

ریاضیات گسسته

پاسخنامه تمرین هفتم - درخت

آیدین کاظمی

تاریخ تحویل ۱۴۰۴/۲/۲۸

سؤال ۱.

فرض کنید گرافی وزن دار و همبند داده شده است که در آن یک یال قرمز رنگ شده. الگوریتم کروسکال را طوری تغییر دهید که درخت پوشای کمینه‌ای بسازد که الزاماً شامل این یال قرمز از گراف باشد. سپس نشان دهید که الگوریتم اصلاح شده همچنان یک درخت پوشای کمینه (با قید وجود یال مشخص شده) می‌سازد.

پاسخ:

برای ساخت درخت پوشای کمینه‌ای (با قید وجود یال مشخص شده) که شامل یک یال مشخص e باشد، الگوریتم کروسکال را به شکل زیر تغییر می‌دهیم:

- در ابتدا یال مشخص e را به صورت مستقیم به مجموعه درخت اضافه می‌کنیم، حتی اگر از نظر ترتیب وزنی، کوچک‌ترین نباشد.
- سپس سایر یال‌ها را (به جز e) بر اساس وزن به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.
- به ترتیب، یال‌هایی را که ایجاد چرخه نمی‌کنند، به درخت اضافه می‌کنیم.
- این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که درخت شامل $n - 1$ یال شود.

اثبات درستی با برهان خلف:

فرض کنید درخت پوشای کمینه‌ای (با قید وجود یال مشخص شده) T' وجود دارد که شامل یال e است و مجموع وزن آن کمتر از درخت T حاصل از الگوریتم اصلاح شده ما باشد.

چون T و T' یکسان نیستند، باید یالی مانند $f' \in T' \setminus T$ وجود داشته باشد. با افزودن f' به T ، چرخه‌ای تشکیل می‌شود. در این چرخه، یالی مانند $f \in T \setminus T'$ وجود دارد.

طبق الگوریتم کروسکال اصلاح شده، یال f نمی‌تواند وزن بیشتری نسبت به f' داشته باشد؛ چرا که در الگوریتم اصلاح شده، یال f پیش از f' بررسی و به درخت اضافه شده است، و از آنجایی که افزودن آن موجب ایجاد دور نشده، پس نتیجه می‌گیریم که:

$$w(f) \leq w(f')$$

اگر وزن $f' > f$ باشد، می‌توان f' را با f جایگزین کرد و درختی با وزن کمتر از T' ساخت که این با کمینه بودن T' (با قید وجود یال مشخص شده) در تناقض است.

اگر وزن $f' = f$ باشد، جایگزینی باعث تغییری در وزن نمی‌شود و همچنان یک درخت پوشای کمینه (با قید وجود یال مشخص شده) خواهیم داشت.

در هر دو حالت، می‌توان درختی با وزن کمتر یا مساوی T' ساخت که شامل یال e است، که این با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین الگوریتم اصلاح شده‌ی کروسکال درست عمل می‌کند و یک درخت پوشای کمینه (با قید وجود یال مشخص شده) می‌سازد.

سؤال ۲.

تعداد رئوس و تعداد برگ‌های یک درخت کامل k تایی با i راس داخلی را بر حسب k و i بیابید. درخت کامل k تایی درختی است که هر راس غیر برگ در آن k بچه دارد.

پاسخ:

یک درخت کامل k تایی در عمق h به تعداد k^h راس دارد. حال فرض کنید عمق درخت برابر با a باشد. در این صورت، تعداد رئوس داخلی (i) برابر است با مجموع رئوس در ترازهای 0 تا $a-1$ ، یعنی:

$$i = 1 + k + k^2 + \dots + k^{a-1}$$

و تعداد کل رئوس، که شامل تراز a نیز می‌شود، برابر است با:

$$\text{تعداد کل رئوس} = 1 + k + k^2 + \dots + k^a$$

می‌توان این مجموع را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^a = 1 + k(1 + k + \dots + k^{a-1}) = ik + 1$$

بنابراین تعداد کل رئوس برابر $ik + 1$ خواهد بود.

حال برای محاسبه تعداد برگ‌ها، کافی است تعداد رئوس داخلی را از تعداد کل رئوس کم کنیم:

$$\text{تعداد برگ‌ها} = ik + 1 - i = k(i - 1) + 1$$