

# ریاضیات گسسته

## پاسخنامه آزمون کوتاه چهارم - استقرا

علی زیلوچی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

زمان پاسخگویی: ۱۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

### سؤال ۱.

به ازای هر عدد طبیعی  $n$  به وسیله استقرا ثابت کنید

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

پاسخ:

حکم را با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم:

• پایه استقرا: برای  $n = 1$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.73}$$

• فرض استقرا: شرط برای  $n$  برقرار است؛ یعنی:

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

• گام استقرا: فرض استقرا را در  $\frac{2n+1}{2n+2}$  ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2)} \leq \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$$

از طرفی

$$(2n+1)(2n+3) = 4n^2 + 4n + 3 < 4n^2 + 4n + 4 = (2n+2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{(2n+2)^2} < \frac{1}{2n+3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

پس حکم را به ازای  $n+1$  ثابت کردیم، بدین ترتیب با استقرا حکم مسئله برای همه اعداد طبیعی ثابت می‌شود.