

# **Chap6. Analyse en composantes principales (ACP)**

Pr. A. Fadil

EMSI Rabat

26 décembre 2025

# Plan

- 1 Définition
- 2 Principe
- 3 Démarche
- 4 Exercice d'application (Résultats et interprétation)

## Définition

Qu'est-ce que l'Analyse en Composantes Principales (ACP) ?

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est :

- Une méthode **descriptive** a pour objectif l'analyse des tableaux de données qui ne comportent pas des structure préalable (aucune distinction ni entre variable ni entre individu).
- Elle fait partie du groupe de méthodes descriptives multidimensionnelles appelés **méthodes factorielles**.
- Le but principale est de **résumer** l'information contenue dans un tableau composé d'un nombre élevé de ligne et de colonnes.
  - ⇒ Un outil statistique de **synthèse** de l'information.
  - ⇒ Un outil très important pour traiter les données **quantitatives**.
- Elle propose à partir d'un tableau rectangulaire de données comportant les valeurs des variables quantitatives pour des individus, des représentations géométriques de ces individus et de ces variables.

## Principe

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) permet d'étudier :

- La **variabilité entre les individus**, c'est-à-dire quelles sont les différences et les ressemblances entre individus ;
- Les **liaisons entre les variables** : y-a-t-il des groupes de variables très corrélées entre elles, qui peuvent être regroupées entre de nouvelles variables synthétiques ?

D'un point de vue géométrique :

- Le nuage de points représentant les données s'inscrit dans les données s'inscrit dans un espace de  $p$  dimensions, puisque chaque point représente un individu par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

⇒ Il est difficile de visualiser les relations existant entre les variables dès que  $p > 3$ .

## Principe

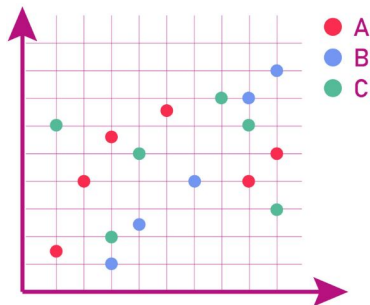


Figure – la dimension  $p = 2$ . Il est facile de présenter le nuage de points.

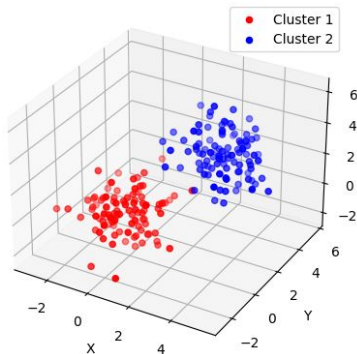


Figure – Si la dimension  $p > 3$ . Il est difficile de présenter le nuage de points.

# Définitions

- Un individu  $e_i^\top = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .  
L'ensemble des vecteurs  $e_i, i = 1, \dots, n$  constitue le nuage des individus.
- Une variable  $X_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})^\top$ , de moyenne  $\overline{x_k}$  et de variance  $\sigma_k^2$ , est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .  
L'ensemble des vecteurs  $X_k, k = 1, \dots, p$  constitue le nuage des variables.
- On définit le vecteur individu moyen comme le centre de gravité du nuage des variables

$$g^\top = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_p})$$

# Notion d'inertie

- La variabilité (dispersion) des données représente l'information (structure) ou l'inertie du nuage des individus par rapport à son centre de gravité mesurée par :

$$I_g = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2$$

- Par centrage-réduction des variables  $X_k$  tel que  $Z_k = \frac{X_k - \bar{X}_k}{\sigma_k}$ .  
Dans ce cas :

$$I_g = p \quad g^\top = (0, 0, \dots, 0)$$

**On suppose, dans la suite, que les données ont été centrées et réduites.**

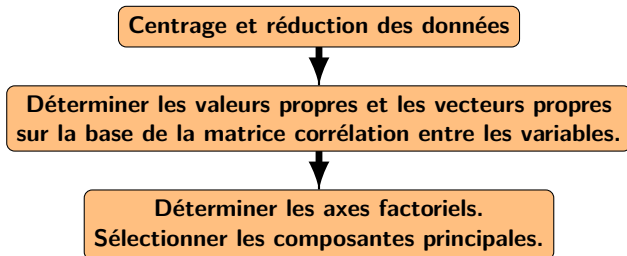
## Démarche

Soit  $n$  individus (lignes) caractérisés par  $p$  variables métriques (Colonnes). Ces données sont présentées dans un tableau appelé la Matrice des données de dimension  $n \times p$ .

