Projet_1_Aminata_Ndiaye-2

January 16, 2023

1 Projet 1: Descente de gradient

1.1 Question 1

1.1.1 Importation des packages

[3]:
```
from math import *
import random
import numpy as np
from numpy.random import multivariate_normal, randn # Probability distributions␣
↪on vectors

import pandas as pd  #pandas pour la gestion des données
import seaborn as sn
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.linear_model import Ridge
from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error
# SciPy - Efficient mathematical calculation
from scipy.linalg.special_matrices import toeplitz # A special kind of matrices
from scipy.linalg import svdvals # Singular values
from scipy.linalg import norm # Euclidean norm
from scipy.optimize import check_grad # Check accuracy between objective and␣
↪gradient values
from scipy.optimize import fmin_l_bfgs_b # Efficient optimizer
```

1.1.2 Génération de la base de données

J'ai décidé de travailler sur un dataset que j'ai généré aléatoirement composé de 6 variables décorrélées. Connaissant les coefficients de régression, il est aussi plus simple de s'assurer du bon fonctionnement de la méthode et de l'implémentation de l'algorithme de descente de gradient.

[53]:
```
np.random.seed(1)
n=1000
nbr_var=6
x=np.zeros((n,nbr_var))
sd=10
mu=50
```

```
for i in range(nbr_var):
  x[:,i]= np.random.randn(n)*sd+mu
design=pd.DataFrame(x,columns = ['X1', 'X2', 'X3', 'X4', 'X5', 'X6'])
coef=np.array([6,4,0.8,0.02,7,3.8]).reshape(-1,1)
y=np.dot(design,coef)+np.random.randn(n).reshape(-1,1)
```

[54]:
```
dataset=design
dataset
```

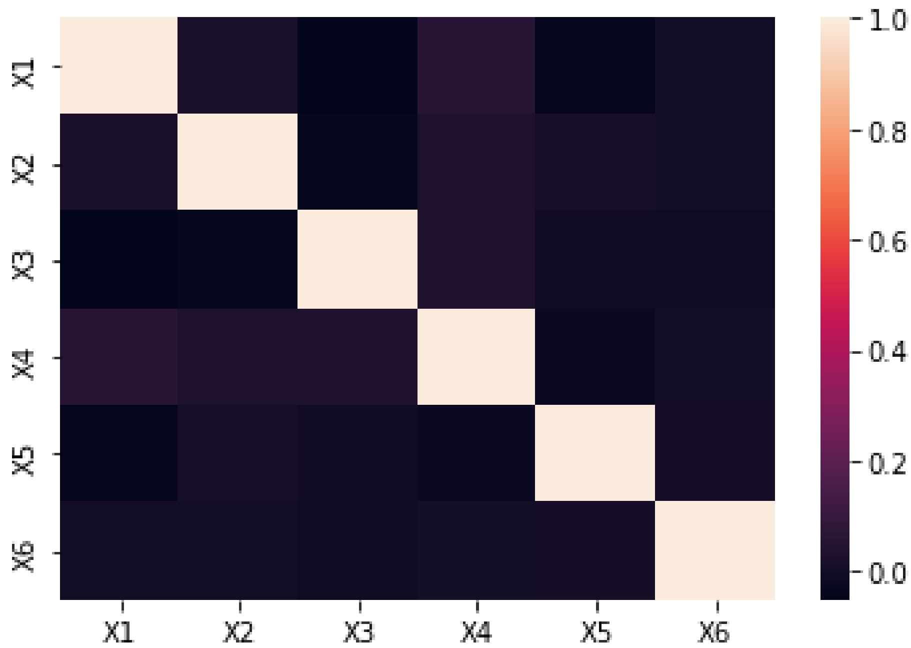
[54]:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	66.243454	48.467638	54.895166	49.228930	48.596290	40.752447
1	43.882436	25.674915	52.387959	52.078253	51.416417	61.288899
2	44.718282	55.079843	45.518882	59.861959	53.119686	38.712087
3	39.270314	46.759677	43.892050	64.327564	57.690852	42.752624
4	58.654076	34.889234	29.700549	55.282585	55.842858	56.235712
..	…	…	…	…	…	…
995	48.835559	51.885829	42.281095	48.740969	66.045462	52.246046
996	27.227020	55.609181	43.773434	40.396536	55.666131	45.228558
997	49.303755	40.783409	48.493404	41.560867	42.240122	43.087882
998	53.538704	56.473751	35.999771	56.283417	60.848887	42.112688
999	48.130450	63.868256	36.989339	55.372145	72.419895	52.641846

