ریاضیات گسسته

مجموعه سوالات کلاسی پنجم - گراف مقدماتی

امیر پارسا موبد

سؤال ۱.

فرض کنید P و Q دو مسیر با بیشترین طول در گراف همبند G باشند. ثابت کنید که P و Q حداقل یک رأس مشترک دارند.

پاسخ :

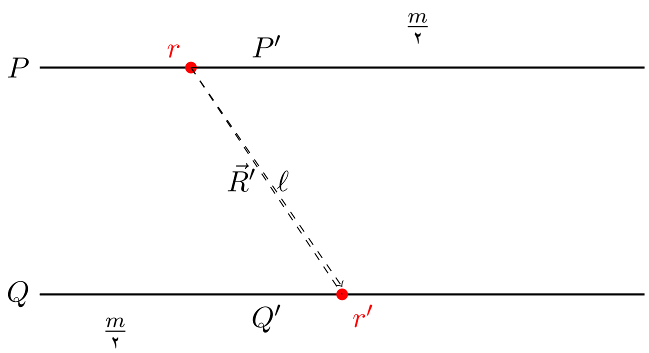
فرض کنید m طول مسیرهای P و Q باشد. چون G همبند است، پس مسیری بهینه R بین $V(P)$ و $V(Q)$ وجود دارد. طول R را l می‌نامیم. فرض کنید ابتدا و انتهای مسیر R به‌ترتیب $r \in V(P)$ و $r' \in V(Q)$ باشند.

بخشی از مسیر P که از r تا دورترین رأس مسیر امتداد دارد، حداقل $m/۲$ طول دارد. به‌طور مشابه، بخشی از مسیر Q که از r' تا دورترین رأس امتداد دارد، حداقل $m/۲$ طول دارد. چون R یک مسیر کوتاه‌ترین است، هیچ رأس داخلی از P یا Q در آن وجود ندارد.

اگر P و Q راس مشترک نداشته باشند، در این صورت P' و Q' نیز راس مشترک نخواهند داشت و اتحاد مسیرهای P'، Q' و R یک مسیر با طول حداقل

$$m/۲ + m/۲ + l = m + l$$

خواهد ساخت. ازآنجاکه طول مسیر حداکثر m است، پس باید $l = ۰$ باشد. بنابراین، $r = r'$ و درنتیجه، مسیرهای P و Q یک رأس مشترک دارند.



سؤال ۲.

فرض کنید G یک گراف مرتبه ۱۳ با راس های درجه ۷ یا ۸ باشد. نشان دهید G حداقل ۸ راس درجه ۷ یا حداقل ۷ راس درجه ۸ دارد.

پاسخ :

فرض کنید این گونه نباشد. در این صورت G حداکثر ۷ راس درجه ۷ و ۶ راس درجه ۸ دارد. از انجا که n = ۱۳ میباشد G باید دقیقا ۷ راس درجه ۷ و ۶ راس درجه ۸ داشته باشد ولی چون میدانیم که تعداد راس های درجه فرد یک گراف نباید عددی فرد باشد پس تناقض دارد.

سؤال ۳.

ثابت کنید در یک گراف ساده همبند با n راسی و m یال، می‌توان اعداد ۱ تا m را به نحوی روی یال‌ها قرار داد که به ازای هر راس با درجه بزرگتر از ۱ ب.م.م اعداد روی یال‌های متصل به آن ۱ شود
(راهنمایی: از اینکه ب.م.م n و $n+1$ یک است استفاده کنید.)

پاسخ :

ابتدا اگر راسی با درجه فرد وجود داشت، یک راس اضافه می‌کنیم و به تمام رئوس درجه فرد متصل می‌کنیم. چون تعداد رئوس درجه فرد، زوج است، حالا تمام رئوس درجه زوج دارند. که یعنی گراف اویلری می‌شود. حال تور اویلری این گراف را در نظر می‌گیریم و به ترتیبی که یال‌ها در تور اویلری دیده شده‌اند اعداد ۱ تا m را نسبت می‌دهیم (به یال‌هایی که خودمان اضافه کردیم عددی نسبت نمی‌دهیم).

