# Rapport de stage d'option
# Etude et calibration du modèle SABR

M'RAD Mohamed Kamel Eddine

6th July 2004

**Préface**

Les options européennes sont souvent évaluées et couvertes en utilisant le modèle de $Black$ et $Scholes$, où le seul paramètre est la volatilité $\sigma_{BS}$. C'est une bijection entre $\sigma_{BS}$ et le prix de l'option (relation *one to one*). Par conséquent, les options européennes sont souvent cotées en volatilité implicite notée encore $\sigma_{BS}$. C'est l'unique valeur de volatilité introduite dans la modèle $Black$ et $Scholes$ donnant le prix de l'option tel qu'il est observé sur le marché.

En théorie, la volatilité $\sigma_{BS}$ est constante ou encore ne dépend que du sous-jacent choisi sur le quel est écrit le modèle $Black$ et $Scholes$. En pratique, des options de $Strikes$ différents $K_1$ et $K_2$ nécessitent deux volatilités implicites $\sigma_{BS,2}$ et $\sigma_{BS,2}$, pourtant les deux options sont écrites sur le même sous-jacent. Gérer les phénomènes appelés $Smile$ et $Skew$ est vital pour des options telles que les options de changes.

Une solution à ce phénomène a été le développement des modèles à volatilités locale par $Dupire$ et $Derman - Kani$. Ces modèles sont consistents , cohérents avec le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage et peuvent être calibrés pour retrouver exactement les $Skews$ et les $Smiles$ par rapport aux prix observés sur le marché.

Cependant, la dynamique des $Skews$ et des $Smiles$ établie par de tels modèles est l'opposée de celle observée sur le marché; quand le cours du sous-jacent décroît, ces modèles prédisent que le $Smile$ se déplace vers les cours du sous-jacent les plus élevés et vis versa. En réalité, le cours du sous-jacent et le $Smile$ observés sur le marché bougent dans la même direction. Cette contradiction entre modèle et marché déstabilise la couverture en $Delta$ et $Vega$.

Pour éliminer ce problème on introduit le modèle SABR: un modèle à volatilité stochastique, dans le quel la valeur $forward$ $F$ vérifie

$$dF = \alpha F^{\beta} dW_1, \tag{1}$$
$$d\alpha = \nu \alpha dW_2, \tag{2}$$

avec un terme de corrélation entre la valeur $forward$ $F$ et la volatilité $\alpha$

$$dW_1(t)\, dW_2(t) = \rho\, dt.$$

On utilise la technique de la perturbation singulière pour obtenir le prix d'une option européenne sous le modèle SABR, et utilisant ce prix, on obtient une formule fermée explicite pour la volatilité implicite comme fonction du prix $forward$ d'aujourd'hui qu'on notera $f = F(0)$ et du *strike* $K$.

Il est important de mentionner que la courbe $K \longmapsto \sigma_{SABR}(., K)$ reproduit parfaitement la volatilité implicite donnée par le marché et que la dynamique du $Smile$ selon le modèle SABR est cohérente avec celle du marché.

Ce rapport reprend mon stage d'option à Dexia Crédit local du 05 Avril 2004 au 08 Juillet 2004, le stage s'étend jusqu'au 30 Septembre 2004. J'ai occupé, au sein de l'équipe, le poste de Responsable du developpement informatique et théorique. Ainsi, j'ai travaillé sur le problème de la gestion du risque dû au $Smile$ et mis au point un *priceur* basé sur le modèle $SABR$ dans le cadre d'une bibliothèque informatique en $C^{++}/VB$ sur le marché des $Caps$ sur $Euribor$.

**Remerciments**

Je tiens à remercier mes deux directeurs de stage à Dexia; Mr Stéphane Ruellan et Mr Vincent Touratier pour leur disponibilité, bonne humeur et surtout pour la confiance dont ils ont témoigné à mon égard, ainsi que mon directeur de stage à l'Ecole Polytechnique, Mme Nicole El Karoui pour son écoute et son suivi du déroulement de mon stage d'option.

Je ne pourrai pas oublier Arnaud Gallardo, qui m'a été d'une aide précieuse lors de l'implémentation de la bibliothèque SABR, l'écoute et l'extrême gentillesse de Mme Véronique Oriol, secrétariat du CMAP, ainsi que l'ambiance agréable dans laquelle j'ai travaillé, et je continue, au sein de l'équipe.

Enfin, je dédie ce travail à la personne qui m'a soutenu le long de ce parcours, à ma fiancée *Hanene*.

# Contents

# Chapter 1

# Définitions et notations

Dans ce chapitre [1], on rappelle les définitions d'un contrat $forward$, d'un $Caplet$, d'un $Cap$, d'une $Swaption$, d'un $Swap$, du taux $Euribor$ et du $facteurd'actualisation$.

## 1.1 Zéro-coupon et facteur d'actulisation

Un *Zéro-coupon* d'échéance $T$, noté $B(t,T)$, est le prix en $t$ d'un $Euro$ payé en $T$. Le taux continu $R(t,T)$ sur la période $[t,T]$ est défini par

$$R(t,T) = \frac{-1}{T-t}\log(B(t,T)).$$

La fonction

$$\theta \longmapsto R(t, t+\theta)$$

est appelée ***courbe des taux a l'instant*** $t$. Le taux court $r_t$ ou encore instantané est défini par

$$r_t = -\partial_T(\log(B(t,T))|_{T=t}.$$

On définit le facteur d'actualisation, ou encore $discount\ facteur$, noté $D(t)$ par

$$D(t) = B(0,t).$$

## 1.2 Euribor

$EURIBOR$ (European Interbank Offered Rate), anciennement $PIBOR$ ou $TIOP$. Taux du marché monétaire européen, il est égal à la moyenne arithmétique des taux offerts sur le marché bancaire européen pour une échéance déterminée (entre 1 semaine et 12 mois). Il est publié par la Banque centrale européenne à partir de cotations fournies quotidiennement par 64 banques européennes.

## 1.3 Instruments de couverture sur taux d'intérêt

Les contrats à terme et les futures sont l'objet d'options dont certaines sont négociées sur le MATIF. Un contrat à terme est symétrique en terme de risque pour l'acheteur et le vendeur. Par contre, moyennant le paiment d'une prime à la date de signature du contrat, une option sur contrat à terme de taux d'intérêt garanti à son détenteur le droit d'emprunter ou de prêter à la date d'échéance, pour une maturité qui est celle du taux de référence, à un cours garanti, qui est souvent proche de la valeur du taux $forward$.

[1] Ce chapitre doit en partie à [4]

### 1.3.1 Contrat *forward*

Un contrat *forward* est un accord entre deux parties pour acheter ou vendre un sous-jacent au temps futur $T$. Dans un contrat *forward*, tous les paiements ont lieu en $T$.

Un contrat *forward* signé en $t$, délivrant $\Phi$ en $T$ et de prix *forward* $V_t(T, \Phi)$ est défini par les flux suivant:
-Le signataire du contrat reçoit en $T$ la quantité $\Phi$ de la part de l'emetteur du contrat.
-Le signataire du contrat paie en $T$ le montant $F_t(T, \Phi)$ à l'emetteur.
-Le prix *forward* $F_t(T, \Phi)$ est déterminé en $tt$ de telle façon que la valeur du contrat soit nulle en $t$.

### 1.3.2 *Swap* et *Cap*

Un *Swap* de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré au terme duquel deux parties s'engagent à échanger pendant un nombre d'année et pour un montant nominal fixé d'un taux varaible constaté à des dates préfixées contre un taux fixe, appelé taux de *Swap*. L'une des options qui concernent le *Swap* est le *Cap*.

#### *Cap* et *Caplet*

Un investisseur a une dette pluri-annuelle, indexée sur un taux variable, par exemple l'*euribor* 3 mois. Il désire *swaper* cette dette contre le paiement de coupons fixes, mais seulement si les taux varaibles ont beaucoup monté. Il achète donc un *Cap*, qui lui permet à chaque date de paiement de coupon de comparer le taux variable avec celui garanti. Si le taux varaible est plus grand que celle garanti, il exerce son droit. Sinon, il y renonce, sachant que le taux garanti est le même pour toutes les dates de paiement. On dit aussi que le *Cap* est un ensemble de *Caplets*, option relative à chaque date de paiement.

#### Volatilités *Caplet*

On nomme volatilité *flat* d'un *Cap* de maturité donnée, la volatilité constante applicable à la valorisation de chacun de ses *Caplets*.

On nomme volatilité *Caplet*, la volatilité du taux *forward* sous-jacent, applicable à la valorisation spécifique d'un *Caplet* pour une période d'intérêt donnée.

Le marché cote de la volatilité flat 3M (ténor 3 mois) pour des caps de maturités inférieures à 2Y, et de la volatilité flat 6M (ténor 6mois) pour des caps de maturités supérieures à 2Y.

La volatilité flat représente en quelque sorte une volatilité moyenne.

# Chapter 2

# Etude théorique

Considérons un *Call* européen sur un sous-jacent $F$ avec date d'exercice $t_{ex}$, de paiement $t_{set}$, de *Strike* $K$. Si l'option est exercée à $t_{ex}$, alors, à la date $t_{set}$, le détenteur de l'option reçoit le sous-jacent $F$ et paye $K$. On définit par $F(t)$ le cours *forward* du sous-jacent par un contrat *forward* de maturité $t_{set}$ alors $f = F(0)$ serait le prix *forward*, vu d'aujourd'hui, du sous-jacent $F$. Soit $D(t)$ le facteur d'actualisation de date $t$ ou encore la valeur aujourd'hui du Zéro-coupon de maturité $t$. La règle de *pricing* risque-neutre implique que le prix du *Call* européen est

$$V_{Call} = D(t_{set})E[(F(t_{ex} - K)_+|\mathbf{F}_0]$$

et celle du *Put* européen est

$$\begin{aligned} V_{Put} &= D(t_{set})E[(K - F(t_{ex})_+|\mathbf{F}_0] && (2.1) \\ &= V_{Call} + D(t_{set}[K - f]. && (2.2) \end{aligned}$$

L'espérence $E$ est définie par rapport à la mesure *forward*, et $\mathbf{F}_0$ désigne la tribu des informations disponibles à $t = 0$. Sous la même mesure *forward*, le prix du sous-jacent $F(t)$ est une martingale.

$$\begin{aligned} dF(t) &= C(t,.)\, dW(t), && (2.3) \\ F(0) &= f, && (2.4) \end{aligned}$$

où $W$ est un mouvement brownien sous la probabilité *forward*. Le coeficient $C(t,.)$ peut être déterministe, aléatoire où dépend de toute l'information disponible à $t$. On doit alors choisir un modèle pour $C(t,.)$.

La même étude est valable pour les *Swaptions* européennes. On considère une *Swaption* européenne de date de d'exercice $t_{ex}$, de taux fixe (l'équivalent du *Strike*) $R_{fix}$. Soit $R_S(t)$ le taux de *Swap forward* d'une *Swaption* vu à la date $t$, et soit $R_0 = R_S(0)$ le taux de *Swap forward* vu d'aujourd'hui. La valeur de la branche payée de la *Swaption* est

$$V_{pay} = L_0 E[(R_S(tex) - R_{fix})_+|\mathbf{F}_0]$$

et celle de la branche reçue

$$\begin{aligned} V_{rec} &= L_0 E[(R_{fix} - R_S(tex))_+|\mathbf{F}_0] && (2.5) \\ &= V_{pay} + L_0[R_{fix} - R_0] && (2.6) \end{aligned}$$

où $L_0$ est la valeur aujourd'hui des annuités ( *level* ; quantité connue ) et $E$ désigne l'espérence sur la mesure des annuités de *Jamshidean*. $R_S(t)$ est une martingale sous cette mesure, donc

$$\begin{aligned} dR_S(t) &= C(t,.)dW(t), && (2.7) \\ R_S(0) &= R_0, && (2.8) \end{aligned}$$

où $W$ est un mouvement brownien sous la mesure des annuités de $Jamshidean$.

On remarque que le modèle $Black$ et $Scholes$ en est un cas particuliers. En effet, pour

$$C(t,.) = \sigma_{BS}\, F(t)$$

où $\sigma_{BS}$ est constante, on retrouve la dynamique log-normale du sous-jacent $F$

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \sigma_{BS}\, dW(t).$$

## 2.1 Le modèle SABR

L'échec du modèle à volatilité locale signifie qu'on ne peut pas utiliser un modèle markovien basé sur un seul mouvement brownien pour arriver à gérer le risque dû au $Smile$. On opte pour un modèle à deux mouvements browniens. Pour choisir la seconde source de perturbation, on note que la plupart des marchés financiers passent par des périodes (relativement) stables et d'autres chaotiques. Ceci suggère que la volatilité est l'aléa présentant cette nouvelle source de bruit. Le choix du modèle le plus simple est, à la fois, le plus raisonnable est de poser

$$C(t,.) = \alpha\, F^{\beta}(t),$$

où la volatilité $\alpha$ est un processus stochastique. C'est le modèle SABR dans le quel la valeur $forward$ $F$ du sous-jacent vérifie

$$\begin{aligned} dF(t) &= \alpha\, F^{\beta}(t)\, dW_1(t), && (2.9)\\ d\alpha(t) &= \nu\, \alpha(t)\, dW_2(t), && (2.10)\end{aligned}$$

avec un terme de corrélation entre la valeur $forward$ $F$ et la volatilité $\alpha$

$$dW_1(t)\, dW_2(t) = \rho dt.$$

On l'appelle aussi; le modèle $''\alpha\beta\rho\nu''$.

## 2.2 Un prix SABR coté en volatilité $Black - Scholes$

L'objectif est d'implémenter le modèle SABR dans le cadre d'une bibliothèque en $C^{++}/VB$, de le calibrer au marché financier observé. Les instruments financiers utilisés sont les $Caplets$ sur taux Euribor allant de 3 mois à 50 années.

Dans [5], support théorique de ce travail, les auteurs aboutissent à une formule fermée [1] du prix d'une option européenne dont le sous-jacent admet pour dynamique le modèle SABR. Afin d'inverser cette formule en terme de volatilité $Black - Scholes$, ils introduisent un modèle $normal$ intermédiaire

$$dF = \sigma_N\, dW,$$

auquel ils calibrent le modèle SABR donnant ainsi la formule d'une volatilité $\sigma_N$ implicite fonctiond e $(\alpha, \beta, \rho, \nu)$, paramètres du modèle SABR. La seconde étape consiste à calibrer le modèle $normal$ au modèle $log - normal$ impliquant une relation fonctionnelle entre la volatilité $normale$ $\sigma_N$ et celle $log - normale$ $\sigma_{BS}$ elle même dépendant du $Strike$ $K$,

$$\sigma_N = fonction(\sigma_{BS}(K)).$$

[1] Pour plus de détails, voir l'Appendice A.

La volatilité implicite $Black - Scholes$ relative au prix évalué par le modèle SABR, fonction du $Strike$ $K$ et du cours $forward$ d'aujoud'hui $f$ du sous-jacent, est alors donnée par

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}(K,f) &= \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}(1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2(f/K)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K)+\dots)}.(\frac{z}{x(z)}) \\ &\quad (1+[\frac{(1-\beta)^2}{24}.\frac{\alpha^2}{(f/K)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]t_{ex}+\dots).\end{aligned}$$

Ici,

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{(1-\beta)/2}\log(f/K),$$

et $x(z)$ est définie par

$$x(z) = \log(\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}).$$

Pour le cas particulier d'une option à la monnaie, $i.e. K = f$, cette formule est réduite à

$$\begin{aligned}\sigma_{ATM} &= \sigma_B(f,f) \\ &= \frac{\alpha}{f^{(1-\beta)}}(1+[\frac{(1-\beta)^2}{24}.\frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{f^{(1-\beta)}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]t_{ex}+\dots).\end{aligned}$$

Une approximation de la formule de $\sigma_{BS}(K,f)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}(K,f) &= \frac{\alpha}{f^{1-\beta}}(1-\frac{1}{2}(1-\beta-\rho\lambda)\log(K/f) \\ &+ \frac{1}{12}[(1-\beta)^2+(2-3\rho^2)\lambda^2]\log^2(K/f)+\dots),\end{aligned}$$

dûe au fait que le $Strike$ $K$ est assez proche du cours du forward $f$. Ici, le ratio

$$\lambda = \frac{\nu}{\alpha}f^{1-\beta}$$

mesure la puissance $\nu$ de la $volvol$ comparée à la volatilité locale $\alpha/f^{1-\beta}$ correspondant au cours $f$ du $forward$. La volatilité implicite d'une option à la monnaie vérifie

$$\begin{aligned}\log(\sigma_{BS}(f,f)) &= \log(\alpha)-(1-\beta)\log(f) \\ &\quad +\log(1+[\frac{(1-\beta)^2}{24}.\frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{f^{(1-\beta)}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]t_{ex}+\dots).\end{aligned} \tag{2.11}$$

## 2.3 Objectif

En se basant sur les données historiques $\sigma_{BS}(f,f)$, la formule (2.11) devrait nous permettre de déterminer les paramètres du modèle SABR

$$\beta = 1-\frac{\log(\sigma_{SABR}(f,f)/\sigma_{SABR}(f',f'))}{\log(f'/f)} \tag{2.12}$$

$$\alpha = f^{1-\beta}\sigma_{SABR}(f,f). \tag{2.13}$$

Cependant, certaines difficultés sont à signaler; on n'a pas assez de données historiques, et, en dehors du cadre de l'opproximation $K = f$, il est très difficile d'inverser la formule de la volatilité implicite $\sigma_{BS}(K,f)$ pour trouver tous les paramètres du modèle SABR et ainsi le calibrer au marché.

