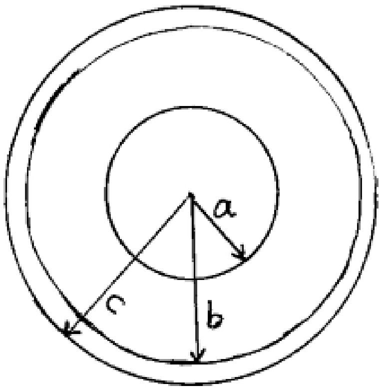
باسمه تعالی

پاسخ تمرین سری ۲ فیزیک ۲: الکتریسیته و مغناطیس

شارالکتریکی و قانون گاوس

۱. یک هادی به شکل کره توپر به شعاع a و دارای بار $+q_0$ درون یک پوسته کروی نارسانا با چگالی بار $\rho = \frac{P}{r}(\frac{C}{m^3})$ و شعاع داخلی b و شعاع خارجی c قرار دارد که P یک عدد ثابت و مثبت می‌باشد. میدان الکتریکی را در نواحی زیر بدست آورید.

الف) $r < a$ ب) $a < r < b$ ج) $b < r < c$ د) $r > c$



پاسخ:

الف)

میدان داخل هادی یا رسانا صفر است $r < a \rightarrow$

ب)

$$a < r < b \rightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}(4\pi r^2) = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$$

ج)

$$b < r < c \rightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}(4\pi r^2) = \frac{q_0 + \int_b^r \rho dV}{\varepsilon_0}$$

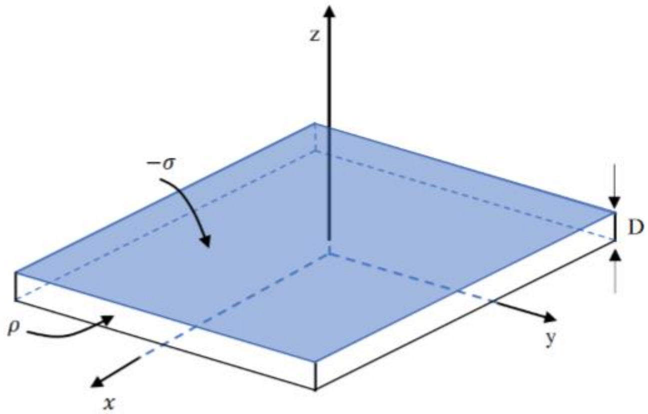
$$\rightarrow \vec{E} = \frac{q_0 + \int_b^r \frac{P}{r} 4\pi r^2 dr}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{q_0 + 2P\pi(r^2 - b^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$$

د)

$$r > c \rightarrow \oint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(4\pi r^2) = \frac{q_0 + \int_b^c \rho dV}{\varepsilon_0}$$

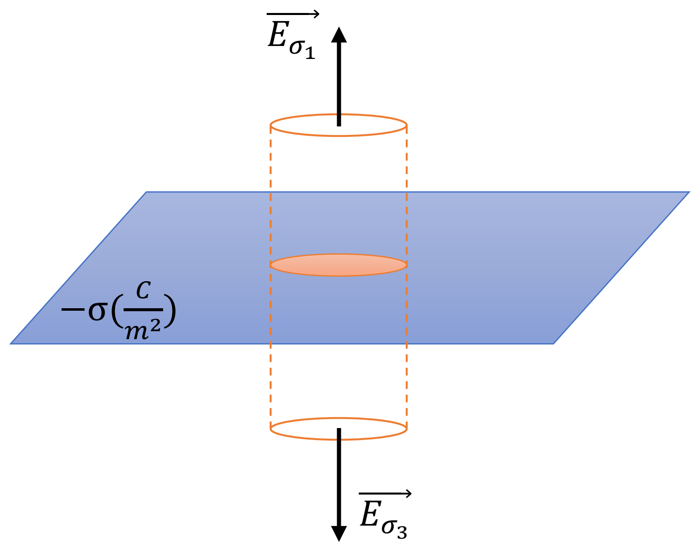
$$\rightarrow \vec{E} = \frac{q_0 + \int_b^c \frac{P}{r} 4\pi r^2 dr}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{q_0 + 2P\pi(c^2 - b^2)}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$$

