

به نام خدا

تمرین دوم

جبرخطی کاربردی - پاییز 1403

1. پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و در صورت مشاهده هرگونه تقلب نمره صفر برای کل تمرین منظور خواهد شد.
2. پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
3. برای تمرین ها و پروژه ها در مجموع 10 روز بوجه تاخیر خواهید داشت؛ دقت کنید که ددلاین ها به هیچ عنوان تمدید نخواهند شد.
3. در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل تدریسیاری سوال خود را بپرسید:
la.fall.1403@gmail.com
4. پاسخ خود را در یک فایل pdf با فرمت HW?_Name_StudentNumber آپلود کنید.

- سوال (۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید و در غیر این صورت، دلیل آن را توضیح دهید یا برای آنها مثال نقض بیاورید.
- الف) اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که فقط از ± 1 تشکیل شده باشد، آنگاه دترمینان آن بر 2^{n-1} بخش پذیر است.
- ب) اگر دترمینان A صفر باشد، آنگاه دو ردیف یا دو ستون یکسان هستند یا اینکه یک ردیف یا یک ستون، صفر می باشد.
- پ) اگر دو ماتریس A و B معکوس پذیر و $n \times n$ باشند و $I = A^2$ و $I = B^2$ آنگاه $BA = (AB)^{-1}$
- ت) فضای سطری A همان فضای ستونی A^T است.
- ث) اگر ماتریس P یک ماتریس وارون پذیر باشد، رنک PA با رنک A برابر است.

- سوال (۲) برای ماتریس داده شده ترکیب خطی بردارهای تشکیل دهنده null space و column space را بدست بیاورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

- سوال (۳) دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه زیر را بدست آورید و با استفاده از قاعده کرامر آنرا حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ -x + 3y + z = -1 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

- سوال (۴) مشخص کنید که هریک از مجموعه های زیر، یک زیرفضای برداری تشکیل میدهند یا خیر.

الف) مجموعه تمام چندجمله‌های به فرم $p(t) = at^2$ که a عضو \mathbb{R} است، یک زیرفضای برداری برای \mathbb{P}_2 تشکیل می‌دهند.

ب) مجموعه تمام بردارهای به فرم $\begin{bmatrix} s + 3t \\ s - t \\ 2s - t \\ 4t \end{bmatrix}$ یک زیرفضای برداری برای \mathbb{R}^4 می‌باشد.

سوال ۵) اگر $p_1(t) = 1 + t^2$ ، $p_2(t) = t - 3t^2$ و $p_3(t) = 1 + t - 3t^2$ باشد:

الف) نشان دهید که این چندجمله‌ای‌ها یک پایه برای \mathbb{P}_2 تشکیل می‌دهند.
ب) مختصات چندجمله‌ای $5 + 2t - 4t^2$ را بر حسب پایه $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$ به دست آورید.

سوال ۶) ثابت کنید که نگاشت مختصات (coordinate mapping)، یک تبدیل یک به یک و پوشا است.

سوال ۷) اگر S یک متوازی‌الاضلاع باشد که توسط بردارهای $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ تعیین شود و ماتریس $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مساحت تصویر S تحت تبدیل A را بیابید.