

Tema 1. Conceptos Básicos y Balance Energético

Ecuación de conservación de la energía interna

Ecuación de conservación de la energía mecánica

ENERGÍA TOTAL

$$G[(h + \frac{1}{2}v^2 + U_P)_s - (h + \frac{1}{2}v^2 + U_P)_e] = W + \bar{Q}_V.$$

SE RESTAN

ENERGÍA INTERNA

$$G(e_s - e_e) = \Phi_V + \bar{Q}_V$$

ENERGÍA MECÁNICA

$$E_s - E_e = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U_P \right)_s - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U_P \right)_e = W + \Phi_V.$$

↓ Energía mecánica específica ↓ Trabajo intercambiado ↓ Pérdidas

Balance de energía mecánica y rendimientos en bombas

$$\eta_t = \eta_h \eta_v \eta_o$$

Altura manométrica

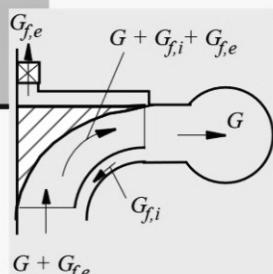
$$gH_m = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U_P \right]_e^s.$$

$$W = Gg(H_m + \Delta H_i)$$

Altura de pérdidas internas

$$g\Delta H_i = \frac{\Phi_V}{G} + \frac{v'^2}{2}$$

$$\eta_m = \eta_h = \frac{GgH_m}{GgH_m + \Phi_V + (Gv'^2/2)} = \frac{H_m}{H_m + \Delta H_i}$$



$$\eta_v = \frac{G}{G + G_f} = \frac{Q}{Q + Q_f}$$

$$W_i = (G + G_f)g(H_m + \Delta H_i)$$

$$\eta_o = \frac{W_i}{W_B} = \frac{W_i}{W_i + W_o}$$

$$\eta_t = \frac{GgH_m}{W_B} = \frac{H_m}{H_m + \Delta H_i} \frac{G}{G + G_f} \frac{(G + G_f)g(H_m + \Delta H_i)}{W_B}$$

Instalaciones de bombeo

Altura geométrica o geodésica

ALTURA MANOMÉTRICA

$$H_m = \left[\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_e^s$$

$$H_m = H_{inst} = H_g + \Delta H_{inst}$$

$$\Delta H_{inst} = \left[\lambda \frac{L}{D} + \sum_i K_i \right] \frac{V^2}{2g},$$

Darcy-Weisbach

$$\lambda = \frac{\Delta p / L}{\frac{1}{2} \rho V^2 / D},$$

Diagrama de Moody
Colebrook

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,87 \ln \left(\frac{k/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Altura manométrica

$$H_m = \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right)_{\text{entrada}}^{\text{salida}}$$

Altura del rotor, teórica o "útil"

$$H_{rotor} = H_u = H_m + \Delta H_i$$

Euler

Rendimiento orgánico

$$\rightarrow \eta_o = \frac{W_i}{W_B}$$

FENCIAS DE PÉRDIDAS GÁNICAS

Rendimiento volumétrico

$$\rightarrow \eta_v = \frac{Q}{Q_{f,i} + Q_{f,e}}$$

PÉRDIDAS

'AS

Rendimiento hidráulico o manométrico

$$\rightarrow \eta_h = \frac{H_m}{H_m + \Delta H_i}$$

RENDIMIENTO TOTAL

$$\eta_t = \frac{\rho g Q H_m}{W_B} = \eta_o \eta_v \eta_h$$



SISTEMA TURBINA

$$H_n = H_b - \Delta H_{inst}$$

$$H_n = \left[\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_s^e,$$

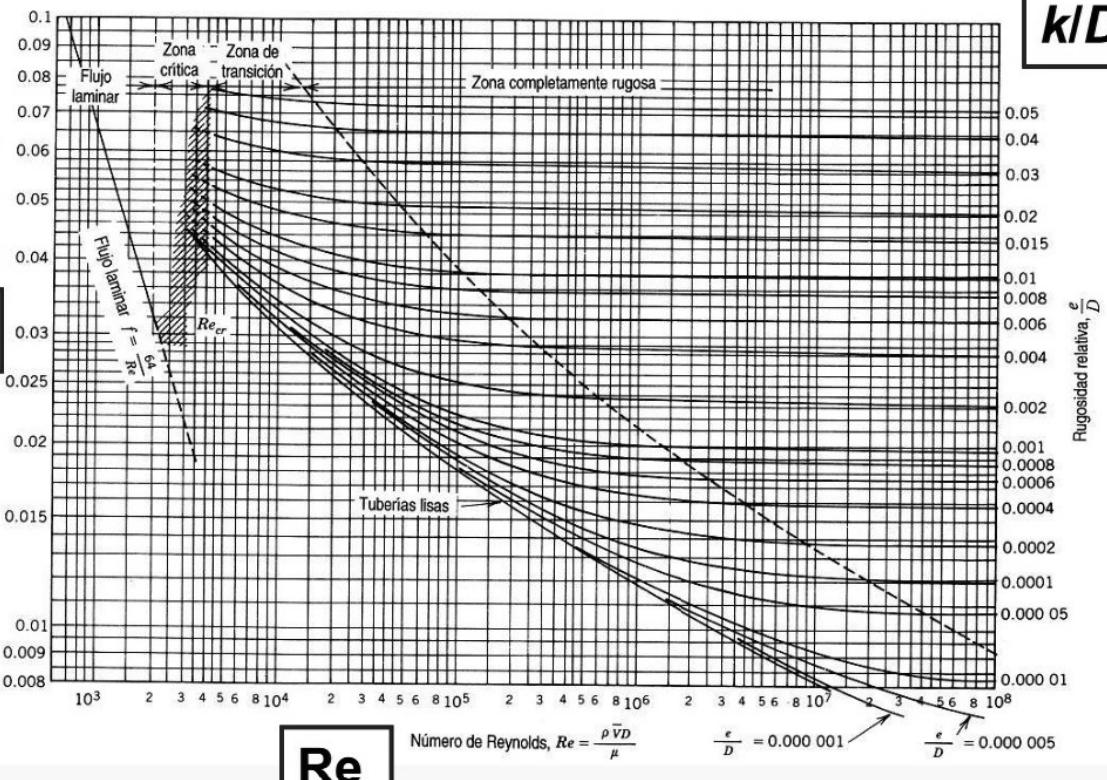
$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Diagrama de Moody

$$P_e = f(D, \mu, \rho, U, k, \text{forma}) \quad \lambda = \frac{P_e}{\frac{1}{2} \rho U^2 / D} = f\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{k}{D}\right) = f(\text{Re}, \epsilon)$$

DIAGRAMA DE MOODY

λ



k/D

$\frac{\epsilon}{D}$

$\frac{\epsilon}{D}$

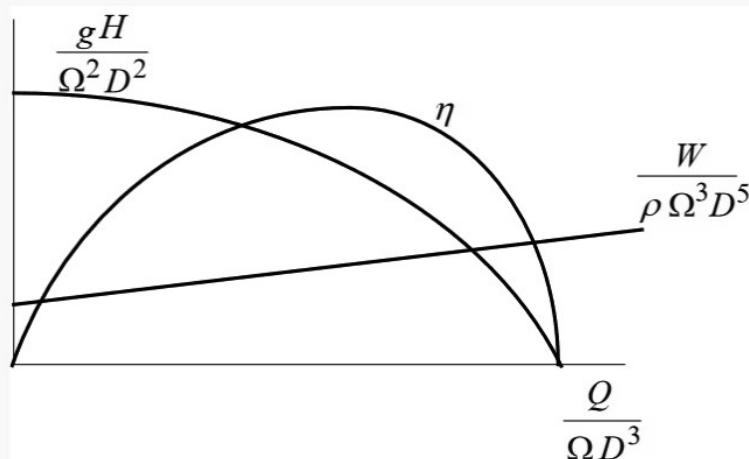
Tema 2. Semejanza Física Turbomáquinas y Curvas C.

Curvas características en bombas hidráulicas

$$\frac{gH}{\Omega^2 D^2} = \varphi_1 \left(\frac{Q}{\Omega D^3} \right),$$

$$\frac{W}{\rho \Omega^3 D^5} = \varphi_2 \left(\frac{Q}{\Omega D^3} \right),$$

$$\eta = \varphi_3 \left(\frac{Q}{\Omega D^3} \right).$$



Puntos homólogos

$$\frac{gH_1}{\Omega_1^2 D_1^2} = \frac{gH_2}{\Omega_2^2 D_2^2}, \quad \frac{Q_1}{\Omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\Omega_2 D_2^3},$$

**Curva de puntos homólogos,
cuando varía la velocidad de giro**

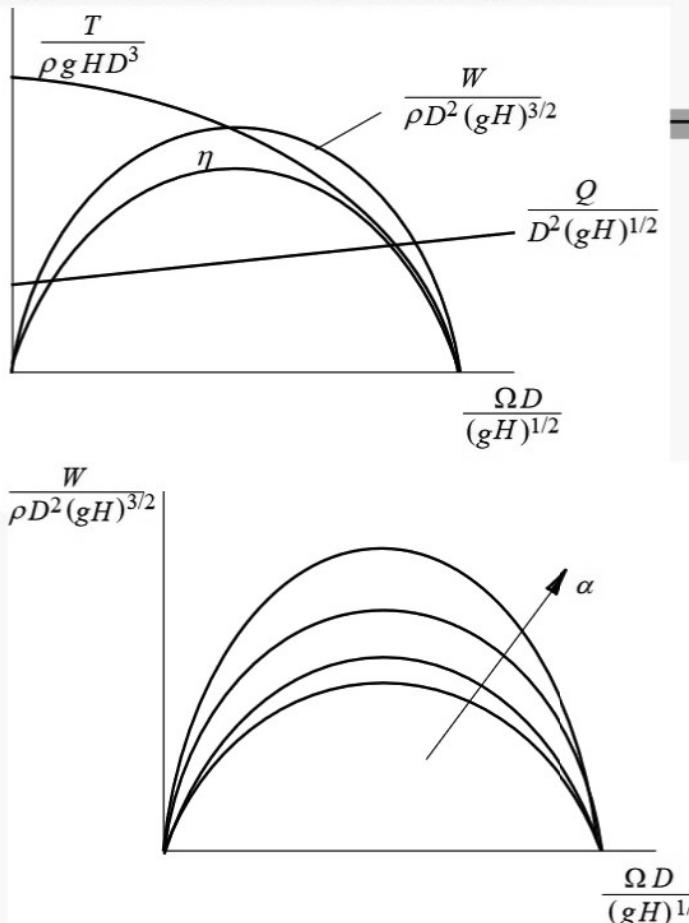
$$H = \text{cte } Q^2,$$

Curvas características en turbinas hidráulicas

$$\frac{Q}{D^2(gH)^{1/2}} = \psi_1\left(\frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}}, \alpha\right),$$

$$\frac{W}{\rho D^2(gH)^{3/2}} = \psi_2\left(\frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}}, \alpha\right),$$

$$\eta = \psi_4\left(\frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}}, \alpha\right).$$



