

ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین مقدماتی دوم - شمارش پیشرفته

فاطمه بلوک آذری

سؤال ۱.

به کمک دوگانه شماری ثابت کنید که:

$$\sum_{r=m}^n \binom{n}{r} \binom{r}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

پاسخ:

n نفر داریم. می‌خواهیم به هر نفر یکی از سه رنگ آبی، سبز و قرمز را نسبت دهیم به طوری که دقیقاً m نفر رنگ آبی داشته باشند. سمت راست: ابتدا m نفری که رنگ آبی می‌گیرند را به $\binom{n}{m}$ حالت انتخاب کرده و سپس به هر یک از $n - m$ نفر دیگر، یکی از دو رنگ قرمز و سبز را نسبت می‌دهیم. که یعنی در کل $2^{n-m} \binom{n}{m}$ حالت داریم. سمت چپ: ابتدا به $\binom{n}{r}$ حالت، افرادی که یکی از دو رنگ قرمز یا آبی را می‌گیرند انتخاب می‌کنیم. بقیه افراد رنگ سبز می‌گیرند. حال از بین این r نفر، m نفر را انتخاب می‌کنیم تا رنگ آبی بگیرند. این کار به $\binom{r}{m}$ طریق انجام می‌شود. به ازای مقادیر مختلف r باید این مقدار را حساب کنیم. پس در کل پاسخ برابر $\sum_{r=m}^n \binom{n}{r} \binom{r}{m}$ می‌شود. یک مسئله را به دو صورت حل کردیم بنابراین این دو مقدار با هم برابر اند و حکم مسئله ثابت می‌شود.

سؤال ۲.

اگر از بین $\{1, 2, \dots, m\}$ ($m \leq n^2$)، $n + 1$ عدد صحیح انتخاب شوند، ثابت کنید حداقل دو عدد a, b در بین آن‌ها وجود دارند به طوری که

$$0 < \sqrt{a} - \sqrt{b} < 1$$

پاسخ:

اعداد را مانند زیر به تعدادی دسته تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\} \\ &\{4, 5, 6, 7, 8\} \\ &\{9, 10, \dots, 15\} \\ &\{16, 17, \dots, 24\} \\ &\{(n-1)^2, (n-1)^2 + 1, \dots, n^2 - 1\} \\ &\{n^2\} \end{aligned}$$

شرط خواسته شده، بین دو عدد دلخواه از یک دسته یکسان، برقرار است. تعداد این دسته‌ها، برابر $n + 1$ است. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری دسته‌ای وجود دارد که حداقل دو عدد از n عدد انتخاب شده، عضو این دسته باشند. این دو عدد شرط خواسته شده را دارند.