ریاضیات گسسته
پاسخ تمرین پیشرفته - شمارش پیشرفته

آریا عازم

سؤال ۱.

به عدد n ویژه می‌گوییم اگر عدد n^n دارای مضربی در دنباله فیبوناچی باشد. ثابت کنید عدد ۱۴۰۴ عددی ویژه است.

پاسخ :

ثابت می‌کنیم هر عدد طبیعی مانند m دارای مضربی در دنباله فیبوناچی است و از آن نتیجه می‌گیریم که 1404^{1404} هم دارای مضربی در دنباله فیبوناچی است پس ۱۴۰۴ عددی ویژه است.

اعداد دنباله فیبوناچی را به پیمانه m در نظر می‌گیریم و می‌دانیم هر عدد به پیمانه m، m حالت دارد. بنابراین هر زوج متوالی از دنباله فیبوناچی، به پیمانه m، m^2 حالت مختلف دارد. پس اگر m^2+1 زوج متوالی از دنباله فیبوناچی انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو جفت زوج متوالی وجود دارند به طوری که عدد اول زوج اول و عدد اول زوج دوم، عدد دوم زوج اول و عدد دوم زوج دوم به پیمانه m برابرند. فرض کنیم عدد اول زوج اول، عضو iام دنباله و عدد اول زوج دوم عضو jام دنباله باشد. بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $i<j$ برقرار است:

$$\exists\, i,j : a_i \overset{m}{\equiv} a_j,\ \ a_{i+1} \overset{m}{\equiv} a_{j+1}$$

چون $a_{i-1} = a_{i+1} - a_i$ پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_{i-1} \overset{m}{\equiv} a_{j-1},\ \ a_{i-2} \overset{m}{\equiv} a_{j-2},\ \ \dots,\ 1 \overset{m}{\equiv} a_{j-k},\ 1 \overset{m}{\equiv} a_{j-k-1}$$

این استدلال را تا جایی ادامه می‌دهیم که به اول دنباله فیبوناچی برسیم (k برابر با تعداد گامی است که باید به عقب برویم). چون دنباله فیبوناچی با ۱ و ۱ شروع می‌شود، می‌توانیم دو عدد عضو متوالی از دنباله پیدا کنیم که به پیمانه m یک باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{j-k-2} = a_{j-k} - a_{j-k-1} \overset{m}{\equiv} 1 - 1 \overset{m}{\equiv} 0 \to a_{j-k-2} \overset{1404^{1404}}{\equiv} 0$$

سؤال ۲.

در یک مسابقه، a شرکت‌کننده و b داور حضور داشتند، که $b \geq 3$ عدد صحیح فردی است. هر داور به هر شرکت‌کننده نمره قبول یا رد می‌دهد. می‌دانیم هر دو داور حداکثر راجع به k شرکت‌کننده قضاوت یکسان داشته‌اند. با استفاده از دوگانه شماری، نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

پاسخ :

تعداد مجموعه‌های ۳تایی که شامل دو داور و یک شرکت‌کننده است، به طوری که دو داور نظر یکسان درباره آن شرکت‌کننده دارند را می‌شماریم. از آن‌جایی که هر دو داور حداکثر درباره k نفر نظر یکسان دارند، به ازای هر دو داور که از b داور انتخاب کنیم، حداکثر k شرکت‌کننده با آن‌ها تشکیل سه‌تایی مطلوب می‌دهند. پس در مجموع حداکثر $k\binom{b}{2}$ سه‌تایی مطلوب داریم. از طرفی اگر شرکت‌کننده iام

توسط r_i داور قبول و توسط $b - r_i$ تا رد شده باشد، این شرکت‌کننده در دقیقا $\binom{r_i}{2} + \binom{b-r_i}{2}$ مجموعه سه‌تایی مطلوب حضور دارد. مجموع این مقدار برای تمام شرکت‌کننده‌ها برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{a} \left(\binom{r_i}{2} + \binom{b-r_i}{2}\right)$$

در نتیجه دوگانه‌شماری بالا خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{a} \left(\binom{r_i}{2} + \binom{b-r_i}{2}\right) \leq k\binom{b}{2}$$

لم ۱) با استفاده از روابط جبری می‌توان نشان داد که:

$$\binom{r_i}{2} + \binom{b-r_i}{2} = \binom{b}{2} - r_i(b - r_i)$$

اما با استفاده از دوگانه‌شماری هم می‌توانیم تساوی بالا را اثبات کنیم. فرض کنید دو دسته توپ داریم که در یک دسته r_i و در دیگری $b - r_i$ توپ وجود دارد و می‌خواهیم دو توپ از بین این توپ‌ها انتخاب کنیم به طوری که هر دو توپ در یک دسته باشند. یک راه برای انتخاب این است که یک بار از یک دسته دو توپ و بار دیگر از دسته دیگر دو توپ انتخاب کنیم که تعداد حالات این روش، برابر با سمت چپ تساوی است. راه دیگر این است که از کل b توپ دو توپ انتخاب کنیم و سپس تعداد حالاتی که هر توپ از دسته‌ای متفاوت است را از تعداد حالات آن کم کنیم. تعداد حالات روش دوم برابر با طرف راست تساوی است.

لم ۲) با توجه به فرد بودن b، داریم که $r_i(b - r_i) \leq \frac{b^2-1}{4}$. چون b فرد است داریم که به ازای هر r_i صحیح داریم:

$$(r_i - \frac{b}{2})^2 \geq \frac{1}{4} \rightarrow {r_i}^2 - br_i + \frac{b^2}{4} \geq \frac{1}{4} \rightarrow \frac{b^2 - 1}{4} \geq r_i(b - r_i)$$

در نتیجه دو لم خواهیم داشت:

$$\binom{r_i}{2} + \binom{b - r_i}{2} \geq \binom{b}{2} - \frac{b^2 - 1}{4} = \frac{(b - 1)^2}{4}$$

با توجه به نامساوی که با دوگانه‌شماری نتیجه شد داریم:

$$\frac{a(b - 1)^2}{4} \leq \sum_{i=1}^{a} \left(\binom{r_i}{2} + \binom{b-r_i}{2}\right) \leq k\binom{b}{2}$$

$$\rightarrow \frac{b - 1}{2b} = \frac{(b - 1)^2}{4\binom{b}{2}} \leq \frac{k}{a}$$