Coeficientes adimensionales
Velocidad específica y potencia específica

BOMBAS

$$\Omega_S = \frac{(Q/\Omega D^3)^{1/2}}{(gH/\Omega^2 D^2)^{3/4}} \Big|_{\eta_{\max}},$$

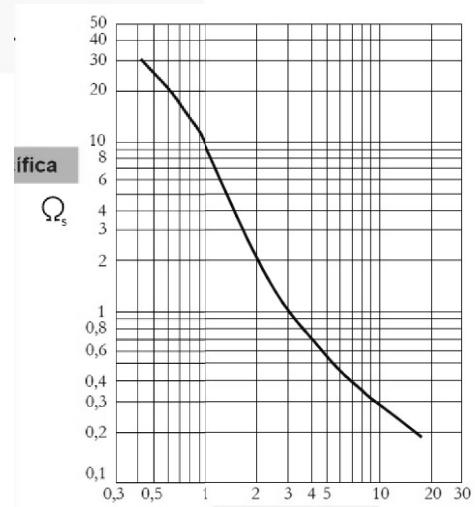
$$\eta_t^{1/2} = \frac{\Omega_S}{W_S},$$

TURBINAS

$$W_S = \left[\frac{W}{\rho D^2(gH)^{3/2}} \right]^{1/2} \left(\frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}} \right) \Big|_{\eta_{\max}},$$

$$\eta_t^{1/2} = \frac{W_S}{\Omega_S}.$$

BOMBAS	$\Omega_S = \frac{\Omega Q^{1/2}}{(gH_m)^{3/4}} \Big _{\eta_{\max}}$
Bombas centrífugas	$0,2 < \Omega_s < 2,0$
Bombas semiaxiales	$1,3 < \Omega_s < 4,0$
Bombas axiales	$3,0 < \Omega_s < 6,0$
TURBINAS	$W_S = \Omega_{S,t} = \frac{\Omega(W_i/\rho)^{1/2}}{(gH_n)^{5/4}} \Big _{\eta_{\max}}$
Turbinas de impulso (Pelton)	$0,02 < W_s < 0,3$
Turbinas centrípetas (Francis)	$0,3 < W_s < 2,5$
Turbinas axiales (Kaplan)	$2,3 < W_s < 6,0$



De este modo, se suele utilizar el *número de flujo* (en realidad, el coeficiente adimensional de gasto, pero con la velocidad de giro n expresada en r.p.m.),

$$\frac{Q}{nD^3} \Big|_{\eta_{\max}}. \quad (3.36)$$

También se emplea el *número de altura o de energía específica* (coeficiente de altura óptimo), con la energía específica $E = gH$,

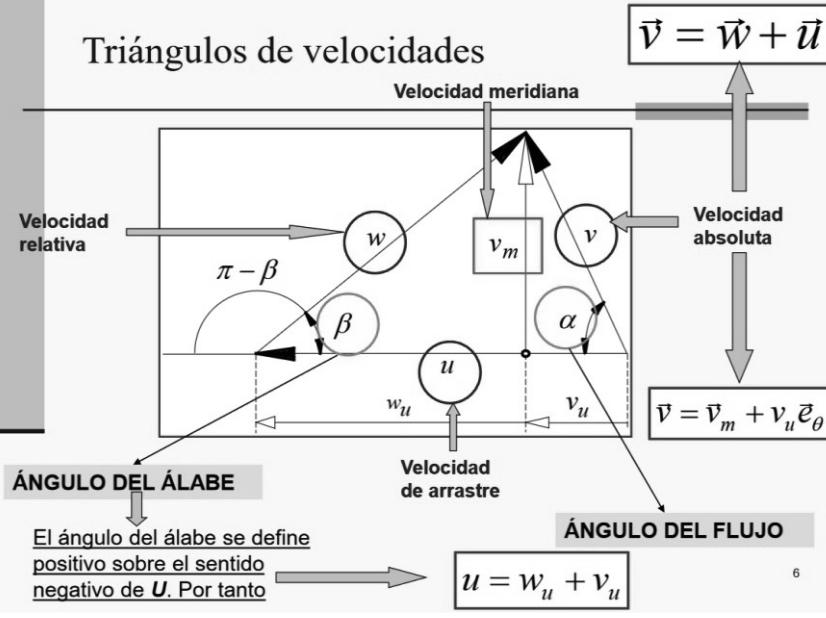
$$\Delta = \frac{DE^{1/4}}{Q^{1/2}} \Big|_{\eta_{\max}}.$$

$$\Delta = \frac{H_m}{Q_m} = \frac{H_m}{TTE}$$

Tema 3. Teoría General Unidimensional

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}, \quad v_x = w_x, \quad v_r = w_r, \quad v_\theta = -w_\theta + \Omega r,$$

Triángulos de velocidades



$$U_2 = \frac{\rho D_2}{2}$$

$$U_1 = \frac{\rho D_1}{2}$$

$$V_{m2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2}$$

$$V_{m1} = \frac{Q}{\pi D_1 b_1}$$

$$T = \int_{S_2} \rho r_2 v_{u2} v_{n2} \, dS - \int_{S_1} \rho r_1 v_{u1} v_{n1} \, dS.$$

$$V_{u2} = U_2 - \frac{V_{m2}}{\tan \beta_2} \quad y \quad V_{u1} = U_1 - \frac{V_{m1}}{\tan \beta_1}$$

FORMA HABITUAL (PRÁCTICA) DE LA ECUACIÓN DE EULER

$$W = \Omega T = \int_{S_2} \rho Q v_{u2} \, dQ - \int_{S_1} \rho Q v_{u1} \, dQ.$$

$$gH = \frac{1}{Q} \left(\int_{S_2} u_2 v_{u2} \, dQ - \int_{S_1} u_1 v_{u1} \, dQ \right).$$

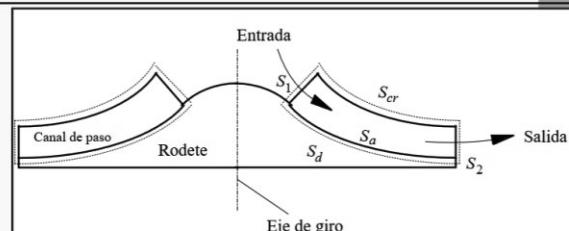
$$H_{t,\infty} = \frac{u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1}}{g}$$

FORMA ALTERNATIVA DE LA ECUACIÓN DE EULER

$$H_t = \frac{(v_2^2 - v_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) + (w_2^2 - w_1^2)}{2g}.$$

FORMAS PARTICULARES DE LA ECUACIÓN DE EULER:
Máquinas axiales
Máquinas radiales

10



$$\int_{S_2} \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS + \int_{S_1} \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS = 0, \quad v_{n2} A_2 - v_{n1} A_1 = 0, \quad y \text{ por tanto} \quad Q = v_{n2} A_2 = v_{n1} A_1,$$

La componente normal de velocidad es la componente radial en máquinas radiales

La componente normal de velocidad es la componente axial en máquinas axiales

La componente normal es la velocidad meridiana, y produce el caudal Q

Grado de reacción

Es la relación entre la energía intercambiada en forma de presión y la energía total intercambiada (EN EL RODETE)

$$\sigma_R = \frac{\pm (p_2 - p_1) / \rho}{gH_t}.$$

$$N_2 = \sqrt{w_2^2 + V_{u2}^2}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) = 0, \quad H_t = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 = H_m,$$

En flujo real existen pérdidas hidráulicas en el rodet (y también en otras partes de la máquina)

$$\begin{aligned} &\text{en bombas,} & H_u &= H_m + \Delta H_{i,R}, \\ &\text{en turbinas,} & H_u &= H_n - \Delta H_{i,R}. \end{aligned}$$

Para el eje:

$$\frac{V_B}{T} = S_2 \cdot T$$

$$\frac{1}{2} \rho g Q H_m$$

$$\frac{1}{2} \rho g Q H_m \approx \frac{1}{2} \rho g V_B H_m \quad (\gamma_v = \gamma_b = 1)$$

$$H_t + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H_{i,R}$$

$$\left(\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) = (z_2 - z_1) + H_t - \Delta H_{i,R}$$

