ریاضیات گسسته
مجموعه سوالات کلاسی دوم - شمارش پیشرفته

نرگس سیدحائری

سؤال ۱.

با استفاده از دوگانه شماری ثابت کنید که :

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 \binom{n}{r} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

فرض کنید می خواهیم از میان n نفر یک گروه حداقل یک عضوی انتخاب کنیم و برای آنها نیز یک مدیر یک معاون و یک منشی برگزینیم به طوری هر ۳ مسئولیت را می توانیم به یک نفر بدهیم. می توانیم ابتدا اعضای گروه را انتخاب کرده و سپس از میان آنها مدیر و معاون و منشی را برگزینیم. اگر گروه r نفری باشد تعداد راه های انجام این کار برابر با $r^3\binom{n}{r}$ خواهد بود و از آنجا که تعداد اعضای گروه هر مقداری از ۱ تا n را می تواند باشد پاسخ برابر با $\sum_{r=1}^{n} r^3\binom{n}{r}$ می باشد. از طرف دیگر اگر هر سه مسئولیت رابه یک نفر بدهیم انجام این کار به $n \times 2^{n-1}$ روش میسر است و اگر دو مسئولیت را به یک نفر و مسئولیت دیگر را به نفر دیگر بدهیم این کار به $n \times n-1 \times 3 \times 2^{n-2}$ روش میسر است و اگر این سه مسئولیت را به سه نفر بدهیم تعداد راه های انجام این کار برابر خواهد بود با $n \times n-1 \times n-2 \times 2^{n-3}$. لذا پاسخ نهایی برابر خواهد بود با:

$$n \times 2^{n-1} + n \times n-1 \times 3 \times 2^{n-2} + n \times n-1 \times n-2 \times 2^{n-3} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

سؤال ۲.

در بین $ab+1$ موش، دنباله ای از $a+1$ موش وجود دارد به طوری که هر کدام زاده ی موش قبلی است یا $b+1$ موش وجود دارد به طوری که هیچکدام زاده ی دیگری نیست.

پاسخ :

فرض کنید l_i نشان دهنده ی طول بزرگترین دنباله از موش ها باشد به طوری که هر یک فرزند قبلی است و در ضمن موش امi جد اولیه ی این ها باشد $(1 \leq i \leq ab+1)$ در این صورت اگر i ای موجود باشد که $l_i \geq a+1$ مسئله حل شده است پس فرض کنید به ازای $1 \leq i \leq ab+1$ داشته باشیم $1 \leq l_i \leq a$. طبق اصل لانه کبوتری حداقل $b+1$ تا از این طول ها با هم برابرند مانند $l_{i_1} = l_{i_2} = \cdots = l_{i_{b+1}}$، حال موش های $i_1, i_2, \ldots, i_{b+1}$ ام را در نظر بگیرید در این صورت این $b+1$ موش هیچکدام فرزند دیگری نیست.

سؤال ۳.

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد که نه بر ۲ و نه بر ۵ بخش پذیر است. نشان دهید n مضربی دارد به طوری که تمام ارقامش یک می باشد.

پاسخ :

n عدد $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\cdots1}_{n}$ را در نظر بگیرید ، اگر یکی از این اعداد بر n بخش پذیر باشد مسئله حل شده است. فرض کنید اینطوری نباشد در این صورت چون در تقسیم بر n ، n باقی مانده بیشتر نداریم و باقی مانده ی هیچکدام از این n عدد بر n صفر نیست طبق اصل لانه

کبوتری دو تا از آنها هستند که به پیمانه n باقی مانده یکسانی دارند پس تفاضل این دو عدد که عددی به شکل ۱۱ . . . ۱۰ . . . ۰ است بر n بخش پذیر است. عدد اخیر حاصلضرب توانی از ۱۰ در عددی است که تمام ارقامش یک می باشند و چون n و ۱۰ نسبت به هم اولند پس عدد ۱ . . . ۱۱ بر n بخش پذیر است.

سؤال ۴.

فردی هر روز یک تومان یا دو تومان به داخل قلکش می‌اندازد و بعد از n روز، m تومان در داخل قلک انداخته شده است. نشان دهید برای هر عدد صحیح k که $\cdot < k < ۲n - m$، چند روز متوالی وجود دارد که مقدار پول پس‌انداز شده در طی این چند روز دقیقاً k تومان باشد.

پاسخ :

مقدار پولی را که این فرد در روز k-ام پس انداز می کند با a_i نمایش می دهیم $(۱ \leq i \leq n)$. اکنون تعریف می کنیم:

$$S_k = \sum_{i=۱}^{k} a_i$$

بنابراین:

$$۱ \leq S_۱ < S_۲ < \cdots < S_n = m$$

در نتیجه:

$$k + ۱ \leq S_۱ + k, S_۲ + k, \cdots, S_n + k = m + k$$

۲n عدد $S_۱, S_۲, \cdots, S_n$ و $S_۱ + k, S_۲ + k, \cdots, S_n + k$ همگی بین ۱ تا $m + k$ هستند. حال از آنجا که $۲n - m > k$ بنابراین طبق اصل لانه کبوتری دو عدد $۱ \leq i < j \leq n$ وجود دارند به طوری که $S_j = S_i + k$. در نتیجه:

$$S_j - S_i = k \implies a_{i+۱} + a_{i+۲} + \cdots + a_j = k$$

که خواسته مسئله می‌باشد.

سؤال ۵.

در یک جمع با n عضو، ۶ کمیته وجود دارد. هر کمیته حداقل شامل $\frac{n}{۴}$ نفر است. ثابت کنید دو کمیته وجود دارند که حداقل $\frac{n}{۳۰}$ عضوهای آن‌ها مشترک است.

پاسخ :

فرض کنید هر دو کمیته‌ای کمتر از $\frac{n}{۳۰}$ عضو مشترک داشته باشند. در آن صورت طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعضای کمیته باید بیش از مقدار زیر باشد:

$$۶ \times \frac{n}{۴} - \binom{۶}{۲} \times \frac{n}{۳۰} + \binom{۶}{۳} \times \frac{n}{۳۰} - \binom{۶}{۴} \times \frac{n}{۳۰} + \binom{۶}{۵} \times \frac{n}{۳۰} - \binom{۶}{۶} \times \frac{n}{۳۰}$$

در عبارت بالا ابتدا حداقل جمع تعداد اعضای کمیته‌ها (یعنی $\frac{n}{۴} \times ۶$) را داریم و سپس تعداد افرادی که در حداقل دو کمیته آمده‌اند را از آن کم می‌کنیم. سپس تعداد افرادی که در حداقل سه کمیته آمده‌اند را به آن اضافه می‌کنیم و ...
این مقدار کمتر از n است که با n نفره بودن جمع در تناقض است. بنابراین حداقل دو کمیته با $\frac{n}{۳۰}$ نفر اشتراک وجود دارند.

سؤال ۶.

یک مثلث متساوی الاضلاع را به ۲۵ مثلث متساوی الاضلاع برابر، با شماره‌های ۱ تا ۲۵ تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید دو مثلث وجود دارد که ضلع مشترک داشته و برچسب آن‌ها بیش از ۳ واحد اختلاف داشته باشند.

پاسخ :

فاصله دو مثلث کوچک را برابر کمترین تعداد گام که برای رفتن از یکی به دیگری لازم است تعریف می‌کنیم. منظور از یک گام، رفتن از یک مثلث به مثلثی است که با آن ضلع مشترک دارد. ماکزیمم فاصله بین دو مثلث کوچک برابر ۸ است و این ماکزیمم هنگامی حاصل می‌شود که یکی از مثلث‌ها در یک گوشه از مثلث اصلی و دیگری روی ضلع مقابل به این گوشه قرار داشته باشد. فرض کنید اختلاف عددهای هر دو مثلث کوچک مجاور کوچک‌تر یا مساوی با ۳ باشد، در این صورت فاصله بین مثلث‌های (۱ و ۲۵)، (۲ و ۲۴)، (۲ و ۲۵)، (۲ و ۲۴) باید برابر با ۸ باشد. ولی چنین چیزی ممکن نیست، زیرا با توجه به آنچه گفتیم نتیجه می‌گیریم عددهای ۱ و ۲ یا عددهای ۲۴ و ۲۵ باید در یک گوشه از مثلث قرار گیرند.