به نام خدا

تمرین چهارم

جبرخطی کاربردی - پاییز ۱۴۰۳

۱.پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.

۲. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.

۳. برای تمرین‌ها و پروژه‌ها **در مجموع ۱۰ روز** بودجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین‌ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.

۳. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل تدریسیاری سوال خود را بپرسید: la.fall.1403@gmail.com

۴. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW4_Name_StudentNumber آپلود کنید.

سوال ۱)

مقدار a، b، c را به گونه‌ای بیابید که معادله صفحه $z = ax + by + c$، صفحه‌ای $best\ fit$ برای مجموعه نقاط زیر باشد. (نقاط را به فرم $(x، y، z)$ بخوانید)

$$\{(0,0,1.1),(1,1,2),(0,1,-0.1),(1,0,3),(0,-1,2)\}$$

سوال ۲)

فرض کنید W زیرفضایی از R^4 باشد و پایه‌ای به شکل زیر داشته باشد:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}، \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

یک پایه orthonormal برای W بیابید.

سوال ۳)

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کرده و دلیل مناسب بیاورید.

الف) هر مجموعه $orthogonal$ در R^n مستقل خطی نیست.

ب) اگر ستون‌های ماتریس $A_{m\times n}$ ، $orthonormal$ باشند، آنگاه تبدیل خطی $x \mapsto Ax$ طول را حفظ می‌کند.

ج) تصویر عمودی y بر روی $\mathbf{v}$ با تصویر عمودی y بر روی $c\mathbf{v}$ یکسان است اگر $c \neq 0$ باشد.

د) ماتریس‌های $orthogonal$ معکوس‌پذیر هستند.

هـ) برای هر y و هر زیرفضای W بردار $y - proj_W y$ بر W متعامد است.

و) تصویر عمود $\hat{y}$ از y بر روی زیرفضای W وابسته به پایه متعامد مورد استفاده در محاسبه $\hat{y}$ می‌باشد.

ی) اگر y در زیرفضای W باشد، آنگاه تصویر عمود y بر روی W همان y می‌باشد.

سوال ۴)
فرض کنید $u،v \in V$ باشد. برای هر $a، b \in R$ ثابت کنید $\|au + bv\| = \|bu + av\|$ اگر و تنها اگر $\|u\| = \|v\|$.

سوال ۵) **(امتیازی)**
فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ثابت کنید هر بردار x در R^n را میتوان به فرم $x = p + u$ نوشت به طوریکه p در $Row(A)$و u در $Nul(A)$ باشد.
همچنین نشان دهید که معادله $Ax = b$ یک معادله $consistent$ (دارای حداقل یک پاسخ) است و یک p منحصربفردی در $Row(A)$ وجود دارد به نحوی که $Ap = b$.

سوال ۶) **(امتیازی)**
ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

الف) تجزیه SVD را برای A انجام دهید. (تمامی مراحل نوشته شود.)
ب) رتبه ماتریس A را با استفاده از مقادیر منفرد به دست آورید.

سوال ۷)
با توجه به اینکه a, b, c اسکالر هستند. سیستم معادلات زیر inconsistent است زیرا نمودار معادلات صفحات با یکدیگر موازی هستند.
نشان دهید که مجموعه تمام راه حل‌های Least Squares سیستم دقیقا صفحه ای است که معادله آن به شکل $x - 2y + 5z = (a + b + c)/3$ است.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = a \\ x - 2y + 5z = b \\ x - 2y + 5z = c \end{cases}$$

سوال ۸) **(امتیازی)**

ثابت کنید ماتریس دوران یک ماتریس orthonormal است و عبارتی از آن برحسب محور دوران و زاویه دوران به دست آورید و روی مقادیر ویژه آن بحث کنید. راهنمایی: همان‌طور که پر واضح است ماتریس دوران چون ۳ در ۳ است ۳ مقدار ویژه دارد که این مقادیر ویژه خواصی دارند. (به محور دوران دقت کنید.)

سوال ۹)

بردار $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ و بردار $u_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ و بردار $u_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ و داریم

$W = \text{span}(u_1, u_2)$:

الف) اگر $U = (u_1 , u_2)$ مقدار U^TU و UU^T را به دست آورید.

ب)مقدار $proj_W y$ و $y(UU^T)$ را به دست آورید.

سوال ۱۰)

برای ماتریس A تجزیه QR را انجام دهید و ماتریس‌های Q و R را به دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$