Calibration en finance : Mélange de modèles de Black-Scholes

KHELDOUNI Mohammed-Amine

Octobre 2016 - février 2017 **ENPC**

Encadré par : Bernard LAPEYRE, Professeur à l'Ecole des Ponts ParisTech et Chercheur au CERMICS

Objectifs

- Comprendre comment évaluer le prix d'un sous-jacent avec une modélisation mathématique du marché.
- Confronter le modèle à ses limites en terme de calibration financière.
- Appliquer des notions stochastiques à la finance et connaître l'utilité de tels modèles.

Notions financières

- une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur.
- T est la maturité ou l'échéance. C'est la date à laquelle une opération doit être réalisée.
- S_t : L'actif sous-jacent à l'instant t est l'actif sur lequel porte une option.
- r : Le taux d'intérêt.
- σ : La volatilité, elle indique l'ampleur des variations du cours d'un actif financier.
- K : Le strike désigne le prix d'exercice d'une option, qui correspond au prix fixé dans le contrat pour l'acquisition ou la cession du sous-jacent.
- *Call* : Option d'achat d'un instrument financier.
- *Put* : Option de vente de cet instrument.

Mise en situation

Etant donné les paramètres σ, T, K, S_0 et r on voudrait calculer le prix d'un call ou d'un put sur le marché, pour un actif financier.
Pour cela, on admet le modèle de BLACK-SCHOLES, qui donne sous certaines hypothèses le pix d'un *Call* ou d'un *Put*. Ce modèle est démontré dans le livre de Philippe BRIAND sur le modèle de BLACK-SCHOLES.

Modèles de Black-Scholes et problèmes de calibration

Modèle de Black-Scholes

Dans ce modèle, on considère le prix de l'action comme un processus stochastique en temps continu S_t et suit certaines hypothèses.

Equation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

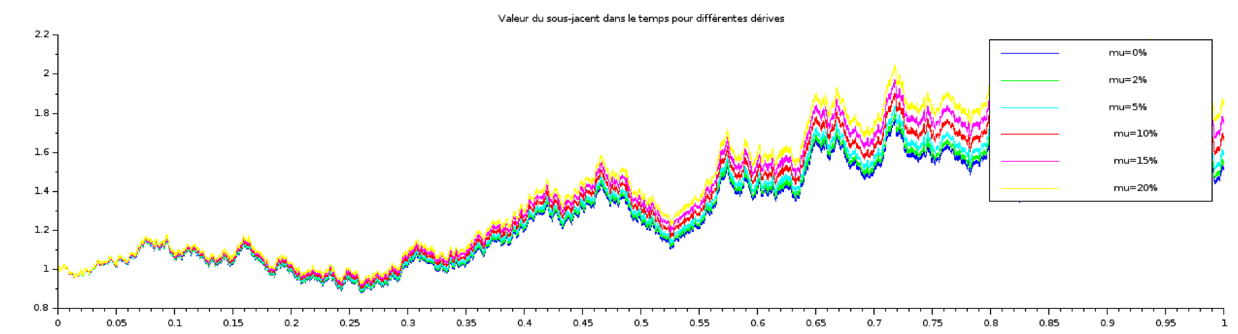
avec W_t Un mouvement Brownien standard.
Le prix d'un *Call* est caractérisé par son *payoff* $(S_T - K)_+$.
Le modèle fournit la formule de BLACK-SCHOLES d'un *Call* (resp. d'un *Put*) :

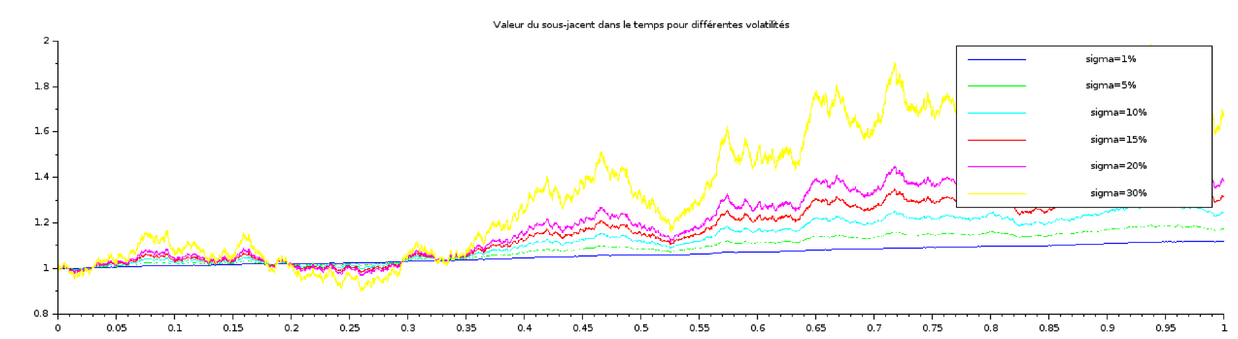
$$C(S_0, K, r, t, \sigma) = S_0\phi(d_1) - K \times e^{-rt}\phi(d_2)$$

