ریاضیات گسسته

آزمون کوتاه هشتم - روابط بازگشتی

میرحسین عارف زاده

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۳/۶

زمان پاسخگویی: ۱۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

سؤال ۱.

فرض کنید می‌خواهیم a_n را به عنوان تعداد روش‌های نشاندن n دانش‌آموز در یک ردیف محاسبه کنیم. این دانش‌آموزان متعلق به سه کلاس ۱، ۲ و ۳ هستند، اما باید این شرط را رعایت کنیم که بین دو دانش‌آموز متوالی از کلاس ۱، حداقل یک دانش‌آموز از کلاس‌های دیگر قرار داشته باشد. یک رابطه‌ی بازگشتی برای a_n پیدا کنید و معادله مشخصه‌ی آن را بنویسید، اما نیازی به محاسبه ضرایب عمومی c_1 و c_2 ندارید.

پاسخ:

به آخرین دانش‌آموزی که در ردیف قرار گرفته است، توجه می‌کنیم.

- اگر این دانش‌آموز از کلاس ۲ یا ۳ باشد، $n-1$ دانش‌آموز دیگر باید یک ترکیب معتبر تشکیل دهند. بنابراین، در این حالت تعداد ترکیب‌های معتبر برابر است با $2a_{n-1}$.

- اگر آخرین دانش‌آموز از کلاس ۱ باشد، باید اطمینان حاصل کنیم که قبل از او حداقل یک دانش‌آموز از کلاس‌های ۲ یا ۳ نشسته باشند. پس ترکیب معتبر شامل $n-2$ دانش‌آموز اول خواهد بود که باید یک چینش معتبر داشته باشند، و جایگاه قبل از آخرین دانش‌آموز می‌توانند هرکدام از کلاس ۲ یا ۳ باشند . در نتیجه، این حالت به تعداد $2a_{n-2}$ روش ممکن است.

پس رابطه‌ی بازگشتی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

با فرض $b_n = r^n$ در معادله همگن، معادله مشخصه خواهیم داشت:

$$r^n - 2r^{n-1} - 2r^{n-2} = 0$$

با فرض $r^2 - 2r - 2 = 0$، از فرمول کلی ریشه‌های معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم:

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

پس ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از:

$$r_1 = 1 + \sqrt{3} \quad r_2 = 1 - \sqrt{3}$$

بنابراین، حل عمومی رابطه بازگشتی برابر است با:

$$a_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$$

ریاضیات گسسته

آزمون کوتاه هشتم - روابط بازگشتی

میرحسین عارف زاده

تاریخ برگزاری ۱۴۰۴/۳/۶

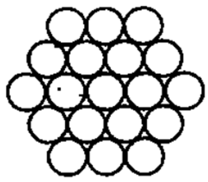
زمان پاسخگویی: ۱۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی

شماره دانشجویی:

سؤال ۱.

در یک بازی، هدف این است که توسط تعدادی دایرهٔ هم‌شکل یک شش‌ضلعی توپر ساخته شود. به عنوان مثال شکل زیر نشان می‌دهد که با ۱۹ دایره می‌توان یک شش‌ضلعی رسم کرد که روی هر یال آن ۳ دایره قرار می‌گیرد. اگر a_n تعداد دایره‌های لازم برای رسم یک شش‌ضلعی با n دایره روی هر یال باشد، رابطه بازگشتی a_n را بنویسید و حل نمایید.



پاسخ :

می‌توان نشان داد که:

$$a_{۲} = ۷ \quad a_{۳} = ۱۹$$

برای یافتن a_n (تعداد دایره‌های لازم برای رسم یک شش ضلعی با n دایره روی هر یال)، از $a_{n-۱}$ باید کمک گرفت. برای ساختن a_n کافی است یک یال که هر کدام شامل n دایره می‌باشند به $a_{n-۱}$ اضافه شود، اما از آنجا که طبق این مرحله تعداد ۶ دایره روی هر رأس شش ضلعی جدید دو بار تکرار شده‌اند، با کم کردن این ۶ دایره از کل دایره‌ها، رابطه بازگشتی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = a_{n-۱} + ۶n - ۶ \quad n > ۲$$

با فرض $a_n = r^n$ در معادله همگن، معادله مشخصه خواهیم داشت:

$$r^n - r^{n-۱} = r^{n-۱}(r-۱) = ۰ \Rightarrow r = ۱$$

بنابراین، جواب عمومی رابطه بازگشتی است:

$$a_n^{(h)} = c(۱)^n = c$$

از طرفی، $r = ۱$ ریشه معادله مشخصه می‌باشد. پس جواب خصوصی عبارت است از:

$$a_n^{(p)} = n(A_{۰} + A_{۱}n)$$

برای یافتن ضرایب، باید $a_n^{(p)}$ را در رابطه بازگشتی قرار داد:

$$n(A_{۰} + A_{۱}n) - (n-۱)(A_{۰} + A_{۱}(n-۱)) = nA_{۰} + A_{۱}n^{۲} - nA_{۰} - A_{۱}n^{۲} + A_{۱}n + A_{۰} + A_{۱}n - A_{۱}$$

$$= ۲A_۱n + A_۰ - A_۱ = ۶n - ۶$$

با متعادل‌سازی طرفین معادله، خواهیم داشت:

$$A_۰ = -۳, \quad A_۱ = ۳$$

بنابراین $a_n^{(p)} = n(۳n - ۳)$ ، از طرفی $a_۲ = ۷ = c$ است پس جواب معادله بازگشتی برابر است با:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = ۳n^۲ - ۳n + ۷$$