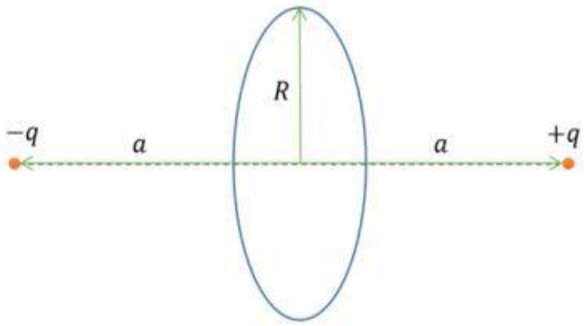
به نام خدا

پاسخ تمرین سری اول فیزیک ۲

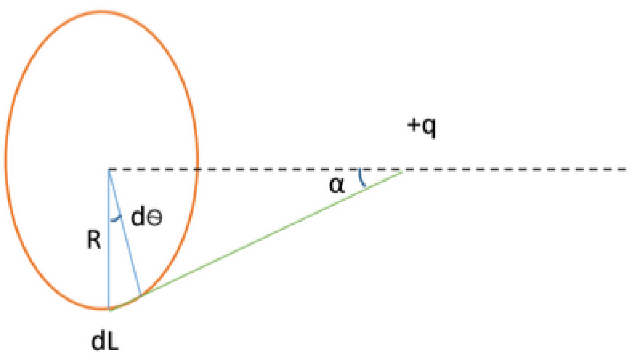
میدان و نیروی الکتریکی

نیمسال دوم ۱۴۰۳

۱- دوبار $-q$ و $+q$ با فاصله $2a$ در نظر بگیرید. یک حلقه با شعاع R عمود بر خط واصل و در وسط آنها، مطابق شکل روبرو قرار دارد. خط واصل دوبار از مرکز حلقه می‌گذرد. حلقه دارای چگالی بار خطی $\lambda = 3\lambda_0 q$ می-باشد. نیروی وارد شده از طرف حلقه و بار $-q$ به بار $+q$ را محاسبه کنید.



پاسخ :



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\hat{r}\,;\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 * 10^9\,\frac{N.m^2}{C^2}$$

$$\vec{F}_{-q,+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq}{(2a)^2}(-\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4a^2}\hat{x}\;N$$

محاسبه میدان حاصل از حلقه، روش ۱ :

استفاده از رابطه حاصل از حلقه باردار بر روی محور حلقه به فاصله Z از آن

$$\hat{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QZ}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

$$\overrightarrow{E'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda 2\pi R}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \quad ; z = a \quad ; \lambda = 3\lambda_0 q;$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\, 3\lambda_0 q\, 2\pi R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x};$$

$$\vec{F}_{\lambda,+q} = \vec{E}q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6\pi a\lambda_0 R q^2}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x};$$

محاسبه میدان حاصل از حلقه، روش دوم:

$$\overrightarrow{dF}_{\lambda,+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq * q}{a^2+R^2}\cos\alpha\,\hat{x}\,, dq = \lambda dl = \lambda R\,d\theta$$

$$\rightarrow \overrightarrow{dF}_{\lambda,+q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\lambda_0 q * q * Rd\theta * a}{(a^2+R^2)^{3/2}}\hat{x}$$

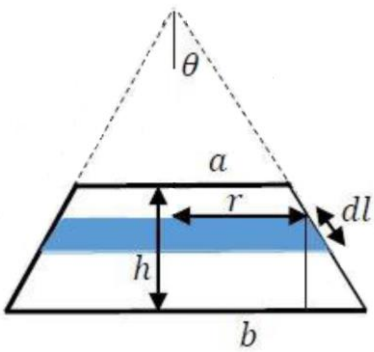
$$\vec{F}_{\lambda,+q} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3a\lambda_0 q^2 R d\theta}{(a^2+R^2)^{3/2}}\hat{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6\pi a\lambda_0 R q^2}{(a^2+R^2)^{3/2}}\hat{x}$$

