,

Chapitre 2
Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Pr HADDADOU Hamid

Plan

Position du problème et idée de résolution

Méthode directe de résolution

Définition

Considérons le système $AX = b$ *avec* $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ *inversible et* $b \in \mathbb{C}^n$ *tq*

$$A = (a_1, \cdots, a_n) \text{ et } b = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$$

où a_k *est le* k^{me} *vecteur colonne de* A*.*

On dit qu'une **méthode est directe** *si elle donne* **la solution exacte** X *en un* **nombre fini d'opérations élémentaires***.*

Exemple

La formule de Cramer est une méthode directe qui donne la solution exacte $X = {}^t(x_k, \cdots, x_n)$ avec

$$x_k = \frac{\det(a_1, \cdots, \widehat{a_k} \cdots, a_n)}{\det A},$$

où $\widehat{a_k} = b$

Position du problème

Sachant que le calcul d'un det. d'une matrice pleine d'ordre n demande $\simeq nn!$ d'opération élémentaires, alors on a un $\simeq n(n+1)!$ d'opérations à effectuer.

Si on a un ordinateur qui effectue 10^9 d'opérations par seconde, il faudrait un temps de calcul équivalent à $\frac{n(n+1)!}{10^9}$ s.

Par exemple un système d'ordre 50 demande un équivalent de temps $\frac{50(51)!}{10^9}$ s.

C'est à dire $\frac{50(51)!}{10^9 \times 3600 \times 24 \times 365}$ $années \simeq 2,45\ 10^{51}$ $années$

Cas A triangulaire et l'idée de résolution

Si A est triangulaire supérieure inversible, le système à résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{n(n-1)}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On calcule u_n puis on remonte

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{n(n-1)}x_n\right) \\ \vdots \\ x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \left(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\right)\right). \end{cases} \Rightarrow Nombre\ d'opérations = n^2$$

Idée de résolution Dans le cas où A n'est pas triangulaire supérieure ou inférieur, l'idéé est de transformer $AX = b$ à un système équivalent dont la matrice est triangulaire et de tel sorte que la transformation nécessite un nombre d'opérations élémentaires négligeable devant $n!$.

La méthode d'élimination de Gauss

La méthode d'élimination de Gauss

$$AX = b \Leftrightarrow MAX = Mb$$

La méthode Gauss est constituée de 3 étapes

1) Procédure d'élimination : déterminer M telle que MA soit triang. sup.,
2) calculer Mb,
3) résolution de $MAX = Mb$.

Remarque

Dans la pratique, on peut faire les combinaisons linéaires entre les équations et ceci donne directement MA et Mb en même temps.

Procédure d'élimination (Exemple)

On explique cette méthode par un exemple. Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1+4x_2-4x_3=1 \\ 3x_1+6x_2+x_3=0 \\ -x_1+x_2+3x_3=0 \end{array}\right.$$

Étape 1 : Notons A la matrice du système et posons $A_1=A$ et $b_1=b$. Alors,

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 4 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2-\frac{3}{2}l_1 \\ l_3+\frac{1}{2}l_1 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{3} & 1 \end{array}}_{A_2} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}}_{b_2}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_3 \\ l_2 \end{array} \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}}_{A_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{c} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array}}_{b_3}\right)$$

Procédure d'élimination (suite de l'exemple 1)

Ainsi,

$$AX = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_3 = \frac{1}{2}, \\ 7x_3 = -\frac{3}{2}, \end{array} \right.$$

$$\underset{relont\acute{e}e}{\overset{m\acute{e}thode\ de}{\Longrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{14}, \\ x_2 = \frac{5}{21}, \\ x_1 = \frac{17}{42}. \end{array} \right.$$

Matrice de transposition et matrice d'élimination

Remarque

- *Matrice de transposition* *Échanger 2 lignes l_j et l_k dans une matrice équivaut à la multiplier à gauche par la matrice de transposition $T(l_j, l_k)$ obtenue en échangeant les lignes l_j et l_k dans la matrice identité I_n.*

- *Matrice d'élimination*

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \text{Colonne } k \\ \downarrow \end{array} & \\
E_k = & \begin{pmatrix}
1 & & \cdots & \cdots & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & -l_{(k+1)k} & \ddots & & \\
 & & \vdots & & 1 & \\
 & & -l_{nk} & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{ligne } k \\ \longrightarrow \text{ligne } (k+1) \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Exemple

