

Chap5 (suite)

Tests d'hypothèses

Pr. A. Fadil

EMSI Rabat

11 janvier 2026

Sommaire

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

Introduction

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

Introduction

Il s'agit d'une méthode statistique permettant de vérifier, entre autres, la valeur d'un paramètre, la forme d'une distribution, etc. Pour cela, les hypothèses décrivant la situation doivent être formulées et un test statistique est ensuite exécuté.

Exemple 1

On étudie la vitesse de combustion du carburant d'une fusée. Le cahier des charges exige que la vitesse moyenne de combustion soit de 40 cm/s.

Supposons que l'écart-type de cette vitesse soit d'environ $\sigma = 2$ cm/s.

L'expérimentateur veut vérifier si effectivement la moyenne est de 40 cm/s, à partir d'un échantillon de taille $n = 25$ dont la vitesse moyenne de combustion est $\bar{x} = 41.25$ cm/s.

Définition :

Une hypothèse statistique H est une affirmation concernant

- ① La valeur d'un paramètre (moyenne, variance, proportion, etc.)
- ② L'égalité des paramètres de deux distributions (deux moyennes, deux variances, etc.)
- ③ La forme d'une distribution.

Remarques :

- Dans les deux premiers cas, on a une hypothèse paramétrique.
- Dans le troisième cas, on a une hypothèse non paramétrique.

Hypothèses

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

Hypothèses

On suppose que l'on cherche à vérifier la valeur d'un paramètre inconnu θ de la distribution d'une population X .
Pour cela, on compare deux hypothèses portant sur la valeur de θ .

Definition

On distingue deux types d'hypothèse :

- 1 L'hypothèse nulle : $H_0 : \theta = \theta_0$.
- 2 L'hypothèse alternative (ou contre hypothèse) H_1 , qui peut prendre l'une des formes suivantes :

$$H_1 : \theta \neq \theta_0 \text{ (bilatérale).}$$

$$H_1 : \theta < \theta_0 \text{ (unilatérale à gauche).}$$

$$H_1 : \theta > \theta_0 \text{ (unilatérale à droite).}$$

Remarque

L'hypothèse nulle peut provenir :

- D'expériences antérieures. Dans ce cas, on cherche à savoir si les conditions ont changé.
- D'une théorie ou d'un modèle du problème. Dans ce cas, on cherche à déterminer si le modèle est valide.
- De considérations extérieures, comme des spécifications techniques. Dans ce cas on cherche à savoir si l'objet ou le processus est conforme.

Erreurs

Definition

- ❶ L'erreur de première espèce (de type I) est

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie}).$$

- ❷ L'erreur de deuxième espèce (de type II) est

$$\beta = P(\text{accepter } H_0 \mid H_0 \text{ est fausse}).$$

Déc Réa	H_0 est vraie	H_0 est fausse
accepter H_0	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
rejeter H_0	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

Erreurs (suite)

Déc Réa	H_0 est vraie	H_0 est fausse
accepter H_0	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
rejeter H_0	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

Définition

- On appelle α le seuil critique ou le seuil de signification du test.
- La puissance du test est la probabilité de rejeter H_0 si H_0 est effectivement fausse, c-à-d. $1 - \beta$.

Exécution du test : les étapes détaillées

- ❶ Formuler H_0 et H_1 .
- ❷ Choisir α .
- ❸ Considérer un échantillon de taille n .
- ❹ Exécuter le test : par exemple vérifier si la statistique $|Z_0|$ est plus grande que $z_{\alpha/2}$.
- ❺ Conclure en acceptant ou en rejetant H_0 :
 - ▶ Rejeter H_0 : conclusion forte.
 - ▶ Ne pas rejeter H_0 : conclusion faible.
- ❻ Facultatif : calculer β et le risque de deuxième espèce.
- ❼ Facultatif : si β est trop élevé, indiquer un nouveau α et/ou un nouveau n et recommencer.

Remarques

- En général, on veut que α et β soient petits.
- La probabilité α de l'erreur de première espèce est habituellement fixée à l'avance.
- Pour α et n fixés, $\beta \equiv \beta(\theta)$ est une fonction du paramètre θ . Le graphe de cette fonction est appelé courbe caractéristique du test.
- Idée : on choisit H_0 et α de façon à minimiser le risque d'erreur de type I (la plus grave), et β est une conséquence de ce choix. Souvent $\alpha < \beta$.
- Si on veut diminuer β , il faut augmenter α et/ou n .

