

# ریاضیات گسسته

## پاسخنامه تمرین پیشرفته سوم - منطق

محمد عرفان دانایی

### سؤال ۱.

فرض کنید گزاره  $f$  تابعی از گزاره‌های  $a_1, a_2, \dots, a_n$  باشد. عدد باینری  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1}$  را در نظر بگیرید. اگر جایگاه اولین ۱ از سمت چپ عدد باینری، فرد باشد، ارزش  $f$  برابر ۱ است و اگر زوج باشد ارزش  $f$  برابر ۰ است.

به طور مثال اگر  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} = 0000000101$  باشد چون اولین بیت ۱ از سمت چپ، برابر  $a_3$  است و ۳ عددی فرد است؛ پس در این حالت، ارزش  $f$  برابر یک خواهد بود و در حالت  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} = 00000001011$  نیز چون اولین بیت ۱ از سمت چپ، برابر  $a_4$  است و ۴ عددی زوج است؛ در این حالت ارزش  $f$  برابر صفر خواهد بود. در حالت  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} = 0000000000$  نیز ارزش  $f$  را ۰ در نظر می‌گیریم.

گزاره  $f$  را به شکل ریاضی برحسب  $a_1, \dots, a_n$  بنویسید.

### پاسخ:

روش اول:

روی  $n$  حالت بندی می‌کنیم. اگر  $n$  زوج باشد:

گزاره زمانی درست است که:

اولین یک از سمت چپ  $a_1$  باشد. که معادل  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge \sim a_n$  است.

یا

اولین یک از سمت چپ  $a_3$  باشد. که معادل  $a_3 \wedge a_4 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \wedge \sim a_n$  است.

یا ...

اولین یک از سمت چپ  $a_{n-1}$  باشد. که معادل  $a_n \wedge a_{n-1}$  است.

پس:

$$f_n = (\sim a_n \wedge \sim a_{n-1} \wedge \dots \wedge \sim a_2 \wedge a_1) \vee (\sim a_n \wedge \sim a_{n-1} \wedge \dots \wedge \sim a_4 \wedge a_3) \vee \dots \vee (\sim a_n \wedge a_{n-1})$$

اگر  $n$  فرد باشد:

مشابه حالت قبل داریم:

$$f_n = (\sim a_n \wedge \sim a_{n-1} \wedge \dots \wedge \sim a_2 \wedge a_1) \vee (\sim a_n \wedge \sim a_{n-1} \wedge \dots \wedge \sim a_4 \wedge a_3) \vee \dots \vee (a_n)$$

می‌توان در هر دو حالت  $f$  را به صورت زیر نوشت:

$$f_n = \bigvee_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} \left( a_{2i-1} \wedge \bigwedge_{j=2i}^n \sim a_j \right)$$

روش دوم:

روی  $n$  حالت بندی می‌کنیم. اگر  $n$  زوج باشد:

در صورتی که  $a_n$  یک باشد، چون  $n$  زوج است، ارزش گزاره ۰ می شود. اگر هم  $a_n$  صفر باشد ارزش  $f_n$  برابر با  $f_{n-1}$  خواهد شد. زیرا ارزش گزاره به اولین یک از چپ بستگی دارد و چون  $a_n$  صفر است، اولین ۱ از سمت چپ در  $a_2 a_1 \dots a_{n-1}$  همان اولین ۱ از سمت چپ در  $a_2 a_1 \dots a_{n-1}$  خواهد بود. پس:

$$f_n = (a_n \wedge 0) \vee (\sim a_n \wedge f_{n-1}) = \sim a_n \wedge f_{n-1}$$

اگر  $n$  فرد باشد:

مشابه قبل اگر  $a_n$  یک باشد، چون  $n$  فرد است، ارزش گزاره ۱ می شود. اگر هم  $a_n$  صفر باشد ارزش  $f_n$  برابر با  $f_{n-1}$  خواهد شد. پس:

$$f_n = (a_n \wedge 1) \vee (\sim a_n \wedge f_{n-1}) = a_n \vee (\sim a_n \wedge f_{n-1})$$

همچنین  $f_1$  هم به وضوح برابر  $a_1$  است. پس در نهایت داریم:

$$f_n = \begin{cases} \sim a_n \wedge f_{n-1} & n \text{ فرد باشد} \\ a_n \vee (\sim a_n \wedge f_{n-1}) & n \text{ زوج باشد} \\ f_1 = a_1 & \end{cases}$$

## سؤال ۲.

عملگر  $*$  را به شکلی تعریف می کنیم که ارزش عبارت  $p * (q, r)$  زمانی که  $p$  صفر است برابر ارزش  $q$  و زمانی که  $p$  یک است برابر ارزش  $r$  خواهد بود.

