Projet_3_Aminata_Ndiaye

January 17, 2023

1 Projet 3: Descente de gradient stochastique

##Préliminaires

1.0.1 Importation des packages

[1]:
```
from math import *
import random
import numpy as np
from numpy.random import multivariate_normal, randn # Probability distributions␣
 ↪on vectors

import pandas as pd  #pandas pour la gestion des données
import seaborn as sn
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import Ridge
from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error
```

1.0.2 Génération de la base de données

J'ai décidé de travailler sur un dataset que j'ai généré aléatoirement composé de 6 variables décorrélées. Connaissant les coefficients de régression, il est aussi plus simple de s'assurer du bon fonctionnement de la méthode et de l'implémentation de l'algorithme de descente de gradient.

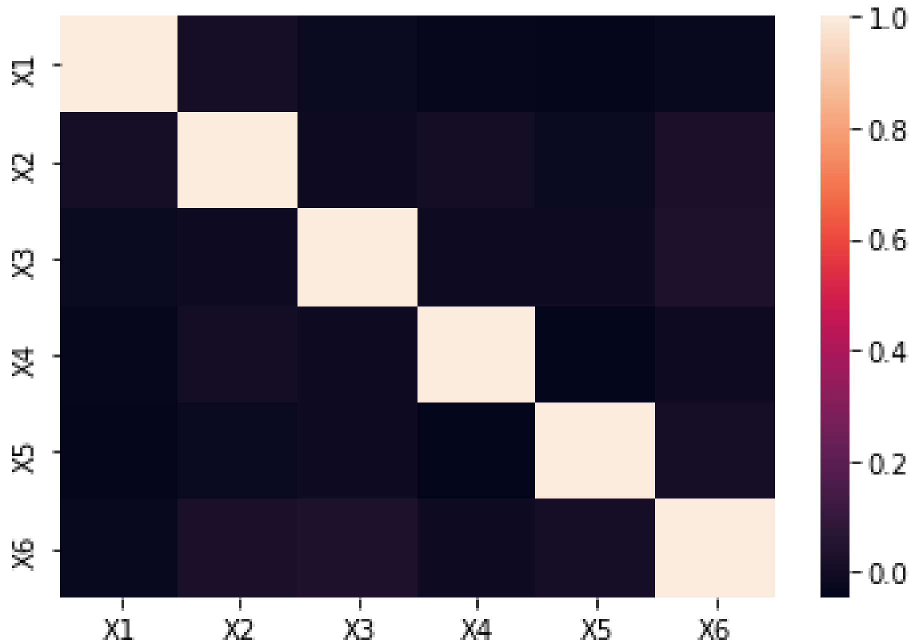
[2]:
```
np.random.seed(4)
n=1000
nbr_var=6
x=np.zeros((n,nbr_var))
sd=10
mu=50
for i in range(nbr_var):
  x[:,i]= np.random.randn(n)*sd+mu
design=pd.DataFrame(x,columns = ['X1', 'X2', 'X3', 'X4', 'X5', 'X6'])
coef=np.array([6,4,0.8,0.02,7,3.8]).reshape(-1,1)
y=np.dot(design,coef)+np.random.randn(n).reshape(-1,1)
```

[3]:
```
dataset=design
dataset
```

[3]:
```
            X1         X2         X3         X4         X5         X6
0    50.505617  48.696894  50.295385  40.192077  64.293718  52.412063
1    54.999513  31.111271  44.140924  58.286383  47.378074  42.620170
2    40.040911  31.057035  53.082340  66.513806  56.034249  54.876799
3    56.935985  42.358665  58.081081  43.839962  47.762371  41.660726
4    45.816985  58.248199  51.340520  46.276674  46.635936  57.481332
..         …          …          …          …          …          …
995  48.325473  40.090112  42.060183  37.207292  59.217622  59.130322
996  66.809791  45.170529  43.691978  35.219584  54.505177  48.683805
997  41.714710  53.582580  67.778976  54.752323  62.686795  68.366000
998  53.693850  50.323201  42.637406  58.305153  64.310586  61.257871
999  41.058795  27.435728  28.180498  32.679995  56.933730  53.227525

[1000 rows x 6 columns]
```

Nous obtenons la matrice de corrélation suivante.

