پاسخ سوال یک:

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ است که $A^2 = I$ (ماتریس همانی) می‌باشد.

1. **اثبات اینکه مقادیر ویژه A برابر $\lambda = \pm 1$ هستند:**

- اگر λ یک مقدار ویژه A باشد، آنگاه بردار ویژه v وجود دارد که:

$$Av = \lambda v$$

- با ضرب دو طرف در A:

$$A^2 v = \lambda^2 v$$

اما از فرض سوال $A^2 = I$، پس:

$$Iv = \lambda^2 v \quad \Rightarrow \quad v = \lambda^2 v$$

بنابراین $\lambda^2 = 1$ و نتیجه می‌شود $\lambda = \pm 1$.

2. **آیا A لزوماً قطرپذیر است؟**

- خیر. ماتریس A لزوماً قطرپذیر نیست. اگر A تعداد مقادیر ویژه تکراری داشته باشد یا بردارهای ویژه‌ای وجود داشته باشند که خطی مستقل نباشند، A ممکن است قطرپذیر نباشد. برای مثال، ماتریس A می‌تواند مانند $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد که مقادیر ویژه‌اش ± 1 هستند اما قطرپذیر نیست.

پاسخ سوال دو:

گام 1: یافتن مقادیر ویژه

با حل معادله مشخصه $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

مقادیر ویژه:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

گام 2: یافتن بردارهای ویژه

1. برای $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرمال‌سازی:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

2. برای $\lambda_2 = 1$:

$$(A - I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نرمال‌سازی:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال سه:

اثبات اینکه اگر A قطرپذیر باشد، تعداد n بردار ویژه خطی مستقل دارد:

- اگر A قطرپذیر باشد، ماتریس می‌تواند به‌صورت $P^{-1}AP = D$ نوشته شود که D ماتریس قطری است.
- ستون‌های P بردارهای ویژه خطی مستقل A هستند.
- بنابراین، A دارای n بردار ویژه خطی مستقل است.

پاسخ سوال چهار:

1. **اثبات متعامد بودن بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز:**
   - برای ماتریس متقارن، مقدار ویژه‌ها حقیقی هستند. اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ و v_1, v_2 بردارهای ویژه متناظر باشند، داریم:

   $$Av_1 = \lambda_1 v_1 \qquad Av_2 = \lambda_2 v_2$$

   ضرب داخلی این روابط نشان می‌دهد که v_1 و v_2 متعامد هستند.
2. **اگر مقادیر ویژه تکراری باشند، آیا A لزوماً قطرپذیر است؟**
   - بله. برای ماتریس‌های متقارن، حتی اگر مقادیر ویژه تکراری باشند، ماتریس همچنان قطرپذیر است، زیرا بردارهای ویژه می‌توانند متعامد شوند.

پاسخ سوال پنج:

ابتدا باید مقدار ویژه ی متناظر با بردار ویژه ای که در سوال داده شده است را بیابیم.

$$Av_1 = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .2 \\ .3 & .8 & .3 \\ .3 & .2 & .5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} .1 \\ .6 \\ .3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1 \\ .6 \\ .3 \end{bmatrix} = 1 \cdot v_1$$

که متوجه می شویم مقدار ویژه ۱ است.

حال باید بردار ویژه ی متناظر با مقادیر ویژه ای که در سوال داده شده است را بیابیم:

ابتدا $\lambda_2 = 0.5$:

$$(A - .5I)v_2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -.1 & 0 & .2 & 0 \\ .3 & .3 & .3 & 0 \\ .3 & .2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال برای $\lambda_2 = 0.2$:

$$(A - .2I)v_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} .2 & 0 & .2 & 0 \\ .3 & .6 & .3 & 0 \\ .3 & .2 & .3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باید مقادیر وزن ها را طوری بدست آوریم که $x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ باشد :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} .1 & 2 & -1 & 0 \\ .6 & -3 & 0 & .3 \\ .3 & 1 & 1 & .7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 0 & .3 \end{array}\right]$$

که این به این معنی است که :

$$x_0 = v_1 + .1v_2 + .3v_3$$

$$x_1 = Av_1 + .1Av_2 + .3Av_3 = v_1 + .1 \cdot (.5)v_2 + .3 \cdot (.2)v_3$$

$$x_2 = A^2v_1 + .1A^2v_2 + .3A^2v_3 = v_1 + .1 \cdot (.5)^2v_2 + .3 \cdot (.2)^2v_3$$

$$\vdots$$

$$x_k = v_1 + .1 \cdot (.5)^kv_2 + .3 \cdot (.2)^kv_3$$

که با توجه به عبارت بالا وقتی $k \to \infty$ باشد، X_k به سمت V_1 میل می کند چون $(0.5)^k \to 0$ و $(0.2)^k \to 0$ است.

پاسخ سوال شش:

اگر معادله مشخصه M را با $p(\lambda)$ نمایش دهیم، داریم:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -12 & 4 \\ -1 & 0-\lambda & -2 \\ -1 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-12)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda - 2$$

$$p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

بنابراین مقادیر ویژه A برابر با 2 و 1+ و 1- خواهند بود.

برای محاسبه مقادیر ویژه M^5 نیز می دانیم اگر λ مقدار ویژه M باشد، λ^5 مقدار ویژه ی M^5 خواهد بود. بنابراین مقادیر ویژه M^5 برابر خواهند شد با : 32 و 1+ و 1-

همچنین می‌دانید که یک ماتریس معکوس ناپذیر است اگر و تنها اگر حداقل یک مقدار ویژه 0 داشته باشد، از آنجایی که ماتریس مقدار ویژه 0 ندارد بنابراین معکوس پذیر خواهد بود. از طرفی می‌دانید که اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس M باشد ، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ یک مقدار ویژه برای ماتریس M^{-1} خواهد بود و بنابراین مقادیر ویژه ماتریس M^{-1} برابر است با:

$$\frac{1}{2} \quad , \quad \pm 1$$

پاسخ سوال هفت:

الف)

$$
\begin{aligned}
Av &= \lambda v \\
&= (a - bi)(Re(v) + iIm(v)) \\
&= (aRe(v) + bIm(v)) + i(aIm(v) - bRe(v)) \\
A(Re(v)) &= Re(Av) = aRe(v) + bIm(v) \\
A(Im(v)) &= Im(Av) = -bRe(v) + aIm(v)
\end{aligned}
$$

ب) با توجه به پاسخ قسمت قبل داریم:

$$A(Re(v)) = P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A(Im(v)) = P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} A(Re(v)) & A(Im(v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = PC$$

پاسخ سوال هشت:

الف)

Since $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

$$T(e_1) = -b_1 - b_2 + b_3$$

$$T(e_2) = -b_2 - b_3$$

$$T(e_3) = b_1$$

ب)

$$T(e_1)_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad T(e_2)_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad T(e_3)_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ج)

$$[T(e_1)_\beta \quad T(e_2)_\beta \quad T(e_3)_\beta] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

پاسخ سوال نه:

1. **اثبات اینکه تمام مقادیر ویژه A یا صفر هستند یا عددهای موهومی خالص:**
   - برای ماتریس پادمقارن، اگر λ مقدار ویژه باشد:

$$Av = \lambda v \qquad A^T = -A$$

نشان می‌دهد که λ عدد موهومی یا صفر است.

2. **اگر n فرد باشد، نشان دهید 0 یک مقدار ویژه A است:**
   - برای n فرد، دترمینان ماتریس پادمقارن صفر است، زیرا حداقل یک مقدار ویژه صفر است.