

# ریاضیات گسسته

## پاسخنامه آزمون کوتاه چهارم - استقرا

علی زیلوچی

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

زمان پاسخگویی: ۱۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

### سؤال ۱.

ثابت کنید مجموع بزرگترین مقسوم علیه فرد اعداد  $n+1, n+2, \dots, 2n$  برابر  $n^2$  است.

پاسخ:

برای عدد طبیعی  $m$ ، بزرگترین مقسوم علیه فرد آن را با  $a_m$  نشان می‌دهیم.  
حکم را با استقرا روی  $n$  ثابت می‌کنیم:

- پایه استقرا: برای  $n=1$  اعداد  $n+1$  تا  $2n$  فقط شامل ۲ می‌شود که بزرگترین مقسوم علیه آن ۱ است و با  $n^2$  نیز برابر است.
- فرض استقرا: شرط برای  $n$  برقرار است؛ یعنی:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = n^2$$

- گام استقرا: با اندکی دقت درمی‌یابیم  $a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1$  و  $a_{n+1} = 2n+1$ . در نتیجه خواهیم داشت:

$$a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n+2} = a_{n+2} + \dots + a_{2n} + 2n+1 + a_{n+1} = n^2 + 2n+1 = (n+1)^2$$

پس حکم را به ازای  $n+1$  ثابت کردیم، بدین ترتیب با استقرا حکم مسئله برای همه اعداد طبیعی ثابت می‌شود.