# ریاضیات گسسته

## مجموعه سوالات کلاسی چهارم - استقرا

علی حمزه‌پور

### سؤال ۱.

استقرا ریاضی یکی از پرکاربردترین ابزارهای اثبات در ریاضیات است که در بسیاری از حوزه‌ها از جمله نظریه اعداد، گراف و ساختارهای بازگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما مانند هر ابزار قدرتمندی، استفاده‌ی نادرست یا بی‌دقت از آن می‌تواند به نتایج نادرست منجر شود. در اثبات‌های استقرایی، توجه به جزئیات و درستی هر مرحله از روند استقرا (پایه، فرض استقرا و گام استقرا) اهمیت بسیار زیادی دارد.

در ادامه، چهار گزاره (که لزوما صحیح هم نیستند) به همراه اثباتی به روش استقرا آورده شده‌اند که همگی دارای اشکال هستند. با دقت هر اثبات را بخوانید، اشکال آن را پیدا کرده و توضیح دهید که چرا استدلال ارائه‌شده نادرست است.

**الف)**

- مسئله: به ازای هر عدد طبیعی مانند $n$ رابطه زیر برقرار است:

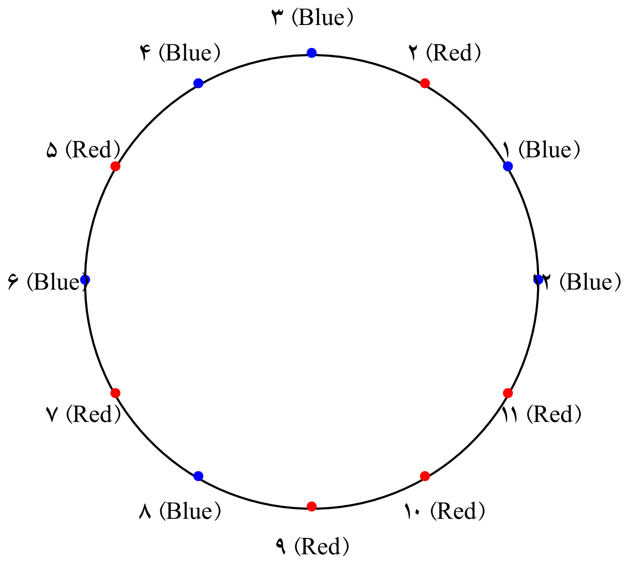
$$\sum_{i=۰}^{n-۱} ۲^i = ۲^n$$

- راه ارائه‌شده: فرض می‌کنیم حکم برای $k$ برقرار است، یعنی $\sum_{i=۰}^{k-۱} ۲^i = ۲^k$. پس می‌توان به شکل زیر حکم را برای $k+۱$ نیز ثابت کرد:

$$\sum_{i=۰}^{k} ۲^i = (\sum_{i=۰}^{k-۱} ۲^i) + ۲^k = ۲^k + ۲^k = ۲^{k+۱}$$

**ب)**

- مسئله: فرض کنید $۲n$ نقطه دور یک دایره قرار گرفتند. $n$ نقطه رنگ آبی و $n$ نقطه دیگر رنگ قرمز دارند. فرض کنید از یک نقطه شروع می‌کنیم و به صورت ساعتگرد دایره را دور می‌زنیم و تعداد نقاط قرمز و آبی مشاهده‌شده را در هر لحظه از مسیر نگه می‌داریم. در صورتی که در تمام لحظات در این مسیر تعداد نقاط قرمز حداقل با تعداد نقاط آبی برابر باشند، این مسیر یک مسیر مطلوب نامیده می‌شود. با استفاده از استقرا ثابت کنید با هر چینش دلخواه نقاط آبی و قرمز در دایره، می‌توان نقطه‌ای را برای شروع مسیر انتخاب کرد که آن مسیر یک مسیر مطلوب باشد.
  برای مثال در رنگ‌آمیزی زیر در صورتی که از نقطه شماره ۱۱ شروع کنیم یک مسیر مطلوب خواهیم داشت:




- راه ارائه‌شده: حالت پایه واضح است. برای $n = ۱$ دو نقطه خواهیم داشت که یکی قرمز و دیگری آبی است. در صورتی که از نقطه قرمز مسیر را شروع کنیم، شرط مسئله برقرار می‌شود و در نتیجه به ازای $n = ۱$ حکم ثابت می‌شود.
گام استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای $n$ برقرار است و آن را برای $n + ۱$ ثابت می‌کنیم. یک دایره با $۲n$ نقطه در نظر می‌گیریم. طبق فرض استقرا می‌دانیم که یک مسیر برای این دایره وجود دارد که شرط مسئله در آن برقرار است. فرض کنید این مسیر از نقطه شماره $i$ شروع می‌شود. به ترتیب یک نقطه قرمز و یک نقطه آبی بعد از نقطه شماره $i$ قرار می‌دهیم تا دایره با $(n + ۱) \times ۲$ نقطه تشکیل شود. مسیر قبلی با شروع از نقطه $i$ شرط را برای دایره جدید هم برقرار می‌کند پس حکم برای دایره با $(n + ۱) \times ۲$ هم برقرار است و گام استقرا ثابت شد.

ج)

- مسئله: یک ماتریس $n \times n$ دارای این ویژگی است که به‌ازای هر درایه صفر آن، مجموع درایه‌های سطر و ستونی که شامل آن درایه هستند، حداقل $n$ است. نشان دهید مجموع همه درایه‌های ماتریس مزبور حداقل $\frac{n^۲}{۲}$ است.

- راه ارائه‌شده:
حکم برای $n = ۱$ برقرار است. زیرا تنها یک درایه داریم که نمی‌تواند صفر باشد زیرا فرض مربوط به جمع سطر و ستون‌های آن نقض می‌شود. پس این درایه حداقل ۱ است که بزرگتر از $\frac{۱^۲}{۲}$ می‌شود.
فرض کنید که حکم به‌ازای $n = k - ۱$ برقرار است. ماتریس $k \times k$ را در نظر بگیرید. روشن است که اگر درایه صفری وجود نداشته باشد، حکم درست است. هرگاه $a_{ij} = ۰$ آنگاه طبق فرض، مجموع سطر $i$ و ستون $j$ دست‌کم $k$ و مجموع درایه‌های ماتریس $(k - ۱) \times (k - ۱)$ که از حذف سطر $i$ و ستون $j$ بدست می‌آید، حداقل $\frac{(k-۱)^۲}{۲}$ است. لذا نتیجه می‌شود که مجموع درایه‌های ماتریس $k \times k$ با اولیه حداقل

$$\frac{(k - ۱)^۲}{۲} + k = \frac{k^۲ - ۲k + ۱}{۲} + k = \frac{k^۲ + ۱}{۲} > \frac{k^۲}{۲}$$

است و حکم ثابت شد.

د)

- مسئله: به ازای هر عدد نامنفی $n$ ثابت کنید: $۲ \times n = ۰$

- راه ارائه‌شده:
حالت پایه: در صورتی که $n = ۰$ حکم برقرار است زیرا: $۲ \times ۰ = ۰$

گام استقرا: فرض می‌کنیم حکم برای هر $i \leq k$ برقرار است. حال $k+۱$ را به صورت جمع دو عدد نامنفی کوچک‌تر از خودش مانند $x$ و $y$ می‌نویسیم. پس می‌توان گفت:

$$۲ \times (k+۱) = ۲ \times (x+y) = ۲ \times x + ۲ \times y$$

طبق فرض استقرا می‌دانیم که $۲ \times x, ۲ \times y = ۰$ پس می‌توان نتیجه گرفت که $۲ \times (k+۱) = ۰$ هم برقرار است و حکم ثابت شد.

**پاسخ :**

- **الف)** در این اثبات تنها گام استقرا اثبات شده است و حالت پایه اصلا بررسی نشده است!
**نکته:** در اثبات‌ها دقت کنید که حالت پایه را به درستی بررسی و اثبات کردید. همچنین، حواستان باشد که در مسائل استقرای قوی ممکن است چندین حالت پایه نیاز به اثبات داشته باشند.

- **ب)** ایراد این اثبات آن است که اثبات ارائه شده وجودی است در صورتی که حکم باید به ازای تمام دایره‌های با $۲ \times (n+۱)$ ثابت می‌شد و مثال کافی نیست.
**نکته:** یکی از اشتباهات بسیار رایج در استقرا این است که ما از روی یک مثال $P(n)$ یک مثال از $P(n+۱)$ می‌سازیم و سپس ادعا می‌کنیم که حکم برای $n+۱$ ثابت شده است. حواستان باشد که مثال تولیدی ما لزوما یک مثال دلخواه از $n+۱$ نیست و ما حکم را برای تمام حالات ممکن ثابت نکردیم. معمولا در استقرا سعی کنید از یک حالت دلخواه از $n+۱$ شروع کنید و آن را به $n$ کاهش دهید، نه برعکس.