۲. تیغه‌ای نارسانا با ضخامت D را در نظر بگیرید که درون آن با چگالی حجمی یکنواخت $+\rho(\frac{C}{m^3})$ و صفحه بالایی تیغه با چگالی سطحی یکنواخت $-\sigma(\frac{C}{m^2})$ باردار شده است. ابعاد تیغه (طول و عرض) نسبت به ضخامت آن بسیار بزرگ و نامحدود فرض می‌شود. تیغه روی صفحه xy از z=0 تا z=D قرار دارد. جهت و شدت میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا محاسبه نمایید.



پاسخ:

- میدان ناشی از چگالی بار سطحی (با استفاده قانون گاوس):



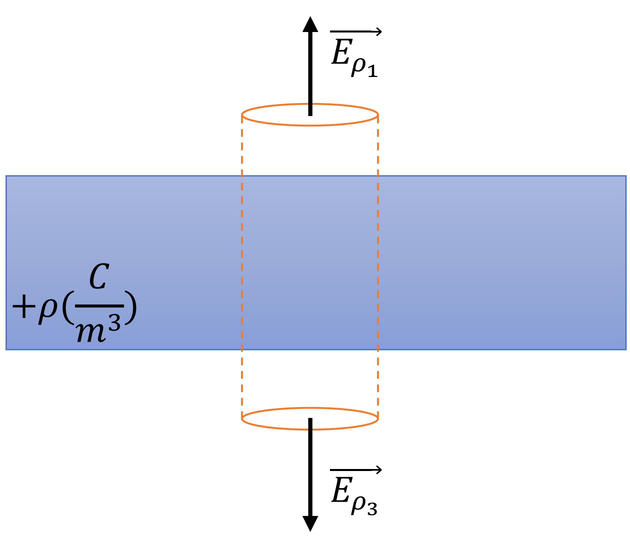
$$\vec{E} = E(z)\begin{cases}+\hat{k} & z>D \\ -\hat{k} & z<D\end{cases}$$

(z>D) بالای صفحه نازک $\rightarrow \overrightarrow{E_{\sigma_1}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

(z<D) پایین صفحه نازک $\rightarrow \overrightarrow{E_{\sigma_3}} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

- میدان ناشی از چگالی بار حجمی:

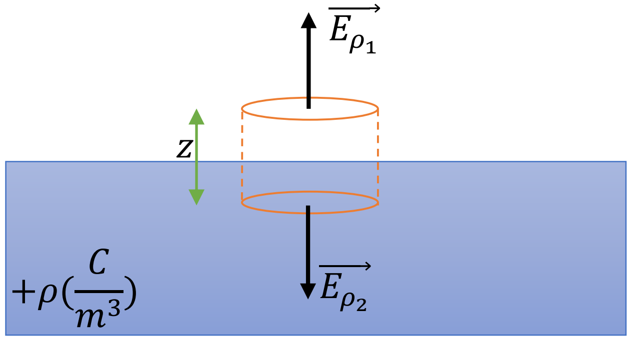
استفاده از قانون گاوس برای بالا و پایین تیغه: (یک سطح بسته استوانه ای گاوسی که دو قاعده آن، هر یک به مساحت A، بیرون از تیغه قرار داشته و قاعده ها به موازات سطح تیغه هستند، در نظر بگیرید.)



$$\rightarrow 2EA = \frac{\rho D A}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{E_{\rho_1}} = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}\hat{k}\ ,\ \ \overrightarrow{E_{\rho_3}} = -\frac{\rho D}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

