WIKIPÉDIA

Produit cartésien

Cet article fait référence au concept mathématique sur les ensembles. Pour les graphes, voir produit cartésien de graphes.

En mathématiques, le **produit cartésien** de deux ensembles X et Y, appelé **ensemble-produit**, est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à X et la seconde à Y. On généralise facilement cette notion, valable pour deux ensembles, à celle de **produit cartésien fini**, qui est un ensemble de *n-uplets* dont les composantes appartiennent à n ensembles. La généralisation à un **produit cartésien infini** nécessite, quant à elle, la notion de fonction.

Les produits cartésiens doivent leur nom à René Descartes, qui, en créant la géométrie analytique, a le premier utilisé ce que nous appelons maintenant $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour représenter le plan euclidien, et $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour représenter l'espace euclidien tri-dimensionnel ($\mathbb{R}$ désigne la droite réelle).

Sommaire

Produit cartésien de deux ensembles

Définitions

- Pour tout ensemble A et tout ensemble B, il existe un ensemble P dont les éléments sont tous les couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B :
$$\forall A \, \forall B \, \exists P \quad \forall z \, \left(z \in P \Leftrightarrow \exists x \, \exists y \, \left(x \in A \, \wedge \, y \in B \, \wedge \, z = (x, y)\right)\right).$$
Cet ensemble est noté $A \times B$ (lire « A croix B ») et est appelé **produit cartésien** de A par B.
- Cas particulier : $A \times A$ est noté A^2 et appelé **carré cartésien** de A :
$$A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \, \wedge \, y \in A\}.$$

Exemple

Soit A l'ensemble { A, R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 }. Soit B l'ensemble { pique, cœur, carreau, trèfle }. Alors le produit cartésien $A \times B$ de ces deux ensembles est un jeu classique de 52 cartes, c'est-à-dire l'ensemble :

{ (A, pique) ... (2, pique) , (A, cœur) ... (2, cœur) , (A, carreau) ... (2, carreau) , (A, trèfle) ... (2, trèfle) }.

Propriétés

- Un produit cartésien $A \times B$ est vide si et seulement si A ou B est vide. En particulier : pour tout ensemble A,
$$\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing.$$
- Les deux facteurs d'un produit sont entièrement déterminés par ce produit, s'il est non vide. Plus précisément : si $A \neq \varnothing$ alors $y \in B \Leftrightarrow \exists x \quad (x, y) \in A \times B$ et de même, si $B \neq \varnothing$ alors $x \in A \Leftrightarrow \exists y \quad (x, y) \in A \times B$.

- Si A et B sont finis, alors le cardinal de $A \times B$ est égal au produit des cardinaux de A et de B.
- Le produit cartésien de deux ensembles est unique d'après l'axiome d'extensionnalité. Si on considère couples et produits cartésiens comme des notions primitives, on aura comme axiome cette propriété d'existence et d'unicité. Elle se démontre, en théorie des ensembles ZFC, pour la représentation des couples choisie.

Représentation en théorie des ensembles

En théorie des ensembles, si on choisit, comme usuellement, la représentation des couples de Kuratowski, les couples dont la première composante est dans A et la seconde dans B sont des éléments de $P[P(A \cup B)]$ (où $P(E)$ désigne l'ensemble des parties de E). L'existence de cet ensemble résulte de l'axiome de la réunion et de l'axiome de l'ensemble des parties.

On peut par conséquent définir le produit cartésien par compréhension. On aura alors besoin des couples et donc, en plus des axiomes précédents, dans Z de l'axiome de la paire et du schéma d'axiomes de compréhension ou dans ZF de l'ensemble des parties à nouveau et du schéma d'axiomes de remplacement (dont conjointement se déduit l'existence de paires):

$$A \times B = \{(a,b) | (a \in A) \wedge (b \in B)\} = \{z \in P(P(A \cup B)) | \exists a \in A \ \exists b \in B \ z = (a,b)\}$$

On peut même se passer de l'ensemble des parties en utilisant deux fois le schéma d'axiomes de remplacement[1] : une fois pour $A \times \{b\}$ et une autre fois pour :

$$A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}.$$

Représentation en théorie des catégories

Se donner une application d'un ensemble X dans le produit cartésien $A \times B$ de deux ensembles A et B revient à se donner deux applications : l'une de X dans A et l'autre de X dans B. Plus formellement : l'ensemble $A \times B$, muni des deux projections $p_1 : A \times B \to A, (a,b) \mapsto a$ et $p_2 : A \times B \to B, (a,b) \mapsto b$, est caractérisé à un isomorphisme canonique près[2, 3] par la propriété universelle suivante : pour tout ensemble X et toutes applications $f_1 : X \to A$ et $f_2 : X \to B$, il existe une unique application $f : X \to A \times B$ telle que $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$. On résume cette propriété universelle en disant que $(A \times B, p_1, p_2)$ est le produit de A et B dans la catégorie des ensembles.

