

ریاضیات گسسته

تمرین پیشرفته چهارم - استقرا

سید حمید محمودی، یاسمن عموجعفری

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۰۱/۲۸

سؤال ۱.

تعدادی عدد طبیعی که همگی از توان‌های عدد دو هستند در اختیار داریم. به گونه‌ای که از هر توان، حداکثر دو عدد وجود دارد. می‌خواهیم این اعداد را به دو دسته با مجموع برابر افراز کنیم. ثابت کنید تعداد روش‌های ممکن برای چنین افرازی یا برابر صفر است یا برابر توانی از ۲. راهنمایی: استقرا را روی تنوع توان‌های دو اعمال کنید.

سؤال ۲.

یک دسته بزرگ از کارت‌ها (تعداد کارت‌ها را نمی‌دانیم) در اختیار داریم که شماره روی هر کارت از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است. این را هم می‌دانیم که جمع عددهای روی کارت‌ها برابر با $k \cdot n!$ است که k یک عدد صحیح مثبت است. ثابت کنید می‌توان کارت‌ها را به k دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع اعداد هر دسته برابر با $n!$ باشد.

راهنمایی: لم زیر را در نظر بگیرید:

در هر مجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ می‌توان زیرمجموعه‌ای انتخاب کرد که مجموعش بر n بخش‌پذیر باشد.

در گام استقرا سعی کنید با استفاده از لم مطرح شده کارت‌ها را به دسته‌هایی که به $n + 1$ بخش‌پذیر هستند تقسیم کنید. (در صورت استفاده از لم حتماً آن را ثابت هم بکنید.)