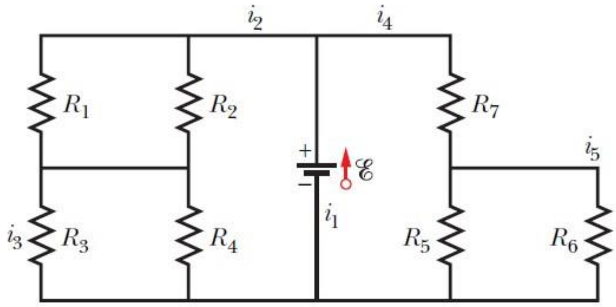
به نام خدا

پاسخ تکلیف سری ۵ فیزیک ۲

جریان الکتریکی

نیمسال دوم ۱۴۰۳

۱- الف) در مدار زیر $\varepsilon = 30V$ و $R_1 = R_2 = 14\Omega$ و $R_3 = R_4 = R_5 = 6\Omega$ و $R_6 = 2\Omega$ و $R_7 = 1.5\Omega$ مقادیر i_1 تا i_5 را بیابید.



پاسخ:

$$R_1||R_2 = \frac{14 \times 14}{14 + 14} = 7$$

$$R_3||R_4 = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3$$

$$R_5||R_6 = \frac{6 \times 2}{6 + 2} = 1.5$$

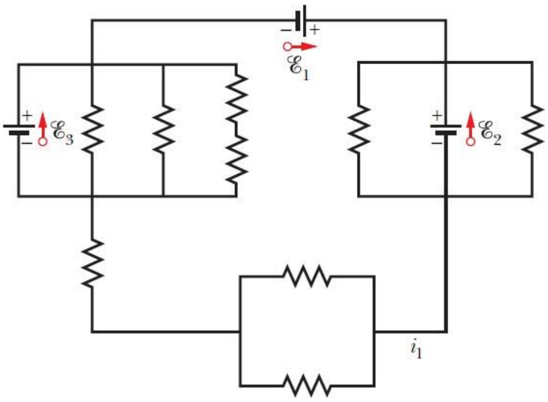
$$R_t = (7 + 3)||(1.5 + 1.5) = \frac{30}{13} \Rightarrow i_1 = \frac{30}{\frac{30}{13}} = 13A$$

$$\frac{i_2}{i_4} = \frac{3}{10} \quad \text{و} \quad i_2 + i_4 = i_1 = 13A \Rightarrow i_4 = 10A \quad \text{و} \quad i_2 = 3A$$

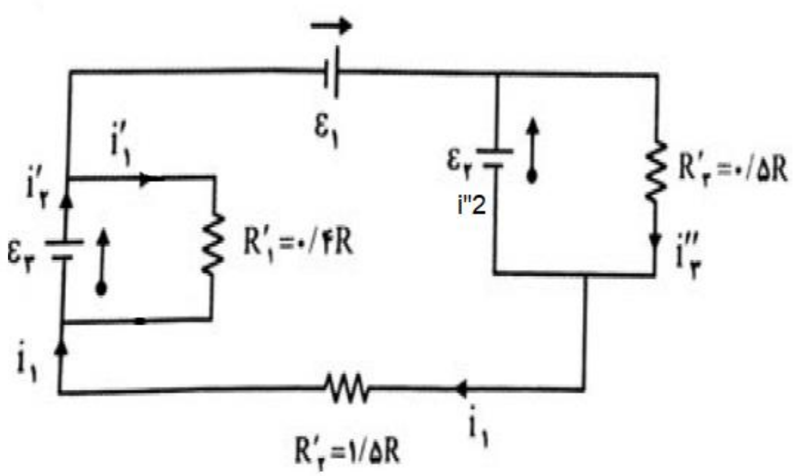
$$i_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} i_2 = \frac{6}{12} \times 3 = 1.5A$$

$$i_5 = \frac{R_5}{R_5 + R_6} i_4 = \frac{6}{8} \times 10 = 7.5A$$

ب) در مدار شکل زیر $\varepsilon_1 = 20V$، $\varepsilon_2 = 10V$ و $\varepsilon_3 = 5V$ و مقاومت ها همه برابر 2Ω هستند. اندازه و جهت جریان i_1 را بیابید و مشخص کنید که باطری های ۱ تا ۳ انرژی تولید می‌کنند یا آن را مصرف می‌کنند.