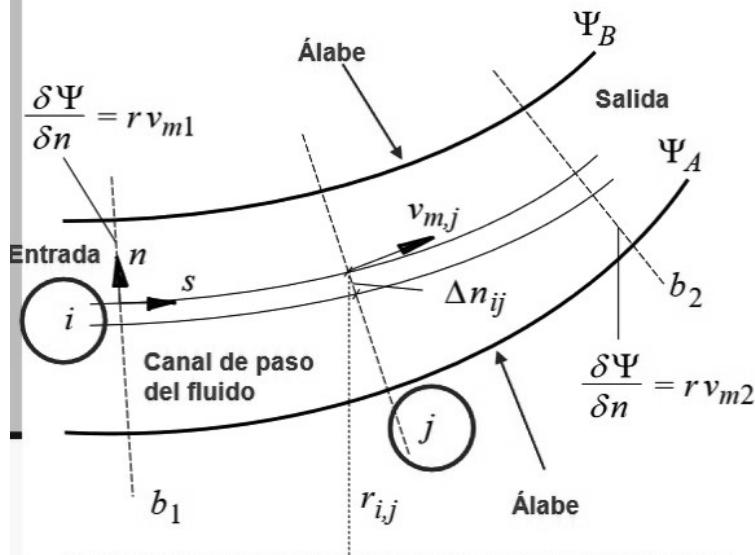
despreciable

$$H_t = \frac{1}{2} H_m$$

$$\Delta H_i$$

$$\Delta H_i = (1 - \gamma_b) H_t$$

velocidad meridiana



- a) Capas longitudinales de pequeño espesor *i*

$$Q = \sum_i \Delta Q_i.$$

- b) Secciones transversales *j*

$$v_{m,j} = \frac{Q}{A_{t,j}}.$$

- c) Condiciones de continuidad

$$v_{m,j} = \frac{\Delta Q_i}{2\pi r_{i,j} (\Delta n)_{i,j}},$$

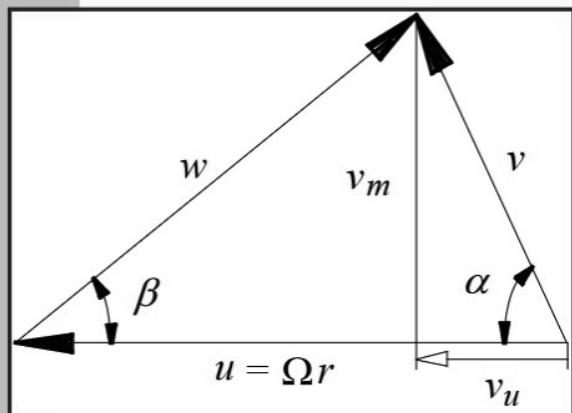
$$b_{t,j} = \sum_i (\Delta n)_{i,j} = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{2\pi r_{i,j} v_{m,j}}.$$

- d) Proceso iterativo imponiendo ciertas condiciones

RED DE CORRIENTE

15

Ecuación de Euler. Distribución de velocidad acimutal



Triángulos de velocidad

$$v = \frac{v_m}{\sin \alpha}, \quad v_u = \frac{v_m}{\tan \alpha}.$$

$$w = \frac{v_m}{\sin \beta}, \quad v_u = u - v_m \cotan \beta.$$

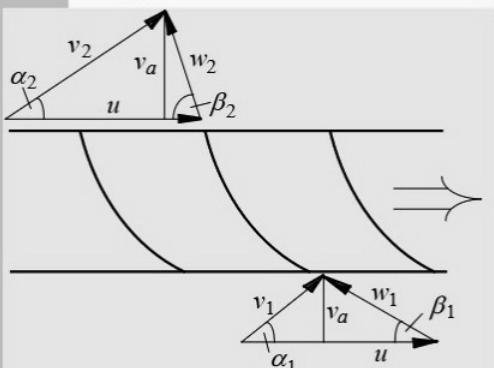
Ecuación de Euler

$$gH_{t,\infty} = u_2 v_{u2} - u_1 v_{u1},$$

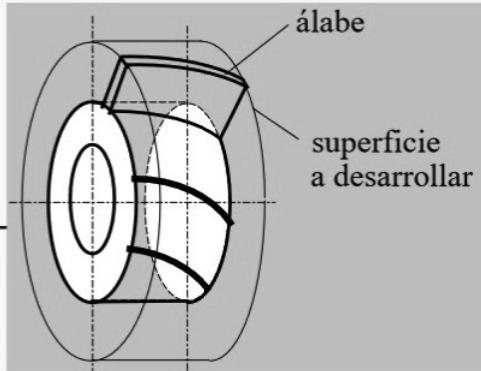
PLANTEAMIENTO

- La geometría del rotor (ángulos β entrada y salida) es conocida, y las condiciones de entrada y de salida. Pueden obtenerse las velocidades acimutales absolutas, y mediante Euler, la altura comunicada al fluido.
- La altura comunicada al fluido es conocida, y las condiciones en la entrada también. Puede obtenerse la velocidad acimutal absoluta, y a partir de los triángulos de velocidades, fijar en el rotor los ángulos β de entrada y de salida del álabe.

Teoría unidimensional para turbomáquinas axiales

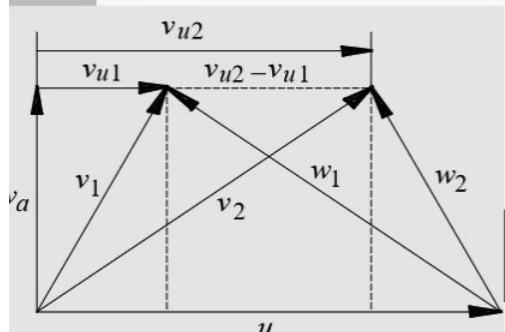


$$u_1 = u_2 = u = \Omega r$$



$$v_{m1} = v_{m2} = v_a.$$

$$gH_{t,\infty} = \Omega r(v_{u2} - v_{u1}) = \text{cte}, \text{ por lo que } r(v_{u2} - v_{u1}) = \text{cte}.$$



$$\tan \beta = \frac{v_m}{u - v_u} = \frac{v_a}{\Omega r - \text{cte}} = \frac{rv_a}{\Omega r^2 - \text{cte}}.$$

$$\tan \beta_1(r) = \frac{rv_{m1}}{\Omega r^2 - \text{cte}_1}, \text{ en la entrada, y } \tan \beta_2(r) = \frac{rv_{m2}}{\Omega r^2 - \text{cte}_2}, \text{ en la salida.}$$

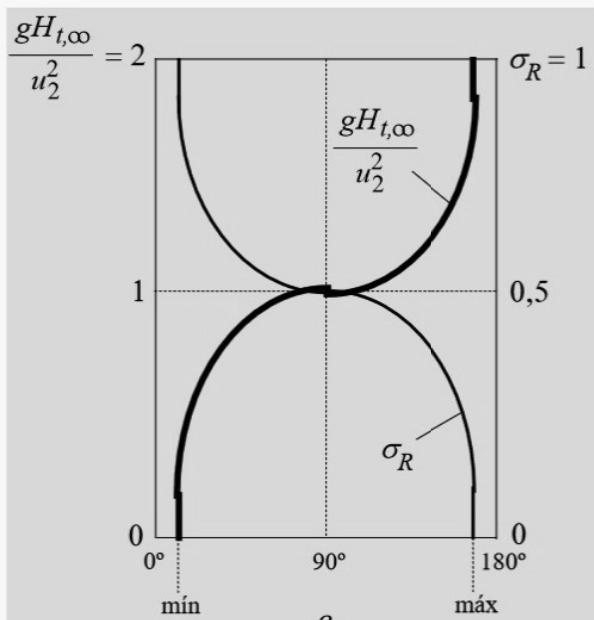
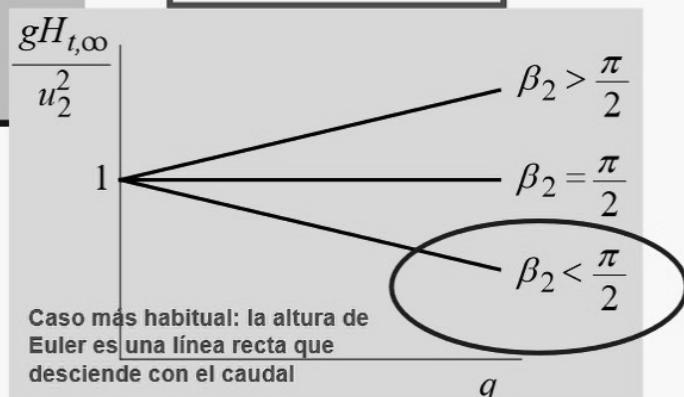
Aplicación al estudio del comportamiento de una bomba centrífuga

Aplicación de la Ecuación de Euler y de las simplificaciones del flujo unidimensional

$$gH_{t,\infty} = u_2 v_{u2} = u_2 v_2 \cos \alpha_2 = u_2 (u_2 - w_2 \cos \beta_2).$$

$$gH_{t,\infty} = u_2^2 \left(1 - \frac{v_{m2}}{u_2 \tan \beta_2} \right).$$

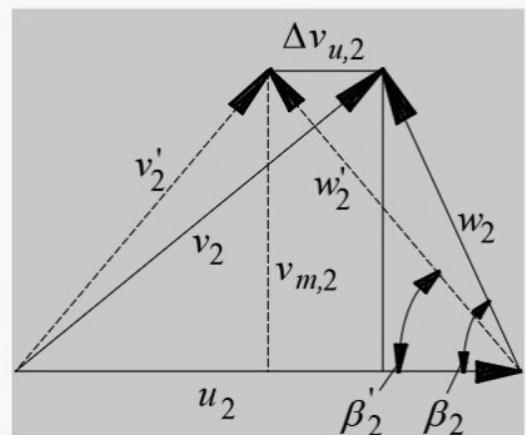
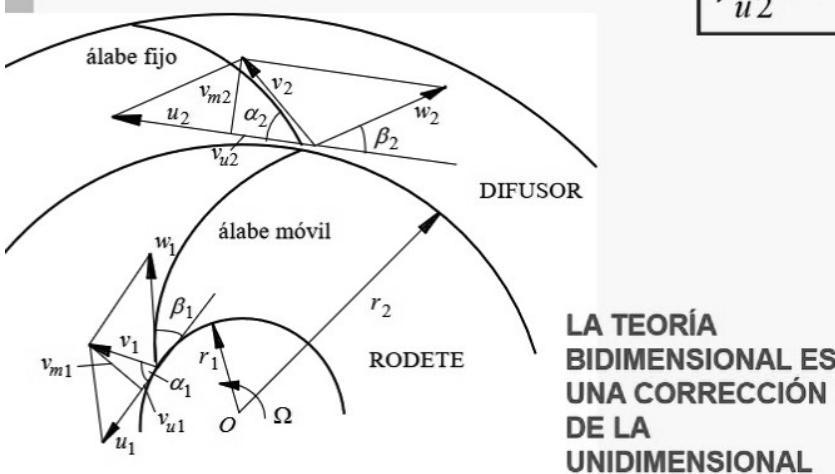
$$\frac{gH_{t,\infty}}{u_2^2} = \left(1 - \frac{q}{\tan \beta_2} \right).$$



