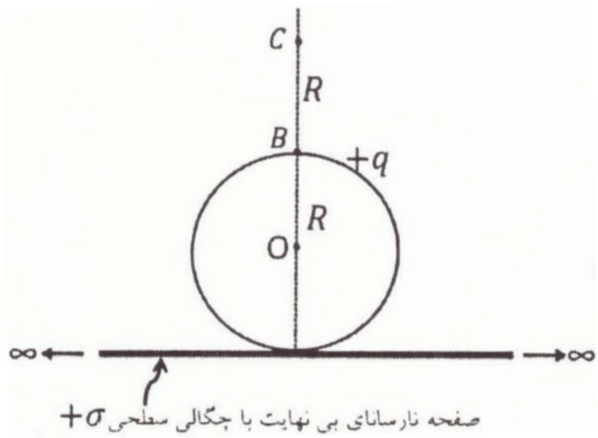
به نام خدا

پاسخنامه تمرین سری ۳ فیزیک۲

پتانسیل الکتریکی

۱- مطابق شکل زیر، یک پوسته کروی نارسانا به شعاع R روی یک صفحه نارسانای نازک و با طول و عرض بسیار بزرگ قرار گرفته است. چگالی سطحی بار صفحه نارسانا $+\sigma$ است و کل بار پوسته کروی، که به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است، $+q$ است.



الف) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه C و B، یعنی $(V_B - V_C)$ ، را بر حسب پارامترهای داده شده به دست آورید.

ب) اختلاف پتانسیل بین دو نقطه O و B، یعنی $(V_O - V_B)$ ، را بر حسب پارامترهای داده شده به دست آورید.

(نقاط O و B و C در یک امتداد هستند)

پاسخ:

الف) برای فاصله B تا C ، ابتدا میدان الکتریکی ناشی از پوسته کروی و صفحه را محاسبه می کنیم.

$E_{r>R} = \frac{kq}{r^2}$ ناشی از پوسته کروی

$E_{r>R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ناشی از صفحه نارسانا

$$\rightarrow V_B - V_C = -\int_C^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_B^C \vec{E}.\vec{dr} = \int_B^C E.dr = \int_B^C \left[\frac{kq}{r^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right] dr$$

$$= \left[\frac{-kq}{r} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r\right]_B^C = kq\left[\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right] + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R = kq\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right] + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R = \frac{kq}{2R} + \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

ب) $V_O - V_B = ?$

بار درون پوسته نارسانا کروی صفر است، پس:

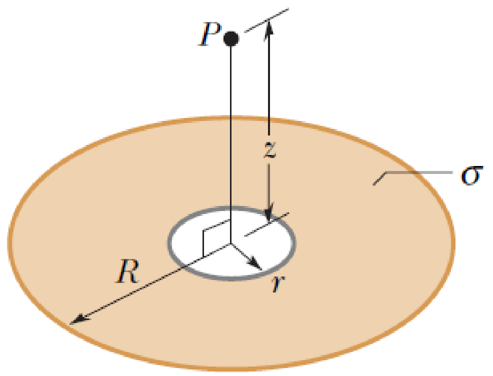
$E_{r<R} = 0$ ناشی از پوسته کروی

$E_{r<R} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ناشی از صفحه نارسانا

$$\rightarrow V_O - V_B = -\int_B^O \vec{E}.\vec{dl} = \int_O^B \vec{E}.\vec{dr} = \int_O^B E.dr = \int_O^B \left[0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right] dr$$

$$= \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r\right]_O^B = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

۲- با توجه به شکل، یک دیسک نارسانا به شعاع R که حفره ای به شعاع r در مرکز آن قرار دارد دارای چگالی بار σ است. پتانسیل الکتریکی ناشی از آن را در نقطه P که بر روی محور اصلی دیسک و به ارتفاع z قرار دارد را بیابید.



