به نام خدا

پاسخ تکلیف سری ۴ فیزیک ۲

خازن و مقاومت الکتریکی

نیمسال دوم ۱۴۰۳

۱-

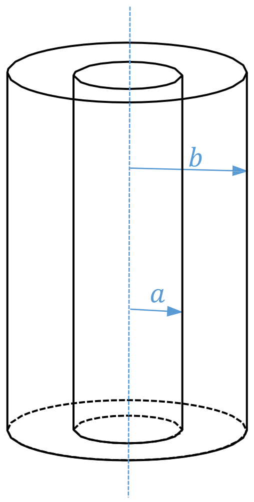
پاسخ: با توجه به شکل دو خازن موازی خواهیم داشت که ظرفیت های آنها طبق روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$c_1 = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 4\pi\varepsilon_0 k \left(\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \right) = 2\pi\varepsilon_0 k \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

$$c_2 = \frac{\pi}{2\pi} \cdot 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \right) = 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

محاسبه ظرفیت معادل:

$$c_T = c_1 + c_2 = 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right) [K+1]$$



۲- سطح گاوسی استوانه‌ای شکلی به ارتفاع l درنظر می‌گیریم.

$$\int k\varepsilon_0\vec{E}.dA = q$$

طبق تقارن استوانه‌ای میدان روی سطح گاوسی ثابت و در راستای شعاعی است.

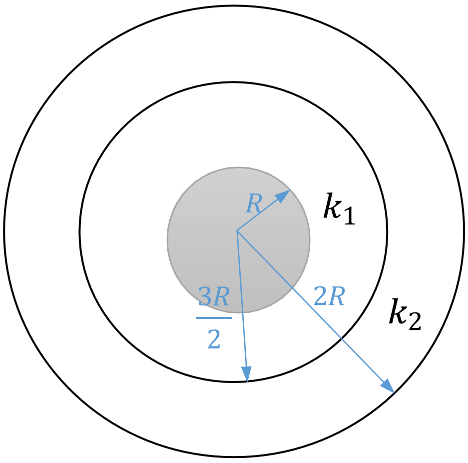
$$E(r)\int k\ dA = \frac{2\pi al\ \sigma_0}{\varepsilon_0}$$

چون k روی سطح گاوسی ثابت است از زیر انتگرال بیرون می‌آید.

$$E\ (r)\int dA = \frac{2\pi al\sigma_0}{k(r)\ \varepsilon_0} \to E(r)2\pi rl = \frac{2\pi al\sigma_0}{k_0r^{\alpha}\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{ar^{-\alpha-1}\sigma_0}{k_0\varepsilon_0} \to -\alpha - 1 = 0$$

$$Ans: \quad \alpha = -1$$



۳ - الف) سطح گاوسی را به صورت استوانه‌ای

در طول L و شعاع r در نظر می‌گیریم:

$$R < r < \frac{3}{2}R \rightarrow (-\sigma)2\pi RL = \int k_1\varepsilon_0 E_1 dA$$

$$-\sigma(2\pi RL) = k_1\varepsilon_0 E_1(2\pi rL) \rightarrow \overrightarrow{E_1} = \frac{-\sigma R}{k_1\varepsilon_0 r}(\hat{r})$$

$$\Delta V_1 = -\int_R^{\frac{3}{2}R} \overrightarrow{E_1}.dr = \frac{\sigma R}{k_1\varepsilon_0}\int_R^{\frac{3}{2}R}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{k_1\varepsilon_0}\ln(\frac{3}{2})$$

$$\frac{3}{2}R < r < 2R \rightarrow \overrightarrow{E_2} = \frac{-\sigma R}{k_2\varepsilon_0 r} \quad , \quad \Delta V_2 = \frac{\sigma R}{k_1\varepsilon_0}\ln(\frac{4}{3})$$

