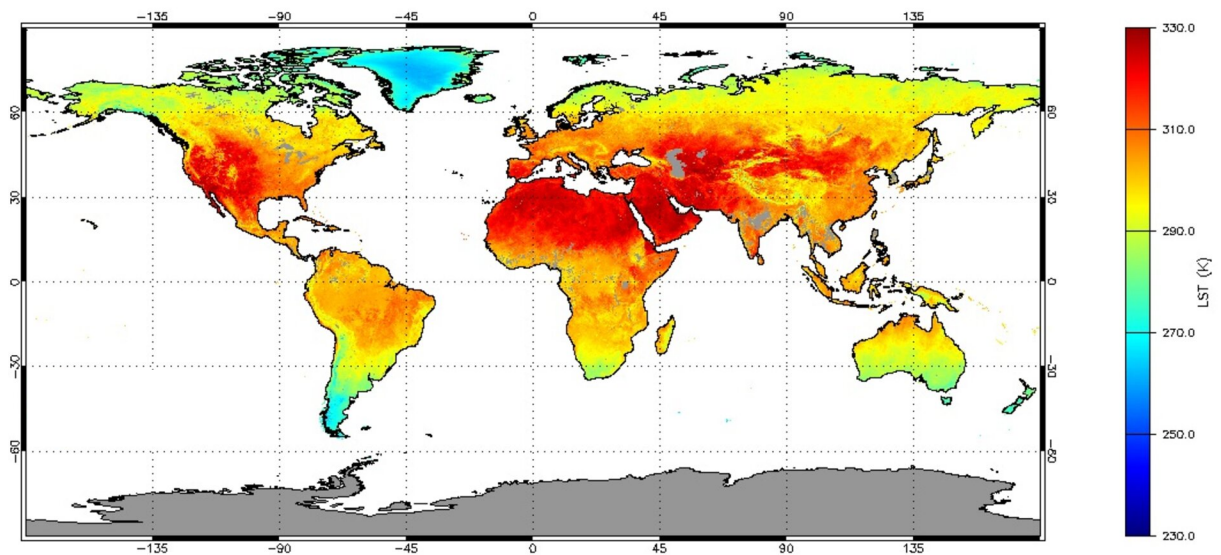

Rapport d'étude : Modélisation de la surface de la croûte terrestre



Etudiants :

AMAIRI Tahar
BERBAGUI Amine
DELABORDE Romane
HACHANI Ghassen
YONG Catherine

Enseignants référents :

Mr Samuel FAVRICHON
Mr Thibault HILAIRE

Projet Pluridisciplinaire

MAIN 3 2020-2021

20 janvier 2021

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Motivation	2
1.2	Impacts environnementaux, éthiques, sociétaux	2
1.3	Hypothèses	3
1.3.1	Simplification du sujet	3
1.3.2	Echelle de profondeur	3
1.3.3	Echelle de temps	3
2	Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D	4
2.1	Présentation générale	4
2.2	Démonstration	4
2.3	Résolution	5
3	Discretisation de l'équation de la chaleur en 1D	6
3.1	Méthodes et schémas de résolutions numériques	6
3.2	Les conditions initiales aux limites	6
3.3	L'étape de la discrétisation	7
3.4	Le schéma d'Euler explicite	8
3.5	Le schéma d'Euler implicite	8
3.6	Le schéma de Crank-Nicolson	9
3.7	L'implémentation numérique	9
4	Résultats	12
4.1	France été :	12
4.1.1	France hiver :	13
4.1.2	Observation France	14
4.2	Algérie hiver	14
4.2.1	Algérie été :	15
4.2.2	Observation Algérie	16
5	Tableau récapitulatif	16
6	Discussion	17
7	Conclusion	18
8	Annexes	19

1 Introduction

1.1 Motivation

Ce projet a pour but d'étudier et de modéliser l'évolution de la température dans plusieurs régions du globe. En effet, le domaine de la géothermie est devenu indispensable par exemple dans l'isolation thermique des bâtiments. La conservation de l'énergie se faisant de plus en plus nécessaire, les données sur la température du sol représentent un aspect important du calcul des besoins énergétiques, par exemple pour déterminer les pertes de chaleur dans les sous-sols ainsi que pour examiner la possibilité d'utilisation du sol comme source pour les pompes à chaleur. Il incombe donc aux ingénieurs qui doivent faire face à ces problèmes de connaître les facteurs déterminant les températures du sol et de savoir comment ces températures varient selon la saison et la profondeur du sol.

1.2 Impacts environnementaux, éthiques, sociétaux

Notre projet s'articulant autour de l'évolution de la température à la surface sur des différentes zones du globe, son intérêt réside en un point de vue environnemental. En effet, le changement climatique est l'un des enjeux majeurs de notre siècle. Ainsi, pour étudier et évaluer l'impact des dérives de celui-ci, la connaissance de la température au niveau de la surface de la planète est primordiale. Par exemple, l'étude des différentes températures de surface, peuvent permettre à la communauté scientifique de prévoir les éventuelles variations de climat et ainsi anticiper au mieux le réchauffement climatique.

Bien plus, l'intérêt de notre projet ne se limite pas à cet enjeu uniquement. En effet, la connaissance de la température à la surface rendra notre compréhension des orages, tempêtes et plus généralement des phénomènes géophysiques meilleure mais pas seulement puisque les méthodes d'agricultures pourront être innovées avec une agriculture dite « de précision ». Cela pourra permettre de connaître l'évolution de la température dans les terres à une période donnée et ainsi mieux comprendre la croissance des plantes. Enfin, un suivi climatique pourra être mis en place à l'échelle mondiale.

Cependant, si tout ceci paraît bénéfique, quelques inconvénients doivent être cités comme le coût environnemental et économique d'un tel projet à une échelle bien plus grande. En effet, pour arriver à des résultats convaincants, d'énormes moyens technologiques doivent être mis en place afin d'avoir une puissance de calcul suffisante. Comme par exemple, des supers ordinateurs qui peuvent être très énergivores si leur nombre est important. De plus, des mesures par satellite sont nécessaires, ainsi, l'envoi de satellites dans l'espace devient aussi une nécessité ce qui en résulte donc en un budget économique de plus en plus important sans compter les tonnes de carburants utilisées et éventuellement les débris spatiaux, tout ceci représentant une menace à long terme.

D'un point de vue éthique, un tel projet ne soulève pas vraiment de question de ce genre excepté si les recherches ont été faites sur un territoire plutôt qu'un autre pour des raisons autres que scientifiques (problème de financement ou autre intérêt). Les recherches doivent avoir pour seule ligne directrice l'intérêt scientifique et la pertinence des résultats.

D'un point de vue sociétal, ce projet peut trouver son utilité dans plusieurs domaines. On sait que la température du sol constitue une donnée essentielle pour l'étude de divers projets de construction d'infrastructures comme les logements d'habitations en termes d'isolation thermique (afin de minimiser les coûts énergétiques) et autres infrastructures plus importantes : aéroports ou autoroutes. Mais pas que, puisque ces données sont aussi importantes pour déterminer la profondeur à laquelle les canalisations d'alimentation en eau des bâtiments peuvent être installées sans risque de gel, la conception des fondations et la construction des sous-sols des bâtiments.

