

به نام خدا

تمرین سوم

جبرخطی کاربردی - پاییز 1403

1. پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
2. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
3. برای تمرین ها و پروژه ها در مجموع 10 روز بودجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.
3. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل تدریسیاری سوال خود را بپرسید:
la.fall.1403@gmail.com
4. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید.

سوال 1:

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که $A^2 = I$ (یعنی مربع A برابر ماتریس همانی است).

1. نشان دهید که مقادیر ویژه A برابر $\lambda = \pm 1$ هستند.

2. آیا A لزوماً قطری پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

سوال 2:

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سوال 3:

ثابت کنید اگر A یک ماتریس مربعی قطری پذیر باشد، آنگاه A تعداد n بردار ویژه مستقل خطی دارد.

سوال 4:

فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد.

1. ثابت کنید که بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز A متعامد هستند.

2. اگر A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد، آیا A لزوماً قطری پذیر است؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

سوال 5:

ماتریس A را به صورت $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. بردار $V = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ یکی از

بردارهای ویژه ماتریس A می باشد و دو مقدار ویژه دیگر آن برابر 0.5 و 0.2 است. سیستم

$x_{k+1} = Ax_k$ را بدست آورید که درباره آن می دانیم که $x_0 = (0, 0.3, 0.7)$ می باشد.

هنگامی که $k \rightarrow \infty$ چه اتفاقی برای x_k رخ می دهد؟

سوال 6:

ماتریس M را به صورت $M = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید، حال با توجه به آن مقادیر ویژه ماتریس های M^{-1} و M^5 را بیابید.

سوال 7)

فرض کنید A یک ماتریس 2×2 و حقیقی با یک مقدار ویژه مختلط $e = a - bi$ بردار متناظر آن به نام v در فضای C^2 تعریف شده باشد.

الف) نشان دهید

$$aRe(v) + bIm(v) = A(Re(v)) , \quad -bRe(v) + aIm(v) = A(Im(v))$$

ب) اگر P و C به صورت زیر تعریف شوند:

$$A = PCP^{-1} \quad , \quad P = (Re_v \quad Im_v) \quad , \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

آنگاه ثابت کنید: $AP = PC$

سوال 8)

فرض کنید $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ پایه استاندارد برای R^3 و $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ پایه ای برای فضای برداری V باشد و $T : R^3 \rightarrow V$ یک تبدیل خطی باشد که :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)b_1 - (x_1 + x_2)b_2 + (x_1 - x_2)b_3$$

الف) $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ را محاسبه کنید.

ب) $T(e_1)_\beta, T(e_2)_\beta, T(e_3)_\beta$ را محاسبه کنید.

ج) ماتریس تبدیل T را تحت پایه های ε, β بیابید.

سوال 9) (امتیازی):

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه های حقیقی باشد که $A^T = -A$ (یعنی A پادمتقارن است).

1. ثابت کنید که تمام مقادیر ویژه A یا صفر هستند یا عددهای موهومی خالص.

2. نشان دهید که اگر n فرد باشد، آنگاه صفر یک مقدار ویژه A است.