استفاده از قانون گاوس برای درون تیغه : (نیمی از سطح گاوسی درون تیغه و نیم دیگر بیرون تیغه فرض شده است)



$$(E_{\rho 1}+E_{\rho_2})A=\frac{\rho A z}{\varepsilon_0}\rightarrow E_{\rho_2}=\frac{\rho z}{\varepsilon_0}-E_{\rho 1}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}(z-\frac{D}{2})\rightarrow \overrightarrow{E_{\rho_2}}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}(z-\frac{D}{2})\hat{k}$$

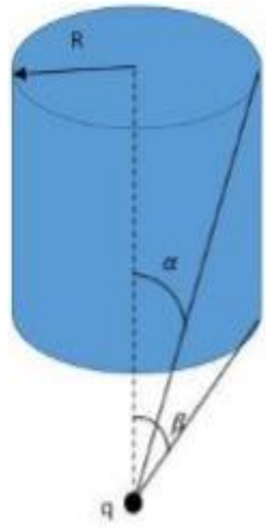
با برهم نهی میدان ها در هر سه ناحیه خواهیم داشت:

$$\vec{E}_{\text{بالای تیغه}}=\overrightarrow{E_{\sigma_1}}+\overrightarrow{E_{\rho_1}}=\frac{\rho D-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

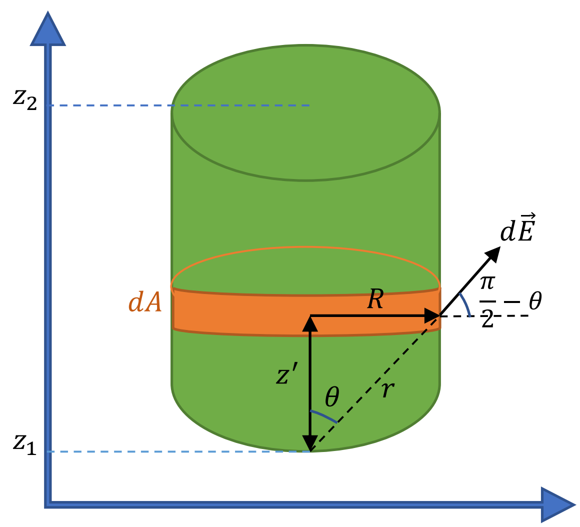
$$\vec{E}_{\text{درون تیغه}}=\overrightarrow{E_{\sigma_3}}+\overrightarrow{E_{\rho_2}}=\frac{\rho(2z-D)+\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

$$\vec{E}_{\text{پایین‌تیغه}}=\overrightarrow{E_{\sigma_3}}+\overrightarrow{E_{\rho_3}}=\frac{-\rho D+\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

۳. سطح استوانه‌ای مانند شکل روبرو در نظر بگیرید که بار نقطه‌ای q روی محور آن قرار دارد. این بار طوری قرار داده شده است که لبه های استوانه را با زاویه‌های α و β $(\alpha < \beta)$ از محل بار می‌بینند. شاری که از سطح جانبی استوانه می‌گذرد را بیابید.



پاسخ:



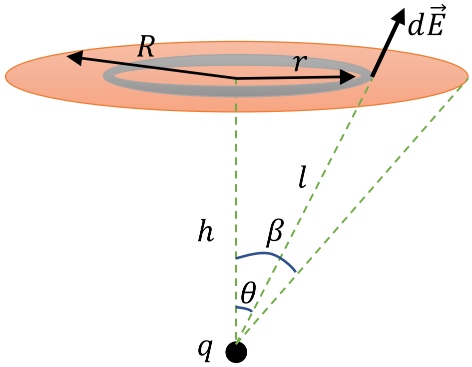
$$\phi = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} \quad , \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$$