Résoudre par la méthode de Guasse $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad et \ \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A|b \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow P_1 AX = P_1 b$$

$$\sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \leftrightarrow E_1 P_1 AX = E_1 P_1 b$$

$$\sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{-6} & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \leftrightarrow P_2 E_1 P_1 AX = P_2 E_1 P_1 b$$

$$\sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 - \frac{1}{6} l_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \leftrightarrow E_2 P_2 E_1 P_1 AX = E_2 P_2 E_1 P_1 b$$

Ensuite on résout le denier système avec la méthode de remonté.

Exemple (suite)

On a $P_1 = P_2 = I_3$, et

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Procédure d'élimination (suite)

En résumé d'une façon général pour une matrice inversible de taille n,

la procédure d'élimination de Gauss se traduit par

$$AX = b \Leftrightarrow \underbrace{E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1}_{M}Ax = E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1b \Leftrightarrow MAX = MB$$

où les P_i sont les matrices de permutation, et E_i sont les matrices d'élimination.

Corollaire

Si on pose $U \doteq MA$, *alors* $det(A) = (-1)^p det(U)$, *où* p *est le nombre total des permutations de lignes effectuées.*

Remarque

Pour n *assez grand, le nombre d'opérations dédié à la méthode Gauss est équivalent à* $\frac{2}{3}n^3$

Choix du pivot pour éviter l'instabilité

Pour appliquer la méthode, il suffit de prendre des éléments non nuls comme pivots. Pour illustrer l'influence des choix sur la qualité du résultat on consid'ère l'exemple suivant :

Problème : Erreurs d'arrondis lors de calcul sur une machine

On choisit une mantisse à 3 chiffres décimaux et la base 10. Prenons l'exemple du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{array}\right. \quad \text{la solution exacte est } \simeq (1.00010.., 0.99990) \tag{1}$$

→ On prend 10^{-4} comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ (1-10^4)\ u_2 = 2 - 10^4 \end{array}\right. \underset{la\ machine}{\overset{pour}{\Rightarrow}} \left\{\begin{array}{l} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ -9990\ u_2 = -9990 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 1 \end{array}\right.$$

Solution mauvaise.

→ On prend 1 comme pivot, le système (2) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ (1-10^{-4})\ u_2 = 1 - 2\times 10^{-4} \end{array}\right. \underset{la\ machine}{\overset{pour}{\Rightarrow}} \left\{\begin{array}{l} u_1 + u_2 = 2 \\ 0,999\ u_2 = 0,999 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1 = 1, \\ u_2 = 1 \end{array}\right. .$$

Solution acceptable.

Stratégie des choix

En général les pivots petits en valeurs absolues sont mauvais. On peut alors développer des strategies dans le choix des pivots.

Les principales Si on note $A^k \doteq (a_{ik}^{(k)})$ la matrice obtenue à l'étape k en appliquant l'élimination de Guass à A.

1) Stratégie du pivot partiel : On prend à l'étape k comme pivot

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{k \leq l \leq n} \left| a_{lk}^{(k)} \right| .$$

1) Stratégie du pivot total : On prend à l'étape k comme pivot

$$a_{ik}^{(k)} = \max_{k \leq l, h \leq n} \left| a_{lh}^{(k)} \right| .$$

Factorisation et méthode LU

Méthode de la factorisation LU (de Gauss)

Le but ici c'est d'écrire la matrice A sous la forme d'un produit d'une matrices L tringulaire inférieure avec $L_{jj} = 1$ et U une matrice tringulaire supérieure.

Dans le cas où $\det A \neq 0$, la méthode de Guass est applicable et la matrice $U \doteq \underbrace{E_{n-1}P_{n-1}...E_1P_1}_{M}$ est triangulaire supérieure. Alors,

$$A = M^{-1}\,U.$$

Supposons maintenant **qu'on a jamais échangé des lignes** (ie : $P_i = I_n$). Alors,

$$M^{-1} = (E_1)^{-1}\cdots(E_{n-1})^{-1}.$$

Puisque toutes les E_k sont tringulaires infériueres alors M^{-1} l'est aussi (car produit de matrices tringulaires inférieurs). On pose ainsi $L = M^{-1}$ et on obtient

$$A = LU.$$

Détermination de L et U

- **En passant par la procédure d'élimination de Gauss :** On obtient U et on montre que

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \cdots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & -l_{(k+1)k} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \cdots & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & l_{(k+1)k} & \ddots & & \\ & & \vdots & & 1 & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Puis

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- **Par identification :** On peut déterminer L et U **par identification** et en utilisant **les formes** de L (triangulaire inférieure) et de U (triangulaire inférieure).

