

ریاضیات گسسته

پاسخنامه آزمون کوتاه پنجم - گراف مقدماتی

مهدیس میرزایی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۲/۰۹

سؤال ۱.

ثابت کنید در هر گراف زوج، هر گذر ماکسیمالی بسته است (به گذری ماکسیمال گفته می شود که طول آن را نتوان افزایش داد؛ و گذر بسته گذری است که راس ابتدا و انتهای آن برابر است. گذر ماکسیمال لزوماً با گذر ماکسیمم برابر نیست).

پاسخ:

برای اثبات حکم از برهان خلف استفاده می کنیم. با فرض اینکه گذر ماکسیمال بسته نباشد، از دو راس ابتدا و انتهای این گذر فرد یال انتخاب شده، زیرا برای راس ابتدا جز اولین یال هربار که وارد راس شده ایم بلافاصله به راس دیگری رفته ایم (به طور مشابه برای راس انتهایی). چون همه درجه های گراف زوج هستند و یال تکراری در گذر وجود ندارد پس می توان نتیجه گرفت از هر کدام از این راس ها حداقل یک یال انتخاب نشده که اگر یکی از این یال ها را به دلخواه انتخاب کنیم می توانیم طول گذر را یک واحد افزایش دهیم که با ماکسیمال بودن گذر در تناقض است.

سؤال ۲.

فرض کنید G گرافی همبند باشد. ثابت کنید گشتی بسته در G وجود دارد که از هر یال G دقیقاً دوبار می گذرد.

پاسخ:

در گشت امکان مجدد دیدن یال وجود دارد. از طرفی می دانیم اگر گراف همبند و زوج باشد تور اویلری داریم. حال اگر به ازای هر یال یک یال دیگر دقیقاً در همان محل قرار می دهیم. به عبارتی اگر بین دو راس یالی باشد در این گراف جدیدی که ایجاد می کنیم دو یال بین این دو است. واضحاً درجه هر راس دو برابر می شود. پس گراف زوج می شود. از طرفی این اضافه کردن در همبندی موثر نیست و آن را از بین نمی برد. پس گرافی زوج و همبند داریم. پس گشتی داریم که همه یال هایش را طی می کند. پس در گراف اولیه هر یک دو بار می آید.