ریاضیات گسسته

تمرین پیشرفته هفتم - درخت

محمدمهدی یاری

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۳/۸

سؤال ۱.

فرض کنید T یک درخت باشد. ثابت کنید که T راسی مانند v دارد به‌طوری که برای هر یال $e \in E(T)$، مؤلفه‌ای از $T-e$ که شامل v است، حداقل $\lceil n(T)/۲\rceil$ رأس دارد.

همچنین ثابت کنید که یا چنین راسی یکتاست، یا دقیقاً دو رأس مجاور با این خاصیت وجود دارند.

پاسخ :

برای هر یال $xy \in E(T)$، آن را از x به y جهت‌دهی می‌کنیم اگر در $T-xy$ مؤلفه‌ای که y در آن قرار دارد حداقل $\lceil \frac{n(T)}{۲} \rceil$ راس داشته باشد (ممکن است یالی وجود داشته باشد که جهت آن به هر دو سمت قابل تعیین باشد). گراف جهت‌دار حاصل را با $D(T)$ نشان می‌دهیم.

اگر $D(T)$ راسی مانند x داشته باشد که درجه خروجی آن حداقل ۲ باشد، آنگاه درخت $T-x$ دو زیر درخت غیرهمپوشان خواهد داشت که هر کدام حداقل $\lceil \frac{n(T)}{۲} \rceil$ راس دارند، که این غیرممکن است. حالا، از آنجا که T شامل دوری نیست، $D(T)$ نیز شامل چرخه‌ای جهت‌دار نخواهد بود. بنابراین، $D(T)$ راسی با درجه خروجی صفر دارد. از آنجا که در $D(T)$ هیچ راسی با درجه خروجی حداقل دو وجود ندارد، هر مسیری در T که نقطه انتهایی آن v باشد، یک مسیر جهت‌دار به v در $D(T)$ است. بنابراین، هر یال xy به سمت v جهت‌دهی می‌شود، به این معنی که v در مؤلفه‌ای از $T-xy$ با حداقل $\lceil \frac{n(T)}{۲} \rceil$ راس قرار دارد.

در نتیجه، یا یک رأس v v با خاصیت مذکور وجود دارد، یا دقیقاً دو رأس مجاور وجود دارند به گونه‌ای که یال بین آن‌ها قابلیت جهت‌دهی به هر دو سمت را داشته باشد.

سؤال ۲.

درخت **دلقک** درختی با m یال هست که بتوان رأس‌های آن را با اعداد متمایز از مجموعه $\{۰, ۱, \ldots, m\}$ طوری شماره‌گذاری کرد که اختلاف بین شماره‌های دو رأس هر یال، یکتا بوده و دقیقاً تمام اعداد $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ را شامل شود.

اگر T درختی دلقک باشد و m یال داشته باشد ثابت کنید $K_{۲m+۱}$ را میتوان به $۲m+۱$ تا T افراز کرد.

پاسخ :

فرض کنید رئوس گراف $۲m+۱$ راسی را با شماره های $۰, ۱, ۲, \ldots, ۲m$ شماره‌گذاری بکنیم. در این صورت، از آنجا که درخت دلقک $m+۱$ راسی موجود است، میتوان m تا از یال های بین رئوس شماره $۰, ۱, \ldots, m$ را انتخاب کرد، به طوری که درخت دلقک مربوط به رئوس $۰, ۱, \ldots, m$ به وجود بیاید. حال، فرض کنید $۱ \le k \le ۲m$ و رئوس $k, k+۱, \ldots, k+m$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که رئوس، به پیمانه $۲m+۱$ در نظر گرفته شده‌اند. ۴ $m+۳$ $۳m+$ ...

حال، در زیرگراف حاصل از رئوس $k, k+۱, \ldots, k+m$ یال بین رئوس شماره $k+a, k+b$ را به رنگ r در میاوریم، اگر و تنها اگر یال بین رئوس a, b در زیردرخت دلقک حاصل از رئوس $۰, ۱, \ldots, m$ به رنگ r بوده باشد. در این صورت ، به ازای هر $۰ \le k \le ۲m$ یک درخت $m+۱$ راسی داریم که به طور دلقکانه رنگ‌آمیزی شده است. ضمنا توجه کنید که در این رنگ آمیزی، برای هیچ k, l متمایزی، یال های رنگ آمیزی ای که بین $k, k+۱, \ldots, k+m, l, l+۱, \ldots, l+m$ انجام داده‌ایم، اشتراکی ندارند. پس در رنگ‌آمیزی ای که

انجام داده‌ایم، سرجمع $2m+1$ بار m یال متمایز را رنگ کرده‌ایم. در نتیجه تمام یال ها رنگ شده اند و هر یال هم در حداقل یک زیردرخت دلقک آمده. پس، گراف را به درخت های دلقک افراز کرده‌ایم و حکم مساله برقرار است.