



École des Ponts

ParisTech

Rapport de TP sur les files d'attente

Modéliser l'aléa

Jean-Christophe CORVISIER
Mohammed Amine KHELDOUNI

4 janvier 2019

Table des matières

1	Introduction	3
2	File d'attente à un guichet	4
2.1	Question 1	4
2.2	Question 2	6
2.3	Question 3	6
2.4	<i>Question subsidiaire 1</i>	8
3	File d'attente à K guichets	10
3.1	<i>Question subsidiaire 2</i>	10
4	Conclusion	13

1 Introduction

On se propose dans ce TP d'effectuer des simulations numériques basées sur des processus de Markov pour illustrer la dynamique des files d'attente. Ce sujet trouve son utilité dans divers domaines d'applications en télécommunications, en informatique mais aussi dans le commerce ou l'administration.

Dans un premier temps, nous étudierons la simulation d'une file d'attente à un seul guichet pour vérifier numériquement certains résultats du cours *Modéliser l'aléa*. Dans un second et dernier temps, nous généraliserons notre étude à plusieurs guichets.

2 File d'attente à un guichet

2.1 Question 1

Dans cette première sous-section, on introduit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ donnant le nombre d'éléments dans la file d'attente à l'instant $t \in \mathbb{R}$. On sait alors que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Cette chaîne de Markov est paramétrée par λ et μ deux paramètres par rapport auxquels on veut commenter la simulation de X au cours du temps t . Le temps évolue lui selon une loi exponentielle de paramètre λ . La simulation de la chaîne de Markov sur 100 évolutions est effectuée pour différentes valeurs prises par le paramètre $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, valeur de densité de trafic.

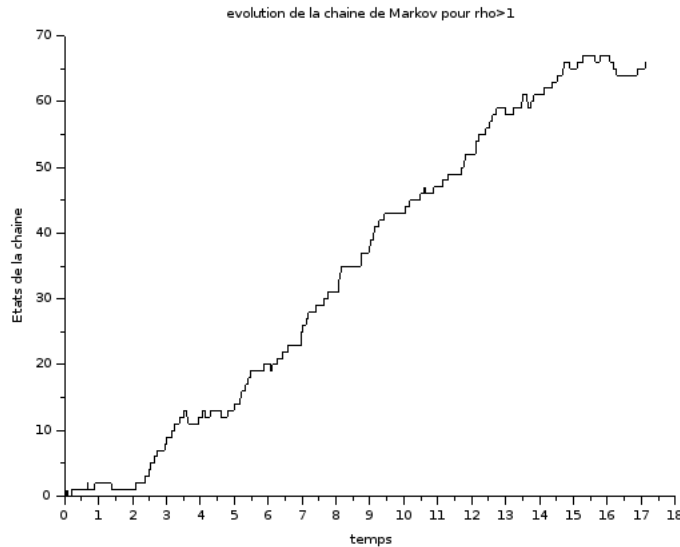


FIGURE 1 – Évolution du nombre d'éléments dans la file d'attente ($\rho > 1$)

La valeur exacte de ρ ici est de 5. On remarque donc que la simulation prévoit une saturation de la file d'attente. En effet, le nombre d'éléments dans la file d'attente ne cesse de croître. Ceci est dû à un cumul d'éléments dans la chaîne de Markov qui voit donc son nombre d'état augmenter très vite au fil du temps.

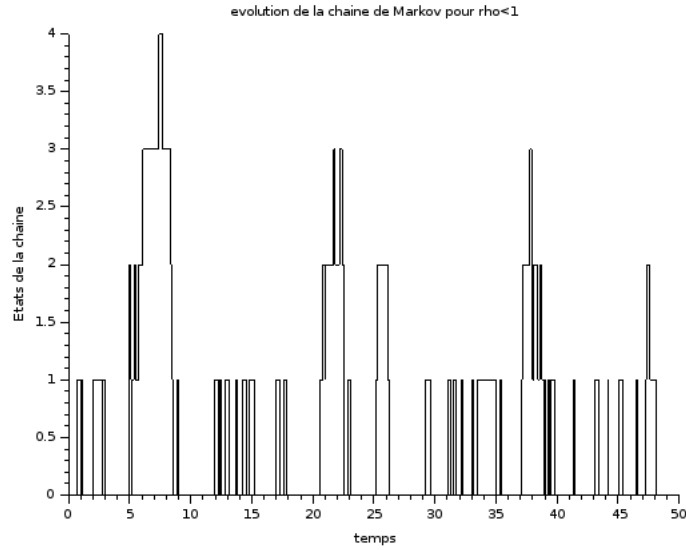


FIGURE 2 – Évolution du nombre d'éléments dans la file d'attente ($\rho < 1$)