Exemple (Factorisation LU)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 - \frac{1}{6} l_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss est applicable avec $P_1 = P_2 = I_3$, et

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ *et* $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$

Condition suffisante pour la factorisation LU d'une matrice

Théorème

Soit $A = (a_{ij})$ *et* $\forall k = 1, \ldots, n,\ \Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$. *Alors, la matrice A une unique factorisation LU de Gauss si et seulement si* $\forall k = 1, \ldots, n,\ \det(\Delta_k) \neq 0$.

Il y a deux cas particuliers de matrices admettant la factorisation LU, plus précisement

- A est symétrique définie positive $\Rightarrow \det(\Delta_k) > 0, \forall k = 1, \ldots, n$
- A est à diagonale strictement dominante $\Rightarrow \det(\Delta_k) \neq 0,\ \forall k = 1, \ldots, n$

Remarque

Une matrice carrée A est dite à diagonale strictement dominante

- *par lignes si* $\forall i,\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j,\ j \neq i} |a_{ij}|$,

ou

- *par colonnes si* $\forall j,\ |a_{jj}| > \sum\limits_{i,\ i \neq j} |a_{ij}|$,

Factorisation LU de crout et factorisation PLU

Remarque (Factorisation LU de crout)

Il y aune autre version de la factorisation LU dûe à crout, où on s'intéresse à écrire A sous la forme d'un produit d'une matrices L tringulaire inférieure avec $L_{jj} = 1$ *et* U *une matrice tringulaire supérieure avec* $U_{jj} = 1$.

Théorème (Factorisation PLU)

Soit A *inversible. Alors, il existe une matrice de permutation* P*, une matrice* $L = (l_{ij})$ *triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et une matrice* U *triangulaire supérieure telles que* $PA = LU$.

Résolution d'un système à partir de la factorisation LU ou PLU

Si l'on a à résoudre plusieurs systèmes avec la même matrice, la décomposition LU se révèle trés utile. On résout donc par Gauss une fois un système et on déduit la décomposition LU ou PLU.
- **Si** $A = LU$, on résout les autres systèmes comme suite :
1) On trouve la solution de $LY = b$ par la méthode de descente
2) Après on trouve X en utilisant la méthode de remontéé $UX = Y$
car L et U sont triangulaires respectivement inférieur et supérieure.

- **Si** $PA = LU$, il vient $PAX = Pb$. On résout dles autres systèmes comme suite :
1) $LY = Pb$
2) $UX = Y$
Or L et U sont triangulaires, il suffit d'utiliser respectivement la méthode de remontée et la méthode de descente.

Remarque

Pour une matrice A, pour déterminer les matrices L, U et P, il suffit de taper :
$>> [\mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{P}] = \mathbf{lu}(\mathbf{A})$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 15 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- On a $det(\Delta_1) = 1 \neq 0$, $det(\Delta_2) = 2 \neq 0$ et $det(\Delta_3) = 1 \neq 0$, donc A admet une factorisation LU.

- $$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 4 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 - 3l_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On en déduit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Pour résoudre $AX = b$

→ on résout d'abord $LY = b$, on trouve $Y = {}^t(1, -1, 1)$.

→ Ensuite, on résout d'abord $UX = Y$, on trouve $X = {}^t(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 1)$

Factorisation et méthode de Cholesky

La factorisation et la méthode de Cholesky

On considère ici des matrices **réelles symétriques et définies positives.**

Définition

On dit qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie positive si*

$$^tXAX > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique et définie positive

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Alors, on a les équivalences suivantes :*
A est définie positive $\Leftrightarrow SP(A) \subset R_+^* \Leftrightarrow \det \Delta_k > 0$ *(critère de Sylvester).*

