ریاضیات گسسته
پاسخنامه تمرین مقدماتی سوم - منطق

محمد عرفان دانایی

سؤال ۱.

گزاره های سوری زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \forall y : (\sim n(y) \vee m(x)) \rightarrow [(\sim m(y) \wedge n(y)) \vee \sim s(x)] \tag{۱}$$
$$\forall x \exists y : r(x) \vee m(y) \vee \sim s(x) \vee \sim n(y) \tag{۲}$$
$$\forall x : (\sim p(x) \vee s(x)) \wedge (r(x) \rightarrow \sim p(x)) \tag{۳}$$
$$\exists x : (\sim p(x) \vee \sim r(x)) \rightarrow (p(x) \wedge q(x)) \tag{۴}$$
$$\forall x \forall y : (n(x) \wedge s(y)) \rightarrow x \neq y \tag{۵}$$

با فرض درست بودن هر ۵ گزاره:

الف) ثابت کنید

$$\exists x : p(x) \wedge q(x) \wedge s(x) \wedge \sim m(x) \wedge \sim r(x) \wedge \sim n(x)$$

ب) ثابت کنید

$$\exists x_۱ \exists x_۲ : x_۱ \neq x_۲ \wedge (\sim m(x_۱) \Leftrightarrow m(x_۲))$$

پاسخ :

قسمت الف)

با نمونه برداری وجودی از گزاره ۴ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&(\neg p(a) \vee \neg r(a)) \rightarrow (p(a) \wedge q(a)) \\
&\Rightarrow \neg(\neg p(a) \vee \neg r(a)) \vee (p(a) \wedge q(a)) \\
&\Rightarrow (p(a) \wedge r(a)) \vee (p(a) \wedge q(a)) \\
&\Rightarrow p(a) \wedge (r(a) \vee q(a)) \\
&\Rightarrow p(a) && \text{(I)} \\
&\Rightarrow r(a) \vee q(a) && \text{(II)}
\end{aligned}$$

حال با قرار دادن $x = a$ در سور عمومی ۳ می‌توان نتیجه گرفت:

$$
\begin{aligned}
&(\sim p(a) \vee s(a)) \wedge (r(a) \rightarrow \sim p(a)) \\
&\Rightarrow (\sim p(a) \vee s(a)) \wedge (\sim r(a) \vee \sim p(a)) \\
&\Rightarrow \sim p(a) \vee (s(a) \wedge \sim r(a)) \\
&\overset{\text{I}}{\Rightarrow} F \vee (s(a) \wedge \sim r(a)) \\
&\Rightarrow s(a) \wedge \sim r(a) \\
&\Rightarrow s(a) && \text{(III)} \\
&\Rightarrow \sim r(a) && \text{(IV)} \\
&\overset{\text{II}}{\Rightarrow} r(a) \vee q(a) \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} F \vee q(a) \\
&\Rightarrow q(a) && \text{(V)}
\end{aligned}
$$

حال با نمونه برداری وجودی از گزاره ۲ و قرار دادن $x = a$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&r(a) \vee m(b) \vee \sim s(a) \vee \sim n(b) \\
&\overset{\text{III,IV}}{\Rightarrow} F \vee m(b) \vee F \vee \sim n(b) \\
&\Rightarrow m(b) \vee \sim n(b) && \text{(VI)}
\end{aligned}
$$

حال با قرار دادن $x = a, y = b$ در گزاره ۱ می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&(\sim n(b) \vee m(a)) \rightarrow [(\sim m(b) \wedge n(b)) \vee \sim s(a)] \\
&\Rightarrow (n(b) \wedge \sim m(a)) \vee [\sim (m(b) \vee \sim n(b)) \vee \sim s(a)] \\
&\overset{\text{III,VI}}{\Rightarrow} (n(b) \wedge \sim m(a)) \vee [\sim T \vee \sim T] \\
&\Rightarrow (n(b) \wedge \sim m(a)) \vee F \Rightarrow n(b) \wedge \sim m(a) \\
&\Rightarrow n(b) && \text{(VII)} \\
&\Rightarrow \sim m(a) && \text{(VIII)} \\
&\overset{\text{VI}}{\Rightarrow} m(b) \vee \sim n(b) \overset{\text{VII}}{\Rightarrow} m(b) \vee F \\
&\Rightarrow m(b) && \text{(IX)}
\end{aligned}
$$