[4]:
```
#Matrice de corrélation
corrMatrix = dataset.corr()
sn.heatmap(corrMatrix, annot=False)
plt.show()
```



1.0.3 Séparation du training et du test set

[5]:
```
#Séparation du training set et du test set
X_train,X_test,y_train,y_test=train_test_split(design,y,test_size=0.33,␣
 ↪random_state=1)
```

1.0.4 Détermination de la borne supérieure pour le learningrate

[6]:
```
#Plus grand valeur propre de la matrice de XX.T
max_ev=max(np.linalg.eigvals(np.dot(X_train.T, X_train))).real
min_ev=min(np.linalg.eigvals(np.dot(X_train.T, X_train))).real
# Nous obtenons la borne supérieur du pas que nous pouvons utilisant grace au␣
 ↪résulat théorique suivant
step=1/max_ev
step
```

[6]:
```
9.914984017788875e-08
```

[7]:
```
min_ev
```

[7]:
```
59268.91510975949
```

[8]:
```
# Définition de la fonction de perte
def ridge_error(y,X,beta,lambd):

  return(((np.dot(X,beta)-y)**2).sum()/2+lambd*(beta**2).sum()/2)/len(y)
```

[9]:
```
def gradient_descent_ridge(X, y,lambd, learningrate=1e-3,␣
 ↪epochs=10000,epsilon=1e-2,monit=True,arret=True):
    """
  Algorithme de descent de gradient avec pénalité ridge

  Parametres
  ----------
  X : np.array
    matrice de design

  y : np.array
    vecteur du target

  lambd: float
    parametre de régularisation

  epochs: int
    Nombre d'epochs
```

```
    monit : bool
        Affiche l'itération en cours



    arret : bool
        Algorithme s'arrete lorsque la condition d'arret est satisfaite

    std : float, default=1.
        Standard-deviation of the noise

    epsilon : float
        Paramètre de précision pour la condition d'arret
    """
      ridge=[]
      beta = pd.DataFrame([0,0,0,0,0,0]) # Initialisation des coefficients
      for i in range(epochs+1):
        if i%(epochs/100)==0 and monit: #monitoring
          print("itération {} en cours ...".format(i))
        # Updating beta
        delta =  np.subtract(np.dot(X,beta),y.reshape(-1,1))
        gradient=np.dot(X.T,delta)+ lambd*beta
        beta_new= beta-learningrate * gradient # on retire un gradient
        ridge.append(ridge_error(y,X,beta_new,lambd)) # on calcule l'erreur

        if np.linalg.norm(gradient)<epsilon and arret: #condition d'arrêt
          print("L'algorithme a convergé ")
          break
        beta=beta_new

      return beta,ridge
```

1.1 Question 1

1.1.1 Algorithme de descente de gradient stochastique

[10]:
```
batch_size=1
def gradient_stochastique_descent_ridge(X, y,lambd, learningrate=step,␣
 ↪iters=1000,epsilon=1e-4, batch_size=batch_size,monit=True,arret=True):
    ridge=[]
    n=np.shape(X)[0]
    X=np.array(X)
    beta = np.array([0,0,0,0,0,0]).reshape(-1,1) # Initialisation des␣
 ↪coefficients

    for i in range(iters):
```