Remarque

- *Remarquons que ces matrices admettent la factorisation* **LU**, *mais on va donner une "meilleure" factorisation.*
- *Si une matrice A est symétrique et définie positive, alors* $a_{ii} \in \mathbb{R}_+^*$*. Pour le constater il suffit de prendre dans la définition* $X = e_i$ *(le ième vecteur de*

Théorème (Factorisation de Cholesky)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique définie positive. Alors, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure* $C = (c_{ij})$ *(pas unique) telle que* $A = C\,{}^tC$ *qui est appellée factorisation de Cholesky. De plus, il existe une seule décomposition de Cholesky de* A *avec* $c_{ii} > 0, \ \forall i = 1, \dots, n.$

Remarque

Inversement si la matrice inversible A *admet une décomposition de Cholesky, alors elle est symétrique définie positive.*

Interêt

- Résolution des systèmes de la forme $Au = b$,
- Remplacer A par C.

Calcul de C pour une matrice symétrique et définie positive

En utilisant la factorisation LU

Si on a déja calculé L et U. On prend (de la démonstration du dernier théorème !) $C = L\Lambda$ avec (Λ est bien définie car $u_{ii} > 0$)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{u_{nn}}. \end{pmatrix}$$

En utlisant l'identification

On peut calculer C d'une manière pratique sans utiliser la factorisation LU. On pose $C = (c_{ij})$ (C est triangulaire supérieure) et on suppose que $A = C\ {}^tC$.

Alors, $a_{ij} = (C\ {}^tC)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk}$

Remarque

Sous Matlab, pour une matrice A donnée la commande chol(A) donne ${}^tC$

$>>$ **chol(A)**

Exemple de factorisation

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$ On a $A = LU$ avec (exo)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, puisque A est symétrique et définie positive (car $det(\Delta_1) = 1 > 0$, $det(\Delta_2) = 4 > 0$, $det(\Delta_3) = 36 > 0$), alors elle admet une factorisation de Cholesky $C\ {}^tC$ avec $C = L\Lambda$ où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Méthode de résolution de Cholesky etn nombre d'opération

Méthode de Cholesky de résolution du système

Soit A une matrice symétrique définie positive et $Au = b$ avec b donné. Alors, on procède de la manière suivante :

- factorisation de Cholesky
- on résout $CY = b$
- et ensuite on résout ${}^tCu = Y$

Le nombres d'opérations

Pour n assez grand le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un système par la méthode de Cholesky dans le cas où on utilise la deuxième méthode pour calculer C, est équivalent à $\frac{1}{3}n^3$ opérations.

Factorisation et méthode QR

Factorisation QR : But, Théorie et Intérêt

But

Le but est d'écrire toute matrice A sous la forme QR avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire supérieure.

Définition

On dit qu'une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est orthogonale si* $Q^{-1} = {}^tQ$.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On peut toujours factoriser* A *sous la forme* QR. *De plus on peut toujours s'arranger pour que tous les coefficients diagonaux de* R *soient tous positifs ou nul.*

Intérêt

- Résolution de systèmes linéaires. Sachant la décomposition QR d'une matrice A carrée ou non , la résolution d'un système $AX = b$ revient à calculer ${}^tQb$ et résoudre ensuite le système $RX =^t Qb$.
- Si A est carrée, $|\det A| = |r_{11} \times \ldots \times r_{nn}|$ car $\det(Q) = \pm 1$.
- Calcul des Valeurs propres.

La factorisation QR en utilisant Cholesky !(Première idée)

Dans le cas des **matrices carrées inversible**

En utilisant la factorisation de Cholesky !

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

1) On pose $B = \, {}^tA\,A$. Montrons que B admet une factorisation de Cholesky de la forme $C\,{}^tC$ avec C une matrice triangulaire inférieure.

2) Montrons que la matrice $A({}^tC)^{-1}$ est orthogonale.

3) Déduisons que A admet une factorisation QR en posant

$$Q = A({}^tC)^{-1} \;\; et \;\; R =^t C.$$

Remarque

Ce procédé est coûteux en opérations donc pas pratique, néanmoins il présente une preuve que tout matrice inversible peut s'écrire sous la forme QR.