[1000 rows x 6 columns]

Nous obtenons la matrice de corrélation suivante.

[55]:
```
#Matrice de corrélation
corrMatrix = dataset.corr()
sn.heatmap(corrMatrix, annot=False)
plt.show()
```



1.1.3 Séparation du training et du test set

[56]:
```
#Séparation du training set et du test set
X_train,X_test,y_train,y_test=train_test_split(design,y,test_size=0.33,␣
 ↪random_state=1)
```

1.1.4 Détermination de la borne supérieure pour le learningrate

[57]:
```
#Plus grand valeur propre de la matrice de XX.T
max_ev=max(np.linalg.eigvals(np.dot(X_train, X_train.T))).real
# Nous obtenons la borne supérieur du pas que nous pouvons utilisant grace au␣
 ↪résulat théorique suivant
step=1/max_ev
step
```

[57]: 9.861533615619182e-08

1.2 Question 2

1.2.1 Définition de la fonction de perte ridge et algorithme de descente de gradient

[58]:
```
# Définition de la fonction de perte
def ridge_error(y,X,beta,lambd):
  return(((np.dot(X,beta)-y)**2).sum()/2+lambd*(beta**2).sum()/2)/len(y)
```

[59]:
```
def gradient_descent_ridge(X, y,lambd, learningrate=1e-3,␣
↪epochs=10000,epsilon=1e-2,monit=True,arret=True):

  """
  Algorithme de descent de gradient avec pénalité ridge

  Parametres
  ----------
  X : np.array
    matrice de design

  y : np.array
    vecteur du target

  lambd: float
    parametre de régularisation

  epochs: int
    Nombre d'epochs


  monit : bool
      Affiche l'itération en cours



  arret : bool
      Algorithme s'arrete lorsque la condition d'arret est satisfaite

  epsilon : float
      Paramètre de précision pour la condition d'arret
  """
  ridge=[]
  beta = pd.DataFrame([0,0,0,0,0,0]) # Initialisation des coefficients
  for i in range(epochs+1):
    if i%(epochs/100)==0 and monit: #monitoring
      print("itération {} en cours ...".format(i))
    # Updating beta
    delta =  np.subtract(np.dot(X,beta),y.reshape(-1,1))
    gradient=np.dot(X.T,delta)+ lambd*beta
    beta_new= beta-learningrate * gradient # on retire un gradient
    ridge.append(ridge_error(y,X,beta_new,lambd)) # on calcule l'erreur

    if np.linalg.norm(gradient)<epsilon and arret: #condition d'arrêt
      print("L'algorithme a convergé ")
      break
    beta=beta_new
```

