1(r,\theta) + \sin(\theta) * g_2(r,\theta)$$

$$\to r' = \cos(\theta)\,(r * (\cos(\theta) + \sin(\theta)) - r^3\cos(\theta) + \sin(\theta) * (r * (-\cos(\theta) + \sin(\theta)) - r^3\sin(\theta))$$

$$\to r' = r * (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - r^3\cos(\theta) - r^3 * (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \ r - \ r^3 = r(1 - r^2)$$

$$\to \theta' = -1$$

$$\int \frac{1}{r(1 - r^2)} dr = \int dt \to \ln(r) - \frac{1}{3}\ln(1 - r^3) = t + C_1$$

$$\to \theta = -t + C_2$$

$$r' = 0 \to r = 0\ unstable\ f.p$$

$$r' = 0 \to r = 1\ limit\ cycle$$