- زاویه بین $\vec{E}$ و $\overrightarrow{dA}$ برابر $\frac{\pi}{2} - \theta$ است.
- $\overrightarrow{dA} = 2\pi r d\acute{z}$
- $R = r\sin\theta\,,\;\; r^2 = R^2 + \acute{z}^2$

$$\rightarrow \phi = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dA} = \int E.dA.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + \acute{z}^2)} 2\pi r d\acute{z}\sin\theta = \frac{qR^2}{2\varepsilon_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{d\acute{z}}{(R^2 + \acute{z}^2)^{3/2}} = \left[\frac{qR^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{R^2(R^2 + \acute{z}^2)^{1/2}}\right]_{z_1}^{z_2}$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z_2}{(R^2 + {z_2}^2)^{1/2}} - \frac{z_1}{(R^2 + {z_1}^2)^{1/2}}\right] \rightarrow \phi = \frac{q}{2\varepsilon_0}(\cos\alpha - \cos\beta)$$



روش دوم:

میدانیم شار عبوری به یک استوانه با شار خروجی از آن برابر است؛ پس برای محاسبه شار خروجی از بدنه، شار ورودی از قاعده دایره ای شکل پایین و شار خروجی از سطح مقطع دایره ای شکل بالایی را محاسبه و از هم کم می کنیم؛ شار از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\Phi = \int \vec{E}.d\vec{A}$$

برای محاسبه شار ابتدا میدان الکتریکی ناشی از تک بار q را برای المان نشان داده شده (المان دایره ای شکل به شعاع r و ضخامت dr) محاسبه میکنیم:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2}cos\theta\,\hat{z}\,, l^2 = r^2 + h^2\,, cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\,\hat{z}$$

المان سطح را مشخص می نماییم:

$$d\vec{A} = 2\pi r dr\,\hat{z}$$

در نتیجه شار ورودی به استوانه برابر است با:

$$\rightarrow \Phi = \int \frac{qh}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\,2\pi r dr = \frac{qh}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qh}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{1}{h}\right]$$

$$\Rightarrow \Phi_{in} = \frac{q}{2\epsilon_0}[-cos\beta + 1]$$

به همین طریق ثابت می شود که شار خروجی از سطح بالایی برابر است با:

$$\Phi_{up} = \frac{q}{2\epsilon_0}[-cos\alpha + 1]$$

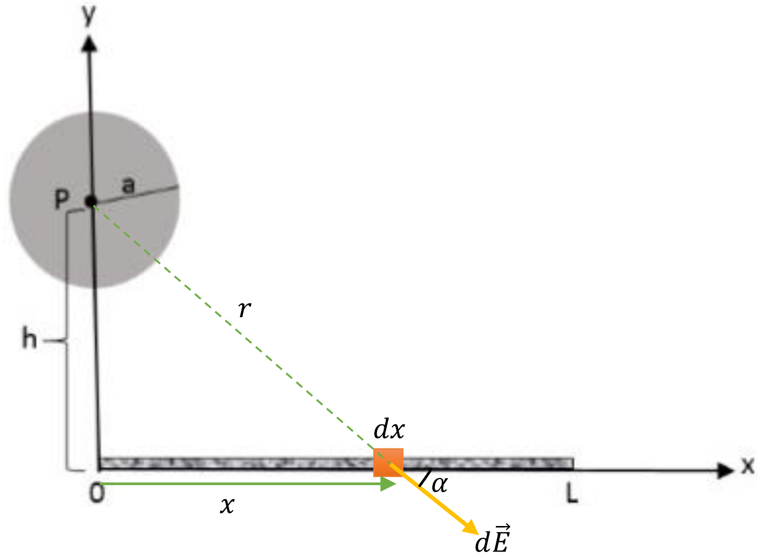
شار خروجی از بدنه استوانه برابر است با تفاضل شار دو سطح مقطع دایره‌ای شکل:

$$\Phi_{body} = \Phi_{in} - \Phi_{up}$$

$$\Rightarrow \Phi_{body} = \frac{q}{2\epsilon_0}[cos\alpha - cos\beta]$$

۴. یک بار خطی با طول L و چگالی یکنواخت $\lambda(\frac{C}{m})$ بر روی محور x از x=0 تا x=L گسترده شده است. نیروی وارد بر این بار خطی ناشی از یک توزیع بار حجمی کروی به شعاع a و چگالی یکنواخت $\rho(\frac{C}{m^3})$ که مرکزش واقع بر نقطه P به فاصله h از لبه خط است، بدست آورید (a<h).