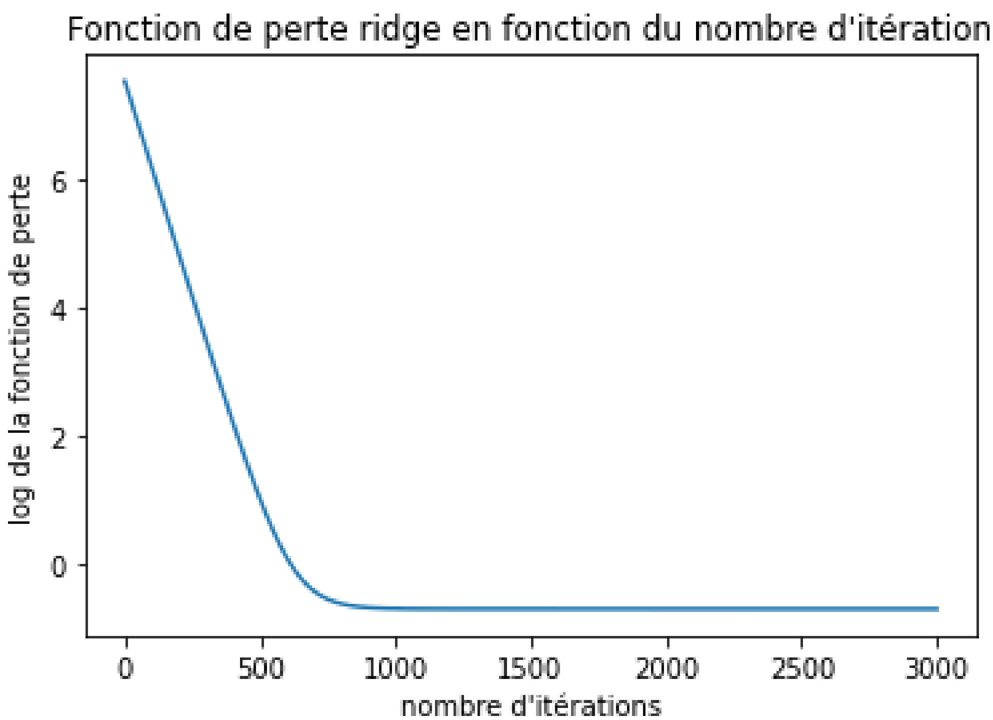
```
    return beta,ridge
```

1.2.2 Vitesse de convergence de la descente de gradient

Nous tracons le graphique de la log fonction de perte en fonction du nombre d'itérations. Nous pouvons ainsi observer la vitesse de convergence.

[60]:
```
beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0.
 ↪3,learningrate=1*step, epochs=3000,epsilon=1e-3,monit=False)
plt.plot(np.log(ridge))
plt.xlabel("nombre d'itérations")
plt.ylabel("log de la fonction de perte")
plt.title("Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```

[60]:
```
Text(0.5, 1.0, "Fonction de perte ridge en fonction du nombre d'itération")
```



[42]:
```
coef
```

[42]:
```
array([[6.  ],
       [4.  ],
       [0.8 ],
       [0.02],
       [7.  ],
```

