Chap5
Formes de distributions

Pr. A. Fadil

EMSI RABAT

16 novembre 2025

Introduction

- Une **variable aléatoire** est une fonction qui associe à chaque issue d'une expérience aléatoire un nombre réel.
- Deux types :
  - **Discrète** : valeurs isolées.
  - **Continue** : valeurs dans un intervalle.

Variable Aléatoire Discrète

- Prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs.
- Caractérisée par une fonction de masse de probabilité (fmp) : $p(x) = P(X = x)$.
- Propriétés :
  - $p(x) \geq 0$ pour tout x.
  - $\sum_x p(x) = 1$.

Espérance d'une Variable Discrète

- Définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x \cdot p(x)$$

- L'espérance représente la valeur moyenne attendue de X.

Variance et Écart-type d'une Variable Discrète

- Variance :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Variable Aléatoire Continue

- Peut prendre une infinité de valeurs sur un intervalle.
- Caractérisée par une fonction de densité de probabilité (fdp) : $f(x)$.
- Propriétés :
  - $f(x) \geq 0$ pour tout x.
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Espérance d'une Variable Continue

- Définition :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Variance et Écart-type d'une Variable Continue

- Variance :

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)\, dx$$

- Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Fonction de Répartition

- Définition :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Propriétés :
  - F est croissante.
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
  - Continue à droite.

Conclusion

- Variables discrètes et continues permettent de modéliser de nombreux phénomènes.
- Espérance, variance, écart-type et fonction de répartition sont des outils essentiels.
  - **Espérance** : moyenne théorique du phénomène aléatoire.
  - **Variance** : stabilité ou variabilité autour de cette moyenne.
  - **Écart-type** : écart moyen typique par rapport à la moyenne.

Introduction aux Lois de Probabilité

Une **loi de probabilité** est une fonction qui associe à chaque événement de l'espace probabilisé une probabilité. Elle décrit la distribution des résultats possibles d'une variable aléatoire.

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli modélise une expérience aléatoire avec deux résultats possibles : succès (1) ou échec (0).

- La variable aléatoire X prend les valeurs :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si succès} \\ 0, & \text{si échec} \end{cases}$$

- Paramètre : p (probabilité de succès), où $0 \leq p \leq 1$.
- Fonction de masse de probabilité (fmp) :

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Loi Binomiale

La loi binomiale modélise le nombre de succès dans n essais indépendants de Bernoulli, chacun ayant une probabilité de succès p.

- Variable aléatoire discrète X qui suit la loi binomiale $B(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Paramètres : n (nombre d'essais), p (probabilité de succès).
- Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Loi Exponentielle

La loi exponentielle modélise le temps entre deux événements dans un processus de Poisson, tel que le temps d'attente entre des appels dans un centre d'appel.

- La variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

- Fonction de répartition :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

- Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Définition de la Loi Normale

La **loi normale** est une loi de probabilité continue, souvent utilisée pour modéliser des phénomènes naturels comme les erreurs de mesure.

- Elle est définie par deux paramètres :
  - μ : la **moyenne** (ou espérance),
  - σ : l'**écart-type** (qui mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne).
- La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa fonction de densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Propriétés de la Loi Normale

Les principales propriétés de la loi normale sont :

- **Symétrie** : La courbe est symétrique par rapport à la moyenne μ.
- **Espérance et Variance** :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Fonction de Répartition

La fonction de répartition de la loi normale, notée $F_X(x)$, donne la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à une valeur donnée x :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

Elle varie de 0 à 1 à mesure que x évolue de $-\infty$ à $+\infty$, et atteint 50% au niveau de la moyenne μ.

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt$$

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES