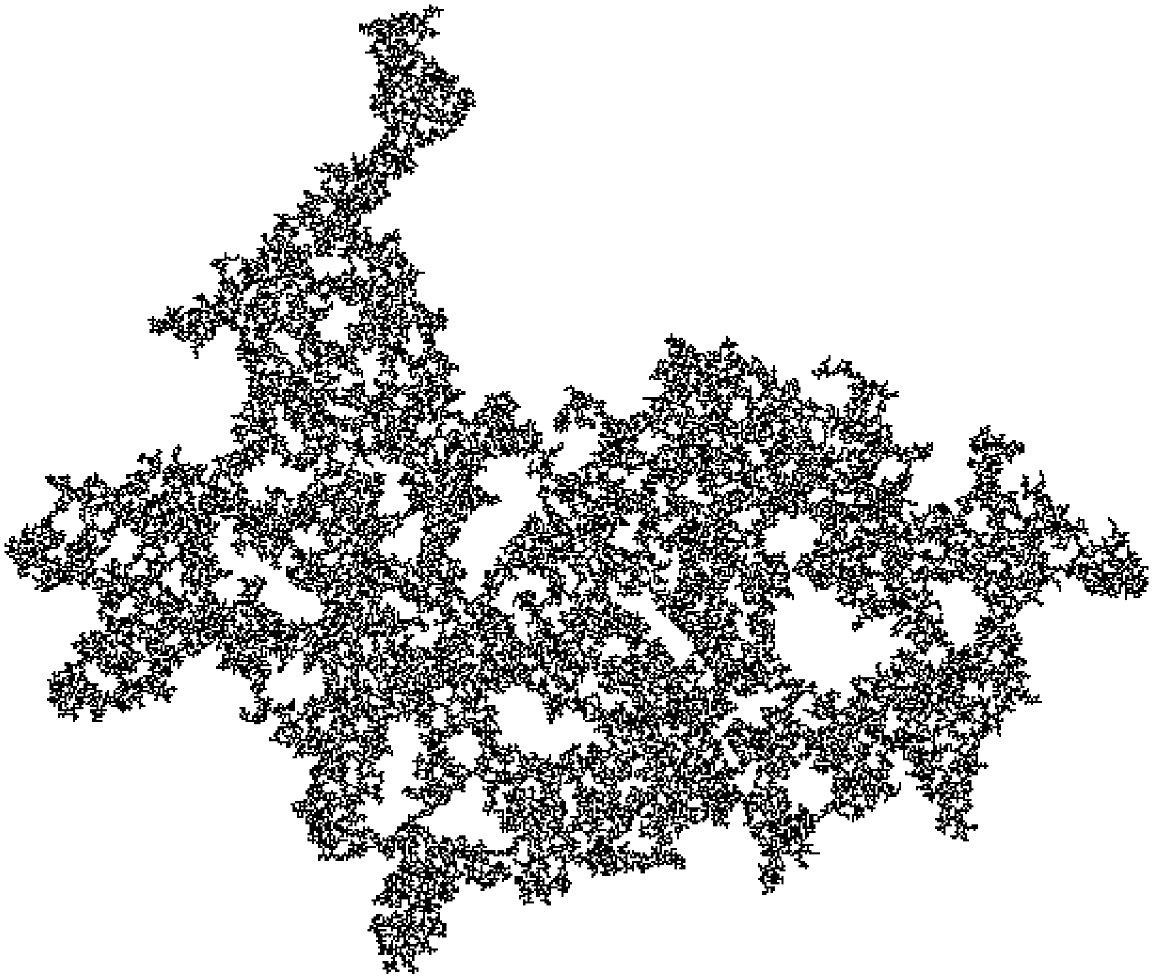
Théorie de la percolation

Aminata Ndiaye Hicham El moueffak

Juin 2021



Sous la direction de Maxime Berger

Table des matières

Introduction

La percolation désigne communément le passage d'un fluide liquide à travers un milieu plus ou moins perméable. La même racine latine apparaît dans le mot percolateur, qui permet d'obtenir un expresso en faisant passer de l'eau à travers les grains de café moulu.
La percolation est un phénomène très répandu dans la nature. On le rencontre le plus souvent lorsque des fluides sont en contact avec des milieux solides poreux ou granulaires. On prend pour exemple le phénomène d'infiltration des eaux de pluie dans les nappes phréatiques. L'eau s'écoule dans la roche à condition que la roche soit suffisamment poreuse. C'est le sens de ce "suffisamment" que la théorie de la percolation cherche à expliciter.

La théorie mathématique de la percolation, que l'on doit au mathématicien John Hammersley et à l'ingénieur Simon Broadbent en 1957 [2], repose sur deux domaines des mathématiques : les probabilités et la théorie des graphes. La théorie des graphes intervient dans la description du milieu de percolation. Les probabilités interviennent dans la progression du phénomène percolant dans le milieu. Le modèle obtenu est un modèle de graphe aléatoire.

L'objectif de ce mémoire est dans un premier temps de présenter le modèle mathématique de la percolation dans un graphe de dimension quelconque et d'en présenter quelques propriétés fondammentales, puis dans un second temps, d'étudier la problabilité critique de percolation dans un modèle de dimension 2.

Nous tenons à remercier notre encadrant Maxime Berger, pour sa disponibilité, sa pédagogie et pour nous avoir aidé et orienté dans ce travail. Nous remercions également Raphaël Cerf pour nous avoir parlé de ses travaux sur le sujet et pour nous avoir présenté les principaux résultats en dimension plus grande que 2.

1 Présentation du modèle

L'objet d'étude de la théorie de la percolation est un graphe aléatoire, i.e. un graphe dont les sommets (on parle alors de "percolation par site") ou les arêtes (on parle alors de "percolation par lien") sont munis d'une structure d'espace de probabilités. En particulier, on s'intéresse au graphe

$$\mathbb{L}^d := (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$$

où $d \in \mathbb{N}^*$ et où $\mathbb{E}^d := \big\{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d,\ \|x - y\|_2 = 1\big\}$.

1.1 Espace de probabilités sur $\mathbb{L}^d$

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons aux principaux résultats de la percolation par lien, certains d'entres eux pouvant être étendus au cas de la percolation par site. On va donc munir les arêtes de $\mathbb{L}^d$ d'une structure d'espace de probabilités.

Définition 1.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on appelle espace des configurations de percolations l'espace $\Omega := \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$. Un élément de cet espace $\omega = \{\omega(e) : e \in \mathbb{E}^d\}$ est appelé configuration de percolation. On dit que l'arête $e \in \mathbb{E}^d$ est ouverte si $\omega(e) = 1$ et fermée si $\omega(e) = 0$.*

Remarque 1.1. *Par souci de simplicité, on utilisera indifféremment les notations ω_e ou $\omega(e)$.*

On va maintenant munir notre ensemble Ω d'une tribu et d'une mesure de probabilités. Pour cela, on s'intéresse d'abord au cas d'une seule arête.
Soient $\omega \in \Omega$ et $e \in \mathbb{E}^d$, alors ω_e peut être vue comme une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1\}$. De manière évidente, on munit $\{0, 1\}$ de la tribu discrète

$$\mathcal{F}_e := \mathcal{P}\big(\{0, 1\}\big)$$

et on considère la mesure de Bernoulli

$$\mu_{p,e} := p\delta_{\{\omega_e=1\}} + (1 - p)\delta_{\{\omega_e=0\}}$$

qui dépend d'un paramètre $p \in [0, 1]$.
Dans notre modèle, on considère que les arêtes de notre graphe sont ouvertes ou fermées de façon indépendante, i.e. $\omega_e \perp\!\!\!\perp \omega_{e'}$ pour tout $e, e' \in \mathbb{E}^d$. Dans ce cas, la façon la plus naturelle de munir Ω d'une tribu et d'une mesure de probabilité est de considérer la tribu et la mesure produit.
Donc on obtient l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ où :

— $\mathcal{F} := \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mathcal{F}_e$
  i.e. $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les cylindres
  i.e. $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par les évènements ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes

— $\mathbb{P}_p := \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_{p,e}$ qui dépend d'un paramètre $p \in [0, 1]$.

1.2 Chemin et cluster sur $\mathbb{L}^d$

Définition 1.2. *Un chemin de $\mathbb{L}^d$ est soit :*

— *une suite* $(x_n) \in (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $x_i \neq x_{i+1}$ *et* $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathbb{E}^d$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$*, on dit alors que le chemin connecte* x_0 *à l'infini*

— *ou bien un n-uplet* $(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in (\mathbb{Z}^d)^n$ *tel que* $x_i \neq x_{i+1}$ *et* $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathbb{E}^d$ *pour tout* $i \in [\![0, n-2]\!]$*, on dit alors que le chemin connecte* x_0 *à* x_{n-1} *et qu'il est de longueur* n*.*

On appelle circuit de $\mathbb{L}^d$ *tout chemin* $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ *tel que* $\{x_{n-1}, x_0\} \in \mathbb{E}^d$*.*

Définition 1.3. *Soit* $\omega \in \Omega$ *une configuration de percolation. On appelle chemin ouvert de* ω *tout chemin dont les arêtes sont ouvertes, i.e. tout chemin* (x_n) *(resp.* $(x_0, \cdots, x_{n-1})$*) tel que* $\omega(\{x_i, x_{i+1}\}) = 1$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *(resp. pour tout* $i \in [\![0, n-2]\!]$*).*
On appelle circuit ouvert de ω *tout circuit* $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ *dont les arêtes sont ouvertes et tel que* $\{x_{n-1}, x_0\}$ *soit ouverte.*

Soient $\omega \in \Omega$ et $A, B \subset \mathbb{Z}^d$, on note $A \longleftrightarrow B$ si il existe un chemin ouvert de ω qui connecte un élément de A à un élément de B (on note $A \not\longleftrightarrow B$ dans le cas contraire).
On note également $A \longleftrightarrow \infty$ si il existe un chemin ouvert de ω qui connecte un élément de A à l'infini (on note $A \not\longleftrightarrow \infty$ dans le cas contraire).

Ces éléments nous permettent d'introduire une notion centrale en théorie de la percolation : celle de cluster.
Dans le cadre général, pour un graphe $G = (V, E)$, un cluster est une "composante connexe" de G. Il est nécessaire ici de définir formellement la notion de connexité dans un graphe mais on se contentera de le faire dans le cadre de la percolation par lien.
Pour commencer, on considère $\omega \in \Omega$ une configuration de percolation et on définit

$$K(\omega) := \{e \in \mathbb{E}^d : \omega_e = 1\}$$

l'ensemble des arêtes ouvertes de ω.