Finalement, ce projet trouve sa place d'un point de vue environnemental et sociétal avec de nombreuses applications. Cependant, on se doit d'être vigilant sur les moyens utilisés pour mettre en place celui-ci en prenant garde de ne pas rentrer dans un paradoxe où l'on cherche à préserver notre planète en se servant de moyens nuisibles pour cette dernière.

1.3 Hypothèses

1.3.1 Simplification du sujet

Afin de simplifier l'étude de la diffusion thermique, nous avons décidé de négliger plusieurs phénomènes physiques.

- **Homogénéité** : Nous considérons que le sol est homogène, c'est-à-dire à matériau unique dont la densité et les propriétés thermiques sont constantes. Nous négligeons donc la présence de racines d'arbres, nappes phréatiques ou de roches par exemple. Ceci a pour conséquence que nous ne considérons pas les échanges de chaleur latéraux. Le flux de chaleur se propage verticalement dans notre étude.
- **Convection** : En effet, comme nous étudions le problème à une profondeur maximale de 10m, nous pouvons nous permettre de négliger la convection. Les mouvements de matière responsables de la convection sont par ailleurs négligés.
- **Rayonnement** : Intégrer les problèmes de diffusion et de réflexion liés au rayonnement dans notre raisonnement et nos calculs ne semble pas pertinent. Le flux d'émission et d'absorption se compensent en grande partie. Il est donc possible de négliger le transfert de chaleur par rayonnement. En effet, la différence entre les flux émis et absorbés aux températures considérées ($< 350\text{K}$) peuvent être considérées comme faibles au regard des transferts de chaleur par conduction.
- **Changements d'état** : Tous les changements d'états concernant les solides, liquides et gaz ne seront pas pris en compte. De même, tout apport de chaleur externe autre que celui de la surface, par exemple ceux liés aux processus biologiques ou physiques (telles que radioactivité ou le manteau terrestre) ne seront pas pris en compte.

1.3.2 Echelle de profondeur

Nous déterminons la profondeur maximale celle à partir duquel l'amortissement de la température est au delà de 0.99. Au niveau du sol, nous considérons que la température peut être assimilée à un signal périodique, d'où le lien avec l'amortissement du signal périodique. Cette profondeur correspond à 10m.

1.3.3 Echelle de temps

Lors de ce projet, la question de l'échelle de temps est rapidement devenue une question centrale du sujet. Nous avons ainsi jugé pertinent de visualiser la diffusion thermique dans 3 échelles de temps différentes : sur **un an mois par mois**, sur **un an jour par jour**, et sur **une journée que l'on choisit, heure par heure**.

Nous disposons des **températures à la surface du sol** en Algérie et en France, heure par heure sur une année. Ces dernières proviennent d'un modèle de température globale utilisé en météorologie¹. Avoir accès à deux pays nous permet de comprendre l'évolution de la diffusion thermique dans deux régions du monde très différentes l'une de l'autre.

1. H. Hersbach et al., "The ERA5 global reanalysis," Q. J. R. Meteorol. Soc., vol. 146, no. 730, pp. 1999–2049, Jun. 2020.

2 Résolution analytique de l'équation de la chaleur 1D

2.1 Présentation générale

Ce projet a pour but d'étudier la température du sol en différents endroits, en Algérie et en France dans notre cas. Pour cela, nous utilisons l'équation de la chaleur unidimensionnelle, afin de décrire les variations de température dans le sol.

Tout d'abord, nous avons procédé à une résolution analytique. Ceci nous a permis d'avoir une idée globale des résultats que nous sommes supposés obtenir. Ensuite, nous avons utilisé différentes méthodes de résolutions numériques, dans le but de comprendre leur différences, leurs avantages et inconvénients. Nous présentons leur fonctionnement pour ensuite effectuer une comparaison des résultats.

Enfin, nous concluons notre rapport en présentant les limites de notre projet et les moyens possibles afin d'améliorer nos résultats.

2.2 Démonstration

L'équation étudiée par Joseph Fourier depuis le XIXe siècle régissant la température de la Terre s'obtient comme suit :

Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -K \cdot \overrightarrow{grad}.T$ avec K la conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$).

On établit un bilan énergétique du flux thermique.

On a : $\phi_{th} = \frac{\delta Q}{dt}$ et $\delta \phi = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} \delta Q_e = \vec{j}_{th}(x, t) S dt \\ \delta Q_s = \vec{j}_{th}(x_p dx, t) S dt \end{cases}$$

La variation de l'énergie interne est : $dU = \delta Q + \delta W$ or $\delta W = 0$ car il n'y a pas d'échange de travail. Donc $dU = \delta Q$

$$\iff dU = \delta Q_e - \delta Q_s$$

$$\iff dU = \vec{j}_{th}(x, t) S dt - \vec{j}_{th}(x_p dx, t) S dt$$

$$\iff dU = \vec{j}_{th}(x, t) S dt - (\vec{j}_{th}(x, t) S dt + \frac{\partial \vec{j}_{th}}{\partial x} dx S dt)$$

$$\iff dU = \boxed{-\frac{\partial \vec{j}_{th}}{\partial x} dx S dt} (*)$$

D'autre part ,

$$dU = (\rho S dx) c dT \text{ car } (c = c_v = c_p)$$

$$\text{car } \frac{dU}{dT} = m \cdot c \iff \frac{dU}{dT} = \rho v c \iff \boxed{\frac{dU}{dT} = (\rho S dx) c} (**)$$

$$\text{On a donc } \boxed{-\frac{\partial \vec{j}_{th}}{\partial x} dx S dt = \rho S dx \cdot c \cdot dT}$$

On applique la Loi de Fourier $\vec{j}_{th} = -K \cdot \overrightarrow{grad}.T$ (en 1D) donc $\vec{j}_{th} = -K \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$

Donc :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\partial x} (\partial (-K \frac{\partial T}{\partial x})) = \boxed{K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Finalement, on obtient l'équation de la diffusion de la **chaleur unidimensionnelle**.

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

2.3 Résolution

Température sinusoïdale imposée en surface , régime périodique établi

On a $T(z = 0, t) = T_i + T_0 \cos(\omega t)$

On impose une température sinusoïdale (périodique en surface) avec $T_i = T(x, t = 0)$ la température initiale. Ainsi , l'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$. (1)

En posant $a = \frac{K}{\rho c}$ on a donc $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}}$

Avec les conditions aux limites $\begin{cases} T(0, t) = T_i + T_0 \cos(\omega t) \\ T(\infty, t) = T \end{cases}$

On cherche une solution en régime établi pour laquelle le champ de température du milieu évolue comme $T(x, t) = T_0 e^{i\omega t} f(x)$. On réinjecte ce résultat dans (1) avec f une fonction complexe.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{a} f = 0$$

On a donc une équation différentielle du 2nd ordre.

Équation caractéristique : $r^2 - \frac{i\omega}{a} = 0$ donc $r = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{a}}$

donc $f(x) = A e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x} + B e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}} x}$ or $\sqrt{i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{0.5} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ainsi , on a :

$$f(x) = A e^{-e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} x} + B e^{e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} x}$$

pour $x \rightarrow \infty$, f ne doit pas diverger donc $B = 0$ et $f(0) = A + B = T_0$ donc $f(0) = A = T_0$ d'où

$$T(x, t) - T_i = T_0 e^{-e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} x} e^{i\omega t}$$

$$\iff T(x, t) - T_i = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x} e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x)}$$

Le problème étant linéaire , il est équivalent de prendre la partie réelle ou imaginaire de la solution complexe trouvée.