در نهایت با قرار دادن $x = y = a$ در گزاره ۵ داریم:

$$
\begin{aligned}
&(n(a) \wedge s(a)) \rightarrow a \neq a \\
&\Rightarrow \sim (n(a) \wedge s(a)) \vee F \\
&\Rightarrow \sim n(a) \vee \sim s(a) \overset{\text{III}}{\Rightarrow} \sim n(a) \vee F \\
&\Rightarrow \sim n(a) && \text{(X)}
\end{aligned}
$$

پس:

$$(\text{I,V,III,VIII,IV,X}) \rightarrow \exists x : p(x) \wedge q(x) \wedge s(x) \wedge \sim m(x) \wedge \sim r(x) \wedge \sim n(x)$$

قسمت ب)

با قرار دادن $x = b, y = a$ در گزاره‌ی ۵ داریم:

$$
\begin{aligned}
&(n(b) \wedge s(a)) \rightarrow b \neq a \\
&\overset{\text{III,VII}}{\Rightarrow} T \rightarrow b \neq a \\
&\Rightarrow b \neq a && \text{(XI)}
\end{aligned}
$$

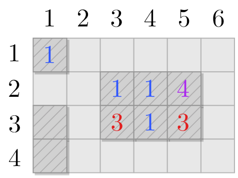
از طرفی:

$$\text{(VIII,IX)} \Rightarrow \sim m\left(a\right) \Leftrightarrow m\left(b\right)$$

$$\overset{\text{XI}}{\Rightarrow} \exists x_۱ \exists x_۲ : x_۱ \neq x_۲ \wedge \left(\sim m\left(x_۱\right) \Leftrightarrow m\left(x_۲\right)\right)$$

سؤال ۲.

بازی مین‌روب در ویندوزهای قدیمی را حتما به یاد دارید. شکل زیر قسمتی از زمین مین را نشان می‌دهد که عدد هر خانه، نشان دهنده‌ی تعداد مین‌های موجود در خانه‌های مجاور آن خانه است.

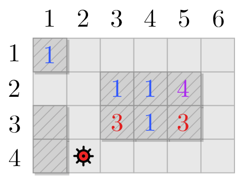


اگر کمترین تعداد مین ممکن در زمین، وجود داشته باشد، به ازای همه‌ی خانه‌های مجهول، تعیین کنید در کدام خانه‌های زمین، قطعا مین وجود دارد و در کدام خانه‌های زمین، قطعا مین وجود ندارد.

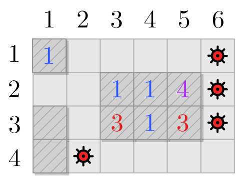
- توجه داشته باشید تنها مشخص کردن مین در خانه‌ها کافی نیست و باید استدلال خود را نیز برای هر نتیجه گیری بیان کنید.
- محور افقی را محور x (مولفه‌ی اول) و محور عمودی را محور y (مولفه‌ی دوم) در نظر بگیرید.

پاسخ :

ابتدا ثابت می‌کنیم در خانه‌ی (۲, ۴) مین وجود دارد. برای این کار، فرض کنیم در این خانه مین وجود ندارد. بنابراین با توجه به خانه (۳, ۳) در ۴ خانه‌ی {(۴, ۴), (۳, ۴), (۲, ۳), (۲, ۲)} ۳ عدد مین وجود دارد. پس حداقل در یکی از دسته‌های (۴, ۴), (۳, ۴) و (۲, ۳), (۲, ۲) هر دو خانه شامل مین هستند. اما با توجه به این که (۲, ۳) و (۲, ۲) مجاور خانه (۳, ۲) با عدد ۱، و (۴, ۴) و (۳, ۴) مجاور خانه (۴, ۳) مجددا با عدد ۱ هستند، هیچ‌کدام نمی‌توانند هر دو شامل مین باشند و به تناقض می‌رسیم. پس:

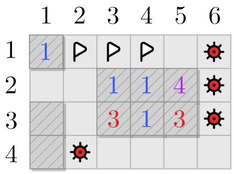


حال وجود مین را در خانه‌های {(۶, ۳), (۶, ۲), (۶, ۱)} ثابت می‌کنیم. می دانیم از ۵ خانه‌ی {(۵, ۱), (۴, ۱), (۶, ۳), (۶, ۲), (۶, ۱)} ۴ مورد شامل مین هستند. همچنین با توجه به خانه‌ی (۴, ۲) که دارای عدد ۱ است، می‌توان گفت از خانه‌های (۴, ۱) و (۵, ۱) حداکثر یکی شامل مین است. پس ۳ مین باقیمانده باید در خانه‌های (۶, ۳), (۶, ۲), (۶, ۱) باشند:

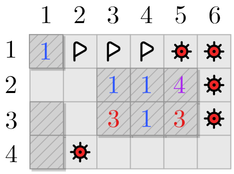


حال توجه کنید از دو دسته‌ی (۲, ۳), (۲, ۲) و (۴, ۴), (۳, ۴) ، در هر دسته، دقیقا یک مین وجود دارد. زیرا از طرفی قبلا نشان دادیم در هیچ دسته‌ای دو مین وجود ندارد، و از طرفی با توجه به خانه‌ی (۳, ۳) که دارای عدد ۳ است، باید در هر دسته دقیقا ۱ مین وجود داشته باشد. زیرا در صورت بدون مین بودن یک دسته، دسته‌ی دیگر باید ۲ مین داشته باشد.

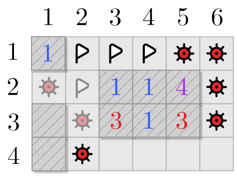
بنابراین هر ۳ خانه‌ی (۴, ۱), (۳, ۱), (۲, ۱) فاقد مین هستند. چرا که اگر هر یک از این خانه‌ها مین داشته باشند، بقیه‌ی خانه‌های مجاور خانه‌ی (۳, ۲) باید بدون مین باشند (اطراف این خانه فقط ۱ مین وجود دارد). و از طرفی، قبلا نشان دادیم که در یکی از خانه‌های (۲, ۳), (۲, ۲) مین وجود دارد و این تناقض است.

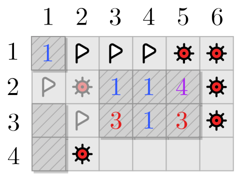


در این صورت، تنها خانه‌ای که اطراف (۵, ۲) باقی می‌ماند (۵, ۱) است که دارای مین خواهد بود.

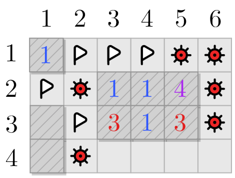


حال برای دسته‌ی (۲, ۳), (۲, ۲) دو حالت زیر وجود خواهد داشت:

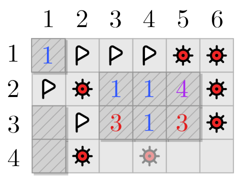


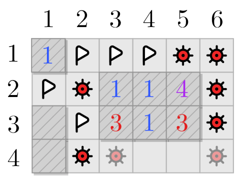


که با توجه به این که کمترین تعداد مین در زمین وجود دارد، حالت سمت راست قابل قبول است.



در نهایت برای دسته‌ی (۴, ۴), (۳, ۴) اگر در (۳, ۴) مین داشته باشیم، با توجه به خانه‌ی (۴, ۳) دو خانه‌ی (۴, ۴) و (۵, ۴) فاقد مین هستند و با توجه به خانه‌ی (۵, ۳) خانه‌ی (۶, ۴) نیز شامل مین خواهد بود.
حالت دیگر این است که خانه‌ی (۴, ۴) شامل مین باشد که در اینصورت هم اطراف خانه‌ی (۴, ۳) ۱ مین و هم اطراف خانه‌ی (۵, ۳) ۳ مین وجود دارد و بقیه خانه‌ها فاقد مین هستند:





مجددا به دلیل کمترین میزان مین حالت دوم قابل قبول است و در نهایت داریم: