به نام خدا

پاسخ تمرین اول

جبرخطی کاربردی - پاییز ۱۴۰۳

1.پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.

2. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.

3. برای تمرین‌ها و پروژه‌ها **در مجموع 10 روز** بودجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین‌ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.

3. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق کانال درس سوال خود را بپرسید.

4. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید.

سوال ۱)

درست یا نادرست بودن هر یک از عبارات زیر را مشخص و اثبات نمایید :

a) اگر دستگاه ax=b بیشتر از یک جواب داشته باشد, دستگاه ax=۰ هم بیشتر از یک جواب دارد.

پاسخ: درست, طبق تئوری (فرض کنید $Ax=b$ سازگار است برای برخی bها و p یک جواب است, پس مجموعه جواب $Ax=b$ مجموعه از تمام بردارها به فرم $w=p+v_h$ به طوری که v_h هر جوابی از دستگاه همگن $Ax=0$ است) اگر $Ax=b$ جوابی داشته باشد, این مجموعه جواب از تبدیل مجموعه جواب $Ax=0$ بدست آمده است.

b) ماتریس های A_{mxn} و C_{mxn} مفروضند: اگر Ax=۰ تنها دارای جواب بدیهی باشد و داشته باشیم $span\ \{a_۱,...,a_n\}$ = $span\ \{c_۱,...,c_n\}$ آنگاه تبدیل خطی که با ماتریس C مشخص شده باشد یک به یک و پوشاست.

پاسخ: نادرست, وقتی $Ax=0$ تنها دارای جواب بدیهی است که طبق تعریف ارائه شده در صفحه 44 کتاب درسی متغیر آزاد نداشته باشیم. پس طبق تعریف ارائه شده در صفحه 58 کتاب درسی ستون های آن مستقل خطی می باشد.

طبق تئوری 12 فصل 1 کتاب درسی اگر ماتریسی ستون های آن مستقل خطی باشد یک به یک می باشد. و اگر فضای R^m (به تعداد درایه های سطری) را $span$ کند پوشا می باشد.

پس تبدیل $T(x) = Ax$ یک به یک می باشد. از طرفی با توجه به این که تمامی بردارهایی که با ترکیب خطی ستون های ماتریس A توصیف می شوند, با ترکیب خطی ستون های ماتریس C نیز توصیف می شوند نتیجه می گیریم که ستون های ماتریس C نیز مستقل خطی می باشند. زیرا اگر تنها یک ستون مستقل خطی نباشد آنگاه برداری در $Col\ A$ موجود است که در $Col\ C$ موجود نیست.

پس تبدیل $T(x) = Cx$ نیز یک به یک می باشد.

ولی با استفاده از تلفیق تئوری 4 و 12 فصل 1 کتاب درسی, زمانی یک تبدیل پوشا می باشد که حداقل یکی از گزاره های زیر درست باشند:

- به ازای هر b در R^m , رابطه $Ax=b$ حاوی جواب باشد.

- هر بردار b در R^m ترکیب خطی از ستون های A می باشند.
- ستون های ماتریس A فضای R^m را $span$ میکنند.
- ماتریس A در هر سطر دارای $pivot\ position$ می باشد.

با توجه به این که ابعاد m و n در صورت سوال مشخص نشده اند, در یک حالت می تواند $m>n$ باشد. در این صورت با وجود مستقل خطی بودن, حداقل یک سطر وجود دارد که $pivot\ position$ ندارد. در این صورت اگر در فرم اشلون $Ax=b$, اگر درایه بردار b متناظر در آن سطر غیرصفر باشد آنگاه بردار b به صورت ترکیب خطی ستون های A قابل نوشتن نمی باشد و به ازای هر b در R^m, $Ax=b$ جواب ندارد.

c) اگر جواب های دو دستگاه یکسان باشند, آن دو دستگاه هم ارزند.

