

# ریاضیات گسسته

## مجموعه سوالات کلاسی سوم - منطق

مبینا مهرآذر

### سؤال ۱.

عبارات زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن تبدیل کنید.

$$\text{الف) } (\neg(p \rightarrow q) \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q)$$

$$\text{ب) } (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$$

پاسخ:

الف)

$$\begin{aligned} & (\neg(p \rightarrow q) \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \\ \equiv & (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \\ \equiv & ((\neg p \vee q) \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee r)) \wedge (q \vee \neg r) \\ \equiv & [((\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r)] \wedge (q \vee \neg r) \\ \equiv & ((\neg p \vee q) \wedge r) \wedge (q \vee \neg r) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge r \wedge (q \vee \neg r) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge [(r \wedge q) \vee (r \wedge \neg r)] \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge r \wedge q \\ \equiv & r \wedge q \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} & (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q) \\ \equiv & (q \vee \neg p) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow q) \\ \equiv & \neg(q \vee \neg p) \vee ((q \vee p) \rightarrow q) \\ \equiv & \neg(q \vee \neg p) \vee (\neg(q \vee p) \vee q) \\ \equiv & (\neg q \wedge p) \vee q \vee (\neg q \wedge \neg p) \\ \equiv & (q \vee p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \\ \equiv & (q \vee p) \vee \neg(q \vee p) \\ \equiv & T \end{aligned}$$

## سؤال ۲.

گزاره‌های زیر، همگی درست هستند؛ با در نظر گرفتن آنها و با استفاده از قوانین استنتاج درستی یا نادرستی گزاره‌های ۱ و ۲ را بررسی کنید.

اگر قبل از کلاس قهوه نخورده باشم یا اتوبوس دیر برسد، آنگاه به موقع به کلاس نمی‌رسم.

اگر به موقع به کلاس برسم، آنگاه یا نکات درس را می‌نویسم یا درس را به‌خوبی می‌فهمم.

من نکات درس را ننوشتم و درس را به‌خوبی نفهمیدم.

اگر درس را به‌خوبی بفهمم، اتوبوس دیر نمی‌رسد.

اگر به موقع به کلاس نرسم، قبل از کلاس حتماً قهوه می‌خورم.

اگر قبل از کلاس قهوه بخورم، اتوبوس به موقع می‌رسد.

۱- من به موقع به کلاس رسیده‌ام. ۲- قبل از کلاس قهوه خورده‌ام.

## پاسخ:

ابتدا هر گزاره را با یک حرف نشان می‌دهیم:

$p \equiv$  قبل از کلاس قهوه خورده‌ام

$q \equiv$  اتوبوس دیر می‌رسد

$r \equiv$  به موقع به کلاس می‌رسم

$s \equiv$  نکات درس را می‌نویسم

$t \equiv$  درس را به‌خوبی می‌فهمم

فرض‌ها:

$$(\neg p \vee q) \rightarrow \neg r$$

$$r \rightarrow (s \vee t)$$

$$\neg s \wedge \neg t$$

$$t \rightarrow \neg q$$

$$\neg r \rightarrow p$$

$$p \rightarrow \neg q$$

حال خواهیم داشت:

$$1. \neg s \wedge \neg t \quad (\text{فرض})$$

$$2. \neg s \quad (\text{طبق ۱: ساده‌سازی عطفی})$$

$$3. \neg t \quad (\text{طبق ۱: ساده‌سازی عطفی})$$

$$4. r \rightarrow (s \vee t) \quad (\text{فرض})$$

$$5. \neg(s \vee t) \rightarrow \neg r \quad (\text{طبق ۴: عکس نقیض})$$

$$6. \neg(s \vee t) \quad (\text{طبق ۲ و ۳})$$

$$7. \neg r \quad (\text{طبق ۵ و ۶})$$

$$۸. \neg r \rightarrow p \quad (\text{فرض})$$

$$۹. p \quad (\text{طبق ۷ و ۸})$$

$$۱۰. p \rightarrow \neg q \quad (\text{فرض})$$

$$۱۱. \neg q \quad (\text{طبق ۹ و ۱۰})$$

پس گزاره ۱ غلط و گزاره ۲ صحیح است.

### سؤال ۳.

فرم نرمال عطفی (CNF) را بدون استفاده از جدول درستی برای گزاره زیر بیابید.

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (s \rightarrow t)$$

پاسخ:

$$\text{نکته: } A \leftrightarrow B \equiv (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$$

$$\equiv (p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (s \rightarrow t)$$

$$\equiv (\neg p \vee q \vee r) \leftrightarrow (\neg s \vee t)$$

$$\equiv (\neg p \vee q \vee r \vee \neg(\neg s \vee t)) \wedge (\neg(\neg p \vee q \vee r) \vee (\neg s \vee t))$$

$$\equiv (\neg p \vee q \vee r \vee (s \wedge \neg t)) \wedge ((p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg s \vee t))$$

$$\equiv (\neg p \vee q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee r \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee t)$$

### سؤال ۴.

در یک قلعه‌ی باستانی، سه شوالیه به نام‌های آرتور، لئون و مکس برای محافظت از گنجینه‌ی پادشاه حضور دارند. اما یک شب، گنجینه‌ی پادشاه به سرقت می‌رود و مشخص می‌شود که یکی از آن‌ها خیانتکار است! پادشاه می‌داند که در میان این سه نفر:

- یکی از آن‌ها یک شوالیه‌ی وفادار است و همیشه حقیقت را می‌گوید.
- یکی از آن‌ها خیانتکار است و همیشه دروغ می‌گوید.
- نفر سوم یک مأمور دوگانه است که می‌تواند هم راست بگوید و هم دروغ!

هر یک از آن‌ها اظهارات زیر را ارائه می‌کنند:

۱. آرتور: «مکس خیانتکار است.»

۲. لئون: «آرتور یک شوالیه‌ی وفادار است.»

۳. مکس: «من مأمور دوگانه هستم.»

حال شما باید مشخص کنید که چه کسی شوالیه‌ی وفادار است، چه کسی خیانتکار است و چه کسی مأمور دوگانه.

**پاسخ:**

می‌دانیم که مکس حقیقت را نمی‌گوید، زیرا اگر او راست می‌گفت، آنگاه آرتور خیانتکار و لئون شوالیه‌ی وفادار بود آنگاه دو شوالیه‌ی وفادار وجود داشتند؛ که تناقض است؛ بنابراین مکس یا خیانتکار است یا مأمور دوگانه. همچنین، لئون نمی‌تواند شوالیه‌ی وفادار باشد، زیرا در این صورت جمله‌ی او باید درست می‌بود، اما در این حالت تناقضی ایجاد می‌شود. پس آرتور باید شوالیه‌ی وفادار باشد. بنابراین، لئون مأمور دوگانه است، زیرا مأمور دوگانه گاهی راست می‌گوید؛ و در نتیجه، مکس خیانتکار است.