Ma première approche était d'interpoler les données historiques existentes pour couvrir un domaine plus large en temps, $strike$ et cours $forward$ initial, puis de minimiser sur les paramètres du modèle SABR l'erreur entre ces données et la formule de volatilité implicite $Black - scholes$ relative au prix SABR

$$min_{\alpha,\beta,\rho,\nu} \sum |\sigma_{BS}(\alpha, \beta, \rho, \nu) - \sigma_{donnes}|^2.$$

# Chapter 3

# Construction de la matrice de volatilité *forward*

Afin de calibrer le modèle SABR au marché, il faut disposer de données historiques suffisantes concernant les volatilités *forward* des *Caplets*. Donc, un premier travail qui m'a été confié était de construire une matrice de volatilité *forward* compatible avec celle *flat* donnée du marché (via $Open-link$, *Rewter*).

| **FLAT** | **1,50** | **2,00** | **2,50** | **3,00** | **3,50** | **4,00** | **4,50** | **5,0** | **6,00** | **7,00** | **8,00** | **9,00** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1Y** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 12,3 | 13,20 | 14,80 | 16,80 | 19,50 |
| **2Y** | 34,70 | 31,10 | 27,70 | 24,90 | 22,70 | 20,30 | 17,90 | 16,0 | 15,90 | 17,20 | 17,80 | 18,70 |
| **3Y** | 33,70 | 30,40 | 27,30 | 24,70 | 22,90 | 20,70 | 18,80 | 17,2 | 16,50 | 17,50 | 18,30 | 19,20 |
| **4Y** | 33,30 | 29,90 | 26,70 | 24,30 | 22,70 | 20,70 | 19,00 | 17,5 | 16,70 | 17,40 | 18,10 | 19,00 |
| **5Y** | 32,50 | 29,30 | 26,30 | 24,00 | 22,40 | 20,50 | 18,90 | 17,5 | 16,60 | 17,20 | 18,00 | 18,80 |
| **6Y** | 31,60 | 28,80 | 25,90 | 23,70 | 22,20 | 20,30 | 18,80 | 17,50 | 16,60 | 17,10 | 17,80 | 18,60 |
| **7Y** | 31,00 | 28,30 | 25,70 | 23,50 | 21,90 | 20,10 | 18,70 | 17,40 | 16,40 | 16,90 | 17,50 | 18,30 |
| **8Y** | 30,30 | 27,90 | 25,40 | 23,30 | 21,60 | 19,90 | 18,50 | 17,30 | 16,30 | 16,70 | 17,30 | 18,00 |
| **9Y** | 29,90 | 27,60 | 25,30 | 23,10 | 21,30 | 19,60 | 18,20 | 17,10 | 16,10 | 16,50 | 17,10 | 17,80 |
| **10Y** | 29,60 | 27,30 | 25,00 | 22,90 | 21,10 | 19,40 | 18,00 | 16,90 | 16,00 | 16,30 | 16,90 | 17,60 |
| **12Y** | 29,00 | 26,70 | 24,40 | 22,30 | 20,40 | 18,80 | 17,60 | 16,60 | 15,80 | 16,10 | 16,60 | 17,20 |
| **15Y** | 27,90 | 25,80 | 23,70 | 21,60 | 19,70 | 18,20 | 17,10 | 16,20 | 15,50 | 15,80 | 16,20 | 16,80 |
| **20Y** | 26,90 | 24,90 | 22,90 | 20,80 | 18,90 | 17,40 | 16,50 | 15,80 | 15,20 | 15,50 | 16,00 | 16,50 |

## 3.1 Première approche

La construction de cette matrice de valitilité *forward* se fait par interpolation [1] sur des pas de temps variant de 3 à 6 mois pour une durée totale de 50 ans.

### 3.1.1 Méthode de construction

Le premier problème a résoudre est le fait qu'on ne cannait pas la volatilité *flat* du premier *Caplet*; on va alors opter, pour première approche, pour l'hypothèse que les volatilités $3M$ dans $3M$ et celle $6M$ dans $6M$ sont égales à la volatilité *flat* un an.

Pour calculer la volatilités *forward* 3M dans $3.n$ mois, on va ,en un premier temps, chercher les volatilités *flat* dans $3.(n-1)M$ et $3.n.M$ utilisnat un algorithme qu'on appelera *Algorithme d'interpolation* et

[1] Voir aussi [2]

décrit ci-dessous. Une fois cette première étape achevée, on inverse l'équation suivante en volatilité par la méthode de la dichotomie pour trouver celle *forward*

$$Caplet(\sigma) = cap_{3.n.M} - cap_{3(n-1)M}. \tag{3.1}$$

La méthode, assez intuitive, est très compliquée à implémenter, surtout que le but est non seulement trouver de bons résultats, mais aussi construire une interface Excel simplifiée au maximum pour une utilisation pratique optimale.

interface

### 3.1.2 Algorithme d'interpolation

Notons $f_{ij} = f(t + dt_i, K + dK_j)$, pour $i, j = 1, 2$;

$$\begin{aligned} dt &= dt_1 + dt_2 \\ dK &= dK_1 + dK_2 \\ \alpha_i &= \frac{dK_i}{dK} \text{ i=1,2;} \\ \beta_i &= \frac{dt_i}{dt} \text{ i=1,2;} \end{aligned}$$

Dans le code du *priceur* SABR, pour un *Strike* et une maturité donnés, on a besoin d'aller dans la matrice de volatilité *flat* pour chercher le terme de volatilité correspendent en faisant des interpolation. Pour ce, on doit exprimer tout d'abord la volatilité $f(t, K)$ en fonction des données; supposons qu'on veut calculer $f(t, K)$ en fonction de $f(t + dt1, K + dK1)$, $f(t + dt1, K + dK2)$, $f(t + dt2, K + dK1)$ et $f(t + dt2, K + dK2)$.

Par la formule de *Taylor* à l'ordre 1, on obtient que

$$\begin{aligned} f(t, K + dK2) &= f(t - dt_1, K + dK_2) + dt_1 \partial_t f(t - dt_1, K + dK_2) \\ &= f(t - dt_1, K + dK_2) + dt_2 \frac{f(t + dt_2, K + dK_2) - f(t + dt_1, K + dK_2)}{dt} \\ f(t, K) &= f(t + dt_2, K) - dt_2 \frac{f(t + dt_2, K) - f(t - dt_1, K)}{dt} \\ &= f(t + dt_2, K - dK_1) + dK_1 \frac{f(t + dt_2, K + dK_2) - f(t + dt_2, K - dK_1)}{dK} \\ &- dt_2 \frac{f(t + dt_2, K) - f(t - dt_1, K)}{dt} \qquad (3.2) \\ f(t + dt_2, K) &= f(t + dt_2, K + dK_2) - dK_2 \partial_K f(t + dt_2, K + dK_2 \\ f(t - dt_1, K) &= f(t - dt_1, K + dK_2) - dK_2 \partial_K f(t - dt_1, K + dK_2). \qquad (3.3) \end{aligned}$$

La difference des deux dernières équations nous donne en utilisant ce qui precède:

$$f(t + dt_2, K) - f(t - dt_1, K) = f_{22} - f_{12} - \alpha_2(f_{22} - f_{21}) + \alpha_2(f_{12} - f_{11}),$$

où

$$\begin{aligned} \partial_K f(t + dt_2, K + dK_2) &= \frac{f(t + dt_2, K + dK_2) - f(t + dt_2, K - dK_2)}{dK} \\ &= f_{22} - \alpha_2(f_{22} - f_{21}) \text{à l'ordre 1} \\ \partial_K f(t - dt_1, K + dK_2) &= \frac{f(t - dt_1, K + dK_2) - f(t - dt_1, K - dK_2)}{dK} \\ &= f_{12} - \alpha_2(f_{12} - f_{11}) \text{à l'ordre 1.} \end{aligned} \tag{3.4}$$

En suivant le même raisonnement, on obtient que

$$\begin{aligned} f(t,K) &= f_{21}(1-\alpha_1-\alpha_2\beta_2) \\ &\quad +f_{22}(\alpha_1-\beta_2+\beta_2\alpha_2) \\ &\quad +f_{12}(1-\beta_2\alpha_2)+f_{11}\beta_2\alpha_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3.1.3 Programmation

Ce travail est basé sur une forte composante informatique [2] où les codes utilisés pour retrouver la matrice des données initiales; celle de la volatilité $flat$, sont confrontés à des données réelles qui évoluent dans le temps. La taille de la bibliothèque à construire pour cette tâche dépassait de loin les capacités de mémoire dans Excel, ce qui a nécessité la création de plusieurs sous-projets à excuter en un seul sans passer par les $DLL$ classiques de Excel et ainsi construire des classes de convertion en $VARIANT$ pour pouvoir saisir les différents paramètres de type *string* tels que le choix du numéraire; *i.e.* le change, *Euro*, *Dollar* ou *Sterling*, ou bien les dates $forward$ des échéances des *Euribors*

Il fallait prendre en compte le calendrier des jours ouvrables pour calculer les $discount\ facteurs$, les différentes dates des $fixing$ ou des *settlements* vu que la vie de l'*Euribor* n'est pas en réalité égale à 3 mois. Prenons l'exemple d'un *Euribor* 3 mois fixé le 01 Ortobre, son échéance sera fixée avant celle théorique puisque cette dernière est un férié; sa maturité n'est pas de 0.25 mais de 0.24.

Un code existant créant des classes de vecteurs (vecteurs de *double*, *string* ou encore mixte) et de matrices similairs destiné pour l'affichage de l'interface en Excel a dû être amélioré pour que je puisse l'incorporer dans ma bibliothèque. J'ai dû alors lire ce code en entier afin de le corriger et éventuellement l'exploiter, une tâche assez délicate et couteuse en terme de temps de travail vu qu'aucun commentaire n'a été laissé pour assurer la contuité du projet informatique visant à la création de la bibliothèque en question.

### 3.1.4 Une première matrice de volatilité $forward$

Avec la méthode présentée si-dessus, on obtient la matrice $forward$ suivante

[2] Deux ouvrages [1] [3]m'ont été d'une aide précieuse pour mettre en marche cet algorithme

| **FWD** | **1,5** | **2,0** | **2,5** | **3,0** | **3,5** | **4,0** | **4,5** | **5,0** | **6,0** | **7,0** | **8,0** | **9,0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3M** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 12,30 | 13,20 | 14,80 | 16,80 | 19,50 |
| **6M** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 12,30 | 13,20 | 14,80 | 16,80 | 19,50 |
| **9M** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 12,30 | 13,20 | 14,80 | 16,80 | 19,50 |
| **1Y** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 12,30 | 13,20 | 14,80 | 16,80 | 19,50 |
| **1Y3M** | 34,88 | 31,17 | 27,82 | 24,81 | 21,39 | 17,90 | 15,13 | 13,20 | 13,86 | 15,38 | 17,04 | 19,30 |
| **1Y6M** | 34,35 | 30,57 | 27,38 | 24,90 | 22,30 | 19,12 | 16,26 | 14,20 | 14,55 | 16,00 | 17,30 | 19,10 |
| **1Y9M** | 33,84 | 29,99 | 26,94 | 24,99 | 23,27 | 20,48 | 17,55 | 15,32 | 15,29 | 16,64 | 17,56 | 18,89 |
| **2Y** | 34,14 | 30,22 | 26,90 | 25,08 | 24,74 | 23,43 | 21,29 | 19,30 | 18,29 | 19,12 | 18,88 | 0,00 |
| **2Y3M** | 33,32 | 29,96 | 27,02 | 24,61 | 22,91 | 20,63 | 18,43 | 16,52 | 16,09 | 17,29 | 17,94 | 18,83 |
| **2Y6M** | 32,89 | 29,62 | 26,82 | 24,51 | 23,00 | 20,79 | 18,78 | 16,95 | 16,29 | 17,38 | 18,09 | 18,99 |
| **2Y9M** | 32,47 | 29,29 | 26,61 | 24,41 | 23,09 | 20,97 | 19,14 | 17,40 | 16,49 | 17,48 | 18,25 | 19,14 |
| **3Y** | 32,03 | 28,96 | 26,41 | 24,31 | 23,19 | 21,14 | 19,52 | 17,87 | 16,70 | 17,58 | 18,41 | 19,29 |
| **3Y3M** | 32,92 | 29,29 | 25,83 | 23,80 | 22,51 | 20,69 | 19,05 | 17,51 | 16,66 | 17,43 | 18,17 | 19,07 |
| **3Y6M** | 32,75 | 29,06 | 25,54 | 23,61 | 22,42 | 20,69 | 19,14 | 17,63 | 16,73 | 17,40 | 18,11 | 19,02 |
| **3Y9M** | 32,59 | 28,83 | 25,24 | 23,41 | 22,32 | 20,69 | 19,22 | 17,75 | 16,79 | 17,37 | 18,05 | 18,96 |
| **4Y** | 32,42 | 28,60 | 24,94 | 23,20 | 22,22 | 20,69 | 19,31 | 17,87 | 16,87 | 17,33 | 17,99 | 18,90 |
| **4Y3M** | 31,48 | 28,22 | 25,43 | 23,38 | 21,87 | 20,21 | 18,79 | 17,50 | 16,56 | 17,16 | 17,99 | 18,80 |
| **4Y6M** | 31,14 | 27,94 | 25,24 | 23,23 | 21,72 | 20,12 | 18,75 | 17,50 | 16,53 | 17,10 | 17,96 | 18,75 |
| **4Y9M** | 30,79 | 27,67 | 25,04 | 23,08 | 21,57 | 20,02 | 18,70 | 17,50 | 16,49 | 17,03 | 17,93 | 18,68 |
| **5Y** | 30,44 | 27,39 | 24,85 | 22,93 | 21,42 | 19,93 | 18,65 | 17,50 | 16,45 | 16,96 | 17,90 | 18,62 |

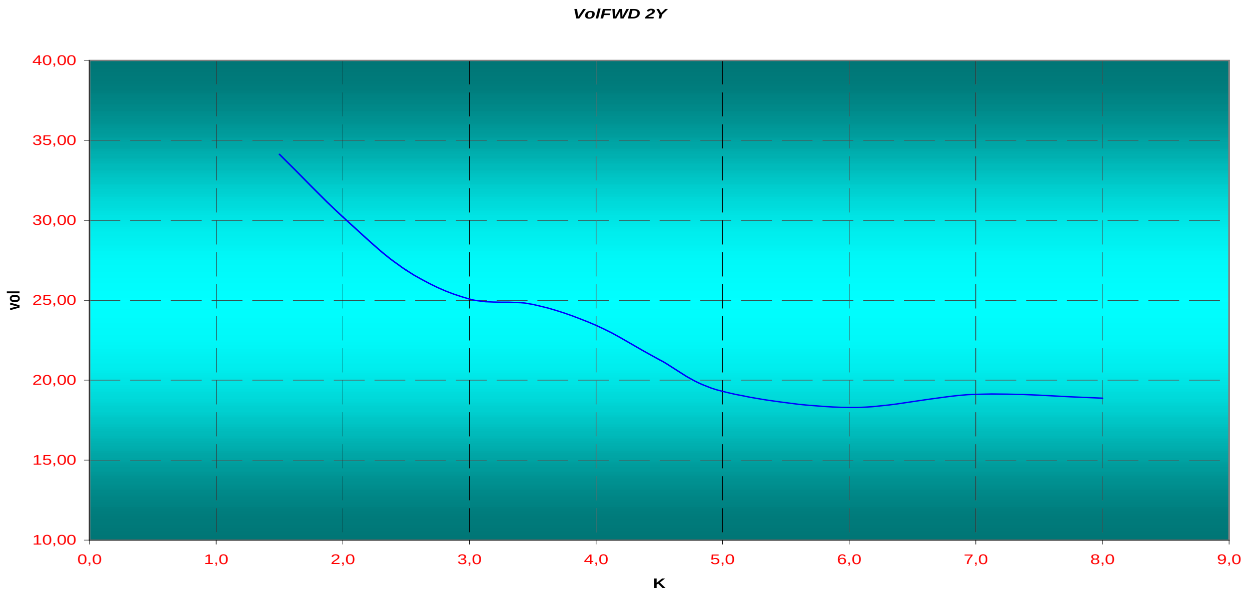


Figure 3.1: Courbes de Volatilité $forward$ reconstituées à partir du marché. Cas d'un $Smile$ imparfait

Cette première matrice de volatilité $forward$ basée sur une interpolation linéaire de la matrice de la volatilité $flat$, donnée du marché, est assez homogène sur les lignes et sur les colonnes; un traçage des courbes représentant les éléments d'une ligne, *i.e.* des volatilités $forward$, en fonction des $Strikes$ nous permet de remarquer que, malgré cette homogénéité, certaines courbes ne répliquent que l'allure globale du $Smile$, et non un vrai $Smile$. Des défauts locaux, plus ou moins considérables, sont constatés sur les graphes, comme sur la figure (3.1).

Par contre, d'autres courbes répliquent assez bien le $Smile$ observé sur le marché, comme on peut le constaté sur la figure (3.2).

Pour tester la matrice de volatilité $forward$ obtenue, on l'inverse au sens où on reconstruit la matrice $flat$ dont on est parti. Lors de ces tests, l'erreur constatée a été de l'ordre de $4.10^{-4}$, ce qui permet de considérer la matrice de volatilité $forward$ obtenue satisfaisante et envisager des améliorations afin d'approcher au mieux le $Smile$ observé sur le marché.