Définition 1.4. *Soient* $\omega \in \Omega$ *une configuration de percolation et* $G(\omega) := (\mathbb{Z}^d, K(\omega))$ *le sous-graphe de* $\mathbb{L}^d$ *contenant les arêtes ouvertes de* ω*. On appelle cluster de* ω *toute composante connexe* $C \subset \mathbb{Z}^d$ *de* $G(\omega)$*, i.e.* $x \longleftrightarrow y$ *et* $x \not\longleftrightarrow z$*,* $\forall x, y \in C$*,* $\forall z \notin C$*. Soit* $x \in \mathbb{Z}^d$*, on note*

$$C(x) := \{y \in \mathbb{Z}^d : x \longleftrightarrow y\}$$

le cluster contenant x*.*

Remarque 1.2.
1. *$C(x)$ n'est jamais vide quelque soit $x \in \mathbb{Z}^d$, en effet $x \in C(x)$.*
2. *Soit $\omega \in \Omega$ une configuration de percolation, l'ensemble des clusters de ω peut s'écrire*

$$\{C(x) : x \in \mathbb{Z}^d\} .$$

3. *On dit qu'un cluster est infini si il est de cardinal infini.*

Définition 1.5. *Soit* $\omega \in \Omega$ *une configuration de percolation, on dit qu'il y a percolation sur* $\mathbb{L}^d$ *si* ω *admet un cluster infini.*

1.3 Le phénomène critique

On introduit ici les quantités fondamentales du modèle.
La première question à se poser est de savoir pour quelles valeurs du paramètre $p \in [0,1]$ on peut avoir percolation sur $\mathbb{L}^d$.
Soient $p \in [0,1]$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit la quantité suivante :

$$\theta_x(p) := P_p(|C(x)| = \infty) \ .$$

Pour des raisons que l'on explicitera dans la prochaine section, on ne s'intéresse qu'au cas où $x = 0$.

Définition 1.6. *Soit $p \in [0,1]$, on appelle probabilité de percolation la quantité*

$$\theta(p) := \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) \ .$$

Le modèle de percolation suscite tant d'intérêt car il présente un phénomène de transition de phase. En effet, on peut définir la probabilité critique suivante

Définition 1.7. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on appelle probabilité critique en dimension d la quantité*

$$p_c(d) := \inf\{p \in [0,1] : \theta(p) > 0\} \ .$$

Remarque 1.3.
1. *Par souci de simplicité, on notera seulement p_c au lieu de $p_c(d)$ quelque soit la dimension $d \in \mathbb{N}^*$ si cela ne prête pas à confusion.*
2. *Quelque soit la dimension, on a évidemment que $\theta(1) = 1 > 0$. Donc $\{p \in [0,1] : \theta(p) > 0\}$ est non vide et p_c est bien défini.*

Propriété 1.1. *En dimension 1, $p_c = 1$.*

Démonstration. En dimension 1, on a

$$\{|C(0)| = \infty\} = \{\omega : \forall k \in \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1\} \cup \{\omega : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1\}$$

donc, pour tout $p < 1$ on a

$$\theta(p) \leq \mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) + \mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) \ .$$

Or

$$\{\omega : \forall k \in \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1\} \subset \{\omega : \forall k \in [\![0, n]\!],\ \omega(\{k, k+1\}) = 1\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) &\leq \mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in [\![0, n]\!],\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) \\ &= p^n\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on a

$$\mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) = 0 \ .$$

De la même manière on a

$$\mathbb{P}_p(\omega : \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},\ \omega(\{k, k+1\}) = 1) = 0 \ .$$

Donc finalement $\theta(p) = 0$, pour tout $p < 1$. Donc on a bien $p_c(1) = 1$. □

Propriété 1.2. *Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, on a $p_c(d+1) \leq p_c(d)$.*

Démonstration. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^{d+1}}$, on pose l'application $\omega \mapsto \tilde{\omega}$ telle que

$$\tilde{\omega}(\{x,y\}) = \begin{cases} \omega(\{x,y\}) & \text{si } x, y \in \mathbb{Z}^d \times \{0\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \theta_d(p) &= \mathbb{P}_p^d(|C(0)| = \infty) \\ &= \mathbb{P}_p^{d+1}(\text{le cluster de } \tilde{\omega} \text{ contenant 0 est infini}) \\ &\leq \mathbb{P}_p^{d+1}(|C(0)| = \infty) \\ &= \theta_{d+1}(p) \end{aligned}$$

pour tout $p \in [0,1]$. En particulier, $\theta_d(p) > 0$ implique que $\theta_{d+1}(p) > 0$. Donc on a également

$$\{p \in [0,1] : \theta_d(p) > 0\} \subset \{p \in [0,1] : \theta_{d+1}(p) > 0\}$$

ce qui implique finalement

$$\inf\{p \in [0,1] : \theta_d(p) > 0\} \geq \inf\{p \in [0,1] : \theta_{d+1}(p) > 0\}$$

i.e.

$$p_c(d) \geq p_c(d+1) \ .$$

□

On introduit maintenant le graphe dual de $\mathbb{L}^2$, défini comme étant la translation de $\mathbb{L}^2$ par le vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On note

$$(\mathbb{L}^2)^* := \big((\mathbb{Z}^2)^*, (\mathbb{E}^2)^*\big)$$

où $(\mathbb{Z}^2)^* := \{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ x \in \mathbb{Z}^2\}$ et $(\mathbb{E}^2)^* := \big\{\{x,y\} : x, y \in (\mathbb{Z}^2)^*,\ \|x-y\|_2 = 1\big\}$.

On associe à chaque arête $e \in \mathbb{E}^2$ l'arête de $(\mathbb{E}^2)^*$ qui l'intersecte en son milieu, on la note e^* et on l'appelle arête duale de e.

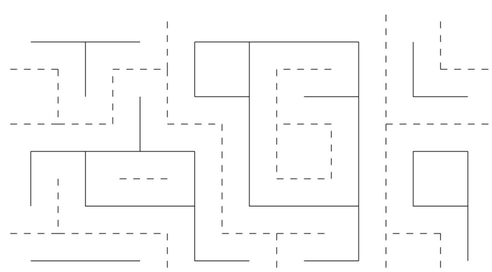


Figure 1 – Une configuration ω sur $\mathbb{L}^2$ représentée par des traits pleins et sa configuration duale ω^* représentée par des traits discontinus.

On associe à chaque configuration $\omega \in \Omega$ sur $\mathbb{Z}^2$ une configuration ω^* sur $(\mathbb{Z}^2)^*$, appelée configuration duale de ω, définie de la manière suivante : $\omega^*_{e^*} = 1 - \omega_e$, pour tout $e \in \mathbb{E}^2$. Autrement dit, une arête est ouverte dans ω si et seulement si son arête duale est fermée dans ω^*. Si la loi de ω est $\mathbb{P}_p$, on remarque aisément que la loi de ω^* n'est qu'une translation par $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $\mathbb{P}_{1-p}$.

Théorème 1.1. *En dimension $d \geq 2$, on a $0 < p_c < 1$.*

Démonstration. Pour montrer que $0 < p_c$, il suffit de montrer que $\theta(p) = 0$ pour tout p suffisamment proche de 0.
On considère σ_n le nombre de chemins de longueur n partant de l'origine. On note $\mathbf{N}_n$ la variable aléatoire du nombre de chemin ouverts de longueur n partant de l'origine. On a ainsi

$$\begin{aligned}\theta(p) &\leq \mathbb{P}_p(\mathbf{N}_n \geq 1)\\ &\leq \mathbb{E}_p[\mathbf{N}_n]\\ &= p^n \sigma_n\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cependant, $\sigma_n \leq 2d(2d-1)^{n-2}$. En effet, il y a $2d$ directions possibles pour le premier sommet, puis (au plus) $2d-1$ pour les autres. Donc on a

$$\begin{aligned}\theta(p) &\leq p^n 2d(2d-1)^{n-2}\\ &= \frac{2d}{(2d-1)^2}(p(2d-1))^n\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc on a bien que $\theta(p)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour tout $p < \frac{1}{2d-1}$.

Pour montrer que $p_c < 1$, il suffit de considérer le cas où $d = 2$ puisque $p_c(d) \leq p_c(2)$ pour tout $d \geq 3$, d'après la Propriété 1.2. La notion de graphe dual va nous être utile dans cette démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$, on se convainc aisément que le cluster de ω contenant 0 est fini si et seulement si il existe un circuit ouvert de ω^* entourant 0. En notant $\mathcal{A}_\gamma := \{\gamma \text{ est un circuit ouvert de } \omega^*\}$, on a

$$\begin{aligned}1 - \theta(p) &= \mathbb{P}_p(0 \not\leftrightarrow \infty)\\ &= \mathbb{P}_p\Big(\bigcup_{\gamma \text{ circuit entourant } 0} \mathcal{A}_\gamma\Big)\\ &\leq \sum_{\gamma \text{ circuit entourant } 0} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_\gamma)\ .\end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, on a une arête ouverte dans le dual avec probabilité $1-p$. Ainsi, pour un circuit γ de longueur n, on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_\gamma) = (1-p)^n$.
Par ailleurs, si γ est un circuit de longueur n du graphe dual entourant 0, alors on a nécessairement que $\gamma \subset \Lambda_n$. On considère ρ_n le nombre de circuits de longueur n du graphe dual entourant 0. Alors on a $\rho_n \leq |(\mathbb{Z}^2)^* \cap \Lambda_n| 3^{n-1} = (2n)^2 3^{n-1} = \frac{4}{3} n^2 3^n$. En effet, il y a (au plus) $(2n)^2$ choix possibles comme sommet de départ, puis (au plus) 3 directions possibles pour les $n-1$ premiers sommets. En utilisant ce résultat dans notre équation, on obtient

$$\begin{aligned}1 - \theta(p) &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{\gamma \text{ circuit de longueur } n \text{ entourant } 0} (1-p)^n\\ &= \sum_{n \geq 1} \rho_n (1-p)^n\\ &\leq \frac{4}{3} \sum_{n \geq 1} n^2 (3(1-p))^n\ .\end{aligned}$$

Or cette série converge pour tout $p > \frac{2}{3}$ et elle tend vers 0 lorsque p tend vers 1. Donc il existe $p < 1$ suffisamment proche de 1 tel que cette somme est strictement plus petite que $\frac{3}{4}$. Pour un tel p on a que $1 - \theta(p) < 1$.
Donc il existe $p < 1$ tel que $\theta(p) > 0$. Alors on a bien que $p_c(2) < 1$. □

1.4 Notations

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations suivantes :

— $\Lambda_n := [-n, n]^d$

— $V_n := \mathbb{Z}^d \cap \Lambda_n$

— $E_n := \mathbb{E}^d \cap \Lambda_n$

— $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)$.