پاسخ:

می توانیم دیسک را به نوار های بسیار باریک تقسیم کرده و سپس با استفاده از آن پتانسیل را محاسبه کنیم:

$$\boldsymbol{dq=\sigma dA} \Rightarrow dq = \sigma \cdot 2\pi r'\, dr'$$

$$dv_p = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma \cdot 2\pi r'\, dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$v_p = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_r^R \frac{r'\,dr'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^z + r^2}\right)$$

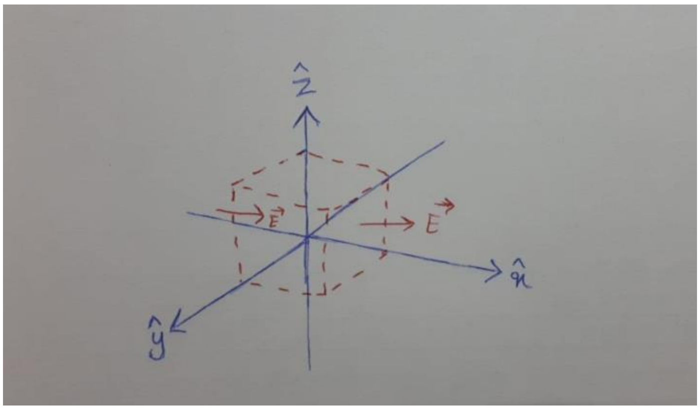
۳- در ناحیه $x \geq 0$ از فضا پتانسیل الکتریکی برابر $V = V_0 x^{4/3}$ ولت است. چه مقدار بار در داخل مکعبی به ضلع ۱ که در ناحیه اول مختصات است، وجود دارد(یک راس مکعب روی مبدا مختصات است.)

پاسخ: برای بدست آوردن بار داخل ناحیه ابتدا باید میدان الکتریکی را بدست آوریم سپس شار الکتریکی خارج شونده از سطح را پیدا کرده و با استفاده از قانون گاوس بار الکتریکی داخل سطح گوسی را پیدا کنیم.

$$V = V_0 x^{4/3}$$

چون پتانسیل الکتریکی فقط تابعی از X است گرادیان آن همان مشتق آن نسبت به X است:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\tfrac{4}{3} V_0 x^{1/3}\,\hat{x}$$

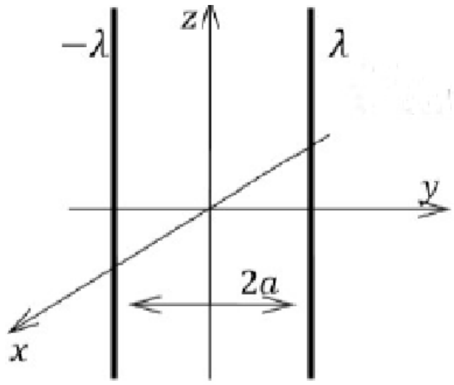


بدست آوردن شار الکتریکی:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot dA = \int -\frac{4}{3} V_0 x^{\frac{1}{3}}\,dA = \left(-\frac{4}{3} V_0 x^{\frac{1}{3}} \times 1\right)_0^1 = \frac{-4V_0}{3} - 0 = \frac{-4V_0}{3}$$

حال با استفاده از قانون گاوس داریم:

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q = \frac{-4V_0\varepsilon_0}{3}$$

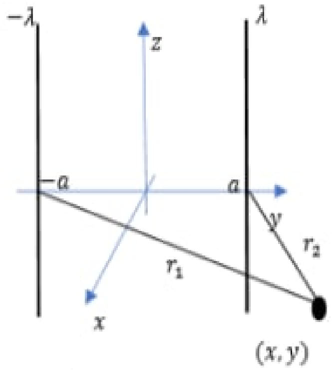


۴- دو خط باردار موازی محور z ها با چگالی بار های خطی λ و $-\lambda$ مطابق شکل قرار گرفته اند.

الف) پتانسیل را در نقطه ای دلخواه در صفحه $z = 0$ با درنظر گرفتن مبدا مختصات به عنوان صفر پتانسیل محاسبه کنید.

ب) آیا می توان بی نهایت را به عنوان صفر پتانسیل در قسمت الف در نظر گرفت؟ توضیح دهید.

ج) توضیح دهید سطوح هم پتانسیل در توزیع بار مورد نظر چه شکلی دارند.



پاسخ:

الف) میدان ناشی از یک خط بار برابر است با :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \hat{r}$$

پتانسیل ناشی از یک خط بار با مرجع پتانسیل در $R = a$:

$$V(r) = -\int_{R=a}^{r} E(R).dR = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

در مورد این مساله که دو خط بار داریم چون پتانسیل کمیت اسکالر است باهم جمع میشوند:

$$V(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{(x^2 + (y-a)^2)}}\right) + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{\sqrt{(x^2 + (y+a)^2)}}\right) =$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{(x^2 + (y+a)^2)}}{\sqrt{(x^2 + (y-a)^2)}}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

ب) چون پتانسیل هرنقطه ی دلخواه فقط تابع فواصل نقطه از محل های تلاقی دو خط باردار با محور y است و به مبدا پتانسیل ربطی ندارد میتوان مبدا پتانسیل را به بینهایت انتقال داد .

