Calibration en finance : Mélanges de modèles de Black-Scholes

KHELDOUNI Mohammed-Amine

ENPC

Encadré par : Bernard LAPEYRE, Professeur à l'Ecole des Ponts ParisTech et Chercheur au CERMICS

Objectifs

Présentation du problème

On veut connaître le prix d'une action sur le marché. Une *action* est un titre de propriété délivré par une société de capitaux.

Paramètres :

- T : La maturité désigne le temps qui sépare la date à laquelle une obligation est émise, et la date à laquelle la valeur nominale de cette obligation est remboursée.
- une option : Produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur.
- S_t : Un actif sous-jacent est un actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé.
- r : Le taux d'intérêt fixe la rémunération du capital prêté versé par l'emprunteur au prêteur.
- σ : La volatilité est l'ampleur des variations du cours d'un actif financier. Elle sert de paramètre de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier.
  Lorsque la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi.
- K : Le strike désigne le prix d'exercice d'une option, qui correspond au prix fixé dans le contrat pour l'acquisition ou la cession du sous-jacent.
- Call : Le call ou l'option d'achat est une option d'achat sur un instrument financier.
- Put : A l'opposé du Call, le Put est l'option de vente de cet instrument.

Etant donné les paramètres σ, T, K, S_0 et r on voudrait calculer le prix d'un call ou d'un put sur le marché, pour un actif financier.

Modélisation mathématique du marché et problèmes de calibration

Modèle de Black-Scholes

Dans ce modèle, on considére le prix de l'action comme un processus stochastique en temps continu S_t.

Hypothèses :

- Marchés efficients :
  - Pas de coûts de transaction
  - Pas de restrictions sur le volume de transactions
  - Pas d'opportunité d'arbitrage
- Les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants.
- Le placement à la banque est sans risque et le taux d'intérêt r est constant.

Equation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

On note

- S_0 - La valeur actuelle de l'action sous-jacente.
- T - Le temps qu'il reste à l'option avant son échéance (la maturité).
- K - Le prix d'exercice fixé par l'option.
- W_t - Mouvement Brownien de variance t

Le prix théorique d'un call donnant le droit mais pas l'obligation d'acheter l'actif S à la valeur K à la date T, est caractérisé par son *payoff* :

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$$

La formule de Black-Scholes donne le prix d'un Call :

$$C(S_0, K, r, t, \sigma) = S_0\phi(d_1) - K \times e^{-rt}\phi(d_2)$$

Avec :

- ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}(ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t)$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

Et pour un put, on a un prix théorique par rapport à un *payoff* de $(S_T - K)^+$

Et on a une formule de Black-Scholes pour le prix d'un put :

$$P(S_0, K, r, t, \sigma) = -S_0\phi(-d_1) + K \times e^{-rt}\phi(-d_2)$$

Algorithmes

Mélange de modèles BS

On fixe un nombre P de modèles de Black-Scholes dont on va effectuer un mélange selon une certaine distribution de probabilités $(p_1, p_2, ..., p_p)$.
Ainsi on considère le Call (et on fait de même pour le prix d'un Put), à K, r et t fixés, de notre mélange comme suit :

$$C_m(\lambda, \sigma, p) = \sum_{i=1}^{p} p_i C(\lambda_i, K, r, t, \sigma_i)$$

- λ : la liste de taille P des sous-jacents de chacun des modèles considérés.
- σ : la liste des volatilités
- p : la liste des probabilités de tirer chacun des modèles.

OPTIM

En considérant un vecteur $\beta_0 = (\lambda, \sigma, p)$ fixé, on obtient par la formule de Black-Scholes les prix d'un Call et d'un Put d'une option qu'on prend européenne par exemple.
En oubliant la valeur β_0, on peut la retrouver en effectuant une méthode des moindres carrés sur plusieurs prix d'exercice $(K_1, ..., K_M)$, minimisant les résidus des prix. Pour un call :

$$\min \sum_{j=1}^{M}(C_{m,j}(\beta) - \alpha_j)^2$$

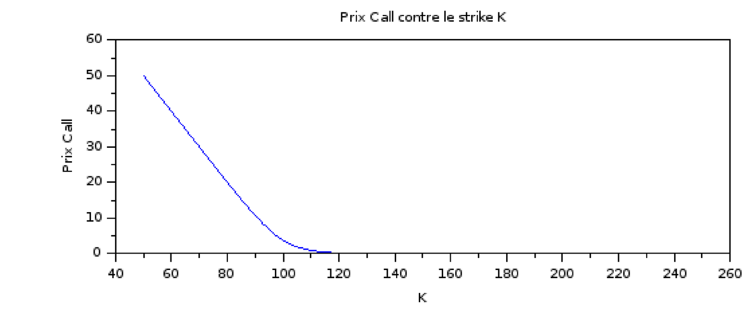
$$s.c. \sum_{i=1}^{p} p_i = 1$$

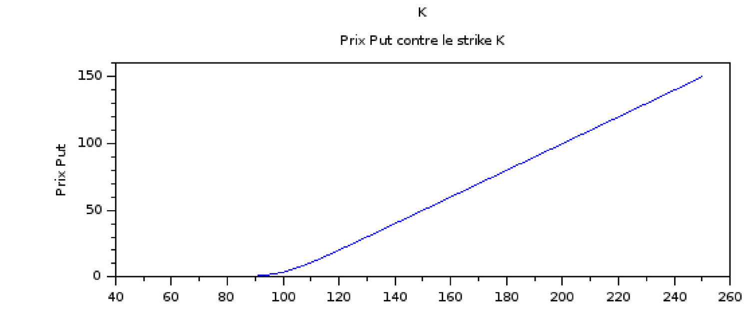
α_j étant le prix du Call calculé pour $_0$ pour un *Strike* K_j.

Conclusion : application à la pharmaceutique

On prend $P = 2$

- $\lambda = (100, 100)$
- $\sigma = (0.2, 0.4)$
- $p = (0.5, 0.5)$
- $r = 0$
- $K = (50, ...150)$





On trouve par la fonction d'optimisation non linéaire de SCILAB, *optim*, un β proche de l'optimum :

$$\beta_* = (100.001, 100.001, 0.22, 0.38, 0.5, 0.5)$$

Toutefois, les erreurs de calibrations étant non négligeables, il a fallu réajuster l'ensemble de recherche des solutions réalisables. En effet, même pour $p = 2$, il a fallu ajuster un bon intervalle pour le strike K, pour que l'optimisation des moindres carrés donne un résultat cohérents avec le β_0 qu'on a "oublié" pour retrouver par cette méthode.
En augmentant la dimension de l'espace dans lequel vit β, de dimension $3P$, l'optimisation ne marche plus.

$\Rightarrow$ C'est un problème de calibration en finance

Cette fois-ci, connaissant tous les paramètres sauf la volatilité σ, on va essayer de la retrouver pour un certain sous-jacent du marché.
Sur le marché, on connait le dernier prix d'un Call/Put émis pour un actif financier et par la formule de Black-Scholes, on inverse l'équation.
Donc :

$$\exists! \sigma_* s.t. \quad C_{BS}(S_0, K, r, t, \sigma_*) = C_{market}$$

On appelle cette volatilité, la **volatilité implicite**.
Il existe divers méthodes de résolution de l'inversion de la formule de Black-Scholes :

- Méthode de Newton-Raphson de convergence quadratique
- La dichotomie de convergence en $\mathcal{O}(log(M))$

En utilisant la fonction *fsolve* de SCILAB, on obtient un graphe 3D appelé **la surface de la volatilité** pour les valeurs précédentes avec $M = 200$ le nombre de prix d'exercices pris en compte.