پاسخ:



با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را خارج از کره محاسبه می کنیم:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \to \vec{E}(4\pi r^2) = \frac{\int \rho\, dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho \int_0^a 4\pi r^2\, dr}{\epsilon_0} \to \vec{E} = \frac{\rho a^3}{3r^2\epsilon_0}\hat{r}$$

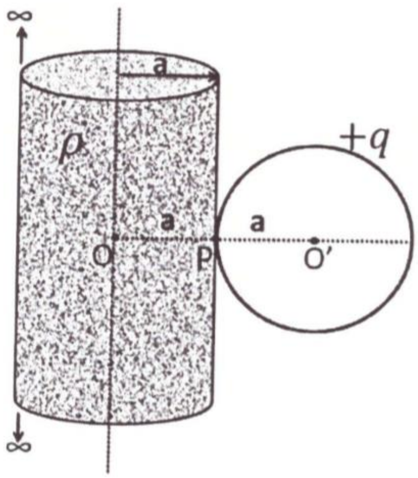
$$\hat{r} = cos\alpha\, \vec{\imath} - sin\alpha\, \hat{\jmath}\, ;\, r^2 = x^2 + h^2\, , cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\, , sin\alpha = \frac{L}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

نیروی وارد از طرف میدان الکتریکی به میله باردار را محاسبه می نماییم:

$$d\vec{F} = \vec{E}.dq\, ; dq = \lambda\, dx \to \vec{F} = \frac{\rho a^3 \lambda}{3\epsilon_0}\left[\int_0^L \frac{x\, dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\imath} - \int_0^L \frac{h\, dx}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\jmath}\right]$$

$$\vec{F} = \frac{\rho a^3 \lambda}{3\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{L^2+h^2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-L}{h\sqrt{L^2+h^2}}\right)\vec{\jmath}\right]$$

۵. بار الکتریکی با چگالی حجمی ثابت $+\rho$ در سرتاسر حجم یک استوانه نارسانای توپر به شعاع قاعده a و طول بی نهایت توزیع شده است. مطابق شکل یک پوسته کروی نارسانا به شعاع a مماس بر این استوانه قرار گرفته است. بار کل $+q$ نیز به طور یکنواخت روی سطح پوسته کروی توزیع شده است. مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی $\vec{E}$:



الف) در نقطه O (واقع بر محور استوانه) $ans: \vec{E}_O = -\frac{kq}{4a^2}\hat{\imath}$

ب) درنقطه O' (واقع بر مرکز پوسته کروی) $ans: \vec{E}_{O'} = \frac{\rho a}{4\epsilon_0}\hat{\imath}$

ج) در نقطه P (نقطه تماس پوسته کروی و استوانه) بر حسب ρ و q و a .

پاسخ:

الف) میدان داخل استوانه توپر:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \to E_1 \int dA = \frac{\rho \int dV}{\epsilon_0} \to E_1(2\pi r)l = \frac{\rho(\pi r^2)l}{\epsilon_0} \to \overrightarrow{E_1} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}$$

$$r = 0 \longrightarrow \overrightarrow{E_{1_o}} = 0$$

میدان خارج پوسته کروی:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \to E_2 \int dA = \int dq \to E_2(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \to \overrightarrow{E_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$r = 2a \longrightarrow \overrightarrow{E_{2_o}} = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 a^2}(-\hat{\imath})$$

$$\to \overrightarrow{E_o} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 a^2}(-\hat{\imath})$$

ب) میدان خارج استوانه توپر:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \to E_1 \int dA = \frac{\rho \int dV}{\epsilon_0} \to E_1(2\pi r)l = \frac{\rho(\pi a^2)l}{\epsilon_0} \to \overrightarrow{E_1} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$r = 2a \longrightarrow \overrightarrow{E_{1_{o'}}} = \frac{\rho a}{4\varepsilon_0}(+\hat{\imath})$$

میدان داخل پوسته کروی:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \to E_2 \int dA = \int dq$$