## 3.2 Critiques

On cherche à expliquer le comportement imparfait des courbes de volatilités $forward$ en fonctions des $Strikes$ en mettant à jour les hypothèses faites et les méthodes numériques utilisées.

Le point de départ était l'hypothèse que la volatilités $forward$ 3 mois dans 3 mois et 6 mois dans 6 mois (selon la fréquence entrée sur l'interface EXCEL) sont égales à la volatilité $flat$ 1 an ,ce ci est déjà un mauvais départ car ce point et très intéressant pour toute la colonne de la matrice (échéance) étant donné que le calcul des volatilités d'échéances antérieures se fait par itération.D'autre part, la volatilité $forward$ $3M$ dans $3M$, par exemple, est très inférieure à celle $flat$ d'un an. Les erreurs aini cumulées

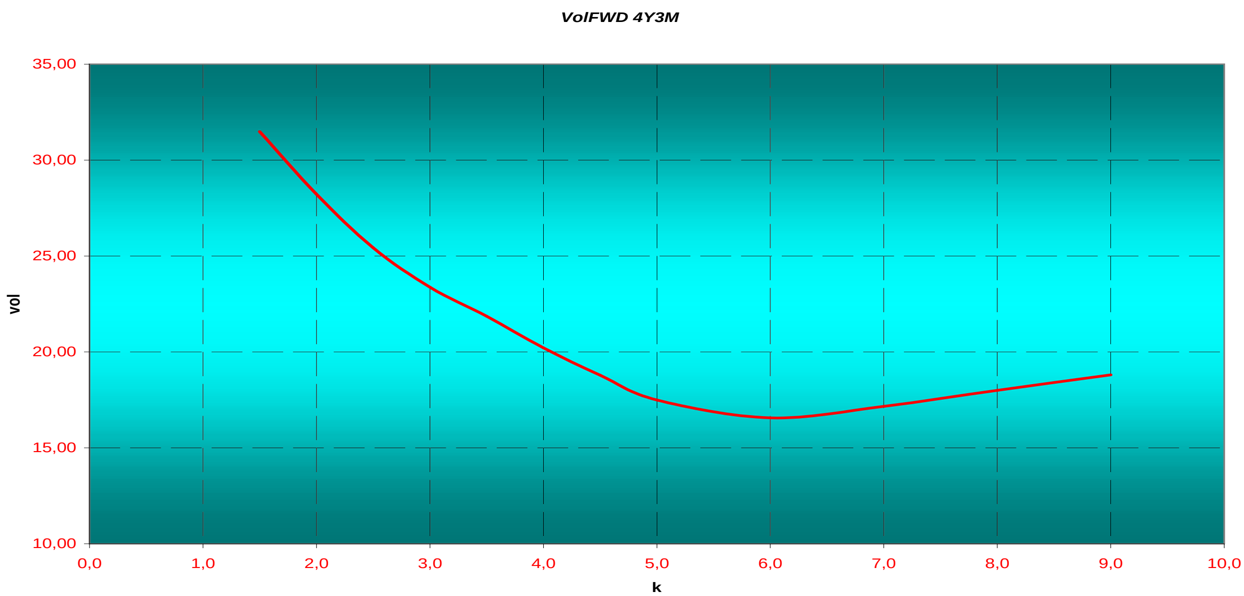


Figure 3.2: Courbes de Volatilité *forward* reconstituées à partir du marché. Cas d'un *Smile* quasi-parfait

sont non négligeables pouvant induire des imperfactions sur les courbes de volatilité $forward$.

La méthode numérique choisie pour inverser les équations de type (3.1) en terme de volatilité est la méthode de dichotomie. Ce choix n'est pas arbitraire vu qu'une première approche à l'aide de la méthode de $Newton - Raphson$ s'est avérée instable à cause de sa sensibilité au point de départ de l'algorithme et que les ordres de grandeur de la solution $\sigma$ sont assez faibles. Ce dernier point favorise de loin la méthode de dichotomie à la fois stable est rapide vu la taille faible des intervalles considérés. Pour estimer l'erreur commise par cette méthode, on prend un cas simple.

**Exemple**

On suppose que la fréquence de calcul est de 3 mois et qu'on s'intéresse à la volatilité $3M$ dans $2Y$ et $3M$. L'algorithme implémenté consiste à interpoler, à partir de la matrice de la volatilité $flat$, la volatilité d'un $Cap$ $2Y$ et $6M$, et celle d'un $Cap$ $2Y$ et $3M$, puis résoudre l'équation suivante en $\sigma$

$$Caplet(\sigma) = cap_{2Y,6M,flat} - cap_{2Y,3M,flat},$$

où la volatilité $flat$ $2Y + 6M$, qu'on notera $X$, est donnée par

$$X = \frac{V_{3Y} + V_{2Y}}{2}.$$

La volatilité $flat$ $2Y + 3M$, notée $Y$, est donnée par

$$Y = \frac{V_{3Y}}{4} + \frac{3V_{2Y}}{4}.$$

Ainsi, l'équation (3.) s'écrit

$$\begin{aligned} Caplet(\sigma) &= cap(\frac{V_{3Y} + V_{2Y}}{2}) - cap(\frac{V_{3Y}}{4} + \frac{3V_{2Y}}{4}) \\ &= cap(X) - cap(Y). \end{aligned}$$

A ce stade, quelques commentaires s'imposent.

a) Cet exemple justifie l'approche linéaire adoptée, mais met en valeur l'accumulation de l'erreur due à l'interpolation avec celle due à la dichotomie ce qui atteint la qualité de la matrice de volatilité $forward$ calculée et explique les imperfections des courbes de volatilités.

b) La volatilité $flat$ 3 ans est donnée pour des $Caplets$ de 6 mois, alors que celle d'un ou deux ans est une volatilité $flat$ pour des $Caplets$ de 3 mois.

c) Dans la résolution de l'équation (3.1), on a implicitement imposé un intervalle de vie à la volatilité $forward$ recherchée, en d'autres termes, on a limité la plage de sa variation. En effet, sur les données de marché, on remarque que

$$V_{f,2} > V_{f,3}$$

ce qui implique que

$$\frac{V_{3Y} + V_{2Y}}{2} < \frac{V_{3Y}}{4} + \frac{3V_{2Y}}{4},$$

ou encore, que $X < Y$.

D'autre part, l'équation (3.1) s'écrit aussi

$$Caplet(\sigma) = caplet(X_{2Y3M/3M}) + \sum_{0 \le i \le 8} (caplet(X_{3iM/3M}) - caplet(Y_{3iM/3M}).$$

Comme le $Caplet$ est une fonction strictement croissante de la volatilité, alors les termes de cett somme sont tous strictement négatifs et donc

$$\begin{aligned} caplet(\sigma) &< caplet(X) \\ \sigma &< X, \end{aligned}$$

ce-ci étant vrai pour chaque terme $\sigma$ de la matrice des volatilités $forward$ à calculer.

### 3.2.1 Suggestions

Lors de l'inversion de la matrice des volatilités $forward$ afin de la tester par reconstitution de celle des données initiales du marché ( volatilité $flat$), le problème de l'amélioration du point de départ, $i.e.$ l'abondon ou non de l'hypothèse faite sur les volatilité $3M$ dans $3M$ et $6M$ dans $6M$, a été posé.

| FLAT | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 3,50 | 4,00 | 4,50 | 5,00 | 6,00 | 7,00 | 8,00 | 9,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1Y** | 36,10 | 32,40 | 28,60 | 24,70 | 20,50 | 16,90 | 14,20 | 7,81 | 15,63 | 15,63 | 15,63 | 15,63 |
| **2Y** | 34,39 | 31,05 | 27,69 | 24,89 | 22,69 | 20,30 | 17,91 | 14,65 | 18,20 | 17,99 | 16,84 | 17,41 |
| **3Y** | 33,45 | 30,34 | 27,28 | 24,69 | 22,89 | 20,69 | 18,80 | 17,28 | 16,56 | 17,60 | 18,14 | 18,96 |
| **4Y** | 33,10 | 29,84 | 26,68 | 24,29 | 22,69 | 20,69 | 18,99 | 17,52 | 16,71 | 17,41 | 18,09 | 18,99 |
| **5Y** | 32,33 | 29,25 | 26,28 | 23,99 | 22,40 | 20,50 | 18,90 | 17,51 | 16,60 | 17,21 | 18,00 | 18,80 |

La première idée consiste à rejeter l'hypothèse faite et, utilisant des prix de certaines options cotées sur le marché autre que les $Caplets$, récupérer la première ligne de la matrice des volatiltés $forward$, c-à-d la vraie valeur de la volatilité $foraward$ $3M$ dans $3m$ et celle $6M$ dans $6M$. Ainsi, on ne va plus utiliser que les volatilités $flat$, mais aussi celle $forward$ déjà calculée; calculer une volatilité $forward$ $3.n.M$ revient alors à interpoler celle $3(n-1)M$ déjà calculée et celle $flat$ $3(n+1)M$ donnée du marché.

La deuxième correction consiste à trouver un nouvel algorithme nécessitant moins d'interpolations; en effet, on va réduire le nombre d'interpolations par rapport à celles faites sur la première méthode. On va aussi essayer de ne plus imposer une plage de valeurs permise pour les vols à chaque fois qu'on inverse l'équation (3.1) .

Enfin, on va tenir compte du fait que les $Cap$ 1 an et 2 ans sont fournis pour des $Caplets$ 3 mois, tandis que les $Caps$ d'échéances antérieures le sont pour des $Caplet$ de 6 mois.

## 3.3 Seconde approche: un algorithme amélioré

Notation :

$Cap_{nY}$ est le prix d'un $Cap$ de $n$ ans.

On a

$$vol_{6M} = \frac{vol_{3M/3M} + vol_{3M/6M}}{2}$$

La matrice de la volatilité $forward$ est très importante pour calibrer le modèle SABR au marché. La qualité de l'approximation des paramètres du modèle $(\alpha, \beta, \nu, \rho)$ dépend de celle de la volatilité $forward$. Pour bien approcher ces paramètres, je dois transformer la matrice de volatilité $flat$ donnée en une matrice de volatilité $forward$ avec le maximum de points, $i.e.$ le maximum d'information disponible, pour s'approcher le mieux de l'allure du $Smile$.

Commençons par le cas le plus simple, c'est celui du $Cap$ 1 an et du $Cap$ 2 ans. Cet exemple illustre l'intérêt et la nature des approches faites pour calculer la matrice de volatilité $forward$.

Pour le $Cap$ 1 an, on a

$$\begin{aligned} Cap_{1Y}(V_{1Yf}) &= caplet_0 + caplet_{3M} + caplet_{6M} + caplet_{9M} \\ &= B(0) * fr(3M) * BS(0) + B(3M) * fr(3M) * BS(V_{3M}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad B(6M) * fr(6M) * BS(V_{6M}) + B(9M) * fr(9M) * BS(V_{9M}) \\
&= \quad fr(3M) * fr(3M) * BS(0) + B(3M) * fr(3M) * BS(V_{1Yf}) \\
&+ \quad B(6M) * fr(3M) * BS(V_{1Yf}) + B(9M) * fr(3M) * BS(V_{1Yf})
\end{aligned}
$$

$V_{nYf}t$ et $V_{3M}$ sont des données du marché, donc on peut aller les chercher dans la matrice de volatilité $flat$ fournie par $Open - link$ pour différents $Strikes$. On peut donc réécrire l'équation si dessus, en regroupant les données d'un coté et les inconnues de l'autre. On obtient alors

$$
\begin{aligned}
Cap_{1Y}(V_{1Yf}) - caplet_0 - caplet_{3M} &= caplet_{6M} + caplet_{9M} \\
&= B(6M) * fr(6M) * BS(V_{6M}) + B(9M) * fr(9M) * BS(V_{9M}).
\end{aligned}
$$

Le terme à gauche de cette équation peut être calculer facilement en appliquant, à plusieurs reprises, les formules fermées de $Black$ et $Scholes$. On suppose que ce terme vaut $C$, une quantité connue [3], on obtient alors une équation à deux inconnues

$$C = B(6M) * fr(6M) * BS(V_{6M}) + B(9M) * fr(9M) * BS(V_{9M}).$$

Le problème qui se pose est comment la résoudre.

Passons au second $Cap$. On a,

$$
\begin{aligned}
Cap_{2Y}(V_{2Yf}) - Cap_{1Y}(V_{2Yf}) &= fr(3M) * B(12M) * BS(V_{1Y}) + B(15M) * fr(3M) * BS(V_{15M}) \\
&+ B(18M) * fr(3M) * BS(V_{18M}) + B(21M) * fr(3M) * BS(V_{21M}) \\
&= B(0) * fr(3M) * BS(0) + B(3M) * fr(3M) * BS(V_{2Yf}) \\
&+ B(6M) * fr(3M) * BS(V_{2Yf}) \\
&+ B(9M) * fr(3M) * BS(V_{2Yf}) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

L'équation (3.6) est une équation à quatre inconnues, des volatilitées, car les autres paramètres qui interveiennent, comme les $Euribors$ et les $discount\ facteurs$ peuvent être eux aussi calculés à partir des données du marché.

Sans trouver une relation entre les inconnues y figurant, il est impossible de résoudre cette équation. Une première hypothèse, assez naturelle, est de supposer qu'il y a une relation linéaire entre ces inconnues. Toute fois, il ne faut pas oublier l'idée essentielle de cette approximation qui constitue à étudier le $Smile$ par morceaux, c-à-d qu'à chaque fois, on prend deux $Caps$ successifs (une période d'un an) et on essaye de trouver une relation entre les volatilités sur cette période.

Un premier problème se pose si on écrit pour la première équation cette relation linéaire

$$V_{6M} = \frac{V_{3M} + V_{9M}}{2}.$$

En effet, grâce à cette hypothèse, on peut résoudre l'équation (3.1) réduite ainsi à une équation à une seule inconnue. De même, on peut, pour le $Cap$ 1 an, exprimer $V_{15M}$ et $V_{21M}$ en fonction de $V_{24M}$ et de $V_{12M}$. Cependant, on obtient ainsi une seule équation à deux inconnues. Pour résoudre ce problème, on décale cet algorithme sur une période de trois mois en écrivant que

$$
\begin{aligned}
V_{6M} &= \frac{2V_{3M}}{3} + \frac{V_{12M}}{,} \qquad (3.7) \\
V_{6M} &= \frac{V_{3M}}{+}\frac{2V_{12M}}{3}. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

[3] Pour plus de détails, voir l'Appendice $A$

On cherchera alors dans (3.1) la valeur de $V_{12M}$ et ainsi, l'équation (3.6) sera à une inconnue. De même, on exprimera les volatilités $15M$ et $18M$ en fonction de celles $12M$ et $24M$ pour que à l'étape qui suivra, on obtienne toujours une seule inconnue, et ainsi de suite.

**Remarque**

Bien que le $cap_{nY}$ ne dépend pas de la vol $V_{nY/3M}$ qui s'applique entre $nY$ et $(n+1)Y$ , l'approche qu'on vient de décrire est très importante comme on vient de le voir. Dés qu'on a calculé $V_{12M}$ et $V_{24M}$, on s'aperçoit qu'on a un nouveau problème qui consiste au fait que les volatilités $flat$ du $cap_{nY}$ pour $n > 2$ sont des volatilités $flat$ pour des $Caplets$ $6M$, et non pour des $Caplets$ $3M$ . Pour ce, on va essayer de justifier certaine approximation .

### 3.3.1 Liens entre différentes volatilités de $Caplets$ de ténors $T$ et $2.T$

L'objet de ce calcul est de présenter des voies permettant de transformer la volatilité contribuée pour un ténor donné en volatilité applicable à des forwards de ténors différents.

Le marché cote de la volatilité $flat$ $3M$ (ténor 3 mois) pour des $Caps$ de maturités inférieures à $2Y$, et de la volatilité $flat$ $6M$ (ténor 6 mois) pour des $Caps$ de maturités supérieures à $2Y$.

La volatilité $flat$ représente en quelque sorte une volatilité moyenne. Par conséquent, elle agrège les différentes volatilités de $Caplets$ sous-jacents d'un $Cap$ donné. Une étude historique montre une corrélation forte des $Euribors$ de ténors différents $(3, 6, 12M)$. Ceci nous permet de supposer une corrélation proche de 1 entre les $forwards$ de ténors différents. De plus, on observe des ordres de grandeur proches quant à la variance de ces $forwards$. On peut donc envisager que leurs volatilités moyennes sont proches, et donc leurs volatilités $flat$

**Calculs** $Forward$ $(T_i, T_j)$

On a

$$f_{i,j}(t) = \frac{1}{\tau_{i,j}}(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_j)} - 1).$$

Par simplification, on aura

$$\begin{aligned}\tau_{0,2} &= 2,\\ \tau_{0,1} &= 2,\\ \tau_{1,2} &= 2,\end{aligned}$$

où, par exemple, $\tau = 0.5$ pour des Libor $6M$.

