Chapitre 2
Techniques d'intégration pour quelques types de fonctions continues.
Intégration des fractions rationnelles

I. Primitives de la forme : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} \quad (a, b \neq 0)$.

Pour calculer ces primitives, il s'agit, par un changement de variable :

• Ou bien, de ramener le dénominateur à l'une des formes :

$$\sqrt{t^2+1}\,, \quad \sqrt{t^2-1}\,, \quad \text{ou} \quad \sqrt{1-t^2}\,,$$

selon les signes de a et b (noter qu'on ne peut pas avoir $a < 0$ *et* $b < 0$), et d'utiliser les formules des primitives de fonctions usuelles.

• Ou bien, de ramener le dénominateur à l'une des formes :

$$\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}\,, \quad \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\,, \quad \text{ou} \quad \sqrt{1-\sin^2 t}\,,$$

et d'utiliser les relations :

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1\,, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

pour éliminer la racine carrée.

Précisément, en posant :

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{ax^2+b}}\,,$$

on a :

(i) Si $a > 0$ et $b > 0$: la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (on cherche donc ses primitives sur $\mathbb{R}$), et :

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}\,x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x\right)^2+1}}\,.$$

Alors :

• En utilisant le changement de variable (linéaire) $t := \sqrt{\frac{a}{b}}\,x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,x$, de sorte que $dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,dx$, on a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x\right)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsh} t + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{a}{b}}\,x + C\,.$$

• En utilisant le changement de variable $\operatorname{sh} t := \sqrt{\frac{a}{b}}\, x$, de sorte que $\operatorname{ch} t\, dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\, dx$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\, x\right)^2+1}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t+1}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\, t + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{a}{b}}\, x + C\,.
\end{aligned}$$

(ii) Si $a > 0$ et $b < 0$: la fonction f est bien définie et continue sur $\left] -\infty, -\sqrt{-\frac{b}{a}} \right[\cup \left] \sqrt{-\frac{b}{a}}, +\infty \right[$ (c'est-à-dire, à condition que $x^2 > -\frac{b}{a} > 0$), et :

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{|b|}\, x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\pm \sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x\right)^2 - 1}}\,.$$

Alors :

• En utilisant le changement de variable $t := \sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x\right)^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|t + \sqrt{t^2-1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{|b|}}\, x + \sqrt{\frac{a}{|b|}\, x^2 - 1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\left|\sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2+b}\right|}{\sqrt{|b|}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2+b}\right| + C\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne les primitives de f sur chacun des intervalles de son domaine (bien entendu, on a modifié la constante C dans la dernière égalité).

• En utilisant, pour $x > \sqrt{-\frac{b}{a}}$, le changement de variable $\operatorname{ch} t := \sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x\right)^2-1}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\, t + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x + C\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne les primitives de f sur l'intervalle $\left]\sqrt{-\frac{b}{a}}, +\infty\right[$.

• En utilisant, pour $x < -\sqrt{-\frac{b}{a}}$, le changement de variable $\operatorname{ch} t := -\sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x$, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{a}{|b|}}\,x\right)^2 - 1}} &= -\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}\, dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a}} \int dt = -\frac{1}{\sqrt{a}}\, t + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argch}\left(-\sqrt{\frac{a}{|b|}}\, x\right) + C\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne les primitives de f sur l'intervalle $\left]-\infty, -\sqrt{-\frac{b}{a}}\right[$.

(iii) Si $a < 0$ et $b > 0$: ce cas est laissé en exercice au lecteur (ici, la fonction f est définie et continue sur $\left]-\sqrt{-\frac{b}{a}}, \sqrt{-\frac{b}{a}}\right[$, et les primitives sont des "arcsin").

II. 1. Primitives de la forme : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ $(p, q \neq 0)$.

On distingue deux cas :

• Ou bien px^2+qx+r est un carré parfait, c'est-à-dire :

$$px^2+qx+r = p\Big(x^2 + \frac{q}{p}\,x + \frac{r}{p}\Big) = p\Big(x + \frac{q}{2p}\Big)^2$$

(c'est-à-dire, $\Delta := q^2 - 4pr = 0$), alors :

$$\frac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}} = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \cdot \frac{1}{\left|x + \frac{q}{2p}\right|}\,,$$

dont il est immédiat de calculer les primitives sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\frac{q}{2p}\right[$ et $\left]-\frac{q}{2p}, +\infty\right[$.

