

ریاضیات گسسته

تمرین پیشرفته ششم - گراف پیشرفته

بهاره عین‌اللهی

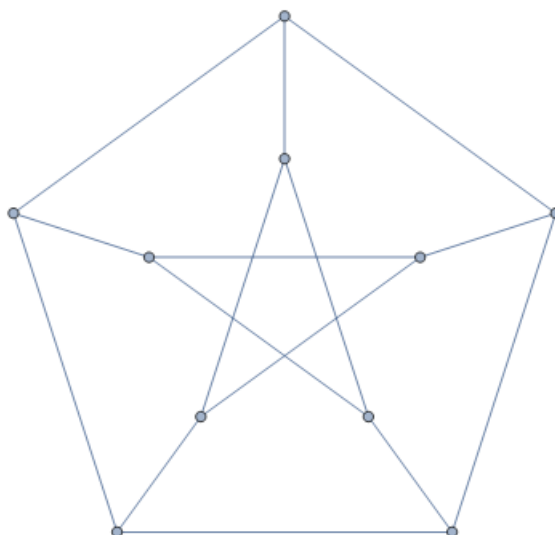
تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۲/۲۵

سؤال ۱.

فرض کنید H یک گراف مسطح ساده با p رأس باشد، به طوری که طول هر دور در H حداقل r باشد. نشان دهید تعداد یال‌های H از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$e \leq \left(\frac{r}{r-2} \right) (p-2)$$

سپس ثابت کنید گراف زیر مسطح نیست.



پاسخ:

از آنجا که افزودن یال‌ها H را همبند می‌کند بدون کاهش طول وجه‌ها، می‌توان فرض کرد که H همبند است. طول هر وجه H حداقل r است، و هر یال دو بار در مرزهای وجه‌ها مشارکت می‌کند. بنابراین، با شمارش مشارکت یال‌ها در وجه‌ها به نامساوی $2e \geq rf$ می‌رسیم.

از آنجا که H همبند است، می‌توان از فرمول اولر استفاده کرد: $p - e + f = 2$. با جایگزینی f در نامساوی، $2e \geq r(2 - p + e)$ به دست می‌آید و در نتیجه $e \leq \frac{r(p-2)}{r-2}$.

گراف پترسن دارای ۱۰ رأس، ۱۵ یال و ۵ کمر است. از آنجا که کمر آن ۵ است، اندازه یک زیرگراف مسطح حداکثر $\lfloor \frac{5 \cdot 10}{3} \rfloor = 16$ است که برابر ۱۳ است. از آنجا که $15 > 13$ ، گراف پترسن مسطح نیست و حداقل دو یال باید حذف شوند تا یک زیرگراف مسطح به دست آید.

سؤال ۲.

آیا عبارت زیر به طور کلی درست است؟ اگر بله اثبات کنید و اگر نه مثال نقض بزنید.

هر گراف G که دارای دو مسیر همپلتونی باشد که این دو مسیر یال مشترک نداشته باشند، دارای دور همپلتونی است.

پاسخ:

ابتدا به اثبات لم زیر میپردازیم:

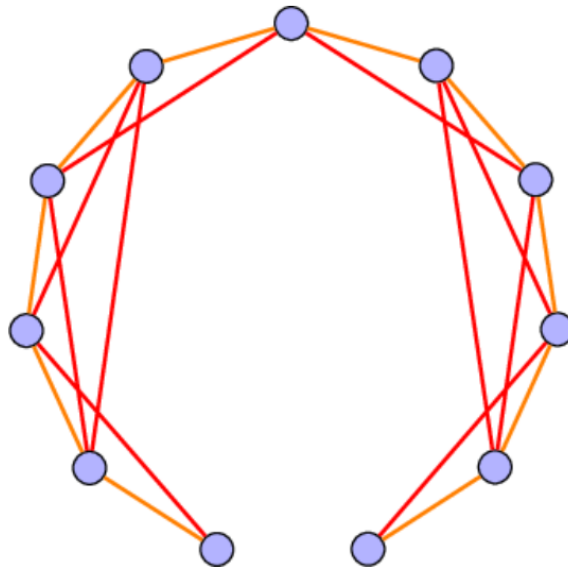
لم ۱:

اگر در گراف راسی داشته باشیم که با حذف آن گراف ناهمبند شود، آنگاه گراف نمیتواند دور همیلتونی داشته باشد.

اثبات:

برهان خلف میزنیم و فرض میکنیم چنین راسی وجود دارد (راس v) و گراف دور همیلتونی دارد. دور همیلتونی این گراف را در نظر میگیریم. با حذف راس v در دور همیلتونی یک مسیر بین باقی رئوس وجود دارد. پس گراف اولیه نمیتواند با حذف راس v ناهمبند شود که تناقض است.

حال با آزمون خطا و با استفاده از این لم مثال نقضی برای این مورد ارائه میکنیم:

**سؤال ۳.**ثابت کنید چندجمله ای رنگی گراف $K_{2,n}$ ، $(n \geq 1)$ برابر است با:

$$k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n$$

پاسخ:

با روش های ترکیبیاتی مسئله را حل میکنیم: دور راسی که در یک بخش از گراف قرار دارند را a_1 و a_2 می نامیم و باقی رئوس را b_1, b_2, \dots, b_n می نامیم.

برای رنگ آمیزی رئوس a_1 و a_2 دو حالت داریم:

(۱) دو راس یک رنگ داشته باشند:

به k طریق رنگ این دو راس را انتخاب میکنیم و به $k-1$ طریق رنگ هریک از رئوس دسته ی b را رنگ میکنیم. بنابراین داریم:

$$k(k-1)^n$$

(۲) دو راس رنگ های متفاوتی داشته باشند: به $k(k-1)$ طریق رنگ این دو راس را انتخاب میکنیم و چون رئوس دسته b نمیتوانند این دو رنگ را داشته باشند ولی چون هیچ یک از دو راس دسته b به هم یال ندارند بنابراین هر کدام از آنها مستقل از بقیه به $k-2$ یک طریق رنگ آمیزی میشود. بنابراین داریم:

$$k(k-1)(k-2)^n$$

در نتیجه در مجموع داریم:

$$k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n$$

حل این مسدله با استقرا نیز قابل انجام است.