Par transformations algébriques, on vérifie la relation suivante

$$1 + 2\tau.f_{0,2}(t) = (1 + \tau.f_{0,1}(t)).(1 + 2\tau.f_{1,2}(t)),$$

soit

$$2\tau.f_{0,2}(t) = \tau.f_{0,1}(t) + \tau.f_{1,2}(t) + \tau^2.f_{0,1}(t)f_{1,2}(t).$$

On suppose usuellement que les $forwards$ suivent des dynamiques $log - normales$ (éventuellement $driftes$ pour s'affranchir de changer de mesure de probabilité). Soit

$$df = (\ldots)dt + \sigma f.dW_t,$$

avec $u$ représentant le temps et $dW$ une variation brownienne. Par application du lemme d'Ito, on a

$$\begin{aligned} df_{0,2} &= (\ldots)dt + w_1(t).\sigma_{0,1}(t).dW_t^2 + w_2(t).\sigma_{1,2}(t).dW_t^1 \\ w_1(t) &= \frac{f_{0,1}(t)(1+\tau.f_{1,2}(t))}{2} \\ w_2(t) &= \frac{f_{1,2}(t)(1+\tau.f_{0,1}(t))}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$(\ldots).du + \sigma_{0,2}(t).f_{0,2}(t).dW_t = (\ldots).du + w_1(t).\sigma_{0,1}(t).dW_t^1 + w_2(t).\sigma_{1,2}(t).dW_t^2$$

L'égalité en variance de cette dernière expression conduit à la formule suivante :

$$\begin{aligned} (\sigma_{0,1}(t).f_{0,2}(t))^2 &= (w_1(t).\sigma_{0,1}(t))^2 + (w_2(t).\sigma_{1,2}(t))^2 \\ &+ 2\rho w_1(t).\sigma_{0,1}(t).w_2(t).\sigma_{1,2}(t). \end{aligned}$$

**Formules fermées**

Si on considère que la volatilité contribuée est de ténor $6M$ ($forwards$ $6M$ $f_{0,1}$ et $f_{1,2}$ de volatilités contribuées $s_{0,1}$ et $s_{1,2}$) alors la volatilité *caplet* $s_{0,2}$ de l' *Euribor* $12M$ ($forward$ $f_{0,2}$) est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} \sigma_{0,2}^2(t) &= (\lambda_1(t)\sigma_{0,1}(t))^2 \\ &+ ((\lambda_2(t)\sigma_{1,2}(t))^2 + 2\phi\lambda_1(t)\lambda_2(t)\sigma_{0,1}(t)\sigma_{1,2}(t) \\ \lambda_1(t) &= \frac{f_{1,2}(t)[1+\tau.f_{1,2}(t)]}{2f_{0,2}(t)} \\ \lambda_1(t) &= \frac{f_{1,2}(t)[1+\tau.f_{0,1}(t)]}{2f_{0,2}(t)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

**Nota**

Le paramètre $\phi$ désigne la corrélation entre les deux $forwards$ $6M$ sous-jacent ($f_{0,1}$ et $f_{1,2}$) du taux $12M$.

### 3.3.2 Implémentation pratique

Nous supposons que les volatilités sont constantes (absence de volatilité instantanée) et nous supposerons également que les ratios $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont constants (modélisation 1 facteur supposée pour deux *caplets* consécutifs), soient alors

$$\begin{aligned} \sigma_{0,1}(t) &= \sigma_{0,1}, \\ \sigma_{1,2}(t) &= \sigma_{1,2}, \\ \sigma_{0,2}(t) &= \sigma_{0,2}\lambda_1(t) \\ &= \lambda_1, \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

**Remarques**

- les volatilités $\sigma_{0,1}$ et $\sigma_{1,2}$ sont les volatilités $Black - Scholes$ pour les $caplets$ considérés, c'est à dire exactement les volatilités contribuées.

- les valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont évaluées grâce à la valeur des $forwards$ vus $spot$.

$$\sigma_{0,2} \approx \sqrt{(\lambda_1\sigma_{0,1})^2 + ((\lambda_2\sigma_{1,2})^2 + 2\phi\lambda_1\lambda_2\sigma_{0,1}\sigma_{1,2}}$$

On peut également ajouter une hypothèse supplémentaire que la corrélation entre les $forwards$ de périodes successives intra courbe est parfaite $\phi \approx 1$.

$$\sigma_{0,2} \approx \lambda_1.\sigma_{0,1} + \lambda_2.\sigma_{1,2}$$

### 3.3.3 Approximations complémentaires

Hypothèse : les valeurs des différents $forwards$ sont relativement proches, et négligeables devant 1, alors

$$\sigma_{0,2} \approx \frac{\sigma_{0,1} + \sigma_{1,2}}{2}$$

A partir des formules établies ci-dessus, on pourra faire les approximations suivantes

$$\begin{aligned}
V_{1;12(n-1)M} &= \frac{V_{0;12(n-1)M} + V_{0;(12(n-1)+3)M}}{2} \\
&= \frac{V_{0;12(n-1)M} + \frac{3V_{0;12(n-1)M}}{4} + \frac{V_{0;12nM}}{4}}{2} \\
&= \frac{7V_{0;12(n-1)M}}{8} + \frac{V_{0;12nM}}{8} \\
V_{1;12(n-1/2)M} &= \frac{V_{0;12(n-1/2)M} + V_{0;12(n-1/4)M}}{2} \\
&= (1/2)(\frac{V_{0;12(n-1)M}}{2} + \frac{V_{0;12nM}}{8} + \frac{V_{0;12(n-1)M} + 3V_{0;12nM}}{4}) \\
&= \frac{3V_{0;12(n-1)M} + 5V_{0;12nM}}{8}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
V_{0;(12(n-1)+3)M} &= \frac{3V_{0;12(n-1)M} + V_{0;12nM}}{4} \\
V_{0;12(n-1/2)M} &= \frac{V_{0;12(n-1)M} + V_{0;12nM}}{2} \\
V_{0;(12(n-1/4))M} &= \frac{V_{0;12(n-1)M}}{4} + \frac{3V_{0;12nM}}{4}
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, c'est le cas ci-dessus, il nous reste donc à chercher $V_{24M}$ à partir d'une équation à une seule inconnue.

## 3.4 Rejet de l'algorithme amélioré

Les résultats numériques obtenus par cet algorithme amélioré sont loin d'être satisfaisants et on finit par rejeter cette méthode, car malgré toutes les améliorations théoriques y apportées, elle s'avère fort instable.

Pour expliquer cet échec, on avance les raisons probables suivantes

a) La première raison est que, pour éviter les interpolations sur les volatilités dans les calculs des $Caps$,on a fait des interpolations chaque fois sur une période de 1 an. En d'autres termes, pour éviter de faire des interpolations à chaque calcul de volatilité intermédiaire $n$ mois $n+1$ mois,.on ne calcule plus directement ces volatilités entre le $m$ ans et les $m+1$ ans, on calcule seulement les volatilités $m+1$ ans à partir des vraies volatilités $flat$ mais en faisant des interpolations sur les volatilités qui existent sur cette période comme il est expliquer ci-dessus. Ainsi, au lieu de diminuer les erreurs d'approximation, on les a augmentées.

b) La seconde raison, qui est très importante, est la suivante: si on suppose que notre objectif est de calculer la volatilité $3M$ dans 2 ans, on reprend l'équation établie plus haut

$$\begin{aligned} Cap_{2Y}(V_{2Yf}) - Cap_{1Y}(V_{2Yf}) &= fr(3M)*B(12M)*BS(V_{12M}) + B(15M)*fr(3M)*BS(V_{15M}) \\ &+ B(18M)*fr(3M)*BS(V_{18M}) + B(21M)*fr(3M)*BS(V_{21M}) \end{aligned}$$

Ici la volatilité $3M$ dans $1Y$ est calculée à partir du premier $Cap$ comme on l'a déjà expliqué. Sa valeur obtenue est plus grande que la volatilité $flat$ $1Y$ qui est, à son tour, plus grande que la volatilité $flat$ $2Y$ figurant bien évidement dans l'équation (3.6). En résolvant cette équation, et pour compenser le fait que la volatilité $forward$ $1Y$ est très supérieure à celle $2Y$ $flat$, on obtient une volatilité très petite par rapport à ces deux premières. Dans l'étape qui suit, pour les même raisons de compensation, obtiend une volatilité très grande... La matrice de volatilité $forward$ ainsi obtenue présente d'énormes fluctuations sur les colonnes. L'allure du $Smile$ est carrément perdue.

c) Corrélation des volatilités $forward$; Il faut étudier de près la corrélation entre les volatilités des différentes maturités, c-à-d entre les différentes lignes. Rappelons que, lors de la construction de la matrice des volatilités $forward$, on a supposé que le terme de corrélation $\phi = 1$, et ce en expriment les volatilités $forward$ $6M$ en fonction des volatilités $3M$. Le fait de supposer que $\phi = 1$ dans les équations (3.1) et (3.6) a simplifié considérablement la résolution du problème d'approximation de la volatilité $forward$. L'étape suivante serait d'aborder le même problème sans fixer au préalable le terme de corrélation des volatilités.

# Chapter 4

# Calibration du modèle SABR

## 4.1 Algorithme de calcul de $\alpha$, $\rho$ et $\nu$

On suppose $\beta$ connu, et on calcule le reste des paramètres du modèle : on a, comme unique approximation, la formule de volatilité à la monnaie prédite par SABR donc toutes les équations qui suiveront ne seront valables que pour des $Strikes$ assez proches du $forward$

$$\begin{aligned}\alpha &= f^{1-\beta}\sigma_B(f,f) &\quad (4.1)\\ \sigma_{BS}(K,f) &= \frac{\alpha}{f^{1-\beta}}[1-\frac{(1-\beta)}{2}\log(K/f)+\frac{1}{2}\rho\lambda\log(K/f)\\ &+ \frac{1}{12}((1-\beta)^2+(2-3\rho^2)\lambda^2)\log(K/f)^2] &\quad (4.2)\end{aligned}$$

Posons à présent $X=\frac{\rho\lambda}{2}$ et $Y=\frac{1}{12}(2-3\rho^2)\lambda^2$ pour simplifier l'écriture . On a

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{BS}(K,f)}{\sigma_{ATM}}-1+\frac{(1-\beta)}{2}\log(K/f)^2-\frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K/f) &= X\log(K/f)+Y\log^2(K/f)\\ \frac{\sigma_{BS}(K_1,f)}{\sigma_{ATM}}-1+\frac{(1-\beta)}{2}\log(K_1/f)^2-\frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K_1/f) & \\ &= X\log(K_1/f)+Y\log^2(K_1/f)\\ , & \quad (4.3)\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{\sigma_{BS}(K,f)}{\sigma_{ATM}}-1+\frac{(1-\beta)}{2}\log(K/f)^2-\frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K/f)-X\log(K/f)]\log^{-2}(K/f)=Y,$$

ou encore, que

$$\begin{aligned}&[\frac{\sigma_{BS}(K,f)}{\sigma_{ATM}}-1+\frac{(1-\beta)}{2}\log(K/f)^2-\frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K/f)-X\log(K/f)]\\ &\log^{-2}(K/f).\log^2(K_1/f)+X\log(K_1/f)\\ =\ &\frac{\sigma_{BS}(K_1,f)}{\sigma_{ATM}}-1+\frac{(1-\beta)}{2}\log(K_1/f)^2-\frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K_1/f) \quad (4.4)\end{aligned}$$

Posons

$$r = \frac{\sigma_{BS}(K,f)}{\sigma_{ATM}} - 1 + \frac{(1-\beta)}{2}\log(K/f)^2 - \frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K/f) \tag{4.5}$$

$$r_1 = \frac{\sigma_{BS}(K_1,f)}{\sigma_{ATM}} - 1 + \frac{(1-\beta)}{2}\log(K_1/f)^2 - \frac{(1-\beta)^2}{12}\log^2(K_1/f) \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} r_1 &= r\frac{\log(K/f)^2}{\log(K_1^2/f)} \\ &- X\frac{\log(K_1^2/f)}{\log(K/f)} + X\log(K_1/f) \end{aligned} \tag{4.8}$$

ce qui implique que

$$(r_1 - r\frac{\log(K/f)^2}{\log(K_1^2/f)}) = X\log(K_1/f).(1-\log(K_1/f)\log(K/f)) \tag{4.9}$$

$$= X - \frac{\log(K_1/f)}{\log(K/f)}\log(K/K_1), \tag{4.10}$$

$$\tag{4.11}$$

*i.e.*,

$$X = \frac{\log(K/f)}{\log(K/f).\log(K/K_1)}.(r_1 - r\frac{\log(K/f)^2}{\log(K_1^2/f)}.$$

L'inconnue $Y$ peut être déduite à partir de (4.) et on peut alors résoudre ce système

$$X = \frac{1}{2}\rho\lambda, \tag{4.12}$$

$$X^2 = \frac{1}{12}(2-3\rho^2)\,\lambda^2, \tag{4.13}$$

$$= \frac{\lambda^2}{6} - \frac{1}{4}\rho^2\lambda^2 \tag{4.14}$$

$$= \frac{\lambda^2}{6} - X^2 \tag{4.15}$$

$$= \lambda^2 1 = 6(Y + X^2) \tag{4.16}$$

*Remarque*
On prend $\lambda \geq 0$, car la *volvol* $\nu$ est positive. Ce-ci implique que

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{6}(Y+X^2)^{1/2} \\ \rho &= \frac{2X}{\lambda} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \nu &= \alpha f^{\beta-1}\sqrt{Y+X^2}^{1/2} \\ \rho &= \frac{2X}{\lambda}. \end{aligned}$$

## 4.2 Calcul du paramètre $\beta$ et restriction aux options à la monnaie

Le fait de calculer $\beta$ à partir de la volatilité à la monnaie et par suite calculer les autres paramètres induit une perte d'homogénéité à la matrice *volvol*, celle de $\nu$; on constate des fluctuations non négligeables et des variations au niveau des valeurs intermédiaires. Lors du calcul de la matrice des volatilités $SABR$ afin de se répliquer le *Smile* observé sur le marché, on remarque que les $4,5$ valeurs de la matrice sur les colones des *strikes* les plus proches du $forward$ de la ligne correspendante sont bonnes et que le reste des termes sont plus au moins proches des termes de la matrice $forward$ initiale. Ce phénomène est cohérent avec le choix de la fonction avec la quelle on approche la volatilité $forward$.

Le calcul du paramètre $\beta$ est basé sur les volatilités $forward$ à la monnaie. Pour chaque ligne de la matrice des volatilités $forward$, on a besoin d'une valeur de $\beta$ et d'une valeur de $\alpha$. Et comme on n'a qu'une seule volatilité à la monnaie pour chaque ligne, on ne peut donc pas trouver ces deux paramètres à partir de cette valeur unique. A priori, on peut envisager d'utiliser la volatilité à la monnaie d'une ligne et celle de la ligne suivante. Cependant, ce raisonnement est hasardeux faute de justification théorique, il est même en contradiction avec les formules (4.1) et (4.2) puisqu'elles ne sont valables que pour une seule maturité.

Faut il signaler que, faute de donnés historiques suffisantes, il n'est pas possible de calculer un estimateur du paramètre $\beta$, ce qui pouvait être d'un atout considérable pour la suite.

Le modèle dynamique SABR aurait pu être la réponse à cette difficultés. Malheuresemnt, faute de formules analogues pour ces deux paramètres sous le modèle SABR dynamique, on se contente de fixer $\beta$ et chercher le reste des paramètres. Ce choix aura sûrement un impact sur la qualité de la calibration du modèle SABR au marché.

| **SABR** | **1,5** | **2** | **2,5** | **3** | **3,5** | **4** | **4,5** | **5,00** | **6** | **7** | **8,00** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3M** | 40,972 | 32,972 | 27,731 | 24,074 | 21,422 | 19,45 | 17,961 | 16,83 | 15,311 | 14,468 | 14,06 | 13,956 |
| **6M** | 43,588 | 34,072 | 28,234 | 24,465 | 21,981 | 20,349 | 19,311 | 18,70 | 18,354 | 18,764 | 19,64 | 20,812 |
| **9M** | 46,123 | 35,526 | 28,894 | 24,505 | 21,516 | 19,462 | 18,062 | 17,14 | 16,269 | 16,256 | 16,78 | 17,655 |
| **1Y** | 48,393 | 37,101 | 29,705 | 24,544 | 20,801 | 18,018 | 15,916 | 14,32 | 12,176 | 10,986 | 10,41 | 10,263 |
| **1Y3M** | 47,722 | 36,861 | 29,811 | 24,943 | 21,452 | 18,892 | 16,992 | 15,57 | 13,756 | 12,843 | 12,52 | 12,585 |
| **1Y6M** | 47,052 | 36,574 | 29,901 | 25,392 | 22,241 | 20,001 | 18,403 | 17,27 | 15,988 | 15,563 | 15,68 | 16,169 |
| **1Y9M** | 47,621 | 37,083 | 30,51 | 26,179 | 23,244 | 21,242 | 19,892 | 19,01 | 18,233 | 18,301 | 18,90 | 19,842 |
| **2Y** | 34,188 | 29,356 | 26,676 | 25,179 | 24,398 | 24,082 | 24,08 | 24,30 | 25,168 | 26,388 | 27,81 | 29,333 |
| **2Y3M** | 44,376 | 35,495 | 29,737 | 25,765 | 22,921 | 20,838 | 19,294 | 18,15 | 16,68 | 15,954 | 15,71 | 15,781 |
| **2Y6M** | 44,362 | 35,584 | 29,858 | 25,882 | 23,013 | 20,894 | 19,305 | 18,11 | 16,534 | 15,696 | 15,34 | 15,299 |
| **2Y9M** | 43,708 | 35,188 | 29,637 | 25,787 | 23,012 | 20,965 | 19,434 | 18,28 | 16,777 | 15,984 | 15,65 | 15,637 |
| **3Y** | 43,189 | 34,894 | 29,505 | 25,779 | 23,103 | 21,137 | 19,674 | 18,58 | 17,17 | 16,452 | 16,18 | 16,214 |
| **3Y3M** | 41,417 | 33,662 | 28,603 | 25,088 | 22,552 | 20,677 | 19,271 | 18,21 | 16,815 | 16,07 | 15,75 | 15,71 |
| **3Y6M** | 41,365 | 33,596 | 28,538 | 25,035 | 22,514 | 20,657 | 19,27 | 18,23 | 16,876 | 16,172 | 15,89 | 15,891 |
| **3Y9M** | 41,331 | 33,548 | 28,492 | 24,997 | 22,488 | 20,646 | 19,276 | 18,25 | 16,932 | 16,263 | 16,01 | 16,049 |
| **4Y** | 41,569 | 33,682 | 28,568 | 25,04 | 22,513 | 20,663 | 19,291 | 18,27 | 16,967 | 16,321 | 16,10 | 16,164 |
| **4Y3M** | 37,324 | 31,702 | 27,716 | 24,702 | 22,325 | 20,391 | 18,783 | 17,42 | 15,24 | 13,565 | 12,24 | 11,17 |
| **4Y6M** | 37,268 | 31,457 | 27,421 | 24,429 | 22,113 | 20,266 | 18,759 | 17,51 | 15,56 | 14,127 | 13,04 | 12,212 |
| **4Y9M** | 37,077 | 31,278 | 27,267 | 24,304 | 22,02 | 20,205 | 18,731 | 17,51 | 15,627 | 14,254 | 13,23 | 12,451 |
| **5Y** | 36,935 | 31,101 | 27,093 | 24,152 | 21,901 | 20,124 | 18,691 | 17,52 | 15,72 | 14,436 | 13,50 | 12,805 |