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}(\frac{1}{k_1}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{k_2}\ln\left(\frac{4}{3}\right))$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma(2\pi R)L}{\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}(\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k_1} + \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{k_2})}$$

$$Ans: \qquad \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{(\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k_1}) + (\frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{k_2})}$$

ب) برای محاسبه چگالی انرژی از رابطه $u=\frac{1}{2}k\epsilon_0E^2$ استفاده می‌کنیم:

$$u=\begin{cases} R<r<\frac{3}{2}R & u_1=\frac{1}{2}k_1\epsilon_0E_1^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2R^2}{k_1\varepsilon_0r^2} \\ \frac{3}{2}R<r<2R & u_2=\frac{1}{2}k_2\epsilon_0E_2^2=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2R^2}{k_2\varepsilon_0r^2} \end{cases}$$

برای محاسبه انرژی کل دو روش وجود دارد

روش اول:

$$U=\int u\,dV_{\{\text{حجم}\}}=\int_R^{\frac{3}{2}R}u_1\,(2\pi rL\,dr)+\int_{\frac{3}{2}R}^{2R}u_2\,(2\pi rL\,dr)$$

روش دوم: چون انرژی کل خازن را خواسته است می توان از رابطه $U=\frac{q^2}{2C}$ استفاده کرد.

$$q=\sigma(2\pi RL)$$

$$U=\frac{\sigma^2(2\pi RL)^2}{4\pi\epsilon_0\,L}\left(\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k_1}+\frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{k_2}\right)$$

$$\frac{U}{L}=\frac{\sigma^2\pi R^2}{\epsilon_0}\left(\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{k_1}+\frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{k_2}\right)$$

- ۴

الف) در زمان t عایق به اندازه L= vt از بین صفحات خارج شده و مانند این است که دو خازن موازی(یکی بخش دارای عایق و دیگری بخش بدون عایق) داریم پس میتوانیم ظرفیت معادل را محاسبه کنیم:

$$C_t = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \frac{aL}{d} + k\varepsilon_0 \frac{a(a-L)}{d} \Rightarrow c_t = \frac{a\varepsilon_0}{d}(ka + (1-k)L)$$

$$\Rightarrow c_t = \frac{a\varepsilon_0}{d}(ka + (1-k)vt)$$

با توجه به اینکه صفحات خازن از باتری جدا شده‌اند پس بار روی صفحات ثابت خواهد بود و برابر بار در زمانی خواهد بود که هنوز دی الکتریک جابجا نشده است و داریم:

$$q = cv = \frac{k\varepsilon_0 a^2 V_0}{d}$$

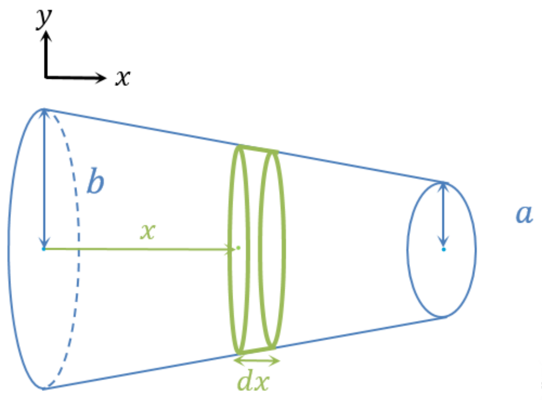
بنابراین برای محاسبه w داریم:

$$w = \frac{1}{2c_T} q^2 = \frac{\left(\frac{k\varepsilon_0 a^2 V_0}{d}\right)^2}{\frac{2a\varepsilon_0}{d}(ka + (1-k)vt)}$$

ب) با توجه به اینکه مقدار بار روی صفحات خازن ثابت می‌ماند پس از تقسیم بار بر ظرفیت خازن، اختلاف پتانسیل بین صفحات به‌دست می‌آید:

$$v' = \frac{q}{c'} = \frac{k\varepsilon_0 \frac{a^2}{d} V_0}{\varepsilon_0 \frac{aL}{d} + k\varepsilon_0 \frac{a(a-L)}{d}} = \left[\frac{Ka}{Ka + (1-K)L}\right] V_0$$