Ainsi, on obtient : $T(x, t) = T_i + T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x)$

3 Discrétisation de l'équation de la chaleur en 1D

3.1 Méthodes et schémas de résolutions numériques

Malgré l'existence de nombreuses méthodes numériques de résolution d'EDP (équations différentielles partielles), il est toujours préférable de déterminer les schémas numériques les mieux adaptés au cas de figure étudié.

Pour la résolution numérique des EDP, il est possible d'opter pour les méthodes à un pas comme par exemple, le schéma d'Euler (explicite ou implicite), ou bien les méthodes multi-pas telles que celles Runge-Kutta ou encore d'Adams-Bashforth. Il existe également d'autres schémas plus précis comme les éléments finis ou encore les volumes finis, qui sont adaptés à des problèmes de géométries plus complexes. Néanmoins, leur implémentation est assez difficile et ceux-ci sont très coûteux en termes de temps de calcul (puissance de calcul, mémoire vive).

En outre, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées des EDP paraboliques en analyse numérique. Celle-ci consiste à résoudre un schéma numérique en certains points assez proches les uns des autres, en discrétisant les dérivées partielles grâce au théorème de Taylor. D'ailleurs, les méthodes explicites et implicites sont des schémas aux différences finies.

Dans le cadre de la résolution numérique de l'équation de la chaleur, nous avons décidé d'implémenter non seulement la méthode d'Euler explicite, mais également le schéma de Crank-Nicolson, qui est un procédé implicite. En effet, d'une part ces méthodes sont adaptées aux conditions de Dirichlet, celles-ci étant utilisées dans la résolution numérique de notre problème. D'autre part, il s'agit de schémas plus simples à mettre en place comparé à certaines méthodes de résolution numériques plus avancées.

De plus, étant donné que l'équation de la chaleur que nous étudions est assez simple, il est tout à fait légitime de résoudre numériquement cette dernière grâce au procédé des différences finies. En effet, il s'agit d'une équation différentielle partielle d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps. Il est à noter qu'il s'agit également d'une EDP parabolique, par conséquent cela justifie d'autant plus le choix des méthodes des différences finies dans le cadre de notre étude. Par ailleurs, étant donné que nous effectuons une résolution en 1D, notre problème est simplifié.

3.2 Les conditions initiales aux limites

Nous considérons trois types de conditions pour ce problème : il s'agit des conditions aux bords de Dirichlet. Par conséquent, cela signifie que nous allons imposer une température non seulement au niveau de la surface du sol (notée T_g) mais également au niveau de la dernière couche de terre étudiée (notée T_d). Ces deux températures seront toujours constantes durant toute la durée de la résolution. De plus, la colonne de terre sera initialisée au temps initial (i.e. $t = 0$) à une température homogène (notée T_0).

Au niveau de la surface, cette température correspondra aux différentes valeurs données relevées en 2016 en France et en Algérie. Ces relevés de températures ont été fournis par notre professeur référent Samuel Favrichon. En outre, nous avons traité ces données afin de simplifier l'accès à ces informations, par exemple en créant un dictionnaire qui contient uniquement les températures d'un jour précis dans l'année.

Concernant le niveau de la dernière couche de sol étudiée, nous avons imposé une température qui correspond à la moyenne des températures à la surface du sol en fonction du cycle étudié (jours, mois, année), compte tenu des faibles variations de températures dans le sol entre la surface et la profondeur étudiée. Finalement, la température initiale, celle-ci sera choisie de façon arbitraire lors de la première résolution (i.e. la première boucle du programme), puis cette température correspondra à la moyenne des températures obtenues au cours des résolutions précédentes.

3.3 L'étape de la discrétisation

Contrairement à certaines hypothèses qu'il est possible de faire en mathématiques, l'espace et le temps ne sont jamais continus lors d'une résolution numérique. En effet, la continuité est un concept qui n'existe pas sur nos ordinateurs. Ainsi, ces deux grandeurs doivent être découpées en segments de taille plus ou moins importante : il s'agit de l'opération de discrétisation de l'espace et du temps.

On s'intéresse à l'évolution de la température au cours du temps dans une barre fine, qui pourra être assimilée à une colonne de terre de dimension 1 par la suite. Étant donné que l'on cherche à résoudre une équation différentielle dépendante du temps dans un espace de dimension 1, l'espace de résolution de cette équation différentielle sera de dimension 2 : en x (la profondeur) et en t (le temps). Comme précisé plus haut, il est désormais nécessaire de mailler le plan qui correspond à l'espace de résolution, afin de pouvoir résoudre numériquement l'équation de la chaleur. Ainsi pour effectuer ce maillage, on découpe le plan en une multitude de cases, chacune étant de dimension Δx (le pas spatial) sur Δt (le pas temporel). Il s'agit bien d'un maillage régulier. Ainsi, chaque noeud est repéré par ses coordonnées d'espace (en abscisse) et de temps (en ordonnée), ce qui correspond au couple $(j\Delta x, n\Delta t)$, avec j et n variants entre 0 et la taille de la grille. Sur la grille ci-dessous, chaque point correspond à une certaine profondeur à un temps précis. Le noeud T_j^n correspond donc à la température au temps $n\Delta t$ et à la profondeur $j\Delta x$.

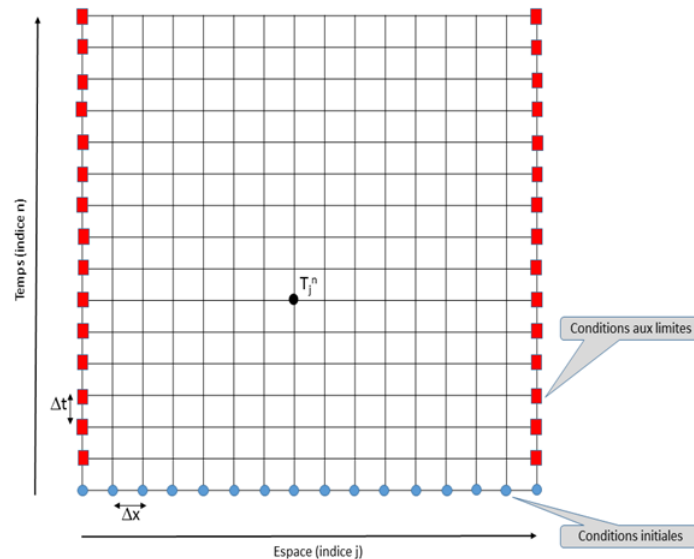


FIGURE 1 – Représentation du maillage correspondant au découpage de l'espace-temps (Crédit : TangenteX.com)

Par conséquent, le principe n'est plus de calculer la solution de l'EDP en tout point de l'espace et du temps, mais uniquement à chaque nœud de la grille du maillage, d'où l'importance de l'étape de discrétisation. En effet, dans le cas contraire cela impliquerait la continuité, puisqu'on aurait toutes les valeurs en tout point de l'espace et du temps.