ج)

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{(x^2+(y+a)^2)}}{\sqrt{(x^2+(y-a)^2)}}\right)=\text{cte}\ \Rightarrow \frac{\sqrt{(x^2+(y+a)^2)}}{\sqrt{(x^2+(y-a)^2)}}=cte$$

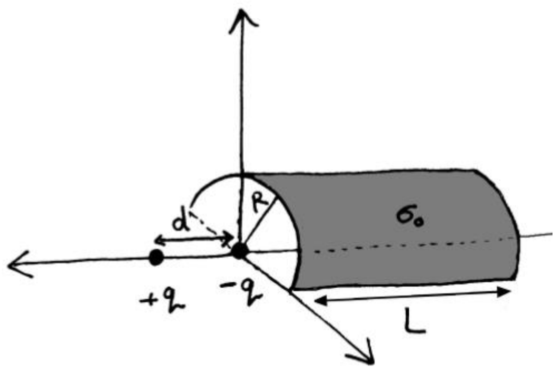
$$k(x^2+(\mathrm{y}-\ \mathrm{a})^2)=\ (x^2+\ (\mathrm{y}+\ \mathrm{a})^2)$$

$$\Rightarrow (k-1)x^2+\ (k-1)y^2-2(\mathrm{k}+1)\mathrm{a}\mathrm{y}+(k-1)a^2=0$$

$$x^2+\ y^2-2\acute{\mathrm{k}}\ y+a^2=0\ \Rightarrow\ x^2+(y-\acute{k})^2=\acute{k}^2-\mathrm{a}^2=\ddot{\mathrm{k}}^2$$

معادله ی دایره ای به مرکز $(0,\acute{k})$است و چون پتانسیل به ارتفاع بستگی ندارد پس سطوح هم پتانسیل به شکل استوانه هایی با مقطع دایره خواهند بود .

۵- پوسته‌ای باردار به شکل نیم استوانه به شعاع R، طول L و چگالی بار سطحی ثابت σ_0 مفروض است. چقدر باید کار انجام دهیم تا مطابق شکل، یک دو قطبی را از بی نهایت (با سرعت ثابت) به مبدأ مختصات (لبه پوسته) منتقل کنیم. فاصله بین دو بار d می‌باشد.



پاسخ:

با انتقال دو قطبی از بینهایت به مبدا مختصات مطابق شکل، در واقع بار q- از بی نهایت به مبدا مختصات و بار q+ از بی نهایت به نقطه x=d انتقال داده شده است. بنابراین اگر اختلاف پتانسیل ناشی از نیم استوانه را در دو نقطه مبدا و x=d بدست آوریم با ضرب هر یک از بار های نقطه ای در پتانسیل مربوطه کار انجام شده بدست می‌آید:

پتانسیل یک نیم حلقه در مبدا : $dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma_0\pi R\,dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$

که در آن x فاصله مرکز هر نیم حلقه تا مبدا است.

حال این نیم حلقه در فاصله x است. باید روی تمام نیم حلقه ها در فاصله ۰ تا L انتگرال بگیریم تا پتانسیل واقعی به دست‌آید:

$$V = \int_0^L \frac{\sigma_0 \, \mathrm{dx} \, \mathrm{R}}{4\epsilon_0\sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{x}^2)}} = \frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{x}^2)}\right)\Big|_0^L$$

$$V = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2)}}{R}\right)$$

$$\Delta U_1 = -q_1 \times V_o = -q\frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2)}}{R}\right)$$

x=d پتانسیل یک نیم حلقه در : $dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_0 \pi R \, dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + (\mathrm{x}+\mathrm{d})^2}}$

$$V = \int_0^L \frac{\sigma_0 \, \mathrm{dx} \, \mathrm{R}}{4\epsilon_0\sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{x}+\mathrm{d})^2)}} = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0} \ln\left(x + d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{x}+\mathrm{d})^2)}\right)\Big|_0^L$$

