

# ریاضیات گسسته

## پاسخنامه آزمون کوتاه نهم - نظریه اعداد

هستی ابوالحسنی

### سؤال ۱.

تمام  $a, b \in \mathbb{N}$  را بیابید که

$$\{\gcd(a, b) = d \text{ and } a + b \mid ab\}$$

پاسخ:

$$a = da'$$

$$b = db'$$

$$a + b \mid ab \Rightarrow d(a' + b') \mid d^2 a' b'$$

$$\begin{aligned} a' + b' \mid da' b' \\ \gcd(a' + b', da' b') = 1 \Rightarrow d = (a' + b')k \end{aligned}$$

به ازای تمام  $a', b', k \in \mathbb{N}$  می توان  $a, b$  ساخت که در دو رابطه صدق خواهد کرد

$$a = a'(a' + b')k$$

$$b = b'(a' + b')k$$

درست بودن ادعا فوق را با جایگذاری در رابطه بررسی می کنیم

$$a + b = a'(a' + b')k + b'(a' + b')k = (a' + b')^2 k$$

$$ab = a' b' (a' + b')^2 k^2$$

$$(a' + b')^2 k \mid a' b' (a' + b')^2 k^2$$

$$1 \mid a' b' k$$

این رابطه همواره برقرار است.

### سؤال ۲.

میدانیم:

$$\gcd(a, b) = 1 \text{ and } a, b \in \mathbb{N}$$

ثابت کنید:

$$\gcd(7a + 3b, 2a - b) = 1 \text{ or } 1$$

پاسخ:

$$\begin{array}{lcl} d \mid 7a + 3b & & d \mid 7a + 3b \Rightarrow d \mid 13a \\ d \mid 2a - b & \Rightarrow & d \mid 6a - 3b \\ & & d \mid 14a + 6b \Rightarrow d \mid 13b \\ & & d \mid -14a - 7b \end{array}$$

$$\gcd(13a, 13b) = 13$$

$$d \mid 13$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که  $d$  برابر است با ۱ یا ۱۳ .