3.4 Le schéma d'Euler explicite

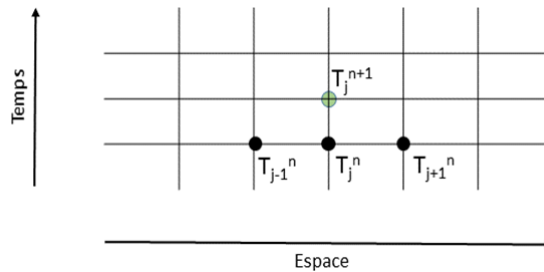


FIGURE 2 – Discrétisation de l'espace-temps dans le cadre de la méthode explicite (Crédit : TangenteX.com)

Afin de calculer la température au prochain nœud dans le cas du schéma d'Euler explicite, on utilise les températures à l'instant précédent pour les nœuds situés au-dessous mais également de part et d'autre du nœud courant. Ceci justifie le nom de schéma de FTCS (Forward Time Centred Space), étant donné que le schéma est calculé à partir de la dérivée temporelle à droite, et que celui-ci est centré en espace et approximé en avant pour le temps. Non seulement ce schéma est assez simple à implémenter, mais son temps de rendu est également très court. Cependant, il représente un désavantage car il doit respecter la condition de Courant-Friedrich-Levy (CFL) : $\Delta \frac{x^2}{2} > \Delta t$.

Par ailleurs cette méthode est très peu précise étant donné que celle-ci est d'ordre $O(\Delta t)$.

3.5 Le schéma d'Euler implicite

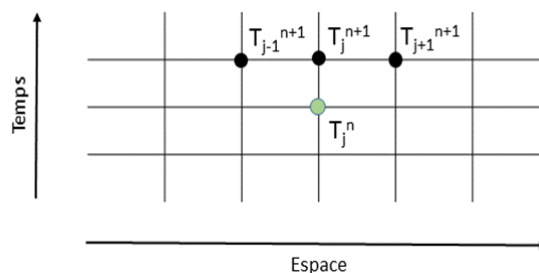


FIGURE 3 – Discrétisation de l'espace-temps dans le cadre de la méthode implicite (Crédit : TangenteX.com)

Dans le cas du schéma d'Euler implicite, on utilise la température au nœud courant pour calculer les températures aux trois prochains nœuds : au nœud d'au-dessus et aux nœuds de part et d'autre de celui-ci. On exécute donc l'inverse du procédé correspondant au schéma explicite. En outre, à l'instar de la méthode d'Euler explicite, on utilise la dérivée temporelle à gauche, d'où le nom de schéma BTCS (Backward Time Centred Space). En effet, le schéma implicite reste centré en espace et approximé en avant pour le temps. Ce schéma est un peu plus complexe à implémenter et son temps de rendu est un peu plus long puisqu'il s'agit d'un schéma implicite. Cependant, il représente un énorme avantage car il est intrinsèquement stable. Par ailleurs, il possède la même précision que son homologue explicite.

3.6 Le schéma de Crank-Nicolson

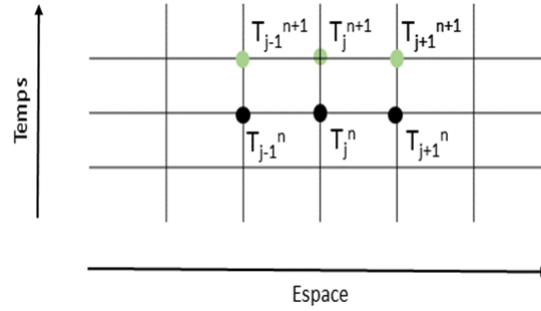


FIGURE 4 – Discrétisation de l'espace-temps dans le cadre du schéma de Crank-Nicolson (Crédit : TangenteX.com)

Dans le cadre du schéma de Crank-Nicolson, on « mixe » les deux schémas FTCS et BTCS en s'appuyant sur la moyenne de ces deux derniers. Ainsi, grâce à trois nœuds courants correspondant à un même temps, il est possible de calculer les nœuds respectifs situés au-dessus. Tout comme le schéma d'Euler implicite, le schéma de Crank-Nicolson est complexe à implémenter et son temps de rendu est plus long étant donné que celui-ci est un schéma implicite. En outre, il est intrinsèquement stable et est bien plus précis que les méthodes d'Euler explicite et implicite.

3.7 L'implémentation numérique

Pour l'implémentation numérique, nous avons décidé d'utiliser le schéma explicite et celui de Crank-Nicolson. Nous avons donc mis de côté le schéma implicite, étant donné que le schéma, également implicite, de Crank-Nicolson est bien plus précis en théorie.

Par ailleurs, nous travaillons avec le Jupyter Notebook grâce au logiciel Anaconda. Par conséquent, notre implémentation numérique est réalisée en langage Python. Ce choix n'est pas anodin puisque Python offre une multitude de bibliothèques très utiles dans le cadre d'une résolution numérique telles que numpy, matplotlib, ou encore seaborn.

Dans un premier temps, un traitement sur les données d'entrées a été nécessaire. En effet, trier les températures afin de les utiliser pour chaque cycle permet de faciliter l'implémentation du code pour le programmeur. Ainsi, pour le cycle journalier, nous avons associé à chaque jour ses températures en fonction de l'heure. Concernant le cycle annuel, nous avons relié à chaque jour de l'année, la moyenne des températures de ce jour sur ses 24h. Par ailleurs, la différence entre les pays est prise en compte puisque nous avons deux flux d'entrées : Algérie et France.

Afin de stocker rapidement ces données et de les appeler facilement, nous avons utilisé les dictionnaires de python. Pour la suite de notre implémentation numérique, il est important de définir les paramètres de la simulation, c'est-à-dire :

- dx : le pas spatial en m^{-1}
- dt : le pas temporel en s^{-1}
- t : le temps de la simulation en s
- L : la profondeur de la colonne de terre en m
- N_x : le nombre de points discrétisant la colonne de terre
- N_t : le nombre de points discrétisant le temps de la simulation
- T_g, T_d : les températures aux limites en $^{\circ}C$
- T_0 : température initiale en $^{\circ}C$
- D_{Fr} et D_{Alg} les diffusivités thermiques du sol français et algérien en $m^2.s^{-1}$

Remarque :

- $N_x = \frac{L}{dx}$ et $N_t = \frac{t}{dt}$
- La diffusivité thermique vaut $K/(\rho c)$ avec K la conductivité thermique en $W.m^{-1}.K^{-1}$ et avec ρc la capacité thermique volumique en $J.m^{-3}.K^{-1}$ (voir en annexe les valeurs possibles).

Ces différents paramètres varient selon le cycle de résolution mais aussi en fonction de la méthode choisie. En effet, il faut se rappeler que la méthode explicite doit respecter la condition CFL de stabilité et que le temps de résolution varie entre les cycles. Cependant, certains paramètres restent communs entre les cycles et les méthodes comme par exemple la diffusivité.