```
       [3.8 ]])
```

[61]:
```
beta
```

[61]:

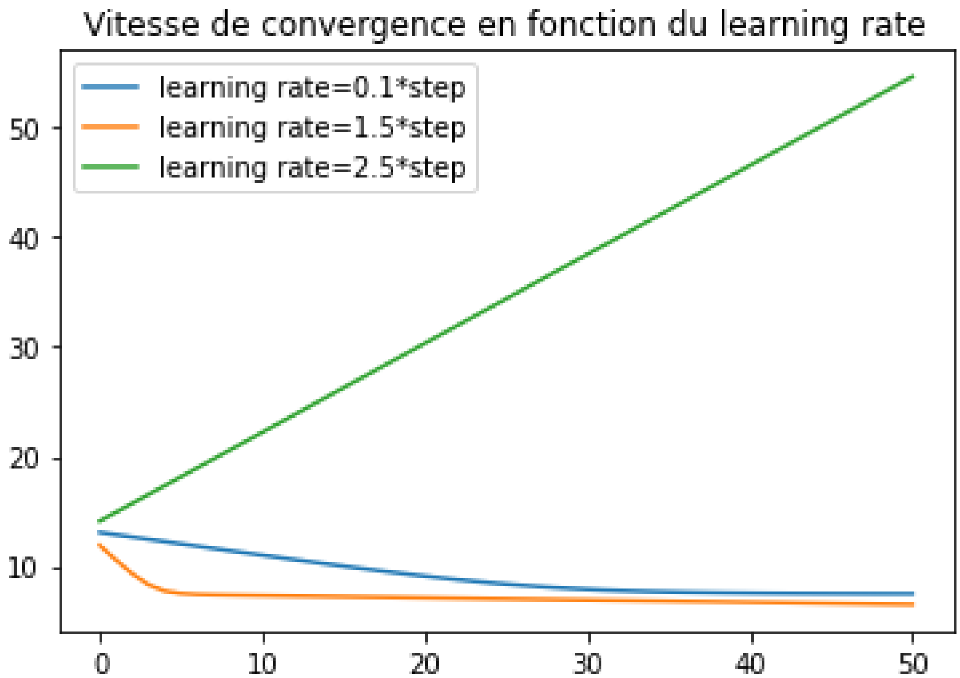
	0
0	5.997643
1	3.995093
2	0.811739
3	0.015615
4	6.997811
5	3.801480

Les paramètres trouvés par l'algorithme de descent de gradient sont très proches des paramètres réels.

1.3 Question 3

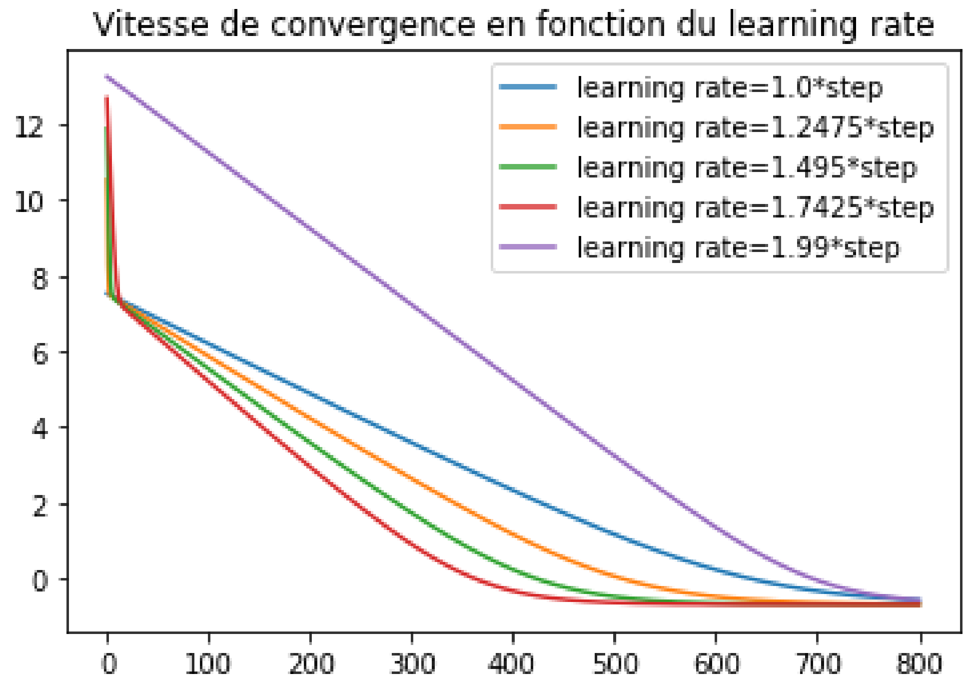
On trace les vitesses de convergence de l'algorithme pour différentes valeurs de learning rate. Nous notons step l'inverse de la plus grande valeur propre. Dans la théorie, le gradient converge lorsque le learningrate est inférieure à 2×step et diverge sinon.

[62]:
```
LR=np.array([0.1,1.5,2.5])
plt.figure()
plt.title("Vitesse de convergence en fonction du learning rate")
for learningrate in LR:
 ␣
 ↪beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=2,learningrate=learningrate*step,␣
 ↪epochs=50,epsilon=1e-3,monit=False,arret=False)
  plt.plot(np.log(ridge),label="learning rate="+str(learningrate)+"*step")
plt.legend()
plt.ylim()
plt.show()
```



Les résultats expérimentaux sont cohérents avec les résultats théoriques.Pour un learningrate de 2.5×step l'algorithme ne converge pas, l'erreur explose tandis que lorsque l'on choisit un learning rate inférieur à 2×step l'algorithme converge. Ainsi le learningrate optimal est inférieur à cette borne.

[ ]:
```