2 Existence et unicité du cluster infini

2.1 Ergodicité

Définition 2.1. *Soit $\tau_x : \Omega \to \Omega$ une translation du réseau par $x \in \mathbb{Z}^d$ telle que $[\tau_x(\omega)]_e = \omega_{e-x}$, pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $e \in \mathbb{E}^d$. Cette translation induit un déplacement de l'espace des configurations $\{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$. On définit*

$$\tau_x \mathcal{A} := \{\omega \in \Omega : \tau_x^{-1}(\omega) \in \mathcal{A}\} \ .$$

Un évènement $\mathcal{A}$ est invariant par translation si,

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \ \tau_x \mathcal{A} = \mathcal{A} \ .$$

Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est invariante par translation si,

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{Z}^d, \ \mu(\tau_x \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}) \ .$$

Une mesure est dite ergodique si tout évènement invariant par translation a une probabilité de 0 *ou* 1.

On admet maintenant un résultat classique en théorie de la mesure dont on aura besoin par la suite.

Lemme 2.1 (d'unicité de la mesure)**.** *Soient μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $\mathcal{T}$ une classe de parties de Ω stable par intersection. On suppose également que $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}$, que $\mu(\mathcal{A}) = \nu(\mathcal{A})$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ et que $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Alors $\mu = \nu$.*

Propriété 2.1. *La mesure $\mathbb{P}_p$ est invariante par translation et ergodique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ la classe de parties de Ω définie de la façon suivante

$$\mathcal{T} := \{\mathcal{A} \in \mathcal{F}, \ \mathcal{A} \text{ ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes}\} \ .$$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on vérifie aisément que $\mu_x : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}_p(\tau_x \mathcal{A})$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. On sait que $\mathcal{T}$ engendre $\mathcal{F}$ et on a de manière évidente que $\mu_x(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{A})$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ et que $\mu_x(\Omega) = \mathbb{P}_p(\Omega) = 1$. On a donc que $\mu_x = \mathbb{P}_p$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ d'après le Lemme 2.1. Finalement, on a montré que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}_p(\tau_x \mathcal{A}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{A})$. Ainsi $\mathbb{P}_p$ est invariante par translation.

Montrons maintenant que la probabilité d'un évènement $\mathcal{A}$ invariant par translation est soit 0 soit 1. Fixons $\varepsilon > 0$. Intuitivement, on va "approximer" $\mathcal{A}$ par un évènement dépendant d'un nombre fini d'arêtes. Pour cela, on choisit $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}) < \varepsilon$, où $\mathcal{A} \Delta \mathcal{B} := (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \backslash (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ est la différence symétrique entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

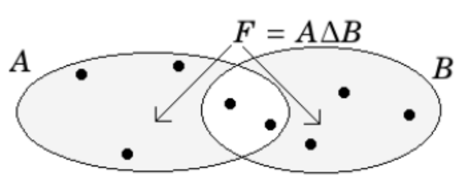


FIGURE 2 – Différence symétrique d'ensembles

Puisque $\mathcal{B}$ ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes que l'on va noter E, il existe $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $E \cap E_x = \varnothing$, où E_x est l'ensemble des arêtes dont dépend $\tau_x\mathcal{B}$. On a alors que $\mathcal{B} \perp\!\!\!\perp \tau_x\mathcal{B}$, soit donc également

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{B}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B})\mathbb{P}_p(\tau_x\mathcal{B}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B})^2 \ .$$

Comme $\mathcal{A}$ est invariant par translation, on en déduit que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \tau_x\mathcal{A}) \ .$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \tau_x\mathcal{A}) &\leq \mathbb{P}_p[(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B} \cup \mathcal{B}) \cap (\tau_x\mathcal{A}\Delta\tau_x\mathcal{B} \cup \tau_x\mathcal{B})] \\
&\leq \mathbb{P}_p[(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) \cap (\tau_x\mathcal{A}\Delta\tau_x\mathcal{B} \cup \tau_x\mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{A}\Delta\tau_x\mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{B})] \\
&\leq \mathbb{P}_p[(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) \cap (\tau_x\mathcal{A}\Delta\tau_x\mathcal{B} \cup \tau_x\mathcal{B})] + \mathbb{P}_p(\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{A}\Delta\tau_x\mathcal{B}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{B}) \\
&\leq \mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{B}) \ .
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \tau_x\mathcal{A}) &\leq 2\mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{B} \cap \tau_x\mathcal{B}) \\
&\leq 2\varepsilon + \mathbb{P}_p(\mathcal{B})^2 \ .
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{B}) &= \mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + 2\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \\
&\leq \mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + 2\mathbb{P}_p(\mathcal{A})
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{B}) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{A}\Delta\mathcal{B}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A}) \ .$$

Les deux membres de l'inégalité étant positifs, on a

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{B})^2 \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A})^2$$

d'où,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \tau_x\mathcal{A}) \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A})^2 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathbb{P}_p(\mathcal{A})^2 \ .$$

Finalement, on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{A})^2$. Or $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) \in [0,1]$, cela implique que $\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) \in \{0,1\}$. ☐

Remarque 2.1. *L'invariance par translation de la mesure $\mathbb{P}_p$ nous permet d'affirmer que $\theta_x(p) = \theta_y(p)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$. C'est pour cette raison qu'il est suffisant de s'intéresser à la probabilité que l'origine soit dans un cluster infini, comme nous l'avons mentionné dans la première section.*

2.2 Existence du cluster infini

La première question intéressante en théorie de la percolation est l'existence ou non d'un cluster infini. On peut commencer par montrer que {il existe un cluster infini} est bien un évènement de la tribu $\mathcal{F}$. En effet,

$$\begin{aligned}\{\text{il existe un cluster infini}\} &= \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \{|C(x)| = \infty\} \\ &= \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \bigcap_{n=0}^{\infty} \{C(x) \text{ contient un chemin de longueur n}\}\ .\end{aligned}$$

Or $\{C(x)$ contient un chemin de longueur n$\} \in \mathcal{F}$ car il ne dépend que d'un nombre fini d'arêtes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc {il existe un cluster infini} $\in \mathcal{F}$.

Pour démontrer l'existence du cluster infini, on commence par rappeller la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

Théorème 2.1 (loi du $0-1$ de Kolmogorov)**.** *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On définit les tribus $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_\infty$ par*

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_k,\ k \geq n), \quad \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\ .$$

La tribu $\mathcal{F}_\infty$ est grossière au sens où $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \in \{0,1\}$ pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\infty$.

Soit $p \in [0,1]$. On introduit la notation suivante

$$\psi(p) := \mathbb{P}_p(\text{il existe un cluster infini})\ .$$

Théorème 2.2 (Existence du cluster infini)**.** *La probabilité $\psi(p)$ qu'il existe un cluster infini vérifie*

$$\psi(p) = \begin{cases} 1 & si\ p > p_c \\ 0 & si\ p < p_c \end{cases}\ .$$

Démonstration. On commence par montrer que $\psi(p) \in \{0,1\},\ \forall p \in [0,1]$. Pour cela, on s'appuie sur le théorème précédent, mais d'abord il faut construire la tribu asymptotique.
$\mathbb{E}^d$ est un ensemble dénombrable quelque soit $d \in \mathbb{N}^*$. On peut donc indicer les éléments de $\mathbb{E}^d$ de sorte que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{E}^d$ et $e_k \in \Lambda_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$. On a alors $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et une configuration de percolation s'écrit $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ où $\omega_k := \omega_{e_k},\ \forall k \in \mathbb{N}$. On pose également

$$\begin{array}{cccc} \varphi_k : & \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & (\omega_n) & \longmapsto & \omega_k \end{array} \quad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Alors (φ_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On pose enfin

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\varphi_k,\ k \geq n), \quad \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\ .$$

Soit $\mathcal{A} :=$ {il existe un cluster infini}. Alors on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^c &= \{\text{tous les clusters sont finis}\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\text{tous les clusters qui ne sont pas inclus dans } \Lambda_n \text{ sont finis}\}\ .\end{aligned}$$

Or $\{$tous les clusters qui ne sont pas inclus dans Λ_n sont finis$\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, puisque $e_n \in \Lambda_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{A}^c \in \mathcal{F}_\infty$ ce qui implique immédiatement que $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\infty$. Donc on a bien que $\psi(p) \in \{0,1\}$ d'après le Théorème 2.1 et ce pour tout $p \in [0,1]$.

D'une part, si $p < p_c$ alors

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \mathbb{P}_p\big(\bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d}\{|C(x)| = \infty\}\big) \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{P}_p(|C(x)| = \infty)\ .\end{aligned}$$

Or $\{|C(x)| = \infty\} = \tau_x\{|C(0)| = \infty\}$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Donc par invariance par translation de $\mathbb{P}_p$ on a que $\mathbb{P}_p(|C(x)| = \infty) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = \theta(p) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. Donc $\psi(p) = 0$.

D'autre part, si $p > p_c$ alors

$$\psi(p) \geq \theta(p) > 0\ .$$

Or $\psi(p) \in \{0,1\}$, donc $\psi(p) = 1$. □

On se demande maintenant si ce cluster infini est unique.

2.3 Unicité du cluster infini

Définition 2.2. *Soit $\omega \in \Omega$, le sommet $x \in \mathbb{Z}^d$ est une trifurcation lorsque :*

— $|C(x)| = \infty$

— *x est l'extrémité d'exactement 3 arêtes ouvertes de ω*

— *si on ferme ces trois arêtes, on sépare $C(x)$ en trois clusters infinis distincts.*

On note $\mathcal{T}_x := \{x$ est une trifurcation$\}$.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{T}_x = \tau_x\mathcal{T}_0$. Donc par invariance par translation de $\mathbb{P}_p$, on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_x) = \mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0)$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$.

Définition 2.3. *Soit Y un ensemble fini tel que $|Y| \geq 3$, une 3-partition de Y est un triplet $\pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ de parties non vides tel que $Y = P_1 \sqcup P_2 \sqcup P_3$.*
Deux 3-partitions π et $\pi' = \{P_1', P_2', P_3'\}$ sont compatibles si, quitte à changer l'odre des éléments de π et π', on a $P_2' \sqcup P_3' \subset P_1$ ou de façon équivalente $P_2 \sqcup P_3 \subset P_1'$.

Lemme 2.2. *lem3part Soit $\mathcal{P}$ une famille de 3-partitions de Y compatibles, alors $|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2$.*

Démonstration. Si $|Y| = 3$, il n'existe qu'une seule 3-partition de Y, donc $\mathcal{P} \leq 1$.