Inversement, pour un ρ suffisamment faible (ici il vaut $\frac{1}{3}$), on voit que le nombre d'éléments dans la file d'attente n'excède pas 4 sur toute la période de temps considérée. En effet, la file est très fluide et assez souvent, si X est à l'état 1, il repasse à l'état 0 car le seul élément de la file d'attente repart juste après.

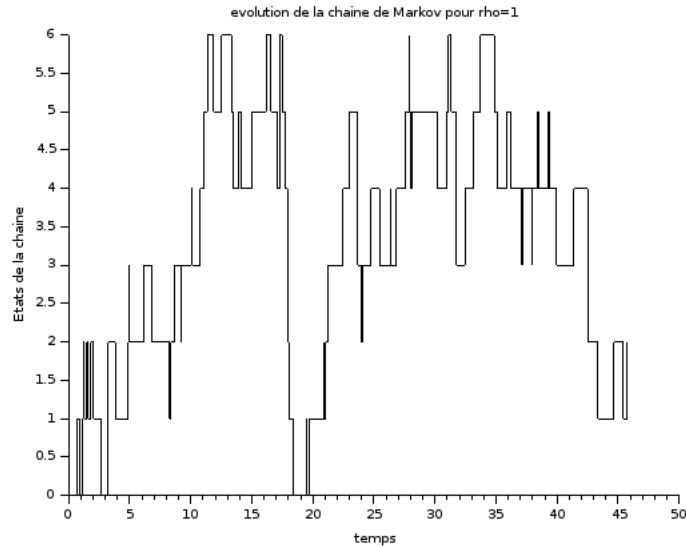


FIGURE 3 – Évolution du nombre d'éléments dans la file d'attente ($\rho = 1$)

Enfin, $\rho = 1$ constitue la valeur charnière entre les deux zones de fluidité et de saturation

de la file d'attente. La file n'est donc pas tout à fait fluide mais n'augmente pas fortement non plus : l'état le plus grand atteint par la chaîne étant 6 est faible comparé à l'état maximal du cas $\rho > 1$ qui était d'environ 70.

2.2 Question 2

On veut dans cette sous-section vérifier les propriétés de la proposition 2 de l'énoncé du sujet, à savoir que dans le cas $\rho < 1$:

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad \text{Var}(X_t) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

On prend donc pour cette partie $\lambda = 1$ et $\mu = 3$ pour revenir au cas $\rho < 1$. En écrivant une fonction SCILAB de calcul de l'espérance de X_t et de sa variance en utilisant une intégrale érgodique prise sur un temps final suffisamment grand ($T_f = 50000$), on obtient les résultats suivants :

$$\mathbb{E}(X_t) = 0.4990216 \quad \text{Var}(X_t) = 0.7499576$$

On vérifie bien numériquement que cela correspond aux formules données par la proposition 2, avec une erreur de 10^{-3} sur l'espérance et de $5 \cdot 10^{-5}$ sur la variance.

Précision de l'estimation On utilise l'erreur de précision qui est la différence en valeur absolue entre la valeur théorique fournie par le théorème érgodique et la valeur trouvée par simulation. On remarque en traçant les courbes de précision sur l'espérance et la variance de la chaîne markovienne, que cette erreur est très petite pour des valeurs de ρ inférieur à 0.5 et devient grande pour des valeurs de ρ plus grandes que 0.5. En effet, en se rapprochant de la valeur $\rho = 1$, il y a une perte de précision dans les propriétés de la proposition 2. Notons que l'erreur de précision, de l'ordre de 1.0 pour l'espérance lorsque ρ tend vers 1 devient très grande pour la variance (70 ici).