LR=np.linspace(1,1.99,5)
plt.figure()
plt.title("Vitesse de convergence en fonction du learning rate")
for learningrate in LR:
  beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=0.
 ↪3,learningrate=learningrate*step,␣
 ↪epochs=800,epsilon=1e-2,monit=False,arret=False)
  plt.plot(np.log(ridge),label="learning rate="+str(learningrate)+"*step")
plt.legend()
plt.ylim()
plt.show()
```



1.7425×Step (avec step qui correspond à l'inverse de la plus grande valeur propre) semble etre le meilleur choix pour le learningrate. En effet avec cette valeur du paramètre la convergence est plus rapide. Le learningrate optimal est dans un voisinage de cette valeur.

1.4 Question 4

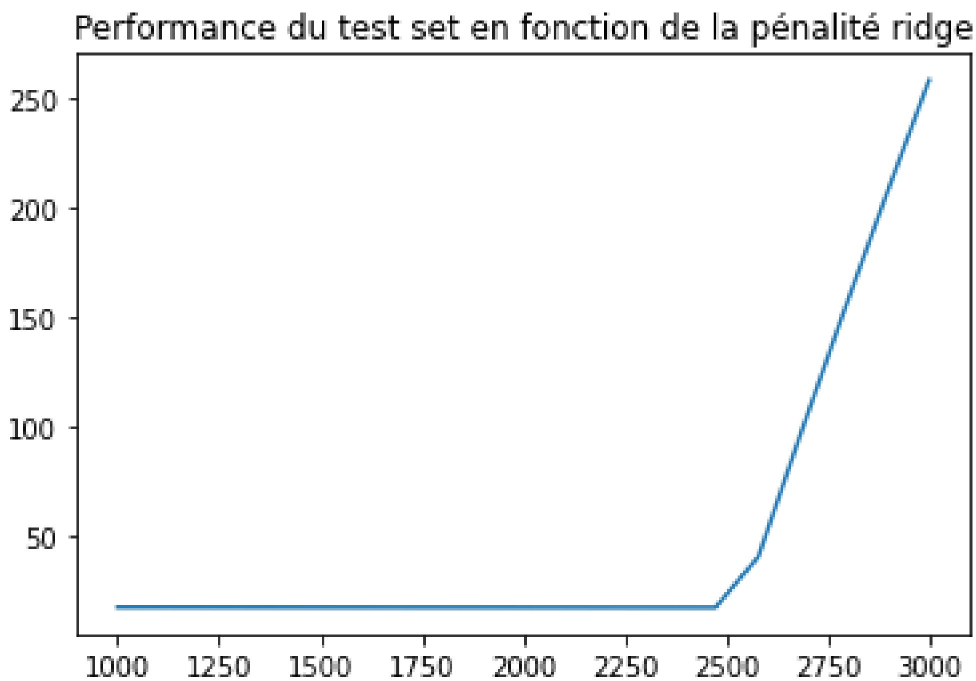
On cherche la valeur de la pénalité ridge optimale. Pour cela nous allons tracer l'erreur sur le test set en fonction de la valeur de et nous choisirons le qui minimise cette erreur.

[ ]:
```
LMBD=np.linspace(1000,3000,20)
error_test=[]
for lambd in LMBD:
  beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=lambd,learningrate=1.
 ↪3*step, epochs=1000,epsilon=1e-3,monit=False,arret=True)
  error_test.append(ridge_error(y_test,X_test,beta=beta,lambd=lambd))
plt.figure()
plt.plot( LMBD,np.log(error_test))
plt.title("Performance du test set en fonction de la pénalité ridge")
plt.show
```