پاسخ:



$$R'_1 = 0/4R = 0/8\Omega$$
$$R'_2 = 1/5R = 3\Omega$$
$$R'_3 = 0/5R = 1\Omega$$

برای محاسبه جریان i_1 با استفاده از قاعده حلقه داریم:

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_1 R'_2 = 0 \Rightarrow 5 + 20 - 10 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 5A$$

با توجه به اینکه علامت i_1 مثبت به دست آمد پس جهت فرض شده(سمت چپ) درست است.

برای فهمیدن تولید کننده یا مصرف کننده بودن باتری ها باید جهت جریان گذرنده از هر یک از آن ها را مشخص کنیم:

-جهت جریان گذرنده از باتری۱ از چپ به راست است . یعنی از قطب مثبت باتری خارج میشود و در نتیجه باتری ۱ انرژی تولید میکند .

-برای باتری ۲ از قانون حلقه و قانون گره داریم:

$$\varepsilon_2 - i''_3 R'_3 = 0 \rightarrow 10 = i''_3 \rightarrow i''_3 = 10A$$
$$i_1 + i''_2 = i''_3 \rightarrow 10 - 5 = i''_2 = 5A$$

جهت جریان گذرنده از باتری ۲ رو به بالا است و در نتیجه این باتری انرژی تولید میکند.

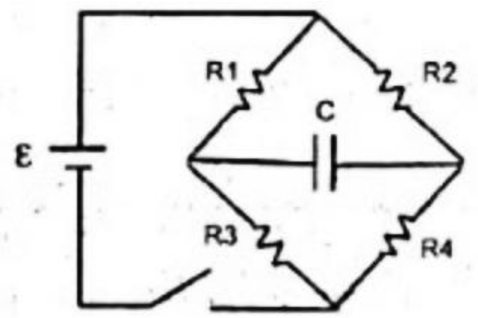
-برای باتری ۳ از قانون حلقه و قانون گره داریم:

$$\varepsilon_3 - i'_1 R'_1 = 0 \rightarrow 5 = 0.8 i'_1 \rightarrow i'_1 = 6.25A$$
$$i_1 + i'_1 = i'_2 \rightarrow 5 + 6.25 = i'_2 = 11.25A$$

جهت جریان گذرنده از باتری ۳ رو به بالا است و در نتیجه این باتری هم انرژی تولید میکند .

۲- مدار الکتریکی روبرو را در نظر بگیرید:

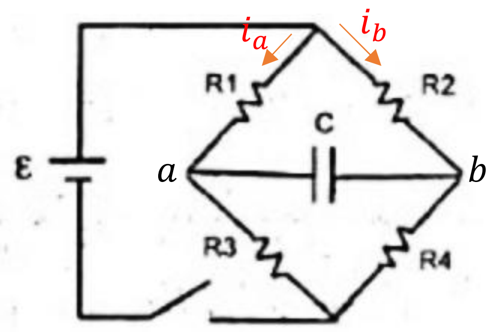
$$R_1 = 1\Omega\,, R_2 = 8\Omega\,, R_3 = 4\Omega\,, R_4 = 2\Omega\,, \varepsilon = 10v\,, C = 1\mu F$$



الف) اگر مدار برای مدت طولانی وصل بوده باشد، اختلاف پتانسیل دو سر خازن چقدر است؟

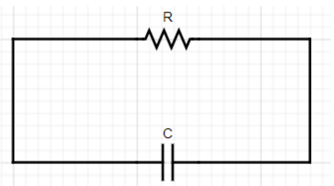
ب) اگر کلید قطع شود، چه مدت طول می کشد تا ولتاژ دو سر خازن به $\frac{1}{e^2}$ مقدارش در هنگام قطع کلید برسد؟