## 4.3 Peut-on imposer que $\beta$ soit égale à une constante ?

Pour $K$ assez proche de $f$, on a vu que la formule de la volatilité s'écrit:

$$\sigma_{BS}(K,f) = \frac{\alpha}{f^{(1-\beta)}}[1-(1-\beta)\log(K/f)+\frac{1}{2}\rho\lambda\log(K/f)+\frac{1}{12}((1-\beta)^2+(2-3\rho^2)\lambda^2)\log(K/f)^2].$$

Supposons que la vraie valeur de $\beta$ soit $\beta_1$ et supposons que $\beta = \beta_1 + d\beta$, on obtient alors $\alpha = \alpha_1 f^{-d\beta}$ en terme d'erreur commise sur $\alpha$. On va maintenant étudier l'erreur commise sur le reste des paramètres du modèle. Suite à cette hypothèse, l'erreur commise sur la volatilité sera

$$d\sigma_{BS}(K,f) = \frac{1}{2}d\beta \log(K/f) + \frac{1}{12}\log(K/f)^2 d\beta^2.$$

Dans l'algorithme du calcul de $\rho$ et $\nu$ on a vu qu'on utilise essentiellement la fonction $r(K,f)$, l'erreur ainssi commise sur cette fonction sera:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sigma_B(K,f)}{\sigma_{ATM}} - 1 + (1-\beta)\log(K/f) - \frac{1}{2}\rho\lambda\log(K/f)]log(K/f)^{-2} - \frac{1}{12}(1-\beta)^2 \\ dr &= \frac{1}{2}\frac{d\beta}{\log(K/f)} - \frac{1}{12}d\beta^2. \end{aligned}$$

Et comme

$$X = \frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)\log(K/K_1)}(r_1 - r(\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)})^2),$$

alors,

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)\log(K/K_1)}(dr_1 - dr(\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)})^2) \\ &= \frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)\log(K/K_1)}(\frac{d\beta}{2\log(K_1/f)} - \frac{1}{12}d\beta^2 - \frac{d\beta}{2}\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)^2} + \frac{d\beta^2}{12}(\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)})^2) \\ &= \frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)\log(K/K_1)}(\frac{1}{2}\frac{d\beta}{\log(K_1/f)}(1 - \frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)}) + \frac{1}{12}d\beta^2((\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)})^2 - 1)) \end{aligned}$$

Si $d\beta$ est assez petit, l'erreur sur $\alpha$ sera négligeable, de même pour les erreurs sur $\rho$ et $\nu$, si on prend $K$ et $K_1$ assez proches de $f$ de telle façon que

$$\frac{\log(K/f)}{\log(K_1/f)} \approx 1.$$

Ainsi, ces approches seront acceptables et donc le fait de supposer $\beta$ constante ne changera pas beacoup dans la qualité des résultats numériques obtenus lors de la calibration du modèle SABR au marché, pourvu que réussit à avoir $d\beta$ assez petit.

D'autre part, cette hypothèse d'un $\beta$ constant peut avoir une grande influence sur le calcul de $Delta$, $Vega$, $Vanna$ et $Volga$ si $d\beta$ est non négligeable . Un exemple très simple pour comprendre l'erreur induite est le suivant.

**Exemple**

Supposons qu'on a la fonction très simple suivante:

$$f(x) = \alpha x^\beta$$

On a alors:

$$f'(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}.$$

Si on impose que $\beta = 1$ comme dans notre cas on obtient

$$f'(x) = \alpha.$$

Or il se peut que la vraie valeur, nécessitant deux données pour être calculée théoriquement, vaut 0 et donc

$$f'(x) = 0.$$

Malgré la simplicité de cet exemple, il est très significatif. En effet, il y a une grande différence entre les deux dérivées, le résultat qu'on obtiendra n'est valable que si l'erreur commise sur $\beta$ c-à-d d$\beta$ est assez petite, pareil que dans le cas de calcul des paramètres $\alpha$, $\rho$ et $\nu$.

Un problème qui se pose est le suivant: comment être sûr que d$\beta$ est négligeable vu qu'on ne connait pas la vraie valeur de $\beta$ en la fixant à la main. En effet, on n'a aucune information sur ce paramètre, autre que la volatilité à la monnaie, insuffisante à elle seule pour déterminer le paramètre $\beta$, ainsi que sur son interval de vie. Donc on ne peut jamais le fixer arbitrairement et suposer à la fois que

$$d\beta \prec\prec 1$$

sans aucune justification théorique ou même pratique.

Cette hypothèse est à améliorer pour un calcul de couverture acceptable. Une méthode qu'on peut utiliser dans le cas d'absence de données historiques est de varier $\beta$ en partant de 0 avec un pas très petit en essayant de trouver la valeur optimale pour laquelle la volatilité SABR approche au mieux celle $forward$. Certes, c'est couteux en temps mais on a au moins une idée sur la réaction du modèle SABR face à une variation du pramètre $\beta$ parfois même de l'ordre de $10^{-4}$; ce-ci mets l'accent sur l'importance de rejeter une telle hypothèse pour une approche plus rigoureuse.

## 4.4 Alternative proposée

Vu le risque d'erreur non négligeable qu'on prend une fixant le paramètre $\beta$ à la main, et vu que la fonction $\sigma_{BS}(\beta)$ n'est pas monôtone, ce qui rend la réussite de cette approche quasi-impossible, on propose une seconde alternative. En effet, je propose un algorithme de calcul de $\beta$, basé sur la minimisation d'une fonction qu'on déterminera. Alors, je cherche mon paramètre qui minimise, en un sens, la distance entre les deux $Smiles$; celui SABR et celui $forward$ (pour une maturité donnée). L'algorithme est le suivant :

Notons $\sigma$ la matrice de volatilité $forward$. On commence par poser $\beta_i = 0$ (correspendant à la $i$ème ligne de ma matrice) comme valeur initiale. On calcule alors $\alpha$,$\rho$ et $\nu$ qui correspendent à cette valeure de $\beta_i$ ,et on calcule en un premier temps

$$diff = (\sum_0^n (\sigma_{BS}(\beta_i, \alpha, \rho, \nu) - \sigma[i][j])^2).$$

On se fique par suite un nombre maximal $M$ d'iterations et un pas de calcul $\delta$. Parsuite, pour $i = 0$ jusqu'à $i = M$, on pose

$$x = (i + 1) * \delta.$$

On détermine alors par le même algorithme de calcul de $\alpha$,$\rho$ et $\nu$ presenté si dessus et on injecte alors ces valeurs comme precédemment dans la fonction à minimiser où on calcule

$$diff = (\sum_0^n (\sigma_{BS}(\beta_i, \alpha, \rho, \nu) - \sigma[i][j])^2).$$

Ensuite, on teste si $diff1 < diff$, alors $\beta_i = x$ et $diff = diff1$. Sinon, on continue.

On fait à la fin $return\beta_i$ pour boucler les itérations.

Ce calcule étant répété sur chaque ligne pour calculer chaque parametre $\beta_i$ Correspendant, on obtient alors les résultats suivants

| **beta** | | **rho** | | **nu** | | **alpha** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,62 | | -0,64 | | 0,32 | | 0,073 |
| 0,425 | | -0,54 | | 0,34 | | 0,034 |
| 0,15 | | -0,44 | | 0,39 | | 0,013 |
| 0,000 | | -0,51 | | 0,38 | | 0,007 |
| 0,000 | | -0,52 | | 0,36 | | 0,007 |
| 0,048 | | -0,37 | | 0,34 | | 0,009 |
| 0,019 | | -0,47 | | 0,35 | | 0,009 |
| 0,928 | | -1,35 | | 0,14 | | 0,196 |
| 0,137 | | -0,45 | | 0,32 | | 0,013 |
| 0,15 | | -0,52 | | 0,30 | | 0,013 |
| 0,317 | | -0,55 | | 0,27 | | 0,023 |
| 0,405 | | -0,61 | | 0,24 | | 0,031 |
| 0,327 | | -0,52 | | 0,26 | | 0,024 |
| 0,3612 | | -0,57 | | 0,24 | | 0,026 |
| 0,3981 | | -0,63 | | 0,23 | | 0,03 |
| 0,449 | | -0,72 | | 0,22 | | 0,035 |
| 0,395 | | -0,64 | | 0,22 | | 0,029 |
| 0,462 | | -0,60 | | 0,21 | | 0,035 |
| 0,482 | | -0,64 | | 0,20 | | 0,037 |
| 0,501 | | -0,68 | | 0,19 | | 0,04 |

Il est important de noter que le calcul ci-dessus est basé sur la minimisation, sur toute la ligne, or il suffit de le faire chaque fois seulement au voisinage du $forward$ en choisissant quelques élements significatifs de cette ligne,,car il ne faut pas oublier que notre but est d'approcher au mieux la matrice initiale à la monnaie. Une minimisation sur toute la ligne peut donc nous faire perdre des informations.

### Remarques

On a utilisé des $Strikes$ imposés par la matrice donnée, celle $flat$. Et bienque les résultats numériques en terme de volatilités SABR calibrée au marché ont été acceptables, le choix de ces $Strikes$, pas toujours très proches de l'$Euribor$ n'est pas conforme aux formules utilisées pour la calibration du modèle SABR qui, elles, ne sont valables qu'au voisinage de la monnaie. On est alors obligé, à chaque fois qu'on calcule l'$Euribor$ de se fixer deux $Strikes$ assez proches qui l'encadrent puis interpoler sur la matrice de volatilité. Une fois encore, le manque de données du marché en terme de $Strikes$ nous force à faire des interpolations et donc d'accumuler plus d'erreur.

Une question se pose; comment améliorer ces résultats. La qualité de la matrice de volatilité SABR dépend de celle $forward$; il est peut être impossible que le marché nous donne une plus grande matrice en terme de colonnes ($Strike$), et même si c'était faisable, un très grand nombre de données (voire même de la puissance du continu) est nécessaire pour couvrir le domaine de vie de l'$Euribor$.

Une idée pour améliorer ces résulats est de ne plus faire des interpolations linéaires sur les volatilités. A la place, on écrira que la volatililé sur chaque ligne de la matrice (donc correspondant à une maturité donnée) est une fonction polynomiale du $Strike$ dont on peut se fixer le degré en fonction du nombre de colonnes ($Strike$) et chercher ces coefficients en fonction des volatilités disponibles. Je n'ai pas encore eu des résultats avec cette méthode vu que je suis pressé par le temps mais elle sera, sans doute, la prochaine étape.

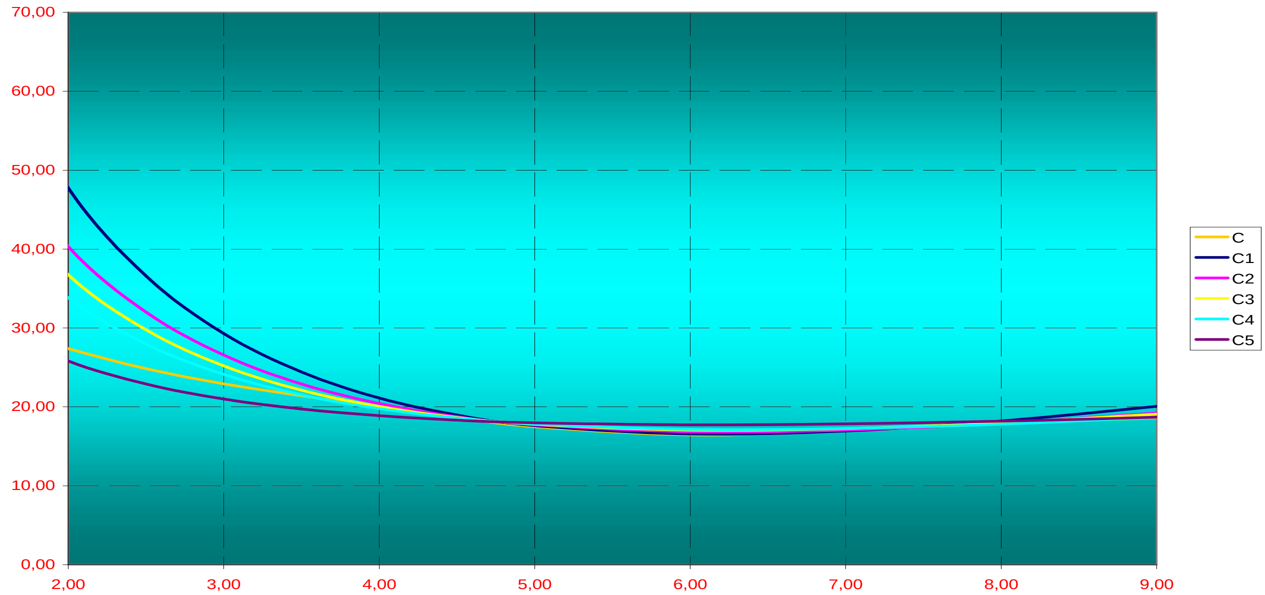


Figure 4.1: Evolution du $Smile$ en fonction du choix des $Strikes$ dans le calcul de $\rho$ et $\nu$.

## 4.5 Choix des $Strikes$ dans le calcul de $\rho$ et $\nu$

On a vu que le choix des deux $Strikes$ pour inverser la formule de vol SABR à la monaie et calculer $\rho$ et $\nu$ une fois qu'on a $\beta$ et $\alpha$ est très important. Dans ce paragraphe, on va observer l'évolution du $Smile$ en fonction du couple de $Strikes$ choisi dans le calcul de $\rho$ et $\nu$. Pour cela, on va se donner une maturité, par exemple $5Y$ ,le $forward$ $f$ qui s'applique entre $4Y9M$ et cette maturité vaut le jour de ces calculs $0.0478$. D'autre part, on va prendre 5 couples de $Strikes$ :$(5; 6), (4.5; 7), (4; 8), (3.5; 9)$ et $(1.5; 9)$, calculer les 5 couples $(\rho\ ; \nu)$ correspendants et enfin représenter les différentes courbes de volatilité SABR correspendentes à chaque couple $(\rho\ ; \nu)$. On obtient alors le graphe (4.1)

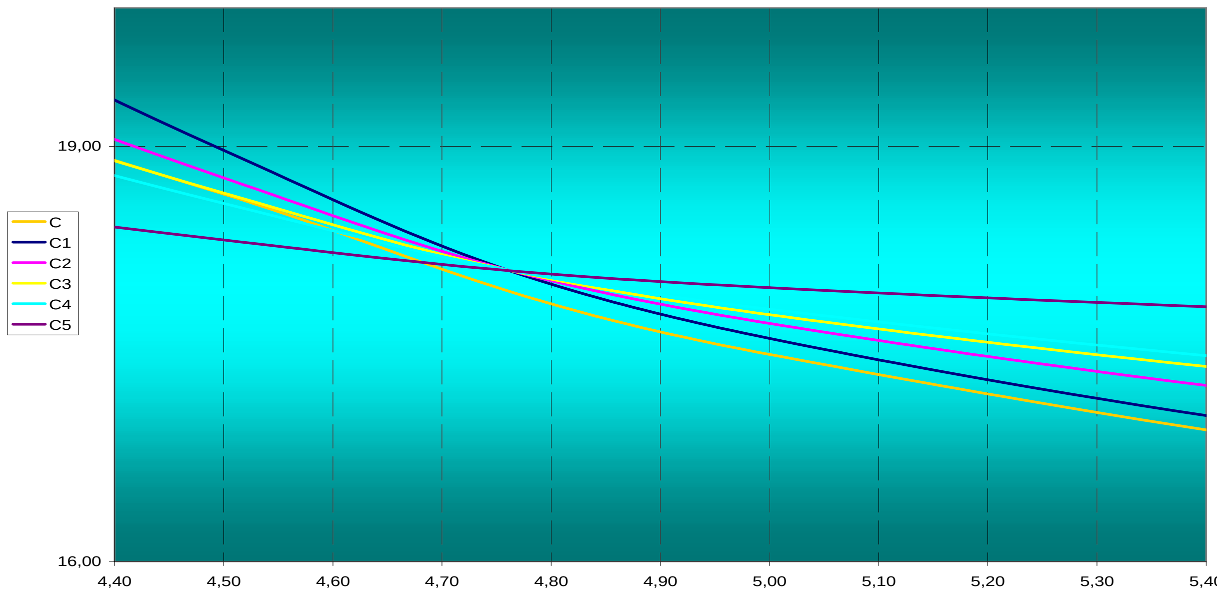


Figure 4.2: Evolution du $Smile$ en fonction du choix des $Strikes$: un $zoom$

On observe sur cette figure que plus le couple des $Strikes$ s'éloigne de la valeur du $forward$ aujourd'hui, plus le graphe correspondant produit la totalité du $Smile$ donnée par la volatilité $forward$. La courbe $C5$ par exemple qui correspond au couple $(1.5; 9)$ le plus éloigné du taux $Euribor$ est la plus proche en gros de celle $forward$. Ce n'est pas surprenant car $\rho$ et $\nu$ obtenus avec ce couple sont calculer en inverssant des équations où la volatilité SABR et la volatilité $forward$ pour ces deux $Strikes$ assez éloignés doivent coïncider, et comme la volatilité ne varie que dans intervalle tres limité, on ne voit pas de difference localement. Donc, pour ce couple, l'approche nous paraît satisfaisante et meilleure que les autres.

