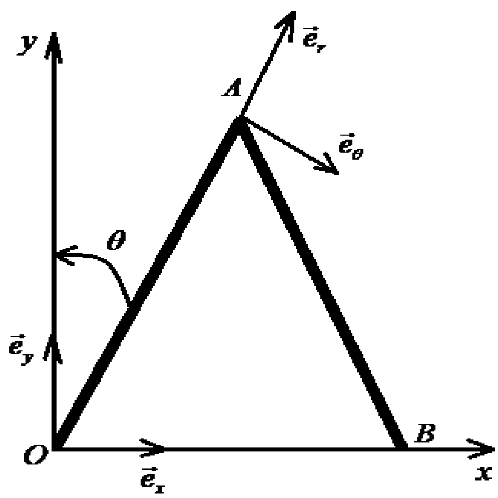
EXAMEN MECANIQUE DU POINT

EXERCICE 1 *(6points)*

Une échelle double est posée sur le sol, un des points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'échelle à l'instant t est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé par la portion OA de l'échelle avec le mur. L'extrémité B de l'échelle glisse sur le sol. L'échelle est telle que $OA = AB = \ell$.

1. 1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(A/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$ et accélération $\vec{a}(A/R) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}$ du point A dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction de ℓ, θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. ***(2points)***

1. 2. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}(B/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}$ et accélération $\vec{a}(B/R) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2}$ du point B en fonction de ℓ, θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$. ***(4points)***



EXERCICE 2 *(8points)*

Le référentiel $\Re$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point matériel M se déplace sur une courbe définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 2Ae^{\alpha t}\sin(\alpha t) \\ y = 2Ae^{\alpha t}\cos(\alpha t) \\ z = Ae^{\alpha t} \end{cases}$$

où A et α sont des constantes, et x, y, z sont les coordonnées cartésiennes du point M à l'instant t.

On désigne par $\left(M,\vec{\tau},\vec{n},\vec{b}\right)$ le repère de Frenet, $\vec{\tau}$ étant le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal en M à $\vec{\tau}$, dirigé vers le centre de courbure et $\vec{b}$ complète le repère afin qu'il soit orthonormé direct. On note s l'abscisse curviligne du point M et R le rayon de courbure de la trajectoire au point M.

2.1. Exprimer dans $\Re$ la vitesse $\vec{V}$ du point M ainsi que sa norme en fonction

de A, α et t. ***(2points)***

2.2. En déduire l'expression de $\vec{\tau}$ dans le repère $\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$. ***(1point)***

2.3. Montrer que la vitesse $\vec{V}$ du point M fait un angle θ constant avec l'axe (Oz). ***(1point)***

2.4. Exprimer dans $\Re$ l'accélération $\vec{a}$ du point M ainsi que sa norme en fonction

de A, α et t. ***(2points)***

2.5. Déterminer la norme a_τ de l'accélération tangentielle du point M en fonction

de A, α et t. ***(0,5point)***

2.6. En déduire la norme a_n de l'accélération normale du point M en fonction

de A, α et t. ***(0,5point)***

2.7. En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire au point M en fonction de A, α et t. Montrer que R est proportionnel à la coordonnée z du point M. ***(1point)***

EXAMEN MECANIQUE DU POINT

EXERCICE 3 *(6points)*

Le référentiel d'étude ($\mathcal{R}$), associé au repère $\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, est supposé galiléen. On étudie un pendule, constitué d'un fil inextensible de longueur ℓ attaché au point C, au bout duquel se trouve un point matériel M de masse m. On supposera que le fil reste tendu en permanence et que les éventuels frottements sont négligeables.

On s'intéresse à la situation d'un pendule conique, pour lequel la trajectoire du fil dans ($\mathcal{R}$) est un cône d'angle au sommet α constant.

3.1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la vitesse angulaire ω de rotation de M est constante et l'exprimer en fonction de ℓ, g et α. ***(2points)***

3.2. Quelle valeur minimale peut prendre ω? Cette valeur sera notée $\omega_{\min}$ ***(1point)***

3.3. Exprimer la norme T de la tension du fil en fonction de m, g et α. ***(0,5point)***

3.4. Sachant que le fil cède lorsque la tension du fil dépasse une valeur limite $T_{\max}$, exprimer l'angle $\alpha_{\max}$ et la vitesse angulaire $\omega_{\max}$ que peut atteindre le pendule conique. ***(1point)***

3.5. ***Application numérique :*** $m = 20g$, $g = 9{,}8 m.s^{-2}$, $\ell = 50cm$ et $T_{\max} = 2N$.

Déterminer $\omega_{\max}$ en tour par seconde ***(1,5point)***