Devoir 1 MCMC

Aminata Ndiaye

26 September 2022

1 Problème 2.2

Voir fichier R.
Nous utilisons dans les deux cas la méthode de la fonction inverse.

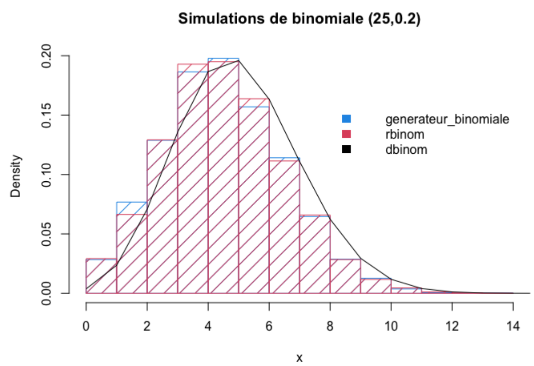

FIGURE 1 – 10 000 simulations

Dans le cas de la série logarithmique, x prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ qui est non fini. Nous allons déterminer un seuil d'erreur nous permettant de négliger les valeurs de x au delà d'une certaine valeur. Nous déterminons la valeur(dans $\mathbb{N}$) telle que, avec une probabilité de 0.9999, x soit plus petit que cette valeur (erreur =0.0001).

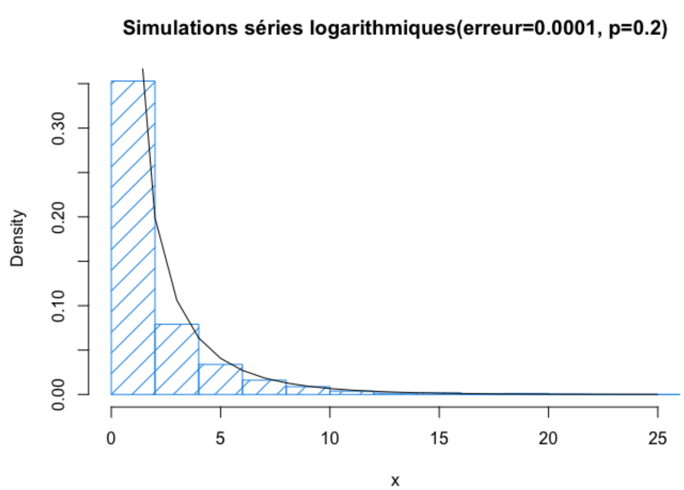

FIGURE 2 – 5000 simulations

2 Problème 1.5

Soit X_t une série temporelle à moyenne mobile d'ordre q $MA(q)$:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j}$$

Avec :
- $t = 0, \cdots, n$
- $i = -q, -(q-1), \cdots$
- ε_i sont iid et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- pour $j = 1, \cdots, q$, les β_j sont des paramètres inconnus.
- $n > q$

Remarquons que :
$X_0 = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}$ d'où $\varepsilon_0 = X_0 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}$
Plus généralement pour $k = 0, 1, \cdots, n$:
$X_k = \varepsilon_k + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{k-j}$ d'où $\varepsilon_k = X_k - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{k-j}$
Nous posons :
$\hat{\varepsilon}_0 = X_0 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}$
$\hat{\varepsilon}_1 = X_1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{1-j} = X_1 - \sum_{j=2}^{q} \beta_j \varepsilon_{1-j} - \beta_1 \hat{\varepsilon}_0$
Plus généralement :
$\hat{\varepsilon}_k = X_k - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{k-j} = X_k - \sum_{j=k}^{q} \beta_j \varepsilon_{1-j} - \sum_{j=1}^{k} \beta_k \hat{\varepsilon}_{k-j}$
Nous pouvons constater que :
- les $\hat{\varepsilon}_i$ suivent la même loi que les ε_i pour $i = 0, \cdots, n$, ils sont donc iid et indépendants de ε_{-i} pour $i = 1, \cdots, q$
- les $\hat{\varepsilon}_i$ ne s'expriment qu'en fonctions des variables aléatoires $X_0, \cdots, X_n, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{-q}$

Déterminons la densité du vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$. Nous utilisons le théorème de transfert. Soit h une fonction mesurable bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X_0, \cdots, X_n)] &= \mathbb{E}\big[h\big(\hat{\varepsilon}_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}, \cdots, \hat{\varepsilon}_n + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{n-j}\big)\big] \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n+q+1}} h\big(\hat{\varepsilon}_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}, \cdots, \hat{\varepsilon}_n + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{n-j}\big) \sigma^{-(n+q+1)} \prod_{i=0}^{n} [\varphi(\frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sigma})] \prod_{i=1}^{q} [\varphi(\frac{\varepsilon_{-i}}{\sigma})] d\varepsilon_{-1} \cdots \varepsilon_{-q} d\hat{\varepsilon}_0 \cdots \hat{\varepsilon}_n
\end{aligned}$$

Nous procédons à un changement de variable. Nous posons :
$X_0 = \hat{\varepsilon}_0 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}$
$X_1 = \hat{\varepsilon}_1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{1-j} = \hat{\varepsilon}_1 + \sum_{j=2}^{q} \beta_j \varepsilon_{1-j} + \beta_1 \hat{\varepsilon}_0$
Plus généralement :
$X_k = \hat{\varepsilon}_k + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{k-j} = \hat{\varepsilon}_k + \sum_{j=k}^{q} \beta_j \varepsilon_{k-j} + \sum_{j=1}^{k} \beta_k \hat{\varepsilon}_{k-j}$
Il s'agit bien d'un C^1 difféomorphisme de R^{n+1} dans R^{n+1} de jacobien :

$$Jac = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

De déterminant égal à 1.

