

# ریاضیات گسسته

## تمرین پیشرفته پنجم - گراف مقدماتی

فاطمه بلوک آذری

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۰۲/۱۸ پنجشنبه ساعت ۲۳:۵۹

### سؤال ۱.

در تورنمنت  $T$ ، به ازای هر ۳ راس مانند  $u, v$  و  $w$ ، اگر  $(u, v), (v, w) \in E(T)$ ، آنگاه  $(u, w) \in E(T)$ . ثابت کنید درجه خروجی هیچ دو راسی برابر نیست.

پاسخ:

به ازای هر دو راس  $u$  و  $v$  ثابت می‌کنیم درجه خروجی آنها برابر نیست. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم  $(u, v) \in E(T)$ . نشان می‌دهیم درجه خروجی  $u$  بیشتر از درجه خروجی  $v$  است. اگر  $S$  مجموعه راس‌هایی باشد که  $v$  به آنها یال خروجی دارد، با توجه به فرض مسئله،  $u$  نیز به همه آنها یال خروجی دارد. از طرفی  $u$  به  $v$  هم یال خروجی دارد. پس درجه خروجی  $u$  از درجه خروجی  $v$  بیشتر است که با فرض خلف در تناقض است و حکم مسئله ثابت می‌شود.

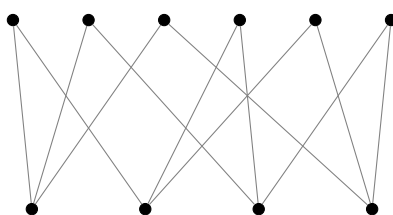
### سؤال ۲.

در یک مدرسه  $b$  معلم و  $c$  دانش‌آموز حضور دارند. هر معلم دقیقاً با  $k$  دانش‌آموز کلاس دارد و هر دو دانش‌آموز دقیقاً  $h$  معلم مشترک دارند. نشان دهید:  $bk(k-1) = hc(c-1)$

پاسخ:

یک گراف دو بخشی می‌کشیم که هر راس بخش اول نشان دهنده یک معلم و هر راس بخش دوم نشان دهنده یک دانش‌آموز است. همچنین هر یال نشان دهنده این است که این معلم، معلم این دانش‌آموز است.

( $b = ۶$ ) معلم‌ها



( $c = ۴$ ) دانش‌آموزها

$$bk(k-1) = hc(c-1)$$

می‌خواهیم تعداد زیرگراف‌های به فرم زیر را در این گراف بشماریم.



از یک طرف اگر ابتدا راس بالا (معلم) را ثابت کنیم و تعداد حالت‌های مختلف برای دو راس پایین را بشماریم، پاسخ برابر  $b \times \binom{k}{2}$  است. از طرف دیگر اگر ابتدا دو دانش آموز را انتخاب کنیم و سپس معلم را انتخاب کنیم، پاسخ برابر  $h \times \binom{c}{2}$  خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$b \times \binom{k}{2} = h \times \binom{c}{2}$$

بنابراین:

$$bk(k-1) = hc(c-1)$$