2.3 Question 3

Pour tracer la distribution de notre chaîne de Markov X_t , on utilise le théorème érgodique avec la fonction f indicatrice de l'évènement.

On obtient alors la courbe de densité suivante

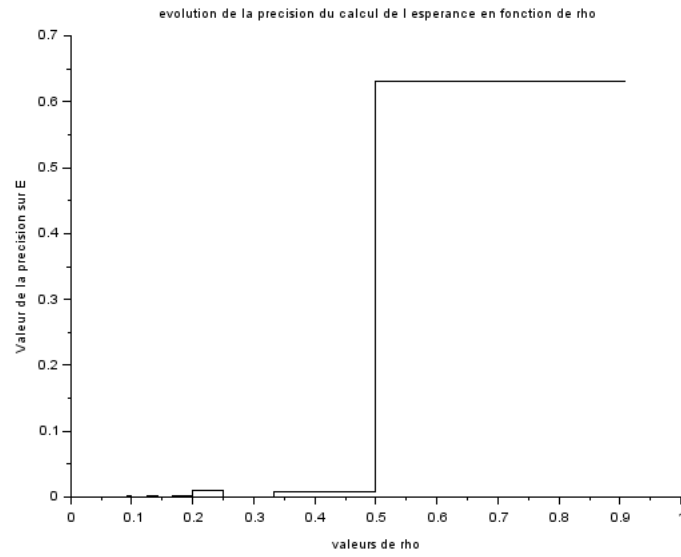


FIGURE 4 – Évolution de la précision de calcul sur l’espérance de la chaîne de Markov en fonction de ρ

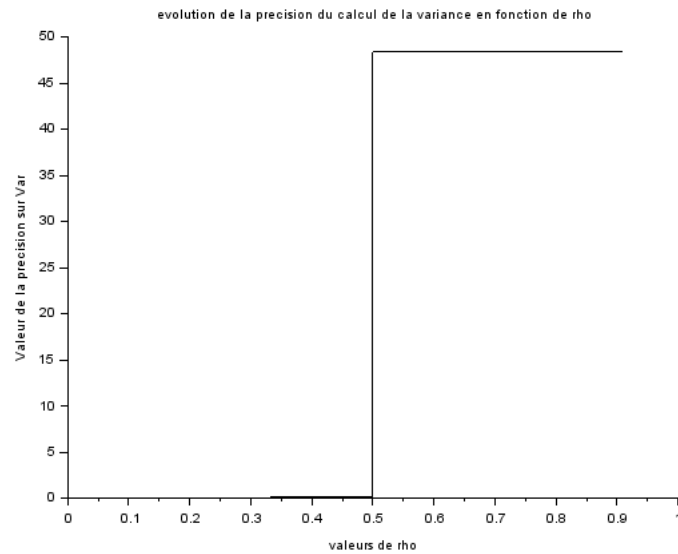


FIGURE 5 – Évolution de la précision de calcul sur la variance de la chaîne de Markov en fonction de ρ

Il apparaît donc que la distribution en régime stationnaire suit une loi à forte densité autour des états 2 et 3. Pour un $\rho = 0.33 < 1$, soit pour une file d’attente fluide. Les états plus grands ayant une bien plus faible probabilité car en pratique la file libère ses clients