۵ – یک المان حجمی به شکل دیسک در نظر می‌گیریم که به فاصله x از قاعده بزرگ جسم قرار دارد و ضخامت آن dx است.



$$dR = \frac{\rho dx}{A} = \frac{\rho_0}{\pi}\frac{x\,dx}{r^2}$$

با توجه به شکل شعاع متناظر با هر x از معادله خط زیر به‌دست ء

$$\frac{a-b}{L}x + b = r \rightarrow dR = \frac{\rho_0}{\pi}\left(\frac{x\,dx}{\left(\frac{a-b}{L}x+b\right)^2}\right)$$

$$\rightarrow R = \int dR = \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^L \frac{x\,dx}{(\frac{a-b}{L}x+b)^2}$$

که با تغییر متغیر داریم:

$$u = \frac{a-b}{L}x + b$$

$$R = \frac{\rho_0}{\pi}(\frac{L}{a-b})^2\int_b^a\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$R = \frac{\rho_0}{\pi}\left(\frac{L}{a-b}\right)^2\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)+\frac{b}{a}-1\right)$$

$$Ans: \quad R = \frac{\rho_0 L^2}{\pi(a-b)^2}\left(\frac{b}{a}-\ln\left(\frac{b}{a}\right)-1\right)$$

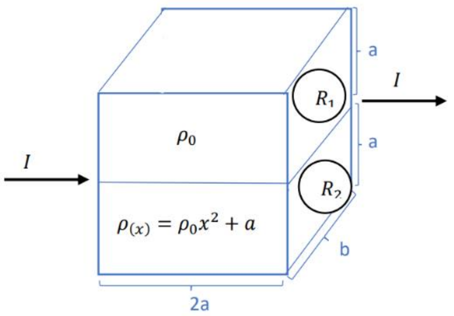
۶- سوال میانترم‌های سال‌های قبل

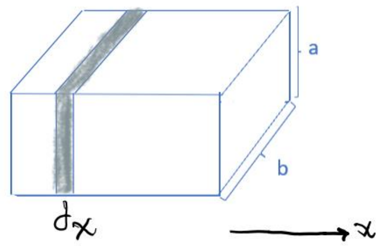
با توجه به جهت عبور جریان، R_1 و R_2 با هم موازی هستند؛ پس داریم :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

مقاومت ویژه برای R_1 ثابت است؛ پس داریم :

$$R_1 = \rho_0 \frac{L}{A} = \rho_0 \frac{2a}{ab} = \frac{2\rho_0}{b}$$





باتوجه به اینکه مقاومت ویژه برای قطعه R_2 تابعی از x است پس باید المان دیفرانسیل مناسب گرفته شود و انتگرال گیری کنیم. المان های دیفرانسیل به صورت سطری کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؛ پس باید از فرمول مقاومت‌های سری برای محاسبه مقاومت استفاده کرد

$$R_2 = \int dR_2 = \int_0^{2\pi} (\rho_0 x^2 + a) \frac{dx}{ab}$$

$$= \frac{1}{ab} \left[\rho_0 \, {x^3}/{3} + ax \right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{ab} \left(\frac{8\rho_0 a^3}{3} + 2a^2 \right) = \frac{8}{3b} \rho_0 a^2 + \frac{2a}{b} = \frac{2a}{3b} (4\rho_0 a + 3)$$

حال می‌نویسیم :

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{b}{2\rho_0} + \frac{3b}{2a(4\rho_0 a + 3)} = \frac{(4a^2 + {3}/{\rho_0}\, a + 3)b}{2a(4\rho_0 a + 3)}$$

$$\Rightarrow R_{tot} = \frac{2a(4\rho_0 a + 3)}{b\left(4a^2 + \frac{3a}{\rho_0} + 3\right)}$$