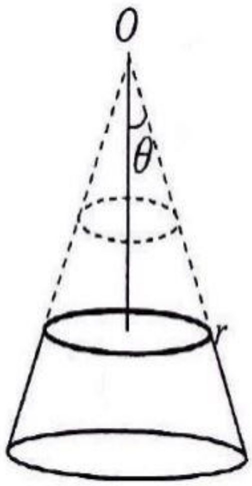
$$\hat{F}_{Total} = \vec{F}_{-q,+q} + \vec{F}_{\lambda,+q}$$

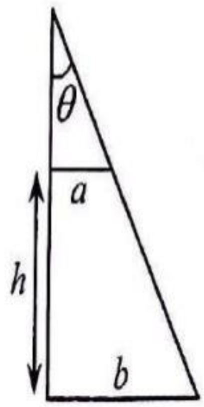
$$\vec{F} = \left(k\frac{6\pi a\lambda_0 R q^2}{(a^2+R^2)^{1.5}} - \frac{kq^2}{4a^2}\right)\hat{x}$$

۲- مخروطی ناقص و توخالی به شعاع قاعده کوچک a و قاعده بزرگ b و ارتفاع h مفروض است. میدان الکتریکی را در راس مخروط (نقطه O) بدست آورید. (چگالی بار بر روی سطح جانبی مخروط ثابت و برابر σ است.)

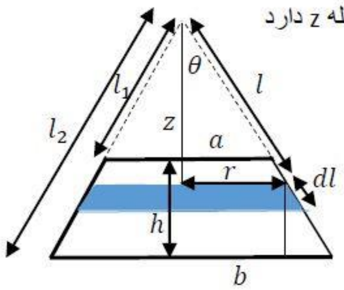
$$dL = \frac{dr}{\sin\theta} \Rightarrow dA = 2\pi r \frac{dr}{\sin\theta}$$ (راهنمایی)







پاسخ :



سطح مخروط را به حلقه هایی به شعاع r تقسیم می کنیم. مرکز هر حلقه تا نقطه مورد نظر فاصله z دارد

$$dq = \sigma\,(2\pi r)dl$$

$$r = l\sin\theta \qquad dr = dl\sin\theta$$

$$z = l\cos\theta$$

میدان حاصل از یک حلقه در نقطه راس مخروط برابر است با:

$$dE = \frac{dq\,z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma\,(2\pi l\sin\theta)\,l\cos\theta\quad dl}{4\pi\varepsilon_0(l^2cos\theta^2+l^2sin\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma\,2\sin\theta\cos\theta}{4\varepsilon_0}\int_{l_1=\frac{a}{sin\theta}}^{l_2=\frac{b}{sin\theta}}\frac{dl}{l} = \frac{\sigma\sin 2\theta}{4\varepsilon_0}\ln(\frac{b}{a})$$

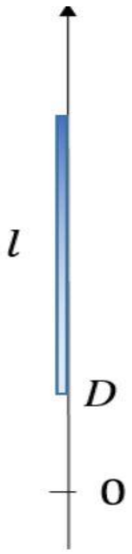
با توجه به اینکه معلوم مسئله شعاع های a و b و ارتفاع h است، برای تبدیل سینوس از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\ tan\theta^2} = \frac{2h(b-a)}{h^2+(b-a)^2} \qquad \tan\theta = \frac{b-a}{h}$$

بنابراین بردار میدان الکتریکی در نقطه راس مخروط ناقص به صورت زیر به دست می آید :

$$\vec{E} = \frac{h\,\sigma(b-a)}{2\varepsilon_0[h^2+(b-a)^2]}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{k}$$

۳- مطابق شکل، میله‌ای به طول l روی محور y قرار دارد. پایین میله در مکان $y = D$ قرار گرفته است و باری با چگالی خطی غیر یکنواخت $\lambda = \alpha y$ روی میله قرار دyارد. α یک ثابت مثبت و y فاصله از مبدا است. میدان الکتریکی را در مبدأ (نقطه O) بیابید.