• Ou bien px^2+qx+r n'est pas un carré parfait, c'est-à-dire :

$$px^2+qx+r = p\Big(x^2 + \frac{q}{p}\,x + \frac{r}{p}\Big) = p\Big[\Big(x + \frac{q}{2p}\Big)^2 - \frac{q^2}{4p^2} + \frac{r}{p}\Big] = p\Big(x + \frac{q}{2p}\Big)^2 - \frac{q^2}{4p} + r\,,$$

avec $\Delta \neq 0$. On est donc ramené à la forme $\dfrac{1}{\sqrt{ay^2+b}}$ étudiée dans le paragraphe précédent, avec:

$$a := p\,, \quad b := r - \frac{q^2}{4p}\,, \quad \text{et} \quad y := x + \frac{q}{2p}\,.$$

II. 2. Primitives de la forme : $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{px^2+qx+r}}\,dx \quad (p,q\neq 0)$**.**

La dérivée de px^2+qx+r étant $2px+q$, on écrit :

$$\alpha x+\beta = \frac{\alpha}{2p}(2px+q) - \frac{\alpha q}{2p} + \beta\,,$$

d'où :

$$\frac{\alpha x+\beta}{\sqrt{px^2+qx+r}} = \frac{\alpha}{2p}\frac{2px+q}{\sqrt{px^2+qx+r}} + \Big(\beta - \frac{\alpha q}{2p}\Big)\frac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}}\,.$$

Alors :

• On obtient les primitives de $\dfrac{2px+q}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ par le changement de variable $t := px^2+qx+r$;

• On obtient les primitives de $\dfrac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ par la méthode vue précédemment.

Bien entendu, il faut préciser au préalable le domaine de définition de la fonction, ainsi que les intervalles d'intégration.

III. Intégration des fractions rationnelles. Une *fraction rationnelle* est une fonction de la forme :

$$f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

où $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions polynomiales. Il est donc clair que le domaine de f est :

$$D := \{x \in \mathbb{R} \ :\ Q(x) \neq 0\}\,,$$

et que D contient tous les points de $\mathbb{R}$, sauf, au plus, un nombre de points inférieur ou égal au *degré* de Q, qu'on notera $\deg Q$.

Pour déterminer les primitives d'une fraction rationnelle, on peut la décomposer en la somme d'une fonction polynomiale et de fractions rationnelles simples dont on sait calculer les primitives. Tout d'abord, on suppose que la fonction P/Q est *irréductible*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la *simplifier* par une fonction polynomiale de degré strictement positif. De plus, on peut supposer que Q est *unitaire*, c'est-à-dire que son *coefficient dominant* est 1 ; auquel cas, on peut écrire de façon unique :

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{m_\ell}\,, \tag{1}$$

où $a_1,\dots,a_k$ sont les racines réelles (éventuelles) de Q, de multiplicité $n_1,\dots,n_k$, et $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_\ell x+q_\ell$ n'ont pas de racine réelle et sont de multiplicité $m_1,\dots,m_\ell$. Par exemple, si on considère :

$$Q(x) := x(x-1)^3(x^2+1)^2\,,$$

on a : $a_1=0$ et $n_1=1$, $a_2=1$ et $n_2=3$ ($k=2$); $p_1=0$, $q_1=1$ et $m_1=2$ ($\ell=1$). La formule (1) est la *décomposition de Q en facteurs irréductibles sur* $\mathbb{R}$.

On admettra le résultat suivant.

Théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. *Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle irréductible, avec Q unitaire, dont la décomposition en facteurs irréductibles est donnée par* (1). *On peut écrire de façon unique :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} T_j(x)\,,$$

où :

- *E est une fonction polynômiale ;*
- $\forall\, i \in [\![1, k]\!]$: $\quad S_i(x) = \dfrac{A_1^i}{x - a_i} + \dfrac{A_2^i}{(x-a_i)^2} + \ldots + \dfrac{A_{n_i}^i}{(x-a_i)^{n_i}}$;
- $\forall\, j \in [\![1, \ell]\!]$: $\quad T_j(x) = \dfrac{C_1^j x + D_1^j}{x^2 + p_j x + q_j} + \dfrac{C_2^j x + D_2^j}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \dfrac{C_{m_j}^j x + D_{m_j}^j}{(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}}$,

où les coefficients de type A, C, D sont des nombres réels.

