

ریاضیات گسسته

تمرین مقدماتی اول - شمارش مقدماتی

یاسمن عموجعفری

تاریخ تحویل ۱۴۰۳/۱۱/۳۰

سؤال ۱.

فرض کنید ۱۰ خانه داریم. می‌خواهیم دیوارهای آن‌ها را به طوری درست کنیم که ابتدا یک لایه سیمان، بعد یک لایه رنگ سفید و در آخر روی آن‌ها طرح بزنیم. دقت کنید که ترتیب انجام این عملیات‌ها در هر خانه (و نه به صورت کلی) باید به صورت گفته شده باشد. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ:

خانه k ام را در نظر بگیرید. فرض کنید a_k, b_k, c_k به ترتیب سیمان، رنگ سفید و طرح باشند. چون ۱۰ خانه داریم، پس در کل، $30!$ حالت برای جایگشت همه a_i, b_i, c_i ها داریم. برای هر k ، a_k باید قبل b_k و b_k باید قبل c_k باشد. پس به ازای هر کدام از خانه‌ها، پاسخ باید تقسیم بر $3!$ شود. در نتیجه جواب برابر $\frac{30!}{(3!)^{10}}$ است.

سؤال ۲.

۱۴ جایگاه داریم. یاسمن، فاطمه و زکیه می‌خواهند در این جایگاه‌ها بنشینند، به طوری که یاسمن قبل از فاطمه و فاطمه قبل از زکیه بنشینند. یاسمن از فاطمه و فاطمه از زکیه متنفر هستند. به همین دلیل بین یاسمن و فاطمه حداقل باید ۳ جایگاه و حداکثر ۶ جایگاه فاصله باشد. همچنین بین فاطمه و زکیه باید حداقل ۲ جایگاه فاصله باشد. به چند طریق می‌توان جایگاه این ۳ نفر را مشخص کرد؟

پاسخ:

حل این سوال با استفاده از معادله سیاله است فرص کنید حالت جایگاه‌ها به صورت زیر باشد:

$$\bigcirc yasaman \bigcirc fatemeh \bigcirc zakiye \bigcirc$$

حال تعداد جایگاه‌ها قبل یاسمن را با x_1 و تعداد جایگاه‌ها بین یاسمن و فاطمه را با x_2 ، بین فاطمه و زکیه را با x_3 و تعداد جایگاه‌ها بعد زکیه را با x_4 نشان دهیم. چون این سه نفر هر کدام یک جایگاه دارند در نتیجه:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

حال طبق صورت سوال داریم:

$$x_3 \geq 2 \quad \text{و} \quad 3 \leq x_2 \leq 6$$

حال به حل معادله سیاله می‌پردازیم:

$$x_1 + (x_2 - 3) + (x_3 - 2) + x_4 = 11 - 3 - 2 = 6$$

متغیرهای جدید را تعریف می‌کنیم:

$$y_2 = x_2 - 3 \quad \text{و} \quad y_3 = x_3 - 2$$

اکنون تمام متغیرها غیرمنفی هستند:

$$y_3 \geq 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq y_2 \leq 3$$

معادله جدید به شکل زیر در می آید:

$$x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 6$$

حال از فرمول تعداد راه حل های معادله ی سیاله استفاده می کنیم:

$$\binom{9}{3}$$

باید حالتی که در آن $y_2 \geq 4$ است، از تعداد کل کم کنیم. در این حالت، باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$x_1 + (y_2 - 4) + y_3 + x_4 = 6 - 4 = 2$$

متغیر جدید $t_2 = y_2 - 4$ را معرفی می کنیم. پس:

$$t_2 \geq 0$$

اکنون تمام متغیرها غیر منفی هستند:

$$x_1 + t_2 + y_3 + x_4 = 2$$

حال از فرمول تعداد راه حل های معادله ی سیاله استفاده می کنیم:

$$\binom{5}{3}$$

بنابراین، تعداد این حالت ها را نیز محاسبه و از کل حالات کم می کنیم:

$$\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74$$

این جواب نهایی مسئله است.