بار الکتریکی درون پوسته کروی صفر است؛ پس خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{E_{2_{o'}}} = 0$$

$$\to \overrightarrow{E_{o'}} = \overrightarrow{E_{1_{o'}}} + \overrightarrow{E_{2_{o'}}} = \frac{\rho a}{4\varepsilon_0}(+\hat{\imath})$$

ج) میدان خارج استوانه توپر: ("با توجه به قسمت ب، برای میدان خارج استوانه توپر، رابطه زیر حاصل می شود")

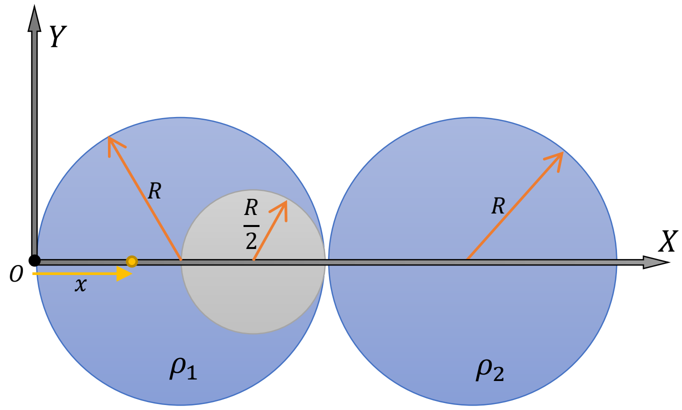
$$\overrightarrow{E_1} = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \longrightarrow E_{1_{r=a}} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}(+\hat{\imath})$$

میدان خارج پوسته کروی: ("با توجه به قسمت الف، برای میدان خارج پوسته کروی، رابطه زیر حاصل می شود")

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{r} \longrightarrow E_{2_{r=a}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{\imath})$$

$$\overrightarrow{E_p} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}(\hat{\imath}) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\hat{\imath})$$

۶. دو استوانه توپر با طول بی نهایت و چگالی حجمی ρ_1 و ρ_2 و به شعاع R مطابق شکل (الف) در مجاورت یکدیگر قرار گرفته اند. در صورتیکه داخل یک استوانه را با استوانه ای به شعاع $\frac{R}{2}$ خالی کنیم، اگر از بالا به استوانه ها نگاه کنیم شکل (ب) را خواهیم دید. میدان الکتریکی را در نقطه ای روی محور X و به فاصله x از مبدأ، مطابق شکل (ب)، بیابید.



(ب)

پاسخ: "با توجه به شکل (ب)"

ابتدا میدان را خارج از استوانه سمت راست محاسبه می کنیم:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}[2\pi(3R-x)l] = \frac{\int \rho\, dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho_2(\pi R^2 l)}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_2 R^2}{2\epsilon_0(3R-x)}\,(-\hat{\imath})$$

اکنون میدان را در داخل استوانه سمت چپ بدست می آوریم:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}[2\pi(R-x)l] = \frac{\int \rho\, dV}{\epsilon_0} = \frac{\rho_1[\pi(R-x)^2]}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_1(R-x)}{2\epsilon_0}(-\hat{\imath})$$

برای محاسبه میدان در خارج از سوراخ، می توان چگالی بار حجمی $-\rho_1$ را در نظر گرفت و خواهیم داشت:

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}\left[2\pi\left(\frac{3R}{2}-x\right)l\right] = \frac{\int \rho\, dV}{\epsilon_0} = \frac{-\rho_1\left(\pi(\frac{R}{2})^2 l\right)}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{-\rho_1 R^2}{8\epsilon_0\left(\frac{3R}{2}-x\right)}\,(-\hat{\imath})$$

در نتیجه میدان در نقطه ای به فاصله x از مبدأ برابر است با:

$$\vec{E}_T = \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\frac{\rho_2 R^2}{x-3R} + \rho_1(x-R) + \frac{\rho_1 R^2}{6R-4x}\right]\hat{\imath}$$