Généralisation à plus de deux ensembles

Triplets

Comme pour les couples, l'important, c'est leur *propriété fondamentale* : deux triplets sont égaux si et seulement si leurs premières composantes sont égales entre elles, puis leurs deuxièmes composantes, et enfin leurs troisièmes :

$$\forall a, \forall b, \forall c, \forall d, \forall e, \forall f, [\,(a,b,c) = (d,e,f)\,] \Leftrightarrow [\,(a = d) \wedge (b = e) \wedge (c = f)\,]$$

Là encore, cette propriété ne suffit pas à définir la notion de triplet, et là encore, plusieurs définitions incompatibles entre elles sont possibles *a priori*. On pose habituellement :

$$\forall a, \forall b, \forall c, (a,b,c) = ((a,b),c)$$

Produit cartésien de trois ensembles

Il est défini par :

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) | (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}$$

D'après ce qui précède, $A \times B \times C = (A \times B) \times C$. Là encore l'ordre des termes est important. Le produit $A \times A \times A$ est appelé **cube cartésien** de A et il est noté A^3 (lire « A au cube ») :

$$A^3 = \{(x,y,z) | (x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A)\}.$$

n-uplets

Les définitions précédentes se généralisent par récurrence :

- Propriété fondamentale d'un ***n*-uplet** :

$$\forall\,(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,, \forall\,(b_1, b_2, \cdots, b_n)\,, \quad [\,(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)\,] \Leftrightarrow [\,(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \cdots \wedge (a_n = b_n)\,]$$

- Définition d'un ***n*-uplet** :

$$\forall (a_1, a_2, \cdots a_n), \quad (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n)$$

- **Produit cartésien** de *n* ensembles :

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$$

- **Puissance cartésienne** *n*-ième d'un ensemble :

$$A^n = A^{n-1} \times A = \prod_{i=1}^{n} A = \{(x_1, x_2, \cdots x_n) | \forall i, x_i \in A\}$$

Produits infinis

On peut généraliser la notion de produit cartésien à celle de **produit d'une famille d'ensembles indexée par un ensemble** quelconque, fini ou infini.

Bien que plus générale, cette notion peut difficilement être introduite en théorie des ensembles avant celle de *produit cartésien binaire*, du moins naturellement, car elle fait appel à la notion de fonction, qui utilise à son tour justement celle de *couple*, et donc de *produit cartésien binaire*[4].

Famille d'ensembles

Une **famille A d'ensembles indexée par un ensemble I** est une fonction définie sur I. L'image de i par A est notée A_i. Il s'agit juste d'une notation (adaptée à un certain usage) pour une construction connue. La famille A indexée par I sera plutôt notée $(A_i)_{i \in I}$.

Produit cartésien d'une famille d'ensembles

On peut maintenant définir le **produit cartésien d'une famille d'ensembles** $(A_i)_{i \in I}$, que l'on note habituellement $\prod_{i \in I} A_i$, ou parfois $\times_{i \in I} A_i$.

Il s'agit de l'ensemble des fonctions f de I dans la réunion de la famille, telles que pour tout i dans I, $f(i)$ appartienne à A_i :

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; \forall\, i,\ f(i) \in A_i \right\}.$$

- Pour utiliser cette définition, il faut pouvoir extraire d'un élément du produit sa composante d'indice *j*, élément de *I*. Pour cela, on définit pour tout *j* dans *I*, la fonction appelée ***j*-ème projection**,

$$\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j, \quad f \mapsto f(j).$$

- On peut définir plus généralement, pour toute partie *J* de *I*, la « projection d'indice *J* », à valeurs dans le « produit partiel » indexé par *J*[5] :

$$\pi_J : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in J} A_i, \quad f \mapsto (f(i))_{i \in J}.$$

(Si *J* est un singleton { *j* }, le produit partiel indexé par *J* est en bijection canonique avec A_j[5].)

- On peut énoncer l'axiome du choix ainsi : *le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide*.
- Le produit d'une famille d'ensembles indexée par l'ensemble vide est, d'après la définition ci-dessus, le singleton dont l'unique élément est la fonction vide de ∅ dans ∅.

Lien avec le produit de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles. Pour toute paire $I = \{\alpha, \beta\}$ (par exemple $\alpha = \emptyset$ et $\beta = \{\emptyset\}$), on a une bijection canonique entre le produit $A \times B$ des deux ensembles et le produit de la famille $(A_i)_{i \in I}$ définie par $A_\alpha = A$ et $A_\beta = B$, en associant à tout couple (x, y) de $A \times B$ l'élément f défini par $f(\alpha) = x$ et $f(\beta) = y$[5].

Associativité

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles et $(J_k)_{k \in K}$ une partition de I[6]. L'application canonique

$$\prod_{i \in I} A_i \to \prod_{k \in K} \left(\prod_{i \in J_k} A_i \right), \quad f \mapsto (\pi_{J_k}(f))_{k \in K}$$

est bijective[7].

Par récurrence, le produit de n ensembles s'identifie ainsi au produit d'une famille indexée par {1, 2, ... , n}.

Notes et références

1. Harvey Friedman (http://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2003-November/007676.html).
2. (en) John C. Baez, « Quantum Quandaries: A Category-Theoretic Perspective — §4: The Monoidal Category of Hilbert Spaces » (http://math.ucr.edu/home/baez/quantum/node4.html), 2004 (arXiv:quant-ph/0404040 (https://arxiv.org/abs/quant-ph/0404040)).
3. (en) Colin McLarty (en), *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford, Clarendon Press, 1995.
4. Une **fonction** de A dans B est souvent introduite comme un triplet (A, B, C), où C est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$, appelé graphe de la fonction et tel que tout élément de A figure (en première composante) dans exactement un couple de C. En pratique toutefois, s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on peut par abus de langage assimiler la fonction à son graphe C. D'ailleurs, en théorie des ensembles, on définit souvent une fonction directement comme un ensemble de couples. Cette pratique est cohérente — être une fonction de A dans B devient alors une propriété de la fonction — mais elle est déconseillée dans les cours d'introduction aux mathématiques.
5. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique : Théorie des ensembles* [détail des éditions], p. II.33 (https://books.google.fr/books?id=VDGifaOQogcC&pg=SL252-PA33).
6. Ou même seulement un recouvrement de I par des sous-ensembles disjoints deux à deux, mais pouvant être vides.
7. Bourbaki, p. II.35.

Articles connexes

- Produit vide
- Relation binaire
- Réunion disjointe ou « somme cartésienne »
- Catégorie monoïdale