ریاضیات گسسته

تمرین صفر - اثبات نویسی

مهدیس میرزایی و صادق صمدی

تاریخ تحویل: ۱۴۰۲/۱۲/۲

سؤال ۱.

n عدد در یک ردیف نوشته ایم. هر یک از آنها برابر ۱+ یا ۱− می‌باشند. در هر حرکت میتوان تمام علامت های چند عدد پشت سر هم را عوض کرد. دست کم چند بار باید این کار را انجام داد تا برای هر ترتیبی از اعداد که در آغاز انتخاب کرده‌ایم به دنباله ای برسیم که تنها شامل عدد ۱+ باشد.

پاسخ :

فرض کنید متغیر S برابر با تعداد جفت خانه‌های متوالی با علامت‌های متفاوت باشد. ادعا می‌کنیم که در هر مرحله از عملیات، حداکثر ۲ واحد از S کم می‌شود.

برای اثبات این ادعا، یک عملیات دلخواه را در نظر بگیرید که در آن علامت اعداد از اندیس i تا j تغییر می‌کند.

واضح است که به ازای خانه‌هایی که در این بازه $[i, j]$ قرار دارند، مقدار S تغییری نمی‌کند؛ چرا که:

- اگر دو خانه متوالی در این بازه علامت یکسانی داشته باشند، پس از تغییر نیز یکسان باقی می‌مانند.
- اگر دو خانه متوالی در این بازه علامت متفاوتی داشته باشند، پس از تغییر نیز متفاوت باقی می‌مانند.

تنها تغییرات ممکن در دو مرز بازه یعنی خانه‌های i و j رخ می‌دهد، بنابراین حداکثر تغییر در S برابر با ۲ واحد خواهد بود.

حال اگر یک بازه را در نظر بگیریم که تمام اعداد درون آن بدون از دست دادن کلیت منفی باشند و دو خانه مجاور خارج از این بازه (در سمت چپ و راست) مثبت باشند، پس از انجام این عملیات مقدار S به طور واضح دو واحد کاهش می‌یابد.

پس در حالت کلی، اگر n عدد داشته باشیم، حداکثر تعداد عملیات مورد نیاز برای اینکه S برابر ۰ شود، برابر است با:

$$\left\lfloor \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor$$

سؤال ۲.

۱۱۹ نفر در یک ساختمان شامل ۱۲۰ آپارتمان زندگی می‌کنند. یک آپارتمان را پرجمعیت می‌نامیم اگر حداقل ۱۵ نفر در آن زندگی کنند. هر روز ساکنان هر یک از آپارتمان‌های پرجمعیت با هم نزاع می‌کنند و هر یک به یک آپارتمان دیگر می‌رود. (هیچ دو نفری از یک آپارتمان پرجمعیت با هم به یک آپارتمان نمی‌روند.) آیا می‌توانیم بگوییم که بعد از چند روز حتما این روند متوقف می‌شود و دیگر هیچ‌کسی تغییر مکان نمی دهد؟

پاسخ :

فرض کنید $P_۱, P_۲, \dots, P_{۱۲۰}$ نمایانگر آپارتمان‌ها و a_i نیز شمارای تعداد ساکنان آپارتمان P_i باشد. مقدار S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \binom{a_۱}{۲} + \binom{a_۲}{۲} + \dots + \binom{a_{۱۲۰}}{۲}$$

فرض کنید ساکنان هر آپارتمان در ابتدای هر روز با هم دست می‌دهند. در این صورت مقدار S نمایانگر تعداد کل دست دادن‌ها خواهد بود. اگر تمام a_i ها کوچکتر از ۱۵ باشند، این مقدار حل شده است. در غیر این صورت می‌توان به یک کلیت مسئله لطمه وارد شود. فرض کنید $a_1 \geq ۱۵$ و ساکنان P_1 به a_1 آپارتمان دیگر $P_{a_1}, \ldots, P_۳, P_۲$ منتقل شوند. در این صورت مقدار S به میزان زیر کاهش خواهد یافت.

$$a_i + a_{i_1} + \cdots + a_{i_{a_1}} - \binom{a_1}{۲}$$

و این مقدار مثبت است، زیرا:

$$a_i + a_{i_1} + \cdots + a_{i_{a_1}} \leq ۱۱۹ - a_1 \leq ۱۱۹ - ۱۵ = ۱۰۴$$

و در ضمن:

$$\binom{a_1}{۲} \geq \binom{۱۵}{۲}$$

بنابراین مقدار S در هر روز حداقل یک واحد کاهش خواهد یافت و از آنجا که این مقدار نمی‌تواند عددی منفی باشد، در نتیجه حتماً به روزی خواهیم رسید که مقدار S تغییر نکند. یعنی هیچ آپارتمانی پر جمعیت نباشد.

سؤال ۳.

یک جدول ۱۴۰۳ × ۱۴۰۳ داریم، در هر یک از خانه‌های آن یک فلش به سمت یکی از چهار جهت بالا، پایین، چپ یا راست قرار دارد. ضلع بالای بالا راست ترین خانه جدول باز است و سایر دیواره جدول یک مانع قرار دارد. یک ربات داخل این جدول قرار می‌دهیم. این ربات در هر مرحله به سمت جهتی که فلش آن خانه نشان می‌دهد حرکت می‌کند و اگر به مانع بر خورد کند، سر جایش باقی می‌ماند. همچنین بعد هر حرکت جهت فلش داخل خانه این حرکت، ۹۰ درجه ساعت‌گرد تغییر می‌کند. ثابت کنید ربات پس از مدتی حتما از جدول خارج می‌شود.

پاسخ :

ابتدا تعداد کل حالات برای یک جدول را حساب میکنیم، این تعداد برابر است با

$$P = ۴^{۱۴۰۳^۲} \times ۱۴۰۳^۲$$

که به این دلیل است که فلش داخل هر خانه ۴ حالت دارد و ربات $۱۴۰۳^۲$ حالت دارد.
حال با برهان خلف اثبات میکنیم:
فرض کنید این ربات هرگز خارج نشود. پس بعد از P حرکت، یک حالت از جدول را دوبار دیده است. فرض کنید خانه‌ای که ربات در این حالت تکراری در آن قرار داشته است خانه a باشد، بعد از هر P مرحله ما دوباره همین وضعیت را خواهیم دید.
میدانیم اگر یک خانه را ۴ بار ببینیم، همه همسایه‌های آن را یکبار دیده‌ایم. پس بعد از $P \times ۴$ مرحله، همه همسایه‌های a را دیده‌ایم. پس بعد از $P \times ۱۶$ همه همسایه‌های همسایه‌های a را دیده ایم. و با همین استدلال بعد از $۴^{۲\times۱۴۰۳}$ مرحله، تمام خانه‌ها و همسایه‌هایشان را دیده ایم پس خانه بالا راست و همسایه رو به بیرونش را دیدیم و از جدول خارج شدیم که بر خلاف فرض خلف است. پس حکم اثبات شد.