Si $|Y| > 3$, on suppose le résultat vrai pour tout ensemble Z de cardinal $|Z| < |Y|$. En particulier on choisit $y \in Y$, alors on a $Y = \{y\} \sqcup Z$ où $Z = Y \setminus \{y\}$ et $|Z| = |Y| - 1$.
Soit $\mathcal{P}' := \{\pi \in \mathcal{P},\ \{y\} \notin \pi\}$ lensemble des 3-partitions de Y pour lesquelles $\{y\}$ n'est pas un des 3 éléments de la partition. Tout élément $\pi \in \mathcal{P}'$ induit une 3-partition de Z en retirant y, qu'on note π' (on a $\pi' := \{P_1 \setminus \{y\}, P_2 \setminus \{y\}, P_3 \setminus \{y\}\}$).
L'ensemble $\mathcal{P}'' := \{\pi',\ \pi \in \mathcal{P}\}$ est une famille de 3-partitions de Z. En utilisant la compatibilité entre

les éléments de $\mathcal{P}'$, on constate directement la compatibilité entre les éléments de $\mathcal{P}''$. Donc $\mathcal{P}''$ est une famille de 3-partitions de Z compatibles. Alors on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}'| &= |\mathcal{P}''| \\ &\leq |Z| - 2 \\ &= |Y| - 3 \ .\end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier que $|\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'| \leq 1$. Si il existait deux 3-partitions $\{\{y\}, A_2, A_3\}$ et $\{\{y\}, B_2, B_3\}$ compatibles, on aurait nécessairement $A_2 \sqcup A_3 \subset B_2$ (resp. $A_2 \sqcup A_3 \subset B_3$) et donc $\{y\} \sqcup B_3 \subset \{y\}$ (resp. $\{y\} \sqcup B_2 \subset \{y\}$), ce qui est une contradiction. Donc on a au plus une telle 3-partition dans $\mathcal{P}$. □

Théorème 2.3 (Unicité du cluster infini)**.** *Pour tout $p \in [0, 1]$ tel que $\theta(p) > 0$ on a*

$$\mathbb{P}_p(\textit{il existe un unique cluster infini}) = 1 \ .$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $p \in \{0, 1\}$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit les évènements

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\leq 1} &:= \{\text{il n'existe pas plus que 1 cluster infini}\} \\ \mathcal{E}_{<\infty} &:= \{\text{il n'existe pas plus qu'un nombre fini de clusters infinis}\} \\ \mathcal{E}_{\infty} &:= \{\text{il existe une infinité de clusters infinis}\} \ .\end{aligned}$$

Si $\theta(p) > 0$ on a que $\psi(p) = 1$ d'après le Théorème 2.2 et donc également que

$$\mathbb{P}_p(\text{il n'existe pas de cluster infini}) = 0 \ .$$

Il est donc suffisant de montrer que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) = 1$.

On commence par montrer que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty} \setminus \mathcal{E}_{\leq 1}) = 0$. Les évènements $\mathcal{E}_{\leq 1}$ et $\mathcal{E}_{<\infty}$ étant invariants par translation, par ergodicité de $\mathbb{P}_p$ on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}), \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) \in \{0, 1\}$.
Comme $\mathcal{E}_{\leq 1} \subset \mathcal{E}_{<\infty}$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) \\ \text{et} \quad &\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty} \setminus \mathcal{E}_{\leq 1}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) - \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) \ .\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) = 0$ alors on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) = 0$ et donc également que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty} \setminus \mathcal{E}_{\leq 1}) = 0$. Montrons que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) > 0$ implique que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) > 0$, car dans ce cas si $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) > 0$ alors on aura que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) = \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) = 1$ et donc également que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty} \setminus \mathcal{E}_{\leq 1}) = 0$.
On définit $\mathcal{F}_n := \{\text{tous les clusters infinis intersectent } \Lambda_n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\mathcal{F}_n \perp\!\!\!\perp E_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}_p\big(\mathcal{F}_n \cap \{\omega_e = 1, \ \forall e \in E_n\}\big) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n) p^{|E_n|} \ .$$

On suppose que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) > 0$. Comme $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{E}_{<\infty}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n)}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty})} = \frac{\mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n \cap \mathcal{E}_{<\infty})}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty})} = \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n \mid \mathcal{E}_{<\infty}) \ .$$

Or

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \text{ pour tout } n \geq 1$$

implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_n \mid \mathcal{E}_{<\infty}) = \mathbb{P}_p\Big(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n \mid \mathcal{E}_{<\infty}\Big) = 1 \ .$$

Donc il existe n_0 assez grand tel que

$$\frac{\mathbb{P}_p(\mathcal{F}_{n_0})}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty})} = \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_{n_0} \mid \mathcal{E}_{<\infty}) \geq \frac{1}{2}$$

donc

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{F}_{n_0}) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty}) > 0 \ .$$

Comme $\mathcal{F}_n \cap \{\omega_e = 1,\ \forall e \in E_n\} \subset \mathcal{E}_{\leq 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a finalement

$$0 < \mathbb{P}_p(\mathcal{F}_{n_0})p^{|E_{n_0}|} \leq \mathbb{P}_p\big(\mathcal{F}_{n_0} \cap \{\omega_e = 1,\ \forall e \in E_{n_0}\}\big) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) \ .$$

On a montré que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{<\infty} \setminus \mathcal{E}_{\leq 1}) = 0$, donc $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1} \cup \mathcal{E}_\infty) = \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_{\leq 1}) + \mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) = 1$. Il nous reste donc à montrer que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) = 0$. L'évènement $\mathcal{E}_\infty$ étant invariant par translation, par ergodicité de $\mathbb{P}_p$ on a que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) \in \{0, 1\}$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) \neq 1$.
On définit la variable aléatoire $\mathbf{M}_n$ du nombre de clusters infinis qui intersectent Λ_n.
Si $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) > 0$, alors on a

$$\frac{\mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3)}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty)} \geq \frac{\mathbb{P}_p(\{\mathbf{M}_n \geq 3\} \cap \mathcal{E}_\infty)}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty)} = \mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3 \mid \mathcal{E}_\infty)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or

$$\{\mathbf{M}_n \geq 3\} \subset \{\mathbf{M}_{n+1} \geq 3\} \text{ pour tout } n \geq 1$$

implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3 \mid \mathcal{E}_\infty) = \mathbb{P}_p\Big(\bigcup_{n\geq 1} \{\mathbf{M}_n \geq 3\} \mid \mathcal{E}_\infty\Big) = 1 \ .$$

Donc il existe n_0 assez grand tel que

$$\frac{\mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3)}{\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty)} = \mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3 \mid \mathcal{E}_\infty) \geq \frac{1}{2}$$

i.e.

$$\mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty)$$

pour tout $n \geq n_0$.
Si $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) = 0$, cette dernière inégalité est évidente.
Pour tout $\omega \in \{\mathbf{M}_n \geq 3\}$, il existe $x, y, z \in \mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_n$ trois sommets appartenant à des clusters infinis distincts de ω. On peut donc définir X, Y, Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_n$ associant à chaque configuration $\omega \in \{\mathbf{M}_n \geq 3\}$ trois sommets vérifiant les conditions précédentes.
Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_n$, on note $\mathcal{I}_{x,y,z}$ l'évènement dont les éléments vérifient les conditions suivantes :

— il existe trois chemins ouverts dans Λ_n qui s'intersectent uniquement en l'origine et chacun d'eux intersecte $\partial\Lambda_n$ en un point : respectivement x, y et z

— toutes les autres arêtes de E_n sont fermées.

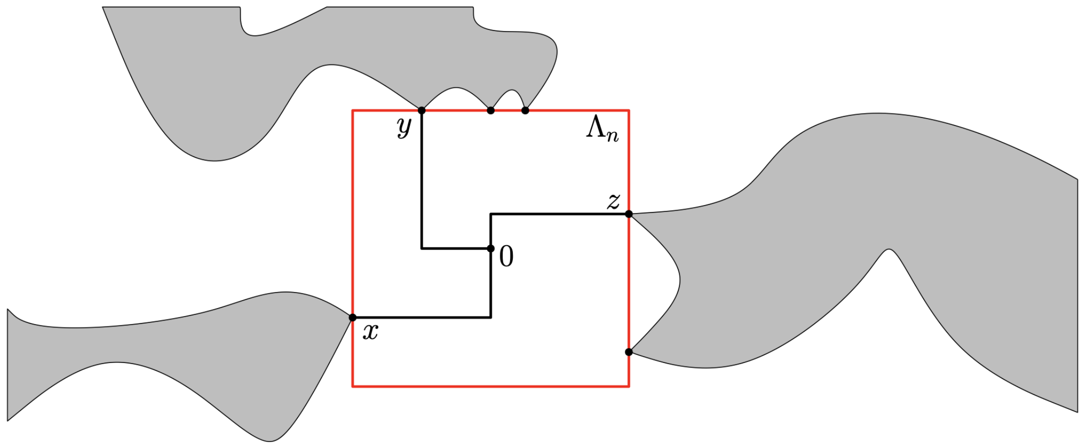


FIGURE 3 – Construction d'une trifurcation à l'origine relié à 3 clusters infinis disjoints qui intersectent Λ_n. Les 3 chemins dans Λ_n n'ont aucun sommet en commun excepté l'origine.

Or

$$\{\mathbf{M}_n \geq 3\} \cap \mathcal{I}_{X,Y,Z} \subset \mathcal{T}_0 \ .$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) &\geq \mathbb{P}_p(\{\mathbf{M}_n \geq 3\} \cap \mathcal{I}_{X,Y,Z}) \\
&= \mathbb{P}_p(\mathbf{M}_n \geq 3)\mathbb{P}_p(\mathcal{I}_{X,Y,Z}) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) \cdot [p(1-p)]^{|E_n|}
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_0$.
En particulier, si $\mathbb{P}_p(\mathcal{E}_\infty) > 0$ alors on a nécessairement $\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) > 0$. Il est donc suffisant de montrer que $\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) = 0$.
On définit $\mathbf{T}_n$ la variable aléatoire du nombre de trifurcations dans V_n. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p[\mathbf{T}_n] &= \mathbb{E}_p[\sum_{x \in V_n} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_x}] \\
&= \sum_{x \in V_n} \mathbb{E}_p[\mathbf{1}_{\mathcal{T}_x}] \\
&= \sum_{x \in V_n} \mathbb{P}_p(\mathcal{T}_x) \\
&= |V_n| \cdot \mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) = \frac{\mathbb{E}_p[\mathbf{T}_n]}{|V_n|} \ . \tag{1}$$

Soient $\omega \in \Omega$ et C un cluster de ω qui intersecte Λ_n. Si $x \in C \cap V_n$ est une trifurcation, alors fermer les trois arêtes ouvertes dont x est l'extrémité partitionne $C \cap \partial\Lambda_{n+1}$ en 3 composantes non vides. On peut vérifier que deux trifurcations $x \neq y \in C \cap V_n$ induisent des 3-partitions compatibles de $C \cap \partial\Lambda_{n+1}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{x \in C \cap V_n} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_x} &\leq |C \cap \partial\Lambda_{n+1}| - 2 \\ &< |C \cap \partial\Lambda_{n+1}| \ .\end{aligned}$$