Tema 4. Teoría Bidimensional

- Teoría unidimensional \Rightarrow La dirección de la velocidad relativa coincide con la del álabe si el número de álabes es infinito.
- Si $N \Rightarrow \infty$, entonces la presión sería uniforme transversalmente, lo que físicamente es irrealista.
- Aunque se suponga flujo ideal, es preciso considerar, al menos en bombas centrífugas, una cierta desviación angular del flujo, dada por

$$v'_{u2} = v_{u2} - \Delta v_{u2}.$$



Ecuaciones del movimiento

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} w^2 \right) - \vec{w} \times (\nabla \times \vec{w}) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + v \Delta \vec{w} + \vec{f}_m$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en ejes relativos

$$\vec{f}_m = -\nabla[-\vec{g} \cdot \vec{x} - (\vec{\Omega} \times \vec{x}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{x})] - 2\vec{\Omega} \times \vec{w}$$

$$\nabla \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p - \rho \vec{g} \cdot \vec{x}}{\rho} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} \right) = \vec{w} \times (\nabla \times \vec{w}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{w} \rightarrow \nabla \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \vec{w} \times (\nabla \times \vec{w}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{w}$$

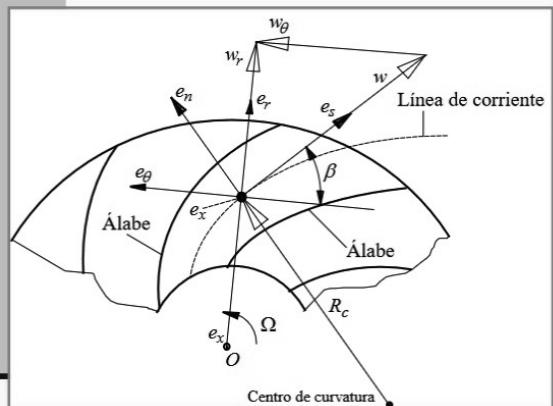
Sistema de coordenadas intrínseco

- Para una mejor interpretación del movimiento, se proyecta la ecuación anterior sobre una dirección tangente a la línea de corriente del flujo relativo, y sobre una dirección normal a la misma en cada punto (sistema de coordenadas intrínseco).

$$gH_{t,N} = u_2 v'_{u2} - u_1 v_{u1} = u_2 (v_{u2} - \Delta v_{u2}) - u_1 v_{u1} = gH_{t,\infty} - u_2 \Delta v_{u2}.$$

$$\Delta v_{u2} = \chi u_2$$

Sistema de coordenadas intrínseco



El giro como sólido rígido de una partícula fluida en el movimiento relativo es la mitad de su vorticidad, igual y de sentido contrario al giro del rotores

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w}{R_c} - \frac{\partial w}{\partial n} \right) = -\Omega$$

Vorticidad

$$\nabla \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_s = \bar{w} \times (\nabla \times \bar{w}) \cdot \vec{e}_s - 2(\bar{\Omega} \times \bar{w}) \cdot \vec{e}_s$$

Nulo Nulo

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2 - u^2}{2} = \text{cte},$$

Proyección en dirección tangencial

$$\nabla \left(\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_n = \bar{w} \times (\nabla \times \bar{w}) \cdot \vec{e}_n - 2(\bar{\Omega} \times \bar{w}) \cdot \vec{e}_n$$

$$w \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} \right) - u \frac{\partial u}{\partial n} = [\bar{w} \times (\nabla \times \bar{w})]_n - 2[\bar{\Omega} \times \bar{w}]_n$$

Nulo

$$[\bar{w} \times (\nabla \times \bar{w})]_n - 2[\bar{\Omega} \times \bar{w}]_n = 0.$$

Forma final de las ecuaciones y del perfil de velocidad relativa

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + w \frac{\partial w}{\partial s} = 0$$

Dirección tangencial

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + \frac{w^2}{R_c} + 2\Omega w = 0.$$

Dirección normal

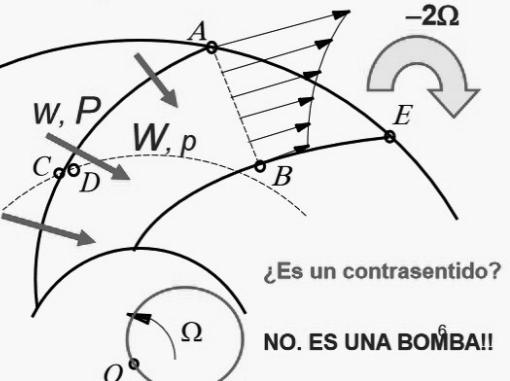
La ecuación de la vorticidad sirve para estimar la forma del perfil de velocidad relativa

$$\frac{1}{2} \left(\frac{w}{R_c} - \frac{\partial w}{\partial n} \right) = -\Omega$$

Vorticidad

Resultante de las fuerzas de presión

$$dw = \left(\frac{w}{R_c} + 2\Omega \right) dn,$$



Correcciones de la teoría unidimensional. Stodola, Pfleiderer y Eck

Corrección de Stodola

$$\chi = \epsilon \frac{\pi}{N} \operatorname{sen} \beta_2,$$

$$gH_{t,N} = gH_{t,\infty} - u_2^2 \epsilon \frac{\pi}{N} \operatorname{sen} \beta_2,$$

FACTOR ϵ DE LA CORRECCIÓN DE STODOLA					
	$\beta_2 = 20^\circ$	$\beta_2 = 30^\circ$	$\beta_2 = 40^\circ$	$\beta_2 = 60^\circ$	$\beta_2 = 90^\circ$
$N = 4 \text{ a } 8$	1,10	0,90	0,75	0,60	0,55
$N = 8 \text{ a } 16$	1,15	1,00	0,85	0,70	0,65

Corrección de Pfleiderer

$$\chi = \frac{gH_{t,N}}{u_2^2} \frac{2\psi}{N(1 - (r_1/r_2)^2)},$$

$$\psi = (0,55 \div 0,65) + 0,6 \operatorname{sen} \beta_2 \approx 0,6(1 + \operatorname{sen} \beta_2)$$

$$gH_{t,N} = \frac{gH_{t,\infty}}{1 + \frac{2\psi}{N[1 - (r_1/r_2)^2]}}$$

$$H_{t,\infty} = \frac{V u_e U_z}{g} \Big|_{U=0} =$$

$$r_h = \frac{\text{área transversal al flujo}}{\text{Perímetro mojado}}$$

■ Corrección de Eck

Coeficiente de disminución de trabajo

$$\mu = \frac{gH_{t,N}}{gH_{t,\infty}} = \frac{v'_{u2}u_2 - \psi_{u1}u_1}{v_{u2}u_2 - \psi_{u1}u_1} = \frac{v'_{u2}}{v_{u2}},$$

Nekrasov

COEFICIENTE DE DISMINUCIÓN DE TRABAJO							
N	4	6	8	10	12	16	24
μ	0,624	0,714	0,768	0,806	0,834	0,870	0,908

$$\mu = 1 - \left(\frac{\pi}{N} \right) \operatorname{sen} \beta_2, \quad \begin{array}{l} r_1/r_2 \text{ pequeños} \\ r_1/r_2 \sim 0,5 \end{array}$$

$$\mu = 1 - \left(\frac{4\pi}{3N} \right) \operatorname{sen} \beta_2,$$

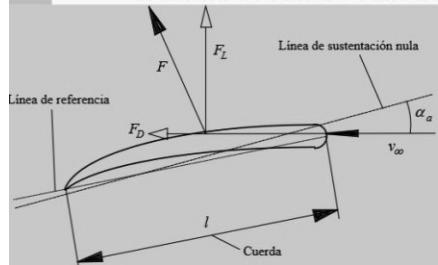
En la corrección de Stodola, la altura teórica bidimensional es una recta paralela a la unidimensional, por debajo de ella

En las correcciones de Pfleiderer y Eck, la altura teórica bidimensional también está por debajo de la unidimensional, pero tiene distinta pendiente

9

Flujo ideal en una cascada de álabes fija

- Conceptos sobre la teoría del álabe aislado
- Teorema de Kutta-Joukowski para una cascada de álabes



Línea de referencia Línea de sustentación nula Cuerda

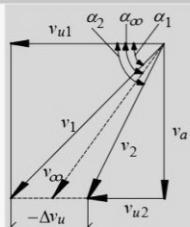
Fuerza de sustentación perpendicular a la dirección de la velocidad incidente

$$F_L = \rho v_\infty \Gamma$$

Analogía con las expresiones que se han presentado antes para una cascada

$$\vec{v}_\infty = v_a \vec{e}_x + v_{u,\infty} \vec{e}_u, \quad \text{con} \quad v_{u,\infty} = \frac{1}{2}(v_{u1} + v_{u2}),$$

$$\tan \alpha_\infty = \frac{v_a}{\frac{1}{2}(v_{u1} + v_{u2})} = \frac{v_a}{v_{u,\infty}}.$$

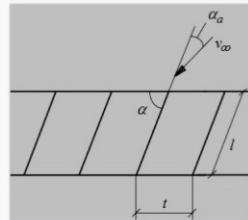


$$F = F_L = \rho v_\infty t |\Delta v_u|, \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 l} = \frac{2 |\Delta v_u| t}{v_\infty l},$$

- Solución teórica de Weining para una cascada de placas planas
- Consideraciones sobre el flujo bidimensional a través de una cascada

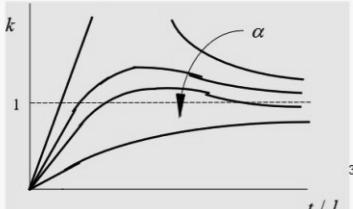
$$F_0 = \rho \Gamma v_\infty \quad \Gamma = \text{cte} \quad v_\infty l \operatorname{sen} \alpha_a,$$

$$C_{L0} = \frac{F_{L0}}{\frac{1}{2} \rho l v_\infty^2} = 2\pi \operatorname{sen} \alpha_a,$$



$$\frac{C_L}{C_{L0}} = k \left(\frac{t}{l}, \alpha \right), \quad \text{de donde} \quad C_L = 2\pi k \operatorname{sen} \alpha_a.$$

$$C_L = C_L(\alpha, t/l, \alpha_a)$$



Flujo ideal a través de una cascada de álabes móvil

$$\Gamma = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{l} = t(-\vec{w}_1 \cdot \vec{e}_u + \vec{w}_2 \cdot \vec{e}_u) = \frac{2\pi r}{N} (w_{u1} - w_{u2})$$