پاسخ: الف)



$$t \rightarrow \infty : \text{ شاخه } ab \text{ قطع} \quad \Rightarrow \quad i_a = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} = \frac{10}{5} = 2\ A$$
$$i_b = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

$$\Rightarrow |V_{ab}| = |-R_1 i_a + R_2 i_b| = 6\ V$$



ب) بعد از قطع کلید، منبع تغذیه از مدار جدا می شود. مقاومت معادل را برای مدار باقی مانده حساب می کنیم:

مقاومت های R_1, R_2 به صورت سری به هم وصل شده اند.

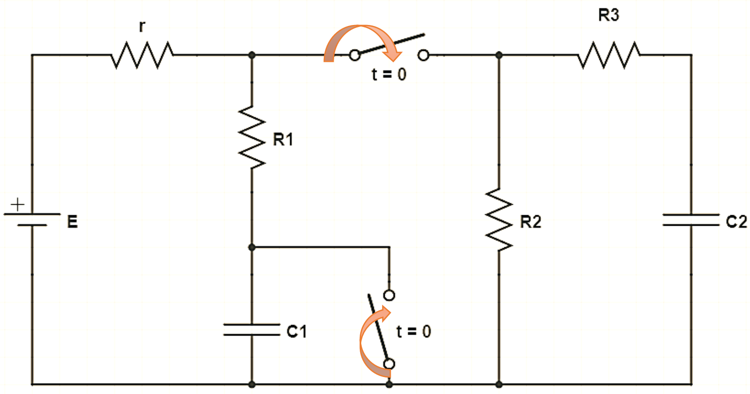
مقاومت های R_3, R_4 به صورت سری به هم وصل شده اند.

مقاومت معادل آن دو یعنی R_{12}, R_{34} به صورت موازی به هم وصل شده اند.

$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{18}{5}\Omega$$

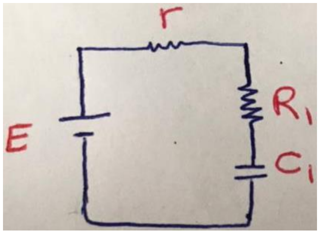
$$q = q_0\, e^{-\frac{t}{RC}} , q = \frac{1}{e^2} q_0 \Rightarrow t = 2RC = 2 \times \frac{18}{5} \times 10^{-6} = 7.2 \times 10^{-6}\ sec$$

۳- در مدار روبرو در لحظه $t = 0$ کلیدها بسته می شوند. مقادیر بار خازن ها را بلافاصله بعد از بسته شدن کلیدها $t = 0^+$ و همچنین برای مدت زمان طولانی $t \to \infty$ بدست آورید.



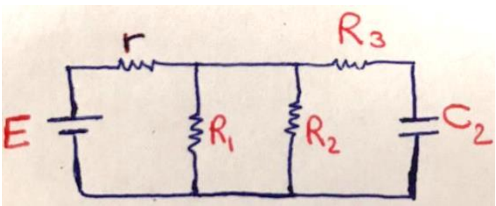
پاسخ:

در زمان $t < 0$: پیش از بسته شدن کلیدها، اتصالی به سمت راست مدار وجود ندارد و ولتاژ دو سر خازن برابر با E است؛ پس خواهیم داشت:



$$V_{C1} = E\ , q(t < 0) = q(t = 0^-) = C_1 E\ , \tau = R_{eq} C_1 = (R_1 + r) C_1$$

در زمان $t > 0$: پس از بسته شدن کلید، بار ذخیره شده بر روی خازن C_1 به صورت آنی تخلیه شده و خازن اتصال کوتاه می شود:



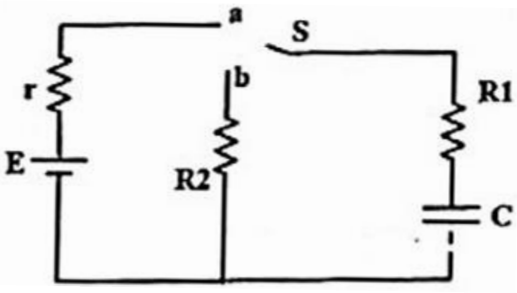
$$t = 0^+ \ \rightarrow \begin{cases} \downarrow \\ q_{C1} = V_{C1} \times C_1 = 0 \\ q_{C2} = V_{C2} \times C_2 = q_{C1} = V_{C2}(t = 0^+) \times C_2 = q_{C1} = V_{C2}(t = 0^-) \times C_2 = 0 \end{cases}$$

در زمان $t \to \infty$: پس از گذشت مدت زمان طولانی، خازن C_2 اشباع شده و از آن جریانی عبور نمی کنید. در نتیجه ولتاژ دو سر خازن برابر با ولتاژ دو سر مدار معادل مقاومت های موازی R_1 و R_2 می باشد و بار روی این خازن برابر با حاصلضرب ولتاژ مذکور در ظرفیت خازن خواهد بود:

$$q_{C2} = V_{C2}(\infty)C_2 \,, R_{eq} = r + (R_1 \parallel R_2) = r + \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{C2} = \frac{R_1 \parallel R_2}{r + (R_1 \parallel R_2)} * E = \frac{R_1\, R_2}{r(R_1 + R_2) + R_1\, R_2} * E$$

$$q_{C2} = V_{C2}(\infty)C_2 = \frac{R_1\, R_2}{r(R_1 + R_2) + R_1\, R_2} * EC_2$$



۴- مطابق شکل، مداری از یک باتری با ولتاژ E و مقاومت داخلی r ، یک خازن با ظرفیت C و دو مقاومت با مقادیر R_1 و R_2 و کلید دو طرفه S، تشکیل شده است. در زمان $t = ۰$ کلید را در حالت a قرار داده و به اندازه یک ثابت زمانی (τ) صبر میکنیم. سپس کلید را در حالت b قرار میدهیم. پس از قرار گرفتن کلید در وضعیت b:

الف) چه مدت طول میکشد تا ولتاژ دو سر خازن به مقدار $\frac{E}{3}$ برسد؟

ب) چه مدت طول میکشد تا انرژی ذخیره شده در خازن به نصف مقدار نهایی آن در حالت a برسد؟

راهنمایی: $e^{-1} \approx \frac{1}{3}$

پاسخ:

کلید در حالت a :

$$V_a = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T_a}}\right) \,, T_a = (r + R_1)C$$

بعد از یک ثابت زمانی $t = T_a$

$$V_a = E(1 - e^{-1}) = \frac{2}{3}E$$

کلید در حالت b :

$$V_b = V_a e^{-\frac{t}{T_b}}, T_b = (R_2 + R_1)C \rightarrow V_b = \frac{2}{3} E e^{-\frac{t}{T_b}}$$

الف)

$$V_b = \frac{E}{3} \rightarrow \ Ans: \quad t = T_b \ln 2 = (R_2 + R_1)C \ln 2$$

ب)

$$U_b = \frac{1}{2} U_a \rightarrow \frac{1}{2} C V_b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} C V_a\right) \rightarrow V_b^2 = \left(\frac{2}{3}E\right)^2 e^{-\frac{2t}{T_b}} = \frac{1}{2} V_a^2$$

اگر مقدار نهایی در حالت a با فرض اینکه خازن فقط به اندازه یک ثابت زمانی، شارژ شده در نظر بگیریم، داریم:

$$V_a = \frac{2}{3} E \rightarrow \left(\frac{2}{3}E\right)^2 e^{-\frac{2t}{T_b}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}E\right)^2 \rightarrow Ans: \quad t = \frac{T_b}{2} \ln 2 = \frac{(R_2 + R_1)}{2} C \ln 2$$