En sommant sur tous les clusters de ω qui intersectent Λ_n, on a finalement

$$\sum_{x \in V_n} \mathbf{1}_{\mathcal{T}_x} < |\mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_{n+1}| \ .$$

D'après l'égalité 1, on a donc

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) = \frac{\mathbb{E}_p[\mathbf{T}_n]}{|V_n|} < \frac{|\mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_{n+1}|}{|V_n|} \ .$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\mathbb{Z}^d \cap \partial\Lambda_{n+1}|}{|V_n|} = 0$$

implique que $\mathbb{P}_p(\mathcal{T}_0) = 0$. $\square$

3 Propriétés de θ

3.1 Croissance et continuité

Définition 3.1. *Soient $\omega, \omega' \in \Omega$ deux configurations de percolation, on note $\omega \leq \omega'$ si $\omega_e \leq \omega'_e$ pour tout $e \in \mathbb{E}^d$.*
La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est croissante si $f(\omega) \leq f(\omega')$ pour tout $\omega \leq \omega'$.
Un évènement $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ est croissant si $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est croissante. En d'autres termes $\mathcal{A}$ est croissant si pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ on a

$$\omega \in \mathcal{A} \text{ et } \omega \leq \omega' \Rightarrow \omega' \in \mathcal{A} \ .$$

Un évènement $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ est décroissant si et seulement si $\mathcal{A}^c$ est croissant.

Intuitivement, la croissance de θ vient du fait que plus p est grand, plus il y a d'arêtes ouvertes dans le système et donc plus la probabilité que l'origine soit dans un cluster infini est grande. La démonstration mathématique de ce résultat s'appuie sur une méthode classique en probabilité : le couplage. Elle consiste à réaliser plusieurs variables aléatoires en même temps sur le même espace. Ici on va réaliser des configurations de percolation pour toutes les valeurs de p en même temps.

On considère la famille de variables aléatoires $(\mathbf{U}_e)_{e\in\mathbb{E}^d} \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$. Par abus de notation, on introduit la variable aléatoire $\omega : p \mapsto \{\omega_e^p = \mathbf{1}_{\{\mathbf{U}_e \leq p\}},\ e \in \mathbb{E}^d\}$ qui prend ses valeurs dans $[0,1] \to \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$.
On remarque que $(\omega_e^p)_{e\in\mathbb{E}^d} \overset{iid}{\sim} \mathcal{B}(p)$, donc $\omega^p \sim \mathbb{P}_p$ pour tout $p \in [0,1]$.
Dans la suite, on note $\mathbf{P}$ la loi de ω.

Propriété 3.1. *Soient $p \leq p'$, alors on a $\omega^p \leq \omega^{p'}$.*

Démonstration. Pour tout $e \in \mathbb{E}^d$ on a que $\mathbf{U}_e \leq p \Rightarrow \mathbf{U}_e \leq p'$. Donc on a que $\omega_e^p \leq \omega_e^{p'}$ pour tout $e \in \mathbb{E}^d$, i.e. $\omega^p \leq \omega^{p'}$. □

Corollaire 3.1. *Soit $\mathcal{A}$ un évènement croissant. La fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p(\mathcal{A})$ est croissante.*
En particulier, θ est croissante.

Démonstration. Soient $p, p' \in [0,1]$. On sait que $\omega^p \leq \omega^{p'}$ et donc par définition $\omega^p \in \mathcal{A} \Rightarrow \omega^{p'} \in \mathcal{A}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A}) = \mathbf{P}(\omega^p \in \mathcal{A}) \leq \mathbf{P}(\omega^{p'} \in \mathcal{A}) = \mathbb{P}_{p'}(\mathcal{A}) \ .$$

L'évènement $\{|C(0)| = \infty\}$ est croissant, donc d'après ce qui précède on a que θ est croissante. □

Remarque 3.1. *La croissance de θ donne que $\theta(p) > 0$ pour tout $p > p_c$. En particulier, on peut également définir la probabilité critique comme étant $p_c := \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}$.*

Cette dernière remarque nous permet de comprendre pourquoi le modèle de la percolation est un modèle de transition de phase. En effet, la probabilité critique délimite deux états du système aux propriétés très différentes : $\forall p < p_c,\ \theta(p) = 0$ et $\forall p > p_c,\ \theta(p) > 0$.

Lemme 3.1. *La limite d'une suite décroissante de fonctions continues et croissantes est continue à droite.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et croissantes de E dans F où E et F sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge simplement vers la fonction f. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f_n(x_1) \leq f_n(x_2)\ .$$

En passant à la limite, on a

$$f(x_1) \leq f(x_2)\ .$$

Donc f est donc une fonction croissante de E dans F.
Soient $x_0 \in E$ et $\eta > 0$. Soit $x \in [x_0, x_0+\eta] \cap E$. Par croissance de la fonction f on a

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x) - f(x_0)\ .$$

Par décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ f_{n+m}(x) \leq f_n(x)\ .$$

En passant à la limite on a pour tout $x \in E$,

$$\lim_{m\to+\infty} f_{n+m}(x) \leq f_n(x)$$

i.e.

$$f(x) \leq f_n(x)\ .$$

On a donc

$$f(x) - f(x_0) \leq f_n(x) - f(x_0) = |f_n(x) - f(x_0)|\ .$$

Par inégalité triangulaire on a

$$|f_n(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\ .$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_0 > 0,\ |x - x_0| \leq \eta_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

On a également que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, i.e.

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 > 0,\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Donc on choisit $\eta = \eta_1$ et on a pour tout $x \in [x_0, x_0+\eta] \cap E$,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Finalement on a montré que

$$\forall x_0 \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in E,\ x \in [x_0, x_0+\eta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\ .$$

Autrement dit f est continue à droite sur E. $\square$

Propriété 3.2. *La fonction $p \mapsto \theta(p)$ est continue sur $[0,1] \setminus \{p_c\}$ et continue à droite en p_c.*

Démonstration. Nous allons d'abord montrer la continuité à droite de θ sur $[0,1]$ puis nous allons montrer la continuité à gauche de θ sur $[0,1] \setminus \{p_c\}$.
On note $\theta_n(p) := \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)$. L'évènement $\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ dépend d'un nombre fini d'arêtes, donc la fonction θ_n est un polynôme en p. Donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues.
De plus, $\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ est un évènement croissant, donc $p \mapsto \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)$ est une fonction croissante d'après le Corollaire 3.1. Donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes.
Par ailleurs, $\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_m\} \subset \{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ pour tout $n \leq m$, ainsi $\theta_n(p) \leq \theta_m(p)$ pour tout $n \leq m$. Donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions.
Finalement, $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions continues et croissantes et elle admet comme limite simple θ. Alors, d'après le Lemme 3.1, θ est continue à droite.

Il nous reste à montrer la continuité à gauche sur $[0,1]\setminus\{p_c\}$. Par définition $\theta(p) = 0$, pour tout $p < p_c$. Donc θ est continue sur $[0, p_c[$.

Soit $p_0 > p_c$, d'après le Théorème d'unicité du cluster infini $\mathbf{P}(\omega^{p_0}$ admet un unique cluster infini$)$ $=$ $\mathbb{P}_{p_0}$(il existe un unique cluster infini) $= 1$. On note alors $\mathbf{C}_{p_0}$ l'unique cluster infini de la configuration ω^{p_0} (si il existe). On souhaite montrer que

$$\lim_{p\to p_0^-} \theta(p) = \theta(p_0) \ .$$

Or on a

$$\begin{aligned} \theta(p_0) - \lim_{p\to p_0^-} \theta(p) &= \mathbf{P}(0 \in \mathbf{C}_{p_0}) - \mathbf{P}(\exists p < p_0,\ 0 \in \mathbf{C}_p) \\ &= \mathbf{P}(\{0 \in \mathbf{C}_{p_0}\} \setminus \{\exists p < p_0,\ 0 \in \mathbf{C}_p\}) \end{aligned}$$

car $\{\exists p < p_0,\ 0 \in \mathbf{C}_p\} \subset \{0 \in \mathbf{C}_{p_0}\}$.
Donc on a

$$\begin{aligned} \theta(p_0) - \lim_{p\to p_0^-} \theta(p) &= \mathbf{P}(\{0 \in \mathbf{C}_{p_0}\} \cap \{\exists p < p_0,\ 0 \in \mathbf{C}_p\}^{\mathrm{c}}) \\ &= \mathbb{P}_p(0 \in \mathbf{C}_{p_0} \text{ et } \forall p < p_0,\ 0 \notin \mathbf{C}_p) \ . \end{aligned}$$

On considère $\omega \in \{0 \in \mathbf{C}_{p_0}$ et $\forall p < p_0,\ 0 \notin \mathbf{C}_p\}$. Soit $p_1 < p_0$, alors $\omega^{p_1} \leq \omega^{p_0}$, donc $\mathbf{C}_{p_1} \subset \mathbf{C}_{p_0}$. De plus, il existe un chemin ouvert qui connecte 0 et $\mathbf{C}_{p_1}$ dans ω^{p_0} mais pas dans ω^{p_1} puisque $0 \in \mathbf{C}_{p_0}$ et $0 \notin \mathbf{C}_{p_1}$, on note ce chemin $(x_0, \cdots, x_m)$.
Autrement dis, il existe $i \in [\![0, m-1]\!]$ tel que l'arête $\{x_i, x_{i+1}\}$ soit ouverte dans ω^{p_0} et fermée dans ω^{p_1}. Comme $\omega^p \leq \omega^{p_1}$ pour tout $p \leq p_1$, l'arête est aussi fermée dans ω_p pour tout $p \leq p_1$. Alors on a

$$\exists i \in [\![0, m-1]\!],\ \omega^{p_0}(\{x_i, x_{i+1}\}) = 1,\ \omega^p(\{x_i, x_{i+1}\}) = 0,\ \forall p \leq p_1$$

i.e.

$$\exists i \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbf{U}_{\{x_i,x_{i+1}\}} \leq p_0,\ \mathbf{U}_{\{x_i,x_{i+1}\}} > p,\ \forall p \leq p_1$$

i.e.

$$\exists i \in [\![0, m-1]\!],\ \mathbf{U}_{\{x_i,x_{i+1}\}} \in]p_1, p_0] \ .$$

Or ceci est vrai pour tout $p_1 < p_0$, donc on a

$$\begin{aligned}\{0 \in \mathbf{C}_{p_0} \text{ et } \forall p < p_0,\ 0 \notin \mathbf{C}_p\} \subset & \bigcap_{p_1 < p_0} \{\exists e \in \mathbb{E}^d,\ \mathbf{U}_e \in]p_1, p_0]\} \\ & = \{\exists e \in \mathbb{E}^d,\ \mathbf{U}_e = p_0\}\ .\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\theta(p_0) - \lim_{p \to p_0^-} \theta(p) &\leq \mathbb{P}_p(\exists e \in \mathbb{E}^d,\ \mathbf{U}_e = p_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{p \to p_0^-} \theta(p) = \theta(p_0)\ .$$

On a donc bien la continuité à gauche de θ sur $]p_c, 1]$. □

3.2 Décroissance exponentielle en phase sous-critique

Dans cette section, on se place dans le cadre où $G = (V, E)$ est un graphe fini. Par abus de notation, on utilisera ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ pour désigner l'espace de probabilités sur les arêtes de G. Donc on a :

— $\Omega := \{0,1\}^E$

— $\mathcal{F} := \bigotimes_{e \in E} \mathcal{F}_e$

— $\mathbb{P}_p := \bigotimes_{e \in E} \mu_e$ qui dépend d'un paramètre $p \in [0,1]$.