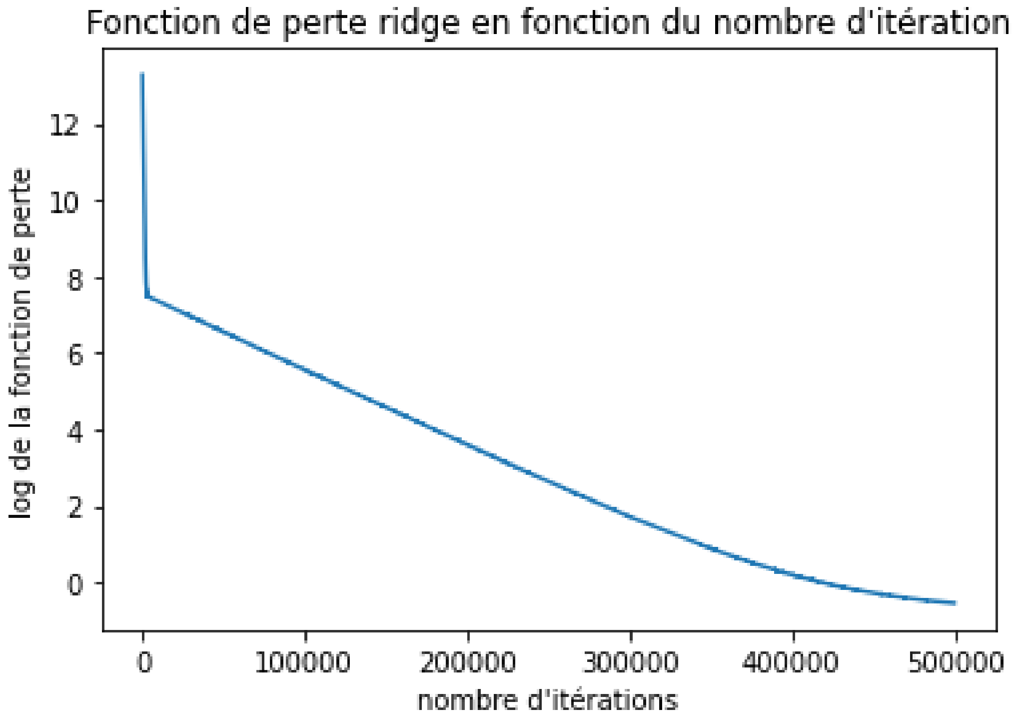
```
        # Updating beta
        ind=np.random.randint(0,n-1,batch_size) # On choisit les indices sur␣
 ↪lesquels on effectue la descente de gradient aléatoirement
        X_ind=np.array([X[i] for i  in ind ])
        y_ind=np.array([y[i] for i  in ind ]).reshape(-1,1)
        delta =  np.dot(X_ind,beta)-y_ind
        gradient=np.add(np.dot(X_ind.T,delta) , lambd*beta) # On calcule le␣
 ↪gradient
        beta_new= beta-learningrate * gradient # on retire un gradient
        ridge.append(ridge_error(y,X,beta_new,lambd))
        if monit :
          print("itération {} en cours ...".format(i))
        if np.linalg.norm(gradient)<epsilon and arret: #Condition d'arrêt
          print("L'algorithme a convergé ")
          break
        beta=beta_new

    return beta,ridge
```

1.1.2 Vitesse de convergence de l'algorithme

Nous tracons le graphique de la log fonction de perte en fonction du nombre d'itérations. Nous pouvons ainsi observer la vitesse de convergence.

[ ]:
```
beta_sto,ridge_sto=gradient_stochastique_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=1*
 ↪batch_size=1,iters=500000,monit=False)
plt.plot(np.log(ridge_sto))
plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```

[ ]:
```
Text(0.5, 1.0, "Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```



