ریاضیات گسسته

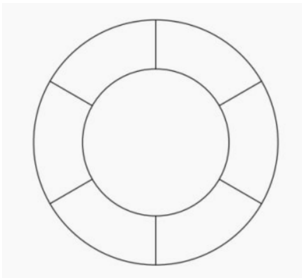
تمرین مقدماتی هشتم - روابط بازگشتی

سید حمید محمودی

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۶/۳

سؤال ۱.

می‌خواهیم شکل زیر که شامل هفت ناحیه است را با چهار رنگ به گونه‌ای رنگ کنیم که هیچ دو ناحیه مجاوری همرنگ نباشند. تعداد این روش‌های رنگ‌آمیزی را با استفاده از روابط بازگشتی بیابید.



پاسخ :

در ابتدا رنگ دایره وسط را مشخص می‌کنیم که ۴ حالت دارد و در انتهای حل آن را لحاظ می‌کنیم. بنابراین برای باقی شکل سه رنگ می‌ماند. حال برای باقی شکل از روش بازگشتی استفاده می‌کنیم. اگر A_n را تعداد روش های رنگ‌آمیزی n ناحیه که به صورت دوری به هم متصل‌اند با کمک سه رنگ بنامیم خواهیم داشت:

$$A_۱ = ۳$$

$$A_۲ = ۳ \times ۲ = ۶$$

و رابطه بازگشتی A_n به صورت:

$$A_n = ۳ \times ۲^{n-۱} - A_{n-۱}$$

که به این شکل بدست می‌آید:
فرض کنید ابتدا ناحیه‌ها به صورت خطی قرار گرفته باشند، در این صورت برای اولین خانه ۳ حالت و برای باقی ۲ حالت خواهیم داشت. ولی چون باید دو سر نیز متفاوت باشند باید حالات یکی بودنشان ازین مقدار کم شود که همان $A_{n-۱}$ است. پس خواهیم داشت:

$$A_۱ = ۳$$

$$A_۲ = ۳ \times ۲ = ۶$$

$$A_۳ = ۳ \times ۲^۲ - A_۲ = ۱۲ - ۶ = ۶$$

$$A_4 = 3 \times 2^3 - A_3 = 24 - 6 = 18$$
$$A_5 = 3 \times 2^4 - A_4 = 48 - 18 = 30$$
$$A_6 = 3 \times 2^5 - A_5 = 96 - 30 = 66$$
$$A_7 = 3 \times 2^6 - A_6 = 192 - 66 = 126$$

و در نهایت باید این عدد را در ۴ ضرب کنیم که رنگ‌آمیزی مرکز هم انجام شود:

$$126 \times 4 = 504$$

سؤال ۲.

فرض کنید $n = 2^k$ فایل دانش‌آموزی داریم که با شناسه‌های یکتا شماره‌گذاری شده‌اند:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

هر فایل دارای یک شناسه خاص است و هدف ما پیدا کردن جایگاه فایلی مشخص به نام a در این مجموعه است.

منظور از «پیدا کردن جایگاه» این است که بررسی کنیم فایل a در چه موقعیتی از آرایه A قرار دارد. برای انجام این کار، الگوریتم جستجو عناصر آرایه را بررسی کرده و هر بار a را با یک عنصر از مجموعه مقایسه می‌کند.

در اینجا منظور از «مقایسه» بررسی رابطه بین a و یک عنصر a_i از آرایه است، مانند:

$$a > a_i \text{ یا } a < a_i$$

هدف ما این است که تعیین کنیم در بدترین حالت، چند مقایسه لازم است تا فایل a را بیابیم.

راهنمایی:
در این مسئله، دو حالت را بررسی کنید:

- زمانی که فایل‌ها به صورت نامرتب ذخیره شده‌اند.
- زمانی که فایل‌ها به صورت صعودی مرتب شده‌اند، یعنی:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

با توجه به ساختار فایل‌ها در هر حالت، روش مناسب جستجو و تعداد مقایسه‌های لازم در بدترین حالت متفاوت خواهد بود که باید توضیح داده شود.

پاسخ :

بسته به اینکه آرایه مرتب باشد یا نه، پاسخ متفاوت است.

- **حالت اول: آرایه مرتب نیست.**
در این حالت باید جستجوی خطی انجام دهیم و ممکن است همه عناصر را بررسی کنیم: (جز عنصر آخر)

$$x_n = n - 1$$

- **حالت دوم: آرایه مرتب شده‌است، به‌صورت**

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

در این حالت می‌توان از جستجوی دودویی استفاده کرد. در هر مرحله، عنصر میانی a_g را بررسی می‌کنیم:

- اگر $a = a_g$ باشد، فقط یک مقایسه لازم است.
- اگر $a < a_g$ باشد، جستجو را در نیمه چپ ادامه می‌دهیم.
- اگر $a > a_g$ باشد، جستجو را در نیمه راست ادامه می‌دهیم.

بنابراین رابطه بازگشتی زیر را داریم:

$$T(n) = T(n/۲) + ۱$$

با اعمال بازگشتی مکرر:

$$T(n) = T(n/۲) + ۱ = T(n/۴) + ۲ = \cdots = T(۱) + \log_۲ n$$

چون $T(۱) = ۱$ داریم:

$$T(n) = \log_۲ n + ۱$$

در نتیجه:

اگر آرایه مرتب نباشد:

$$x_n = n - ۱$$

اگر آرایه مرتب باشد:

$$x_n = \log_۲ n + ۱$$