Mais, on ne doit pas omettre que choisir ce type de $Strike$ n'est pas cohérent avec l'approche faite sur $\rho$ et $\nu$ calculés à la monnaie, et donc, théoriquement, la courbe $C1$ correspondant aux $Strikes$ $(5; 6)$ les plus proches de $f$ sur ces exemples devrait reproduire le mieux l'allure du $Smile$ au voisinage de $f$. Ce ci n'est pas bien observable sur le graphe précédant (figure (4.1)) mais assez clair sur la figure (4.2) qui suit ,où on voit, contrairement à ce qui est observé ci haut, que plus le couple $(K_1; K_2)$ est proche du sous-jacent, plus le $Smile$ est bien reproduit localement et vis versa.

## 4.6 Dynamique du $Smile$ en fonction du $forward$

Dans cette section, on va essayer de vérifier un résultat avancé par l'article [5]; le $Smile$ donné par le modèle SABR et le sous-jacent $f$ évoluent dans le même sens, c-à-d si le $forward$ croît (respectivement décroît), le $Smile$ va se déplacer vers la droite (respectivement vers la gauche).

Les graphes (4.3) et (4.4) reproduisent bien ce phénomène. Ainsi, le modèle SABR prédit la dynamique correcte sur le marché contrairement à d'autres modèles tels que les modèles à volatilité locale.

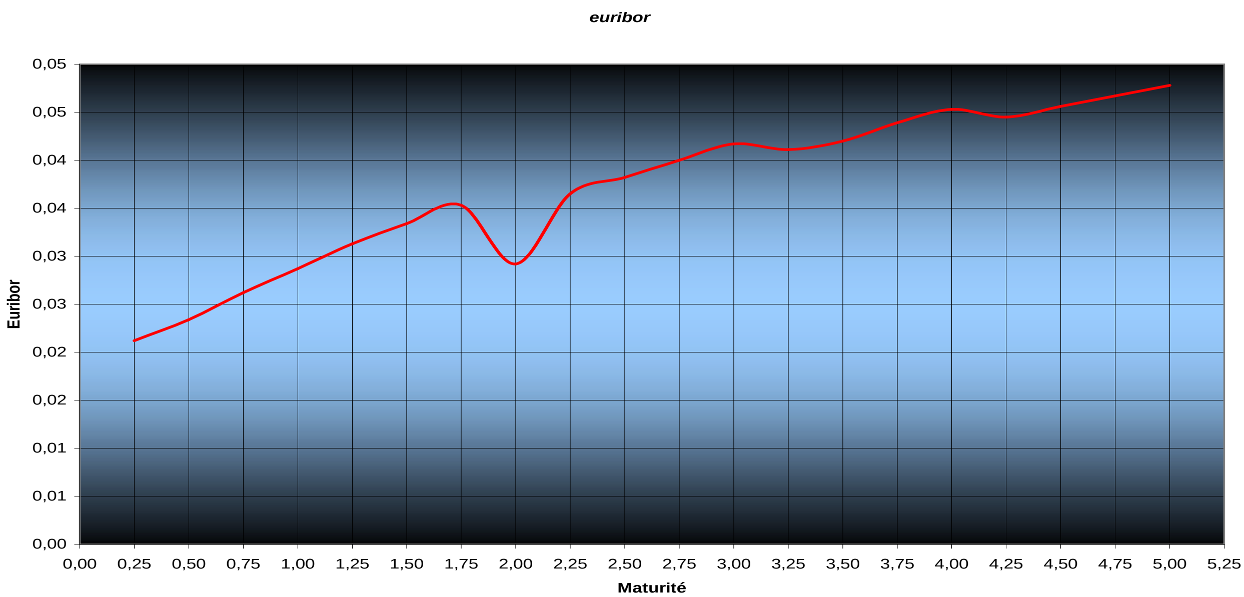


Figure 4.3: Evolution du *forward* $f$ en fonction de la maturité.

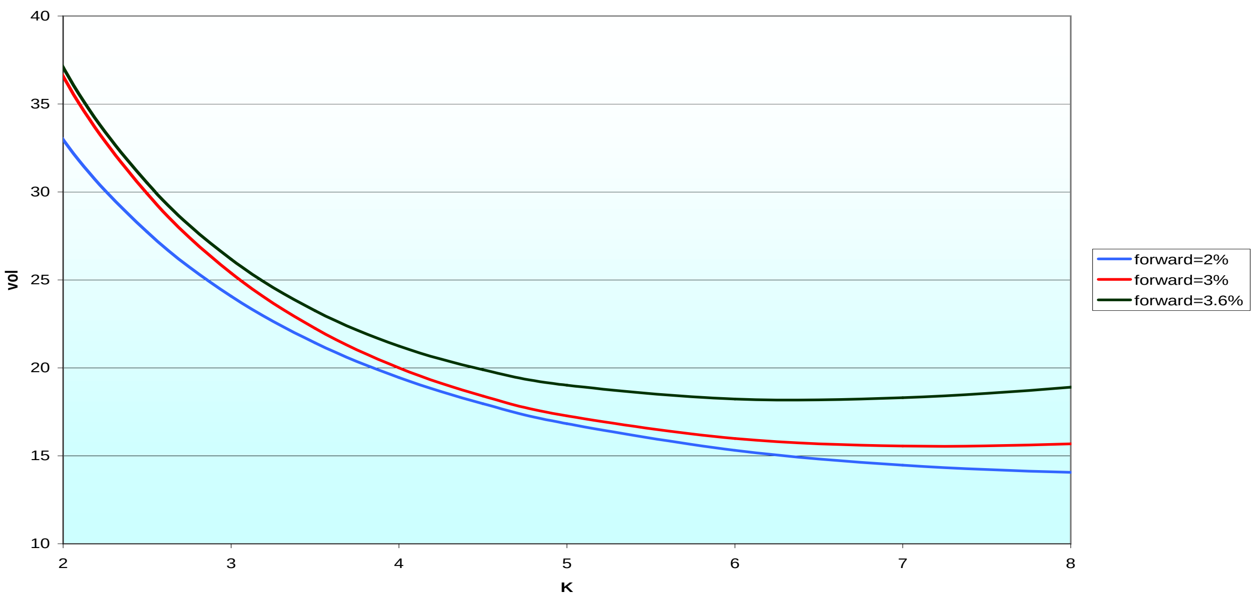


Figure 4.4: Evolution du forward f en fonction de la maturité

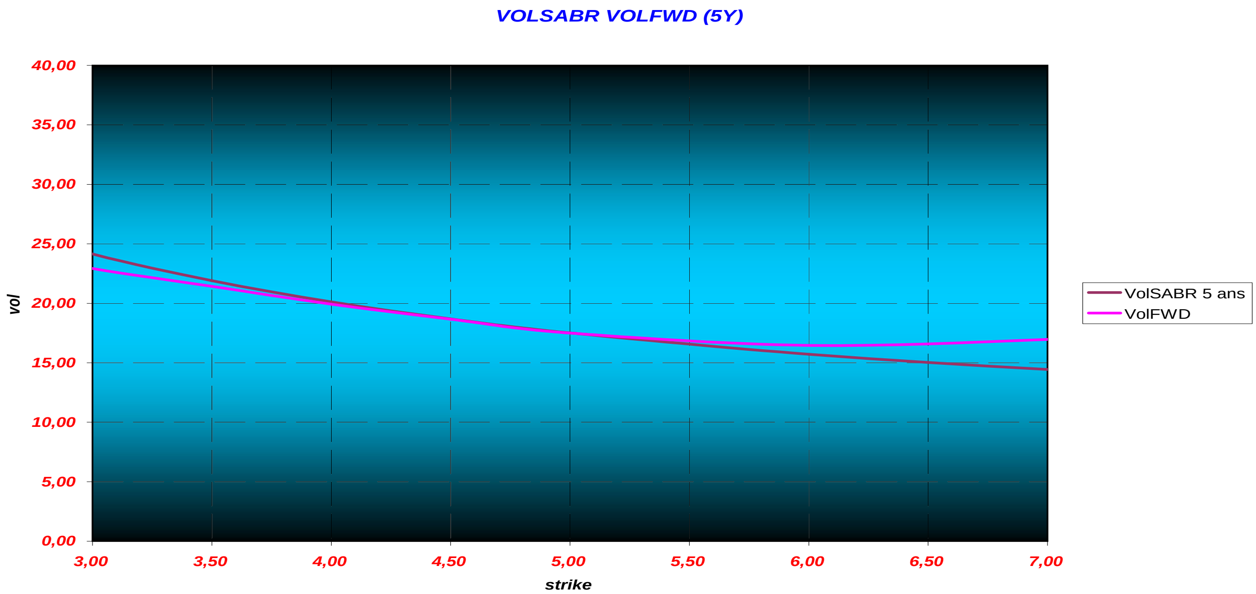


Figure 4.5: La volatilité SABR; approximation locale de celle *forward*.

## 4.7 Limites du modèle SABR

Les résultats numériques et les problèmes techniques rencontrés pour construire le *priceur* SABR nous permettent de conclure que le modèle SABR est un modèle local, d'un point de vue pratique, au sens où il ne permet de reproduire le *Smile* qu'au voisinage de la monnaie, (figure (4.5)).

Ce-ci n'est pas surprenant vu que toutes les formules avancées par [5] et qu'on a utilisées pour approcher les paramètres du modèle sont issues d'un développement limité autour de la monnaie. D'ailleurs le fait de fixer le terme de corrélation dès le début $\phi = 1$ est facilement contesté. En effet, sur une ligne donnée, les volatilités qu'on a comme données sont, soit celles du marché, soit obtenues à partir de celle du marché, et il n'y a aucune raison pour que $rho$ et $\nu$ soient des constantes. Donc, la fonction de la volatilité ($n$ équations) n'a aucune raison de passer par tous les points. Néamoins, on peut toujours chercher, sur une ligne donnée, des estimateurs de $\rho$ et $\nu$ qui permettront d'approcher au maximum tous les points du marché en gardant à la fois l'allure d'un *Smile*.

L'intérêt du modèle SABR et que, pour des options très à la monnaie, une fois les différents paramètres calculés, il permet d'avoir, avec une très grande précision, une fonction continue du *Strike* et donc un *Smile* continu en terme de graphe.

Remarquons, qu'en essayant de varier $\beta$, ces deux paramètres, $\rho$ et $\nu$ ne changent presque pas; à la monnaie, ils dépendent essentiellemnt des valeurs du *Strike* utilisé pour les calculer.

# Chapter 5

# Gestion du risque dû au *Smile*

Comme le modèle SABR est un modèle consistent pour tout *Strike* $K$, alors les risques calculés pour toutes les options écrites sur un même sous-jacent se compensent, seul le risque résiduel doit être couvert.

## 5.1 Le risque *Vega*

Sous le modèle SABR, le prix d'un *Call* est donnée par

$$V_{Call} = BS(f, K, \sigma_{BS}(K, f), t_{ex}),$$

et ce, en faisant intervenir la formule fermée de *Black* et *Scholes* ainsi que la volatilité implicite $\sigma_{BS}$ relative au prix SABR. En dérivant par rapport à $\alpha$, on obtient le risque *Vega*; risque relatif aux variations de la volatilité

$$Vega = \frac{\partial V_{Call}}{\partial \alpha} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} . \frac{\partial \sigma_{BS}(K, f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha}.$$

Ce risque correspond aux variations, par unité, du prix du *Call* quand $\alpha$ varie. En pratique, on confond *Vega* avec les variations du prix relativement aux fluctuations de la volatilité à la monnaie; *i.e.* aux quantités

$$\delta\sigma_{ATM} = (\partial\sigma_{ATM}/\partial\alpha)\delta\alpha.$$

Dans ce cas, on a

$$Vega = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} . \frac{\frac{\partial \sigma_{BS}(K, f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \sigma_{ATM}(f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \alpha}},$$

où $\sigma_{ATM}(f) = \sigma_{BS}(f, f)$. Notons qu'à un ordre infinitésimal,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \sigma_{BS} &= \sigma_{BS}/\alpha \\ \partial_\alpha \sigma_{ATM} &= \sigma_{BS}/\alpha, \end{aligned}$$

alors,

$$Vega = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} . \frac{\sigma_{BS}(K, f)}{\sigma_{ATM}(f)} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}} . \frac{\sigma_{BS}(K, f)}{\sigma_{BS}(f, f)}.$$

Qualitativement, le risque Vega, pour un *Strike* donné $K$, est proportionnel à la volatilité implicite $\sigma_{BS}(K, f)$.

## 5.2 Les risques $Vanna$ et $Volga$

Comme $\rho$ et $\nu$ sont déterminés par réplication de la courbe de volatilité observée sur le marché, le modèle SABR présente un risque dû aux variations de ces deux paramètres. Définissons, par analogie avec le marché de change, $Vanna$ comme étant le risque dû aux variations de $\rho$, $Volga$ celui dû aux variations de $\nu$

$$\begin{aligned} Vanna &= \frac{\partial V_{Call}}{\partial \rho} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}}.\frac{\sigma_{BS}(K, f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \rho} \\ Volga &= \frac{\partial V_{Call}}{\partial \nu} = \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}}.\frac{\sigma_{BS}(K, f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Essentiellemnt, $Vanna$ est le risque dû à la croissance du $Skew$. Volga exprime le risque d'une allure de $Smile$ plus prononcée.

Pour calculer tous ces risques, la méthode des différences finies appliquée à la formule de la volatilité implicite $\sigma_{BS}$ peut être une alternative, cependant on opte pour un calcul direct. Ces risques peuvent être couverts par un portefeuille d'options écrites sur des $Strikes$ loin de la monnaie.

## 5.3 Le risque $Delta$

Le risque Delta exprimé par le modèle SABR dépend du choix des paramètres $(\alpha, \beta, \rho, \nu)$. En dérivant, par rapport à $f$, le prix du $Call$, on obtient que

$$Delta = \frac{\partial V_{Call}}{\partial f} = \frac{\partial BS}{\partial f} + \frac{\partial BS}{\partial \sigma_{BS}}.\frac{\sigma_{BS}(K, f; \alpha, \beta, \rho, \nu)}{\partial f}.$$

Le premier terme est le $Delta$-risque classique calculé par la formule de $Black$ et $Scholes$. Le second terme est une correction dû au modèle SABR. Il est analogue à un Vega $Black-Scholes$ sur les variations prédites de la volatilité implicite $\sigma_{BS}$ dues aux fluctuations du $forward$ $f$. Ce terme en Vega induit une évolution des courbes de volatilité dans la même direction que le $forward$ $f$.