Factorisation QR par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Ici on considère toujours le cas des **matrices carrées inversible**

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible**. *Alors, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R à diagonale positive telles que $A = QR$. De plus cette décomposition est unique et peut être obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la base formée des vecteurs colonnes de A, c'est à dire : Si $A = (a_1, ..., a_n)$*

$$\begin{cases} r_{11} = \|a_1\|_2 \,, \\ q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r_{im} = \langle q_i, a_m \rangle \,, \quad m = 2, \ldots, n \quad \textit{et} \quad i = 1, \ldots, m-1, \\ \widetilde{a}_m = a_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_{im} q_i, \\ r_{mm} = \|\widetilde{a}_m\|_2 \,, \quad q_m = \frac{1}{r_{mm}} \widetilde{a}_m, \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}}_{A} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \vdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

$$a_1 \longrightarrow \begin{cases} r_{11} = \|a_{11}\|_2 \,, \\ q_1 = \dfrac{1}{r_{11}} a_1, \end{cases} \qquad a_2 \longrightarrow \begin{cases} r_{12} =< q_1, a_2 >, \\ \widetilde{a}_2 = a_2 - r_{12} q_1, \\ r_{22} = \|\widetilde{a}_2\|_2 \quad \text{et} \quad q_2 = \dfrac{1}{r_{22}} \widetilde{a}_2, \end{cases}$$

$$a_3 \longrightarrow \begin{cases} r_{13} =< q_1, a_3 >, \;\; r_{23} =< q_2, a_3 >, \\ \widetilde{a}_3 = a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2, \\ r_{33} = \|\widetilde{a}_3\|_2 \quad \text{et} \quad q_3 = \dfrac{1}{r_{33}} \widetilde{a}_3, \end{cases}$$

$$a_n \longrightarrow \begin{cases} r_{1n} =< q_1, a_n >, \cdots , \;\; r_{n-1n} =< q_{n-1}, a_n >, \\ \widetilde{a}_n = a_n - r_{1n} q_1 - \cdots - r_{n-1n} q_n \\ r_{nn} = \|\widetilde{a}_n\|_2 \quad \text{et} \quad q_n = \dfrac{1}{r_{nn}} \widetilde{a}_n. \end{cases}$$

Exemple et Défaut

Exemple

Décomposer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme QR

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Remarque

- *La factorisation QR en utilisant Ckolesky est trés coûteuse en nombre d'opérations relativement aux autres méthodes*
- *Le procédée d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de factorisation sous la forme QR est peu stable.*
- *il y a d'autres méthodes pour factoriser sous forme QR. Par exemple,une qui utilise ce qu'on appelle les rotations de Givensn, ou une autre dite de Householder qui est plus stable que le procédée dorthonormalisation de Gram-Schmidt. De plus, plus général, vu qu'elle traite tout type de matrice (carrée ou non carrée). Cette dernière méthode est décrite dans l'annexe de ce chapitre.*

Conditionnement

Annexe 2 : Conditionnement

Prenons l'exemple classique suivant (dû à R. S.Wilson) :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b' = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}.$$

Les solutions des systèmes $AX = b$ et $AX' = b'$ sont respectivement

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$b' - b = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0,1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad et \quad X' - X = \begin{pmatrix} -8,2 \\ 13,- \\ 0-3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}$$

Donc, une petite perturbation sur le membre de droite a conduit un grand changement dans la solution. Chose qui semble être étrange à première vu. Pour expliquer ce phénomene on est conduit à parler de la notion de conditionnement.

Définition et propriétés

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$*. Alors, pour une norme matricielle induite donnée* $\|\cdot\|$*, le conditionnement de la matrice* A *est défini par* $cond(A) = \|A\| \ \left\|A^{-1}\right\|$.

Proposition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *inversible, On a*
(1) $cond(A) = cond(A^{-1})$,
(2) $cond(\alpha A) = cond(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$,
(3) $cond(A) \geq 1$,
(4) $cond_2(A) = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ *(*$\lambda_{\max}$ *et* $\lambda_{\min}$ *sont la plus grande et la plus petite valeurs singulières de* A*).*
(5) De plus, pour le cas particulier de la normé $\|\cdot\|_2$*, pour une matrice* A *est orthogonale, on a* $cond_2(A) = 1$.

Remarque

Pour une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$*. Les valeurs sigulières d'une matrice* A *sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice* ${}^tA\,A$.

