

# ریاضیات گسسته

## پاسخنامه تمرین مقدماتی پنجم - گراف مقدماتی

محمد مهدی یاری

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۰۲/۰۹ ساعت ۱۲ ظهر

### سؤال ۱.

فرض کنید  $G$  یک گراف همبند با حداقل سه رأس باشد. ثابت کنید  $G$  دو رأس  $x, y$  دارد به طوری که:

(۱) گراف  $G - \{x, y\}$  همبند باشد.

(۲)  $x$  و  $y$  یا همسایه هستند یا یک همسایه مشترک دارند.

پاسخ:

فرض کنید  $u$  یک رأس انتهایی در یک مسیر با بیشترین طول  $P$  در  $G$  باشد و  $v$  همسایه‌ی  $u$  روی مسیر  $P$  باشد. توجه کنید که  $P$  حداقل سه رأس دارد.

اگر گراف  $G - u - v$  همچنان همبند باقی بماند که سوال حل میشود. در غیر این صورت، مؤلفه‌ای که از  $P - u - v$  در  $G - u - v$  جدا شده است، حداکثر شامل یک رأس است؛ این رأس را  $w$  می‌نامیم.

رأس  $w$  باید به  $v$  متصل باشد، زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم یک مسیر طولانی‌تر بسازیم. پس رأس‌های  $u, v, w$  رأس‌های مورد نظر ما هستند.



### سؤال ۲.

فرض کنید  $G$  یک گراف ساده با  $n$  رأس باشد و  $n \geq 4, \delta \geq \frac{n}{4}$ . ثابت کنید که در  $G$  یک دور به طول ۴ وجود دارد.

پاسخ:

می‌دانیم اگر گراف  $G$  کامل باشد، چون  $n \geq 4$  است، پس یک دور به طول ۴ در  $G$  وجود دارد.

در غیر این صورت، فرض کنید  $u$  و  $v$  دو رأس غیرمجاور باشند. چون  $\delta \geq \frac{n}{4}$ ، پس هر کدام از  $u$  و  $v$  باید به بیش از  $\frac{n}{4}$  رأس از  $n - 2$  رأس دیگر متصل باشند.

حال، طبق اصل لانه کبوتری،  $u$  و  $v$  حداقل دو همسایه مشترک  $x$  و  $y$  از میان آن  $n - 2$  رأس دیگر دارند. بنابراین، دوری به طول ۴ با رأس‌های  $u, x, v, y$  در گراف وجود دارد.