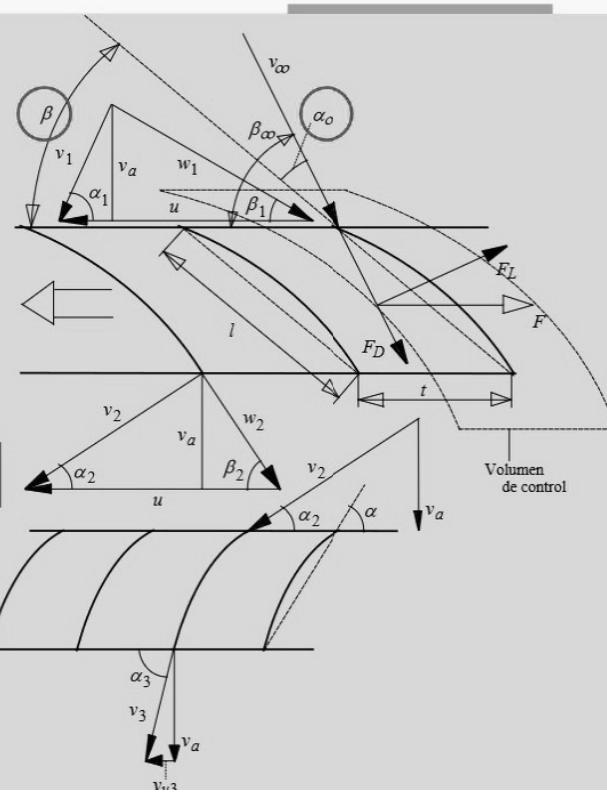
$$\vec{w}_\infty = v_a \vec{e}_x + w_{u,\infty} \vec{e}_u, \quad \text{con} \quad w_{u,\infty} = \frac{1}{2} (w_{u1} + w_{u2}),$$

$$F = F_L = \rho w_\infty t |\Delta w_u|,$$

$$|\Delta w_u| = |\Delta v_u|$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho w_\infty^2 l} = \frac{2 |\Delta w_u| t}{w_\infty l}.$$

$$gH_t = u |\Delta v_u| = u |\Delta w_u| = u \frac{C_L w_\infty}{2 t/l} = \frac{\Omega C_L w_\infty l N}{4 \pi},$$



Conjunto rotor-estátor. Grado de reacción

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (w_1^2 - w_2^2).$$

$$p_3 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_3^2).$$

Coeficiente de presión

$$\psi_p = \frac{p_3 - p_1}{\rho u^2}.$$

$$\phi = \frac{v_a}{u}.$$

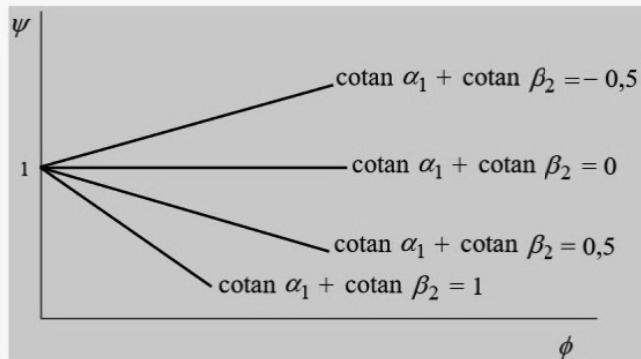
$$p_3 - p_1 = \rho u (v_{u2} - v_{u1}) = \rho u \Delta v_u,$$

$$\psi_p = 1 - \phi (\cotan \alpha_1 + \cotan \beta_2).$$

1 → entrada rotor

2 → salida rotor – entrada estator

3 → salida estator



Grado de reacción

$$\sigma_R = \frac{p_2 - p_1}{\rho g H_t} = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2 u \Delta v_u} = \frac{w_{u,\infty}}{u} \cotan \beta_\infty. \longrightarrow \sigma_R = \frac{1}{2} - \frac{v_a}{u} \frac{\cotan \alpha_1 - \cotan \beta_2}{2}.$$

Equilibrio radial en una turbomáquina axial. Ecuación fundamental del álabe

Conservación de cantidad de movimiento en dirección radial

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_u}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{v_u^2}{r} \right) = \rho f_{m,r} - \frac{\partial p}{\partial r} + F_{r,r}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_u^2}{r}.$$

Velocidad axial uniforme

Condición de cesión uniforme de energía

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v_d^2}{2} + \frac{v_u^2}{2} \right) = 0$$

Nulo

Condición de equilibrio radial

$$\frac{v_u}{r} + \frac{\partial v_u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_u)}{\partial r} = 0.$$

$$r \times v_u = \text{cte}$$



Ecuación de Euler: condición de cesión uniforme de energía \Rightarrow ALTURA TEÓRICA CONSTANTE

Ecuación fundamental del álabe

$$C_L \times l \times w_\infty = \text{cte con } r$$

16

Flujo real en una cascada de álabes

Circulación

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}, \quad \Gamma = \frac{2\pi r}{N} (v_{u1} - v_{u2}) = t(v_{u1} - v_{u2}),$$

Conservación de cantidad de movimiento

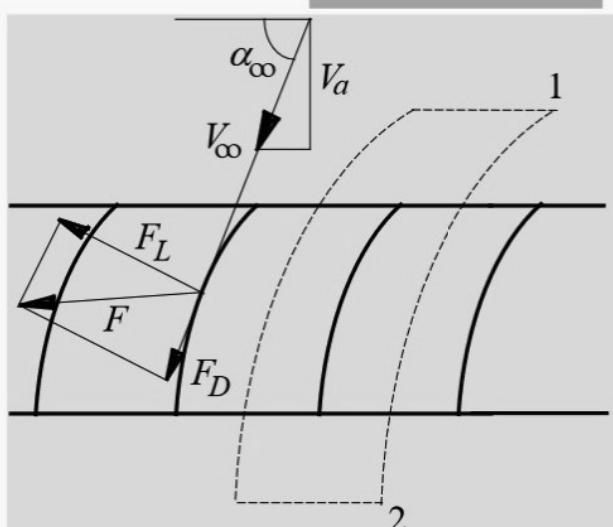
$$\vec{F} = t(p_1 - p_2) \vec{e}_x + \rho v_a t (v_{u1} - v_{u2}) \vec{e}_u.$$

Flujo real (presiones)

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (V_2^2 - V_1^2) + \zeta_r \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

$$2g\Delta H_{i,R}/(V_\infty)^2$$

PÉRDIDAS HIDRÁULICAS
INTERNAS EN EL RODETE



Forma final de las ecuaciones

$$\frac{l}{t} C_L = \frac{2|\Delta V_u|}{V_\infty} - \zeta_r \cos \alpha_\infty$$

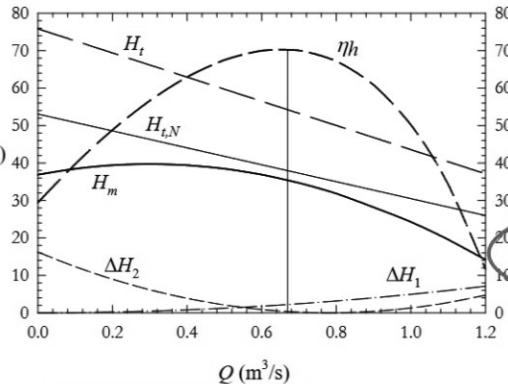
$$\frac{l}{t} C_D = \zeta_r \sin \alpha_\infty,$$

17

Tema 5. Cálculo de Bombas

Rendimiento hidráulico!!!

$$H_{t,\infty} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2 Q}{\pi D_2 b_2 \tan \beta_2} = u_2 \left(\frac{u_2}{g} - \frac{Q}{\pi D_2 b_2 \tan \beta_2} \right)$$



$$gH_{t,N} = gH_{t,\infty} - U_2^2 \varepsilon \frac{\pi}{N} \sin \beta_2.$$

FRICCIÓN **CHOQUE**

$$\Delta H_1 = K_1 Q^2 \quad \Delta H_2 = K_2 (Q - Q_0)^2$$

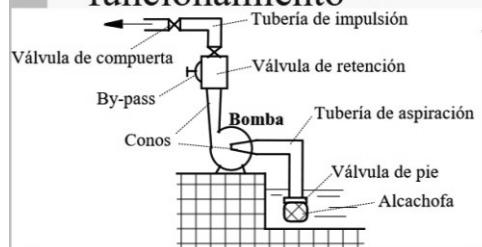
$$H_m = H_t - K_1 Q^2 - K_2 (Q - Q_0)^2$$

$$\Delta H_1 = H_t (1 - \eta_h) \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^2$$

CORRELACIONES PFLEIDERER

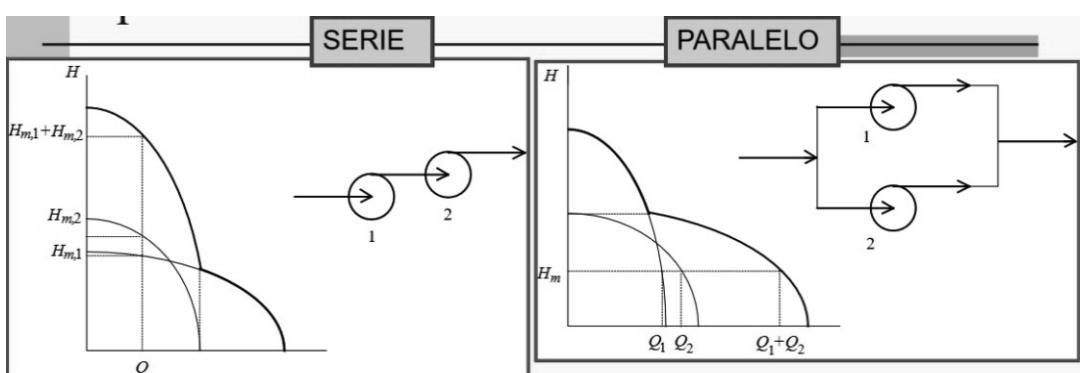
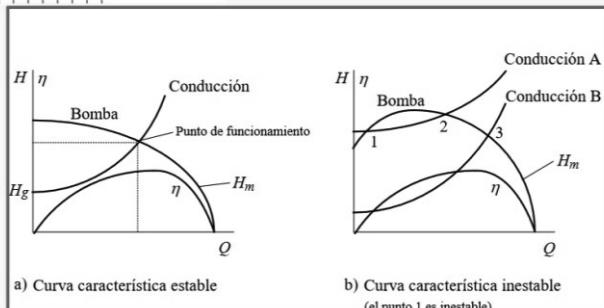
$$\Delta H_2 = \frac{\varphi}{2g} [u_1^2 + (\mu u_2)^2] \left(1 - \frac{Q}{Q_0} \right)^2$$