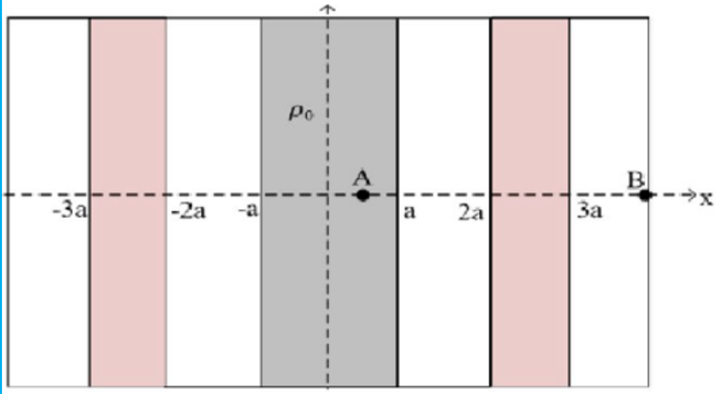
$$V = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{d})^2)}}{d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{d}^2)}}\right)$$

$$\Delta U_2 = +q_1 \times V_o = q\frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{d})^2)}}{d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{d}^2)}}\right)$$

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$\Delta U = -q\frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2)}}{R}\right) + q\frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{d})^2)}}{d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{d}^2)}}\right)$$

$$\Delta U = q\frac{\sigma R}{4\epsilon_0} \ln\left(\frac{R\left(L + d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{d})^2)}\right)}{\left(L + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2)}\right)\left(d + \sqrt{(\mathrm{R}^2 + \mathrm{d}^2)}\right)}\right)$$

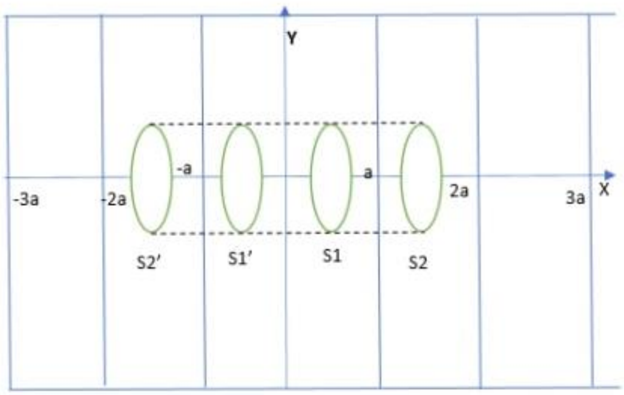


۶- بار حجمی با ابعاد بی نهایت در ناحیه $-a < x < a$ از فضا با چگالی $\rho_0(\frac{C}{m^3})$ قرار گرفته است. نواحی $-3a < x < -2a$ و $2a < x < 3a$ از فضا با ماده فلزی پر شده است.

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه $A(x = \frac{a}{2})$ و $B(x = 4a)$ را محاسبه کنید.

پاسخ :

با توجه به تقارن موجود در شکل سوال میدانیم که میدان در (x,-x) برابر است و فقط جهت ها مخالف هم هستند و همچنین چون در جهت های y , z بی نهایت هستند پتانسیل فقط تابع x است . انتگرال E روی سطح S گرفته میشود و انتگرال حجمی روی حجم v گرفته میشود .



$$|x| < a : \; \epsilon_0 \int E(x)\hat{x} \,.ds\, \hat{x} \,=\, \int \rho_0 \; dv$$

سطح کل ینی S شامل $S1 \,, \acute{S}1$ و سطح جانبی استوانه است که با توجه به عمود بودن بردار نرمال روی سطح جانبی بر x حاصل انتگرال صفر میشود و فقط $S1 \,, \acute{S}1$ باقی‌میماند.

$$\epsilon_0 \, E(x)S1 + \; \epsilon_0 \, E(-x)\widehat{S1} = \rho_0 1.2\text{x}$$

و چون $E(x) = E(-x)$ داریم :

$$E(x) = \frac{\rho_0 |x|}{\epsilon_0}\hat{x}$$

همانند بالا برای $a < \; |x| < 2a$ برای میدان داریم :

$$E(x) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}\hat{x} \;\Rightarrow\; \text{E(x)} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \;, & a < x < 2a \\ -\dfrac{\rho_0 a}{\epsilon_0} & ,-2a < x < a \end{cases}$$

همچنین با توجه به وجود رسانا میدان از بازه $2a < x < 3a$ صفر خواهد بود و مقدار میدان از $|x|<3a$ هم همانند $a<|x|<2a$ خواهد بود و سپس :

$$V = -\int_{B}^{A} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{\rho_0 x\, dx}{\epsilon_0} + \int_{a}^{2a} \frac{\rho_0 a\, dx}{\epsilon_0} + \int_{3a}^{4a} \frac{\rho_0 a\, dx}{\epsilon_0} = \frac{19\rho_0 a^2}{8\epsilon_0}$$

موفق باشید.