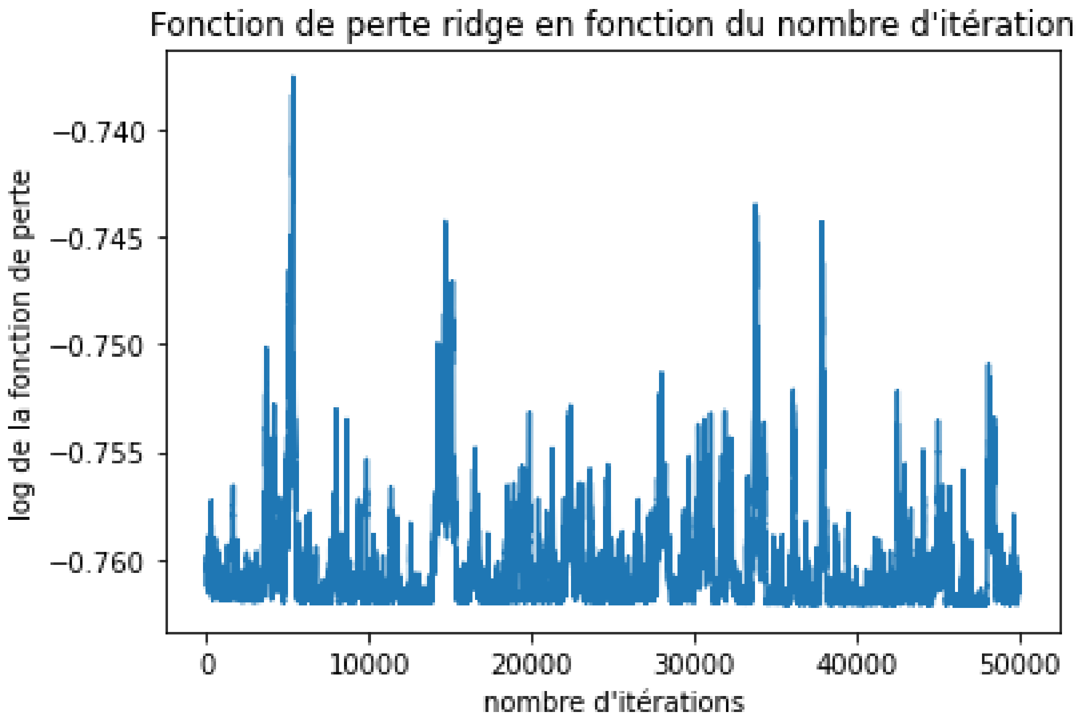
[ ]:
```
beta_sto
```

[ ]:
```
array([[5.96723138],
       [4.0078377 ],
       [0.82327477],
       [0.04201116],
       [6.97983696],
       [3.80071965]])
```

Le gradient stochastique converge en plus d'itération que le gradient classique mais il est aussi beaucoup plus rapide en terme de calculs car il n'accède qu'a une seule donnée pour chaque itération alors que le gradient classique accède aux n observations à chaque itération. De plus le gradient stochastique à tendance à converger vers un voisinage de la solution et à avoir une forte variance

[ ]:
```
#beta_sto,ridge_sto=gradient_stochastique_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=2
  ↪batch_size=1,epochs=100,monit=False,arret=False)
plt.plot(np.log(ridge_sto)[450000:])
plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```

[ ]:
```
Text(0.5, 1.0, "Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```

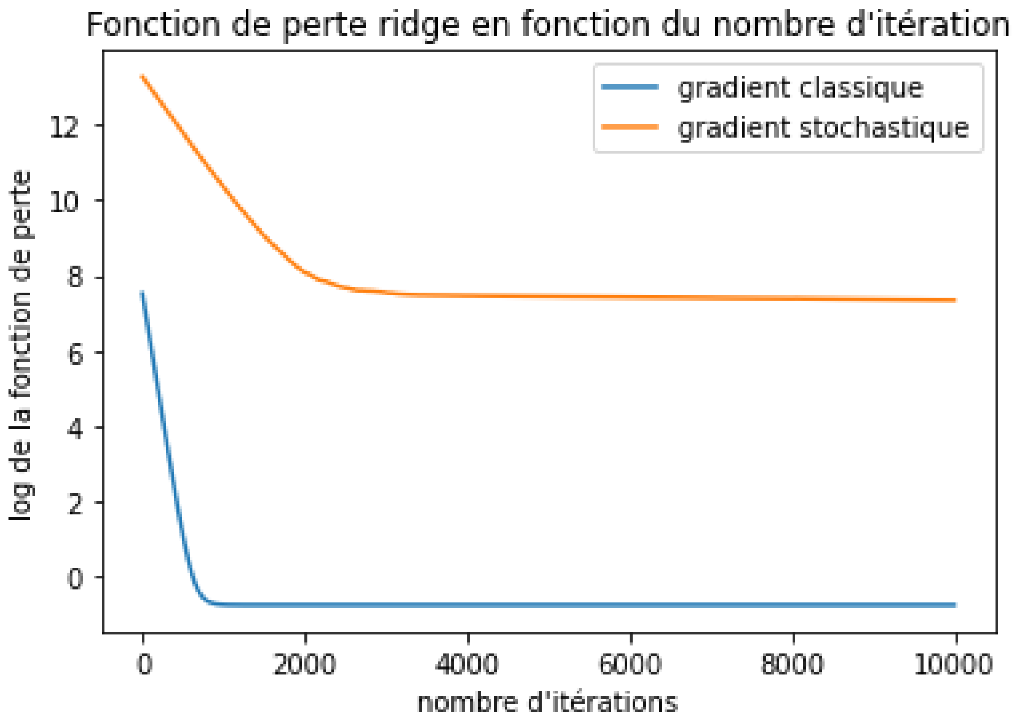


En zoomant sur la courbe on peut observer des oscillations.