Voici donc deux tableaux récapitulatifs pour chacun des schémas :

Schéma d'Euler explicite :

Paramètres	Cycle journalier	Cycle annuel
dx	$10^{-2}m^{-1}$	$10^{-2}m^{-1}$
dt	10s	100s
t	36000s	100 000s
L	5m	5m
Nx	500	500
Nt	3600	1000
D_{Fr} (Terre sèche)	$2.378.10^{-7}m^2.s^{-1}$	$2.378.10^{-7}m^2.s^{-1}$
D_{Alg} (Sable sec)	$2.731.10^{-7}m^2.s^{-1}$	$2.731.10^{-7}m^2.s^{-1}$

Schéma de Crank-Nicolson :

Paramètres	Cycle journalier	Cycle annuel
dx	$10^{-2}m^{-1}$	$10^{-2}m^{-1}$
dt	$10^{-1}s^{-1}$	$2.4s^{-1}$
t	3600s	86 400s
L	5m	5m
Nx	500	500
Nt	36000	36000
D_{Fr} (Terre sèche)	$2.378.10^{-7}m^2.s^{-1}$	$2.378.10^{-7}m^2.s^{-1}$
D_{Alg} (Sable sec)	$2.731.10^{-7}m^2.s^{-1}$	$2.731.10^{-7}m^2.s^{-1}$

Étant donné que les différents paramètres ont été fixés, il est désormais possible d'implémenter les différents schémas numériques sélectionnés : celui d'Euler explicite et de Crank-Nicolson.

Les deux méthodes possèdent la même structure :

- À partir des paramètres N_x et N_t , on crée une matrice de taille (N_{t+1}, N_{x+1}) . Celle-ci représente le maillage évoqué dans la partie de discrétisation et elle servira également de stockage pour les résultats.
- Grâce à D_{Fr}/D_{Alg} , on crée la ou les matrices tridiagonales selon le schéma utilisé (voir en annexe : Figure 9/11).
- En fonction du cycle étudié, on choisit T_g, T_d et on fixe arbitrairement T_0 ou pas (par exemple, on peut poser $T_0 = 0$).
- On pose les conditions limites et initiales dans la matrice (N_{t+1}, N_{x+1}) (voir schéma de la partie 3.3).
- Enfin, on résout dans une boucle for pour chaque pas de temps l'égalité matricielle selon le schéma (voir en annexe : Figure 9/11) avec la fonction « np.linalg.solve » où np correspond à la librairie numpy (« import numpy as np »).

Cette structure est donc implémentée pour chacun des cycles :

- Pour le cycle journalier : on effectue une résolution heure par heure au sein d'une journée. Nous aurons donc à effectuer 24 résolutions et pour cela, on utilise une boucle for allant de 1 à 24 (ou de 0 à 23). Dans un premier temps, on détermine T_d , qui est une des températures limites que l'on obtient en calculant la moyenne de toutes les températures au niveau de la surface du sol associées à cette journée. Pour rappel, T_d restera toujours constant au cours de la résolution. Concernant la première résolution, on fixe T_0 arbitrairement, puis à la deuxième résolution on utilise la moyenne des températures obtenues lors de la première résolution, puis on recommence jusqu'à la dernière boucle. Ainsi, à chaque résolution le résultat devient de plus en plus précis et converge au fil des boucles vers la solution réelle. Cependant, il ne faut pas oublier de changer la température T_g à chaque résolution à partir du moment où l'on change d'heure.
- Pour le cycle annuel : on applique exactement la même logique excepté que dans ce cas précis, on effectue une résolution jour par jour au sein d'une année. Nous aurons donc à faire un total de 360 résolutions. En effet, on a supposé que chaque mois comptait 30 jours, ce qui n'est pas conforme à la réalité. La logique pour déterminer T_0 reste la même que pour le cycle journalier, on utilise toujours les résultats précédents afin d'obtenir le T_0 de la résolution courante. Concernant la valeur de T_g , il s'agit de la moyenne des températures de surfaces du jour. Cette valeur doit également être changée à chaque incrémentation de la boucle for. Finalement, la solution approchée est déterminée de la même manière que pour le cycle journalier : il s'agit de la moyenne de l'ensemble des températures du cycle.

Lorsque nous exécutons nos programmes, l'affichage des résultats se fait sous différentes formes : graphique, heatmap ou bien GIF. Cependant, dans la suite de notre rapport nous avons décidé de sélectionner uniquement le format d'un graphique car il s'agit du moyen le plus simple pour comparer les différentes méthodes que nous avons mises en place.

Par ailleurs, il est possible d'accéder directement à nos programmes grâce à ce lien vers notre projet Github : <https://github.com/Amine695/ProjetTemp>.

Pour rappel, afin d'exécuter nos programmes, il est nécessaire de posséder un logiciel tel que Anaconda, qui est capable de lire des fichiers de type .ipynb.

4 Résultats

4.1 France été :

Pour nos observations, nous avons choisi deux jours en été ,le 25 et 26 juillet 2016.

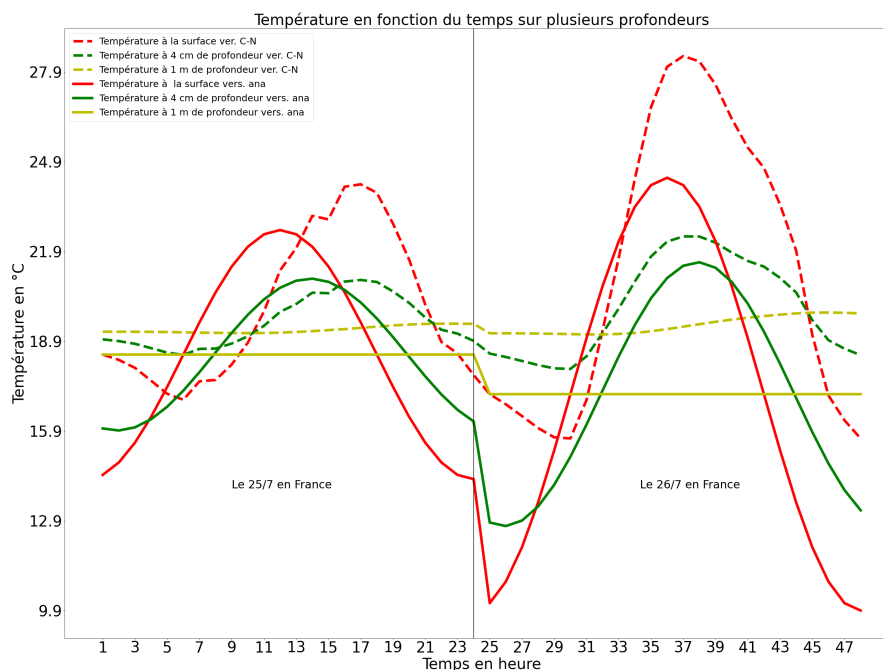


FIGURE 5 – Méthode de Crank-Nicholson et analytique

L'évolution de la température en fonction du temps et de la profondeur d'un sol français de type terre

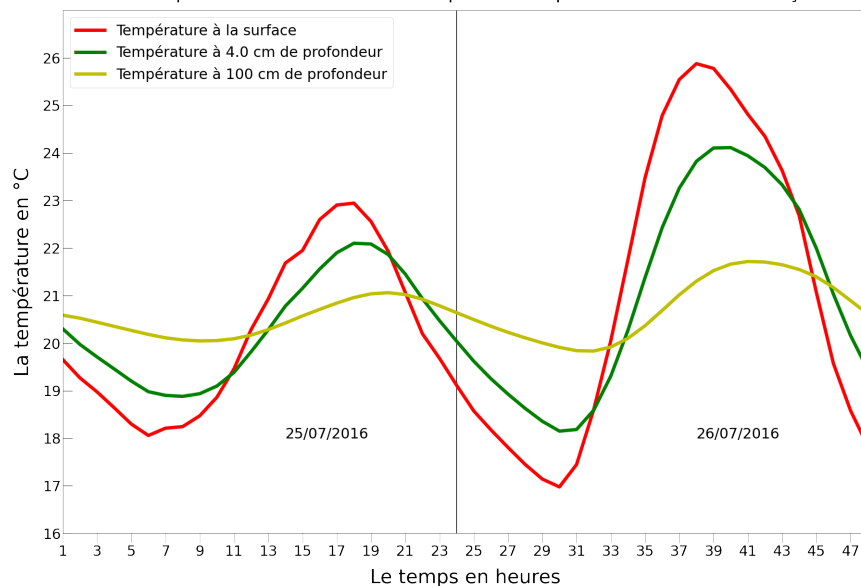


FIGURE 6 – Méthode de résolution explicite

4.1.1 France hiver :

De la même manière, nous avons pris le 13 et le 14 janvier .

