ریاضیات گسسته

تمرین پیشرفته چهارم - استقرا

سید حمید محمودی، یاسمن عموجعفری

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۰۱/۲۸

سؤال ۱.

تعدادی عدد طبیعی که همگی از توان‌های عدد دو هستند در اختیار داریم، به‌گونه‌ای که از هر توان، حداکثر دو عدد وجود دارد. می‌خواهیم این اعداد را به دو دسته با مجموع برابر افراز کنیم. ثابت کنید تعداد روش‌های ممکن برای چنین افرازی یا برابر صفر است یا برابر توانی از ۲.
راهنمایی: استقرا را روی تنوع توان‌های دو اعمال کنید.

پاسخ :

برای حل این سوال از استقرای روی تنوع توان‌های دو استفاده می‌کنیم.

- **پایه استقرا:** تنها یک نوع توان دو داشته باشیم.
به گونه‌ای که اگر از آن عدد دوتا داشته باشیم پاسخ یک ($۲^۱$) و اگر یکی داشته باشیم پاسخ صفر است.
- **فرض استقرا:** حال برای n تنوع عدد حکم را درست فرض می‌کنیم. یعنی تعداد حالات افراز این توان‌های دو یا توانی از دو است یا صفر.
- **گام استقرا:** برای گام روی کوچک‌ترین عدد بین این اعداد حالت بندی می‌کنیم. فرض کنید $n+۱$ عدد متنوع داریم و کوچک‌ترین انها ۲^k باشد. حال دو حالت داریم:

  - **حالت اول:** از این عدد یکی داشته باشیم. در اینصورت بقیه اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $۲^{k+۱}$ اند که یعنی همگی بر $۲^{k+۱}$ بخش پذیرند و با قرار دادن ۲^k در یکی از گروه‌ها(برای مثال A و گروه دیگر بدون آن B) خواهیم داشت:

$$A \equiv ۲^k \pmod{۲^{k+۱}}$$

$$B \equiv ۰ \pmod{۲^{k+۱}}$$

  بنابراین نمی‌توان افرازی انجام داد.
  - **حالت دوم:** از این عدد دوتا داشته باشیم. حال هردوی این اعداد می‌توانند یا در یک گروه باشند یا هرکدام در گروهی متفاوت باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم هردو حالت همزمان پیش نمی‌آیند.

  در حالتی که هرکدام در یک گروه متفاوت باشند، باقیمانده هرکدام از گروه‌ها بر $۲^{k+۱}$ برابر با ۲^k می‌شود. ولی اگر هردوی آنها در یک گروه باشند انگاه باقیمانده جمع هرکدام از گروه‌ها بر $۲^{k+۱}$ برابر ۰ می‌شود که یعنی جمع یک گروه در این دو حالت برابر نیست و یعنی هردوی این افرازها همزمان رخ نمی‌دهند. حال دو حالت جدا را بررسی می‌کنیم.

    - **در دو گروه متفاوت باشند:** در این صورت افراز باقی اعداد طبق فرض استقرا برابر صفر یا توانی از ۲ است.
    - **در یک گروه باشند:** در اینصورت بجای این دو عدد، $۲^{k+۱}$ می‌گذاریم. حال اگر سه تا $۲^{k+۱}$ داشته باشیم مشابه حالتی که یکی از آن داشته باشیم ثابت می‌شود جواب برابر صفر است. وگرنه مشابه فرض میرویم ولی می‌توانیم بجای یکی از $۲^{k+۱}$ ها دو تا ۲^k بگذاریم و چون ثابت کردیم یا هردو یکجااند یا در دو گروه جواب یا ضربدر دو می‌شود یا خودش می‌ماند.

بنابراین حکم ثابت شد.

سؤال ۲.

یک دستهٔ بزرگ از کارت‌ها (تعداد کارت‌ها را نمی‌دانیم) در اختیار داریم که شمارهٔ روی هر کارت از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است. این را هم می‌دانیم که جمع عددهای روی کارت‌ها برابر با $k \cdot n!$ است که k یک عدد صحیح مثبت است.
ثابت کنید می‌توان کارت‌ها را به k دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع اعداد هر دسته برابر با $n!$ باشد.

راهنمایی: لم زیر را در نظر بگیرید:

در هر مجموعه $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ می‌توان زیرمجموعه‌ای انتخاب کرد که مجموعش بر n بخش‌پذیر باشد.