- **ج)** اشکال اثبات این است که لزومی ندارد در ماتریس $(k-۱) \times (k-۱)$ که از حذف سطر $i$ و ستون $j$ به وجود آمده است، به‌ازای هر درایه‌ی صفری، مجموع درایه‌های سطری و ستونی که شامل آن درایه هستند، حداقل $k$ باشد. بنابراین نمی‌توانیم از فرض استقراء استفاده کنیم.
**نکته:** گاهی اوقات کاهش دادن مسئله از $n+۱$ به $n$ کافی نیست و قبل از استفاده از شرط استقرا باید مطمئن شویم که شروط موردنیاز برای برقراری فرض استقرا را رعایت کرده باشیم.

- **د)** گام استقرا برای حالت $k+۱ = ۱$ برقرار نیست. در اثبات فرض شده است که اعداد $x$ و $y$ هر دو از $k+۱$ کوچک‌تر هستند. این برای تمام اعداد ممکن است اما عدد ۱ را تنها به صورت جمع ۰ و ۱ می‌توان نوشت. در نتیجه در گام استقرا برای حالت $k+۱ = ۱$ برای اثبات $۲ \times ۱ = ۰$ از خود $۲ \times ۱ = ۰$ استفاده کردیم که ایراد دارد.
نکته: در تمامی مسائل دقت کنید که اثبات گام استقرا به ازای تمام اعداد موردنیاز صحیح باشد و در جزییات آن ایرادی نباشد.

## سؤال ۲.

فرض کنید $a_۱ = ۳$، $a_۲ = ۷$ و به ازای $n \geq ۳$، $a_n = ۳a_{n-۱} - ۲a_{n-۲}$. به ازای هر عدد طبیعی $n$ ثابت کنید $a_n = ۲^{n+۱} - ۱$.

**پاسخ :**

حکم را با استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم:

- **پایه استقرا:** در صورت مسئله برای $n = ۱, ۲$ فرض شده است و حکم برقرار است.
- **فرض استقرا:** شرط برای $n-۱$ و $n-۲$ برقرار است؛ یعنی:

$$a_{n-۱} = ۲^n - ۱, a_{n-۲} = ۲^{n-۱} - ۱$$

- **گام استقرا:** خواهیم داشت:

$$a_n = ۳a_{n-۱} - ۲a_{n-۲} = ۳(۲^n - ۱) - ۲(۲^{n-۱} - ۱) = ۲^{n+۱} + ۲^n - ۳ - ۲^n + ۲ = ۲^{n+۱} - ۱$$

پس حکم را به ازای $n$ ثابت کردیم، بدین ترتیب با استقرا حکم مسئله برای همه اعداد طبیعی ثابت می‌شود.

**سؤال ۳.**

در یک مدرسه $n$ دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره‌های ۱ تا $n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. می‌دانیم که دبیر $i$ ام ، $i+۱$ تا از دانش‌آموزان را می‌شناسد. هر داتش‌آموز می‌تواند توسط بیشتر از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می‌خواهند یکی از دانش‌آموزانی را که می‌شناسند به عنوان نماینده‌ی خود برگزینند به شرطی که هر دانش‌آموز به عنوان نماینده حداکثر یک دبیر انتخاب شود. ثابت کنید که انتخاب این نماینده‌ها به حداقل $۲^n$ حالت مختلف امکان پذیر است. (دو حالت متفاوت‌اند اگر حداقل یک دبیر دو دانش‌آموز متفاوت را انتخاب کرده باشد.)