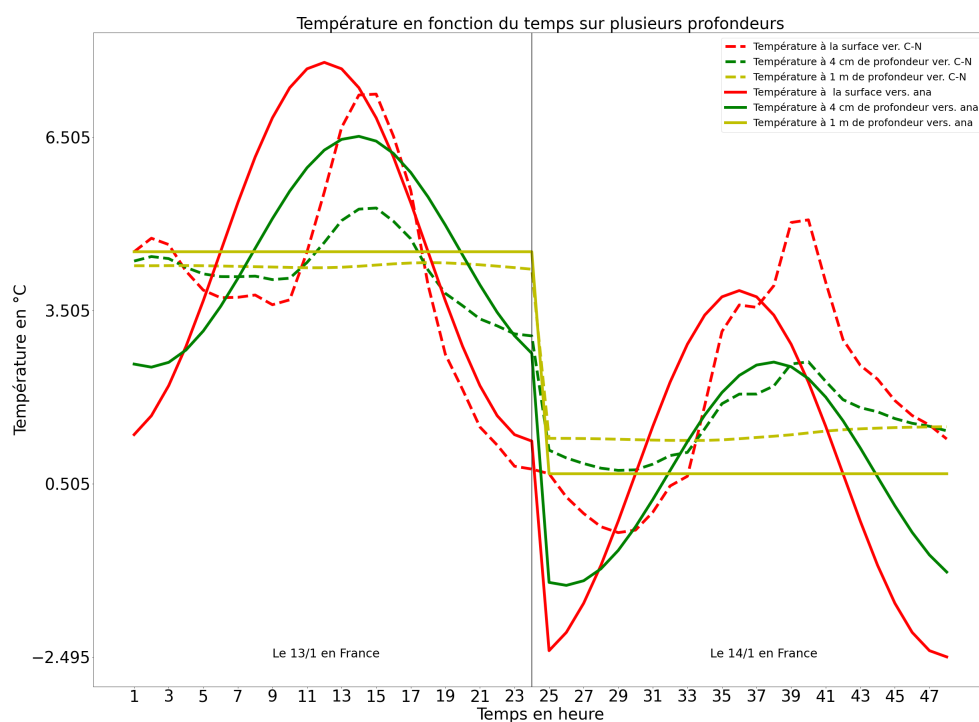


FIGURE 7 – Méthode de Crank-Nicholson et analytique

L'évolution de la température en fonction du temps et de la profondeur d'un sol français de type terre

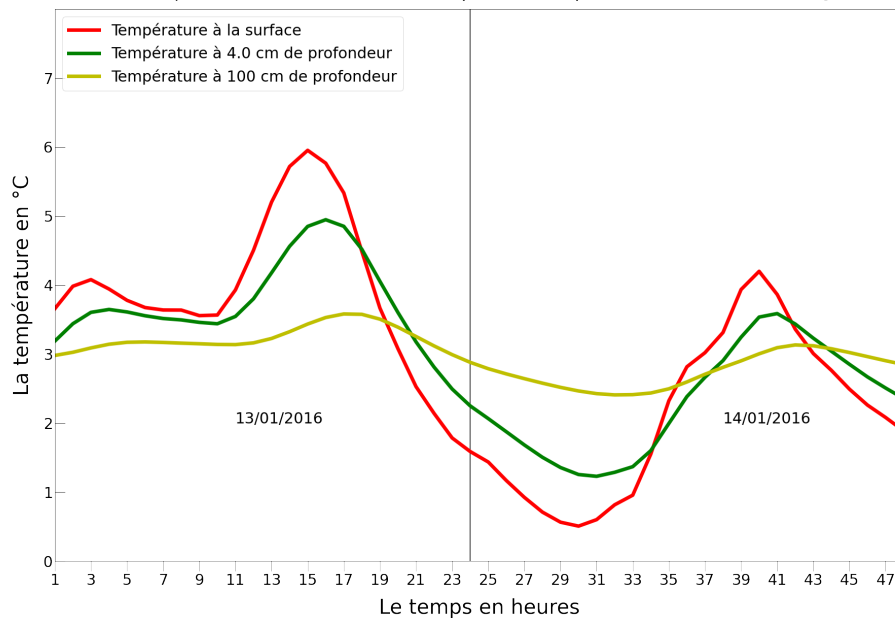


FIGURE 8 – Méthode de résolution explicite

4.1.2 Observation France

Ici, nous pouvons constater plusieurs choses. Tout d'abord, les graphes obtenus avec la méthode explicite et la méthode de Crank-Nicholson sont grandement similaires. En effet, ils ont tous deux une allure sinusoïdale, ce qui est en accord avec ce qui est attendu avec la résolution analytique. Par ailleurs, les extremums sont non seulement atteints en même temps, mais on a aussi le premier maximum qui est plus petit que le second. Cette caractéristique est aussi vérifiée lors de la résolution analytique. Pour cette dernière, l'allure discontinue à la fin du cycle diurne est due au changement de T_0 une fois la journée finie. Ce changement est nécessaire pour avoir des résultats plus précis.

Cependant, nous pouvons remarquer que la méthode de Crank-Nicholson présente certaines incohérences non attendues. En effet, l'intersection entre les différentes courbes est un intervalle très restreint, voire un point, tandis que pour la méthode explicite et analytique, nous observons un déphasage.

Dans le cas de la méthode analytique, les valeurs de départ sont très faibles. Cette observation s'explique par l'initialisation du T_0 , qui ne convient pas à chaque schéma. Par la suite, T_0 est modifié, les températures sont donc plus logiques et raisonnables.