Pour tout $\mathbf{f} : \Omega \to \{0,1\}$ et $p \in [0,1]$, on note $f(p) := \mathbb{E}_p[\mathbf{f}]$.

Définition 3.2. *Soient $\omega \in \Omega$ une configuration et $e \in E$ une arête. On note $\omega^{(e)}$ (resp. $\omega_{(e)}$), la configuration qui coïncide avec ω, excepté en e où elle est égale à 1 (resp. 0). Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, on dit que $\omega \in \mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})$ si $\omega^{(e)} \in \mathcal{A}$ et $\omega_{(e)} \notin \mathcal{A}$. L'arête e est appelée pivot pour l'évènement $\mathcal{A}$ si $\omega \in \mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})$.*

Lemme 3.2. *Pour tout $p \in [0,1]$ et pour tout $\mathbf{f} : \Omega \to \{0,1\}$, on a*

$$f'(p) = \frac{1}{p(1-p)} \sum_{e \in E} Cov(\mathbf{f}, \omega_e)\ .$$

Démonstration. On note $|\omega| := \sum_{e \in E} \omega_e$. Par définition de l'espérance on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[\mathbf{f}] &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{f}(\omega) \mathbb{P}_p(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{f}(\omega) p^{|\omega|} (1-p)^{|E| - |\omega|}\ .\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à p, on obtient

$$\begin{aligned}
f'(p) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{f}(\omega)\Big(|\omega|p^{|\omega|-1}(1-p)^{|E|-|\omega|} - p^{|\omega|}\big(|E|-|\omega|\big)\big(1-p\big)^{|E|-|\omega|-1}\Big) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{f}(\omega)|\omega|p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|} - \frac{1}{1-p}\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{f}(\omega)(|E|-|\omega|)p^{|\omega|}(1-p)^{|E|-|\omega|} \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)|\omega|\big] - \frac{1}{1-p}\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)(|E|-|\omega|)\big] \\
&= (\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p})\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)|\omega|\big] - \frac{1}{1-p}\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)|E|] \\
&= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)|\omega|\big] - \frac{1}{1-p}\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)|E|] \\
&= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)\big(|\omega|-p|E|\big)\big]\ .
\end{aligned}$$

Or

$$|\omega| - p|E| = \sum_{e\in E}(\omega_e - p)$$

d'où

$$f'(p) = \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p\big[\mathbf{f}(\omega)\sum_{e\in E}(\omega_e-p)\big]\ .$$

Par linéarité de l'espérance, on a finalement

$$f'(p) = \frac{1}{p(1-p)}\sum_{e\in E}\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e-p)] = \frac{1}{p(1-p)}\sum_{e\in E} Cov(\mathbf{f},\omega_e)\ . \tag{2}$$

□

Propriété 3.3 (Margulis, Russo)**.** *Pour tout* $p\in[0,1]$ *et pour tout évènement croissant* $\mathcal{A}$ *dépendant d'un nombre fini d'arêtes, on a*

$$f'(p) = \sum_{e\in E}\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A}))\ .$$

En d'autres termes, cette formule signifie que la dérivée de la probabilité d'un évènement croissant est égale à l'espérance du nombre de pivots pour cet évènement.

Démonstration. On pose $\mathbf{f} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$. On commence par remarquer que $\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$ est un évènement qui ne dépend pas de l'arête e, où $\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}} = \{\omega^{(e)}\notin\mathcal{A} \text{ ou } \omega_{(e)}\in\mathcal{A}\}$. En effet, si $\omega\in\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$ alors :

— Si $\omega_e = 0$ alors $\omega^{(e)}\in\mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un évènement croissant et $\omega^{(e)}\in\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$ car $(\omega^{(e)})_{(e)} = \omega\in\mathcal{A}$, donc $\omega^{(e)}\in\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$

— Si $\omega_e = 1$ alors $\omega\in\{\omega^{(e)}\notin\mathcal{A} \text{ ou } \omega_{(e)}\in\mathcal{A}\}$ mais $\omega^{(e)} = \omega\in\mathcal{A}$ donc $\omega_{(e)}\in\mathcal{A}$, de plus $(\omega_{(e)})_{(e)} = \omega_{(e)}\in\mathcal{A}$ donc $\omega_{(e)}\in\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$, donc $\omega_{(e)}\in\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}$.

On a ainsi $\omega_e \perp\!\!\!\perp \mathbf{1}_{\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}}$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e-p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}}] &= \mathbb{E}_p[(\omega_e-p)\mathbf{1}_{\mathcal{A}}\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A}^{\mathrm{c}})}] \\
&= \mathbb{E}_p[(\omega_e-p)\mathbf{1}_{\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}}] \\
&= \mathbb{E}_p[(\omega_e-p)]\cdot\mathbb{E}_p[\mathbf{1}_{\mathcal{A}\cap\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^{\mathrm{c}}}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{E}_p[(\omega_e - p)] = \mathbb{E}_p[\omega_e] - p = 0$.
Or

$$\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)] = \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})^c}] + \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})}] \ .$$

On a donc

$$\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)] = \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})}] \ .$$

On rappelle que si $\mathcal{A}$ est un évènement croissant, alors $\mathbf{f} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ est croissante. Pour $\omega \in \mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})$, on a :

— Si $\omega_e = 0$, alors $\omega = \omega_{(e)} \notin \mathcal{A}$, donc $\mathbf{f} = 0$
— Si $\omega_e = 1$, alors $\omega = \omega^{(e)} \in \mathcal{A}$, donc $\mathbf{f} = 1$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)] &= \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})}\mathbf{1}_{\{\omega_e=0\}}] + \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})}\mathbf{1}_{\{\omega_e=1\}}] \\ &= \mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)\mathbf{1}_{\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})\cap\{\omega_e=1\}}] \\ &= (1-p)\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A}) \cap \{\omega_e = 1\}) \ .\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})$ et $\{\omega_e = 1\}$ sont indépendants, on conclut que

$$\mathbb{E}_p[\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)] = p(1-p)\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})) \ .$$

D'où

$$\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})) = \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p(\mathbf{f}(\omega)(\omega_e - p)) \ .$$

En injectant cette dernière égalité dans l'équation 2, on a

$$f'(p) = \sum_{e \in E} \mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(\mathcal{A})) \ .$$

□

On introduit les notations suivantes :

— soient $\omega \in \Omega$ et $A, B, C \subset \mathbb{Z}^d$, on note $A \overset{C}{\longleftrightarrow} B$ si il existe un chemin ouvert $(x_0, \cdots, x_{n-1})$ de ω qui connecte un élément de A à un élément de B et tel que $x_k \in C$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ (on note $A \overset{C}{\not\longleftrightarrow} B$ dans le cas contraire)
— soit $S \subset \mathbb{Z}^d$, on note $\Delta S := \big\{\{x, y\} \in \mathbb{E}^d : x \in S,\ y \notin S\big\}$.

Lemme 3.3. *Soient $p \in [0,1]$ et $S \subset \mathbb{Z}^d$, on définit*

$$\varphi_p(S) := p \sum_{\{x,y\} \in \Delta S} \mathbb{P}_p(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x) \ .$$

Si il existe $S \subset \mathbb{Z}^d$ fini tel que $0 \in S$ et $\varphi_p(S) < 1$, alors il existe $c_p > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\theta_n(p) \leq \exp(-c_p n)$.

Démonstration. On choisit S tel que $\varphi_p(S) < 1$ et $L > 0$ tel que $S \subset \Lambda_{L-1}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}\} \subset \bigcup_{\{x,y\} \in \Delta S} \Big\{0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x\Big\} \cap \big\{\omega_{\{x,y\}} = 1\big\} \cap \{y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}\} \ .$$

Or $\{y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}\}$, $\left\{\omega_{\{x,y\}} = 1\right\}$ et $\left\{0 \xleftrightarrow{S} x\right\}$ ne dépendent pas des mêmes arêtes, ces évènements sont donc mutuellement indépendants. Alors on a

$$\theta_{kL}(p) \leq p \sum_{\{x,y\}\in\Delta S} \mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{S} x)\mathbb{P}_p(y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}) \ .$$

Le fait que $S \subset \Lambda_{L-1}$ implique que $y \in \Lambda_L$. Alors y est à une distance (issue de la norme 2) d'au moins $(k-1)L$ de $\partial\Lambda_{kL}$. Donc on a

$$\begin{aligned}\{y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}\} &\subset \left\{y \longleftrightarrow \partial(\Lambda_{(k-1)L} + y)\right\} \\ &= \tau_y \left\{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_{(k-1)L}\right\} \ .\end{aligned}$$

Alors, par invariance par translation de $\mathbb{P}_p$, on a

$$\mathbb{P}_p(y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}) \leq \theta_{(k-1)L}(p) \ .$$

D'où

$$\theta_{kL}(p) \leq p \sum_{\{x,y\}\in\Delta S} \mathbb{P}_p(0 \xleftrightarrow{S} x)\mathbb{P}_p(y \longleftrightarrow \partial\Lambda_{kL}) \leq \varphi_p(S)\theta_{(k-1)L}(p) \ .$$

Par récurrence, on a finalement

$$\theta_{kL}(p) \leq \varphi_p(S)^k \ .$$

Comme $\varphi_p(S) < 1$, on en déduit le lemme. En effet, $\varphi_p(S)^k = \exp(-c_p kL)$ où $c_p = \frac{-\ln\varphi_p(S)}{L}$. $\square$

Lemme 3.4. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on introduit* $\mathbf{S} := \{z \in \Lambda_n : z \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}$. *Pour tout* $p \in]0,1[$, *on a*

$$\theta_n{}'(p) = \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})] \ .$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on va utiliser la Proposition 3.3 avec $\mathcal{A} = \{0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n\}$. Alors on a $f(p) = \theta_n(p)$ et d'après la Proposition 3.3 on a

$$\theta_n{}'(p) = \sum_{e\in E_n} \mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) \ .$$

Or $\mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)$ ne dépend pas de l'état de l'arête e. Donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\{\omega_e = 0\} \cap \mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) &= \mathbb{P}_p(\omega_e = 0)\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) \\ &= (1-p)\mathbb{P}_p(\mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) \ .\end{aligned}$$

D'où

$$\theta_n{}'(p) = \frac{1}{1-p} \sum_{e\in E_n} \mathbb{P}_p(\{\omega_e = 0\} \cap \mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) \ .$$

Or l'arête e est un pivot et est fermé si et seulement si on a les conditions suivantes :

— Un des deux sommets de l'arête e est connecté à 0

— L'autre est connecté à $\partial\Lambda_n$

— $0 \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n$.