$X_1$	...	$X_j$	...	$X_p$
$x_{11}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1p}$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{i1}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{ip}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{n1}$	...	$x_{nj}$	...	$x_{np}$

## Démarche

Les étapes pour déterminer la composante principale :



Centrage et réduction des données :

- Les  $p$  variables sont de nature différente, pour homogénéiser les unités, les  $p$  variables seront centrées et réduites.
- Les données sont centrées et réduites signifie que pour chaque variable la moyenne est nulle ( $\bar{X} = 0$ ) et la variance égale à 1 ( $\text{Var}(X) = 1$ ).

## Démarche

## Matrice Centrée Réduite :

La **matrice centrée réduite** ( $M_{cr}$ ) est la matrice  $M_{cr} = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  avec  $m_{ij}$

est obtenue par la formule suivante :

$$m_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{\sigma_i}.$$

## La Matrice des Variances Covariances

La **matrice des variances covariances** permet de mesurer la liaison linéaire qui peut exister entre un couple de variables statistiques :

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Cov}(X_1, X_3) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_p) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \mathbf{Var}(X_2) & \text{Cov}(X_2, X_3) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_p) \\ \text{Cov}(X_3, X_1) & \text{Cov}(X_3, X_2) & \mathbf{Var}(X_3) & \dots & \text{Cov}(X_3, X_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(X_p, X_1) & \text{Cov}(X_p, X_2) & \text{Cov}(X_p, X_3) & \dots & \mathbf{Var}(X_p) \end{pmatrix}.$$

## Démarche

## La Matrice des Variances Covariances

- Si  $\text{Cov}(X_2, X_1) = 0$ . Alors, les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont **indépendantes**.
- Si  $\text{Cov}(X_2, X_1) \neq 0$ . Alors, les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont **dépendantes** (existe une relation linéaire entre les variable).
- La **matrice des variances covariances** est obtenue par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{n} M_c^T \times M_c$$

avec  $M_c$  : Matrice centrée  $\iff M_c : a_{ij} = (x_{ij} - \bar{X}_j)$   
et  $M_c^T$  : Matrice transposée de  $M_c$ .

## Démarche

### La matrice des corrélations entre variables

- La matrice des corrélations entre variables permet d'analyser les relations bilatérales entre les variables.
- Elle est obtenue par la formule suivante :

$$U = \frac{1}{n} M_{cr}^T \times M_{cr}$$

avec  $M_{cr}$  : Matrice centrée réduite

et  $M_{cr}^T$  : Matrice centrée réduite transposée.

# Application (sans réponse)

Tableau des données :

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
ind1	1	2	3
ind2	2	1	3
ind3	3	2	5
ind4	2	3	5

**Exercice d'application (Résultats et interprétation)**

Une étude consiste à déterminer les facteurs de la localisation internationale d'une marque. Soit le tableau des données suivant : (IDE=Investissements directs étrangers)

	IDE	Taux croissance économique (%)	Taux d'inflation (%)
Pays A	300	2	6
Pays B	450	2	4
Pays C	950	8	2
Pays D	700	7	5

**Exercice d'application (Résultats et interprétation)**

## Travail à faire :

- (1) Calculer la moyenne et l'écart type des variables.
- (2) Déterminer la Matrice Centrée Réduite.
- (3) Déterminer la Matrice des variances covariance.
- (4) Déterminer la Matrice des corrélations entre variables.
- (5) Déterminer le polynôme caractéristique.
- (6) Calculer les valeurs propres.
- (7) Calculer et interpréter l'inertie expliquée des axes factoriels.
- (8) Déterminer les vecteurs propres orthogonaux associés aux valeurs propres.
- (9) Calculer et interpréter les composantes principales, la contribution des individus et la contribution des variables.
- (10) Calculer et interpréter la contribution (CONTR) des individus à la construction des axes.

## Exercice d'application (Résultats et interprétation)

Réponses :

(1) Calculer la moyenne et l'écart type des variables.

## Définition 1.

La **moyenne** est un outil de calcul permet de résumer une liste de valeurs numériques en un seul nombre réel sans tenir compte de l'ordre de la liste.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ avec } x_i \text{ sont les valeurs de la variable.}$$

## Définition 2.

L'**écart type** est un outil de calcul permet de mesurer la **dispersion** des valeurs d'un échantillon. C'est la racine carrée de la variance :  $\sigma = \sqrt{\text{Var}}$ , avec la **variance**

est la moyenne des carrées des écarts à la moyenne :  $\text{Var} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ .

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(1) Calculons la moyenne et l'écart type des variables :

	IDE	Taux croissance économique (%)	Taux d'inflation (%)
Pays A	300	2	6
Pays B	450	2	4
Pays C	950	8	2
Pays D	700	7	5
Moyenne	600	4,75	4,25
Écart type	247,49	2,77	1,48

Calcul : Pour la variable  $X_1 = \text{IDE}$  :

$$\bar{X}_1 = \frac{300 + 450 + 950 + 700}{4} = 600.$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(300 - 600)^2 + (450 - 600)^2 + (950 - 600)^2 + (700 - 600)^2}{4}} = 247,49.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(2) Déterminons la Matrice Centrée Réduite ( $M_{cr}$ ) : On sait que

$$m_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{\sigma_i}. \text{ La matrice } M_{cr} \text{ est donnée par :}$$

$$M_{cr} = \begin{pmatrix} -1,21 & -0,99 & 1,18 \\ -0,61 & -0,99 & -0,17 \\ 1,41 & 1,17 & -1,52 \\ 0,40 & 0,81 & 0,51 \end{pmatrix}.$$

Calcul : Pour la variable  $X_1=IDE$  :

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{x_{11} - \bar{X}_1}{\sigma_1} = \frac{300 - 600}{247,49} = -1,21 & m_{31} &= \frac{x_{31} - \bar{X}_1}{\sigma_1} = \frac{950 - 600}{247,49} = 1,41 \\ m_{21} &= \frac{x_{21} - \bar{X}_1}{\sigma_1} = \frac{450 - 600}{247,49} = -0,61 & m_{41} &= \frac{x_{41} - \bar{X}_1}{\sigma_1} = \frac{700 - 600}{247,49} = 0,40 \end{aligned}$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(3) Déterminons la matrice des variances covariance :  $V = \frac{1}{n} M_c^T \times M_c$ . La matrice centrée ( $M_c$ ) est donnée par :  $a_{ij} = x_{ij} - \bar{X}$ . Donc,

$$M_c = \begin{pmatrix} -300 & -2,75 & 1,75 \\ -150 & -2,75 & -0,25 \\ 350 & 3,25 & -2,25 \\ 100 & 2,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Calcul : Pour la variable  $X_1 = \text{IDE}$  :

$$\begin{array}{l|l} a_{11} = x_{11} - \bar{X}_1 = 300 - 600 = -300 & a_{31} = x_{31} - \bar{X}_1 = 950 - 600 = 350 \\ a_{21} = x_{21} - \bar{X}_1 = 450 - 600 = -150 & a_{41} = x_{41} - \bar{X}_1 = 700 - 600 = 100 \end{array}$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

Donc,

$$V = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -300 & -150 & 350 & 100 \\ -2,75 & -2,75 & 3,25 & 2,25 \\ 1,75 & -0,25 & -2,25 & 0,75 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -300 & -2,75 & 1,75 \\ -150 & -2,75 & -0,25 \\ 350 & 3,25 & -2,25 \\ 100 & 2,25 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$V = \begin{pmatrix} 61250 & 650 & -300 \\ 650 & 7,6875 & -2,4375 \\ -300 & -2,4375 & 2,1875 \end{pmatrix}.$$

(4) Déterminons la matrice des corrélations entre variables :  $U = \frac{1}{n} M_{cr}^T \times M_{cr}$ .

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

Alors,

$$U = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1,21 & -0,61 & 1,41 & 0,40 \\ -0,99 & -0,99 & 1,17 & 0,81 \\ 1,18 & -0,16 & -1,52 & 0,51 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,21 & -0,99 & 1,18 \\ -0,61 & -0,99 & -0,16 \\ 1,41 & 1,17 & -1,52 \\ 0,40 & 0,81 & 0,51 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0,95 & -0,82 \\ 0,95 & 1 & -0,6 \\ -0,82 & -0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0,95$  : Forte corrélation positive entre IDE et Taux de Croissance. **Taux de Croissance augmente  $\Rightarrow$  IDE augmente.**
- $\text{Cov}(X_1, X_3) = -0,82$  : Forte corrélation négative entre IDE et Taux d'inflation. **Taux d'inflation augmente  $\Rightarrow$  IDE diminue.**

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(5) Déterminons le polynôme caractéristique. On a :

$$P(\lambda) = \det(U - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0,95 & -0,82 \\ 0,95 & 1 - \lambda & -0,6 \\ -0,82 & -0,6 & 1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -0,6 \\ -0,6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 0,95 \begin{vmatrix} 0,95 & -0,82 \\ -0,6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 0,82 \begin{vmatrix} 0,95 & -0,82 \\ 1 - \lambda & -0,6 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 0,6^2] - 0,95 [0,95(1 - \lambda) - 0,6 \times 0,82] \\ &\quad - 0,82 [-0,95 \times 0,6 + 0,82(1 - \lambda)] . \\ &= -\lambda (\lambda^2 - 3\lambda + 1,1) . \end{aligned}$$

(6) Calculons les valeurs propres : On résout l'équation :

$$P(\lambda) = \det(U - \lambda I_3) = 0 \iff -\lambda (\lambda^2 - 3\lambda + 1,1) = 0.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

Donc,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 0.43$  ou  $\lambda = 2.57$ .