پاسخ: درست . طبق تعریف هم ارزی

d) ضرب از سمت چپ ماتریس B در یک ماتریس قطری با درایه های قطری غیرصفر, سطرهای B را scale می کند.

پاسخ : درست, سطر iام از A به فرم $(0,\dots,d_i,\dots,0)$ است, پس سطر iام ماتریس AB $(0,\dots,d_i,\dots,0)B$ است که d_i برابر سطر iام B است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) اگر A و B ماتریس های nxn باشند, آنگاه $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

نادرست, $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$
و باید $AB=BA$ باشد تا گزاره درست باشد که لزوما این گونه نیست.

سوال۲)
الف) فرض کنید که u, v, w بردارهای مستقل خطی در فضای R^n باشند:
ثابت کنید که $u+v, u-v, u-2v+w$ نیز مستقل خطی هستند.
ب) فرض کنید مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی در فضای R^n است:

ثابت کنید که مجموعه $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ که در آن $w_i = v_i + v_1$ می باشد، یک مجموعه مستقل خطی است.

پاسخ:

الف) فرض کنید $a(u+v) + b(u-v) + c(u-2v+w) = 0$ آنگاه داریم:

$$(a+b+c)u + (a-b-2c)v + cw = 0$$

از آنجا که u, v, w مستقل خطی هستند، هر ضریب باید برابر صفر باشد:

$$a+b+c = 0,\ a-b-2c = 0,\ c = 0$$

با توجه به معادلات بالا داریم: $a = 0, b = 0, c = 0$ و بنابراین $u+v, u-v, u-2v+w$ مستقل خطی هستند.

ب) فرض کنید $c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n = 0$ آنگاه داریم:

$$c_1(v_1+v_1) + c_2(v_2+v_1) + \cdots + c_n(v_n+v_1) = 0$$
$$=> (c_1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n)v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots c_nv_n = 0$$

از آنجا که $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مستقل خطی هستند، هر ضریب باید برابر صفر باشد:

$$(c_1 + c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n) = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$$

با توجه به معادلات بالا به این نتیجه می رسیم که $c_i = 0$ و بنابراین مجموعه $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی است.

سوال۳)

مشخص کنید هر یک از تبدیلات زیر خطی هستند یا نه، در صورتی که خطی باشند ماتریس استاندارد آنها را نیز بیابید.

الف)

$$T: R^2 \to R^2$$
$$(x_1, x_2) \to (4x_1 - 2x_2, 3|x_2|)$$

ب)

$$T: R^2 \to R^2$$
$$(x_1, x_2) \to (sin\ (x_1), x_2)$$

ج)

$$T: R^3 \to R^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

پاسخ:

الف)

$$u = (1,0), v = (0,1)$$
$$T(c_1u + c_2v) = T(c_1, c_2) = (4c_1 - 2c_2, 3|c_2|)$$
$$c_1T(u) + c_2T(v) = c_1(4,0) + c_2(-2,3) = (4c_1 - 2c_2, 3c_2)$$

با توجه به اینکه به ازای c_2های منفی دو عبارت بالا برابر نیستند پس تبدیل خطی نیست.

ب)

$$u = (\pi, 0), v = (0,1)$$
$$T(c_1u + c_2v) = T(c_1\pi, c_2) = (sin(c_1\pi), c_2)$$
$$c_1T(u) + c_2T(v) = c_1(0,0) + c_2(0,1) = (0, c_2)$$

به ازای c_1های غیر صحیح دو عبارت بالا برابر نیستند پس تبدیل خطی نیست.