$$P(S_0, K, r, t, \sigma) = -S_0\phi(-d_1) + K \times e^{-rt}\phi(-d_2)$$

Avec :

- ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t)$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$





On fixe un nombre P de modèles de Black-Scholes dont on va effectuer un mélange selon une certaine distribution de probabilités $(p_1, p_2, ..., p_p)$.
Ainsi on considère le Call, à K, r et t fixés, de notre mélange comme suit :

$$C_m(\lambda, \sigma, p) = \sum_{i=1}^{p} p_i C(\lambda_i, K, r, t, \sigma_i)$$

$$\lambda = (S_{0,1}, ..., S_{0,P}), \quad \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_P), \quad p = (p_1, ..., p_P)$$

Calibration en finance

$\beta_* = (\lambda, \sigma, p)$ sont nos données de départ pour K fixé.
On retrouve la valeur β_* par une méthode des moindres carrés sur plusieurs prix d'exercice $(K_1, ..., K_M)$, minimisant les résidus des prix.
Pour un call :

$$\min \sum_{j=1}^{M} (C_{m,j}(\beta) - \alpha_j)^2$$

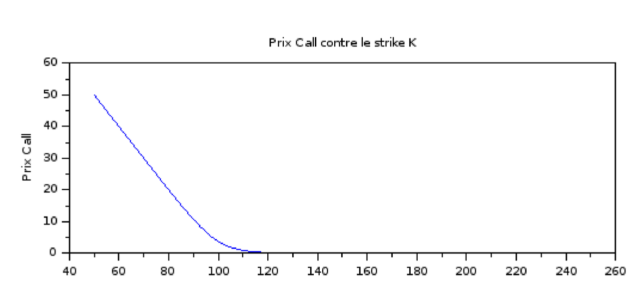
$$s.c. \sum_{i=1}^{p} p_i = 1$$

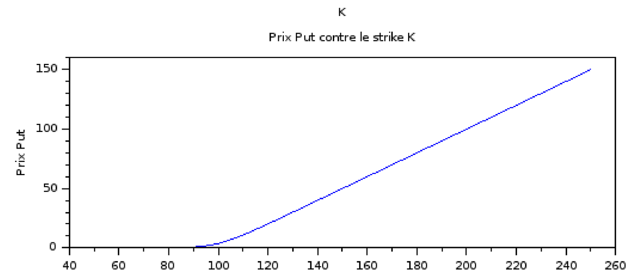
α_j étant le prix du Call calculé avec les valeurs de β_* pour un *Strike* K_j.
Il est important de comprendre que cette méthode d'optimisation prouve une certaine bijection entre les valeurs financières λ, σ et la distribution p du mélange et le prix d'une option (d'achat ou de vente) sur le marché.

Résultats

On prend $P = 2$

- $\lambda = (100, 100)$
- $\sigma = (0.2, 0.4)$
- $p = (0.5, 0.5)$
- $r = 0$
- $K = (50, ...150)$





On trouve par la fonction d'optimisation non linéaire de SCILAB, *optim*, un β proche de l'optimum avec une erreur assez faible :

$$\beta_{approx} = (100.001, 100.001, 0.22, 0.36, 0.5, 0.5)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\|\beta_{approx} - \beta_*\|}{\|\beta_*\|} \approx 3.16 \times 10^{-4}$$

Les problèmes de calibration :

- L'ensemble des solutions réalisables est trop grand.
- Choix d'un bon intervalle d'exercice K.
- En dimension plus grande, les erreurs de calibration sont encore plus importantes.

