ریاضیات گسسته

مجموعه سوالات کلاسی هفتم - درخت

سروش صحرائی

سؤال ۱.

فرض کنید T یک درخت است که هر راس غیر برگ آن درجه ۳ دارد. ثابت کنید حداقل دو برگ دارد که پدر مشترک دارند.

پاسخ :

پایین‌ترین برگ درخت را در نظر بگیرید. بچه‌های پدر این برگ همه برگ هستند. پدر این برگ هم سه بچه دارد و این سه بچه دو به دو پدر مشترک دارند.

سؤال ۲.

هر درختی دو بخشی است. ثابت کنید هر درختی در بخش بزرگ‌ترش حداقل یک برگ دارد.

پاسخ :

فرض کنید درخت T دو بخش X و Y داشته باشد و $|X| \geq |Y|$.
اگر هیچ برگی در X نباشد در نتیجه $e(T) \geq ۲ \times |X| = |X| + |X| \geq |X| + |Y| = n(T)$.
این با $e(T) < n(T)$ در تناقض است.

سؤال ۳.

ثابت کنید در هر گرافی که درجه هر راس آن حداقل k است می‌توان هر درخت k راسی‌ای را به عنوان زیرگراف پیدا کرد.

پاسخ :

راس‌های درخت را به ترتیب پیمایش عمق اول شماره گذاری می‌کنیم. سپس در گراف شروع به یافتن این درخت به عناون زیردرخت می‌کنیم. از یک راس دلخواه شروع می‌کنیم، این راس را متناظر راس شماره ۱ در درخت در نظر می‌گیریم، اگر راس شماره ۱ در درخت p همسایه داشته باشد، p تا از همسایه‌های راس تناظر داده شده به راس شماره ۱ را به همسایه‌های راس شماره ۱ در درخت تناظر می‌دهیم. سپس به سراغ راس شماره ۲ رفته و این روند را تکرار می‌کنیم. اگر بتوانیم این عملیات را برای هر k راس درخت انجام بدهیم، در واقع درخت را به عنوان زیرگراف در گرافمان پیدا کرده ایم. حال صرفا نیاز است ثابت کنیم این کار ممکن است، از آنجا که هر راس در گراف حداقل k همسایه دارد، وقتی نیاز به همسایه استفاده نشده برای تناظر داریم قطعا چنین راسی موجود است زیرا خود درخت k راس دارد و این یعنی حداکثر $k - ۱$ همسایه این راس از قبل استفاده شده اند.

سؤال ۴.

فرض کنید T درختی با $۲k$ راس درجه فرد باشد، ثابت کنید می‌توان T را به k مسیر افراز کرد.

پاسخ :

یک راه این است که بین راس‌های درجه فرد یال قرمز بگذاریم، گراف حاصل اویلری خواهد بود، در این گراف تور اویلری را پیدا می‌کنیم و به قدری شیفت می‌دهیم تا یک یال قرمز اول قرار بگیرد. سپس کافیست یال‌های قرمز را از تور حذف کنیم تا k مسیر داشته باشیم که در واقع

یال‌های درخت هستند.

سؤال ۵.

فرض کنید راس u یک راس در گراف همبند G باشد، ثابت کنید می‌توان جوری کوتاه‌ترین مسیرهای راس u به بقیه راس‌ها را انتخاب کرد که اجتماع این مسیرها درخت باشد.

پاسخ :

راه استقرایی و برهان خلف هم دارد اما کافیست درخت BFS این گراف را در نظر بگیریم. مسیر راس u به هر راسی در این درخت یک کوتاه‌ترین مسیر است و درخت BFS هم درخت است.
با برهان خلف: به ازای هر راس جز u یک یال آن که به یک کوتاه‌ترین مسیر به آن ختم می‌شود را در نظر بگیرید، الان $n-۱$ یال داریم و این یال‌ها دور ندارند چون همواره با طی کردنشان به u نزدیک‌تر می‌شویم. گراف $n-۱$ یالی و n راسی‌ای که دور ندارد هم درخت است.

سؤال ۶.

ثابت یا رد کنید: اگر یک گراف با قطر دو راس برشی داشته باشد، مکملش راس تنها دارد.

پاسخ :

درست است. فرض کنید راس v در گراف با قطر ۲، برشی باشد. برای اینکه راس v فاصله حداکثر ۲ از هر راس هر مولفه در $G-v$ داشته باشد، یک راس هر مولفه باید به v متصل باشد در نتیجه راس v به همه راس‌ها وصل است و در گراف مکمل راس تنهاست.

سؤال ۷.

ثابت کنید یک گراف یا یک مجموعه مستقل حداقل $\sqrt{n}$ راسی دارد و یا یک دور حداقل $\sqrt{n}$ راسی.

پاسخ :

درخت DFS این گراف را در نظر بگیرید، اگر یک یال خارج درخت بود که حداقل $\sqrt{n}-۱$ یال زیر آن بود که یک دور حداقل $\sqrt{n}$ یالی داریم. در غیر این صورت هر راس حداکثر به $\sqrt{n}-۱$ راس بالایش وصل است پس می‌توانیم برای حداقل $\sqrt{n}$ مرحله یک برگ و تمام رئوس متصل به آن را حذف کنیم و این برگ‌های حذف شده مجموعه مستقل ما خواهند بود.

سؤال ۸.

نشان دهید هر درخت دست‌کم Δ برگ دارد.

پاسخ :

اگر $\Delta=۱$ باشد که همان راس دلتا برگ است. در غیر این صورت درخت را از راس دلتا ریشه‌دار می‌کنیم، هر کدام از بچه‌های این راس در زیردرخت خود یک برگ دارند پس حکم ثابت شد.

سؤال ۹.

اگر T و T' دو درخت فراگیر از G باشند و یال e در T باشد و در درخت T' نباشد ثابت کنید یال $e' \in T'$ وجود دارد به طوری که

$T - e + e'$ نیز درختی فراگیر است.

پاسخ :

اگر یال e در T' باشد که سوال بدیهتا حل می‌شود. اگر یال e را به T' اضافه کنیم در آن دقیقا یک دور مانند C تشکیل می‌شود. حال با حذف e از T درخت به دو مولفه تقسیم می‌شود، چون C یک دور است که دو سر e در آن حضور دارند پس دو مسیر از دو سر e به ما می‌دهد. یکی از مسیر ها همان یال e محذوف است و یکی از یال‌های مسیر دیگر همان e' خواهد بود.