در گام استقرا سعی کنید با استفاده از لم مطرح شده کارت‌ها را به دسته‌هایی که به $n+۱$ بخش‌پذیر هستند تقسیم کنید.(در صورت استفاده از لم حتما آن را ثابت هم بکنید.)

پاسخ :

ابتدا یک لم را بیان می‌کنیم و آن را اثبات می‌کنیم:
لم: در هر مجموعه $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ می‌توان زیرمجموعه‌ای انتخاب کرد که مجموعش بر n بخش‌پذیر باشد.
اثبات:
متغیر S_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall j \in \{۱, \ldots, n\}, S_j = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_j$$

حال باقی‌مانده‌ی هر S_j را نسبت به n در نظر بگیرید.

$$S_j \equiv r_j \pmod{n}$$

دو حالت ممکن است پیش بیاید:

حالت اول:
حداقل یکی از باقی‌مانده‌ها برابر صفر باشد:

$$r_j \equiv ۰ \pmod{n}$$

در این حالت زیرمجموعه‌ی $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_j\}$ مجموعش بر n بخش پذیر است.

حالت دوم:
هیچکدام از S_j بر n بخش‌پذیر نباشد. در این حالت همه‌ی باقی مانده‌ها در بین اعداد $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ قرار دارند. یعنی حداکثر $n-۱$ مقدار ممکن داریم پس طبق اصل لانه کبوتری،حداقل دوتا از این باقی‌مانده‌ها برابرند. فرض کنید:

$$S_j \equiv S_i \pmod{n}, j > i$$

در این صورت:

$$S_j - S_i \equiv ۰ \pmod{n}$$
$$S_j - S_i = a_{i+۱} + a_{i+۲} + \ldots + a_j$$

یعنی زیرمجموعه‌ای داریم که مجموعش بر n بخش‌پذیر است.
اثبات با استقرای ریاضی:

- **پایهٔ استقرا ($n = ۱$):** عدد ۱ را داریم و در اینجا $k = ۱$ است و می‌توان به یک دسته با مجموع ۱ تقسیم کرد.
- **فرض استقرا:** فرض می‌کنیم حکم برای n صحیح است، یعنی اگر اعداد بین ۱ تا n باشند و مجموعشان $k \cdot n!$ باشد، می‌توان آنها را به k دسته با مجموع $n!$ تقسیم کرد.

- **حکم استقرا ($n + ۱$):** یک گروه از کارت‌ها را ابرکارت صدا می‌زنیم اگه جمع آن‌ها برابر با $p(n + ۱)$ باشد و p را هم مقدار ابرکارت تعریف می‌کنیم.
همه‌ی کارت ها با مقدار $n + ۱$ خودشان یک ابرکارت با مقدار ۱ هستند، پس آن‌ها را جدا می‌کنیم. حال از بین کارت‌های باقی مانده تا جایی که تعدادشان کمتر از $n + ۱$ شود دسته‌های ابرکارت برمی‌داریم (در هر مرحله یک زیر مجموعه‌ی $n + ۱$ برمی‌داریم و سپس طبق لم بالا یک زیرمجموعه وجود دارد که جمع آن بر $n + ۱$ بخش‌پذیر باشد).
بعد از پایان الگوریتم بالا یک دسته کمتر از $n + ۱$ کارت باقی می ماند که این دسته هم باید ابرکارت باشد زیرا می‌دانیم مجموع کارت‌ها برابر $k \cdot (n + ۱)!$ است.

مقدار ابرکارت‌ها نمی‌تواند بیشتر از n باشد، زیرا ما تمام کارت ها با عدد $n + ۱$ را برداشتیم، پس مقدار همه‌ی کارت‌های باقی مانده بین ۱ تا n خواهد بود.
چون مقدار ابرکارت‌ها بین ۱ تا n است و مجموع ابرکارت‌ها نیز برابر:

$$(n + ۱)(p_۱ + p_۲ + ...) = k.(n + ۱)! \implies (p_۱ + p_۲ + ...) = k.n!$$

بنابراین طبق فرض استقرا می‌توان مقدار ابرکارت‌ها را طوری در k دسته تقسیم کرد که مجموع هر دسته برابر $n!$ باشد ، حال چون مجموع هر ابرکارت برابر $p(n + ۱)$ است پس اگر به جای مقدار ابرکارت دسته ی ابرکارت را بگذرایم مجموع هردسته برابر

$$(n + ۱)!$$

خواهد بود و حکم اثبات می‌شود

بنابراین با این روش استقرایی، حکم برای همهٔ nها ثابت می‌شود.