Résultats importants

Les deux résultats suivants expliquent le phénomène illustré par l'exemple ci-dessus :

Théorème

Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *et* $b,\ b' \in \mathbb{R}^n$ *avec* $b \neq 0.$*. Alors si* X *et* X' *sont solutions de* $AX = b$ *et* $AX' = b'$*, on a*

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X\|} \leq cond(A) \frac{\|b' - b\|}{\|b\|}.$$

Théorème

Soient $A,\ A' \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ *et* $b \in \mathbb{R}^n$ *avec* $A \neq 0$ *et* $b' \neq 0$*. Alors si* X *et* X' *sont solutions de* $AX = b$ *et* $A'X' = b$*, on a*

$$\frac{\|X' - X\|}{\|X'\|} \leq cond(A) \frac{\|A' - A\|}{\|A\|}.$$

Notions et discussions

Le conditionnement donne une idée de la sensibilité de la solution d'un système aux erreurs sur les données, à savoir sur la matrice A ainsi que sur le membre à droite b. Si

- le conditionnement est très élevé par rapport à 1 $cond(A) >> 1$, alors le système est dit mal conditionné,
- le conditionnement est très proche de 1, alors le système est dit bien conditionné.
- $cond(A) = 1$, alors le système est parfaitement bien conditionné donc si $cond(A) = 1$, c'est le cas des matrices orthogonales.

Il est à signalé enfin que le conditionnement d'un système d'équations linéaires dépend seulement de la matrice du système.

L'analyse de sensibilité de la solution aux perturbations sur les données demande le calcul de $cond(A)$, mais son calcul demande le calcul de l'inverse de A qui est trop coûteux en complexité (de l'ordre de $O(n^3)$). Dans la pratique, on préfere calculer une approximation du $cond(A)$, pour cela ils existent des algorithmes pour calculer l'inverse du $cond(A)$ avec une complexité d'ordre $O(n^2)$. L'algorithme LAPACK est un exemple de ceux ci et la cammande *rcond* de matlab l'utilise.

Exemple donnant une idée comment améliorer le conditionnement

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $Cond_\infty(A) = 100$.
Mais, si on multiplie A à Gauche par la matrice D où

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient $Cond_\infty(DA) = 1$.
Donc, au lieu de résoudre un système de la forme $AX = b$ (système mal conditionné), on résoud le système équivalent $DAX = Db$ qui est bien conditionné.

Exemple motivant

Exemple motivant

Une entreprise de fabrication de souvenirs veut organiser la production de trois types de souvenirs $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ et $\mathbf{S}_3$ sur trois machines M_1, M_2 et M_3 disponibles respectivement que pendant 5 heures, 3 heures et 4 heures, tels que
- $\mathbf{S}_1$ nécessite 1 minute sur M_1, et 2 minutes sur M_2 et sur M_3,
- $\mathbf{S}_2$ nécessite 2 minutes sur M_1, et 1 minute sur M_2 et sur M_3,
- $\mathbf{S}_3$ nécessite 2 minutes sur M_1 et sur M_3, et 1 minute sur M_2..

Le directeur de la production veut déterminer x_1(resp. x_2 et x_3) le nombre de souvenirs de type $\mathbf{S}_1$(resp. $\mathbf{S}_2$ et $\mathbf{S}_3$) que l'entreprise doit fabriquer pour utiliser tout le temps disponible sur les 3 machines. Le tableau suivant résume les données

	$\mathbf{S}_1$	$\mathbf{S}_2$	$\mathbf{S}_3$	Temps diponible (en minutes)
Temps nécessaire sur M_1	1	2	2	300
Temps nécessaire sur M_2	2	1	1	180
Temps nécessaire sur M_3	2	1	2	240

Ce problème peut être donc formalisé à l'aide d'un système linéaire $AX = b$,

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

1- Appliquer la méthode de Gauss, pour trouver une solution au problème posé.

2- Déduire une factorisation PLU de la matrice du système.

3- Est ce que la matrice du système admet une factorisation de Cholesky ? Justifier.