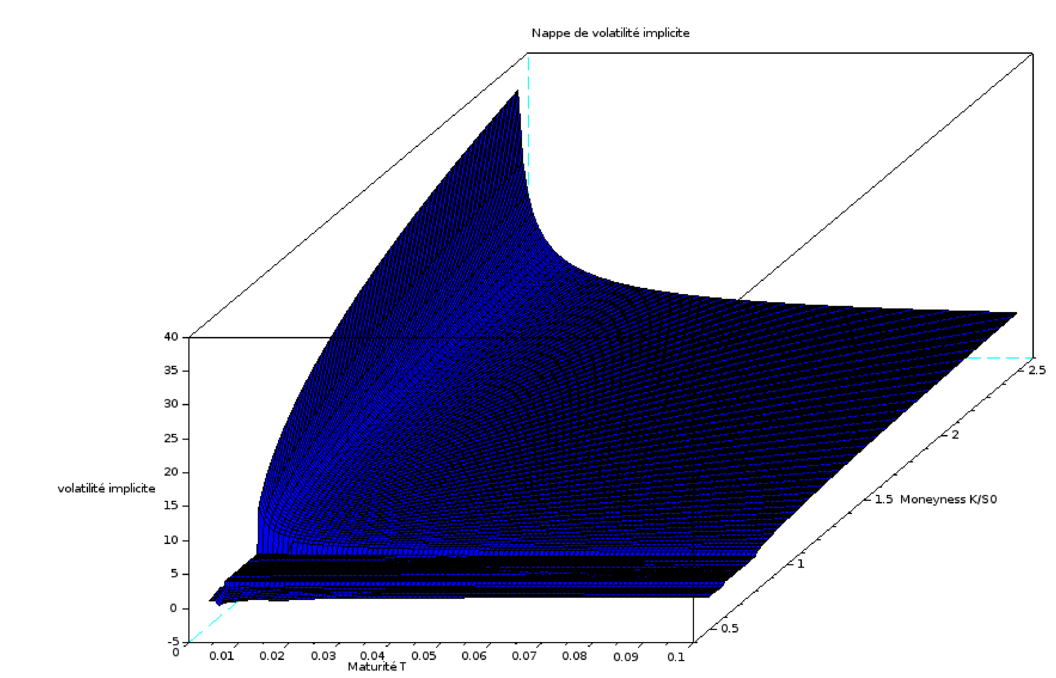
Les algorithmes d'optimisation rendent la procédure de calibration numériquement délicate en grande dimension P

Volatilité implicite

On souhaite parfois retrouver la volatilité à travers le modèle de BLACK-SCHOLES pour anticiper sur le prix d'un actif.
Comme démontré dans le livre de Peter TANKOV, l'inversion de la formule de BLACK-SCHOLES est possible :

$$\exists! \sigma_* / \quad C_{BS}(S_0, K, r, t, \sigma_*) = C_{marché}$$

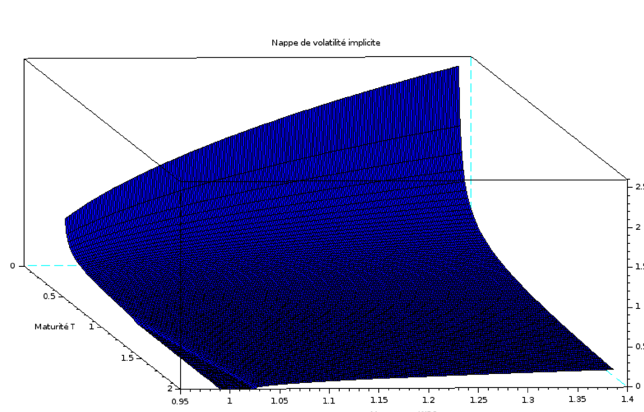
On appelle cette volatilité, la **volatilité implicite**.
En utilisant un algorithme de dichotomie ou une méthode de Newton sur SCILAB, on obtient un graphe tridimensionnel appelé **la surface de la volatilité**.



Application à un actif :

On prend $M = 200$ et :

S_0	\$505.15
σ_0	20%
r	3.3%
K	(\$500, ..., \$700)
T	2 *mois*



Références

- Philippe BRIAND, *Le modèle de Black-Scholes*, 2003.
- Peter TANKOV, *Surface de volatilité*, 2015.
- Damiano BRIGO, Fabio MERCURIO, *Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles.*
- Pr. Benoite DE-SAPORTA, *TP sur les mouvements Brownien et Modèle de* BLACK-SCHOLES *(finance en temps continu)*

École des Ponts ParisTech