

TD1 - Rappels et calculs algébriques

Exercice 1 : Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]0, +\infty[, x + \frac{1}{x} \geq 2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Exercice 2 :

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < \frac{x^2+2x+4}{x^2+2x+2} \leq 3$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}$. Sans étudier les variations de f , trouver le minimum de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3 : Soient x, y, z trois réels tels que : $0 < a \leq x \leq b, d \leq y \leq c < 0, 0 < e \leq z \leq f$. Déterminer un encadrement de :

1. $4x - 2y$
2. $\frac{x-y}{z}$

Exercice 4 : Soient a et x deux nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x - a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a .

Exercice 5 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $|x + 1| < 0.1$;
2. $|x - 2| > 10$;
3. $|x| < |x + 1|$;
4. $|2x - 1| < |x - 1|$;
5. $||x + 3| - 1| \leq 2$;
6. $\frac{x-1}{x+2} \geq 3$;
7. $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$;
8. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$.

Exercice 6 : Calculer la valeur de :

1. $\sum_{i=1}^n 2$.
2. $\prod_{i=1}^n 3$.
3. $\sum_{k=1}^n (2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1})$.
4. $\sum_{k=1}^n k$.
5. En remarquant que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

6. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$

En déduire $\sum_{k=0}^n k^2$.

Exercice 7 : Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$. Montrer que

$$\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n-1}{p}.$$

Exercice 8 : Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n 5^k \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Exercice 9 : Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

$$\prod_{k=1}^n k^2 \quad \prod_{k=3}^{n-1} k \quad \prod_{k=2}^n (2k+1)$$

Exercice 10 : Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=0}^n 3^k \quad \prod_{k=0}^n e^{-k} \quad \prod_{k=2}^n \frac{k}{k+2}$$

Exercice 11 : Calculer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$.

Exercice 12 : A partir des formules ($\sin(x+y) = \dots$), ($\cos(x+y) = \dots$) et ($\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$), démontrer les formules suivantes :

1. $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
2. $\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
3. $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$.
4. $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, où $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 13 : Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.

Exercice 14 : Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$.
2. $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x)$.
3. $\tan(2x) = 3 \tan(x)$.