

# ریاضیات گسسته

## پاسخ تمرین پیشرفته - شمارش مقدماتی

### آریا عازم

#### سؤال ۱.

نشان دهید نمی‌توان ۷ خط راست را طوری در صفحه رسم کرد که حداقل ۶ نقطه تقاطع وجود داشته باشد که محل برخورد دقیقاً ۳ خط باشد و حداقل ۴ نقطه تقاطع وجود داشته باشد که محل برخورد دقیقاً دو خط باشد.

**پاسخ:**

فرض خلف می‌کنیم که وقوع چنین حالتی ممکن باشد. اگر هیچ دو خطی موازی نباشند، هر دو خط از این ۷ خط در یک نقطه تلاقی دارند. ۶ نقطه‌ای که محل برخورد ۳ تا از این خط هاست را در نظر بگیرید. هر کدام از این نقاط، نماینده  $\binom{7}{3} = 35$  تا از نقاط برخورد است. به طریق مشابه ۴ نقطه‌ای که محل برخورد دقیقاً ۲ نقطه هستند،  $\binom{7}{2} = 21$  محل برخورد را نشان می‌دهند. پس باید حداقل  $6 \times 35 + 4 \times 21 = 294$  نقطه تلاقی داشته باشیم. چون این مقدار از  $\binom{7}{2} = 21$  بیشتر است به تناقض می‌رسیم. اگر جفت خطی موازی هم داشته باشیم، تعداد نقاط تلاقی از ۲۱ هم کمتر خواهد بود و باز هم تناقض رخ می‌دهد. پس وقوع چنین حالتی ممکن نیست.

#### سؤال ۲.

سامانه‌ای وجود دارد که شناسه هر کاربر در آن برابر با یک سه تایی از اعداد طبیعی مانند  $(i, j, k)$  است به طوری که  $i + j + k = 17$  برقرار است. اگر شناسه هر کاربر یکتا باشد و نتوانیم کاربر جدیدی اضافه کنیم (ظرفیت سامانه تکمیل باشد):

الف) تعداد کاربران را بیابید.

ب) اگر  $A$  مجموعه شناسه همه کاربران باشد، مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$\sum_{(i,j,k) \in A} ijk$$

**پاسخ:**

الف) تعداد کاربران، معادل تعداد جواب‌های  $i + j + k = 17$  برای  $(i, j, k)$  های طبیعی است. چون اعداد طبیعی هستند:

$$i = i' + 1, j = j' + 1, k = k' + 1$$

$$i' + j' + k' = 14 \rightarrow \binom{14+3-1}{3-1} = \binom{16}{2}$$

ب) پیدا کردن تعداد جواب‌های معادله  $i + j + k = 17$  معادل این است که بخواهیم ۲ میله را بین ۱۷ توپ بچینیم (این نکته را فراموش نکنید که بخاطر طبیعی بودن اعداد، نمی‌توانیم در هر جایگاه دلخواهی ۲ میله را قرار دهیم). حاصل  $ijk$  معادل این است که بخواهیم از هر کدام از ۳ دسته، یک توپ را انتخاب کرده و رنگ کنیم. اگر در دسته‌ها به ترتیب  $i, j$  و  $k$  توپ باشد، طبق اصل ضرب این کار به  $ijk$  طریق قابل انجام است.

طبق توضیحات بالا،  $\sum ijk$  برابر با تعداد حالاتی است که می‌توانیم ۱۴ توپ بدون رنگ و ۳ توپ رنگی و ۲ میله را در یک ردیف بچینیم به طوری که در هر سه دسته ایجاد شده توسط میله‌ها، حداقل یک توپ موجود باشد. پس در مجموع ۱۹ جایگاه داریم و با مشخص کردن ۵

مکان مربوط به توپ‌های رنگی و میله‌ها، ۲ مکان مربوط به میله و ۳ مکان مربوط به توپ‌های رنگی به طور یکتا مشخص می‌شود. پس پاسخ برابر است با:

$$\binom{19}{5} = 11628$$