**پاسخ :**

- **پایه استقرا:** پایه استقرا به ازای $n = ۱$ بدیهی است و دبیر یک می‌تواند هر کدام از دو دانش‌آموزی را که می‌شناسد را به عنوان نماینده‌اش انتخاب کند که ینی $۲^۱$ حالت.
- **فرض استقرا:** حکم سوال را به ازای $n$ دبیر درست فرض می‌کنیم. یعنی $n$ دبیر به حداقل $۲^n$ روش می‌توانند نماینده‌های خود را انتخاب کنند.
- **گام استقرا:** می‌خواهیم ثابت کنیم که $n+۱$ دبیر به حداقل $۲^{n+۱}$ می‌توانند نماینده‌های خود را انتخاب کنند.
می‌دانیم دبیر $n+۱$ام، $n+۲$ تا از دانش‌آموزان را می‌شناسد. در بدترین حالت او تمام $n$ دانش‌آموزی که دبیران قبلی انتخاب کردند را می‌شناسد، پس او حداقل ۲ دانش‌آموز را می‌شناسد که انتخاب نشده‌اند. پس می‌تواند حداقل دو دانش‌آموز را به ازای هر حالت فرض انتخاب کند که یعنی حداقل $۲^{n+۱} = ۲^n \times ۲$ حالت برای انتخاب نماینده‌ها بدست می‌آید و حکم ثابت شد.

**سؤال ۴.**

ثابت کنید به ازای بی‌نهایت عدد طبیعی $n$ می‌توان اعضای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳n\}$ را به $n$ دستهٔ سه‌تایی افراز کرد به‌طوری‌که در هر دسته یک عدد برابر مجموع دو عدد دیگر باشد.

**پاسخ :**

حکم را با استقرا روی $n$ برای $n = ۴^k$ ثابت می‌کنیم:

- **پایه استقرا:** برای $n = ۴$ خواهیم داشت:

$$\{۱, ۸, ۹\}, \{۲, ۱۰, ۱۲\}, \{۳, ۴, ۷\}, \{۵, ۶, ۱۱\}$$

- **فرض استقرا:** شرط برای $n$ برقرار است؛ یعنی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳n\}$ را می‌توان به $n$ دستهٔ سه‌تایی مانند $\{a_۱, b_۱, c_۱\}$، ... و $\{a_n, b_n, c_n\}$ افراز کرد به‌طوری‌که برای هر $i$، $c_i = a_i + b_i$.
- **گام استقرا:** مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۱۲n\}$ را به $۴n$ دسته زیر افراز می‌کنیم که شرایط مسئله را داشته باشند:

$$\{۲a_۱, ۲b_۱, ۲c_۱\}, \dots, \{۲a_n, ۲b_n, ۲c_n\}, \{۱, ۹n, ۹n+۱\}, \{۳, ۹n-۱, ۹n+۲\},$$

$$\{۵, ۹n-۲, ۹n+۳\}, \dots, \{۶n-۱, ۶n+۱, ۱۲n\}$$

در این افراز اعداد زوج بین ۱ تا $۶n$ به وسیله فرض استقرا به گونه‌ای افراز می‌شوند که شرایط مسئله را داشته باشند، سپس اعداد از $۹n$ تا $۶n+۱$ را با اعداد فرد ۱ تا $۶n$ جفت می‌کنیم، مجموع ها از $۹n+۱$ شروع شده و یکی‌یکی زیاد می‌شوند، چرا که نزول ما یکی‌یکی است و صعود ما دوتا دوتا.
پس حکم را به ازای $۴n$ ثابت کردیم، بدین ترتیب با استقرا حکم مسئله برای بی‌نهایت عدد طبیعی ثابت می‌شود.

### سؤال ۵.

دانشکده برق و کامپیوتر $n$ دانشجو دارد و می‌دانیم هر دانشجوی برق حداقل با یک دانشجوی کامپیوتر دوست است. ثابت کنید گروهی از افراد این دانشکده شامل حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ نفر می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که هر دانشجوی برق از این گروه با تعداد فردی از دانشجوهای کامپیوتر گروه دوست باشد.

**پاسخ :**

حکم را با استقرا روی تعداد دانشجوهای کامپیوتر $(k)$ ثابت می‌کنیم:

- **پایه استقرا:** برای $k = ۱$ طبق شرایط مسئله نتیجه می‌گیریم تمام دانشجویان برق دانشکده با آن یک دانشجوی کامپیوتر دوست هستند؛ پس اگر گروه را کل دانشکده در نظر بگیریم، شرایط حکم را ارضا می‌کند.
- **فرض استقرا:** شرط برای $k - ۱$ برقرار است.
- **گام استقرا:** دانشکده را با $n$ دانشجو که $k$تای آنها کامپیوتر هستند، در نظر بگیرید. یکی از دانشجویان کامپیوتر و تمامی دانشجویانی برقی که با او دوست هستند را از دانشکده کنار می‌گذاریم. این مجموعه را $A$ می‌نامیم، همچنین فرض کنید $|A| = a$. طبق فرض استقرا می‌توانیم از افراد باقی مانده در دانشکده گروهی شامل حداقل $\lceil \frac{n-a}{۲} \rceil$ نفر انتخاب کنیم که شرایط مسئله را داشته باشند. این گروه را $B$ می‌نامیم. حال مجموعهٔ $A$ را به دو دسته افراز می‌کنیم. $A_۱$ را مجموعهٔ دانشجویان برقی از $A$ می‌گیریم که با تعداد فردی از دانشجویان کامپیوتر $B$ دوست باشند و $A_۲$ را مجموعهٔ بقیهٔ اعضای $A$ می‌گیریم. با اندکی دقت در می‌یابید در هر یک از گروه های $B \cup A_۱$ و $B \cup A_۲$ شرایط خواسته شده برقرار است. حال چون طبق اصل لانه کبوتری یکی از $A_۱$ و $A_۲$ حداقل $\lceil \frac{a}{۲} \rceil$ عضو دارند، پس یکی از این دو گروه ($B \cup A_۱$ یا $B \cup A_۲$) نیز حداقل $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ عضو دارند. پس حکم به ازای $k$ نیز درست است.

### سؤال ۶.

فرض کنید $A_۱, A_۲, \dots, A_m$ همهٔ زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \dots, n\}$ باشند که هیچ دو عضو متوالی ندارند. $\pi(A_i)$ را برابر با حاصل‌ضرب اعضای $A_i$ بگیرید. ثابت کنید:

$$\sum_{i=۱}^{m} (\pi(A_i))^۲ = (n+۱)! - ۱$$

**پاسخ :**

- **پایه:** برای $n = ۱$ زیرمجموعه‌های بدون اعضای متوالی از مجموعه $\{۱\}$ عبارت‌اند از: $\emptyset$ و $\{۱\}$.
داریم:
$$\pi(\emptyset)^۲ = ۰ \quad \text{و} \quad \pi(\{۱\})^۲ = ۱^۲ = ۱$$
بنابراین:
$$\sum (\pi(A_i))^۲ = ۰ + ۱ = ۱ = (۱+۱)! - ۱ = ۱$$
پس پایه برقرار است.
- **فرض استقرا:** فرض می‌کنیم حکم برای $n = k + ۱$ درست باشد. یعنی اگر $A_۱, \dots, A_m$ همه زیرمجموعه‌های
$$\{۱, ۲, \dots, k+۱\}$$
باشند که هیچ دو عضو متوالی نداشته باشند، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^{m}(\pi(A_i))^2 = (k+2)! - 1$$

- **گام استقرا:** می‌خواهیم نشان دهیم که حکم برای $n = k+2$ نیز برقرار است. مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, k+2\}$ را در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های بدون اعضای متوالی را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

- زیرمجموعه‌هایی که شامل $k+2$ نیستند: این‌ها همان زیرمجموعه‌های $\{1, \dots, k+1\}$ هستند که در فرض استقرا داریم:

$$\sum(\pi(A_i))^2 = (k+2)! - 1$$

- زیرمجموعه‌هایی که شامل $k+2$ هستند: به ازای هر زیرمجموعهٔ معتبر از $\{1, \dots, k+1\}$ که شامل $k+1$ نباشد، ( به عبارتی زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, \dots, k\}$ ) می‌توان $k+2$ را به آن افزود و حاصل‌ضرب را در $(k+2)^2$ ضرب کرد. این زیرمجموعه‌ها متناظر با زیرمجموعه‌های معتبر از $\{1, \dots, k\}$ هستند و مجموع مربعات حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با:

$$(k+2)^2 \cdot ((k+1)! - 1)$$

- و آخرین دسته، شامل زیرمجموعه‌ای است که فقط شامل $k+2$ باشد که در هیچکدام از دو حالت قبلی نبوده و پاسخ برای آن برابر است با:

$$(k+2)^2$$

حالا مجموع نهایی برابر است با:

$$((k+2)! - 1) + ((k+2)^2 \cdot ((k+1)! - 1)) + (k+2)^2$$

که با ساده‌سازی به $((k+3)! - 1)$ می‌رسد و حکم برای $k+2$ نیز برقرار است.

## سؤال ۷.

دستگاه «ماشین دودویی» یک عدد دودویی با $n$ رقم را از ورودی می‌گیرد و با فشار دادن یکی از دو دکمه‌ی آن، یکی از دو تبدیل زیر را روی عدد ورودی انجام می‌دهد:

۱. دکمهٔ ۱: سمت راست‌ترین رقم را از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد.

