

---

## Résolution d'un programme linéaire dans le cas d'une minimisation

Il faut préciser que l'algorithme du simplexe conjugué à **n** variantes, offre des variantes permettant de solutionner aussi bien la maximisation que la minimisation.

Cependant il n'est pas nécessaire de connaître **le simplexe de maximisation et le simplexe de minimisation** ;

En effet l'un des deux algorithmes suffit, puisque les deux relations suivantes sont vraies :

$$\text{MinZ} = -\text{Max}(-Z)$$

$$\text{Et MaxZ} = -\text{Min}(-Z)$$

Comme nous avons introduit, en cours, l'algorithme du simplexe recherche du Maximum,

Quand il faut minimiser un PL il faut suivre cette procédure utilisant l'algorithme de maximisation  $\text{MinZ} = -\text{Max}(-Z)$  :

1. Multiplier la fonction objective à minimiser  $Z$  par  $(-1)$ , on obtient  $(-Z)$
2. Appliquer le simplexe de maximisation à  $(-Z)$
3. Dans le tableau final (optimal) du simplexe, multiplier la valeur de  $(-Z)$  ainsi obtenue par  $(-1)$

**Pour bien comprendre ce processus suivez bien la résolution de l'exercice N°5 du TD**

**Exercice 5 :** La société des carrières de **Aïn-Arwa** a pour objet l'extraction et la distribution de matériaux de carrière. Elle doit assurer, pour des travaux routiers, la fourniture aux Ponts et Chaussées de graviers en divers calibres.

Un marché portant sur les quantités suivantes :

Graviers calibre 1	13 500 tonnes
Graviers calibre 2	11 200 tonnes
Graviers calibre 3	5 000 tonnes

a été adjudgé pour un prix global de facturation.

La société exploite deux carrières P1 et P2 louées à une société civile qui perçoit une redevance par tonne de pierre extraite. Celle-ci est la suivante :

Pour P1	19,40 da par tonne
Pour P2	20,00 da par tonne

Après extraction la pierre est concassée. Les graviers ainsi obtenus sont triés selon leur calibre. Chaque tonne de pierre fournit les quantités suivantes de gravier (exprimées en tonnes) :

Pierre de P1 :	Pierre de P2 :
Graviers calibre 1 : 0,36 t	Graviers calibre 1 : 0,45 t
Graviers calibre 2 : 0,40 t	Graviers calibre 2 : 0,20 t
Graviers calibre 3 : 0,16 t	Graviers calibre 3 : 0,10 t

(Le complément à une tonne représente du sable, actuellement considéré comme déchet sans valeur marchande).

- 1) La direction souhaite définir son programme d'extraction de pierre de P1 et de P2 de façon à minimiser le coût de redevances à la société civile. (Formulation)
- 2) Résoudre le programme par la méthode du simplexe
- 3) L'optimisation du programme conduit-elle à produire des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjudgés ?

**Question 1 :** Formulation du problème sous forme d'un programme linéaire.

a) Définition des variables

Soient :

$x_1$  : le nombre de tonne de pierre extraite de P1

$x_2$  : le nombre de tonne de pierre extraite de P2

b) Description de la fonction objective

$$\text{Min} Z = 19.4x_1 + 20x_2$$

c) Description des contraintes

$$\text{Tel que } \begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 \geq 13500 & (\text{Contrainte sur le gravier calibre 1}) \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 \geq 11200 & (\text{Contrainte sur le gravier calibre 2}) \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 \geq 5000 & (\text{Contrainte sur le gravier calibre 3}) \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 & (\text{Non-négativité des variables}) \end{cases}$$

d) Le programme linéaire

$$\text{Min} Z = 19.4x_1 + 20x_2$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 \geq 13500 \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 \geq 11200 \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 \geq 5000 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Question 2 :** Résolution par la méthode du simplexe du PL

Sachant que :  $\text{Min} Z = -\text{Max}(-Z)$ , nous allons utiliser donc le simplexe recherche du maximum pour trouver  $\text{Max}(-Z)$

$$\text{Min} Z = 19.4x_1 + 20x_2 = -\text{Max}(-Z) = -19.4x_1 - 20x_2$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 \geq 13500 \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 \geq 11200 \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 \geq 5000 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Transformation des inéquations en équations

$$\text{Max}(-Z) = -19.4x_1 - 20x_2$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 - x_3 = 13500 & (\text{Soustraction de la variable d'excédent } x_3) \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 - x_4 = 11200 & (\text{Soustraction de la variable d'excédent } x_4) \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 - x_5 = 5000 & (\text{Soustraction de la variable d'excédent } x_5) \\ x_j \geq 0 ; j=1 \sim 5 \end{cases}$$