Instalación de bombeo. Punto de funcionamiento



$$H_m = H_{inst}$$

$$H_{inst}(Q) = H_g + \text{cte} Q^2,$$



$$Q_t = Q_1 = Q_2, \\ H_{m,t} = H_{m,1} + H_{m,2},$$

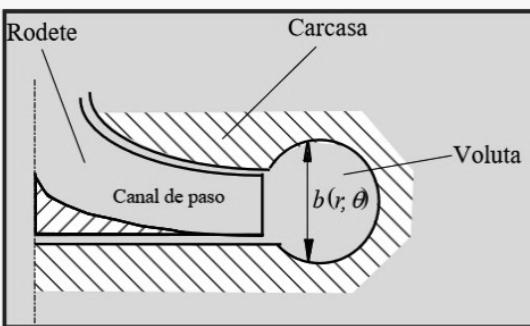
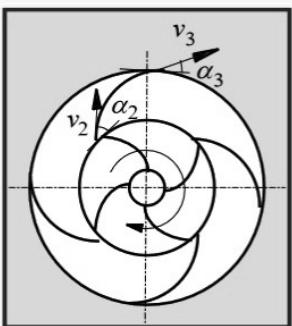
$$Q_t = Q_1 + Q_2, \\ H_{m,t} = H_{m,1}(Q_1) - \Delta H_1(Q_1) = H_{m,2}(Q_2) - \Delta H_2(Q_2),$$

$$\eta = \rho g Q_t \frac{(H_{m,1} + H_{m,2})}{(W_{B,1} + W_{B,2})}$$

$$\eta = \rho g H_{m,t} \frac{(Q_1 + Q_2)}{(W_{B,1} + W_{B,2})}$$

DIFUSOR

VOLUTA



$$Q = 2\pi r_3 b v_{r3} = 2\pi r_2 b v_{r2}.$$

$$2\pi r v_u = 2\pi r_2 v_{u2} = 2\pi r_3 v_{u3} = \Gamma,$$

$$r_3 v_{u3} = r_2 v_{u2}$$

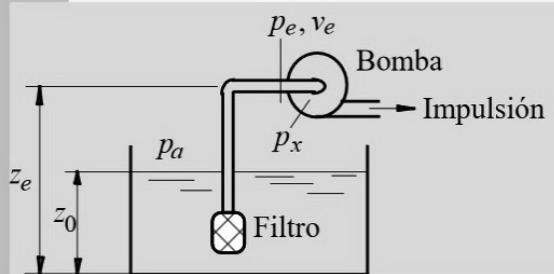
Continuidad +
Uniformidad del
momento cinético

$$Q_\theta = \frac{\theta}{2\pi} Q = \int_{r_3}^{R(\theta)} v_u b(r, \theta) dr = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{r_3}^{R(\theta)} \frac{b(r, \theta)}{r} dr$$

$$R(\theta) = r_3 e^{\frac{Q\theta}{\Gamma b}}.$$

$$r = r_2 e^{\theta \tan \alpha_2}$$

Altura neta de aspiración y NPSH



$$p_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e = p_a + \rho g z_0 - \rho g \Delta H_{asp},$$

$$p_e - p_x = \varepsilon \frac{1}{2} \rho w_1^2,$$

$$p_x > p_v.$$

$$(z_e - z_0)_{máx} = \Delta z_{asp,máx} = \frac{p_a - p_v}{\rho g} - \Delta H_{asp} - \frac{v_e^2}{2g} - \varepsilon \frac{w_1^2}{2g}.$$

$$H_N^* = \left(\frac{p_e - p_v}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} \right)_N = \frac{v_e^2}{2g} + \varepsilon \frac{w_1^2}{2g} < H_D^* = \left(\frac{p_e - p_v}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} \right)_D = \frac{p_a - p_v}{\rho g} - \Delta z_{asp} - \Delta H_{asp},$$

NPSH_N

NPSH_D

Parámetro de Thoma y velocidad específica de aspiración

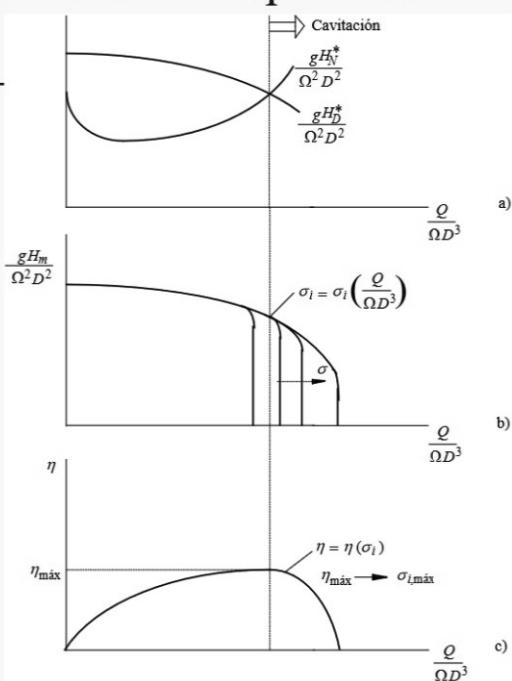
$$\frac{gH}{\Omega^2 D^2} = \varphi_1 \left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{H_D^*}{H} \right),$$

$$\frac{Q}{D^2 (gH)^{1/2}} = \varphi_1 \left(\frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}}, \frac{H_D^*}{H} \right),$$

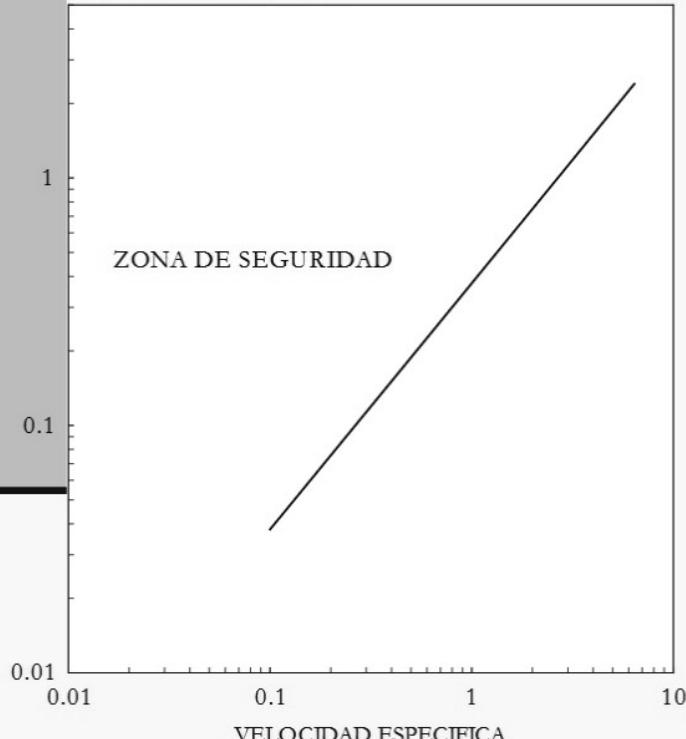
$$\sigma = \frac{H^*}{H}$$

SE DEFINE EN CONDICIONES DE CAVITACIÓN INCIPIENTE, CON RENDIMIENTO MÁXIMO

DEFINICIÓN AMBIENTE



PARAMETRO DE THOMA



$$\frac{\Omega_s}{\sigma_{i,\max}^{3/4}} \approx \text{cte}$$

$$S = \frac{\Omega Q^{1/2}}{(gH_D^*)^{3/4}} = \frac{\Omega Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \left(\frac{H}{H_D^*} \right)^{3/4} = \frac{\Omega_s}{\sigma^{3/4}},$$

$$S_{i,\max} = \frac{\Omega_s}{\sigma_{i,\max}^{3/4}}.$$

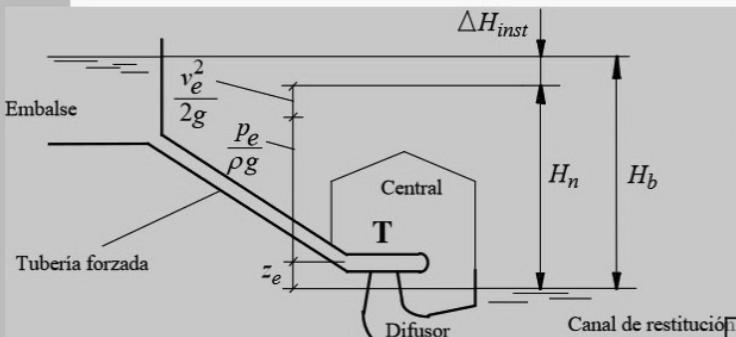
ES UN PARÁMETRO DE DISEÑO
VALORES:

BOMBAS: **2,5 – 3,5**

TURBINAS: **3,5 – 5,2**

18

Tema 6. Cálculo de Turbinas



$$H_n = H_b - \Delta H_{inst}$$

$$\Delta H_{inst} = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum_i K_i \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4}$$

$$\Omega_S = \Omega \frac{Q^{1/2}}{(gH_n)^{3/4}} \Big|_{\eta \text{ máx}}$$

$$W_S = \Omega \frac{(W_T / \rho)^{1/2}}{(gH_n)^{5/4}} \Big|_{\eta \text{ máx}},$$

Estudio hidrológico ⇒ Caudal

Estudio topográfico ⇒ Salto bruto

$$\text{Velocidad de sincronismo} \quad \Omega = \frac{2\pi f}{n_p}.$$

n_p	n (r.p.m.)	n_p	n (r.p.m.)	n_p	n (r.p.m.)
1	3.000	11	272,7	22	136,4
2	1.500	12	250	24	125
3	1.000	13	230,8	26	115,4
4	750	14	214,3	28	107,1
5	600	15	200	30	100
6	500	16	187,5	32	93,8
7	428,6	17	176,5	34	88,2
8	375	18	166,7	36	83,3
9	333,3	19	157,9	38	78,9
10	300	20	150	40	75,3

