ریاضیات گسسته

پاسخ مجموعه سوالات کلاسی اول - شمارش مقدماتی

مینا شیرازی

سؤال ۱.

تعداد رشته‌های n تایی که از حروف $\{a, b, c, d\}$ تشکیل شده باشند و در آن‌ها تعداد aها با تعداد bها برابر باشد، چند تا است؟

پاسخ :

بین تعداد رشته‌های n تایی با حروف $\{a, b, c, d\}$ که در آن‌ها تعداد aها با تعداد bها برابر است و تعداد دنباله‌های دودویی به طول $۲n$ که در آن‌ها تعداد ۱ها با تعداد ۰ها برابر است، یک نگاشت دوسویی برقرار می‌کنیم.

این نگاشت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \to ۱۱, \quad b \to ۰۰, \quad c \to ۱۰, \quad d \to ۰۱$$

یعنی به ازای هر a در دنباله، ۱۱ را جایگزین می‌کنیم، به ازای هر b مقدار ۰۰، به ازای هر c مقدار ۱۰ و به ازای هر d مقدار ۰۱ را جایگزین می‌کنیم.

مثال برای $n = ۲$ در شکل زیر آمده است:

ab	1100
ba	0011
cc	1010
dd	0101
dc	0110
cd	1001

واضح است که هر دنباله‌ی به دست آمده دارای تعداد مساوی ۰ و ۱ است. چرا که تعداد aها و bها با هم برابر است، پس تعداد ۰۰ها با تعداد ۱۱ها برابر خواهد بود. همچنین تعداد c و dها مهم نیست، چرا که هر c یا d یک ۰ و یک ۱ را به دنباله اضافه می‌کند، بنابراین توازن برقرار خواهد ماند.

برگشت‌پذیری نگاشت:

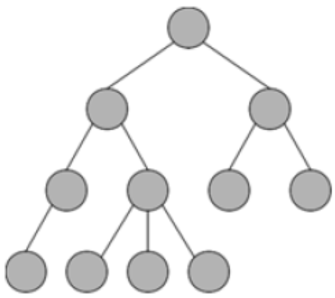
از طرفی، به ازای هر دنباله‌ی دودویی به طول $۲n$ که تعداد ۰ها و ۱ها در آن برابر است، دقیقاً یک رشته‌ی منحصر به فرد از $\{a, b, c, d\}$ ساخته می‌شود. برای این کار کافی است که دو رقم دو رقم از ابتدای دنباله‌ی دودویی خوانده شوند: - اگر دو رقم ۰۰ باشند، معادل b است. - اگر دو رقم ۱۱ باشند، معادل a است. - اگر دو رقم ۰۱ باشند، معادل d است. - اگر دو رقم ۱۰ باشند، معادل c است.

نتیجه‌گیری: بنابراین تعداد این رشته‌ها برابر تعداد دنباله‌های دودویی $۲n$ تایی است که در آن‌ها تعداد ۰ها و ۱ها برابر است. این تعداد برابر است با:

$$\binom{۲n}{n}$$

سؤال ۲.

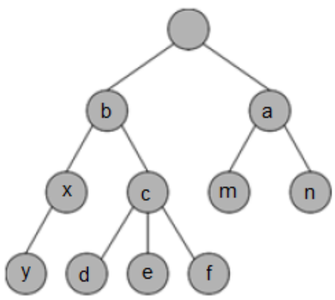
حاج مجید یک خوشه‌ی انگور دارد. او می‌خواهد دانه‌های انگور را بخورد به طوری که هر دانه دیرتر از دانه‌های زیرینش خورده شود!
از یاسمن کمک گرفته است تا بفهمد به چند طریق می‌تواند خوشه‌ی انگور خود را بخورد.
از آنجایی که یاسمن تنبلی‌اش می‌آمد،از شما می‌خواهد تا حساب کنید حاج مجید به چند طریق می‌تواند انگورش را بخورد؟