- Condition prendre les valeurs propres dans l'ordre décroissant.

On prend,  $\lambda_1 = 2.57$ ,  $\lambda_2 = 0.43$  et  $\lambda_3 = 0$ .

### Axes principaux

On appelle axes principaux d'inertie les axes de direction les vecteurs propres de  $U$  normés à 1 .

Il y en a  $p$ .

Le premier axe est celui associé à la plus grande valeur propre. On le note  $u^1$

Le deuxième axe est celui associé à la deuxième valeur propre. On le note  $u^2$

...

(7) Calculons et interprétons l'inertie expliquée des axes principaux :

- **L'inertie de l'axe principal** : Le pourcentage (%) d'inertie exprimé par un axe principal permet d'évaluer la quantité d'information contenue dans cet axe.

$$\text{Inertie d'un axe} = \frac{\text{Valeur propre correspondante}}{\text{Somme des valeurs propres (Inertie totale)}}.$$

- **Axe 1** :  $\lambda_1 = 2.57$ . **Inertie axe 1** =  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2.57}{2.57 + 0.43} = 0.86$ .

Cet axe contient 86% des informations.

- **Axe 2** :  $\lambda_2 = 0.43$ . **Inertie axe 2** =  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{0.43}{2.57 + 0.43} = 0.14$ .

Cet axe contient 14% des informations.

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(8) Déterminons les vecteurs propres orthogonaux associés aux valeurs propres :

- **Axe 1** :  $\lambda_1 = 2.57$ . On cherche  $u_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $Uu_1 = \lambda_1 u_1$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,95 & -0,82 \\ 0,95 & 1 & -0,6 \\ -0,82 & -0,6 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2.57 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + 0,95y - 0,82z = 2.57x \\ 0,95x + y - 0,6z = 2.57y \\ -0,82x - 0,6y + z = 2.57z \end{cases} \iff \begin{cases} -1.57x + 0,95y - 0,82z = 0 \\ 0,95x - 1.57y - 0,6z = 0 \\ -0,82x - 0,6y - 1.57z = 0 \end{cases}.$$

Donc,

$$\begin{cases} x = -0,62 \\ y = -0,57 \\ z = -0,54 \end{cases} \iff u_1 \begin{pmatrix} -0,62 \\ -0,57 \\ -0,54 \end{pmatrix}.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

- **Axe 2** :  $\lambda_2 = 0.43$ . On cherche  $u_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $Uu_2 = \lambda_2 u_2$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,95 & -0,82 \\ 0,95 & 1 & -0,6 \\ -0,82 & -0,6 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.43 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + 0,95y - 0,82z = 0.43x \\ 0,95x + y - 0,6z = 0.43y \\ -0,82x - 0,6y + z = 0.43z \end{cases} \iff \begin{cases} 0.57x + 0,95y - 0,82z = 0 \\ 0,95x + 0.57y - 0,6z = 0 \\ -0,82x - 0,6y + 0.57z = 0 \end{cases}.$$

Donc,

$$\begin{cases} x = 0,12 \\ y = 0,61 \\ z = 0,79 \end{cases} \iff u_2 \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,61 \\ 0,79 \end{pmatrix}.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

## Composantes principales

À chaque axe est associée une variable appelée composante principale.

- La composante  $\mathbf{C}_1$  est le vecteur renfermant les coordonnées des projections des individus sur l'axe 1.
- La composante  $\mathbf{C}_2$  est le vecteur renfermant les coordonnées des projections des individus sur l'axe 2.
- .....