پاسخ :

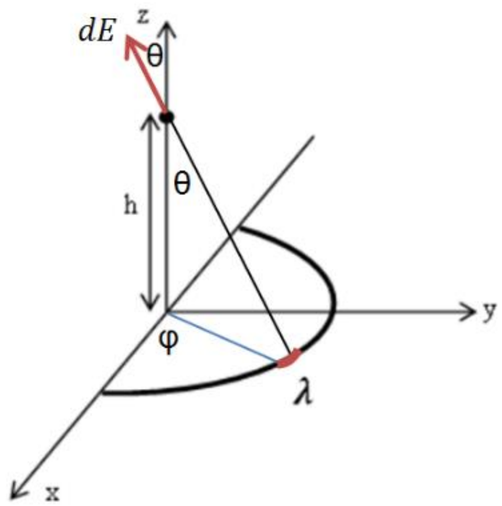
$$\overrightarrow{E_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \rightarrow d\overrightarrow{E_0} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{y^2}\hat{y}$$

$$dq = \lambda dy = \alpha y dy \rightarrow d\overrightarrow{E_0} = \frac{-\alpha y dy}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\hat{y}$$

$$\int dE_0 = \int_D^{D+L} \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dy}{y}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{E_0} = \frac{-\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{D+L}{D}\right)\hat{y} \rightarrow \left|\overrightarrow{E_0}\right| = \frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\ln(1+\frac{L}{D})$$

۴- یک میله باردار به شکل نیم دایره ای به شعاع R و چگالی بار خطی ثابت در صفحه x-y قرار دارد. میدان الکتریکی حاصل از این میله را روی نقطه ای واقع بر محور z و به فاصله h از مبدا بیابید.

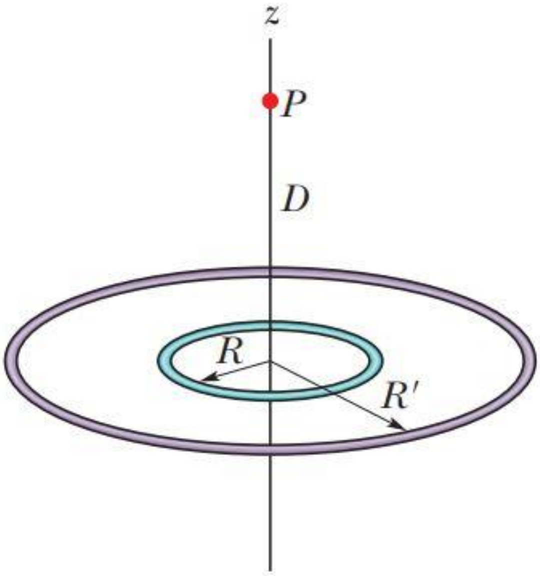


$$E_x = \int dE\, \sin\theta \cos\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{\lambda R d\varphi}{R^2+h^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda R^2}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

$$E_y =- \int dE\, \sin\theta \sin\varphi =- \frac{\lambda R^2}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \; - \frac{\lambda R^2}{2\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = \int dE\, \cos\theta = \frac{\lambda R h}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} d\varphi = \frac{\lambda R h}{4\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

۵- دو حلقه متحدالمرکز به شعاع‌های R و $R' = 3R$ که بر صفحه xy قرار دارد؛ در شکل زیر، نشان داده شده‌است. نقطه P با فاصله $D = 2R$ از مرکز دو حلقه بر روی محور z قرار دارد. بار $+Q$ بر روی حلقه کوچکتر به طور یکنواخت توزیع شده‌است. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه P صفر باشد؛ مقدار باری که به صورت یکنواخت بر روی حلقه بزرگتر توزیع یافته‌است، بر حسب Q بدست آورید.



پاسخ :

برای میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه باردار در فاصله z ازمرکز آن داریم :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}^3}$$

$$R_2 = R' = 3R\ ;\ z = 2R\ ;\ R_1 = R$$

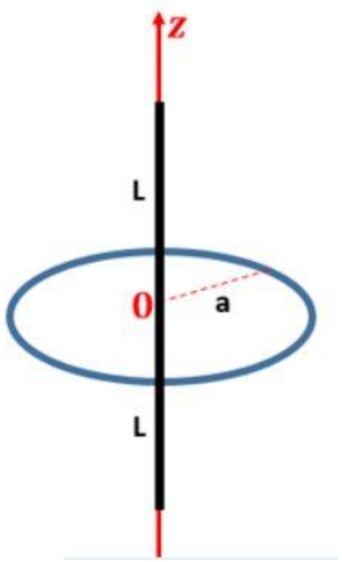
طبق اصل بر هم نهی : $\overrightarrow{E_p} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2QR}{\sqrt{4R^2+R^2}^3} + \frac{2Q_2R}{\sqrt{4R^2+9R^2}}\right) = 0$

$$\frac{Q_2}{Q} = -\left(\frac{\sqrt{13R^2}}{\sqrt{5R^2}}\right)^3 = -\left(\frac{13}{5}\right)^{3/2} \rightarrow Q_2 = -(\frac{13}{5})^{3/2}\ Q$$

