

ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین مقدماتی نهم - نظریه اعداد

محمد عرفان دانایی

سؤال ۱.

فرض کنید a, b, c, d اعداد طبیعی هستند و داریم $ab = cd$. آیا $a + b + c + d$ می تواند اول باشد؟ اگر پاسخ شما مثبت است یک مثال ارائه کنید و در غیر اینصورت اثبات خود را بیان کنید.

پاسخ:

پاسخ منفی است.
فرض کنید:

$$x = \gcd(a, c), \quad y = \gcd(b, d) \\ \Rightarrow a = xa', \quad c = xc', \quad b = yb', \quad d = yd'$$

پس:

$$\begin{aligned} xyab' &= xyc'd' \Rightarrow a'b' = c'd' \\ \gcd(a', c') &= 1, \quad \gcd(b', d') = 1 \quad (I) \\ \Rightarrow c' &\mid a'b' \xrightarrow{I} c' \mid b' \quad (II) \\ \Rightarrow d' &\mid a'b' \xrightarrow{I} d' \mid a' \quad (III) \\ \Rightarrow a' &\mid c'd' \xrightarrow{I} a' \mid d' \quad (IV) \\ \Rightarrow b' &\mid c'd' \xrightarrow{I} b' \mid c' \quad (V) \\ \stackrel{II, V}{\Rightarrow} b' &= c' \\ \stackrel{III, IV}{\Rightarrow} a' &= d' \end{aligned}$$

حال می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + b + c + d &= xa' + yb' + xc' (= b') + yd' (= a') \\ &= xa' + yb' + xb' + ya' = (x + y)(a' + b') \end{aligned}$$

که به وضوح اول نیست.

سؤال ۲.

فرض کنید $a_n = n^3 - 5n^2 + 6n$ و $b_n = n^2 + 5$ و برای هر عدد طبیعی n ، d_n بزرگترین مقسوم علیه مشترک a_n و b_n است. ثابت کنید:

$$d_n = \gcd(n + 25, 630)$$

پاسخ:

$$d_n | n^2 + 5 \Rightarrow d_n | n^2 + 5n$$

حال داریم $d_n | n^3 - 5n^2 + 6n$. از کم کردن دو رابطه اخیر داریم:

$$d_n | 5n^2 - n$$

$$\text{از طرفی } d_n | n^2 + 5 \Rightarrow d_n | 5n^2 + 25$$

$$\Rightarrow d_n | 5n^2 - n - (5n^2 - 25) \Rightarrow d_n | n + 25 \quad (1)$$

حال می توان نوشت:

$$d_n | (n + 25)(n - 25) = n^2 - 625 \Rightarrow d_n | n^2 - 625 - (n^2 + 5) \Rightarrow d_n | 630 \quad (2)$$

از ۱ و ۲ می توان نتیجه گرفت:

$$d_n = \gcd(n + 25, 630)$$