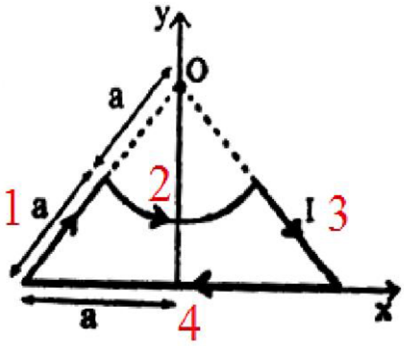
به نام خدا

پاسخ تکلیف سری ۷ فیزیک ۲

میدان مغناطیسی ناشی از جریان و القای الکتریکی

نیمسال دوم ۱۴۰۳

-۱



۴ قطعه سیم داریم. میدان حاصل از سیم‌های ۱و۳ که امتداد آن‌ها از نقطه O می‌گذرد، در این نقطه صفر است(طبق قانون بیو-ساوار $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overbrace{d\vec{L}\times\vec{r}}^{0}}{r^3}, d\vec{L}\times\vec{r}=0$).

برای سیم که کمانی(به شعاع R و زاویه α) از دایره است داشتیم: $B=\frac{\mu_0 I\alpha}{4\pi R}$

$$\Rightarrow B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\mu_0 I}{12a}\rightarrow \text{برونسو}$$

زاویه رو به کمان با توجه به اینکه شکل نسبت به محور y متقارن است و یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهد، ۶۰ درجه برابر $\pi/3$ می‌باشد. دقت کنید که جهت B_2 برونسو است(شست دست راست در جهت جریان، انگشتان دست پس از دور زدن سیم، در نقطه O از صفحه خارج می‌شوند) .

قطعه سیم ۴، یک سیم صاف با طول محدود است:

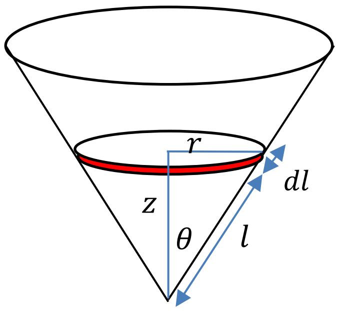
$$\left.\begin{aligned} B&=\frac{\mu_0 I}{4\pi h}(\cos\alpha+\cos\beta)\\ h&=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a\end{aligned}\right\}\rightarrow B_4=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\sqrt{3}a\right)}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\sqrt{3}a\right)}\rightarrow \text{درونسو}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{total,@O}=\left(\frac{\mu_0 I}{12a}-\frac{\mu_0 I}{4\pi\sqrt{3}a}\right)\hat{k}$$

۲-

حل : ابتدا یک المان حلقوی می‌گیریم :

$$\overrightarrow{dB_o} = \frac{\mu_0 r^2 \ di}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \ (-\vec{k})$$



$$di = \frac{dQ}{T} = \frac{\sigma \ dA}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \sigma_0 z \ \times \ 2\pi r \ dl$$

$$\rightarrow z = l\cos\theta \ \ ; r = l\sin\theta \ \ ; \ r^2 + z^2 = l^2$$

$$\rightarrow \ dB_o = \frac{\mu_0 (l^2 \sin^2\theta)\omega\sigma_0 \ l\cos\theta \ \ l\sin\theta \ dl}{2 \ l^3} = \frac{\mu_0\sigma_0\omega \sin^3\theta\cos\theta}{2} \ l \ dl$$

$$B_o = \int_0^L \frac{\mu_0\sigma_0\omega\sin^3\theta\cos\theta}{2} \ l \ dl = \frac{\mu_0\sigma_0\omega \ L^2 \sin^3\theta\cos\theta}{4}$$

در این سوال $\theta = 30$ و $L = 2b$

بنابراین

$$\overrightarrow{B_o} = \frac{\sqrt{3}}{16}\mu_0\sigma_0\omega \ b^2 \ \left(-\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{dB} = \left|\overrightarrow{dB}\right|(\sin(\theta)\,\vec{\imath} - \cos(\theta)\,\vec{\jmath})$$

از قانون آمپر :

$$\left|\overrightarrow{dB}\right| = \mu_0 \frac{di}{2\pi R} = \frac{\mu_0}{2\pi R}\,(J\,dl)$$

$$\rightarrow\ \left|\overrightarrow{dB}\right| = \left(\frac{\mu_0 J_0 \theta R\,d\theta}{2\pi R}\right)\ and\ \ B = \int dB$$

$$\rightarrow\ \vec{B} = B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} = \mu_0 J_0\,\frac{\vec{\imath}}{2\pi}\int_0^{\pi}\theta\,sin\theta\,d\theta\ -\ \mu_0 J_0\,\frac{\vec{\jmath}}{2\pi}\int_0^{\pi}\theta\,cos\theta\,d\theta$$