4.2 Algérie hiver

De la même manière, on prend 2 jours en hiver, le 13 et le 14 janvier et on obtient :

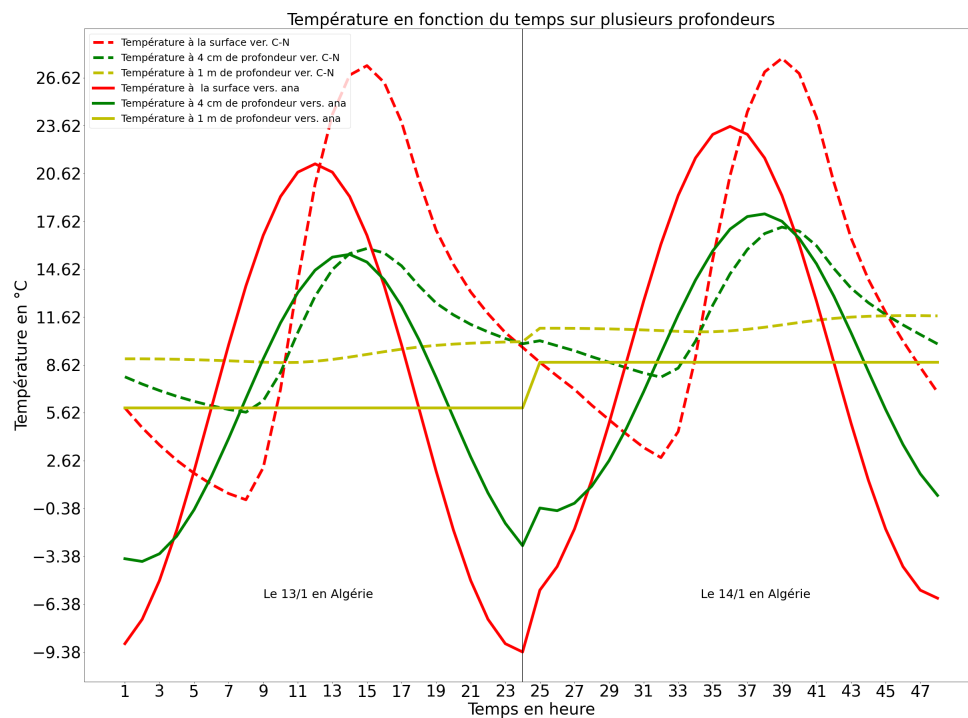


FIGURE 9 – Méthode de Crank-Nicholson et analytique

L'évolution de la température en fonction du temps et de la profondeur d'un sol algérien de type sable

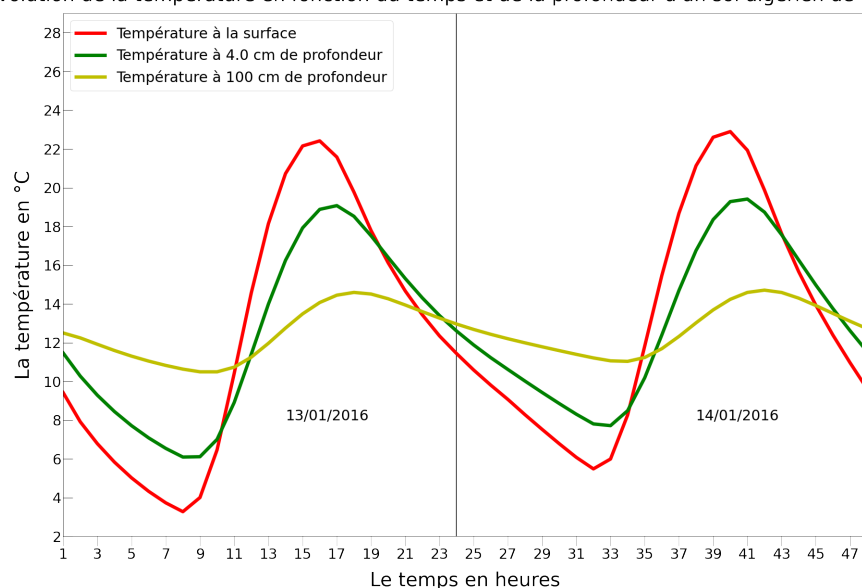


FIGURE 10 – Méthode de résolution explicite

4.2.1 Algérie été :

Cette fois-ci en été toujours avec les même dates.

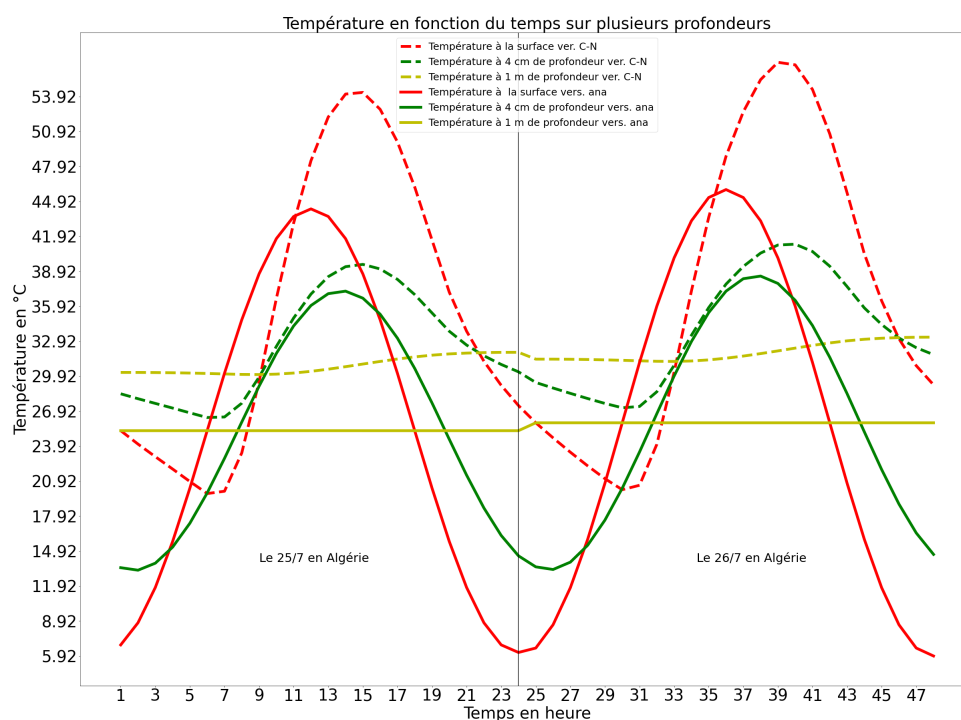


FIGURE 11 – Méthode de Crank-Nicholson et analytique

L'évolution de la température en fonction du temps et de la profondeur d'un sol algérien de type sable

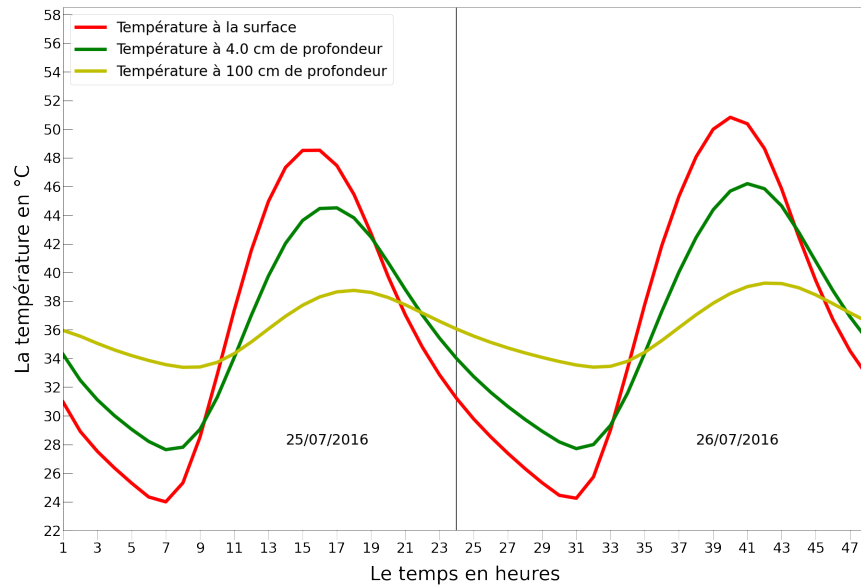


FIGURE 12 – Méthode de résolution explicite

4.2.2 Observation Algérie

Ici, nous pouvons affirmer que les résolutions numériques et analytique ont, de manière générale, la même allure. En effet, L'évolution est similaire, mais les températures sont différentes pour chaque cas. Cependant, l'écart est sensiblement le même. Cet écart peut être expliqué par l'utilisation des différents paramètres du code qui sont plus ou moins précis. Les extremums se situent aux mêmes endroits, mais nous pouvons remarquer que la méthode explicite est plus proche de la théorie.