Tipo de turbina	Características	Ω_S	H_n (m)
Pelton	1 chorro 2,3,4,... chorros	0,05 a 0,15 0,15 a 0,35	250 a 1800 100 a 800
Francis	Lenta Normal Rápida	0,35 a 0,67 0,67 a 1,20 1,20 a 2,70	150 a 350 80 a 150 25 a 80
Hélice y Kaplan	Lenta Rápida Ultra rápida	1,60 a 2,75 2,75 a 3,65 3,65 a 5,50	18 a 35 12 a 18 5 a 12

Rangos típicos de velocidad específica y de altura neta para los distintos tipos de turbinas (algunos de estos rangos pueden verse superados).

$$W_T = \eta_t \rho g Q H_n$$

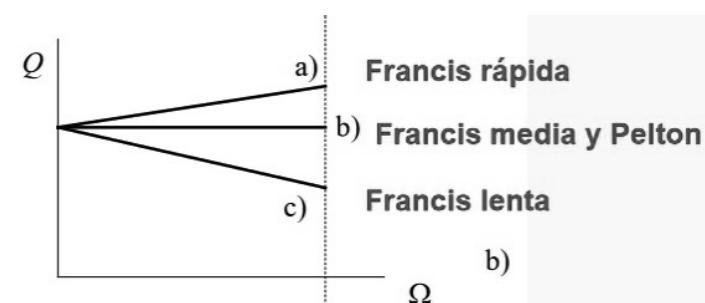
$$\eta_t = \eta_h \eta_v \eta_o,$$

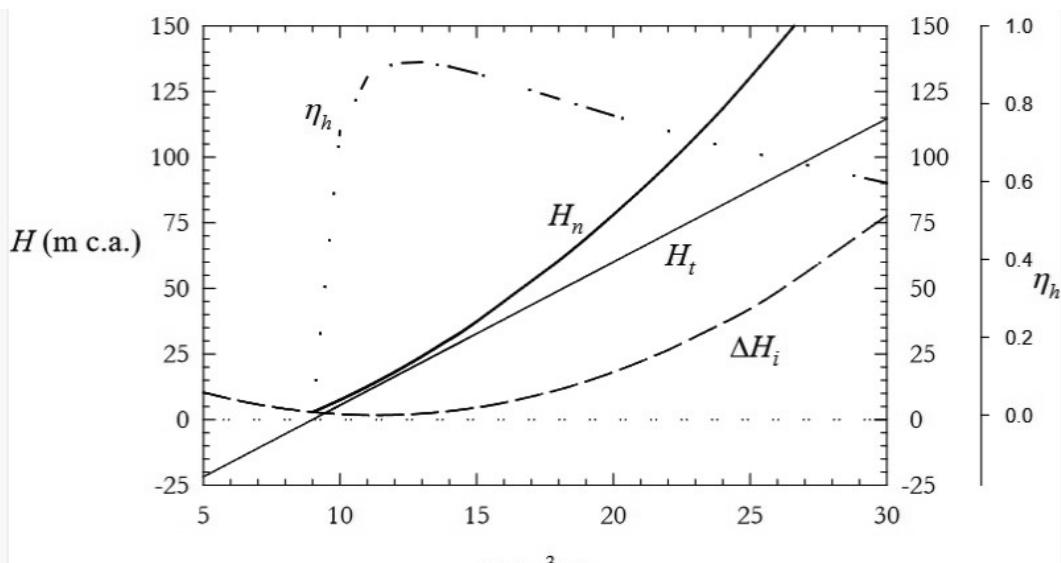
Teoría general de turbomáquinas

$$\eta_h = \frac{H_t}{H_n},$$

$$H_t = \frac{u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2}}{g}$$

Ecuación de Euler





$$gH_u = u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2} = u_1 \frac{v_{m1}}{\tan \alpha_1} - u_2 \left(u_2 - \frac{v_{m2}}{\tan \beta_2} \right) \rightarrow \frac{gH_u}{u_2^2} = -1 + \frac{1}{u_2} \left[\frac{1}{2\pi r_2} \left(\frac{1}{b_1 \tan \alpha_1} + \frac{1}{b_2 \tan \beta_2} \right) \right] Q.$$

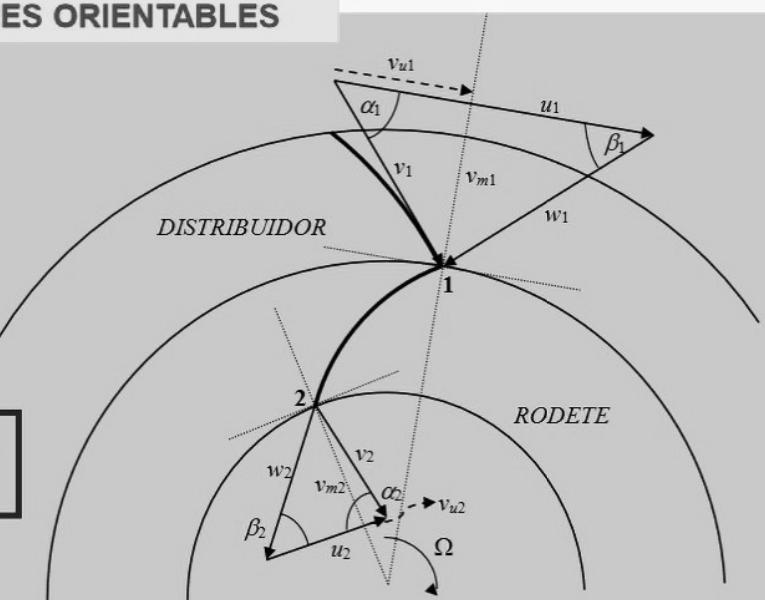
$$H_u = -A\Omega^2 + B\Omega Q$$

$$H_n = H_u + \Delta H_1 + \Delta H_2 = -A\Omega^2 + B\Omega Q + CQ^2 + D(Q - Q_0)^2$$

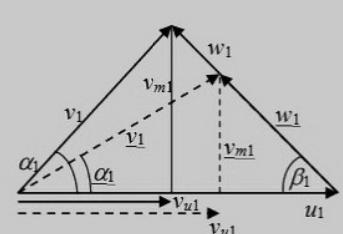
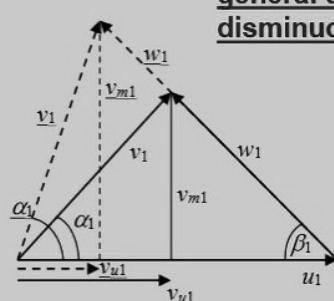
EFFECTO DEL DISTRIBUIDOR DE ÁLABES ORIENTABLES



TURBINAS FRANCIS



Una apertura del distribuidor produce en general un aumento de caudal y una disminución de la altura



Apertura del distribuidor, $\underline{\alpha}_1 > \alpha_1$

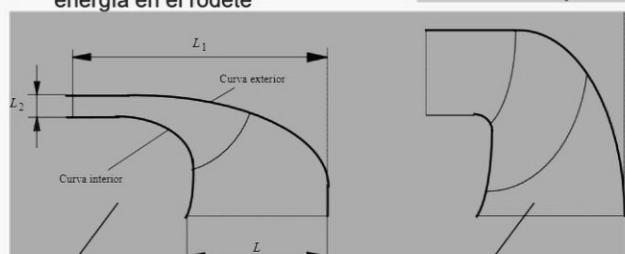
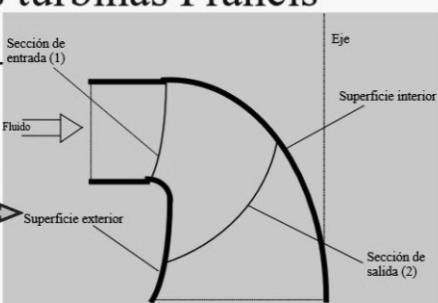
Cierre del distribuidor, $\underline{\alpha}_1 < \alpha_1$

Aspectos del diseño de las turbinas Francis

RODETE

Diseño del perfil hidráulico

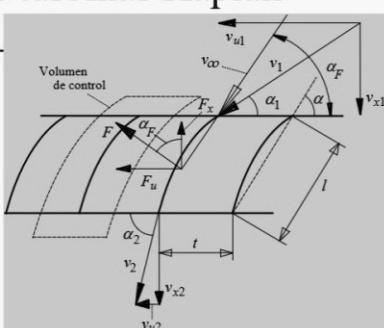
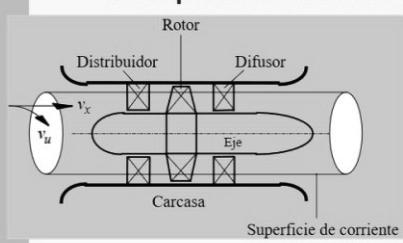
- Método de Bovet
- Desarrollado en detalle por Mataix
 - Trazado del perfil hidráulico
 - Trazado de la red de corriente
 - Condición de cesión gradual de energía en el rodete



Ω_s	0,298	0,596	0,894	1,19	1,49	1,79	2,09	2,38
L_1/L	2,29	1,44	1,10	0,910	0,782	0,695	0,624	0,574
L_2/L	0,152	0,288	0,408	0,512	0,600	0,672	0,728	0,768

Aspectos del diseño de las turbinas Kaplan

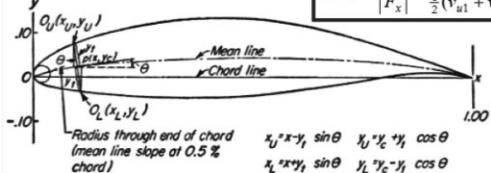
Concepto de cascada de álabes



Perfiles aerodinámicos

$$F = (F_u^2 + F_x^2)^{1/2} = \rho [v_a^2 + \frac{1}{4}(v_{u1} + v_{u2})^2]^{1/2} t |\Delta v_u| = \rho [v_a^2 + \frac{1}{4}(v_{u1} + v_{u2})^2]^{1/2} \Gamma,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_F = \left| \frac{F_u}{F_x} \right| = \frac{v_a}{\frac{1}{2}(v_{u1} + v_{u2})}.$$