Soit $e = \{x, y\}$, on en déduit

$$\mathbb{P}_p(\{\omega_e = 0\} \cap \mathbf{Piv}_e(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n)) = \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow x,\ y \longleftrightarrow \partial\Lambda_n,\ 0 \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n)\ .$$

Donc on a

$$\theta_n{}'(p) = \frac{1}{(1-p)} \sum_{\{x,y\}\in E_n} \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow x,\ y \longleftrightarrow \partial\Lambda_n,\ 0 \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n)\ .$$

Soit $S \subset \mathbb{Z}^d$, on a

$$\begin{aligned}\bigcup_{\{x,y\}\in E_n} \{0 \longleftrightarrow x,\ y \longleftrightarrow \partial\Lambda_n,\ 0 \not\longleftrightarrow \partial\Lambda_n\} \cap \{\mathbf{S} = S\} &= \bigcup_{\{x,y\}\in E_n} \{0 \longleftrightarrow x,\ y \notin S,\ 0 \in S,\ \mathbf{S} = S\} \\ &= \bigcup_{\{x,y\}\in \Delta S} \left\{0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x,\ \mathbf{S} = S\right\}\ .\end{aligned}$$

Or $(\{\mathbf{S} = S\})_{S\subset V_n}$ forme un système complet d'évènements, alors on a

$$\theta_n{}'(p) = \frac{1}{1-p} \sum_{S\subset V_n} \sum_{\{x,y\}\in \Delta S} \mathbb{P}_p(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x,\ \mathbf{S} = S)\ .$$

Comme $\left\{0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x\right\}$ et $\{\mathbf{S} = S\}$ sont des évènements indépendants, on a finalement

$$\begin{aligned}\theta_n{}'(p) &= \frac{1}{1-p} \sum_{S\subset V_n} \sum_{\{x,y\}\in \Delta S} \mathbb{P}_p(0 \overset{S}{\longleftrightarrow} x)\mathbb{P}_p(\mathbf{S} = S) \\ &= \frac{1}{1-p} \sum_{S\subset V_n} \frac{1}{p}\varphi_p(S)\mathbb{P}_p(\mathbf{S} = S) \\ &= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})]\ .\end{aligned}$$

□

Théorème 3.1 (Décroissance exponentielle du diamètre)**.** *Soit $d \geq 2$. Pour tout $p < p_c$, il existe $c_p > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \partial\Lambda_n) \leq \exp(-c_p n)\ .$$

De plus, il existe $c > 0$ tel que pour tout $p > p_c$, $\theta(p) \geq c(p - p_c)$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème nous allons nous appuyer sur les deux lemmes précedents. On pose

$$\tilde{p}_c := \sup\left\{p \in [0,1] : \exists S \subset \mathbb{Z}^d \text{ fini qui contient } 0 \text{ tel que } \varphi_p(S) < 1\right\}\ .$$

D'après le Lemme 3.3, pour tout $p < \tilde{p}_c$, il existe $c_p > 0$ tel que $\theta_n(p) \leq \exp(-c_p n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $\theta(p) = 0$ et donc $p \leq p_c$. Par conséquent, $\tilde{p}_c \leq p_c$.

On doit maintenant prouver que $\tilde{p}_c \geq p_c$ et donc que $\theta(p) > 0$ pour tout $p > \tilde{p}_c$.
On pose $p > \tilde{p}_c$, alors $\varphi(S) \geq 1$ pour tout S contenant 0. Par définition de φ_p, on a également que

$\varphi_p(S) = 0$ pour tout S ne contenant pas 0.
D'après le Lemme 3.4, on a

$$\begin{aligned}
{\theta_n}'(p) &= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})] \\
&= \frac{1}{p(1-p)}(\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})\mathbf{1}_{\{0\in\mathbf{S}\}}] + \mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})\mathbf{1}_{\{0\notin\mathbf{S}\}}]) \\
&= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p[\varphi_p(\mathbf{S})\mathbf{1}_{\{0\in\mathbf{S}\}}] \\
&\geq \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{E}_p[\mathbf{1}_{\{0\in\mathbf{S}\}}] \\
&= \frac{1}{p(1-p)}\mathbb{P}_p(0 \in \mathbf{S}) \\
&= \frac{1}{p(1-p)}(1-\theta_n(p)) \ .
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{{\theta_n}'(p)}{1-\theta_n(p)} \geq \frac{1}{p(1-p)} \ .$$

En primitivant entre $\tilde{p}_c$ et p on obtient

$$\log\left(\frac{1}{1-\theta_n(p)}\right) - \log\left(\frac{1}{1-\theta_n(\tilde{p}_c)}\right) \geq \log\left(\frac{p}{1-p}\right) - \log\left(\frac{\tilde{p}_c}{1-\tilde{p}_c}\right)$$

i.e.

$$\log\left(\frac{1-\theta_n(\tilde{p}_c)}{1-\theta_n(p)}\right) \geq \log\left(\frac{p(1-\tilde{p}_c)}{\tilde{p}_c(1-p)}\right) \ .$$

Par croissance du logarithme, on a

$$\frac{1-\theta_n(\tilde{p}_c)}{1-\theta_n(p)} \geq \frac{p(1-\tilde{p}_c)}{\tilde{p}_c(1-p)} \ .$$

Alors on a également

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\theta_n(p)} &\geq \frac{p(1-\tilde{p}_c)}{\tilde{p}_c(1-p)} \\
1-\theta_n(p) &\leq \frac{\tilde{p}_c(1-p)}{p(1-\tilde{p}_c)} \\
\theta_n(p) &\geq 1 - \frac{\tilde{p}_c(1-p)}{p(1-\tilde{p}_c)} \\
\theta_n(p) &\geq \frac{p - p\tilde{p}_c - \tilde{p}_c + \tilde{p}_c p}{\tilde{p}_c(1-p)} \\
\theta_n(p) &\geq \frac{p-\tilde{p}_c}{\tilde{p}_c(1-p)} \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, on a finalement

$$\theta(p) \geq c(p-\tilde{p}_c)$$

avec

$$c = \frac{1}{p(1-\tilde{p}_c)} > 0 \ .$$

Alors $\theta(p) > 0$ et donc $p \geq p_c$. Par conséquent, $\tilde{p}_c \geq p_c$.
Finalement on a bien $\tilde{p}_c = p_c$. $\square$

4 Percolation sur $\mathbb{L}^2$

4.1 Absence de cluster infini en phase critique

Propriété 4.1 (Inégalité de Harris)**.** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux évènements croissants, alors*

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \geq \mathbb{P}_p(\mathcal{A})\mathbb{P}_p(\mathcal{B}) \ .$$

Remarque 4.1. *L'inégalité de Harris reste vraie pour des évènements décroissants.*

Lemme 4.1 (Square root trick)**.** *Pour n évènements croissants $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ on a*

$$\max\{\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i),\ i \leq n\} \geq 1 - \big(1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n)\big)^{\frac{1}{n}} \ .$$

Démonstration. Par définition, si $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ sont n évènements croissants, alors $\mathcal{A}_1^{\mathrm{c}}, \cdots, \mathcal{A}_n^{\mathrm{c}}$ sont n évènements décroissants. L'inégalité de Harris donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n^{\mathrm{c}}) &\geq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i^{\mathrm{c}}) \\ &\geq \min\{\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i^{\mathrm{c}}),\ i \leq n\}^n\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\big(1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n)\big)^{\frac{1}{n}} &\geq \min\{\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i^{\mathrm{c}}),\ i \leq n\} \\ &= \min\{1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i),\ i \leq n\} \\ &= 1 - \max\{\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i),\ i \leq n\}\end{aligned}$$

i.e.

$$\max\{\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_i),\ i \leq n\} \geq 1 - \big(1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n)\big)^{\frac{1}{n}} \ .$$

□

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations suivantes :
- $\Delta_n := [-n, n] \times [-n, n-1]$
- $\mathcal{H}_n := \{$il existe un chemin ouvert dans Δ_n connectant le côté gauche et le côté droit de $\partial\Delta_n\}$.

Propriété 4.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2}$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n^{\mathrm{c}} &= \{\text{il n'existe pas de chemin ouvert dans } \Delta_n \text{ connectant le côté gauche et le côté droit de } \partial\Delta_n\} \\ &= \{\text{il existe un chemin ouvert de } \omega^* \text{ dans } \Delta_n^* \text{ connectant le côté haut et le côté bas de } \partial\Delta_n^*\}\end{aligned}$$

où $\Delta_n^* := [-n + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}] \times [-n - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}]$.
On rappelle qu'une arête est ouverte dans le dual avec probabilité $1 - p$. Par ailleurs, Δ_n et Δ_n^* ont les mêmes dimensions (à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ près). Donc on a finalement

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n^{\mathrm{c}}) = \mathbb{P}_{1-\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n)$$

ce qui implique immédiatement que $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2}$. □

Propriété 4.3. *Soit $p \in [0,1]$ tel que $\theta(p) > 0$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) = 1 \ .$$

Démonstration. Soient $p \in [0,1]$ tel que $\theta(p) > 0$ et $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \geq 1$ et $n \geq k+2$.
On définit les évènements

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &:= \{\Lambda_k \text{ est connecté dans } \Lambda_{n-1} \text{ au côté gauche de } \partial\Lambda_{n-1}\} \\
\mathcal{B}_2 &:= \{\Lambda_k \text{ est connecté dans } \Lambda_{n-1} \text{ au côté droit de } \partial\Lambda_{n-1}\} \\
\mathcal{B}_3 &:= \{\Lambda_k \text{ est connecté dans } \Lambda_{n-1} \text{ au côté haut de } \partial\Lambda_{n-1}\} \\
\mathcal{B}_4 &:= \{\Lambda_k \text{ est connecté dans } \Lambda_{n-1} \text{ au côté bas de } \partial\Lambda_{n-1}\} \ .
\end{aligned}$$

