به نام خدا

پاسخ تمرین دوم

جبرخطی کاربردی - پاییز 1403

سوال۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید و در غیر این صورت، دلیل آن را توضیح دهید یا برای آنها مثال نقض بیاورید.

الف) اگر A ماتریس $n\times n$ باشد که فقط از ±۱ تشکیل شده باشد، آنگاه دترمینان آن بر ۲^{n-1} بخش پذیر است.

درست - با استفاده از عملیات سطری تمام سطرها بجز سطر اول را منهای سطر اول کنید.
حال تمام درایه‌های سطرهای ۲ تا n، ۲ ، ۰ یا ۲ – هستند. پس کافی است از هر سطر، ۲ را فاکتور بگیریم که در این صورت داریم:

$$\det|A| = 2^{n-1}\det|B|$$

ب) اگر دترمینان A صفر باشد، آنگاه دو ردیف یا دو ستون یکسان هستند یا اینکه یک ردیف یا یک ستون، صفر می باشد.

نادرست - برای اثبات غلط بودن آن، از مثال نقض زیر استفاده می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۸ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

پ) اگر دو ماتریس A و B معکوس پذیر و $n\times n$ باشند و $I = A^2$ و $I = B^2$ آنگاه $BA = (AB)^{-1}$

درست

$I = A^2 \rightarrow A^{-1} = A$
$I = B^2 \rightarrow B^{-1} = B$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$

ت) فضای سطری A همان فضای ستونی A^T است.

درست - زیرا طبق تعریف Transpose، سطرهای A، همان ستون‌های A^T هستند.
همچنین سطرهای A^T ، نیز ستون‌های $(A^T)^T = A$ هستند. در نتیجه فضای سطر ی A نیز با فضای ستونی A^T برابر می‌شود

ث) اگر ماتریس P یک ماتریس وارون پذیر باشد، رنک PA با رنک A برابر است.

$A = [a_1 \ a_2 \ \_ \ a_n]$ Suppose that rank $A = k$, so that k columns of A are pivot columns.

$PA = [Pa_1 \ Pa_2 \ \_ \ Pa_n]$ Now we must show that PA has k pivot columns too. First we show that these k columns are linearly independent; we call the pivot columns of A as $b_1, b_2, \_ b_k$

$c_1(Pb_1) + c_2(Pb_2) + \_ + c_k(Pb_k) = 0 \xrightarrow{\times P^{-1}}$

$c_1 b_1 + \_ \ c_k b_k = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \_ \ c_k = 0 \Rightarrow$

because $b_1 - b_n$ are linearly independent

$Pb_1, Pb_2, \_, Pb_k$ are linearly independent

Then we show that every non-pivot columns has a corresponding column in PA with the same attributes. Lets call one of these non-pivot columns of A m: $c_1(Pb_1) + c_2(Pb_2) + \_ + c_k(Pb_k) \overset{?}{=} Pm \xrightarrow{\times P^{-1}}$

$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \_ + c_n b_k = m \Rightarrow$ And we know that m is in span $b_1, b_2, \_, b_k$ ✓ So PA has k pivot columns too.

سوال ۲) برای ماتریس داده شده ترکیب خطی بردارهای تشکیل دهنده null space و column space را بدست بیاورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Subject:
Date

(۲)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{REF} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} = \text{Column space Basis}$$

pivots

$$\text{Null space} \rightarrow Ax = 0 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 1.5x_4 = 0 \end{cases}$$

با توجه به آزاد بودن x_3 و x_4 داریم: $x_3 = t, \; x_4 = s$

$$x_1 = -t - s, \; x_2 = -t - 1.5s \longrightarrow x = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \text{Null space Basis} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

PAPCO

سوال ۳) دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه زیر را بدست آورید و با استفاده از قاعده کرامر آنرا حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -x + 3y + z = -1 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Subject:
Date

۳

coefficient matrix $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(M) = 2\times(3\times 2 - 1\times 1) - 1(-1\times 2 - 1\times 1) + (-1)(-1\times 1 - 3\times 1)$

$= 10 + 3 + 4 = 17$ ✓

$M_x = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_x) = 3(3\times 2 - 1\times 1)$

$- 1(2\times(-1) - 1\times 4) - 1(-1\times 1 - 4\times 3)$

$= 15 + 6 + 13 = 34$

$M_y = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_y) = 2(2\times(-1) - 1\times 4)$