1.1.3 Descente de gradient vs gradient stochastique (Vitesse de convergence)

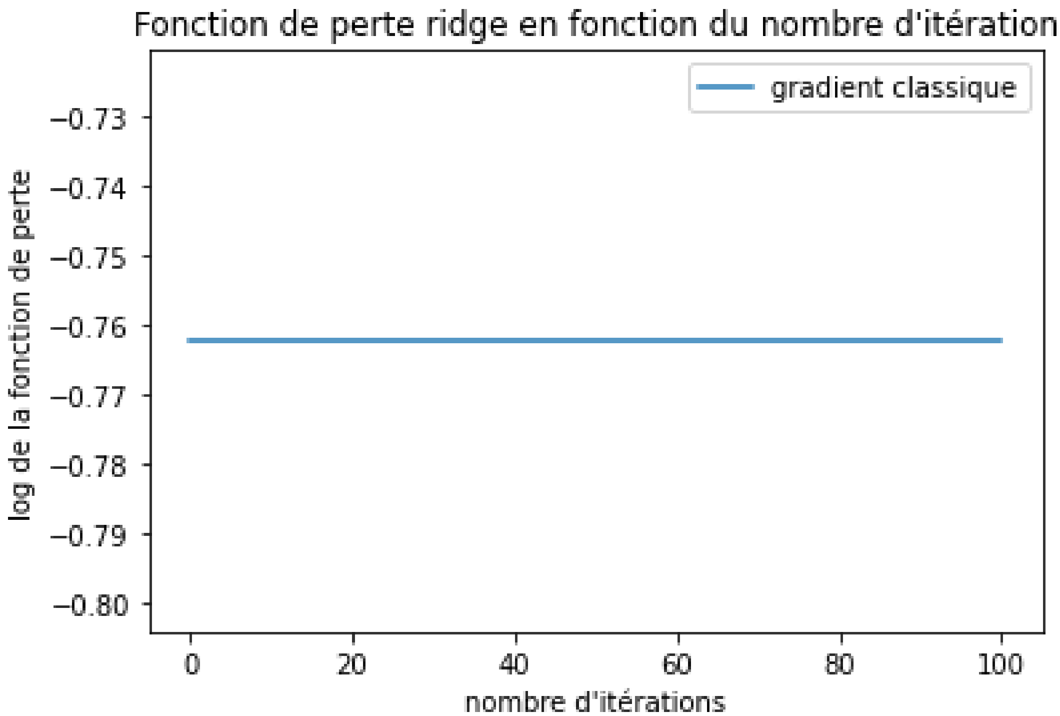
Dans cette partie nous allons comparer le gradient stochastique et la descente de gradient classique pour un même stepsize.

[ ]:
```
n=np.shape(X_train)[0]
beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=step,epochs=10000,arret
 ↪monit=False)
beta_sto,ridge_sto=gradient_stochastique_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=st
 ↪iters=10000,batch_size=1,arret=False, monit=False)
plt.plot(np.log(ridge)[1:],label="gradient classique")
plt.plot(np.log(ridge_sto)[1:],label="gradient stochastique")
plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.legend()
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
plt.show()
```