Encore une fois, la méthode de Crank-Nicholson ne présente pas de déphasage, contrairement aux deux autres méthodes. Par ailleurs, pour la méthode analytique, nous remarquons que les températures de départ sont très basses, qui s'explique par l'initialisation du T_0 . Par la suite, T_0 est modifié, les températures sont donc plus logiques et raisonnables.

5 Tableau récapitulatif

Nous pouvons ainsi évaluer ces deux méthodes en fonction de plus critère dans ce tableau ci-dessous :

	Méthode explicite	Méthode de Crank-Nicholson
Précision	+	++
Temps d'exécution	++	--
Facilité d'implémentation	-	--
Stabilité	-	++

--	très insatisfaisant
-	insatisfaisant
+	satisfaisant
++	très satisfaisant

6 Discussion

A la fin de cette étude, nous nous sommes posés la question suivante : Comment aurions-nous pu améliorer notre projet ?

Tout d'abord, il faut se rappeler qu'il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre les EDP. Ceci implique que d'autres méthodes auraient pu donner d'autres résultats. La méthode implicite, par exemple, a été mise de côté car nous avons implémenté celle de Crank-Nicholson qui est aussi implicite et bien plus précieuse.

D'ailleurs, celle-ci possède un temps d'exécution extrêmement long : il a fallu attendre 15h pour avoir les résultats sur 365 jours pour les deux pays. C'est une conséquence que nous n'avions pas prévu et qui a fortement influencé le déroulement du projet. Une dernière méthode aurait pu être mise en place : la méthode des éléments finies. Cette dernière est très coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire comme celle de Crank-Nicolson mais elle est très difficile à implémenter. Nous avons donc jugé qu'elle n'était pas adaptée pour notre projet ayant une EDP relativement peu complexe.

Par ailleurs, afin de se rapprocher au maximum de la réalité, il aurait été intéressant de modifier la teneur en eau du sol sur un cycle annuel. On aurait pu aussi étudier d'autres régions du monde, par exemple une chaîne de montagne telle que la Cordillère des Andes, ou bien une forêt telle que la forêt amazonienne.

Enfin, nous avons perdu un temps précieux concernant l'affichage des valeurs. De nombreuses questions se sont posées : Est-il plus intéressant d'effectuer un affichage en 3D qu'en 2D ? Quelle est la manière la plus explicite de représenter la propagation de la chaleur ? Devons-nous réaliser un affichage statique, dynamique ?

La compréhension du grand public est le critère principal de la réussite de ce projet pluridisciplinaire, il était ainsi nécessaire de se poser de telles questions. Nous avons décidé d'afficher nos résultats en 2D : le fait de supposer le sol comme homogène rendait inutile la représentation en 3D. Nous avons commencé par présenter nos résultats de manière dynamique, puis nous avons réalisé qu'un résultat statique était plus facile à lire et à étudier.

7 Conclusion

Pour conclure, nous avons acquis de nombreuses compétences grâce à ce projet pluridisciplinaire. Nous avons pu approfondir nos connaissances en Python ainsi que notre compréhension des lois qui régissent notre monde, soit l'équation de la chaleur en une dimension dans notre cas. Nous avons par ailleurs découvert de nombreux moyens pour approcher au mieux la diffusion de la chaleur dans les couches supérieures du sol, leurs inconvénients et leurs avantages.

Afin de rendre le projet réalisable, nous avons décidé d'omettre certains éléments (*cf Hypothèses*). Par conséquent, le fait de négliger certains de ces éléments influence sur la véracité de nos résultats. En effet, supposer le sol comme homogène n'est pas réaliste, cependant nous avons voulu nous rapprocher au maximum de la réalité en prenant en compte trois types de sol.

Au delà des compétences scolaires, c'est aussi au niveau social que nous appris. En raison de la crise sanitaire du Covid-19 et du confinement qui en a résulté, il a fallu redoubler de rigueur, de sérieux mais aussi de clarté dans nos propos. Dès le départ, il a fallu qu'on se mette d'accord sur le rôle de chacun, nos moyens de communication et surtout sur notre compréhension du sujet.

Nous remercions notre professeur référent, M. Samuel Favrichon, qui a su nous guider tant dans notre réflexion que dans notre implémentation, ainsi que M. Thibault Hilaire, qui nous a permis de travailler sur ce sujet.

8 Annexes

Schéma explicite :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

FIGURE 13

Schéma implicite :

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^n + \lambda \begin{bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{bmatrix}$$

FIGURE 14

Schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -\lambda & 2+2\lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 2-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 2-2\lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-2} \\ T_{N-1} \end{bmatrix}^N$$

FIGURE 15

Type de sol	Conductivité thermique pour sol sec (W/m.K)	Conductivité thermique pour sol à 10% d'eau (W/m.K)	Conductivité thermique pour sol saturé (W/m.K)
Terre	0.321	0.912	1.307
Sable	0.396	2.224	2.402
Argile	0.543	1.298	1.715

FIGURE 16 - Conductivité thermique des différents sols

Type de sol :	Sol sec	Sol avec une faible teneur en eau	Sol saturé en eau
Capacité thermique volumique (en $J.m^{-3}.K^{-1}$)	10^6	$1,5.10^6$	3.10^6

FIGURE 17 - Capacité thermique volumique

Références

- [1] **PDF concernant la méthode explicite et implicite :**
<http://www.hach.ulg.ac.be/cms/system/files/Cours%20Grenoble%20EDP-ED0.pdf>

- [2] **Tableau en bleu :**
<https://www.thermoconcept-sarl.com/conductivite-thermique-des-sols-secs-et-humides/>

- [3] **Tableau en noir et blanc :**
<https://www.epfl.ch/labs/echo/wp-content/uploads/2018/07/06-Rgime-thermique-du-sol-1.pdf>

- [4] **Les différents types de sol dans le monde :**
https://www.lyceedadultes.fr/sitepedagogique/documents/SVT/SVT2S/Chapitre_5_Le_sol_un_patrimoine_durable.pdf

- [5] **Site températures minimales et maximales du sol dans le monde :**
<https://www.meteo-paris.com/monde/analyses.html>

- [6] **Polycopié sur l'étude du sol :**
https://www.globe.gov/documents/10157/380996/soil_chap_fr.pdf?fbclid=IwAR34UAvA5SSrQugwIXNh_63g85azd3AhFBPepwypLtvMWpwEyXljhaPMWSw

- [7] **Installation sdl pour Python :**
<https://openclassrooms.com/fr/courses/19980-apprenez-a-programmer-en-c/17117-installation-de-la-sdl>

- [8] **Site équation de la chaleur :**
<http://www.tangentex.com/EquationChaleur.htm>

- [9] **GitHub de notre projet :**
<https://github.com/Amine695/ProjetTemp>