4- On généralise au cas de 50 types de souvenirs sur 50 machines disponibles pour des temps limités. Supposons que vous disposez d'un ordinateur qui effectue un milliard d'opérations par seconde et que la matrice du système associé est inversible,

a) estimer le temps théorique d'exécution en année (resp. en secondes !) nécéssaire pour résoudre le nouveau problème par la méthode de Cramer (resp de Gauss).

b) Si la matrice du système est symétrique et que l'exécution de l'instruction "*chol*" de matlab sur cette matrice se fait sans erreur, proposer un autre algorithme qui peut donner la solution en un temps plus réduit (à estimer en secondes). Justifier

1- On a par la procédure d'élimination de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 2 & 1 & 1 & 180 \\ 2 & 1 & 2 & 240 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 0 & -3 & -3 & -420 \\ 0 & -3 & -2 & -360 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 300 \\ 0 & -3 & -3 & -420 \\ 0 & 0 & 1 & -360 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1 \end{matrix}$ .Donc, $AX = b \Leftrightarrow \ X =^t (20\ 80\ 60)$

2- On en déduit que

$$P = I_3, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ \ U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3- A n'admet pas une factorisation de Cholesky car elle n'est pas définie positive ($\det \Delta_2 < 0$).

4- **a)** Comme $n = 50$ est grand, l'algorithmes de Cramer (resp. de Gauss) demande l'équivalent de 50(51!) opérations (resp. $\frac{2}{3}50^3$ opérations), ainsi il demande $\approx \frac{50(51)!}{3600\times 24\times 365\times 10^9} \approx 245 \times 10^{48}$ années (resp. $\approx \frac{\frac{2}{3}(50)^3}{10^9} \approx 0,00008\ s$).

b) Comme la matrice est symétrique et définie positive (car chol s'exécute sans erreur sur matlab), alors on propose la méthod de Cholesky qui demande $\approx \frac{\frac{1}{3}(50)^3}{10^9} \approx 0,00004\ s$.

Annexe 1 : La factorisation QR par Householder

Définition

On appelle matrice ou réflexion de Householder relative à un vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la matrice H_v définie par

$$H_v \doteq I_n - \frac{2}{{}^t v \ v} v \ {}^t v.$$

Convention : *On considéra que la matrice identité est de Householder.*

Exemple

Si $a =^t (1,1)$ alors $H_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

On a

- *Les matrices de Householder sont symétriques et orthogonales.*
- *La matrice $H_v - I_n$ est de rang 1.*
- $H_{\lambda v} = H_v$ *tout scalair* $\lambda \neq 0$.

La factorisation QR par Householder (suite)

Proposition

Soient e_1 *le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *avec* $\sum_{i=2}^{n} |a_i| \neq 0$. *Alors, si on note* $v_+ = a + \|a\|_2 \, e_1$ *et* $v_- = a - \|a\|_2 \, e_1$, *on a*

$$H_{v_+} a = - \|a\|_2 \, e_1 \quad et \quad H_{v_-} a = \|a\|_2 \, e_1,$$

c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{v_+} a = \begin{pmatrix} - \|a\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ H_{v_-} a = \begin{pmatrix} + \|a\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Les étapes de la factorisation QR par Householder

Étape 1

On pose $A = A_1$ et on note a_1 la premiere colonne de A.
Si $a_1 = 0$ on prend $H_1 = I_n$,
si non, on pose $v_1 = a_1 + \left\|a_1\right\|_2 e_1$ ou $v_1 = a_1 - \left\|a_1\right\|_2 e_1$) ce qui implique

$$H_{v_1} a = \begin{pmatrix} -\left\|a_1\right\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad H_{v_1} a = \begin{pmatrix} \left\|a_1\right\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$H_1 = H_{v_1} \quad \text{et} \quad A_2 = H_1 A_1$$

par suite on obtient

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Étape 2

Notons maintenant a_2 le vecteur de $\mathbb{R}^{n-1}$ obtenu en prenant les $(n-1)$ dernières composantes de la deuxième colonne de A_2.

- Si $a_2 = 0$, on prend $H_2 = I_n$.
- Si non, c-à-d : si $a_2 \neq 0$, on sait déterminer un vecteur v_2 non nul tel que

$$H_{v_2} a = \begin{pmatrix} -\|a_2\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad H_{v_2} a = \begin{pmatrix} \|a_2\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{v_2} \end{pmatrix}$$

.

