به نام خدا

تمرین چهارم

جبرخطی کاربردی – پاییز ۱۴۰۳

۱.پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.

۲. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.

۳. برای تمرین‌ها و پروژه‌ها **در مجموع ۱۰ روز** بودجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین‌ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.

۳. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل تدریسیاری سوال خود را بپرسید: la.fall.1403@gmail.com

۴. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید.

سوال ۱)

با استفاده از روش $Least\ Squares$ به حل این سوال می‌پردازیم. با فرض A به عنوان ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

$$(A^TA)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = A^Tz$$

ابتدا باید ماتریس ضرایب را تشکیل بدهیم. هر سطر این ماتریس، ضرایب یکی از نقاط ماست:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ترانهاده این ماتریس را هم بدست می‌آوریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بردار z هم براساس صورت سوال به این شکل است:

$$z = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2 \\ -0.1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حال با حل معادله ذکر شده به پاسخ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.02 \\ -1.04 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

سوال ۲)

فرض کنید:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

می‌توان با محاسبه ضرب داخلی این دو بردار نشان داد که متعامد نیستند؛ چرا که حاصل ضرب داخلیشان برابر با ۹ نیست.

بنابراین باید ابتدا یک پایه متعامد برای W بیابیم. از روش گرم اشمیت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} w_1 := v_1 \\ w_2 := v_2 + av_1 \\ w_1 \cdot w_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{aligned} 0 &= \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1) \\ &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= 2 + 3a. \end{aligned}$$

به این ترتیب $a = -{}^{2}/_{3}$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

تغییر ابعاد متعامد بودن بردارها را تغییر نمی‌دهد. بنابراین برای رهایی از اعشار میتوان نوشت:

$$3\mathbf{w}_2 = 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\3\\1\\1\end{bmatrix}.$$

بنابراین مجموعه $\{w_1 . 3w_2\}$یک پایه متعامد برای W است.
ولی طول این بردارها یک نمی‌باشد بنابراین
orthonormal نیست. برای این تبدیل می‌توان نوشت:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$
$$\|3\mathbf{w}_2\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2+1^2} = \sqrt{15}.$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\1\end{bmatrix} \right\}.$$

سوال ۳)

الف) صحیح – اما هر مجموعه $orthogonal$ متشکل از بردارهای **غیرصفر**، مستقل خطی است.

ب) صحیح – طبق قضیه 7(a) کتاب.

ج) صحیح – طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از $Example\ 3$

د) صحیح - طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از $Example\ 7$

ه) صحیح - با استناد به $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$.

و) غلط – با توجه به اثبات قضیه ۸ کتاب که مربوط به $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$ است (بهتر است به روابط اشاره شود) .

ی) صحیح – می‌دانیم طبق متن کتاب (پاراگرافِ قبل از قضیه 9) اگر y در $W = Span\{u_1, \dots, u_p\}$ باشد آنگاه $Proj_W y = y$.

سوال ۴)

قسمت اول: فرض کنیم $\|u\| = \|v\| = \beta$. در این صورت:

$$\|au+bv\| = \sqrt{(au+bv).(au+bv)} = \sqrt{a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$
$$\|bu+av\| = \sqrt{(bu+av).(bu+av)} = \sqrt{b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)\beta^2 + 2ab(u.v)}$$
$$\Longrightarrow \quad \|au+bv\| = \|bu+av\|$$

قسمت دوم: فرض کنیم $\|au+bv\| = \|bu+av\|$. باید ثابت کنیم $\|u\| = \|v\|$.

$$\|au+bv\| = \|bu+av\| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(au+bv).(au+bv)}$$
$$= \sqrt{(bu+av).(bu+av)}$$
$$\Longrightarrow \quad a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab(u.v) = b^2\|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2ab(u.v)$$
$$\Longrightarrow \quad (a^2-b^2)\|u\|^2 + (b^2-a^2)\|v\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a^2-b^2)(\|u\|^2 - \|v\|^2) = 0$$

در حالتی که $a^2 = b^2$ باشد، کافیست $a = \pm b$ را در فرض مسئله جایگذاری کنیم تا حکم به سادگی بدست آید.
اما اگر $a^2 \neq b^2$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $\|u\|^2 = \|v\|^2$ و در نتیجه $\|u\| = \|v\|$ و حکم برقرار است.