Remarque. La fonction E du théorème est le *quotient de la division enclidienne de P par Q* : P et Q étant donnés, il existe en effet un unique couple (E, R) de fonctions polynomiales, avec $\deg R < \deg Q$ tel que :

$$P = QE + R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \quad \text{sur } D\,.$$

Bien entendu, R est le *reste* de cette division. Et on voit que si $\deg P < \deg Q$ alors $E = 0$ (et $R = P$), tandis que si $\deg P \geq \deg Q$, alors $\deg E = \deg P - \deg Q$.

Voici un exemple élémentaire d'application du théorème de décomposition.

Exemple 4. On va montrer les étapes de la décomposition en éléments simples à travers l'exemple de la fraction rationnelle :

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1}\,.$$

- On commence par noter que les racines du dénominateur sont -1 (racine évidente) et $\frac{1}{2}$, puis on écrit, pour $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{-1, 1/2\}$:

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} =: \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

- Puis, étant donné que le degré de P est supérieur à celui de Q, on effectue la division euclidienne de P par Q pour trouver la fonction E du théorème. On procède comme à l'école primaire :

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ \cline{3-3}
- & \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} & \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \\ \cline{2-2}
 & -\frac{3x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \\
- & -\frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{8} + \frac{3}{8} & \\ \cline{2-2}
 & \frac{5x}{8} + \frac{1}{8} &
\end{array}
$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{3}{2}\Big) + \frac{1}{8} \cdot \frac{5x + 1}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}\,.$$

- D'après le théorème, puisque $Q(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x+1)(x - \frac{1}{2})$, la décomposition de P/Q en éléments simples est de la forme :

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{3}{2}\Big) + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x - \frac{1}{2}}\,, \tag{2}$$

pour certains $a, b \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in D$.

- On indique maintenant deux façons de déterminer les coefficients a et b.

(i) Si on a *en effet* calculé $R(x) = \frac{1}{8}(5x + 1)$ alors, pour $x \in D$ on a :

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = \frac{(a+b)x + b - \frac{a}{2}}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}(5x+1)}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}\,,$$

d'où, par *identification des coefficients*, on a :

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{5}{8} \\ b - \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{8} \end{cases},$$

d'où on obtient $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{7}{24}$.

(ii) Sans calculer $R(x)$, on peut écrire (2) dès qu'on a $E(x)$. Alors, en multipliant (2) par $x + 1$ on a :

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{3}{2}\Big)(x+1) + a + b \cdot \frac{x+1}{x - \frac{1}{2}}\,,$$

et en faisant $x := -1$ dans cette égalité (désormais bien définie pour $x = -1$), on trouve $a = \frac{1}{3}$ (faites le calcul). De la même façon, en multipliant (2) par $x - \frac{1}{2}$ et en faisant $x := \frac{1}{2}$ dans l'équation obtenue, on trouve $b = \frac{7}{24}$.

- En définitive, on a :

$$\forall\, x \in D\ :\quad \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{3}{2}\Big) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{2}}\,,$$

donc, sur chacun des intervalles de D :

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1}\, dx = \frac{1}{4}(x^2 - 3x) + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{24}\ln\Big|x - \frac{1}{2}\Big| + C\,.$$

L'exemple qui suit sert de modèle pour calculer les primitives des fractions de la forme :

$$\frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^m}\,,$$

qui apparaissent dans le théorème de décomposition.

Exemple 5. On se propose de calculer les primitives (sur $\mathbb{R}$) :

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

On notera que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ est décomposée en éléments simples. Mais ses primitives n'en sont pas évidentes pour autant. On commence par noter qu'avec le changement de variable $t := x^2 + 1$ on a :

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C\,.$$

Ensuite, on écrit :

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,.$$

En utilisant une intégration par parties avec $u := x$ et $v' := \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, on a, d'après le calcul précédent :

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx \\
&= \int \frac{dx}{x^2+1} - \Big(-\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \Big) \\
&= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \Big) + C\,.
\end{aligned}$$