ج)

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$
$$T(c_1u + c_2v) = T(c_1u_1 + c_2v_1, c_1u_2 + c_2v_2, c_1u_3 + c_2v_3)$$
$$= \begin{bmatrix} 3c_1u_1 + 3c_2v_1 \\ c_1u_1 + c_2v_1 - c_1u_2 - c_2v_2 \\ 2c_1u_1 + 2c_2v_1 + c_1u_2 + c_2v_2 + c_1u_3 + c_2v_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3c_1u_1 + 3c_2v_1 \\ c_1(u_1 - u_2) + c_2(v_1 - v_2) \\ c_1(2u_1 + u_2 + u_3) + c_2(2v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix}$$
$$c_1T(u) + c_2T(v) = c_1 \begin{bmatrix} 3u_1 \\ u_1 - u_2 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3v_1 \\ v_1 - v_2 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3c_1u_1 + 3c_2v_1 \\ c_1(u_1 - u_2) + c_2(v_1 - v_2) \\ c_1(2u_1 + u_2 + u_3) + c_2(2v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه دو عبارت بالا به ازای هر c_1 و c_2 برقرار است پس تبدیل خطی است.

ماتریس تبدیل:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

سوال ۴)

دوران Givens یک تبدیل خطی از R^n به R^n است. این دوران در برنامه های کامپیوتری برای ساخت یک درایه صفر در یک بردار (معمولا یک ستون از یک ماتریس) استفاده می شود.

ماتریس استاندارد دوران Givens در R^2 به این فرم است :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},\ a^2 + b^2 = 1$$

a و b را طوری تعیین کنید که $\binom{4}{3}$ را روی $\binom{5}{0}$ دوران دهد.

پاسخ :

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 5 \\ 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

حل $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & \frac{25}{4} & \frac{-15}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$

$\rightarrow$

$a = \frac{4}{5}\ ,\ b = \frac{-3}{5}$

سوال ۵)

الف) معکوس ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

ب) فرض کنید ماتریس A یک ماتریس پایین مثلثی با درایه های تمام ۱ مشابه الف به ابعاد nxn است , با استفاده از قسمت الف فرم کلی معکوس این ماتریس را حدس زده و آن را اثبات کنید. (می توانید از استقرا هم استفاده کنید.)

پاسخ:

الف) با توجه به الگوریتم معرفی شده در فصل 2.2 کتاب درسی صفحه 110 داریم :

$$[AI] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [I\ A^{-1}]$$

بنابراین معکوس ماتریس A برابر است با :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) با توجه به الگو بدست آمده توسط عملیات سطری انجام شده در قسمت (الف) در می یابیم فرم کلی ماتریس B به صورت زیر می باشد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن درایه های قطری همگی1 و درایه های پایین آن ها -1 و باقی درایه ها همگی صفر می باشند.

به طور کلی از ضرب دو ماتریس AB داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که تمامی درایه های -1 با 1 خنثی خواهند شد و داریم:

$$AB = I$$

روش دوم : استقرا

بررسی برای مقادیر پایه :

- وارون ماتریس $2x2$

$$A^{-1}{}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (1-0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- وارون ماتریس $3x3$

$$A^{-1}{}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- وارون ماتریس $4x4$

$$A^{-1}{}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

به طور کلی مشاهده می شود برای ماتریس kxk, وارون آن به شکل زیر است :

در این ماتریس, قطر اصلی شامل 1 است و زیر هر 1 در قطر اصلی یک -1 قرار دارد و بقیه درایه های صفر هستند.

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- برای استقرا فرض می کنیم وارون A_k به شکل بالاست (B_k) , باید برای A_{k+1} ثابت کنیم B_{k+1} وارون است.

ماتریس $(k+1)(k+1)$ را می توان به شکل زیر پارتیشن کرد:

K+1 تا

$$A_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 1 & & & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ \vdots & & A_K & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ v & A_k \end{bmatrix} \qquad V=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس A_k را B_k نامیدیم.

$$B_{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ w & B_k \end{bmatrix} \qquad , \qquad w=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{k+1}\, B_{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ v & A_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ w & B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0^T w & 0^T + 0^T B_K \\ v + A_k w & v0^T + A_k B_k \end{bmatrix}$$

$$1 + 0^T w = 1 + [0 \ldots 0]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + 0 = 1$$