۶- مطابق شکل، یک حلقه باردار عایق، عمود بر محور Z و در صفحه xy به شعاع a، با چگالی بار خطی یکنواخت $\lambda_0 \frac{C}{m}$ نشان داده شده است. در شکل زیر، یک میله باردار عایق به طول $2L$ طوری روی محور عمود بر صفحه حلقه قرار گرفته است که وسط آن منطبق بر مرکز حلقه است. اگر چگالی بار خطی روی میله از رابطه زیر بدست آید؛ اندازه نیروی وارد از طرف میله به حلقه چه ضریبی از $\frac{a\lambda_0}{\varepsilon_0}$ است؟

$$\lambda = \begin{cases} -1\dfrac{C}{m} & ; \ z > 0 \\ +1\dfrac{C}{m} & ; \ z < 0 \end{cases}$$

پاسخ :



نیروی وارد از طرف حلقه به هر جز دیفرانسیلی در $z = z_0 > 0$ برابر با نیروی وارد بر جز دیفرانسیلی در $z = -z_0$ است.

$$\overrightarrow{F(z)} = \overrightarrow{F(-z)}$$

پس محاسبات را صرفا برای یک نیمه لحاظ میکنیم و در نهایت جواب را ۲ برابر می کنیم.

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{dF} = \int_0^L \vec{E}\, dq$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{z} \,; dq = \lambda dz = -dz; z \geq 0$$

$$\overrightarrow{F_t} = \int_0^L \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}dz;\ z^2+a^2 = u; 2z = du$$

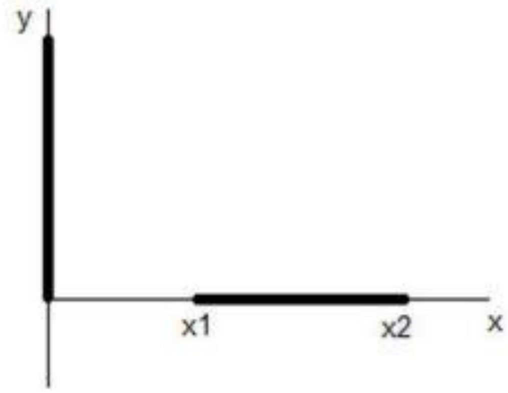
$$\overrightarrow{F_t} = \int \frac{-2\pi a\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0}\frac{du}{u^{3/2}}\hat{z} = \frac{a\lambda_0}{4\varepsilon_0}\int \frac{du}{u^{3/2}}\hat{z} = \frac{a\lambda_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2}}\right)\hat{z}$$

$$\vec{F} = 2\overrightarrow{F_t} = \frac{a\lambda_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right)\hat{z}$$

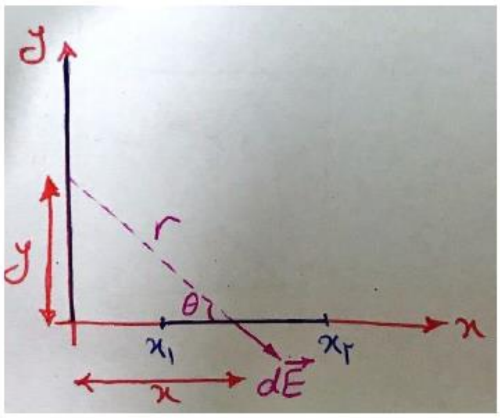
طبق قانون سوم نیوتن نیروی وارد بر حلقه از طرف میله هم اندازه و در خلاف جهت نیروی وارد بر میله از طرف حلقه است.