Nous avons donc :

$$\mathbb{E}[h(X_0, \cdots, X_n)] = \int_{\mathbf{R}^{n+q+1}} h(x_0, \cdots, x_n) \sigma^{-(n+q+1)} \varphi\big(\frac{x_0 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}}{\sigma}\big) \times \cdots \times \varphi\big(\frac{x_n - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{n-j}}{\sigma}\big)$$
$$\times \prod_{i=1}^{q} [\varphi(\frac{\varepsilon_{-i}}{\sigma})] d\varepsilon_{-1} \cdots d\varepsilon_{-q} dx_0 \cdots dx_n$$

Nous pouvons identifier la densité de $(X_0, \cdots, X_n)$:

$$\int_{\mathbf{R}^q} \sigma^{-(n+q+1)} \varphi\big(\frac{x_0 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{-j}}{\sigma}\big) \times \cdots \times \varphi\big(\frac{x_n - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \hat{\varepsilon}_{n-j}}{\sigma}\big) \prod_{i=1}^{q} [\varphi(\frac{\varepsilon_{-i}}{\sigma})] d\varepsilon_{-1} \cdots d\varepsilon_{-q}$$

3 Problème 1.2

Soit $Z = X \wedge Y)$ avec $X \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$.X et Y sont indépendants. Nous cherchons à déterminer la densité de Z. Notons φ la densité de la loi normale centrée réduite et ϕ sa fonction de répartition.

Nous utilisons le théorème de transfère. Soit h une fonction continue bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[h(X \wedge Y)] &= \int_{\mathbb{R}_2} h(x \wedge y)\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\tau^{-1}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}_2} h(x)\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\tau^{-1}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)\mathbb{1}_{x\leq y}dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}_2} h(y)\sigma^{-1}\varphi\left(-\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\tau^{-1}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)\mathbb{1}_{x>y}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(x)\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\underbrace{\tau^{-1}\int_x^{+\infty}\varphi\left(\frac{y-\mu}{\tau}\right)\mathbb{1}_{x\leq y}dy}_{\left[1-\phi\left(\frac{x-\mu}{\tau}\right)\right]}dx \quad \text{Avec le changement de variable } t = \frac{y-\mu}{\tau} \\
&+ \int_{\mathbb{R}} h(y)\tau^{-1}\varphi\left(\frac{(y-\mu)}{\tau}\right)\underbrace{\sigma^{-1}\int_y^{+\infty}\varphi\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)\mathbb{1}_{x>y}dx}_{\left[1-\phi\left(\frac{y-\theta}{\sigma}\right)\right]}dy \quad \text{Avec le changement de variable } t = \frac{x-\theta}{\sigma} \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(z)\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\right]dz \\
&+ \int_{\mathbb{R}} h(z)\tau^{-1}\varphi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\right]dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(z)\left(\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\right] + \tau^{-1}\varphi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\right]\right)dz
\end{aligned}$$

Nous pouvons identifier la densité de Z :

$$\sigma^{-1}\varphi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\right] + \tau^{-1}\varphi\left(\frac{z-\mu}{\tau}\right)\left[1-\phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma}\right)\right]$$

Soit $Z = X \wedge \omega)$ avec $X \sim \mathcal{W}e(\alpha, \beta)$ et ω une constante. Nous cherchons à déterminer la densité de Z. Nous utilisons le théorème de transfère. Soit h une fonction continue bornée

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[h(X \wedge \omega)] &= \int_{\mathbb{R}_+} h(x \wedge \omega)\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h(x)\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)\mathbb{1}_{x<\omega}dx + \int_{\mathbb{R}_+} h(\omega)\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)\mathbb{1}_{x\geq\omega}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h(z)\beta z^{\alpha-1}\exp(-\beta z^\alpha)\mathbb{1}_{z<\omega}dz + h(\omega)\underbrace{\int_{\mathbb{R}_+}\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)\mathbb{1}_{x\geq\omega}dx}_{\text{déterministe}} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h(z)\left[\beta z^{\alpha-1}\exp(-\beta z^\alpha)\mathbb{1}_{z<\omega} + \left(\int_{\mathbb{R}_+}\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)\mathbb{1}_{x\geq\omega}dx\right)\delta_\omega(z)\right]dz
\end{aligned}$$

Nous pouvons identifier la densité de Z :

$$\beta z^{\alpha-1}\exp(-\beta z^\alpha)\mathbb{1}_{z<\omega} + \left(\int_{\mathbb{R}}\beta x^{\alpha-1}\exp(-\beta x^\alpha)\mathbb{1}_{x\geq\omega}dx\right)\delta_\omega(z)$$