K تا در هر سطر و ستون   K تا

$$0^T + 0^T B_k = [0\ 0 \ldots 0] + [0 \ldots 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = [0 \ldots 0] + [0 \ldots 0] =$$

0^T

$$v + A_k w = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ \vdots \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v0^T + A_k B_k = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ldots 0] + I_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + I_k = I_k$$

بنابراین مقدار $A_{k+1}\ B_{k+1}$ به شکل زیر است :

$$A_{k+1}\ B_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & I_k \end{bmatrix} = I_{k+1}$$

پس B_{k+1} همان وارون ماتریس A_{k+1} است و حکم ثابت شد.

سوال ۶)

تبدیل $T : R^۳ \rightarrow R^۲$ مفروض است. این تبدیل ابتدا نقطه $x = [x_۱,x_۲,x_۳]$ را به صفحه $x_۲ = ۰$ نگاشت می کند و سپس نقطه حاصل را در جهت ساعتگرد به اندازه θ دوران می دهد. خطی بودن این تبدیل را بررسی نمایید و در صورت خطی بودن ماتریس تبدیل را بیابید.

پاسخ:

ابتدا نقطه x را به صفحه $x_2 = 0$

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

سپس این range این تبدیل دامنه تبدیل دیگری می باشد که به اندازه θ در جهت ساعتگرد دوران میدهد :

$$T_2 = (\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\, x_1 + \sin\theta x_3 \\ -\sin\theta\, x_1 + \cos\theta\, x_3 \end{bmatrix}$$

پس تبدیل T به فرم زیر می باشد:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

اثبات خطی بودن: بردار دلخواه $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ را اختیار می کنیم, اثبات می کنیم:

- T(u+v) = T(u) + T(v)

$$T = \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\,(u_1+v_1)+\sin\theta(u_3+v_3) \\ -\sin\theta\,(u_1+v_1)+\ \cos\theta\,(u_3+v_3) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\,u_1+\ \sin\theta u_3+\ \cos\theta\,v_1+\sin\theta v_3 \\ -\sin\theta\,u_1+\ \cos\theta\,u_3-\ \sin\theta\,v_1\ +\ \cos\theta\,v_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\,u_1+\ \sin\theta u_3 \\ -\sin\theta\,u_1+\ \cos\theta\,u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta\,v_1+\sin\theta v_3 \\ -\ \sin\theta\,v_1\ +\ \cos\theta\,v_3 \end{bmatrix}$$
$$= T(u)+T(v)$$

- T(au) = aT(u)

$$T = \left(a \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = T = \left(\begin{bmatrix} au_1 \\ au_2 \\ au_3 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a\cos\theta\,u_1+\mathrm{a}\sin\theta u_3 \\ -\mathrm{a}\sin\theta\,u_1+\ a\ \cos\theta\,u_3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos\theta\,u_1+\sin\theta u_3 \\ -\sin\theta\,u_1+\ \cos\theta\,u_3 \end{bmatrix} = \mathrm{aT(u)}$$

❈ میتوان به جای اثبات خطی بودن T , به طور جدا اثبات کنیم T_1 و T_2 خطی هستند و سپس نتیجه بگیریم T خطی است.

سوال ۷)

دستگاه معادلات زیر را در صورتی که اعداد a و b حقیقی باشند، در نظر بگیرید:

$$x_1+x_2+2x_3=a$$
$$2x_1+2x_2+3x_3=b$$
$$3x_1+3x_2+4x_3=a+b$$

الف) اعداد a و b را طوری مشخص کنید که دستگاه حداقل یک جواب داشته باشد و جواب را برحسب a و b مشخص کنید.