## 5.4 Algorithmes

Certes, on peut penser automatiquement à la méthode des différences finies, mais des calculs plus poussés aboutissent à des formules explicites des différents risques étudiés. Les formules de bases sont

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}(K, f) &= \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2(f/K) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K) + \ldots)}.(\frac{z}{x(z)}) \\ & (1 + [\frac{(1-\beta)^2}{24}.\frac{\alpha^2}{(f/K)^{1-\beta}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]t_{ex} + \ldots). \end{aligned}$$

Ici,

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{(1-\beta)/2}\log(f/K),$$

et $x(z)$ est définie par

$$x(z) = \log(\frac{\sqrt{1 - 2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - \rho}).$$

On a

$$\partial_f z = \frac{\nu K^{\frac{1-\beta}{2}}\beta^{\frac{-1-\beta}{2}}(\frac{1-\beta}{2}\log(f/K) + 1)}{\alpha}.$$

### 5.4.1 Le risque Delta

Notons

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}(1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2(f/K)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K)+\ldots)} \\
b &= 1+[\frac{(1-\beta)^2}{24}.\frac{\alpha^2}{(f/K)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{(1-\beta)/2}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]t_{ex}. \\
c &= (\frac{z}{x(z)}) \\
g(z) &= \frac{1}{x(z)}.
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
\partial_f &= [\frac{-\alpha^2(1-\beta)^3}{24K^(1-\beta)f^(2-\beta)}+\frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}}\frac{\beta-1}{2f^{\frac{(3-\beta)}{2}}}]t_{ex}. \qquad (5.1)\\
\partial_f g &= \partial_z g \partial_f z. \\
\partial_z g &= \frac{1}{\log(\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho-\log(1-\rho)}. \\
&= frac{-}1(\sqrt{1-2\rho z+z^2})x(z)^2.
\end{aligned}
$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
\partial_f \frac{1}{x(z)} &= \frac{1}{1-2\rho z+z^2}.\partial_f z. \\
\partial_f \frac{z}{x(z)} &= \partial_z \frac{z}{x(z)} \partial_f z. \\
&= \partial_z(z.g(z)).\partial_f z. \\
\partial_f b &= -\frac{\alpha}{K^{\frac{1-\beta}{2}}}[\frac{(1-\beta)f^{\frac{-1-\beta}{2}}}{2}(1+\frac{(1-\beta)^2\log^2(f/K)}{24} \\
&+ \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K))+f^{\frac{-1-\beta}{2}}(\frac{(1-\beta)^2\log(f/K)}{12}+\frac{(1-\beta)^4\log^3(f/K)}{480})].
\end{aligned}
$$

Parsuite, on conclut en écrivant que

$$\partial_f \sigma_B = (\partial_f a)bc + (\partial_f b)ac + (\partial_f c)ab.$$

### 5.4.2 Le risque $Vanna$

Le calcul des dérivées de la volatilité implicite $Black - Scholes$ donne

$$
\begin{aligned}
Vanna &= \partial_\rho V_{call} \\
&= \partial_{\sigma_B} BS.\partial_\rho \sigma_B \\
\partial_\rho a &= 0 \\
\partial_\rho b &= [\frac{\beta\nu\alpha}{4(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}}-\frac{\rho\nu^2}{4}]\tau_{ex} \\
\partial_\rho c &= \partial_\rho \frac{z}{x(z)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z.\partial_\rho \frac{1}{x(z)} \\
&= z.\frac{\partial_\rho(-x(z))}{x(z)^2} \\
&= \frac{z}{x(z)^2}[\frac{z+\sqrt{1-2\rho z+z^2}}{1-2\rho z+z^2+(z-\rho)\sqrt{1-2\rho z+z^2}} - \frac{1}{1-\rho}].
\end{aligned}
$$

### 5.4.3 Le risque $Volga$

On a

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu a &= 0 \\
\partial_\nu b &= [\frac{\beta\nu\alpha}{4(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}} + \frac{(2-3\rho^2)\nu}{12}]\tau_{ex} \\
\partial_\nu c &= \partial_\nu \frac{z}{x(z)} \\
&= \partial_z \frac{z}{x(z)}.\partial_\nu z \\
&= (g(z)+z\partial_z g(z))\frac{(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}\log(f/K)}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

### 5.4.4 Le risque $Vega$

On a

$$
\begin{aligned}
Vega &= \partial_\alpha V_{call} \\
&= \partial_{\sigma_B} BS.\partial_\alpha \sigma_B \\
\partial_\alpha a &= \frac{a}{\alpha} \qquad (5.2) \\
\partial_\alpha z &= -\frac{\nu(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}\log(f/K)}{\alpha^2} \\
\partial_\alpha b &= [\frac{(1-\beta)^2\alpha}{12(fK)^(1-\beta)} + \frac{\rho\beta\nu}{4(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}}]\tau_{ex}.
\end{aligned}
$$

# Appendix A

# Analyse du modèle SABR

On utilise les techniques de la perturbation singulière pour pricer une Option Européennes sous le modèle SABR. Notre analyse est basée sur une volatilité $\alpha$ et une *volvol* $\nu$ assez petites. On introduit alors un paramètre $\epsilon << 1$ et on reécrit le modèle SABR sous la forme

$$\begin{aligned} dF &= \epsilon\,\alpha\,C(F)\,dW_1 && \text{(A.1)} \\ d\alpha &= \epsilon\,\nu\,\alpha\,dW_2, && \text{(A.2)} \\ & && \text{(A.3)} \end{aligned}$$

avec

$$dW_1\,dW_2 = \rho\,dt.$$

Afin d'obtenir les résultats concernant le modèle originel, on fait tendre $\epsilon$ vers l'infini.

## A.1 Cadre général

On utilisera l'équation *forward* de Kolmogorov pour simplifier le problème de pricing de l'Option en question. On suppose que l'état du marché financier correspond à $F(t) = f$ et $\alpha(t) = \alpha$ à une date $t$. On définit la densité de probabilité $p(t, f, \alpha; T, F, A)$ par

$$p(t, f, \alpha; T, F, A)\,dF\,dA = prob(F < F(T) < F + dF,\ A < \alpha(T) < A + dA | F(T) = f,\ \alpha(t) = \alpha).$$

Etant une fonction des variables *forward* $T$, $F$ et $A$, la densité $p$ satisfait l'équation *forward* de Kolmogorov

$$p_T = \frac{1}{2}\epsilon^2\,A^2[C^2(F)p]_{FA} + \frac{1}{2}\epsilon^2\,\nu^2[A^2 p]_{AA}$$

pour T>t, avec

$$p = \delta(F - f)\delta(A - \alpha)$$

à $t = T$.

Soit $V(t, f, \alpha)$ la valeur, en $t$, d'un *Call* Européen, le marché financier indiquant que $F(t) = f$ et que $\alpha(t) = \alpha$. Soient $t_{ex}$ la date d'exercice du *Call* et $K$ son *Strike*. En omettant le *discount* facteur $D(t_{set})$, la valeur du *Call* serait

$$\begin{aligned} V(t, f, \alpha) &= E([F(t_{ex}) - K]_+ | F(t) = F, \alpha(t) = \alpha) && \text{(A.4)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{K}^{\infty} (F - K)\,p(t, f, \alpha; t_{ex}, F, A)\,dF\,dA. && \text{(A.5)} \end{aligned}$$

Comme

$$p(t, f, \alpha; t_{ex}, F, A) = \delta(F - f)\delta(A - \alpha) + \int_t^{t_{ex}} p_T(t, f, \alpha; T, F, A)\, dT,$$

on peut réécrire $V(t, f, \alpha)$ sous la forme

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]_+ + \int_t^{t_{ex}} \int_K^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F - K)\, p_T(t, f, \alpha; T, F, A)\, dA\, dF\, dT.$$

En intégrant par rapport à la variable $A$, on obtient que

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]^+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 \int_t^{t_{ex}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_K^{infty} A^2 (F - K)\, [C^2(F)p]_{FF}\, dF\, dA\, dT$$

où on a interverti l'ordre d'intégration. Deux intégrations par partie par rapport à la variable $F$ impliquenet que

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon^2\, C^2(K) \int_t^{t_{ex}} \int_{-\infty}^{\infty} A^2\, p(t, f, \alpha; T, K, A)\, dA\, dT.$$

Le problème peut encore être simplifié en définissant

$$P(t, f, \alpha; T, K) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2\, p(t, f, \alpha; T, K, A)\, dA.$$

Alors, $P$ vérifie l'équation *backward* de Kolmogorov

$$\begin{aligned} P_t + \frac{1}{2}\epsilon^2\alpha^2\, C^2(f)\, P_{ff} + \epsilon^2\rho\nu\alpha^2\, P_{f\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon^2\nu^2\alpha^2\, P_{\alpha\alpha} &= 0 && \text{(A.6)} \\ P &= \alpha^2\delta(f - K). && \text{(A.7)} \end{aligned}$$

Comme $t$ n'apparait pas explicitement dans cette équation, $P$ dépent uniquement de $T - t$, et non de $t$ ou $T$ séparemment. On définit alors

$$\begin{aligned} \tau &= T - t && \text{(A.8)} \\ \tau_{ex} &= t_{ex} - t. && \text{(A.9)} \end{aligned}$$

La formule de pricing devient alors

$$V(t, f, \alpha) = [f - K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K) \int_0^{\tau_{ex}} P(\tau, f, \alpha; K)\, d\tau$$

où $P(\tau, f, \alpha; K)$ est la solution du problème

$$\begin{aligned} P_\tau &= \frac{1}{2}\epsilon^2\alpha^2\, C^2(f)\, P_{ff} + \epsilon^2\rho\nu\alpha^2\, P_{f\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon^2\nu^2\alpha^2\, P_{\alpha\alpha} && \text{(A.10)} \\ P &= \alpha^2\delta(f - K). && \text{(A.11)} \end{aligned}$$

Une première démarche consiste à résoudre ce problème pour obtenir le prix de l'option $V(t, f, \alpha)$. Mais la formule trouvée n'est pas facile à utiliser. Pour ça, la deuxième approche consiste à calculer le prix de l'Option en question sous le modèle *normal*

$$dF = \sigma_N dW,$$

puis, en égalisant les deux prix, ou encore en calibrant les deux modèles; SABR et *normal*, trouver la volatilité *normale* nécessaire $\sigma_N$ pour retrouver le prix donné par le modèle SABR. On trouve ainsi la volatilité implicite *normale* du *Call* sous le modèle SABR. Une deuxième calibration du modèle *normal* à celui $log - normal$

$$dF = \sigma_B F\, dW$$

nous permet de trouver la volatilité implicite usuelle $Black - Scholes$ donnat le prix du $Call$ sous le modèle SABR. On peut ainsi quoter le $Call$ Européen évalué sous le modèle SABR en terme de volatilité implicite $Black - Scholes$.

## A.2 Perturbations singulières

L'utilisation d'une perturabation met en valeur une densité gaussienne

$$P = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\epsilon^2 C^2(K)\tau}}\, e^{-\frac{(f-K)^2}{2\epsilon^2\alpha^2 C^2(K)\tau}}\,(1+\ldots).$$

Comme le terme $+\ldots$ contients des puissances de $(f-K)/\epsilon\alpha C(K)$, cette exprexxion croît au fur et à mesure que $(f-K)C'(K)/C(K)$ devient non négligeable devant 1; i.e. au fur et à mesure que $C(f)$ et $C(K)$ deviennent sensiblement différents. Une meilleure approche est d'utiliser

$$P = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\epsilon^2 C^2(K)\tau}}\, e^{-\frac{(f-K)^2}{2\epsilon^2\alpha^2 C^2(K)\tau}\,(1+\ldots)}.$$

On peut encore raffiner cette approche en notant que l'exposant ci-dessus s'écrit encore comme intégrale

$$\frac{(f-K)^2}{2\epsilon^2\alpha^2 C^2(K)\tau}\,(1+\ldots) = \frac{1}{2\tau}(\frac{1}{\epsilon\alpha}\int_K^f \frac{df'}{C(f')})^2(1+\ldots).$$

On définit alors une nouvelle variable

$$z = \frac{1}{\epsilon\alpha}\int_K^f \frac{df'}{C(f')},$$

alors, la solution $P$ est essentiellemnt $e^{-z^2/2}$. La densité est alors gaussienne par rapport à la variable $z$, qui détermine qualitativement combien il est “facile” ou bien “diificile” de diffuser de $K$ à $f$. Par trancature des moments supérieurs à $z^2$, on obtient une solution à $O(\epsilon^2)$ près. Reprenons le changement de variable de $f$ à

$$z = \frac{1}{\epsilon\alpha}\int_K^f \frac{df'}{C(f')},$$

on pose alors,

$$B(\epsilon\alpha z) = C(f).$$

Alors,

$$\frac{\partial}{df} \longmapsto \frac{1}{\epsilon\alpha C(f)}\frac{d}{dz}, \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial}{d\alpha} \longmapsto \frac{d}{d\alpha} - \frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}, \tag{A.13}$$

et

$$\frac{\partial^2}{df^2} \longmapsto \frac{1}{\epsilon^2\alpha^2 B^2(\epsilon\alpha z)}(\frac{d^2}{dz^2} - \epsilon\alpha\frac{B'(\epsilon\alpha}{B(\epsilon\alpha z)}\frac{d}{dz}), \tag{A.14}$$

$$\frac{\partial^2}{df\,d\alpha} \longmapsto \frac{1}{\epsilon\alpha B(\epsilon\alpha z)}(\frac{d^2}{dzd\alpha} - \frac{z}{\alpha}\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dz}), \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial^2}{d\alpha^2} \longmapsto \frac{d}{\alpha^2} - \frac{2z}{\alpha}\frac{d^2}{dzd\alpha} + \frac{z^2}{\alpha^2}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2z}{\alpha^2}\frac{d}{dz}. \tag{A.16}$$

Et aussi

$$\delta(f-K) = \delta(\epsilon\alpha z C(K)) = \frac{1}{\epsilon\alpha z C(K)}\delta(z).$$

On aura alors

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon^2 C^2(K)\int_0^{\tau_{ex}} P(\tau,z,\alpha)\,d\tau,$$

où $P(\tau, z\alpha)$ est solution de

$$P_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2 z^2)P_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon a\frac{B}{B'}P_z + (\epsilon\rho\nu - \epsilon^2\nu^2 z)(\alpha P_{z\alpha} - P_z) + \frac{1}{2}\epsilon^2\nu^2\alpha^2 P_{\alpha a}$$

pour $\tau > 0$ et

$$P = \frac{\alpha}{\epsilon C(K)}\delta(z)$$

pour $\tau = 0$. Si on définit $\Pi(\tau, z, \alpha)$ par

$$\Pi = \frac{\epsilon}{\alpha}C(K)P,$$

on obtient, en terme de $\Pi$,

$$V(t,f,\alpha) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha C(K)\int_0^{\tau_{ex}} \Pi(\tau,z,\alpha)d\tau,$$

où $\Pi(\tau, z, \alpha)$ est solution de

$$\Pi_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2 z^2)\Pi_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon a\frac{B}{B'}\Pi_z + (\epsilon\rho\nu - \epsilon^2\nu^2 z)(\alpha\Pi_{z\alpha} - P_z) + \frac{1}{2}\epsilon^2\nu^2(\alpha^2\Pi_{\alpha\alpha} + 2\alpha\Pi_\alpha)$$

pour $\tau > 0$ et

$$\Pi = \delta(z)$$

pour $\tau = 0$.

L'étape suivante serait de transformer ce dernier problème, modulo $O(\epsilon^2)$, en un problème de diffusion classique $\Pi_\tau = \frac{1}{2}\Pi_{zz}$ avec $\Pi = \delta(z)$ pour $\tau = 0$. Notons qu'on peut écrire, modulo un $O(epsilon^2)$,que

$$\Pi(\tau,z,\alpha) = \Pi_0(\tau,z) + \Pi_1(\tau,z,\alpha).$$

Par conséquent, les dérivées $\Pi_{z\alpha}$, $\Pi_{\alpha\alpha}$ et $\Pi_\alpha$ sont de l'ordre d'un $O(\epsilon)$. Rappelons que notre but est de déterminer $\Pi$ modulo un $O(epsilon^2)$, soit en d'autres termes, d'approcher $\Pi$. Dans le cadre de cette approximation le problème à résoudre se réecrit sous la forme suivante

$$\Pi_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2 z^2)\Pi_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon a\frac{B}{B'}\Pi_z + \epsilon\rho\nu\alpha\Pi_{z\alpha}$$

pour $\tau > 0$ et

$$\Pi = \delta(z)$$

pour $\tau = 0$.

Essayons d'éliminer le terme en $\frac{1}{2}\epsilon a\frac{B'}{B}\Pi_z$. On définit $H(\tau, z, \alpha)$ par

$$\Pi = \sqrt{C(f)/C(K)}\,H = \sqrt{B(\epsilon\alpha z)/B(0)}\,H.$$

alors,

$$\begin{aligned}
\Pi_z &= \sqrt{B(\epsilon\alpha z)/B(0)}(H_z + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\frac{B'}{B}H),\\
\Pi_{zz} &= \sqrt{B(\epsilon\alpha z)/B(0)}(H_{zz} + \epsilon\alpha\frac{B'}{B}H_z + \epsilon^2\alpha^2[\frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2}]H),\\
\Pi_{z\alpha} &= \sqrt{B(\epsilon\alpha z)/B(0)}(H_{z\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\frac{B'}{B}H + O(\epsilon^2)).
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Le prix d'option devient alors

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\sqrt{B(\epsilon\alpha z)B(0)}\int_0^{\tau_{ex}} H(\tau,z,\alpha)d\tau,$$

où

$$H_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2z^2)H_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon^2\rho\nu\alpha\frac{B'}{B}(zH_z - H) \tag{A.18}$$

$$+\epsilon^2\alpha^2(\frac{1}{4}\frac{B''}{B} - \frac{3}{8}\frac{B'^2}{B^2})H + \epsilon\rho\nu\alpha(H_{z\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\frac{B'}{B}H_\alpha) \tag{A.19}$$

pour $\tau > 0$ et $H = \delta(z)$ pour $\tau = 0$.

Ces deux dernières équations sont indépendantes de la variable $\alpha$ au premier ordre, et, modulo $O(\epsilon)$, leur dépendance en la variable $\alpha$ se restreint au dernier terme

$$\epsilon\rho\nu\alpha(H_{z\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\frac{B'}{B}H_\alpha).$$

Comme les dérivées $H_\alpha$ et $H_{z\alpha}$ sont de l'ordre d'un $O(\epsilon)$, ce dernier terme est de l'ordre d'un $O(\epsilon^2)$. Donc, modulo un $O(\epsilon^2)$, $H$ est indépendant de la variable $\alpha$ ce qui implique que

$$H_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2z^2)H_{zz} - \frac{1}{2}\epsilon^2\rho\nu\alpha\frac{B'}{B}(zH_z - H) + \epsilon^2\alpha^2(\frac{1}{4}\frac{B''}{B} - \frac{3}{8}\frac{B'^2}{B^2})H$$

pour $\tau > 0$ et $H = \delta(z)$ pour $\tau = 0$.

Il n'y a plus de dérivée par rapport à $\alpha$, et on peut considérer $\alpha$ comme un paramètre au lieu d'une variable indépendante, et on a ainsi réussi à réduire le problème en question à une seule dimension.