Par rotation, on a de manière évidente que $\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_2) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_3) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_4)$. Comme $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_4$ sont des évènements croissants, le square root trick implique que pour tout $i \in [\![1,4]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_i) &= \max\{\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_j),\ j \in [\![1,4]\!]\} \\
&\geq 1 - \big(1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_4)\big)^{\frac{1}{4}} \\
&= 1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_4^{\mathrm{c}})^{\frac{1}{4}} \ .
\end{aligned}$$

Or $\mathcal{B}_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_4^{\mathrm{c}} \subset \{\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty\}$ implique que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_4^{\mathrm{c}}) \leq \mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty)$$

i.e.

$$1 - \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1^{\mathrm{c}} \cap \cdots \cap \mathcal{B}_4^{\mathrm{c}})^{\frac{1}{4}} \geq 1 - \mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}}$$

donc

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_i) \geq 1 - \mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}} \text{ pour tout } i \in [\![1,4]\!].$$

On définit maintenant les évènements

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n^1 &:= \{\Lambda_k - (1,0) \text{ est connecté dans } \Delta_n \text{ au côté gauche de } \partial\Delta_n\} \\
\mathcal{A}_n^2 &:= \{\Lambda_k + (1,0) \text{ est connecté dans } \Delta_n \text{ au côté droit de } \partial\Delta_n\} \\
\mathcal{A}_n &:= \mathcal{A}_n^1 \cap \mathcal{A}_n^2 \ .
\end{aligned}$$

On remarque que $\tau_{(-1,0)}\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}_n^1$ et $\tau_{(1,0)}\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}_n^2$. Or $\mathbb{P}_p$ est invariante par translations, donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n^1) &\geq \mathbb{P}_p(\tau_{(-1,0)}\mathcal{B}_1) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1) \\
\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n^2) &\geq \mathbb{P}_p(\tau_{(1,0)}\mathcal{B}_2) = \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_2) \ .
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{A}_n^1$ et $\mathcal{A}_n^2$ sont des évènements croissants, l'inégalité de Harris donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n) &\geq \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n^1)\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n^2)\\ &\geq \mathbb{P}_p(\mathcal{B}_1)\mathbb{P}_p(\mathcal{B}_2)\\ &\geq \left(1-\mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\longleftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}}\right)^2\\ &= 1-2\mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\longleftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}}+\mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\longleftrightarrow \infty)^{\frac{1}{2}}\\ &\geq 1-2\mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\longleftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}}\ .\end{aligned}$$

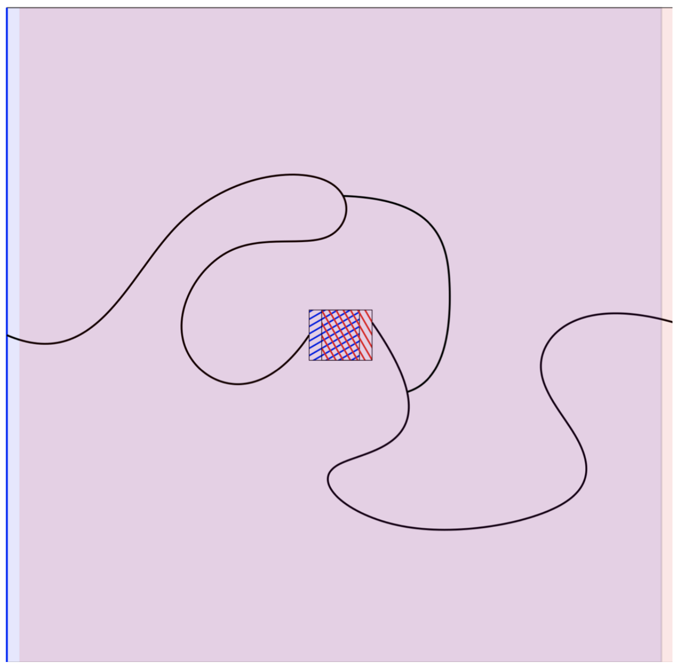


FIGURE 4 – Un chemin connecte le côté gauche de $\partial\Delta_n$ (en bleu) à $\Lambda_k-(1,0)$ (rectangle achuré en bleu). Un autre chemin connecte le côté droit de $\partial\Delta_n$ (en rouge) à $\Lambda_k+(1,0)$ (rectangle achuré en rouge). Ces deux chemins sont connectés dans Δ_n à partir d'un certain rang par unicité du cluster infini.

On définit maintenant $F_k := \big(\Lambda_k-(1,0)\big)\cup\big(\Lambda_k+(1,0)\big)=[-k-1,k+1]\times[-k,k]$. Or $\mathcal{A}_n \subset \{F_k$ est connecté dans Δ_n au côté gauche et au côté droit de $\partial\Delta_n\}$ implique que

$$\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{H}_n \subset \mathcal{V}_n \text{ pour tout } n\geq k+2$$

où $\mathcal{V}_n := \{$il existe 2 clusters dans Δ_n reliant F_k à $\partial\Delta_n\}$. Donc on a

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n\setminus\mathcal{H}_n)\leq \mathbb{P}_p(\mathcal{V}_n) \text{ pour tout } n\geq k+2\ .$$

Or

$$\bigcap_{n\geq k+2}\mathcal{V}_n \subset \{\text{il existe 2 clusters infinis}\} \text{ et } \mathcal{V}_{n+1}\subset\mathcal{V}_n \text{ pour tout } n\geq k+2$$

impliquent que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_p(\mathcal{V}_n)=\mathbb{P}_p\Big(\bigcap_{n\geq k+2}\mathcal{V}_n\Big)\leq \mathbb{P}_p(\text{il existe 2 clusters infinis})=0$$

par unicité du cluster infini.
Soit donc également

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{H}_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{V}_n) = 0 \ .$$

Et $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{H}_n \cup (\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{H}_n)$ implique que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n) \leq \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{H}_n)$$

donc

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \big(\mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) + \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{H}_n)\big) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) + \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{H}_n) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) \ .
\end{aligned}$$

On a alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{A}_n) \geq 1 - 2\mathbb{P}_p(\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty)^{\frac{1}{4}} \tag{3}$$

pour tout $k \geq 1$. Or

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{k\geq 1} \{\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty\} \subset \{\text{il n'existe pas de cluster infini}\} \\
\text{et} \quad &\{\Lambda_{k+1} \not\leftrightarrow \infty\} \subset \{\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty\} \text{ pour tout } k \geq 1
\end{aligned}$$

impliquent que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}_p(\{\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty\}) = \mathbb{P}_p\Big(\bigcap_{k\geq 1} \{\Lambda_k \not\leftrightarrow \infty\}\Big) \leq \mathbb{P}_p(\text{il n'existe pas de cluster infini}) = 0$$

par existence du cluster infini.
Il suffit de faire tendre k vers $+\infty$ dans l'équation (3) et on a finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) = 1 \ .$$

□

Corollaire 4.1. $\theta(\frac{1}{2}) = 0$. *En particulier on a que* $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Démonstration. $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2} \neq 1 \ .$$

Donc $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ d'après la Propriété 4.3. En particulier on a que $p_c \geq \frac{1}{2}$. □

4.2 Théorème de Kesten

Théorème 4.1 (de Kesten)**.** *En dimension $d = 2$, la probabilité de percolation est $p_c = \frac{1}{2}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\forall p > p_c$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) = 0$. Soit un tel p, on a

$$H_n = \bigcup_{k=-n}^{n-1} \{(-n,k) \text{ est connecté dans } \Delta_n \text{ au côté droit de } \partial\Delta_n\}$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) \leq \sum_{k=-n}^{n-1} \mathbb{P}_p\big((-n,k) \text{ est connecté dans } \Delta_n \text{ au côté droit de } \partial\Delta_n\big) \ .$$

Or $\{(-n,k) \text{ est connecté dans } \Delta_n \text{ au côté droit de } \partial\Delta_n\} = \tau_{(-n,k)}\{(0,0) \text{ est connecté dans } \Delta_n - (-n,k)$ au côté droit de $\partial[\Delta_n - (-n,k)]\}$ pour tout $k \in [\![-n, n-1]\!]$.
Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
&\tau_{(-n,k)}\{(0,0) \text{ est connecté dans } \Delta_n - (-n,k) \text{ au côté droit de } \partial[\Delta_n - (-n,k)]\} \\
&\subset \{(0,0) \text{ est connecté dans } \Delta_{2n} \text{ au côté droit de } \partial\Delta_{2n}\} \\
&\subset \{(0,0) \longleftrightarrow \partial\Delta_{2n}\} \quad \text{pour tout } k \in [\![-n, n-1]\!] \ .
\end{aligned}$$

Donc, par invariance par translation de $\mathbb{P}_p$, on a

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) \leq 2n\mathbb{P}_p((0,0) \longleftrightarrow \partial\Delta_{2n}) \ .$$

Or, d'après le Théorème 3.1, il existe $c_p > 0$ tel que $\mathbb{P}_p((0,0) \longleftrightarrow \partial\Delta_{2n}) \leq \exp(-c_p 2n)$ pour tout $n > 1$.
Donc on a finalement

$$\mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) \leq 2n \exp(-c_p 2n)$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_p(\mathcal{H}_n) = 0 \ .$$

Or $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ implique que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{H}_n) = \frac{1}{2} \neq 0 \ .$$

Donc, d'après ce qui précède, on a que $p_c \leq \frac{1}{2}$. Or, d'après le Corollaire 4.1, on a que $p_c \geq \frac{1}{2}$. Donc finalement on a que $p_c = \frac{1}{2}$. $\square$

Bibliographie

[1] Béla Bollobás et Oliver Riordan. *Percolation*. New York : Cambridge University Press, 2006.

[2] S. R. Broadbent et J. M. Hammersley. "Percolation processes I. Crystals and Mazes". In : *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 53 (1957), p. 629-641.

[3] Pablo Crotti. *Une introduction à la théorie de la percolation*. `http://crotti.org/docs/math/seminars/percolation/percolation.pdf`. 2009.

[4] Hugo Duminil-Copin. *Introduction to Bernoulli percolation*. `http://www.ihes.fr/~duminil/publi/2017percolation.pdf`. Oct. 2018.

[5] Léo Gayral. *Percolation*. `https://perso.ens-lyon.fr/leo.gayral/misc/m2-orsay/percolation.pdf`. Sept. 2019.

[6] Geoffrey Grimmett. *Percolation*. 2e éd. Berlin : Springer-Verlag, 1999.