

# ریاضیات گسسته

## تمرین پیشرفته هشتم - روابط بازگشتی

سید حمید محمودی، امیرحسین عارف زاده

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۰۳/۱۵

### سؤال ۱.

الف) فرض کنید  $s(n)$  تعداد دنباله‌های  $(x_1, \dots, x_k)$  از اعداد صحیح باشد که شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

$$\bullet \quad 1 \leq x_i \leq n \quad \text{برای همه‌ی } i$$

$$\bullet \quad x_{i+1} \geq 2x_i \quad \text{برای } i = 1, \dots, k-1$$

یک رابطه بازگشتی برای  $s_n$  بیابید.

توجه: طول دنباله مشخص نشده است؛ به طور خاص، دنباله‌ی تهی نیز در نظر گرفته می‌شود.

نشان دهید که تابع مولد  $S(t)$  رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کند:

$$(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2).$$

ب) فرض کنید  $u(n)$  تعداد دنباله‌های  $(x_1, \dots, x_k)$  از اعداد صحیح باشد که شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

$$\bullet \quad 1 \leq x_i \leq n \quad \text{برای همه‌ی } i$$

$$\bullet \quad x_{i+1} > \sum_{j=1}^i x_j \quad \text{برای } i = 1, \dots, k-1$$

آیا می‌توانید رابطه‌ای بین  $s(n)$  و  $u(n)$  بیابید؟ آیا می‌توانید آن را اثبات کنید؟

### سؤال ۲.

در جشنواره‌ی سالانه‌ی هنر و ریاضی، شرکت‌کنندگان باید با استفاده از خطوط راست روی صفحه، طرح‌هایی پیچیده خلق کنند. داور اصلی مسابقه، که خود یک ریاضی‌دان کنجکاو است، تصمیم دارد پیش از شروع مسابقه، تعداد بیشینه‌ی ناحیه‌هایی را که می‌توان با این خطوط ایجاد کرد، پیش‌بینی کند.

ابتدا، او فرض می‌کند که  $n$  خط راست روی صفحه کشیده می‌شوند به گونه‌ای که هیچ دو خطی با هم موازی نباشند و هیچ سه خطی در یک نقطه با هم تلاقی نکنند. با این فرض، او شروع به شمردن نواحی ممکن می‌کند.

اما سپس برای جذاب‌تر شدن مسابقه، تصمیم می‌گیرد  $k$  خط جدید دیگر نیز اضافه کند، که همه‌ی آن‌ها با یکدیگر موازی باشند ولی با هیچ کدام از  $n$  خط اول موازی نباشند.

حال او می‌خواهد بداند:

در نهایت، چند ناحیه‌ی مجزا می‌توان روی صفحه ساخت؟

پاسخ را با تحلیل منطقی، استدلال هندسی و استفاده از روابط بازگشتی بیابید. پاسخ شما باید تابعی از  $n$  و  $k$  باشد.