Exemple 6. On se propose de calculer les primitives :

$$\int \ln(x^2 - 2x + 4)\, dx\,.$$

On commence par observer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0\,,$$

donc $\ln(x^2 - 2x + 4)$ est bien définie (et continue) sur $\mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $t := x - 1$, on a :

$$\int \ln(x^2 - 2x + 4)\, dx = \int \ln(t^2 + 3)\, dt\,,$$

puis en faisant une intégration par parties avec $u := \ln(t^2+3)$ et $v' := 1$, de sorte que $u' = \dfrac{2t}{t^2+3}$ et $v = t$, on a :

$$\int \ln(t^2+3)\, dt = t\ln(t^2+3) - 2\int \frac{t^2}{t^2+3}\, dt\,.$$

En observant que :

$$\frac{t^2}{t^2+3} = 1 - \frac{3}{t^2+3} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,,$$

et en faisant le changement de variable $w := \frac{t}{\sqrt{3}}$, on a :

$$\int \frac{t^2}{t^2+3}\, dt = \int dt - \sqrt{3}\int \frac{dw}{w^2+1} = t - \sqrt{3}\arctan w + C = t - \sqrt{3}\,\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C\,,$$

d'où :

$$\int \ln(t^2+3)\, dt = t\ln(t^2+3) - 2t + 2\sqrt{3}\,\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C\,,$$

et enfin :

$$\int \ln(x^2 - 2x + 4)\, dx = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 4) - 2x + 2\sqrt{3}\,\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C\,,$$

qui sont les primitives cherchées sur $\mathbb{R}$. On notera que $-2t = -2x + 2$ a été remplacé par $-2x$ dans la dernière étape, le nombre 2 étant "absorbé" dans la constante C.

IV. Fractions rationnelles trigonométriques et hyperboliques. Soit P une *fonction polynomiale de deux variables réelles*, c'est-à-dire : $P = P(x, y)$ est telle que pour chaque y fixé la fonction $P_y(x) := P(x, y)$, et pour chaque x fixé la fonction $P_x(y) := P(x, y)$, sont des fonctions polynomiales (sur $\mathbb{R}$). Par exemple : $P(x, y) := x^3y^2 - 3xy^2 + 2xy + 5$ est une fonction polynômiale des variables réelles x et y.

Si P et Q sont des fonctions polynomiales de deux variables réelles, on dit que la fonction :

$$f(x) := \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

est une *fraction rationnelle trigonométrique*. Pour calculer les primitives de f (sur les intervalles de son domaine de définition, à déterminer), c'est-à-dire :

$$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\, dx\,,$$

on se ramène, par un changement de variable, au calcul des primitives d'une fraction rationnelle d'une variable réelle t. On a :

• **Cas particuliers.** Si *l'élément différentiel* :

$$\frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}\, dx$$

est *invariant* lorsqu'on remplace :

- x par $-x$, on pose $t := \cos x$;

- x par $\pi - x$, on pose $t := \sin x$;

- x par $\pi + x$, on pose $t := \tan x$.

Exemple 7. Soit à calculer les primitives :

$$\int \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx\,.$$

Notons d'abord que $f(x) := \dfrac{\sin x}{2 - \sin^2 x}$ est bien définie (et continue) sur $\mathbb{R}$ puisque $2 - \sin^2 x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\alpha(x) := \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx\,,$$

de sorte que :

$$\alpha(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 - \sin^2(-x)}\, d(-x) = \frac{-\sin x}{2 - \sin^2 x}\,(-dx) = \alpha(x)\,.$$

Alors, en posant $t := \cos x$, d'où $dt = -\sin x\, dx$ et $1 - t^2 = \sin^2 x$:

$$\int \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx = -\int \frac{dt}{2 - (1 - t^2)} = -\int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + C = \arctan(\cos x) + C\,.$$

• On peut *toujours* faire le changement de variable :

$$t := \tan \frac{x}{2}$$

(en faisant cependant attention aux domaines de définition). On a alors :

$$dt = \frac{1}{2}\big(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\big)\, dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}\,,$$

et d'autre part :

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}\,,$$

comme on a vu à l'exercice **2** (b) du TD 3 du cours d'Analyse. On verra des exemples dans la feuille de TD 3.

Remarque. Le changement de variable précédent fonctionne toujours, mais les calculs sont en général plus longs qu'avec les changements de variable particuliers, dans les cas où on a une propriété d'invariance de l'élément différentiel.

Enfin, si P et Q sont des fonctions polynomiales de deux variables réelles, on dit que la fonction :

$$f(x) := \frac{P(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}{Q(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}$$

est une *fraction rationnelle hyperbolique*. Pour calculer les primitives de f (sur les intervalles de son domaine de définition, à déterminer), c'est-à-dire :

$$\int \frac{P(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}{Q(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)}\, dx\,,$$

on peut *toujours* se ramener, par le changement de variable $t := e^x$, au calcul des primitives d'une fraction rationnelle de la variable t.