On peut maintenant éliminer le terme $H_z$ comme un $O(\epsilon^2)$. En effet, comme $B'(\epsilon\alpha z)/B(\epsilon\alpha z)$ et $B''(\epsilon\alpha z)/B(\epsilon\alpha z)$ sont constants, on peut les remplacer par les rations

$$b_1 = B'(\epsilon\alpha z_0)/B(\epsilon\alpha z_0), \tag{A.20}$$

$$b_2 = B''(\epsilon\alpha z_0)/B(\epsilon\alpha z_0), \tag{A.21}$$

avec un terme d'erreur de $O(\epsilon)$, la constante $z_0$ sera fixer dans la suite. On définit $\Psi$ par

$$H = e^{\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2/4}\,\Psi.$$

Le prix d'option devient

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}e^{\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2/4}\int_0^{\tau_{ex}} \Psi(\tau,z)d\tau,$$

où $\Psi$ est solution de

$$\Psi_\tau = \frac{1}{2}(1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2z^2)\Psi_{zz} + \epsilon^2\alpha^2(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2)\Psi + \frac{3}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1\Psi$$

pour $\tau > 0$ et $H = \delta(z)$ pour $\tau = 0$. On définit alors

$$x = \frac{1}{\epsilon\nu}\int_0^{\epsilon\nu z}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}} = \frac{1}{\epsilon\nu}\log(\frac{\sqrt{1-2\epsilon\rho\nu z+\epsilon^2\nu^2z^2}-\rho+\epsilon\nu z}{1-\rho}),$$

qu'on peut définir implicitement par

$$\epsilon\nu z = sinh(\epsilon\nu x) - \rho(cosh(\epsilon\nu x) - 1).$$

En terme de $x$, notre problème est le suivant

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}e^{\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2/4}\int_0^{\tau_{ex}}\Psi(\tau,x)d\tau,$$

avec

$$\Psi_\tau = \frac{1}{2}\Psi_{xx} - \frac{1}{2}\epsilon\nu I'(\epsilon\nu z)\,\Psi_x + \epsilon^2\alpha^2(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2)\Psi + \frac{3}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1\Psi$$

pour $\tau > 0$ et $H = \delta(x)$ pour $\tau = 0$. Signalons qu'ici, on désigne par $I$ la fonction

$$I(\zeta) = \sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2}.$$

L'étape finale consiste à définir $Q$ par

$$\Psi = \sqrt{I(\epsilon\nu z(x))}Q = (1 - 2\epsilon\rho\nu z + \epsilon^2\nu^2 z^2)^{1/4}\,Q.$$

Alors,

$$\Psi_x = \sqrt{I(\epsilon\nu z)}[Q_x + \frac{1}{2}\epsilon\nu I'(\epsilon\nu z)Q] \tag{A.22}$$

$$\Psi xx = \sqrt{I(\epsilon\nu z)}[Q_{xx} + \epsilon\nu I' Q_x + \epsilon^2\nu^2(\frac{1}{2}I'' I + \frac{1}{4}I'^2)Q], \tag{A.23}$$

et donc

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}\,I^{1/2}e^{\frac{1}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2}\int_0^{\tau_{ex}} Q(\tau,x)d\tau,$$

où $Q$ est solution de

$$Q_\tau = \frac{1}{2}Q_{xx} + \epsilon^2\nu^2[\frac{1}{4}I''I - \frac{1}{8}I'^2]Q + \epsilon^2\alpha^2(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2)Q + \frac{3}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 Q$$

pour $\tau > 0$, avec $Q = \delta(x)$ pour $\tau = 0$. D'ailleurs, nous pouvant remplacer les termes $I(\epsilon\nu z)$, $I'(\epsilon\nu z)$ et $I''(\epsilon\nu z)$ par les constantes $I(\epsilon\nu z_0)$, $I(\epsilon\nu z_0)$ et $I(\epsilon\nu z_0)$ modulo une erreur de l'ordre d'un $O(\epsilon)$. Définissons la constante $k$ par

$$k = \nu^2(\frac{1}{4}I''(\epsilon\nu z_0)I'(\epsilon\nu z_0) - \frac{1}{8}I'^2(\epsilon\nu z_0)) + \alpha^2(\frac{1}{4}b_2 - \frac{3}{8}b_1^2) + \frac{3}{4}\rho\nu\alpha b_1,$$

où $z_0$ est à choisir dans une étape prochaine. Alors, modulo un $O(\epsilon^2)$, notre équation est réduite à

$$Q_\tau = \frac{1}{2}Q_{xx} + \epsilon^2 kQ \tag{A.24}$$

$$Q = \delta(x) \tag{A.25}$$

La solution de ce problème est connue

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-x^2/2\tau}\,e^{\epsilon^2 k\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-x^2/2\tau}\,\frac{1}{(1 - \frac{2}{3}k\epsilon^2\tau + \ldots)^{3/2}}$$

modulo un $O(\epsilon^2)$. Le prix de l'option devient alors

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\epsilon\alpha\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}\,I^{1/2}e^{\frac{1}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2}\int_0^{\tau_{ex}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-x^2/2\tau}\,e^{\epsilon^2 k\tau}d\tau.$$

Notons que cette formule peut être réécrite sous la forme suivante

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\frac{f-K}{x}\int_0^{\tau_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau}\, e^{\epsilon^2\theta}\, e^{\epsilon^2 k\tau} d\tau,$$

où

$$\epsilon^2\theta = \log(\frac{\epsilon\alpha z}{f-K}\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}) + \log(\frac{xI^{1/2}(\epsilon\alpha z)}{z} + \frac{1}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2.$$

D'autre part, en remarquant que

$$e^{\epsilon^2 k\tau} = \frac{1}{(1-\frac{2}{3}ki\epsilon^2\tau)^{3/2}} = \frac{1}{(1-2\epsilon^2\tau\frac{\theta}{x^2})^{3/2}} + O(\epsilon^4),$$

le prix de l'option devient

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{1}{2}\frac{f-K}{x}\int_0^{\tau_{ex}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-x^2/2\tau}\, e^{\epsilon^2\theta} \frac{d\tau}{(1-2\epsilon^2\tau\frac{\theta}{x^2})^{3/2}},$$

suivi par un changement de variable $q = \frac{x^2}{2\tau}$ dans l'intégrale

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{|f-K|}{4\pi}\int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}}}^{\infty} \frac{e^{-q+\epsilon^2\theta}}{(q-\epsilon^2\theta)^{3/2}} dq.$$

Pour résumer, on dira que le prix d'un *Call* Européen, évalué par le modèle SABR, est donné par

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{|f-K|}{4\pi}\int_{\frac{x^2}{2\tau_{ex}}-\epsilon^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq,$$

avec, modulo un $O(\epsilon^2)$

$$\epsilon^2\theta = \log(\frac{\epsilon\alpha z}{f-K}\sqrt{B(0)B(\epsilon\alpha z)}) + \log(\frac{xI^{1/2}(\epsilon\alpha z)}{z} + \frac{1}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha b_1 z^2.$$

## A.3 Volatilité *normale* équivalente

Pour rendre cette dernière formule utilisable, on la converti en une volatilité *normale* équivalente, puis en terme de volatilité *standard* ou encore volatilté implicite $Black - Scholes$.

Suivant le même raisonnement précédant appliqué de nouveau au modèle *normal*

$$dF = \sigma_N dW \tag{A.26}$$
$$F(0) = f, \tag{A.27}$$

où la volatilité $\sigma_N$ est constante et non stochastique. Le prix d'un *Call* Européen, évalué sous le modèle *Normal*, est exactement

$$V(t,f,a) = [f-K]_+ + \frac{|f-K|}{4\pi}\int_{\frac{(f-K)^2}{2\sigma_N^2\tau_{ex}}}^{\infty} \frac{e^{-q}}{q^{3/2}} dq.$$

Ceci nous permet ad'avoir une formule fermée du prix du *Call*

$$V(t,f) = (f-K)\, N(\frac{f-K}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}) + \sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}\, G(\frac{f-K}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}),$$

où $N$ est le distribution normale est $G$ est la densité gaussienne

$$G(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/2}.$$

Il est clair que le prix de l'option sous le modèle *normal* est égal à celui donné par le modèle SABR si et seulement si la volatilité *normale* vérifie

$$\frac{1}{\sigma_N^2} = \frac{x^2}{(f-K)^2}[1 - 2\epsilon^2 \frac{\theta}{x^2}\tau_{ex}].$$

Modulo un $O(\epsilon^2)$, la volatilité *normale* implicite est donnée par

$$\sigma_N = \frac{f-K}{x}[1 + \epsilon^2 \frac{\theta}{x^2}\tau_{ex} + \ldots].$$

On a besoin alors d'une approximation correcte modulo $O(\epsilon^2)$. Comme $x = z[1+O(\epsilon)]$, on peut réécrire l'expression précédante comme

$$\sigma_N = (\frac{f-K}{z})(\frac{z}{x(z)})[1 + \epsilon^2(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)\tau_{ex} + \ldots],$$

où

$$\frac{f-K}{z} = \frac{\epsilon\alpha(f-K)}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}} \tag{A.28}$$

$$= (\frac{1}{f-K}\int_K^f \frac{df'}{\epsilon\alpha C(f')})^{-1}. \tag{A.29}$$

Ce facteur représente la difficulté moyenne de diffusion, partant du cours *forward* d'aujourd'hui $f$ vers le *Stike* $K$. Le facteur suivant est

$$\frac{z}{x(z)} = \frac{\zeta}{\log(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}-\rho+\zeta}{1-\rho})},$$

où

$$\zeta = \epsilon\nu z = \frac{\nu\alpha}{} \int_K^f \frac{df'}{C(f')} = \frac{\nu}{\alpha}\frac{f-K}{C(f_{av})}[1 + O(\epsilon^2)].$$

Le terme $f_{av} = \sqrt{fK}$ est la moyenne géométrique de $ff$ et $K$.

Les coefficients $\phi_1$, $\phi_2$ et $\phi_3$ sont des termes de corrections, verifiant, modulo un $O(\epsilon^2)$

$$\epsilon^2\phi_1 = \frac{1}{z^2}\log(\frac{\epsilon\alpha z}{f-K}\sqrt{C(f)C(K)}) = \frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2}{24}\epsilon^2\alpha^2 C^2(f_{av}) + \ldots \tag{A.30}$$

$$\epsilon^2\phi_2 = \frac{1}{z^2}\log(\frac{x}{z}[1 - 2\epsilon\rho\nu z + \epsilon^2\nu^2 z^2]^{1/4}) = \frac{2-3\rho^2}{24}\epsilon^2\nu^2 + \ldots \tag{A.31}$$

$$\epsilon^2\phi_3 = \frac{1}{4}\epsilon^2\rho\alpha\nu\frac{B'(\epsilon\nu z_0)}{B(\epsilon\nu z_0)} = \frac{1}{4}\epsilon^2\rho\nu\alpha\gamma_1 C(f_{av}) + \ldots \tag{A.32}$$

où

$$\gamma_1 = \frac{C'(f_{av})}{C(f_{av}}, \tag{A.33}$$

$$\gamma_2 = \frac{C''(f_{av})}{C(f_{av}}. \tag{A.34}$$

Pour résumer, on rappelle que, sous le modèle *Normal*, le prix d'un *Call* Européen est donné par la formule

$$V(t,f) = (f-K)\,N(\frac{f-K}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}) + \sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}\,G(\frac{f-K}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}).$$

Sous le modèle SABR, ce prix est donné par le même formule , modulo un $O(\epsilon^2)$, pourvu qu'un utilise la volatilité *normale* implicite

$$\sigma_N(K) = \frac{\epsilon\alpha(f-K)}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}}.(\frac{\zeta}{x(\zeta)}). \tag{A.35}$$

$$[1 + (\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2}{24}\alpha^2 C^2(f_{av}) + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma_1 C(f_{av}) \tag{A.36}$$

$$+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2)\epsilon^2\tau_{ex} + \ldots], \tag{A.37}$$

avec

$$x(\zeta) = \log(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}-\rho+\zeta}{1-\rho}).$$

Les deux premiers facteurs dans l'expression de $\sigma_N$ déterminent son comportement dominant, avec un résidu dû au facteur $1+[\ldots]\epsilon^2\tau_{ex}$ pour une correction de l'ordre de 1

On peut étudier de même le cas du *Put* par la parité *Call − Put*. En effet, le prix d'un *Put* européen sous le modèle SABR est donné par

$$V(t,f) = (K-f)\,N(\frac{K-f}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}) + \sigma_N\sqrt{\tau_e x}\,G(\frac{K-f}{\sigma_N\sqrt{\tau_{ex}}}),$$

où la volatilité *normale* implicite est donnée par la même formule que le *Call*.

## A.4 Volatilité *Black − Scholes* équivalente

Il est préférable de quoter les prix en terme de volatilité *Black − Scholes*. On rappelle que le prix d'un *Call* de *Strike* $K$ et de temps d'exercice $\tau_{ex}$, sous le modèle *log − normal*, est donné par

$$V_{Call} = fN(d_1) - KN(d_2),$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\log(f/K) \pm \frac{1}{2}\epsilon^2\sigma_{BS}^2\tau_{ex}}{\epsilon\sigma_{BS}\sqrt{\tau_{ex}}},$$

où on a omis le facteur d'actualisation $D(t_{set})$.

La calibration du modèle *Normal* à celui *log − norma* implique que, modulo un $O(\epsilon^2)$

$$\sigma_N(K) = \frac{\epsilon\sigma_{BS}(f-K)}{\log(f/K)}(1 - \frac{1}{24}\epsilon^2\sigma_{BS}^2\tau_{ex} + \ldots).$$

La volatilité *Black − Scholes* implicite est alors donnée par

$$\sigma_{BS}(K) = \frac{\alpha\log(f/K)}{\int_K^f \frac{df'}{C(f')}}.(\frac{\zeta}{x(\zeta)}). \tag{A.38}$$

$$[1 + (\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2+1/f_{av}^2}{24}\alpha^2C^2(f_{av}) + \frac{1}{4}\rho\nu\alpha\gamma_1 C(f_{av}) + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2)\epsilon^2\tau_{ex} + \ldots]. \tag{A.39}$$

C'est la volatilité *Black − Scholes* donnant, par la formule *standard* fermée due à *Black* et *Scholes* du prix d'un *Call* Européen, le prix prédit par le modèle SABR de l'option en question.

## A.5 Modèle SABR

C'est un cas particulier de l'analyse déjà faite. En effet, il suffit de remplacer $C(f)$ par $f^\beta$ dans les formules déjà établies. Remarquons que

$$f - K = \sqrt{fK}\log(f/K)[1 + \frac{1}{24}\log^2(f/K) + \frac{1}{1920}\log^4(f/K) + \ldots]$$

De même,

$$f^{1-\beta} - K^{1-\beta} = (1-\beta)(fK)^{(1-\beta)/2}\log(f/K)[1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2(f/K) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K) + \ldots]$$

La volatilité implicite $Black - Scholes$ relative au prix SABR est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}(K) &= \frac{\epsilon\alpha}{(fK)^(1-\beta)/2}\frac{1}{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2(f/K) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4(f/K) + \ldots}.(\frac{\zeta}{x(\zeta)}). && \text{(A.40)} \\ & [1 + (\frac{(1-\beta)^2\alpha^2}{24(fK)^{1-\beta}} + \frac{\rho\alpha\nu\beta}{4(fK)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2)\epsilon^2\tau_{ex} + dots]. && \text{(A.41)} \end{aligned}$$

## A.6 Deux cas particuliers

On peut ainsi pousser l'approximation modulo $O(\epsilon^4)$ pour le modèle $normal\ stochastique$ ($\beta = 0$) et le modèle $log - normal\ stochastque$ ($\beta = 1$). En effet, pour le modèle $stochastique\ normal$, on trouve que

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \epsilon\alpha(1 + \frac{2-3\rho^2}{24}\epsilon^2\nu^2\tau_{ex} + \ldots) && \text{(A.42)} \\ \sigma_{BS}(K) &= \epsilon\alpha\frac{\log(f/K)}{f-K}.(\frac{\zeta}{x(\zeta)}).(1 + [\frac{\alpha^2}{24fK} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2]\epsilon^2\tau_{ex} + \ldots) && \text{(A.43)} \end{aligned}$$

Pour le modèle $stochastique\ log - normal$ ($\beta = 1$),les volatilites implicites sont données par

$$\begin{aligned} \sigma_N(K) &= \epsilon\alpha\frac{f-K}{\log(f/K)}.(\frac{\zeta}{x(\zeta)}).(1 + [\frac{-\alpha^2}{24} + \frac{\rho\alpha\nu}{4} + \frac{(2-3\rho^2)\nu^2}{24}]\epsilon^2\tau_{ex} + \ldots) && \text{(A.44)} \\ \sigma_{BS} &= \epsilon\alpha.(frac\zeta x(\zeta)).(1 + [\frac{\rho\alpha\nu}{4} + \frac{1}{24}(2-3\rho^2)\nu^2]\epsilon^2\tau_{ex} + \ldots). \end{aligned}$$

# Bibliography

[1] Claude Delannoy. Exercices en langage c++ programmation orientée objet. *Eyrolles*, 1992.

[2] L. Martellini et P. Priaulet. Produits de taux d'intérêt: méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture. *Economica*, 2000.

[3] Ivor Horton. Begining c++ the complete language. *Wrox press*, 1998.

[4] Nicole El Karoui. Couverture des risques dans les marchés financiers. *Cours de DEA. Paris VI*, 2003.

[5] Hagan. Kumar. Lesniewski and Woodward. Managing smile risk. Technical report, BNP paribas et Société Générale.