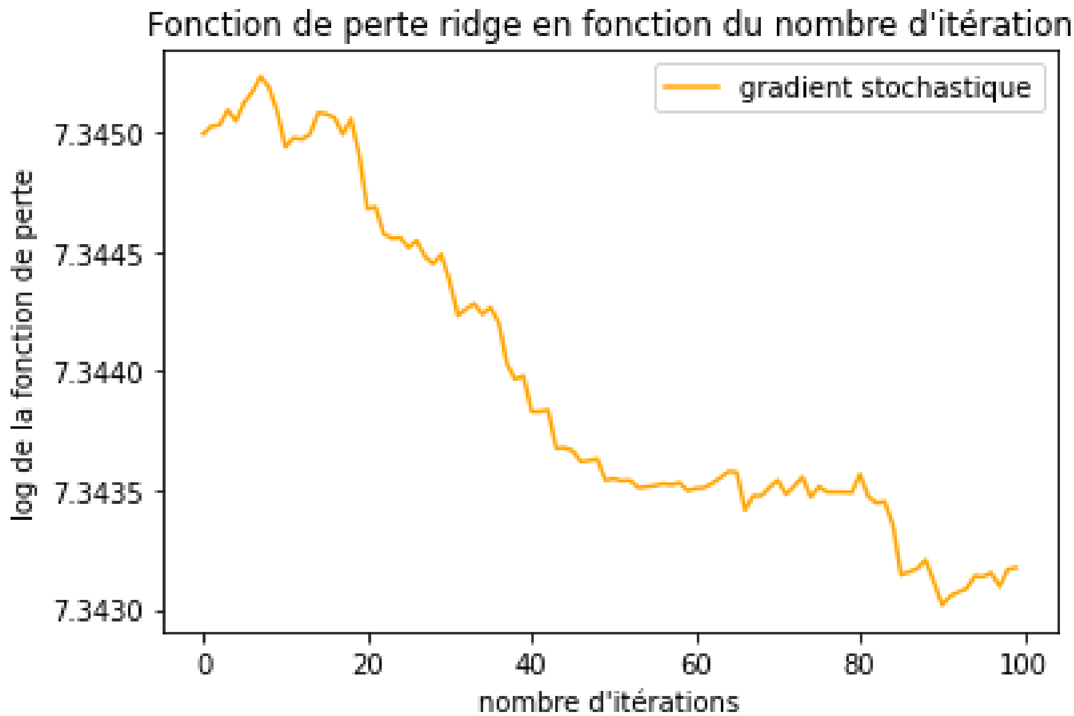
Le gradient classique a une courbe lisse.

[ ]:
```
plt.plot(np.log(ridge)[9900:],label="gradient classique")

plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.legend()
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
plt.show()
```



Le gradient stochastique a une courbe qui oscille.

[ ]:
```
plt.plot(np.log(ridge_sto)[9900:],label="gradient stochastique",c='orange')
plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.legend()
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
plt.show()
```



Nous pouvons observer les résultats suivants: - la descente de gradient stochastique est plus rapide en temps d'exécution que la descente de gradient classique - la descent de gradient stochastique donne un bon résultat pour l'estimation des patramètres -la descente de gradient stochastique a une forte variance.

D'après la théorie , la descente de gradient stochastique a une forte variance comparée à la descente de gradient classsique. On peut observer ce résultat expérimentalement.

La courbe du gradient stochastique oscille contrairement à celle du gradient classique. Une méthode pour limiter cette variance est d'utiliser l'algorithme de batch stochastique gradient. Cet algorithme est un compromis entre la descente de gradient stochastique et la descente de gradient classique. En effet, au lieu de calculer le gradient stochastique sur une seule observation nous allons le calculer sur plusieurs observations. Le nombre d'observations utilisées pour calculer le gradient est appelé batch size. Remarquons que lorsque le batch size est égal à n (le nombre d'observations), on retrouve le gradient classique.

1.2 Question 2

Dans cette partie nous cherchons à trouver le bon compromis entre la descente de gradient classique et la descente de gradient stochastique en utilisant le batch stochastique gradient.

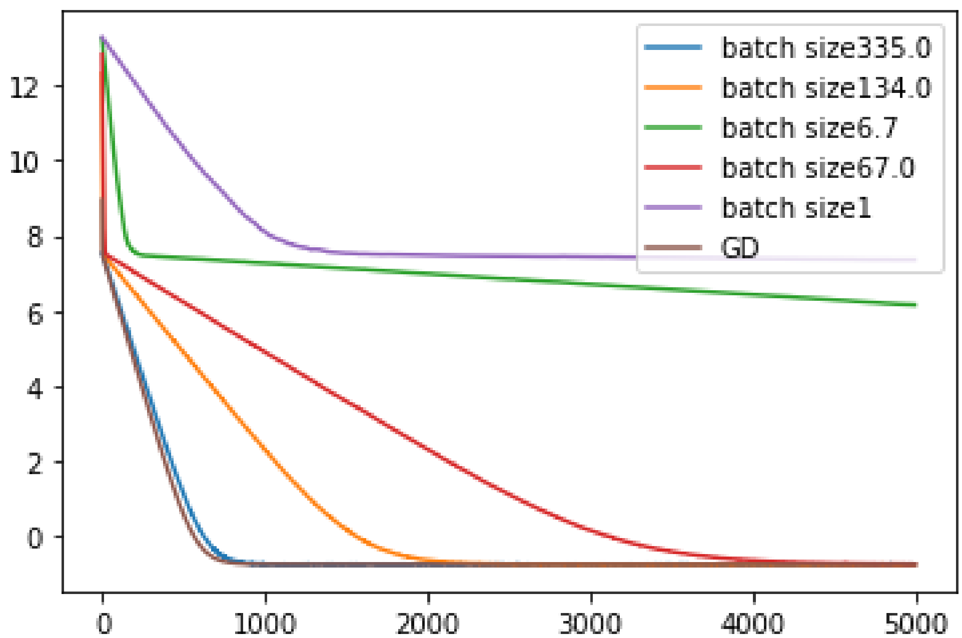
On crée une liste de batch size grossière, nous l'affinerons par la suite.

