ریاضیات گسسته

تمرین مقدماتی ششم - گراف پیشرفته

صادق صمدی

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۲/۲۱

سؤال ۱.

ثابت کنید که هر گراف مسطح، ۵ رنگ پذیر است.

پاسخ :

اثبات با استقراء روی تعداد رأس‌ها انجام می‌شود. اگر گراف مسطح G دارای $n \leq ۵$ رأس باشد، هر رأس را با یک رنگ متمایز رنگ‌آمیزی می‌کنیم و ادعا برقرار است.

فرض کنید هر گراف مسطح با حداکثر k رأس را بتوان با پنج رنگ رنگ‌آمیزی کرد. برای گراف مسطح G با $k + ۱$ رأس، از نامساوی

$$e \leq ۳v - ۶$$

برای گراف‌های مسطح نتیجه می‌شود که رأسی مثل v با $\deg(v) \leq ۵$ وجود دارد. آن رأس را حذف می‌کنیم و طبق فرض استقراء گراف با k رأس را پنج‌رنگ‌پذیر می‌دانیم.

- اگر $\deg(v) \leq ۴$ باشد، حتماً یک رنگ خالی برای v باقی می‌ماند.
- اگر $\deg(v) = ۵$ باشد و همسایگان $u_۱, u_۲, u_۳, u_۴, u_۵$ پنج رنگ متمایز داشته باشند، برای آزادسازی رنگ یکی از این پنج رنگ دو گام زیر را بررسی می‌کنیم:

۱. اگر هیچ مسیری در زیرگرافِ رؤوس با رنگ‌های $\{۱, ۳\}$ بین $u_۱$ و $u_۳$ وجود نداشته باشد، در مؤلفهٔ شامل $u_۱$ همهٔ رنگ‌های ۱ و ۳ را با هم جابجا می‌کنیم. بدین‌ترتیب رنگ ۱ در آن مؤلفه آزاد می‌شود و می‌توانیم v را با رنگ ۱ رنگ‌آمیزی کنیم.

۲. وگرنه چنین مسیری «حلقه‌ای» در صفحه می‌بندد که فضای بین $u_۱$ و $u_۳$ را جدا می‌کند. در نتیجه $u_۲$ و $u_۴$ در زیرگرافِ رؤوس با رنگ‌های $\{۲, ۴\}$ در مؤلفه‌های متفاوت قرار دارند. بنابراین با جابجایی رنگ‌های ۲ و ۴ در مؤلفهٔ شامل $u_۲$، رنگ ۲ آزاد شده و می‌توان v را با رنگ ۲ رنگ‌آمیزی نمود.

در هر یک از این دو حالت دست‌کم یکی از رنگ‌های $\{۱, ۲\}$ برای v آزاد می‌شود و اثبات حالت $\deg(v) = ۵$ تکمیل می‌گردد.

سؤال ۲.

برای یک گراف ساده $G = (V, E)$، عدد استقلال $\alpha(G)$ اندازهٔ بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ مستقل از رئوس است:

$$\alpha(G) \;=\; \max\{\, |S| : S \subseteq V,\ \forall\, u, v \in S,\ \{u, v\} \notin E \}.$$

برای هر گراف سادهٔ G با n رأس و عدد استقلال $\alpha(G)$، ثابت کنید:

$$\chi(G) \;\geq\; \frac{n}{\alpha(G)}.$$

پاسخ :

فرض کنید $\chi(G)=k$ و یک رنگ‌آمیزی صحیح با k رنگ انجام شده است. در این صورت، رئوس G به k کلاس رنگی

$$V_1, V_2, \dots, V_k$$

تقسیم می‌شوند، به طوری که هر V_i یک مجموعه مستقل است. بنابراین:

$$|V_i| \le \alpha(G) \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, k.$$

از آنجا که

$$n = |V(G)| \;=\; \sum_{i=1}^{k} |V_i| \;\le\; \sum_{i=1}^{k} \alpha(G) = k\,\alpha(G),$$

نتیجه می‌گیریم

$$k \;\ge\; \frac{n}{\alpha(G)},$$

یعنی

$$\chi(G) \;\ge\; \frac{n}{\alpha(G)}.$$

سؤال ۳.

فرض کنید G یک گراف سادهٔ همبند مسطّح با n رأس باشد و اندازه کمر (کوچک‌ترین دور) آن دست‌کم ۵ باشد. نشان دهید:

$$|E(G)| \;\le\; \frac{5}{3}\,(n-2).$$

پاسخ :

۱. **استفاده از فرمول اویلر** برای یک گراف مسطحِ متصل داریم

$$n \;-\; e \;+\; f \;=\; 2,$$

که در آن n تعداد رأس‌ها، e تعداد یال‌ها و f تعداد وجوه است.

۲. **کران پایین روی تعداد یال‌های هر وجه** از آنجا که کوچک‌ترین دور در G طول حداقل ۵ دارد، بنابراین هر وجه حداقل ۵ یال را شامل می‌شود. از سویی هر یال دقیقاً دو وجه را جدا می‌کند، پس

$$2e \;\ge\; 5f.$$

۳. **جایگزینی و ساده‌سازی** از فرمول اویلر داریم $f = e - n + 2$. آن را در نامساوی فوق جاگذاری می‌کنیم:

$$2e \;\ge\; 5\,(e-n+2) \;\Longrightarrow\; 2e \;\ge\; 5e - 5n + 10 \;\Longrightarrow\; 5n - 10 \;\ge\; 3e \;\Longrightarrow\; e \;\le\; \frac{5}{3}(n-2).$$

۴. **نتیجه** بنابراین هر گراف مسطحِ همبند با کمر $\ge$ ۵، حداکثر $\frac{5}{3}(n-2)$ یال دارد.