```
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
```

```
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
L'algorithme a convergé
```

[ ]: <function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>



Nous tracons ici le tableau des erreurs du le test set en fonction du paramètre .

[ ]:
```
pd.DataFrame(error_test, index=LMBD)
```

[ ]:

	0
1000.000000	5.244026e+07
1105.263158	5.162819e+07
1210.526316	5.086497e+07
1315.789474	5.014660e+07
1421.052632	4.946946e+07
1526.315789	4.883035e+07
1631.578947	4.822636e+07
1736.842105	4.765487e+07

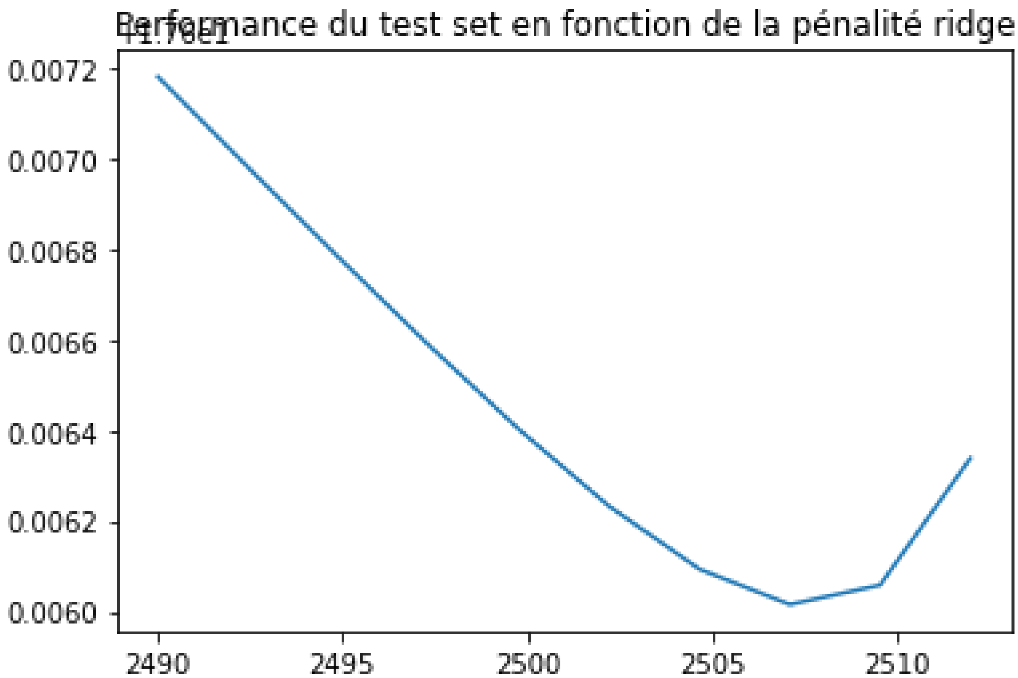
```
1842.105263   4.711352e+07
1947.368421   4.660017e+07
2052.631579   4.611285e+07
2157.894737   4.564979e+07
2263.157895   4.520936e+07
2368.421053   4.479008e+07
2473.684211   4.439059e+07
2578.947368   5.006028e+17
2684.210526   2.026971e+42
2789.473684   1.723444e+66
2894.736842   3.345612e+89
3000.000000  1.601676e+112
```

On remarque que : - pour entre 10^3 et 2.473×10^3 l'erreur sur le test est décroissante - pour compris entre 2.473×10^3 et 3×10^3 l'erreur sur le test est croissante.

La valeur optimale de est autour de 2.473×10^3, là où l'erreur sur le test set est minimale. On répète l'expérience avec des valeurs de dans un voisinage de 2.473×10^3.

[ ]:
```
LMBD=np.linspace(2.49*1e3,2.512*1e3,10)
error_test=[]
for lambd in LMBD:
  beta,ridge=gradient_descent_ridge(X_train,y_train,lambd=lambd,learningrate=1.
↪3*step, epochs=1000,epsilon=1e-3,monit=False,arret=True)
  error_test.append(ridge_error(y_test,X_test,beta=beta,lambd=lambd))
plt.figure()
plt.plot( LMBD,np.log(error_test))
plt.title("Performance du test set en fonction de la pénalité ridge")
plt.show
```

[ ]:
```
<function matplotlib.pyplot.show(*args, **kw)>
```



On peut identifier sur le graphe ci dessus le lambda optimal. $_{optimal} = 2507$