ریاضیات گسسته

پاسخنامه سوالات کلاسی نهم - نظریه اعداد

محمد عرفان دانایی

سؤال ۱.

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $۱۳ \mid n+۱$ و نیز به ازای هر مقسوم علیه n مانند p که $p \leq \sqrt{n}$ است، داشته باشیم $p \overset{۱۳}{\equiv} -۱$. ثابت کنید مجموع همه‌ی مقسوم علیه‌های n بر ۱۳ بخش پذیر است.

پاسخ :

مقسوم علیه‌های n را به صورت زوج مرتب‌های $(a,b) = (p_i, \frac{n}{p_i})$ در نظر می‌گیریم به طوری که p_iها کمتر مساوی $\sqrt{n}$ هستند و واضحا می‌توان نتیجه گرفت $\frac{n}{p_i}$ ها بزرگتر از $\sqrt{n}$ هستند.
حال می‌توان نوشت:

$$ab = n \Rightarrow ab + ۱ = n + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ab \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

$$a + b \overset{۱۳}{\equiv} a + b - ۱ + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} a + b + ab + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} (a+۱)(b+۱) \overset{۱۳}{\equiv} (p_i + ۱)(\frac{n}{p_i} + ۱)$$

حال چون طبق فرض سوال به ازای همه‌ی p_i ها می دانیم $p_i \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow p_i + ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۰$ پس:

$$a + b \overset{۱۳}{\equiv} (p_i + ۱)(\frac{n}{p_i} + ۱) \overset{۱۳}{\equiv} ۰(\frac{n}{p_i} + ۱) \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

پس جمع هر جفت مقسوم علیه‌ها و در نتیجه جمع کل مقسوم علیه‌ها بر ۱۳ بخش پذیر می‌باشد.

سؤال ۲.

m, n اعداد طبیعی هستند و $m > n$. ثابت کنید:

$$[m,n] + [m+۱, n+۱] > \frac{۲mn}{\sqrt{m-n}}$$

پاسخ :

می‌دانیم: $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$
پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{mn}{(m,n)} + \frac{(m+۱)(n+۱)}{(m+۱, n+۱)} > \frac{۲mn}{\sqrt{m-n}}$$

بنابر نامساوی حسابی-هندسی می‌توان نوشت:

$$\frac{mn}{(m,n)} + \frac{(m+۱)(n+۱)}{(m+۱, n+۱)} \geq ۲\sqrt{\frac{m(m+۱)n(n+۱)}{(m,n)(m+۱, n+۱)}}$$
$$\geq ۲\sqrt{\frac{m(m)n(n)}{(m,n)(m+۱, n+۱)}} \geq \frac{۲mn}{\sqrt{(m,n)(m+۱, n+۱)}}$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{(m,n)(m+۱,n+۱)}} \geq \frac{۱}{\sqrt{m-n}} \Rightarrow \sqrt{(m,n)(m+۱,n+۱)} \leq \sqrt{m-n}$$

برای این کار توجه کنید که $(m,n) \mid m-n$ و نیز $(m+۱,n+۱) \mid (m+۱)-(n+۱) = m-n$
از طرفی چون (m,n) و $(m+۱,n+۱)$ نسبت به هم اولند پس می‌توان نوشت:

$$(m,n)(m+۱,n+۱) \mid m-n \Rightarrow (m,n)(m+۱,n+۱) \leq m-n \Rightarrow \sqrt{(m,n)(m+۱,n+۱)} \leq \sqrt{m-n}$$

و اثبات تمام است.

سؤال ۳.

فرض کنید $p > ۳$ یک عدد اول باشد و داشته باشیم:

$$\frac{m}{n} = \frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \ldots + \frac{۱}{(p-۱)^۲}$$

به طوری که m و n اعداد صحیح نسبت به هم اول هستند. ثابت کنید $p \mid m$.

پاسخ :

با ضرب دو طرف در $((p-۱)!)^۲$ داریم:

$$((p-۱)!)^۲\frac{m}{n} = ((p-۱)!)^۲\left(\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \ldots + \frac{۱}{(p-۱)^۲}\right)$$

$$= \left(\frac{(p-۱)!}{۱}\right)^۲ + \left(\frac{(p-۱)!}{۲}\right)^۲ + \ldots + \left(\frac{(p-۱)!}{p-۱}\right)^۲$$

که به وضوح عددی صحیح است.
حال توجه کنید که مجموعه ی

$$X = \left\{x_۰ = ۰, x_۱ = \frac{(p-۱)!}{۱}, x_۲ = \frac{(p-۱)!}{۲}, \ldots, x_{p-۱} = \frac{(p-۱)!}{p-۱}\right\}$$

یک دستگاه کامل مانده ها به پیمانه ی p است. برای اثبات فرض کنید که این دستگاه دارای p عضو یک مجموعه کامل مانده ها نباشد. یعنی دو عضو i ام و j ام یافت می شود که $۱ \leq i,j \leq p-۱$: $i \neq j$ ولی $x_i \equiv x_j \mod p$ باشد. در این صورت داریم

$$\frac{(p-۱)!}{i} \equiv \frac{(p-۱)!}{j} \overset{\times ij}{\rightarrow} j\,(p-۱)! \equiv i\,(p-۱)! \mod p$$

$$\overset{\gcd(p,(p-۱)!)=۱}{\rightarrow} j \equiv i \mod p$$

که با $۱ \leq i,j \leq p-۱$: $i \neq j$ در تناقض است. بنابراین اعضای مجموعه ی X با حذف $x_۰ = ۰$ به ترتیبی نامشخص دارای باقیمانده های $۱,۲,۳,\ldots,p-۱$ به پیمانه p هستند. پس

$$((p-۱)!)^۲\frac{m}{n} \equiv \left(\frac{(p-۱)!}{۱}\right)^۲ + \left(\frac{(p-۱)!}{۲}\right)^۲ + \ldots + \left(\frac{(p-۱)!}{p-۱}\right)^۲$$

$$\equiv ۱^۲ + ۲^۲ + ... + (p-۱)^۲ \equiv \frac{(p-۱)\,p\,(۲p-۳)}{۶} \equiv ۰ \mod p$$

توجه داشته باشید وجود ۶ در مخرج مشکلی ایجاد نمیکند زیرا $p \geq ۵ \rightarrow \gcd(p,۶) = ۱$ در نهایت داریم:

$$((p-۱)!)^۲ \frac{m}{n} \equiv ۰ \overset{\gcd(p,(p-۱)!)=۱}{\rightarrow} \frac{m}{n} \equiv ۰ \rightarrow m \equiv ۰ \mod p \rightarrow p \mid m$$