روش جز به جز:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi}(\,\vec{\imath}\int_0^{\pi}\theta\,sin\theta\,d\theta\ \ -\vec{\jmath}\int_0^{\pi}\theta\,cos\theta\,d\theta$$

$$\theta = u\ \ \rightarrow d\theta = du$$

$$sin\theta\,d\theta = dv\ \rightarrow v = -cos\theta$$

$$\rightarrow\ -\theta cos\theta + \int cos\theta\ d\theta = sin\theta - \theta cos\theta$$

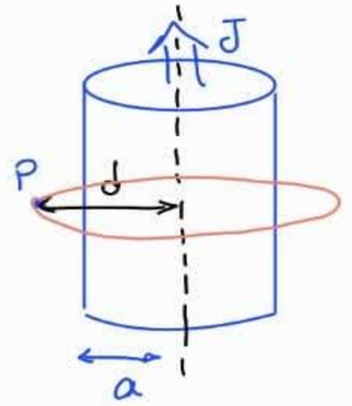
$$\rightarrow\ \pi - 0 =\ \pi$$

$$\theta = u\ \rightarrow du = \theta$$

$$cos\theta = dv\ \ \rightarrow v = sin\theta$$

$$\theta sin\theta - \int sin\theta\,d\theta =\ \theta sin\theta + cos\theta|_0^{\pi}\ \ \rightarrow\ -1 - 1 = -2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2\pi}(\pi\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$$



ابتدا میدان ناشی از استوانه آبی و سپس میدان ناشی از استوانه سبز را در نقطه P پیدا می‌کنیم.

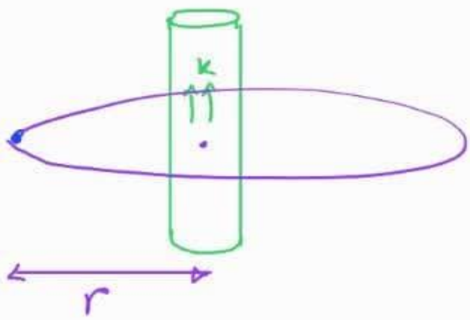
خط آمپری ترسیمی برای استوانه آبی

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in} \longrightarrow B_1(2\pi d) = \mu_0 i_1 \qquad (1)$$

$$i_1 = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_0^a J_0 \frac{r^2}{a^2}(2\pi r\, dr) = \frac{2\pi J_0}{a^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^a = \frac{\pi J_0 a^2}{2} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{1,2} B_1 = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4d}$$ جهت برون سو



حال میدان ناشی از استوانه سبز در فاصله r از خودش را محاسبه می‌کنیم:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{in}$$

$$B_2(2\pi r) = \mu_0 i_2 = \mu_0 K(2\pi b)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 K b}{r}$$ جهت در نقطه P, P' برون سو

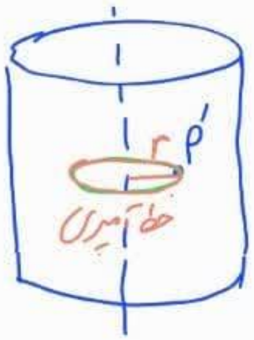
حالا برای محاسبه میدان ناشی از دو استوانه در نقطه P باید $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ را جمع برداری کنیم.

در نقطه P هر دو میدان برون سو هستند بنابراین:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 J a^2}{4d} + \frac{\mu_0 k b}{\underbrace{3b}}$$

چون نقطه P در فاصله 3d از محور استوانه سبز است.

برای محاسبه میدان در نقطه P' باید میدان استوانه آبی را مجدداً حساب کنیم.



$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$B_1(2\pi r) = \mu_0 \int_0^r J_0 \frac{r'^2}{a^2} (2\pi r' dr')$$

for $r<a \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 J_0}{a^2 r} \frac{r^4}{4} = \frac{\mu_0 J_0 r^3}{4a^2}$ درون سو

در نقطه P' $\quad B_2 = \frac{\mu_0 k b}{(2d - \frac{a}{2})}$ برون سو

$$\vec{B}_{p'} = \frac{\mu_0 k b}{2d - \frac{a}{2}} - \frac{\mu_0 J_0 (\frac{a}{2})^3}{4a^2} = \frac{\mu_0 k b}{2d - \frac{a}{2}} - \frac{\mu_0 J_0 a}{32}$$

دقت کنید کل این مسئله تقارن ندارد ولی بخش بخش آن جداگانه تقارن استوانه ای دارد و می توان از آن در قانون آمپر بهره برد و سپس از اصل برهم نهی استفاده کرد.