سوال ۵)
با استناد به قضیه $Orthogonal\ Decomposition\ Theorem$ هر x در R^n را می‌توان منحصرا به صورت $x = p + u$ نوشت که p در $Row\ A$ و u در $(Row\ A)^{\perp}$. با استفاده از قضیه 3 در بخش 6.1 می‌دانیم $(Row\ A)^{\perp} = Nul\ A$ بنابراین u در Nul A است.
سپس فرض کنید $Ax = b$ یک معادله $consistent$ است. فرض کنید x یک پاسخ باشد و x را به فرم $x = p + u$ مشابه آنچه گفته شد می‌نویسیم. سپس داریم $Ap = A(x-u) = Ax - Au = b - 0 = b$ بنابراین معادله $Ax = b$ حداقل یک پاسخ p در $Row\ A$ دارد.
در نهایت فرض کنید p و p_1 هردو در $Row\ A$ قرار دارند و هردو در معادله $Ax = b$ صدق می‌کنند. $p - p_1$ در $(Row\ A)^{\perp} = Nul\ A$ است چرا که $A(p-p_1) = Ap - Ap_1 = b - b = 0$.
معادله $p = p_1 + (p - p_1)$ و $p = p + 0$ هردو p را به مجموع بردارهایی در $(Row\ A)$ و $(Row\ A)^{\perp}$ تجریه می‌کنند. با استناد به منحصربفرد بودن Orthogonal Decomposition Theorem میتوان گفت $p = p_1$ و p منحصربفرد است.

سوال ۶)

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^TA - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow (14-\lambda)(77-\lambda) - (32\times 32) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.59, \lambda_2 = 90.4$$

$$\sigma_1 = 0.76, \sigma_2 = 9.5 \Rightarrow \sum = \begin{pmatrix} 0.76 & 0 \\ 0 & 9.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -0.92 \\ 0.38 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.92 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -0.92 & 0.38 \\ 0.38 & 0.92 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -1.63 \\ -3.05 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.5 \\ 0.78 \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه $\begin{Bmatrix} u_1{}^T x = 0 \\ u_2{}^T x = 0 \end{Bmatrix}$ ، u_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

سوال ۷)

ابتدا بردارها و ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \text{ and } A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v}^T \\ \mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

حال برای $Least\ squares$ باید معادله $A^T A\, x = A^T b$ را حل کنیم:

$$A^T b = av + bv + cv = (a+b+c)v$$
$$A^T A = vv^T + vv^T + vv^T = 3vv^T \ \rightarrow \ A^T A\, x = 3(vv^T)x = 3v(v^T x)$$

از آنجایی که $v^T x$ یک اسکالر(ضرب داخلی دوبردار) است معادله را می‌توانیم به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$3(v^T x)v = (a+b+c)v \ \rightarrow \ 3(v^T x) = (a+b+c) \ \rightarrow \ (v^T x) = (a+b+c)/3$$

$$v^T x = 1x - 2y + 5z$$

پس داریم: $1x - 2y + 5z = (a+b+c)/3$

سوال ۸)

سه حالت برای این ماتریس های متصور است: دوران حول x، y یا z

ماتریس دوران حول محور x با زوایه ϕ

$$R_X(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

به طرز مشابه برای دو محور دیگر:

$$R_Y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه مقادیر ویژه برای ماتریس اول(بقیه حالات به خاطر تقارن مشابه همین حالت هستند):

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi)-\lambda & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi)-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)[(\cos(\phi)-\lambda)^2 + \sin^2(\phi)] = 0 \rightarrow \begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ (\cos(\phi)-\lambda)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda^2 - 2\cos(\phi)\,\lambda + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{2\cos(\phi) \pm \sqrt{4\cos^2(\phi) - 4}}{2} = \cos(\phi) \pm j\sin(\phi) = e^{\pm j\phi}$$

پس مقادیر ویژه ها به این صورت هستند:

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = e^{j\varphi}, \qquad \lambda_3 = e^{-j\phi}$$

مقادیر ویژه دوم و سوم، نشان دهندع تغییر فاز بردار ورودی هستند، به عبارتی می‌توان زاویه یک بردار نسبت به یک محور را به صورت فاز آن (مثل فازور در مدار یا سیگنال..) در نظر گرفت.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

سوال ۹)

در این سوال مقدار درست $u_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ است.(نمره سوال به همه داده می‌شود)

الف)

$$U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$UU^T = \begin{pmatrix} 8/9 & -2/9 & 2/9 \\ -2/9 & 5/9 & 4/9 \\ 2/9 & 4/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

ب) $\mathrm{proj}_w y = UU^T y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

سوال ۱۰)

از قاعده ی Gram-Schmidt استفاده میکنیم تا یک basis برای column space ماتریس A پیدا کنیم.

$$w1 = v1 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$w2 = v2 - \frac{v2 \,.\, w1}{||w1||^2}w1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} - \frac{0}{9}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$w3 = v3 - \frac{v3 \,.\, w1}{||w1||^2}w1 - \frac{v3 \,.\, w2}{||w2||^2}w2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix} - \frac{6}{9}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} - \frac{-4}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

حال w1, w2, w3 را normalize میکنیم تا basis را به دست بیاوریم.

$$u1 = \frac{w1}{||w1||} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$u2 = \frac{w2}{||w2||} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$u3 = \frac{w3}{||w3||} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$Q = [u1 \quad u2 \quad u3] = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

حال ماتریس R را به دست می آوریم.

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\\2 & -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2}\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$