Exemple 2 : illustration du concept (cas 1)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne innocente

H_1 : personne coupable

Déc Réa	personne innocente	personne coupable
innocenter la personne	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
condamner la personne	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- $P(\text{condamner un innocent}) = \alpha$.
- $P(\text{libérer un coupable}) = \beta$.
- Ne pas condamner un innocent est prioritaire par rapport à ne pas libérer un coupable.

Exemple 2 : illustration du concept (cas 1)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne innocente

H_1 : personne coupable

Déc Réa	personne innocente	personne coupable
innocenter la personne	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
condamner la personne	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- $P(\text{condamner un innocent}) = \alpha$.
- $P(\text{libérer un coupable}) = \beta$.
- Ne pas condamner un innocent est prioritaire par rapport à ne pas libérer un coupable.

Exemple 2 : illustration du concept (cas 2)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne coupable

H_1 : personne innocente

Déc Réa	personne coupable	personne innocente
condamner la personne	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
innocenter la personne	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- $P(\text{libérer un coupable}) = \alpha$.
- $P(\text{condamner un innocent}) = \beta$.
- Ne pas libérer un coupable est prioritaire par rapport à ne pas condamner un innocent.

Exemple 2 : illustration du concept (cas 2)

On juge une personne et on formule les hypothèses suivantes :

H_0 : personne coupable

H_1 : personne innocente

Déc Réa	personne coupable	personne innocente
condamner la personne	$1 - \alpha$	erreur de type II (β)
innocenter la personne	erreur de type I (α)	$1 - \beta$ (puissance)

- $P(\text{libérer un coupable}) = \alpha$.
- $P(\text{condamner un innocent}) = \beta$.
- Ne pas libérer un coupable est prioritaire par rapport à ne pas condamner un innocent.

Région critique

Le principe général d'un test d'hypothèse repose sur la considération d'une statistique et d'une région critique. Une région critique est une région où il est peu probable que la statistique prenne des valeurs lorsque l'hypothèse nulle est vraie. Le test consiste alors à :

- Rejeter H_0 si la valeur calculée de cette statistique est dans la région critique : **conclusion forte**.
- Ne pas rejeter (ou accepter) H_0 si la valeur calculée est en dehors de la région critique : **conclusion faible**.

Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue

Les trois étapes principales pour le test sont :

- 1 Formulation des hypothèses :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{et} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

- 2 Calcul de la statistique pertinente avec les valeurs de l'échantillon :

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

Si H_0 est vraie, alors $Z_0 \sim N(0, 1)$ (pour n grand).

- 3 Acceptation ou rejet de H_0 :

rejeter H_0 si $|Z_0| > z_{\alpha/2}$, accepter si $|Z_0| \leq z_{\alpha/2}$.

Reprenez l'exemple 1

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- **TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue**
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue

À la place de Z_0 , on utilise la statistique :

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

où $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

- On rejette H_0 si $|T_0| > t_{\alpha/2; n-1}$.
- On accepte H_0 si $|T_0| \leq t_{\alpha/2; n-1}$.

Exemple

Pour étudier un lot de fabrication de comprimés, on prélève au hasard 10 comprimés parmi les 30000 produits et on les pèse. On observe les valeurs de poids en grammes :

0,81 – 0,84 – 0,83 – 0,80 – 0,85 – 0,86 – 0,85 – 0,83 – 0,84 – 0,80

Le poids moyen observé est-il compatible avec la valeur 0,83 g, moyenne de la production au seuil 98% ?

TH sur la moyenne : tests unilatéraux

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- **TH sur la moyenne : tests unilatéraux**
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

TH sur la moyenne : tests unilatéraux

Les formulations pour l'hypothèse alternative H_1 sont :

1. $H_0 : \mu = \mu_0$ (ou $\mu \geq \mu_0$), $H_1 : \mu < \mu_0$ (unilatéral à gauche).
2. $H_0 : \mu = \mu_0$ (ou $\mu \leq \mu_0$), $H_1 : \mu > \mu_0$ (unilatéral à droite).

Les statistiques du test sont les mêmes : $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ (si σ^2 connue)

ou T_0 (si σ^2 inconnue).

Critères de rejet de H_0 :

	Unilatéral à gauche $H_1 : \mu < \mu_0$	Unilatéral à droite $H_1 : \mu > \mu_0$
σ connu	$Z_0 < -z_\alpha$	$Z_0 > z_\alpha$
σ inconnu	$T_0 < -t_{\alpha;n-1}$	$T_0 > t_{\alpha;n-1}$

Exemple

La glycémie d'une population générale suit une loi normale d'espérance $\mu_0 = 1$ g/L et d'écart-type $\sigma_0 = 0,1$ g/L. On relève la glycémie chez 9 patients suspects d'hypoglycémie. On trouve une moyenne d'échantillon $\bar{x} = 1,12$ g/L.