[ ]:
```
BS=range(1,20,3)
list(BS)
```

[ ]: [1, 4, 7, 10, 13, 16, 19]

```
[ ]: n=np.shape(X_train)[0]
     from math import *
     BS=[n/2,n/5,n/100,n/10,1]
     error_test=[]
     plt.figure()
     for batch_size in BS:
      ␣
      ↪beta,ridge=gradient_stochastique_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=2*step,
       plt.plot(np.log(ridge),label='batch size'+str(batch_size))
     beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0,learningrate=1.
      ↪1*step,epochs=5000,monit=False,arret=False)
     plt.plot(np.log(ridge),label='GD')
     plt.legend()
     plt.show
```

[ ]: <function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>



On peut observer sur le graphique ci-dessus qu'on arrive à la convergence avec quasiment le même nombre d'itérations que pour la descente de gradient classique avec un batch size de $\frac{n}{2}$.

C'est à dire qu'avec 2 fois moins d'accès aux données, on a le même résultat qu'avec la descente de gradient classique.

Pour un batch size de $\frac{n}{5}$, il faut 2 fois plus d'itérations mais 5 fois moins d'accès aux données et pour un batch size de $\frac{n}{10}$ il faut 4 fois plus d'itérations pour 10 fois moins d'accès aux données. On peut donc choisir un batch size de $\frac{n}{2}$.

Pour trouver rigoureusementle batch size optimal, il faudrait calculer le cout de calcul relatif d'une itération supplémentaire par rapport à la réduction du nombre d'accès aux données.

1.3 Question 3: Advanced stochastique gradient

Nous allons implémenter l'algorithme SVRG Stochastic Variance-Reduced Gradient. Avec cette méthode la variance est réduite car nous calculons un gradient complet arès chaque cycle de m sous-itérations

[21]:
```
def SVRG(X, y,lambd, learningrate=1e-7,m_=10,␣
↪iters=1000,epsilon=1e-2,monit=True,arret=True):
    ridge=[]
    n=np.shape(X)[0]
    X=np.array(X)
    beta = np.array([0,0,0,0,0,0]).reshape(-1,1) # Initialisation des␣
↪coefficients
    for i in range(iters):
        if monit and i%(iters/100)==0 : #monitoring
            print("itération {} en cours ...".format(i))
        # calcul full gradient
        delta =  np.subtract(np.dot(X,beta),y.reshape(-1,1))
        gradient=(np.dot(X.T,delta)+ lambd*beta)
        beta_tilde=beta
        #beta_new= beta-learningrate * gradient # on retire un gradient
        choix_beta=[]
        for ii in range(m_):
            ind=random.randint(0,n-1) # On choisit les indices sur lesquels on␣
↪effectue la descente de gradient aléatoirement
            X_ind=X[ind].reshape(1,-1)
            y_ind=y[ind] .reshape(-1,1)
            gradient_ii =  np.add(np.dot(X_ind.T,np.dot(X_ind,beta)-y_ind) ,␣
↪lambd*beta) # On calcule le gradient stochastique au point beta
            gradient_ii_tilde=np.add(np.dot(X_ind.T,np.dot(X_ind,beta_tilde)-y_ind)␣
↪, lambd*beta_tilde) # On calcule le gradient stochastique au point beta_tilde
            g_tilde=gradient_ii_tilde-gradient_ii+gradient # On calcule g_tilde qui␣
↪va etre utiliser comme direction de descente pour mettre à jour beta_tilde
            beta_tilde=beta_tilde - learningrate* g_tilde
            choix_beta.append(beta_tilde)
        choix=random.randint(0,m_-1) # On choisit l'indice entre 0 et m_ de la␣
↪valeur de beta que l'on choisit
        beta=choix_beta[choix]

        ridge.append(ridge_error(y,X,beta,lambd))

        if np.linalg.norm(gradient)<epsilon and arret: #condition d'arrêt
            print("L'algorithme a convergé ")
```

```
        break


    return beta,ridge
```