Normalmente, perfiles NACA de cuatro dígitos

11

$$H_n = \underline{H_b} - \underline{\Delta H_{hust}}$$

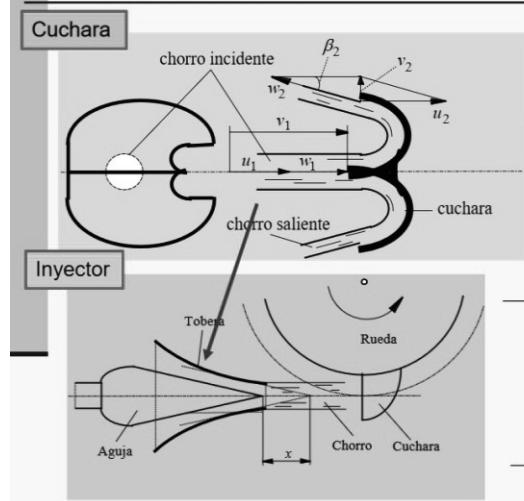
$$V_a = \frac{\Omega \cdot D_p^2 - D_v^2}{4}$$

$$\eta_c = \eta_b e^{\eta_b t} \frac{H_n}{H_b}$$

Turbinas de acción. Turbinas Pelton

Particularidades

La presión es la ambiente



$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \zeta \frac{w_1^2}{2}.$$

Pérdidas hidráulicas en la cuchara

Relación directa entre las velocidades relativas

$$w_2 = (1 - \zeta)^{1/2} w_1,$$

Velocidad de entrada (chorro) directamente relacionada con la altura neta

$$v_1 = \sqrt{2gH_1}$$

$$H_1 = H_n - \Delta H_{i, inyector}$$

$$\text{Velocidad de arrastre uniforme } u = \Omega D_m / 2 = u_1 = u_2$$

13

$$W_T = S2 \cdot T$$

$$T = \frac{W_T}{S2}$$

$$= \frac{\eta + \rho g Q H_n}{S2}$$

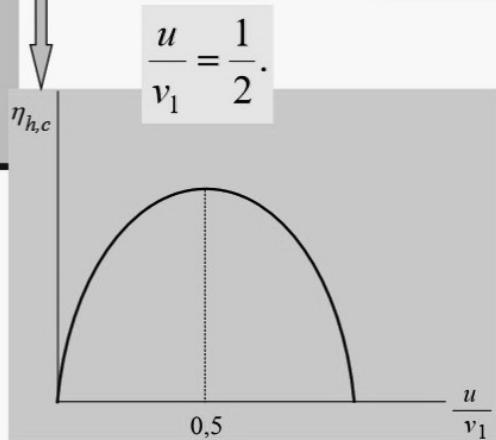
Turbinas de acción. Turbinas Pelton

Ecuación de Euler

$$gH_u = uw_1(1 + [1 - \zeta]^{1/2} \cos \beta_2) = u(v_1 - u)(1 + [1 - \zeta]^{1/2} \cos \beta_2).$$

$$\eta_{h,c} = \frac{gH_u}{gH_1} = 2 \frac{u}{v_1} \left(1 - \frac{u}{v_1}\right) (1 + [1 - \zeta]^{1/2} \cos \beta_2),$$

Cuchara



Balance energético:
Pérdidas hidráulicas cuchara
Pérdidas hidráulicas inyector
Pérdida de energía cinética de salida
(en ocasiones despreciable)

$$H_u = \eta_{h,c} \eta_{h,i} H_n,$$

Inyector

$$\eta_{h,i} = \frac{gH_1}{gH_n}$$

Rendimiento hidráulico

Velocidad
específica

$$\Omega_S|_{\text{Pelton}} = \Omega \left. \frac{Q_{1\text{chorro}}^{1/2}}{(gH_n)^{3/4}} \right|_{\eta_{\max}}$$

$$V_1 = \sqrt{2gH_n \eta_{h,i}}$$

$$V_2 = w_2^2 + u^2 - 2w_2 u \cos \beta_2$$

$$\eta_{h,i} = \frac{H_i}{H_n} = 1 - \frac{\Delta H_{i,\text{desc}}}{H_n}$$

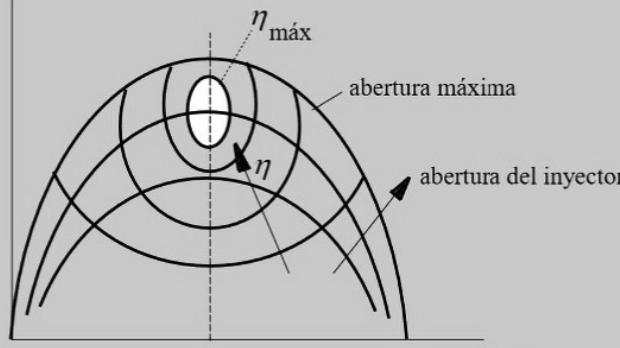
$$\Delta H_{i,\text{desc}} = \zeta - \frac{w_i^2}{2g}$$

$$\Delta H_{i,\text{desc}} = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta z_{\text{desc}}^2$$

$$\eta_{h,c} = 2 \frac{u}{V_i} \left(1 - \frac{u}{V_i}\right) [1 + \sqrt{1 - \zeta} \cos \beta_2]$$

Regulación y curvas características de las turbinas Pelton

$$\frac{W}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}$$

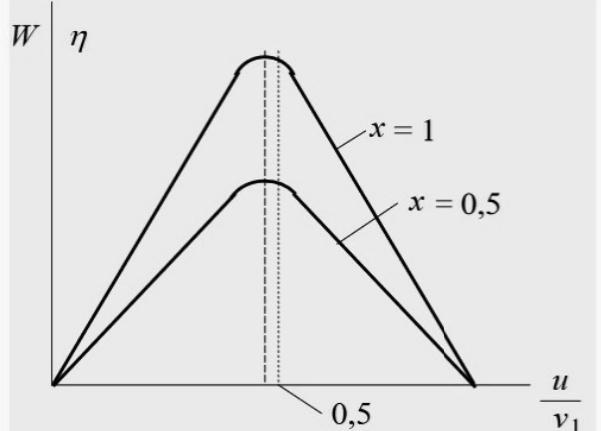


$$\eta_{h,c} = \frac{\eta_{h,i}}{\eta_{h,c}}$$

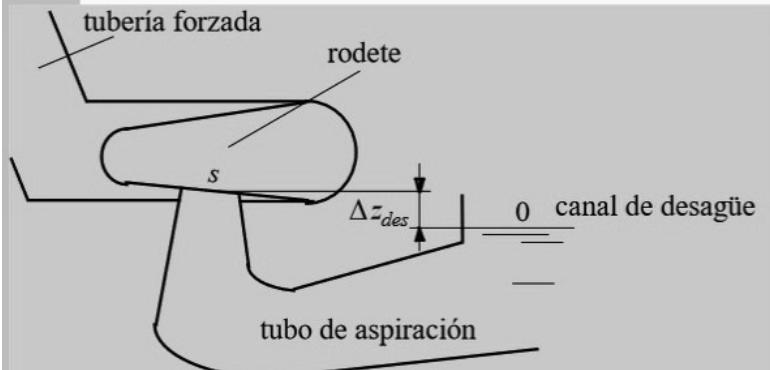
El elemento principal de regulación es el inyector (equivalente al distribuidor de álabes orientables en las turbinas de reacción)

La potencia puede ponerse en función de la apertura del distribuidor $a(x)$

$$\frac{W}{\rho D^2 (gH)^{3/2}} \propto \frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}} \left(1 - \frac{\Omega D}{(gH)^{1/2}}\right) a(x),$$



Cavitación en turbinas



$$\frac{p_s}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} - \Delta z_{des} + \Delta H_{des} - \frac{v_s^2}{2g}, \quad p_x = p_s - \epsilon \frac{1}{2} w_2^2,$$

$$\frac{p_a - p_v}{\rho g} - \Delta z_{des} > \frac{v_s^2}{2g} + \epsilon \frac{w_2^2}{2g} - \Delta H_{des},$$

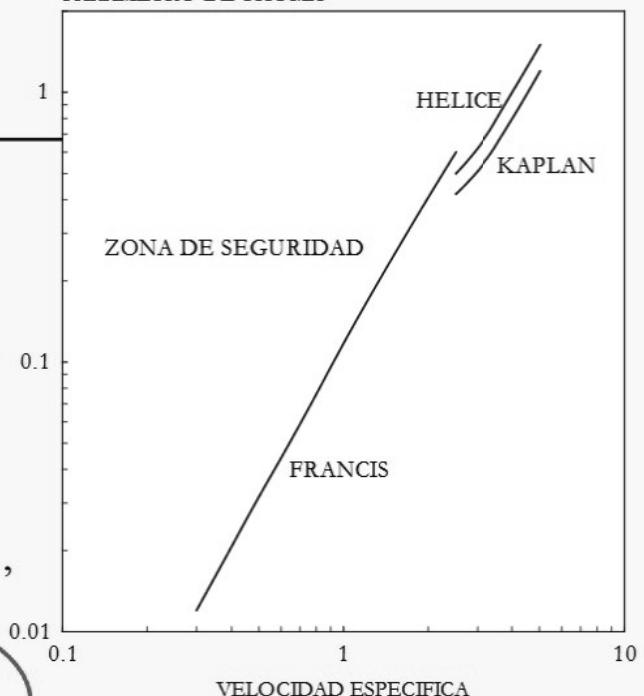
NPSH_D

NPSH_N

Parámetro de Thoma

$$\sigma_t = \left(\frac{p_a - p_v}{\rho g} - \Delta z_{des} \right) \frac{1}{H_n}.$$

PARÁMETRO DE THOMA



$$\Delta z_{des,máx} = \frac{p_a - p_v}{\rho g} - \sigma_{t,i} H_n,$$

17

Triángulos de velocidades:

$$t_2 \alpha_1 = \frac{v_{m1}}{v_{u1}} \quad y \quad t_2 \beta_1 = \frac{v_{m1}}{w_{u1}} -$$

$$u_1 = v_{u1} + w_{u1} = v_{u1} \left(\frac{1}{t_2 \alpha_1} + \frac{1}{t_2 \beta_1} \right)$$

Rendimiento hidráulico:

$$\eta_h = \frac{H_t}{H_n} = \frac{1}{1 + \Delta h / H_t}$$