## 2. Création d'une solution de base de départ

Il faut rajouter des variables artificielles pour avoir une solution de base de départ :

$$\text{Max}(-Z) = -19.4x_1 - 20x_2 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \quad (\text{Désavantager les variables artificielles !})$$

$$\text{Tel que } \begin{cases} 0.36x_1 + 0.45x_2 - x_3 + x_6 = 13500 & (\text{Ajout de la variable artificielle } x_6) \\ 0.40x_1 + 0.20x_2 - x_4 + x_7 = 11200 & (\text{Ajout de la variable artificielle } x_7) \\ 0.16x_1 + 0.10x_2 - x_5 + x_8 = 5000 & (\text{Ajout de la variable artificielle } x_8) \\ x_j \geq 0 ; j=1 \sim 8 \end{cases}$$

Nous avons, maintenant, une solution de base de départ :

Solution de base de départ :	
Max(-Z) = -29700M	
(Variables de base) :	$\begin{cases} x_6 = 13500 \\ x_7 = 11200 \\ x_8 = 5000 \end{cases}$
(Variables de hors base) : $x_j = 0, j=1 \sim 8$	

## 3. Utilisation des tableaux du simplexe pour la résolution du PL ainsi transformé

	C <sub>j</sub>	-19.4=-97/5	-20	0	0	0	-M	-M	-M		
C*	x*	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	b <sub>i</sub>	Rapport
-M	x <sub>6</sub>	9/25	9/20	-1	0	0	1	0	0	13500	13500/(9/25)=37500
-M	x <sub>7</sub>	2/5	1/5	0	-1	0	0	1	0	11200	11200/(2/5)=28000
-M	x <sub>8</sub>	4/25	1/10	0	0	-1	0	0	1	5000	5000/(4/25)=31250
Tableau N°1	Z <sub>j</sub>	-23M/25	-15M/20	M	M	M	-M	-M	-M	Z <sub>0</sub> = -29700M	
	Z <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	(-23M/25)+97/5	(-15M/20)+20	M	M	M	0	0	0		

- Puisqu'il y a des (Z<sub>j</sub>-C<sub>j</sub>) négatifs, le maximum n'est pas atteint.
- Parmi les (Z<sub>j</sub>-C<sub>j</sub>) négatifs, nous choisirons le plus grand en valeur absolue, donc : Z<sub>1</sub>-C<sub>1</sub>
- Ceci indique que x<sub>1</sub> entre en base.
- Le minimum des rapports (b<sub>i</sub>/a<sub>ij</sub>) de la colonne 2 (avec a<sub>ij</sub> > 0) est (11200/(2/5)=28000) de la ligne 2.
- Ceci indique que x<sub>7</sub> quitte la base (x<sub>7</sub> sera remplacé par x<sub>1</sub>)
- Donc le pivot = 2/5, qui se trouve à l'intersection de la colonne 1 et de la ligne 2

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan nous obtenons le 2<sup>ème</sup> Tableau :

	C <sub>j</sub>	-19.4	-20	0	0	0	-M	-M	-M		
C*	x*	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>8</sub>	b <sub>i</sub>	Rapport
-M	x <sub>6</sub>	0	27/100	-1	9/10	0	1	-9/10	0	3420	3420/(9/10)=3800
-97/5	x <sub>1</sub>	1	1/2	0	-5/2	0	0	5/2	0	28000	✗
-M	x <sub>8</sub>	0	1/50	0	2/5	-1	0	-2/5	1	520	520/(2/5)=1300
Tableau N°2	Z <sub>j</sub>	-97/5	-29M/100-97/10	M	-13M/10+97/2	M	-M	13M/10-97/2	-M	Z = -543 200 - 3940M	
	Z <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	0	-29M/100+103/10	M	-13M/10+97/2	M	0	3M/10-97/2	0		

Remarque : On ne fait pas le rapport de la ligne 2 car a<sub>ij</sub> = -5/2 en rouge est négatif, alors qu'il doit être > 0 !