الف) عبارت زیر را به ساده ترین فرم DNF بنویسید:

$$(p * (q, q * (p, s))) * (s, q)$$

ب) عبارت زیر را فقط به کمک عملگر  $*$  با حداکثر ۲ بار استفاده از آن بازنویسی کنید:

$$pr + s\bar{q}\bar{p} + sp\bar{r}$$

پاسخ:

ابتدا توجه کنید که:  $p * (q, r) \equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

از طرفی نقیض  $p * (q, r)$  زمانی که  $p$  صفر است ارزش  $q$  و زمانی که  $p$  یک است ارزش  $r$  خواهد داشت. پس:

$$\sim [p * (q, r)] \equiv p * (\sim q, \sim r)$$

$$\Rightarrow \sim [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$$

می توان آن را به صورت جبری نیز اثبات کرد:

$$\begin{aligned}
 & \sim [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \\
 & \equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \\
 & \equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r) \\
 & \equiv F \vee (p \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim r) \\
 & \equiv (p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge T) \\
 & \equiv (p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge (p \vee \sim p)) \\
 & \equiv (p \wedge \sim r \wedge T) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge T) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim r \wedge \sim p) \\
 & \equiv (p \wedge \sim r \wedge T) \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge T) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \\
 & \equiv [(p \wedge \sim r) \wedge (T \vee \sim q)] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \wedge (T \vee \sim r)] \\
 & \equiv [(p \wedge \sim r) \wedge T] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \wedge T] \\
 & \equiv (p \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
 & \equiv p * (\sim q, \sim r)
 \end{aligned}$$

(الف)

$$\begin{aligned}
 & (p * (q, q * (p, s))) * (s, q) \\
 & \equiv (\sim [p * (q, q * (p, s))] \wedge s) \vee ([p * (q, q * (p, s))] \wedge q) \\
 & \equiv ([(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim [q * (p, s)])] \wedge s) \vee ([(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q * (p, s))] \wedge q) \\
 & \equiv A \vee B \\
 & \bullet A \equiv ([(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim [q * (p, s)])] \wedge s) \\
 & \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge [(\sim q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim s)])] \wedge s \\
 & \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee ((\sim q \wedge \sim p \wedge p) \vee (q \wedge \sim s \wedge p))] \wedge s \\
 & \equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee F \vee (q \wedge \sim s \wedge p)] \wedge s \\
 & \equiv (\sim p \wedge \sim q \wedge s) \vee (q \wedge \sim s \wedge p \wedge s) \\
 & \equiv (\sim p \wedge \sim q \wedge s) \vee F \\
 & \equiv (\sim p \wedge \sim q \wedge s) \\
 & \bullet B \equiv ([(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q * (p, s))] \wedge q) \\
 & \equiv [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge [(\sim q \wedge p) \vee (q \wedge s)])] \wedge q \\
 & \equiv [(\sim p \wedge q) \vee ((\sim q \wedge p \wedge p) \vee (q \wedge s \wedge p))] \wedge q \\
 & \equiv [(\sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge p) \vee (q \wedge s \wedge p)] \wedge q \\
 & \equiv (\sim p \wedge q \wedge q) \vee (\sim q \wedge p \wedge q) \vee (q \wedge s \wedge p \wedge q) \\
 & \equiv (\sim p \wedge q) \vee F \vee (q \wedge s \wedge p) \\
 & \equiv (\sim p \wedge q) \vee (q \wedge s \wedge p) \\
 & \Rightarrow Answer = A \vee B \\
 & \equiv (\sim p \wedge \sim q \wedge s) \vee (\sim p \wedge q) \vee (q \wedge s \wedge p) \\
 & \equiv \bar{p}\bar{q}s + \bar{p}q + pqs
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 & pr + s\bar{q}\bar{p} + sp\bar{r} \\
 & \equiv (p \wedge r) \vee (s \wedge \sim q \wedge \sim p) \vee (s \wedge p \wedge \sim r) \\
 & \equiv (p \wedge r) \vee (s \wedge [(\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r)]) \\
 & \bullet (\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim r) \equiv p * (\sim q, \sim r) \equiv \sim p * (q, r) \\
 & \bullet p * (q, r) \equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
 & \bullet (p \wedge r) \equiv p \wedge ((\sim p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \equiv p \wedge (p * (q, r)) \\
 & \Rightarrow pr + s\bar{q}\bar{p} + sp\bar{r} \\
 & \equiv (p \wedge r) \vee (s \wedge (\sim p * (q, r))) \\
 & \equiv (p \wedge (p * (q, r))) \vee (s \wedge (\sim p * (q, r))) \\
 & \equiv (p * (q, r)) * (s, p)
 \end{aligned}$$