[36]:
```
beta_svrg,erreur_svrg=SVRG(X_train, y_train,lambd=0, learningrate=(0.
 ↪7*step),m_=5, iters=1000,epsilon=1e-2,monit=False,arret=True)
```

La solution de SVRG est:

[37]:
```
beta_svrg
```

[37]:
```
array([[5.99731749],
       [4.00016591],
       [0.79463008],
       [0.02268103],
       [7.00286685],
       [3.80335464]])
```

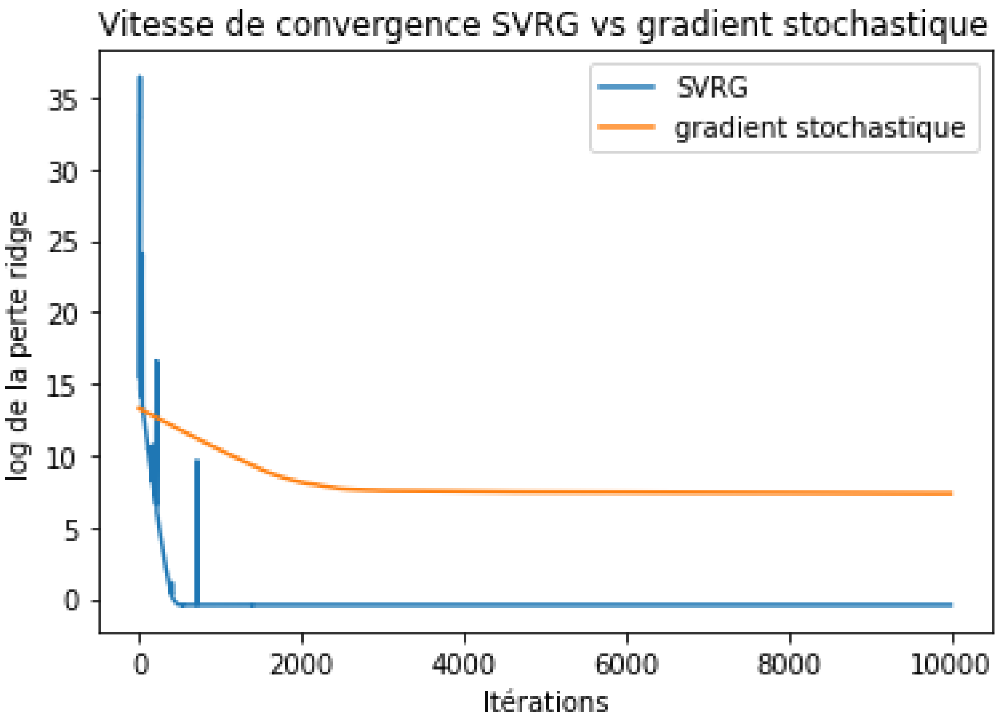
Une prédiction très proche des coefficients réels:

[26]:
```
coef
```

[26]:
```
array([[6.  ],
       [4.  ],
       [0.8 ],
       [0.02],
       [7.  ],
       [3.8 ]])
```

[38]:
```
plt.figure()
beta,ridge=SVRG(X_train, y_train,lambd=2, learningrate=step,m_=5,␣
 ↪iters=10000,epsilon=1e-2,monit=False,arret=False)
plt.plot(np.log(ridge),label='SVRG')
beta,ridge=gradient_stochastique_descent_ridge(X_train, y_train,lambd=2,␣
 ↪learningrate=step,batch_size=1,␣
 ↪iters=10000,epsilon=1e-2,monit=False,arret=False)
plt.plot(np.log(ridge),label='gradient stochastique')
plt.title('Vitesse de convergence SVRG vs gradient stochastique')
plt.ylabel('log de la perte ridge')
plt.xlabel('Itérations')
plt.legend()
plt.show
```

[38]:
```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```



SVRG a une bien meilleur convergence mais il est également plus couteux.