On souhaite tester si la glycémie moyenne de ces patients est **inférieure** à celle de la population générale. Cet échantillon est-il représentatif d'une population de moyenne **au moins égale** à 1 g/L (au risque $\alpha = 5\%$) ?

Niveau critique observé (P-value)

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- **Niveau critique observé (P-value)**
- Test d'ajustement du Khi-deux

Niveau critique observé (P-value)

Définition

Le niveau critique observé (ou P-value) PV est la valeur minimale de α telle que H_0 est toujours rejetée.

- Avantage : Une fois que la P-value est connue, le décideur peut déterminer la décision du rejet ou non-rejet en utilisant n'importe quel seuil α .
- Si $\alpha > PV$, H_0 est rejetée.
- Inconvénient : calcul pas toujours facile.
- Lors d'un test, les logiciels donnent PV.
- Habituellement, si PV est grande, H_0 est acceptée.

Calcul de la P-value lors du test $H_0 : \mu = \mu_0$

Soit Z_0 la statistique employée pour un TH et z_0 (ou t_0) sa valeur calculée à partir d'un échantillon.

Si σ^2 est connue :

- cas unilatéral gauche ($H_1 : \mu < \mu_0$) : $PV = \Phi(z_0)$.
- cas unilatéral droite ($H_1 : \mu > \mu_0$) : $PV = 1 - \Phi(z_0)$.
- cas bilatéral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$) : $PV = 2(1 - \Phi(|z_0|))$,

où Φ représente la fonction de répartition

Si σ^2 est inconnue :

- cas unilatéral : $PV = P(T > |t_0|)$ avec $T \sim t_{n-1}$.
- cas bilatéral : $PV = 2P(T > |t_0|)$ avec $T \sim t_{n-1}$.

Exemple

Reprenez l'exemple 1.

Test d'ajustement du Khi-deux

1 Introduction

2 Hypothèses

3 Tests d'hypothèses sur un seul échantillon

- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est connue
- TH bilatéral sur la moyenne : cas où σ^2 est inconnue
- TH sur la moyenne : tests unilatéraux
- Niveau critique observé (P-value)
- Test d'ajustement du Khi-deux

- On cherche à vérifier si les données, x_1, \dots, x_n dont on dispose proviennent d'une population distribuée selon une loi particulière $F(x, \theta)$.
- À partir d'un échantillon aléatoire X_1, \dots, X_n de taille n d'une variable X , on va tester les hypothèses :

$$H_0 : X \sim F(x, \theta)$$

$$H_1 : X \neq F(x, \theta).$$

Test d'ajustement du Khi-deux : méthode

- On procède à un regroupement des observations selon k valeurs (ou intervalles). On obtient ainsi un tableau dont la forme générale est :

Valeurs (x_i)	V_1	V_2	...	V_i	...	Total
Effectifs observés (O_i)	O_1	O_2	...	O_i	...	n
Effectifs attendus (E_i)	E_1	E_2	...	E_i	...	n

Les O_i sont les effectifs observés, tandis que les E_i sont les effectifs attendus lorsque H_0 est vraie.

- Si on constate des E_i petits, regrouper des classes.
- On calcule les effectifs attendus $E_i = n \times p_i^{(0)}$ où

$$p_i^{(0)} = P(X \in V_i \mid H_0 \text{ est vraie}), i = 1, 2, \dots, k \text{ et } \sum_{i=1}^k p_i^{(0)} = 1.$$

Test d'ajustement du Khi-deux : méthode (suite)

- On calcule la statistique du test

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

- La statistique χ_0^2 représente une sorte de "distance" globale entre les effectifs observés et les effectifs attendus. Plus elle est grande moins l'hypothèse H_0 est plausible.
- Lorsque H_0 est vraie, χ_0^2 est distribuée selon une loi khi-deux à $\nu = k - p - 1$ degrés de liberté, où :
 - k est le nombre de classes retenues.
 - p est le nombre de paramètres estimés.
- Pour un niveau critique α donné, le test consiste à rejeter H_0 si $\chi_0^2 > \chi_{\alpha; \nu}^2$.

Exemple

On dispose des données suivantes sur une variable X :

Intervalle	$[0, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 1.5[$	$[1.5, \infty[$
Nombre observé	2	23	17	8

Tester l'hypothèse selon laquelle les données proviennent d'une population distribuée selon une loi normale, i.e.

$$H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2) .$$

Utiliser $\alpha = 0.05$. La moyenne et l'écart type de l'échantillon sont $\bar{X} = 1.168$ et $S = 0.591$.