نشان می‌دهیم این عدددهی خواسته سوال را برآورده می‌کند. به ازای هر راس با درجه بزرگتر از ۱، به جز راس ابتدایی تور، دوتا از یال‌های آن در تور اویلری پشت هم ظاهر شده‌اند که هر دو جزو یال‌های اولیه گراف بوده‌اند. به این ترتیب دو عدد پشت سر هم به یال‌های متصل به این راس نسبت داده شده که ب.م.م را ۱ می‌کند. راس ابتدایی تور هم چون به یال متصل به آن عدد یک نسبت داده می‌شود قطعا ب.م.م یال‌های متصل به آن یک می‌شود (می‌توانیم فرض کنیم یال آغازین جزو یال‌هایی که خودمان اضافه کردیم نیست چون در غیر این صورت با شیفت دوری یال‌های تور می‌توانیم به این دست پیدا کنیم).

سؤال ۴.

تورنمنتی غیر قویا همبند داریم. ثابت کنید یالی وجود دارد که اگر جهتش رو عوض کنیم قویا همبند می‌شود.

پاسخ :

راه ۱:

وقتی تورنمنت غیر قویا همبند است پس به عبارتی به تعدادی مولفه قویا همبند افراز شده که یال‌های بین این مولفه ها یک دگ تشکیل می‌دهد. می‌دانیم بین هر دو مولفه تمام یال ها یا ورودی اند یا خروجی به عبارتی نمی‌توان هم یال ورودی و هم یال خروجی داشت چون در آن صورت آن دو مولفه به یک مولفه تبدیل می‌شدند. با این اوصاف می‌توان این گراف تورنمنت به یک تورنمنت غیرقویا همبند مدلسازی کرد و هر مولفه را به یک راس مدلسازی کرد. باتوجه به اینکه هر دگ دارای توپول سورت است پس اگر راس ابتدا و انتهایی آن را در نظر بگیریم واضحا تمام یال های این بین یک جهت هستند زیرا اگر بتوان دوری ایجاد کرد باعث می‌شود مولفه های کمتری داشت و تعدادی از مولفه ها ترکیب شوند. پس اگر یال راس اول به آخر جهتش را تغییر دهیم حکم برقرار می‌شود.

راه ۲:

به کمک استقرای قوی می‌توان ثابت کرد هر تورنومنت مسیر همیلتونی دارد. بدین ترتیب که یک راس دلخواه را در نظر می‌گیریم، اسم این راس را v می‌گذاریم. مجموعه رئوسی که v به آنها یال ورودی دارد را I و مجموعه رئوسی که v به آنها یال خروجی دارد را O می‌نامیم. I و O هردو تورمنت‌هایی با اندازه کوچکتر هستند، پس طبق فرض استقرا هرکدام یک مسیر همیلتونی دارند. از راس ابتدای مسیر در I شروع می‌کنیم به انتها که رسیدیم به v می‌رویم و سپس از v به راس ابتدای مسیر O می‌رویم و سپس تا انتهای آن مسیر را ادامه می‌دهیم و به این ترتیب مسیری پیدا کردیم که تمام رئوس را شامل می‌شود. (پایه را نیز گراف تک راس در نظر بگیرید)

حال که این قضیه را ثابت کردیم با استفاده از این قضیه فقط کافی است مسیر همیلتونی تورنومنت را بگیریم و یال بین سر و ته مسیر اگر در جهت تشکیل دور همیلتونی نبود جهت آن را تغییر دهیم.

سؤال ۵.

یک تورنمنت غیرقویا همبند داریم، که حداقل سه مولفه همبندی دارد. ثابت کنید راسی موجود است که اگر جهت تمام یال‌های متصل به آن را برعکس کنیم تورنمنت قویا همبند شود

پاسخ :

مولفه‌های قویا همبند گراف را در نظر می‌گیریم. به جای هر مولفه یک راس قرار دهیم، و جهت یال‌های بین دو مولفه در این گراف یال بین دو راسی که به جایشان قرار دادیم را مشخص می‌کند. بین دو مولفه قویا همبند یال‌های بین دو مولفه فقط از جهت یک مولفه به مولفه دیگر است، زیرا در غیر این صورت امکان رسیدن از هر راسی به هر راس دیگر در این دو مولفه وجود داشت و رئوس این دو مولفه تشکیل یک مولفه قویا همبند می‌دادند. پس گراف حاصل از ادغام رئوس هر مولفه یک تورنومنت بدون دور می‌شود. می‌دانیم هر تورنومنی مسیر همیلتونی دارد بدین ترتیب مسیر همیلتونی گراف حاصل را می‌گیریم. و یک راس به جز رئوس ابتدا و انتها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم(با توجه به اینکه حداقل سه مولفه قویا همبند داریم چنین راسی وجود دارد). یک راس دلخواه از مولفه‌ای که این راس در گراف اصلی نمایش می‌دهد، انتخاب می‌کنیم. اگر یال‌های متصل به این راس را برعکس کنیم گراف قویا همبند می‌شود. زیرا تورنومنت حاصل از حذف این راس نیز قطعا مسیر همیلتونی دارد و راسی که انتخاب کردیم با برعکس کردن جهت یال‌هایش با این مسیر تشکیل یک دور همیلتونی می‌دهد که نتیجه می‌دهد گراف قویا همبند است.

سؤال ۶.

اگر تورنمنت n راسی T فقط یک شاه مانند u داشته باشد، ثابت کنید $deg^+(u) = p - ۱$.

پاسخ :

حکم را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم مجموعه S مجموعه راس‌هایی باشد که به u یال خروجی دارند. طبق فرض خلف، این مجموعه حداقل یک عضو دارد.
اعضای S به تنهایی تشکیل یک تورنمنت می‌دهند. می‌دانیم هر تورنمنت شاه دارد. فرض کنیم شاه این تورنمنت، w باشد. نشان می‌دهیم w شاه تورنمنت T نیز هست.
به راس‌های درون S با حداکثر یک واسطه می‌رسد. همچنین به راس u طبق تعریف مجموعه S با دقیقا یک یال می‌رسد. از آنجایی که u به راس‌های خارج از S یال خروجی دارد، پس با حداکثر یک واسطه به این راس‌ها هم می‌رسیم. پس w نیز شاه تورنمنت است که با فرض سوال در تناقض است و در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سؤال ۷.

برای $n > ۲$ ثابت کنید تعداد گراف‌های همبند n راسی بیشتر از تعداد گراف‌های ناهمبند n راسی است.

پاسخ :

با توجه به اینکه مکمل هر گراف ناهمبند یک گراف همبند است، تعداد گراف‌های همبند n راسی بیشتر از تعداد گراف‌های ناهمبند n راسی است.

سؤال ۸.

فرض کنید u و v دو راس از گراف همبند G باشند که $d(u, v) > ۲$. ثابت کنید:

$$deg(u) + deg(v) + d(u, v) \leq p + ۱$$

پاسخ :

$d(u, v)$ طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است. این مسیر را در نظر می‌گیریم. اگر رئوس این مسیر به ترتیب $u, x_۱, x_۲, \ldots, x_{k-۱}, v$ باشند که $k = d(u, v)$. دو راس u و v هیچ یالی به راس‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_{k-۱}$ ندارند زیرا در صورت وجود چنین یالی، مسیری به طول کمتر از $d(u, v)$ بین راس‌های u و v وجود دارد.

همچنین دو راس u و v نمی‌توانند به یک راس یکسان مانند w یال داشته باشند زیرا در این صورت $d(u, v)$ برابر ۲ می‌شود.
پس می‌توانیم رئوس را به سه دسته همسایه‌های u، همسایه‌های v، و x_i ها تقسیم کنیم هر راس در حداکثر یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد.
پس داریم

$$deg(u) + deg(v) + d(u, v) - 1 <= p$$

که یعنی

$$deg(u) + deg(v) + d(u, v) <= p + 1$$

سؤال ۹.

یک گراف ساده جهت‌دار قویا همبند با $2n - 1$ یال داریم. ثابت کنید می‌توان یک یال را حذف کرد به نحوی که گراف قویا همبند، بماند.

پاسخ :

از یک راس دلخواه مثل v دوبار الگوریتم DFS جهت‌دار را اجرا می‌کنیم. یکبار با جهت‌دهی اصلی گراف و یکبار هم جهت همه یال‌ها را عکس می‌کنیم و دوباره الگوریتم را اجرا می‌کنیم. در این دوبار اجرای الگوریتم حداکثر $2n - 2$ یال از اجتماع یال‌های دو درخت DFS انتخاب می‌شوند. که اگر این یال‌ها را نگهداریم گراف قویا همبند خواهد ماند. زیرا هم v به همه رئوس مسیر دارد هم همه رئوس به v مسیر دارند. در این صورت برای اینکه از راسی مثل u به w مسیر برویم، می‌توانیم از u به v و سپس از v به u برویم (مشابه گراف بدون جهت در اینجا هم گشت $u - v$ مسیر $u - v$ را نتیجه می‌دهد).