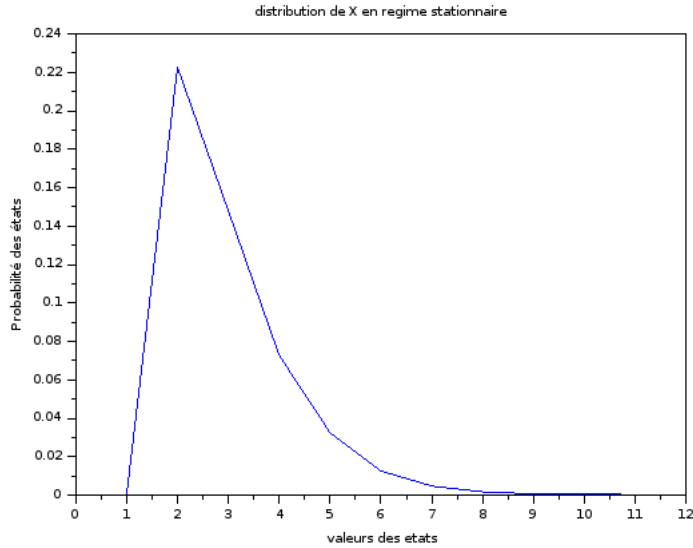


FIGURE 6 – Distribution de la chaîne X en régime stationnaire

suffisamment rapidement pour que l’accumulation de clients dans la file excède très rarement 3.

2.4 Question subsidiaire 1

Pour cette question, on modélise la file d’attente à un guichet ($K = 1$) avec des lois uniformes de taille $\frac{2}{\lambda}$ pour caractériser l’arrivée d’un nouveau client, et de paramètre $\frac{2}{\mu}$ pour les temps de services.

Nous allons dans cette sous-section, simuler les deux lois uniformes pour les temps de changement de la chaîne de Markov, et la variable réalisant le minimum déterminera si on augmente ou diminue le nombre de clients, et donc si on descend ou on augmente en valeur d’état de la chaîne.

Notre programme SCILAB fournit les trajectoires suivantes pour les différentes valeurs de ρ retenues :

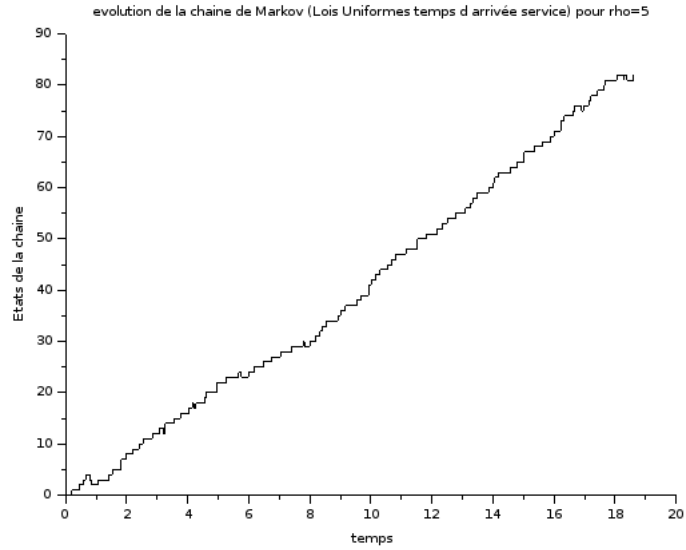


FIGURE 7 – Évolution de la chaîne de Markov suivant une loi uniforme ($\rho = 5$)

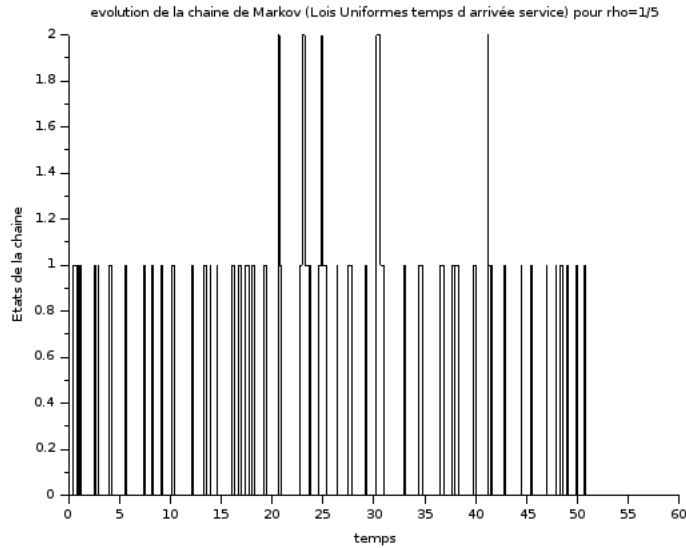


FIGURE 8 – Évolution de la chaîne de Markov suivant une loi uniforme ($\rho = 0.2$)

Pour ces deux premières figures, on retrouve le même résultat que pour les premières simulations en sous-section 2.1, à savoir que pour un ρ suffisamment grand, le nombre de clients (les états de X) ne cesse de croître car il y a un cumul des éléments dans la file d'attente. Pour un $\rho < 1$, la file reste fluide et donc la chaîne de Markov atteint au plus 2 éléments dans la file, et reste entre les états 1 et 0 globalement.

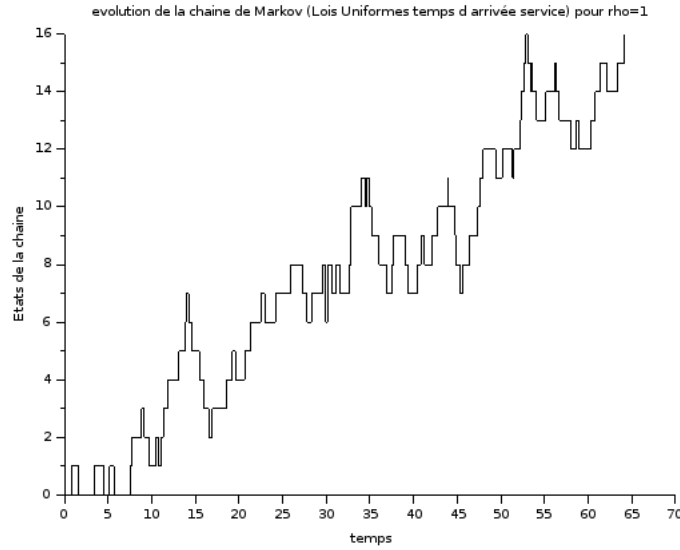


FIGURE 9 – Évolution de la chaîne de Markov suivant une loi uniforme ($\rho = 1$)

Néanmoins, pour cette dernière figure, la valeur charnière $\rho = 1$ rejoint cette fois-ci pour un modèle uniforme, le cas de saturation de la file. En effet, on remarque que la trajectoire de la chaîne de Markov fluctue et augmente globalement au fil du temps pour atteindre l'état 16. Il y a donc un effet de saturation lent dans la file d'attente, car celle-ci possède de plus en plus d'éléments en attente.

3 File d'attente à K guichets

3.1 *Question subsidiaire 2*

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons à l'évolution de la file d'attente à $K > 1$ guichets et aux simulations de la chaîne de Markov X par rapport au paramètre ρ du modèle. On précise ici que dans le cas du modèle à K guichets, la densité de trafic vaut :

$$\rho = \frac{\lambda}{K\mu}$$

En réadaptant les fonctions SCILAB pour un modèle à plusieurs guichets (dont les formules sont obtenues en utilisant le livre de cours p242), on obtient les simulations suivantes :

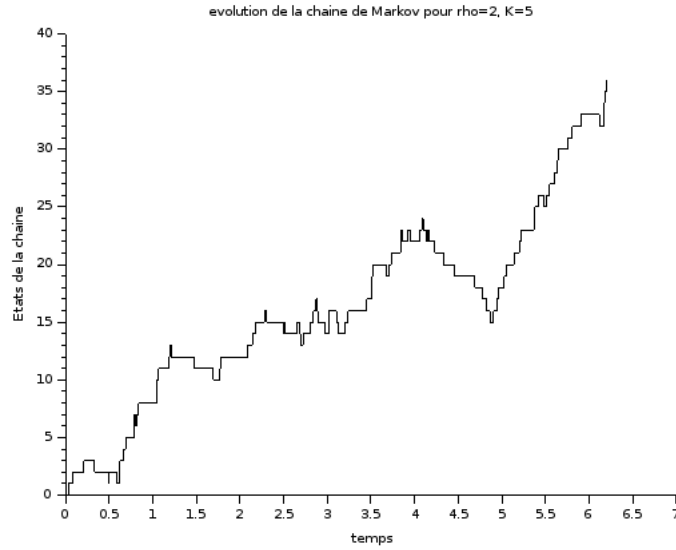


FIGURE 10 – Évolution de la chaîne de Markov ($\rho = 2$ et $K = 5$)

Cette première figure montre que l'évolution de la file d'attente suit le cas à un seul guichet. On a toujours saturation pour $\rho > 1$, ce qui est assez logique car nous changeons la valeur de ρ par rapport à l'autre modèle à un guichet.