۲. دکمهٔ ۲: سمت راست‌ترین رقم ۱ را پیدا می‌کند و رقم سمت چپ آن را از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد. (توجه: اگر سمت راست‌ترین ۱ در سمت چپ‌ترین مکان باشد یا رشته تمام ۰ باشد، تغییری انجام نمی‌شود.)

برای مثال با استفاده از ماشین دودویی می‌توان عدد ۰۰۱۰۰۱ را به ۰۱۱۰۰۱ تبدیل کرد. روش تبدیل به این صورت است که ابتدا دکمهٔ ۱، سپس دکمهٔ ۲ و در انتها دکمهٔ ۱ را فشار می‌دهیم.

ثابت کنید با استفاده از ماشین دودویی می‌توان هر عدد دودویی با $n$ رقم را به هر عدد دودویی با $n$ رقم تبدیل کرد.

### پاسخ :

**اثبات با استقرای قوی:**

می‌خواهیم نشان دهیم که هر رقم را می‌توانیم تغییر دهیم. استقرای قوی می‌زنیم:

- **پایه استقرا:** رقم ۱ از سمت راست را می‌توانیم تغییر دهیم بدون اینکه ارقام سمت چپ آن تغییر کنند (با زدن دکمهٔ ۱).

- **فرض استقرا:** فرض می‌کنیم برای تمام ارقام ۱ تا $k$ از راست می‌توانیم ارقام را تغییر دهیم بدون اینکه ارقام سمت چپ آنها تغییر کنند.

- **حکم استقرا:** رقم $k+1$ ام از راست را می‌توانیم تغییر دهیم بدون اینکه ارقام $k+2$ به بعد تغییر کنند.
  **اثبات:**
  1. رقم $k$ ام را ۱ می‌کنیم(با فرض استقرا).
  2. ارقام ۱ تا $k-1$ را صفر می‌کنیم (با فرض استقرا).

  حال کلید ۲ را می‌زنیم رقم $k+1$ عوض می‌شود.
  حال ارقام ۱ تا $k$ را به حالت اولیه برمی‌گردانیم. در این حالت فقط رقم $k+1$ عوض شده است. پس حکم استقرا برقرار است.
  حال با این عمل از چپ به راست، هر رقم از عدد اولیه را نگاه می‌کنیم، اگر با عدد نهایی یکی بود که آن رقم را رد می‌کنیم و به سراغ رقم بعدی می‌رویم، اگر یکی نبود آن را عوض می‌کنیم و همینطور ادامه می‌دهیم تا به عدد نهایی برسیم

## سؤال ۸.

$n$ عدد مثبت و متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ مفروض‌اند. اگر $e_i \in \{0,1\}$ باشد (برای $i = 1, 2, \dots, n$)، ثابت کنید از بین $2^n$ مقداری که

$$e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$$

می‌تواند بگیرد، حداقل

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1$$

عدد متمایز پیدا می‌شود.

**پاسخ :**

- **پایه‌ی استقرا:** با استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم که لااقل $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ از جملات فوق متمایز هستند.
  برای پایه‌ی استقرا ($n = 1$)، که حکم برقرار است. $a_1, 0$ دو جمله‌ی مورد نظر هستند.
- **فرض استقرا:** حکم را برای $n = k$ درست فرض کنید؛ می‌خواهیم درستی آن را برای $n = k+1$ اثبات کنیم. با اعداد $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ جملاتی متمایز ساخته می‌شود. باید نشان دهیم با افزودن $a_{k+1}$ لااقل

  $$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$$

  جمله‌ی متمایز داریم.
- **گام استقرا:** فرض کنید $S = \sum_{i=1}^{k} a_i$. در نتیجه $S$ بزرگ‌ترین جمله از بین جملات قبلی است. حال ادعا می‌کنیم که:

$$S + a_{k+1} > S + a_{k+1} - a_1 > S + a_{k+1} - a_2 > \cdots > S + a_{k+1} - a_k$$

که $k+1$ جمله‌ی متمایز هستند و هر کدام از سایر جملات قبلی بزرگ‌تر می‌باشند؛ زیرا اگر $A$ یکی از جملات ساخته شده‌ی قبلی باشد، $A \leq S$، ولی $S + a_{k+1} - a_k > S$ پس حکم اثبات شد.

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + k + 1 = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$$