شکل ۱: تصویر خوشه‌ی انگور حاج مجید

پاسخ :

این سؤال را می‌توان به این صورت تغییر داد که: به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۱۱ را روی دانه‌ها چید، به‌طوری که عدد هر فرزند از عدد پدرش کمتر باشد؟
در این روش، هر عدد نشان‌دهنده‌ی ترتیب خورده شدن دانه‌ی انگور است. یعنی ابتدا دانه‌ی شماره ۱ خورده می‌شود، سپس دانه‌ی شماره ۲ و به همین ترتیب ادامه دارد. بنابراین، هیچ دانه‌ای خورده نمی‌شود مگر اینکه تمام فرزندان آن قبلاً خورده شده باشند.
می‌دانیم که عدد ۱۱ همیشه در ریشه‌ی درخت قرار دارد.



ابتدا ۳ عدد از ۱۰ عدد باقی‌مانده را انتخاب کرده و در خانه‌های a، m و n قرار می‌دهیم:

$$\binom{۱۰}{۳}$$

از آنجایی که عدد بیشینه بین این سه عدد همیشه در a قرار دارد، دو عدد باقی‌مانده در دو حالت ممکن چیده می‌شوند. بنابراین:

$$\binom{۱۰}{۳} \times ۲!$$

چیدمان در سمت چپ:
عدد بیشینه از میان ۷ عدد باقی‌مانده در خانه‌ی b قرار می‌گیرد.
سپس ۴ عدد از ۶ عدد باقی‌مانده را برای قرارگیری در خانه‌های c, d, e, f انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۴}$$

بیشینه‌ی این ۴ عدد در خانه‌ی c قرار گرفته و ۳ عدد باقی‌مانده در d, e, f به $3!$ حالت چیده می‌شوند:

$$\binom{6}{4} \times 3!$$

دو عدد باقیمانده نیز به یک صورت در خانه‌های x و y قرار می‌گیرند.

نتیجه‌گیری: بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

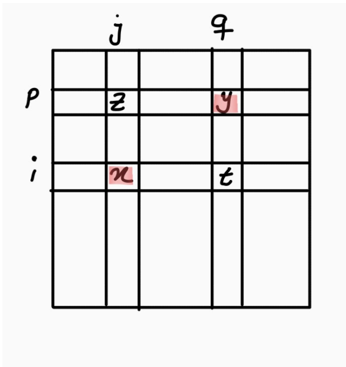
$$\binom{10}{3} \times 2! \times \binom{6}{4} \times 3! = 21600$$

سؤال ۳.

تعداد جدول‌های $n \times n$ از اعداد ۱ تا $n^۲$ را پیدا کنید که دارای حداقل یک عدد زینی هستند.
عدد زینی: عددی که در سطر خود بزرگترین و در ستون خود کمترین است.

پاسخ :

اثبات یکتایی عدد زینی در هر جدول
فرض کنیم که دو عدد زینی در جدول وجود دارند: عدد x در سطر i و ستون j و عدد y در سطر p و ستون q. از تعریف عدد زینی داریم:



$$x > t, \quad x < z \quad \Rightarrow \quad t < z$$

و

$$y > z, \quad y < t \quad \Rightarrow \quad z < t$$

که به تناقض می‌رسیم. بنابراین در هر جدول حداکثر یک عدد زینی وجود دارد.

محاسبه تعداد جداول دارای عدد زینی
برای انتخاب موقعیت عدد زینی:

$$n \times n$$

انتخاب اعداد در سطر و ستون عدد زینی (شامل خود عدد زینی):

جایگشت اعداد در سطر و ستون عدد زینی:

$$(n-۱)! \times (n-۱)!$$

جایگشت بقیه اعداد جدول:

$$(n^۲ - ۲n + ۱)!$$

بنابراین تعداد کل جداول برابر است با:

$$n^۲ \times \binom{n^۲}{۲n-۱} \times (n-۱)!^۲ \times (n^۲ - ۲n + ۱)! = \frac{n!^۲ \times n^۲!}{(۲n-۱)!}$$

سؤال ۴.