۵-

الف)

$$\oint \vec{B}.d\vec{s} = \mu_0 i_{enc} \xrightarrow{ds=2\pi x} B(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

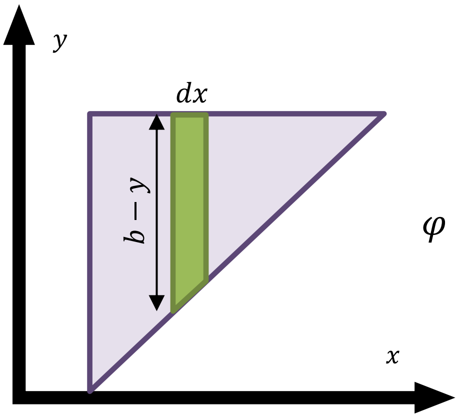
ب) روش اول (انتگرال دو بعدی)

$$\varphi = \int \vec{B}.d\vec{A}\ , \qquad dA = dx\, dy$$

$$\begin{cases} y = x - d & \text{معادله‌خط‌پایین} \\ y = b & \text{معادله‌خط‌بالا} \end{cases}$$

$$\to \varphi = \left(\int_d^{d+b} \int_{\text{خط‌پایین}}^{\text{خط‌بالا}} dy\ \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{1}{x}(b - x + d)dx$$

$$\to \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[(b+d)\ln\frac{b+d}{d} - b\right]$$



روش دوم (انتگرال یک بعدی)

$$\varphi = \int \vec{B}.d\vec{A}\ ,\ dA = (b-y)dx$$

$$= \int B\,(b - \boldsymbol{y})dx = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x}(b - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}))dx$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{1}{x}(b - x + d)dx$$

$$\to \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[(b+d)\ln\frac{b+d}{d} - b\right]$$

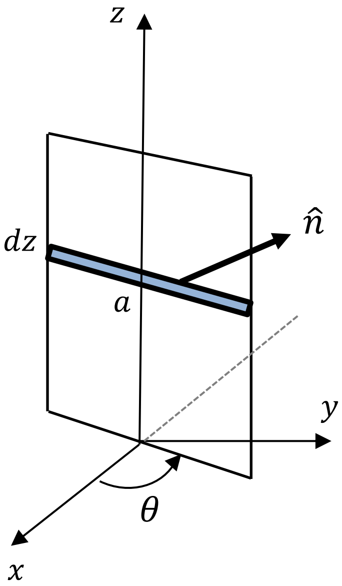
ج) (به سیم شماره ۲ و به حلقه شماره ۱ داده ایم)

$$M\,(M_{12}) = \frac{N_1 \varphi_{12}}{i_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[(b+d)\ln\frac{b+d}{d} - b\right]$$

د)

$$I = I_0 \cos\omega t \quad \leftarrow \quad \varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0\, \omega \sin\omega t}{2\pi}\left[(b+d)\ln\frac{b+d}{d} - b\right]$$

-۶



$$|\varepsilon_{ind}| = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi = \int B \ dA$$

المان نواری سطح را عمود بر محور z می‌گیریم :

$$\overrightarrow{dA} = \ -adz\ sin\theta\ \vec{\imath} + a\ dz\ cos\theta\ \vec{\jmath}$$

$$\varphi = \int (z\vec{\imath} + z\ \vec{\jmath}\,)(-asin\theta dz\ \vec{\imath} + a\ dz\ cos\theta\ \vec{\jmath}\,)$$

$$= \int_{vt}^{a+vt} (-asin\theta dz\ \vec{\imath} + a\ dz\ cos\theta\ \vec{\jmath}\,)$$

$$\left(-a\frac{sin\theta}{2} + a\frac{cos\theta}{2}\right) z^2|_{vt}^{a+vt} = \left(\frac{cos\theta - sin\theta}{2}\right) a(a^2 + 2vat) = \varphi(t)$$

$$|\varepsilon_{ind}| = \frac{d\varphi(t)}{dt} - -\longrightarrow\ \varphi = \omega t$$

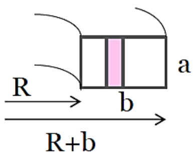
$$= \frac{a}{2}\big(-\omega(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))\big)(a^2 + 2avt) + \frac{a}{2}(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\ (2av)$$

$$- - \longrightarrow\ \varepsilon_{ind} = \frac{a^2}{2}\Big(\big(-\omega\ (\cos(\omega t) + \sin(\omega t))(a + 2vt)\big) + 2v(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\Big)$$

-۷

الف)

$$L = \frac{N_1\varphi}{I} = \frac{N_1}{I}\int_R^{R+b} \frac{\mu_0 N_1 I}{2\pi r}\ a\, dr = \frac{\mu_0 N_1^2 a}{2\pi} Ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$



$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 N_1^2 a I^2}{4\pi} Ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$

ب)

$$M = \frac{N_2\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 a}{2\pi} Ln\left(\frac{R+b}{R}\right)$$