ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین مقدماتی چهارم - استقرا

سید حمید محمودی، یاسمن عموجعفری

سؤال ۱.

به ازای هر $n \in N$ به کمک استقرا ثابت کنید:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} > ۲(\sqrt{n+۱} - ۱)$$

پاسخ :

با کمک استقرای ضعیف مسئله را حل می‌کنیم.

- **پایه استقرا:** برای $n = ۱$

$$n = ۱$$
$$۱ > ۲(\sqrt{۱+۱} - ۱) \iff ۳ > ۲\sqrt{۲} \Longleftarrow \sqrt{۹} > \sqrt{۸}$$

بنابراین پایه درست است.

- **فرض استقرا:** فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ درست است.

- **گام استقرا:** ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = k + ۱$ درست است.
برای اثبات درستی حکم، از حکم شروع کرده و با استدلالی بازگشت پذیر به کمک فرض، به یک فرض بدیهی یا اثبات شده می‌رسیم و سپس با استدلال معکوس حکم را ثابت می‌کنیم.

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{k+۱}} > ۲(\sqrt{(k+۱)+۱} - ۱)$$

طبق فرض داریم:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{k}} > ۲(\sqrt{k+۱} - ۱)$$

بنابراین کافیست ثابت کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{k+۱}} + ۲(\sqrt{k+۱} - ۱) > ۲(\sqrt{k+۲} - ۱)$$

که با ساده کردن و به‌توان دو رساندن دو طرف نامساوی خواهیم داشت: (چون هر دو عبارت مثبت‌اند مجازیم به‌توان دو رسانده و مقایسه کنیم)

$$\frac{۱}{k+۱} + ۴(k+۱) + ۴ > ۴(k+۲)$$

که چون $\frac{۱}{k+۱} > ۰$ است به یک فرض بدیهی به دلیل $k > ۰$ رسیدیم. بنابراین با استدلال معکوس می‌توانیم حکم را ثابت کنیم.

سؤال ۲.

فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است $(n \geq ۳)$. به جای این اعداد اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، این اعداد مثبت به دست آمده را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد به طوریکه مجموع اعداد دو دسته باهم برابر باشد.

پاسخ :

با استفاده از استقرای ضعیف بر روی n اثبات می کنیم:

- **پایه استقرا:** برای $n = ۳$
فرض کنید سه عدد متمایز $a_۱, a_۲, a_۳$ داریم که به ترتیب صعودی آن‌ها را نوشته ایم یعنی $a_۱ < a_۲ < a_۳$. حال اگر اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را روی تخته بنویسیم اعداد جدید مثبت ما عبارتند از:

$$(a_۲ - a_۱, a_۳ - a_۲, a_۳ - a_۱)$$

اگر $a_۲ - a_۱, a_۳ - a_۲$ را در یک دسته و $a_۳ - a_۱$ در دسته‌ی دیگر بگذاریم جمع هر دسته برابر $a_۳ - a_۱$ می شود.

پس پایه استقرا برقرار است

- **فرض استقرا:** حال فرض می‌کنیم که برای n درست است یعنی اعداد $a_۱, a_۲, ..., a_n$ را که به صورت صعودی نوشته‌ایم را داریم و اعداد مثبت حاصل از اختلاف دوبه‌دوی آن‌ها را می‌توان به ۲ دسته با مجموع برابر تقسیم کرد.

- **گام استقرا:** حال چون برای n های فرد حکم را بررسی می‌کنیم پس کافی است حکم را برای $n + ۲$ اثبات کنیم.
فرض کنید اعداد $a_۱, a_۲, ..., a_n, a_{n+۱}, a_{n+۲}$ که به صورت صعودی مرتب شده‌اند را داریم. طبق فرض استقرا می‌توانیم اعداد $a_۱, a_۲, ..., a_n$ به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کرد.

برای راحتی کار $a_{n+۲}$ را با b و $a_{n+۱}$ را با c نمایش می‌دهیم.

حال باید نشان دهیم می توان اختلاف‌های b و c را با تمام $a_۱, a_۲, ..., a_n$ و همچنین اختلاف خود b و c را به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کنیم.

چون اعداد را به صورت صعودی فرض کردیم پس $b > c$ است و می‌توان آن را به صورت $b = c + t$ نوشت.(t عددی غیر منفی است.) حال اختلاف b را با $a_۱$ یعنی $c + t - a_۱$ در دسته‌ی A و اختلاف c را با $a_۱$ یعنی $c - a_۱$ در دسته‌ی B قرار می‌دهیم. حال برای $a_۲$ برعکس عمل می‌کنیم، یعنی اختلاف آن را با b در دسته‌ی B و اختلاف آن را با c در دسته‌ی A قرار می‌دهیم.

به همین ترتیب تا a_n پیش می‌رویم. در نهایت دسته‌های ما به صورت زیر خواهند شد:

$$A = c + t - a_۱, c - a_۲, c + t - a_۳, ..., c + t - a_n$$

$$B = c - a_۱, c + t - a_۲, c - a_۳, ..., c - a_n$$

حال چون هرکدام از مجموعه های بالا n عضو دارند و چون n فرد است نمی‌شود آن‌ها را به دو دسته با مجموع برابر تقسیم کنیم و یکی از دسته‌ها دقیقا t واحد از آن یکی بیشتر است. برای مثال در بالا مجموعه‌ی A ، t واحد از B بزرگ‌تر است. برای حل این مشکل، می‌توانیم اختلاف b و c یعنی $b - c = t$ را در مجموعه‌ی B بگذاریم. پس به این ترتیب توانستیم تو دسته با مجموع یکسان درست کنیم و حکم استقرا اثبات می‌شود.