Ainsi, en posant $A_3 = H_2 A_2 = H_2 H_1 A_1$, il vient

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Étape finale

On peut itére ce procédé $(n-1)$ fois pour construire $(n-1)$ matrices $H_1, \dots, H_{(n-1)}$ symétriques orthogonales telles que $H_{(n-1)} \dots H_1 A_1$ soit une matrice triangulaire supérieure $R = H_{(n-1)} \dots H_1 A$. Donc,

$$A = \left(H_{(n-1)} \dots H_1\right)^{-1} R$$

Comme les H_i sont symétriques orthogonales, on en déduit

$$\begin{array}{rcl} \left(H_{(n-1)} \dots H_1\right)^{-1} & = & (H_1)^{-1} \dots \ (H_{n-1})^{-1} \\ & = & {}^t H_1 \dots \ {}^t H_{n-1} \\ & = & H_1 \dots \ H_{n-1} \end{array}$$

Ainsi, si on pose

$$Q = H_1 \dots \ H_{n-1}$$

on obtient

$$A = QR$$

avec R une matrice triangulaire supérieure et Q une matrice orthogonale (car $Q^{-1} = (H_{n-1})^{-1} \dots (H_1)^{-1} = {}^t H_{n-1} \dots {}^t H_1 = {}^t Q$).

Résultat général de la factorisation QR

Ici on considère le cas général **(matrices carrées ou non carrées)**. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq m$). Alors, il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et une matrice trapézoïdale supérieure $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont nulles à partir de (m+1)ème c'est à dire sous la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple de factorisation QR par Householder

Déterminer la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{46}{5} & -\frac{43}{5} \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -\frac{28}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix}.$$

Étape 1 : On pose $A_1 = A$ et $a_1 = {}^t(1 \;\; 2 \;\; -2)$ et prenons (on travaille dans $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 - \|a_1\|_2 \;\; e_1 \\ &= {}^t(-2 \;\; 2 \;\; -2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv H_{v_1} \equiv I_3 - \frac{2}{{}^t v_1 \cdot v_1} v_1 \;{}^t v_1 \\ &= I_3 - \frac{2}{(-2 \;\; 2 \;\; -2)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} (-2 \;\; 2 \;\; -2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A_2 &\equiv H_1 A_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{46}{5} & -\frac{43}{5} \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -\frac{28}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{27}{5} \\ 0 & \frac{48}{5} & \frac{114}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Étape 2 : On pose $a_2 = {}^t\!\begin{pmatrix} -\frac{36}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix}$ et prenons (on travaille dans $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} v_2 &= a_2 + \|a_2\|_2 \; e_1 \\ &= {}^t\!\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} H_{v2} &\equiv I_2 - \frac{2}{{}^t v_2 \cdot v_2} v_2 \, {}^t v_2 = I_2 - \frac{2}{\begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{48}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{48}{5} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{48}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{44}{5} \end{pmatrix} \\ &= I_2 - \frac{2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

et donc

$$\begin{aligned} A_3 &\equiv H_2 A_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{27}{5} \\ 0 & \frac{48}{5} & \frac{114}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que $A = QR$ avec

- $R \equiv H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$

- $$\begin{aligned} Q &= (H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1 H_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{15} & -\frac{11}{15} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, si par exemple le système $AX = {}^t(1 \quad 0 \quad 0)$ devient

$$\begin{aligned}
Ax &= {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \Leftrightarrow QRx = {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \\
&\Leftrightarrow \quad Rx = {}^tQ \; {}^t(1 \quad 0 \quad 0) \\
&\Leftrightarrow \quad Rx = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{14}{15} \\ -\frac{2}{15} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} \frac{71}{270} & -\frac{47}{540} & \frac{1}{135} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut trouver une factorisation QR telle que tous les coefficients diagonaux de R sont tous positifs ou nul. Dans ce cas, si A est inversible, cette factorisation est unique.

L'idée de la démonstration

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, d'aprés ce qui précède il existe une matrice R' triangulaire supérieure et une matrice Q' orthogonale telles que $A = Q'R'$. Notons la matrice $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ avec

$$d_i = \begin{cases} \dfrac{r_{ii}}{|r_{ii}|} \quad \text{si} \quad r_{ii} = 0, \\ 1 \quad \text{si} \; r_{ii} = 0. \end{cases}$$

Posons $Q = Q'D^{-1}$ et $R = DR'$, alors

$$\begin{cases} A = QR, \\ Q \text{ est orthogonale}, \\ R \text{ est triangulaire supérieure}, \\ r_{ii} \geq 0, \; \forall i \in \{1, \ldots n\}. \end{cases}$$