یک گروه ۵ نفره ازدختران به نام $G1, G2, G3, G4, G5$ و ۱۲ پسر داریم. ۱۷ صندلی در یک ردیف چیده شده اند. دخترها و پسرها می‌توانند با شرایط زیر روی آن‌ها بنشینند. (باید همه‌ی شرایط زیر برقرار باشد)

۱. ترتیب دخترها از چپ به راست به اینگونه باشد: $G1, G2, G3, G4, G5$

۲. بین $G1$ و $G2$ حداقل سه پسر باشند.

۳. بین $G4$ و $G5$ حداقل یک پسر و حداکثر ۴ پسر باشد.

پاسخ :

برای حل این مسئله، تعداد صندلی‌های خالی را که باید با پسرها پر شوند به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

متغیرهای تعریف شده:

- تعداد پسرهایی که قبل از $G1$ می‌نشینند را با x_1 نشان می‌دهیم.
- تعداد پسرهایی که بعد از $G1$ و قبل از $G2$ می‌نشینند را با x_2 نشان می‌دهیم.
- تعداد پسرهایی که بعد از $G2$ و قبل از $G3$ می‌نشینند را با x_3 نشان می‌دهیم.
- تعداد پسرهایی که بعد از $G3$ و قبل از $G4$ می‌نشینند را با x_4 نشان می‌دهیم.
- تعداد پسرهایی که بعد از $G4$ و قبل از $G5$ می‌نشینند را با x_5 نشان می‌دهیم.
- تعداد پسرهایی که بعد از $G5$ می‌نشینند را با x_6 نشان می‌دهیم.

اکنون، قیود مسئله را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$x_2 \geq 3 \quad \text{(بین } G1 \text{ و } G2 \text{ حداقل ۳ پسر باید باشند)}$$
$$1 \leq x_5 \leq 4 \quad \text{(بین } G4 \text{ و } G5 \text{ باید حداقل ۱ و حداکثر ۴ پسر باشند)}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \quad \text{(مجموع پسرها باید برابر ۱۲ باشد)}$$

گام اول: تعداد راه‌های ممکن برای قرار دادن ۵ دختر از میان ۱۷ صندلی، که ۱۲ پسر باقی می‌مانند، به دست می‌آوریم:

$$x_1 + (x_2 - 3) + x_3 + x_4 + (x_5 - 1) + x_6 = 12 - 3 - 1 = 8$$

متغیرهای جدید را تعریف می‌کنیم:

$$y_2 = x_2 - 3 \quad \text{و} \quad y_5 = x_5 - 1$$

اکنون تمام متغیرها غیرمنفی هستند:

$$y_2 \geq 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq y_5 \leq 3$$

معادله جدید به شکل زیر در می‌آید:

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8$$

حال از فرمول تعداد راه‌حل‌های معادله‌ی سیاله استفاده می‌کنیم:

$$\binom{13}{5}$$

گام دوم: باید حالاتی که در آن $y_5 \geq 4$ است، از تعداد کل کم کنیم. در این حالت، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + (y_5 - 4) + x_6 = 8 - 4 = 4$$

متغیر جدید $t_۵ = y_۵ - ۴$ را معرفی می‌کنیم. پس:

$$t_۵ \geq ۰$$

اکنون تمام متغیرها غیرمنفی هستند:

$$x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + t_۵ + x_۶ = ۴$$

حال از فرمول تعداد راه‌حل‌های معادله‌ی سیاله استفاده می‌کنیم:

$$\binom{۹}{۵}$$

بنابراین، تعداد این حالت‌ها را نیز محاسبه و از کل حالات کم می‌کنیم:

$$\left(\binom{۱۳}{۵} - \binom{۹}{۵}\right) \times ۱۲!$$

این جواب نهایی مسئله است.