- Puisqu'il y a des  $(Z_j - C_j)$  négatifs, le maximum n'est pas atteint .
- Puisque  $(Z_4 - C_4)$  est le plus grand négatif la variable hors base  $x_4$  deviendra variable de base.
- Puisque  $\min\left\{\frac{3420}{9/10}=3800, \frac{520}{2/5}=1300\right\} = 1300$ , la variable hors base  $x_4$  deviendra variable de base dans la troisième équation, à la place de  $x_8$ . (pivot =  $2/5$ )

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 3<sup>ème</sup> tableau :

	$C_j$	-19.4	-20	0	0	0	-M	-M	-M		
$C^*$	$x^*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$b_i$	Rapport
-M	$x_6$	0	9/40	-1	0	9/4	1	0	-9/4	2250	←
-97/5	$x_1$	1	5/8	0	0	-25/4	0	0	25/4	31250	✗
0	$x_4$	0	1/20	0	1	-5/2	0	-1	5/2	1300	✗
Tableau N°3	$Z_j$	97/5	-9M/40-97/8	M	0	-9M/4+485/4	-M	0	-9M/4-485/4	Z=-	
	$Z_j - C_j$	0	-9M/40+63/8	M	0	-9M/4+485/4	0	M	-5M/4-485/4	2250M	

- Un seul rapport est possible, celui de la ligne 1 !

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 4<sup>ème</sup> tableau :

	$C_j$	-19.4	-20	0	0	0	-M	-M	-M		
$C^*$	$x^*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$b_i$	Rapport
0	$x_5$	0	1/10	-4/9	0	1	4/9	0	-1	1000	←
-97/5	$x_1$	1	5/4	-25/9	0	0	25/9	0	0	37500	
0	$x_4$	0	3/10	-10/9	1	0	10/9	-1	0	3800	
Tableau N°4	$Z_j$	-97/5	-97/4	+485/9	0	0	-485/9	0	0	Z=-	
	$Z_j - C_j$	0	-17/4	+485/9	0	0	M-485/9	M	M	727500	

Après application de la procédure Gauss-Jordan nous obtenons le 5<sup>ème</sup> tableau :

	$C_j$	-19.4	-20	0	0	0	-M	-M	-M		
$C^*$	$x^*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$b_i$	
-20	$x_2$	0	1	-40/9	0	10	40/9	0	-10	10000	
-97/5	$x_1$	1	0	25/9	0	-25/2	-25/9	0	25/2	25000	
0	$x_4$	0	0	2/9	1	-3	-2/9	-1	3	800	
Tableau N°5	$Z_j$	-97/5	-20	+35	0	42.5	-315/9	0	-42.5	Z=-685 000	
	$Z_j - C_j$	0	0	+35	0	42.5	M-315/9	M	M-42.5		

- Puisque tous les  $(Z_j - C_j)$  sont non-négatifs, le maximum est atteint .

$$\text{Max}(-Z) = -685\,000$$

$$\text{Min}Z = -\text{Max}(-Z) = -(-685\,000) = 685\,000$$

- La solution minimale est :

$$\text{Min}Z = 685\,000$$

$$x_1 = 25000 \quad x_3 = 0$$

$$x_2 = 10000 \quad x_5 = 0$$

$$x_4 = 800 \quad x_6 = 0$$

$$x_7 = 0$$

$$x_8 = 0$$

- La redevance minimale est de 685 000 DA
- Pour cette dépense de redevances minimale, la direction doit extraire :
  - 25000 tonnes de pierre de la carrière P1
  - et 10 000 tonnes de pierre de la carrière P2.

**Question 5 :** L'optimisation du programme conduit-elle à produire des graviers en excédent par rapport aux tonnages adjugés ?

**Réponse :** Vérifions les trois contraintes du problème avec les valeurs des variables  $x_1$  et  $x_2$

$$x_1 = 25000 ; x_2 = 10000$$

$0.36x_1 + 0.45x_2 \geq 13500$		$0.36 \times 25000 + 0.45 \times 10000 \geq 13500$		$13500 \geq 13500$
$0.40x_1 + 0.20x_2 \geq 11200$	$\rightarrow$	$0.40 \times 25000 + 0.20 \times 10000 \geq 11200$	$\rightarrow$	$12000 \geq 11200$
$0.16x_1 + 0.10x_2 \geq 5000$		$0.16 \times 25000 + 0.10 \times 10000 \geq 5000$		$5000 \geq 5000$

Ainsi donc : l'optimisation conduit à extraire :

- **13500 tonnes** de graviers de **calibre 1** et sans aucun excédent.
- **12000 tonnes** de graviers de **calibre 2** avec un excédent de **800 tonnes = 12000-11200**.
- Et **5000 tonnes** de graviers de **calibre 3** et sans aucun excédent..