ب) آیا مقادیری از a و b وجود دارد که دستگاه تنها یک جواب داشته باشد؟ توضیح دهید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 3 & 3 & 4 & a+b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2b-3a \\ 0 & 0 & 1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{bmatrix}$$

به ازای $2a-b\neq 0 => 2a\neq b$ دستگاه جواب دارد و داریم:

$$x_1=-x_2+2b-3a, x_2 \to free, x_3=2a-b$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2+2b-3a\\x_2\\2a-b\end{bmatrix}$$

ب) با توجه با اینکه به ازای هر مقداری از a و b در صورتی که $2a\neq b$ باشد، x_2 متغیر آزاد است و پاسخ دستگاه یکتا نیست و بی نهایت مقدار دارد.

سوال ۸)

الف) اگر A یک ماتریس $n\times n$ وارون پذیر باشد ثابت کنید:

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

ب) با استفاده از قضیه بالا معادله زیر را حل کنید.

$$A^Tx=b$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&6&-1\\-6&-7&-2\\9&8&7\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}-1\\4\\4\end{bmatrix}$$

پاسخ:

الف) با توجه به اینکه A وارون پذیر است داریم:

$$AA^{-1}=I$$
$$=>(AA^{-1})^T=I^T$$
$$=>(A^{-1})^TA^T=I$$
$$=>(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

ب)

$$A^Tx=b$$
$$=>(A^T)^{-1}A^Tx=(A^T)^{-1}b$$
$$=>Ix=(A^T)^{-1}b$$
$$=>x=(A^{-1})^Tb$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&6&-1\\-6&-7&-2\\9&8&7\end{bmatrix}=>(A^{-1})^T=\begin{bmatrix}3&-6&9\\6&-7&8\\-1&-2&7\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}3&-6&9\\6&-7&8\\-1&-2&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\-2\\21\end{bmatrix}$$

سوال ۹)

فرض کنید $T: R^2 \to R^3$ و $T(x) = Ax$ که در آن A یک ماتریس وارون پذیر باشد. اگر داشته باشیم $T\left(\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ ، مقادیر زیر را پیدا کنید.

الف) $T\left(\begin{bmatrix}7\\16\end{bmatrix}\right) =$

ب) $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right) =$

پاسخ:

با توجه به اینکه تبدیل خطی و وارون پذیر است داریم:

الف) $T\left(\begin{bmatrix}7\\16\end{bmatrix}\right) = T\left(5\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right) = 5T\left(\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right) - 3T\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right)$

$= 5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\-10\end{bmatrix}$

ب) $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right) = T^{-1}\left(8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right) = 8T^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - 2T^{-1}\left(\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right)$

$= 8\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\34\end{bmatrix}$

امتیازی

فرض کنید A یک ماتریس خودتوان است (یعنی $A^2 = A$)، ثابت کنی د به ازای kهایی بزرگ،

ماتریس $I - \frac{1}{k}A$ وارون پذیر است و داریم :

$(I - \frac{1}{k}A)^{-1} = I + \frac{1}{k-1}A$

پاسخ :

$\frac{1}{I-\frac{1}{k}A} = I + \frac{1}{k}A + \frac{1}{k^2}A^2 + \frac{1}{k^3}A^3 + \ldots$

$= I + \frac{1}{k}A + \frac{1}{k^2}A + \frac{1}{k^3}A + \ldots$

$= I + A(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \ldots)$

$= I + A\left(\frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}\right)$

$= I + \frac{1}{k-1}A$

حال ادعا می کنیم $I + \frac{1}{k-1}A$ وارون ماتریس $I - \frac{1}{k}A$ است و این ادعا را ثابت می کنیم.

$(I - \frac{1}{k} A)(I + \frac{1}{k-1} A) = I - \frac{1}{k} A + \frac{1}{k-1} A - \frac{1}{k(k-1)} A^2 =$

$I - \frac{1}{k} A + \frac{1}{k-1} A - \frac{1}{k(k-1)} A = I + A\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k(k-1)}\right) =$

$I + A \times ۰ = I$

همچنین (بررسی شود) $(I + \frac{1}{k-1} A)(I - \frac{1}{k} A) = I$

لذا حکم اثبات شد.