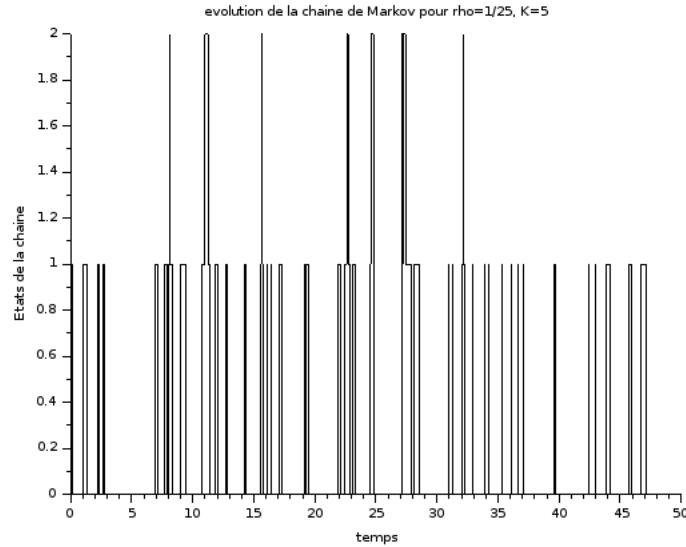


FIGURE 11 – Évolution de la chaîne de Markov ($\rho = 0.04$ et $K = 5$)

Dans ce cas là, il y a une fluidité de la file d'attente. En effet, la chaîne de Markov bascule

le plus souvent entre l'un et l'autre des deux états 0 et 1 et atteint un état maximal de 2 éléments en attente seulement.

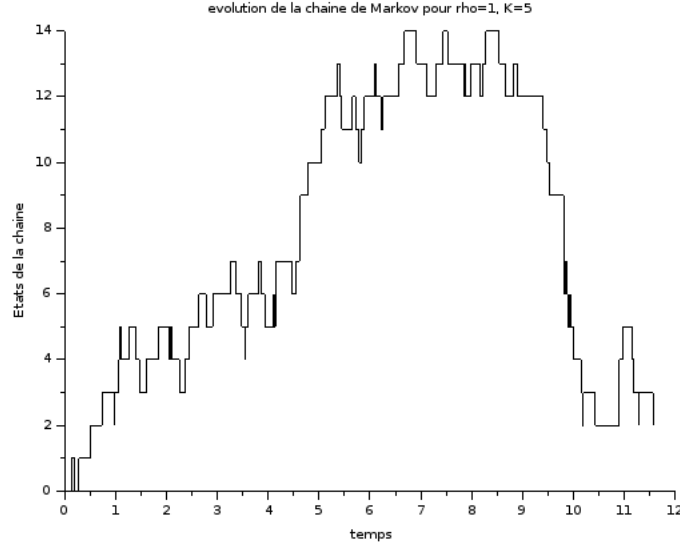


FIGURE 12 – Évolution de la chaîne de Markov ($\rho = 1$ et $K = 5$)

Enfin, le cas limite pour lequel $\rho = 1$, rejoint la figure précédente dans son analyse. En effet, la chaîne de Markov reste bornée (elle n'atteint que l'état 14 et ne semble pas croître continuellement contrairement au premier cas). De plus, la file d'attente retrouve sa fluidité et il y a rarement plus de deux éléments en attente sur la période de temps considérée pour la simulation.

4 Conclusion

En somme, dans ce TP, nous avons analysé une problématique classique sur les files d'attente et leur modélisation en chaîne de Markov.

Nous avons également réussi à retrouver certains résultats du cours sur l'espérance et la variance de cette chaîne de Markov X ainsi que sur le théorème érgodique.

Enfin, les simulations riches en commentaires permettent d'affirmer l'importance de ce genre de modélisation pour l'optimisation du temps et du passage en file d'attente et l'analyse de la pertinence du passage d'une file d'attente simple à une file d'attente à guichets multiples.