Calibration en finance : Mélange de modèles de Black-Scholes

KHELDOUNI Mohammed-Amine

Octobre 2016 - février 2017 **ENPC**

Encadré par : Bernard LAPEYRE, Professeur à l'Ecole des Ponts ParisTech et Chercheur au CERMICS

Objectifs

- Comprendre comment évaluer le prix d'un sous-jacent avec une modélisation mathématique du marché.
- Confronter le modèle à ses limites en terme de calibration financière.
- Appliquer des notions stochastiques à la finance et connaître l'utilité de tels modèles.

Notions financières

- Une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur.
- T est la maturité ou l'échéance. C'est la date à laquelle une opération doit être réalisée.
- S_t : L'actif sous-jacent à l'instant t est l'actif sur lequel porte une option.
- r : Le taux d'intérêt.
- σ : La volatilité, elle indique l'ampleur des variations du cours d'un actif financier.
- K : Le strike désigne le prix d'exercice d'une option, qui correspond au prix fixé dans le contrat pour l'acquisition ou la cession du sous-jacent.
- *Call* : Option d'achat d'un instrument financier.
- *Put* : Option de vente de cet instrument.

Mise en situation

Etant donné les paramètres σ, T, K, S_0 et r on voudrait calculer le prix d'un call ou d'un put sur le marché, pour un actif financier.
Pour cela, on admet le modèle de BLACK-SCHOLES, qui donne sous certaines hypothèses le pix d'un *Call* ou d'un *Put*. Ce modèle est démontré dans le livre de John HULL sur le modèle de BLACK-SCHOLES.

Nous n'allons donc pas nous atarder sur la démonstration des modèles mathématiques sur lesquels se base la prédiction d'actifs financiers ou la calibration en finance. Néanmoins, nous montrons au fil de ce projet l'importance de tels modèles et la richesse de leur application dans le domaine de la finance.
Enfin, les figures et les résultats d'optimisation qui suivent sont issus d'un code SCILAB disponible sur GitHub : `https://github.com/AmineKheldouni/MOPSI-Project`

Modèles de Black-Scholes et problèmes de calibration

Modèle de Black-Scholes

Dans ce modèle, on considère le prix de l'action comme un processus stochastique en temps continu S_t et suit certaines hypothèses.

Equation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec W_t Un mouvement Brownien standard.
Le prix d'un *Call* est caractérisé par son *payoff* $(S_T - K)_+$.
Le modèle fournit la formule de BLACK-SCHOLES d'un *Call* (resp. d'un *Put*) :

$$C(S_0, K, r, t, \sigma) = S_0\phi(d_1) - K \times e^{-rt}\phi(d_2)$$
$$P(S_0, K, r, t, \sigma) = -S_0\phi(-d_1) + K \times e^{-rt}\phi(-d_2)$$

Avec :

- ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t)$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

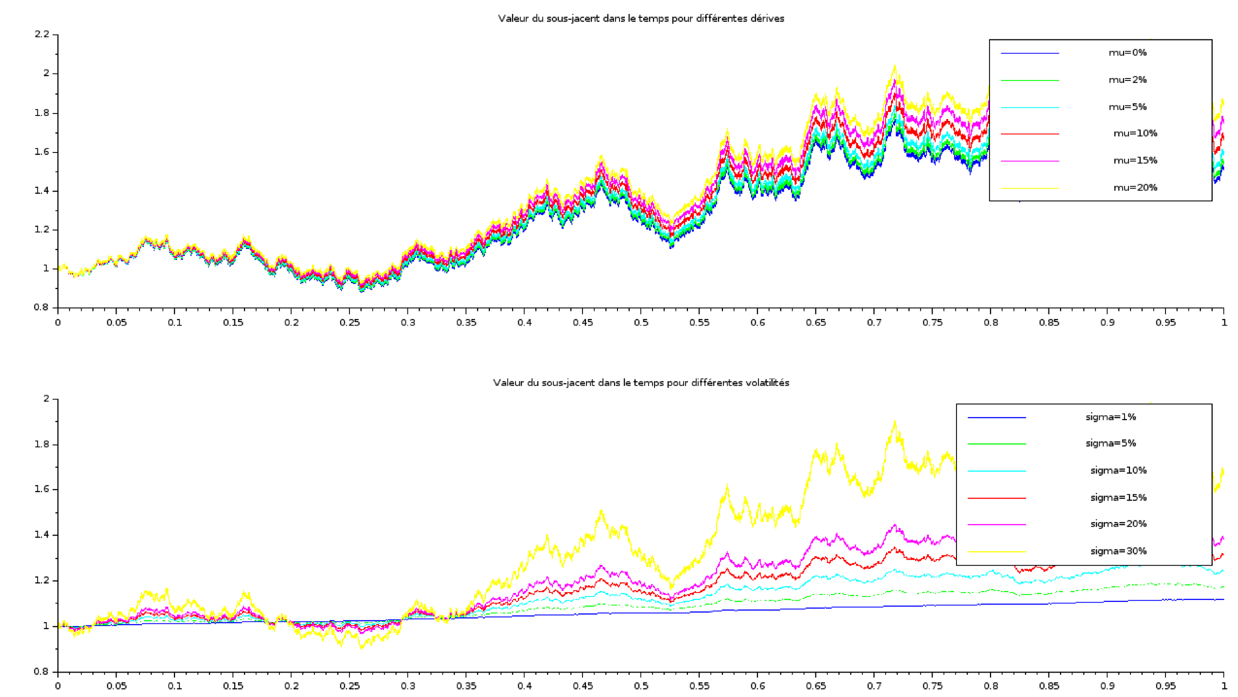

FIGURE – Tracés d'actifs pour différentes dérives et volatilités

Soit P un nombre de modèles de Black-Scholes dont on va effectuer un mélange selon une certaine distribution de probabilités $(p_1, p_2, ..., p_p)$.
Ainsi on considère le Call, à K, r et t fixés, de notre mélange comme suit :

$$C_m(\lambda, \sigma, p) = \sum_{i=1}^{p} p_i C(\lambda_i, K, r, t, \sigma_i)$$
$$\lambda = (S_{0,1}, ..., S_{0,P}), \quad \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_P), \quad p = (p_1, ..., p_P)$$

Calibration en finance

$\beta_* = (\lambda, \sigma, p)$ sont nos données de départ pour K fixé.
On retrouve la valeur β_* par une méthode des moindres carrés sur plusieurs prix d'exercice $(K_1, ..., K_M)$, minimisant les résidus des prix.
Pour un call :

$$\min \sum_{j=1}^{M} (C_{m,j}(\beta) - \alpha_j)^2$$
$$s.c. \sum_{i=1}^{p} p_i = 1$$

α_j étant le prix du Call calculé avec les valeurs de β_* pour un *Strike* K_j.
Il est important de comprendre que cette méthode d'optimisation prouve une certaine bijection entre les valeurs financières λ, σ et la distribution p du mélange et le prix d'une option (d'achat ou de vente) sur le marché.

Résultats

On prend $P = 2$

- $\lambda = (100, 100)$
- $\sigma = (0.2, 0.4)$
- $p = (0.5, 0.5)$
- $r = 0$
- $K = (50, ...150)$

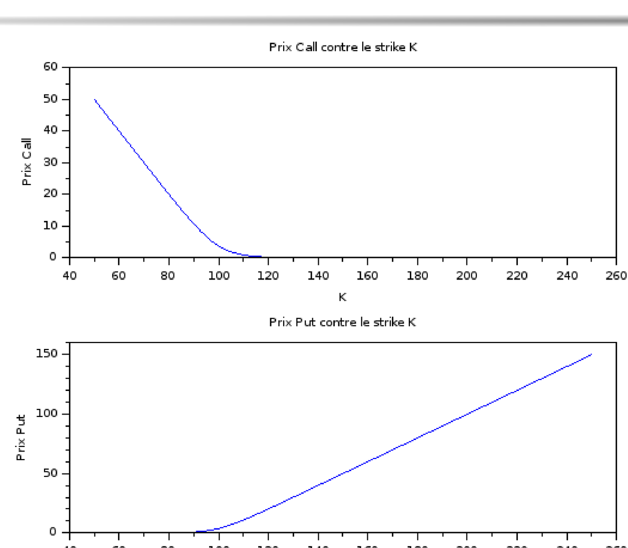

FIGURE – Courbes des prix d'option (achat/vente) en fonction du *Strike*

On trouve par la fonction d'optimisation non linéaire de SCILAB *"optim"* un β proche de l'optimum avec une erreur relative assez faible :

$$\beta_{approx} = (100.001, 100.001, 0.22, 0.36, 0.5, 0.5)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{\|\beta_{approx} - \beta_*\|}{\|\beta_*\|} \approx 3.16 \times 10^{-4}$$

Les problèmes de calibration :

- L'ensemble des solutions réalisables est trop grand.
- Choix d'un bon intervalle d'exercice K.
- En dimension plus grande, les erreurs de calibration sont encore plus importantes.

Les algorithmes d'optimisation rendent la procédure de calibration numériquement délicate en grande dimension P

Volatilité implicite

On souhaite parfois retrouver la volatilité à travers le modèle de BLACK-SCHOLES pour anticiper sur le prix d'un actif.
Comme démontré dans le livre de Peter TANKOV, l'inversion de la formule de BLACK-SCHOLES est possible :

$$\exists! \sigma_* / \quad C_{BS}(S_0, K, r, t, \sigma_*) = C_{marché}$$

On appelle cette volatilité, la **volatilité implicite**.
En utilisant un algorithme de dichotomie ou une méthode de Newton sur SCILAB, on obtient un graphe tridimensionnel appelé **la surface de la volatilité**.

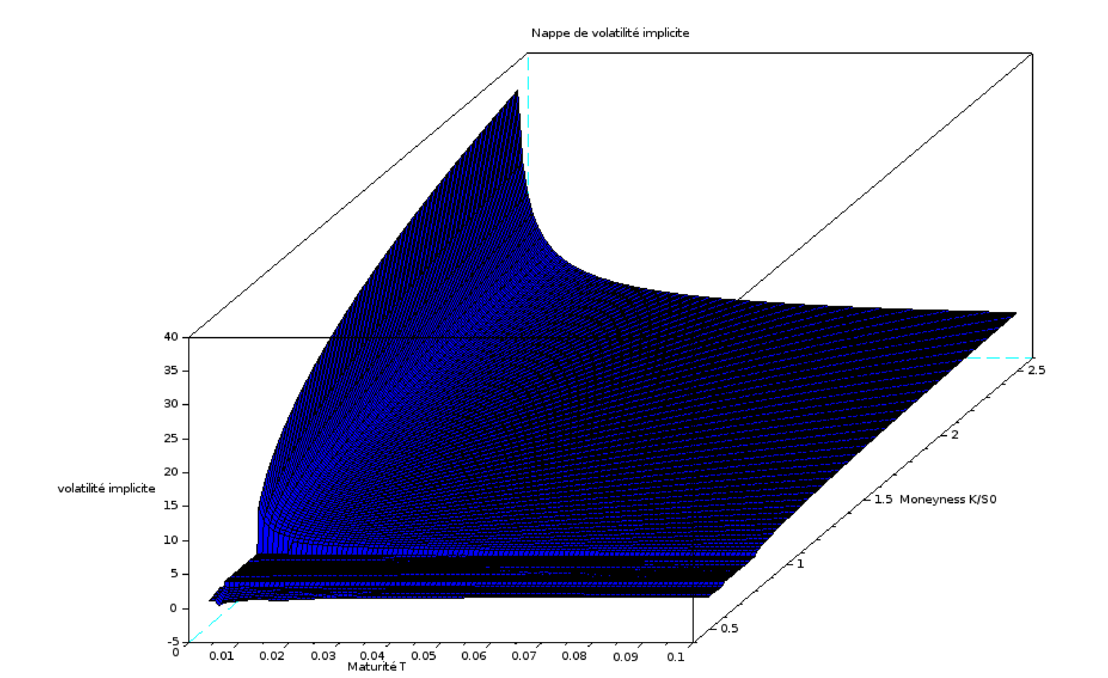

FIGURE – Surface de volatilité implicite en fonction de l'exercice et de la maturité

Application à un actif :

On prend $M = 200$ et :

S_0	\$505.15
σ_0	20%
r	3.3%
K	(\$500, ..., \$700)
T	2 *mois*

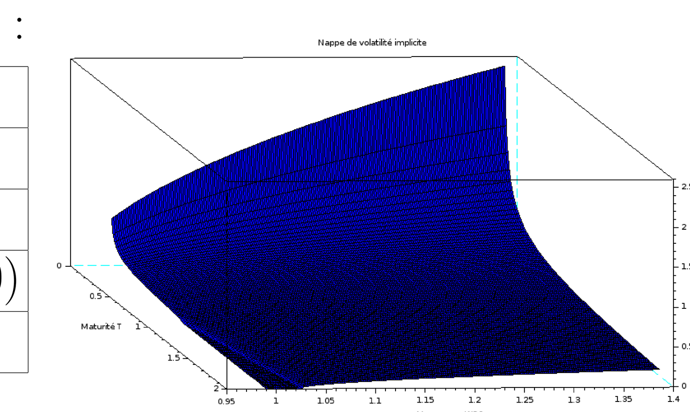

FIGURE – Surface de volatilité pour des données réelles

Références

- John HULL, *Options, futures and other derivatives*, 2015.
- Peter TANKOV, *Surface de volatilité*, 2015.
- Damiano BRIGO, Fabio MERCURIO, *Lognormal-mixture dynamics and calibration to market volatility smiles.*
- Pr. Benoite DE-SAPORTA, *TP sur les mouvements Browniens et Modèle de* BLACK-SCHOLES *(finance en temps continu)*

École des Ponts ParisTech