$$\overrightarrow{F_{\text{میله به حلقه}}} = -\overrightarrow{F_{\text{حلقه به میله}}} = \frac{a\lambda_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{L^2+a^2}}\right)\hat{z}$$

۷- دو میله باردار عایق را که یکی روی محور x (از $x_1(m)$ تا $x_2(m)$) و دیگری روی محور y (از مبدأ تا بی‌نهایت) گسترده شده‌اند، درنظر بگیرید. میله افقی دارای چگالی بار خطی $\lambda(x) = \lambda_0 x$ و میله عمودی دارای چگالی بار خطی ثابت $\lambda = \lambda_1$ است. نیروی الکترواستاتیکی وارد از طرف میله افقی به میله عمودی را بدست اورید. اندازه و جهت میدان الکتریکی را نیز بدست آورید.



پاسخ :



$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ میدان میله عمودی روی محور افقی

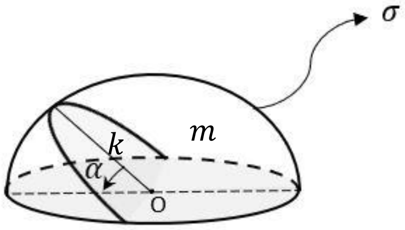
$$d\vec{E} = \frac{\lambda_1 dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(cos\theta\hat{x} - sin\theta\hat{y}) = \frac{\lambda_1 dy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\hat{x} - y\hat{y}) = \frac{\lambda_1 dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{x} - y\hat{y})$$

$$\vec{E} = \hat{x}\frac{\lambda_1 x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \hat{y}\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0 x}(\hat{x} - \hat{y})$$

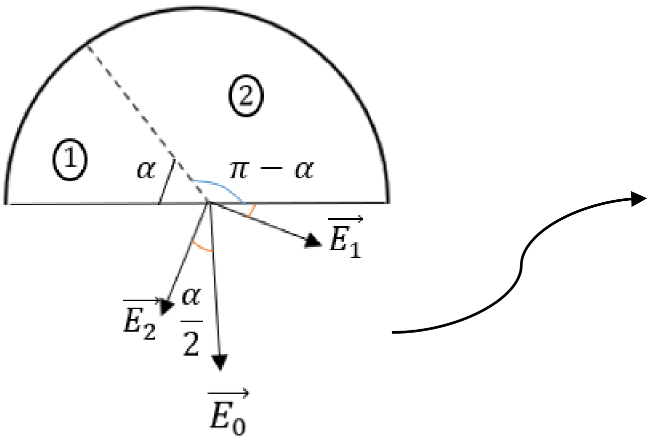
$$d\vec{F} = dq\vec{E} = \lambda_0 x dx \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0 x}(\hat{x} - \hat{y})$$

$$\rightarrow \vec{F} = \int_{x_1}^{x_2} d\vec{F} = \frac{\lambda_0\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}(\hat{x} - \hat{y})\int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\lambda_0\lambda_1}{4\pi\varepsilon_0}(x_2 - x_1)(\hat{x} - \hat{y})$$

۸- (سوال امتیازی) نیم‌کره عایقی به شعاع a و چگالی بار یکنواخت سطحی $\sigma \left({C}/{m^2}\right)$ مفروض است. فرض کنید شدت میدان ناشی از نیم‌کره در مرکزآن (نقطه O) برابر E_0 است. مطابق شکل، صفحه k از مرکز نیم‌کره عبور کرده است و با صفحه m (سطح مقطع نیم‌کره) زاویه α می‌سازد. سطحی از نیم‌کره را که بین دو صفحه k و m محصور شده است در نظر بگیرید؛ شدت میدان ناشی از این بخش را بر حسب E_0 و α بیان کنید.



پاسخ :



نمای روبروی نیم‌کره

طبق تقارن می دانیم میدان الکتریکی حاصل از نیم‌کره در نقطه O عمود بر سطح مقطع نیم‌کره است.

حال سطح نیم‌کره را به دو بخشی که توسط صفحه k جدا شده‌است تقسیم میکنیم.

$$\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} \rightarrow \overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_0}\, sin\frac{\alpha}{2} ; \overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_0}\, cos\frac{\alpha}{2}$$