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

(9) Calculer et interpréter les composantes principales, la contribution des individus et la contribution des variables. :

- Les composantes principales sont obtenues par la projection des individus sur les axes principaux.

$$M_{cr} \times u_1 = \text{Projection sur axe 1.}$$

$$M_{cr} \times u_2 = \text{Projection sur axe 2.}$$

- Projection sur axe 1  $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1,21 & -0,99 & 1,18 \\ -0,61 & -0,99 & -0,17 \\ 1,41 & 1,17 & -1,52 \\ 0,40 & 0,81 & 0,51 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,62 \\ -0,57 \\ -0,54 \end{pmatrix}.$

- Projection sur axe 2  $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1,21 & -0,99 & 1,18 \\ -0,61 & -0,99 & -0,17 \\ 1,41 & 1,17 & -1,52 \\ 0,40 & 0,81 & 0,51 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,61 \\ 0,79 \end{pmatrix}.$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

## Résultat de projection (les composantes principales) :

	$C_1$	$C_2$
Pays A	0.68	0.18
Pays B	1.03	-0.81
Pays C	-0.72	-0.32
Pays D	-0.99	0.94

- Ce tableau permet de calculer la contribution des axes.
- Les composantes principales sont centrées c-à-d. la moyenne de chaque composante est nulle.
- La variance de chaque composante est égale à la valeur propre associée à l'axe.

- La contribution des individus : Pour calculer la contribution de chaque

individu à l'inertie, on utilise la formule suivante : 
$$\text{CONTR} = \frac{1}{n} \frac{(m_{ij})^2}{I}$$

avec :  $m_{ij}$  = valeur de  $M_{cr}$  et  $I$  = La somme des valeurs propres  $\left(\sum \lambda_i\right)$ .

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	<b>CONTR</b>
Pays A	0,12	0,08	0,12	<b>0,32</b>
Pays B	0,03	0,08	0,003	<b>0,113</b>
Pays C	0,17	0,11	0,19	<b>0,47</b>
Pays D	0,1	0,05	0,02	<b>0,17</b>
	<b>0,42</b>	<b>0,32</b>	<b>0,333</b>	

Calcul :  $\sum \lambda_i = 3$

$$(X_1; \text{Pays A}) : \text{CONTR} = \frac{1}{4} \times \frac{(1,21)^2}{3} = 0,12.$$

$$(X_1; \text{Pays B}) : \text{CONTR} = \frac{1}{4} \times \frac{(0,61)^2}{3} = 0,03.$$

$$(X_1; \text{Pays C}) : \text{CONTR} = \frac{1}{4} \times \frac{(1,41)^2}{3} = 0,17.$$

$$(X_1; \text{Pays D}) : \text{CONTR} = \frac{1}{4} \times \frac{(0,4^2)}{3} = 0,10.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

Le tableau permet de déterminer la contribution des individus dans l'analyse :

- Le pays C contribue de 0,47 (47%) pour expliquer le phénomène.
- Le pays A contribue de 0,32 (32%) pour expliquer le phénomène.

Le tableau permet de déterminer la contribution des variables dans l'analyse :

- La variable  $X_1$  contribue de 42% dans l'analyse.
- La variable  $X_2$  contribue de 32% dans l'analyse.
- La variable  $X_3$  contribue de 33,3% dans l'analyse.

(10) La contribution CONTR des individus à la construction des axes est calculée par la formule suivante :

$$\text{Axe 1 : } \lambda_1 = 2.57 \implies \text{CONTR} = \frac{1}{n} \frac{(C_1^i)^2}{\lambda_1}.$$

$$\text{Axe 2 : } \lambda_2 = 0.43 \implies \text{CONTR} = \frac{1}{n} \frac{(C_2^i)^2}{\lambda_2}.$$

## Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses

La contribution CONTR des individus à la construction des axes :

	$C_1$	$C_2$	CONTR Axe 1 ( $C_1$ )	CONTR Axe 2 ( $C_2$ )
Pays A	0.68	0.18	<b>0,04</b>	<b>0,02</b>
Pays B	1.03	-0.81	<b>0,10</b>	<b>0,38</b>
Pays C	-0.72	-0.32	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>
Pays D	-0.99	0.94	<b>0,09</b>	<b>0,51</b>

Calcul :

$$\text{CONTR}(\text{Axe1; Pays A}) = \frac{1}{4} \times \frac{(0,68)^2}{2,57} = 0,04.$$

$$\text{CONTR}(\text{Axe1; Pays B}) = \frac{1}{4} \times \frac{(1,03)^2}{2,57} = 0,10.$$

$$\text{CONTR}(\text{Axe2; Pays A}) = \frac{1}{4} \times \frac{(0,18)^2}{0,43} = 0,02.$$

$$\text{CONTR}(\text{Axe2; Pays B}) = \frac{1}{4} \times \frac{(0,81)^2}{0,43} = 0,38.$$

**Exercice d'application (Résultats et interprétation) : Réponses****Interprétation :**

- Pour l'Axe 1, le point déterminant est 0,10 (10%) c-à-d. le pays B contribue de 10% à la construction de l'axe 1.
- Pour l'Axe 2, le point déterminant est 0,51 (51%) c-à-d. le pays D contribue de 51% à la construction de l'axe 2.