$- 3(-1\times 2 - 1\times 1) - 1(-1\times 4 - (-1)\times 1)$

$= -12 + 9 + 3 = 0$

$M_z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(M_z) = 2(4\times 3 - (-1)\times 1)$

$- 1(-1\times 4 - (-1)\times 1) + 3((-1)\times 1 - 3\times 1)$

$= 26 + 3 - 12 = 17$

$\Longrightarrow z = \dfrac{\det(M_z)}{\det(M)} = 1$ و $y = \dfrac{\det(M_y)}{\det(M)} = 0$ و $x = \dfrac{34}{17} = 2$

PAPCO

سوال ۴) مشخص کنید که هریک از مجموعه های زیر، یک زیرفضای برداری تشکیل میدهند یا خیر.

الف) مجموعه تمام چندجمله های به فرم $p(t) = at^2$ که a عضو $\mathbb{R}$ است، یک زیرفضای برداری برای $\mathbb{P}_2$ تشکیل میدهند.

ب) مجموعه تمام بردارهای به فرم $\begin{bmatrix} s+3t \\ s-t \\ 2s-t \\ 4t \end{bmatrix}$ یک زیرفضای برداری برای $\mathbb{R}^4$ میباشد.

الف) $S = \{ P(t) = at^2 \mid a \in \mathbb{R} \}$

$0 \in S \; ? \Rightarrow a = 0 \Rightarrow P(t) = 0$ ✓

if $P_1, P_2 \in S \overset{?}{\Rightarrow} P_1 + P_2 \in S$ $\quad a_1 t^2 + a_2 t^2 = (a_1 + a_2) t^2 \in S$ ✓

if $P \in S \overset{?}{\Rightarrow} cP \in S$ $\quad cP = c(at^2) = (ca)t^2 \in S$ ✓

S is a subspace for P_2

ب) $V = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}$

$0 \overset{?}{\in} V \Rightarrow s = 0, t = 0$ ✓

if $v_1, v_2 \in V \overset{?}{\Rightarrow} v_1 + v_2 \in V$ $\quad s_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= (s_1 + s_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (t_1 + t_2)\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \in V$ ✓

if $v \in V \overset{?}{\Rightarrow} cv \in V$ $\quad c\left(s\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}\right) = (cs)\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} + (ct)\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \in V$ ✓

V is a subspace for $\mathbb{R}^4$

سوال ۵) اگر $p_1(t) = 1 + t^2$، $p_2(t) = t - 3t^2$ و $p_3(t) = 1 + t - 3t^2$ باشد:

الف) نشان دهید که این چندجمله ای ها یک پایه برای $\mathbb{P}_2$ تشکیل میدهند.

ب) مختصات چندجمله ای $5 + 2t - 4t^2$ را بر حسب پایه $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$ به دست آورید.

الف) There is an isomorphism between P_1, P_2, P_3 and the below vectors:

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. If we show that these vectors span the $\mathbb{R}^3$, we can conclude that P_1, P_2, P_3 span $\mathbb{P}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 3 pivot columns

ب) $c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ solve this equation using gaussian elimination

$c_1 = 2, \ c_2 = -1, \ c_3 = 3$

$$[(5 + 2t - 4t^2)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

سوال ۶) ثابت کنید که نگاشت مختصات (coordinate mapping)، یک تبدیل یک به یک و پوشا است.

Suppose that

$$[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

By definition of coordinate vectors,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n.$$

Since $\mathbf{u}$ and $\mathbf{w}$ were arbitrary elements of V, the coordinate mapping is one-to-one.

Given $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$, let $\mathbf{u} = y_1\mathbf{b}_1 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n$. Then, by definition, $[\mathbf{u}]_B = \mathbf{y}$. Since $\mathbf{y}$ was arbitrary, the coordinate mapping is onto $\mathbb{R}^n$.

سوال ۷) اگر S یک متوازی الاضلاع باشد که توسط بردارهای $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ تعیین شود و ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مساحت تصویر S تحت تبدیل A را بیابید.

Since the parallelogram S is determined by the columns of $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, the area of S is

$\left|\det\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right| = |-4| = 4$. The matrix A has $\det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6$. By Theorem 10, the area of $T(S)$ is $|\det A|\{\text{area of } S\} = 6 \cdot 4 = 24$.

Alternatively, one may compute the vectors that determine the image, namely, the columns of

$$A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -22 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

The determinant of this matrix is –24, so the area of the image is 24.