ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚ

ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ
ರಾಷ್ಟ್ರ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪುರಸ್ಕೃತ
ನಿವೃತ್ತ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕ

Typeset by:

Sri Ranga Digital Software Technologies Pvt. Ltd.

1st Cross, Ranganatha Nagara, Near Jain Temple,
Srirangapatna - 571438
Mandya District.

Phone No. : 08236 292432

ಅರ್ಪಣೆ

ಪೂಜ್ಯಗುರುಗಳಾದ

ದಿ| ಪ್ರೊ. ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್
ದಿ| ಪ್ರೊ. ಎನ್. ಸುಬ್ರಮಣ್ಯ (ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಿಯ)
ದಿ| ಪ್ರೊ. ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ
ದಿ| ಡಾ. ಎಮ್. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್
ದಿ| ಪ್ರೊ. ಆಡ್ಯನಡ್ಕ ಕೃಷ್ಣಭಟ್

ಶ್ರದ್ಧಾಪೂರ್ವಕವಾಗಿ

– ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ

ಪ್ರಕಾಶಕರ ನುಡಿ

ಗಣಿತ ಒಂದು ನಿಖರವಾದ ವಿಜ್ಞಾನ. ಗಣಿತದ ಸೌಂದಯವನ್ನು ಅರಿಯಬೇಕಾದರೆ ಅದರ ಒಳಹೊಕ್ಕು ನೋಡಬೇಕು. ಸಂಗೀತವನ್ನು ಆಸ್ವಾದಿಸಲು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಗಣಿತಲೋಕಕ್ಕೆ ಅದರ ಆನಂದವನ್ನು ಅನುಭವಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು ಮೂವತ್ತಾರು ವರ್ಷಗಳು ಗಣಿತ ಬೋಧಿಸಿ ಅಪಾರ ಅನುಭವ ಹೊಂದಿರುವವರು ಶ್ರೀ ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯರವರು. ನವದೆಹಲಿಯ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ., ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ಡಿ.ಎಸ್.ಇ.ಆರ್.ಟಿ. ಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹಲವು ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪುರಸ್ಕಾರ ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಭಾರತದ ರಾಷ್ಟ್ರಪತಿಗಳು ನೀಡುವ ಉತ್ತಮ ಶಿಕ್ಷಕ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪುರಸ್ಕೃತರು. ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಮತ್ತು ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರುಗಳಿಗಾಗಿ ನಡೆಸುವ ತರಬೇತಿ ಕಾರ್ಯಗಾರಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಈಗಾಗಲೇ "ಗಣಿತ ಅಗಣಿತ", "ಜಗತ್ತಿನ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರು", "ನಾವೆಷ್ಟು ಬುದ್ಧಿವಂತರು" "ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು", "ಮಕ್ಕಳ ಕೈಚಳಕ (ರೇಖಾಗಣಿತ)", "ಗಣಿತ ವೈವಿಧ್ಯ", "ಗಣಿತ ಮಾಧುರ್ಯ" ಮುಂತಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಗಣಿತ ಸಾಹಿತ್ಯಕ್ಕೆ ಅಮೂಲ್ಯ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಶ್ರೀ ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ ರವರು ರಚಿಸಿರುವ "ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕ ಗಣಿತಲೋಕದ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರಿಗೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆರಂಭಿಸಿ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಶುದ್ಧವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಶುದ್ಧ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಮೈತ್ರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಪರಿಮೇಯ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕಲ್ಪನಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕೆಲವು ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಮೂಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್, ಡಿ. ಆರ್. ಕಪ್ರೇಕರ್, ಪೈಥಾಗೊರಸ್, ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಹೀಗೆ "ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚದ" ಒಂದು ಪಕ್ಷಿನೋಟವನ್ನೇ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ಅನುಬಂಧದಲ್ಲಿ 2 ರಿಂದ 5000 ತನಕ ಅವಿಭಾಜ್ಯ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ, ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನೂ ನೀಡಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕುತೂಹಲ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಅವರ ಈ ಕಾರ್ಯ ಸ್ತುತ್ಯಾರ್ಹ. ಲೇಖಕರಿಗೆ ನನ್ನ ಅಭಿನಂದನೆಗಳು. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರು ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕರು ಕೊಂಡು ಅದರ ಸದುಪಯೋಗ ಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ವಿನಂತಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಪ್ರಕಾಶಕರು

ಮುನ್ನುಡಿ

ಶಿಕ್ಷಣ ವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಸುದೀರ್ಘ ಅನುಭವ ಹೊಂದಿರುವವರೂ ರಾಷ್ಟ್ರಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪುರಸ್ಕೃತರೂ ಹಾಗೂ ಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ, ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ, ಅತೀವ ಆಸಕ್ತಿ ಮತ್ತು ತಾರುಣ್ಯೋತ್ಸಾಹಗಳನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ತಮ್ಮ ವಯೋಧರ್ಮಕ್ಕೂ ಮೀರಿದ ಅದಮ್ಯ ಚೈತನ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, ತಮಗೆ ಪರಮ ಪ್ರಿಯವೆನಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರದ ಸೋಜಿಗಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಕೌತುಕಗಳನ್ನೂ ಜನರಿಗೆ ಮುಟ್ಟಿಸಬೇಕೆಂಬ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮನ್ನು ಅವಿರತವಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಹಿರಿಯರಾದ ಶ್ರೀಯುತ ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ ಅವರ ಕಳಕಳಿ–ಹಂಬಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ನಾನು ಬೆರಗಾಗಿದ್ದೇನೆ.

ಇಂತಹ ಸಹೃದಯ ಹಿರಿಯರು ಬರವಣಿಗೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಈಗಿನ್ನೂ ಕಣ್ಣು ಬಿಡುತ್ತಿರುವ ನನ್ನಿಂದ ತಮ್ಮ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪುಸ್ತಿಕೆಗೆ ಮುನ್ನುಡಿ ಬರೆದುಕೊಡಬೇಕೆಂದು ಬಯಸಿರುವುದನ್ನು ನಾನು ಸಂಕೋಚ ಹಿಂಜರಿಕೆಗಳಿಂದಲೇ ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಶ್ರೀಯುತರು 'ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚ'ವೆಂಬ ತಮ್ಮ ಹದಿನೈದನೆಯ ಪ್ರಕಟಣೆಯಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಯ ಸಹಿತ ಹಲವಾರು ಸೋಜಿಗದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ಅಮೂರ್ತವಾದ ಸ್ತರಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಸಾಕಾರಗೊಂಡು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಅಥವಾ ಅತ್ಯಧಿಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಗಣಿತದ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ವಿಶಾಲ ಜನತೆಗೆ ತಲುಪಿಸುವುದು ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸ. ಇಂತಹ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಅತೀವ ಎಚ್ಚರಿಕೆ ವಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಕಾರಣ, ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವವರು ಅಮೂರ್ತ ಸ್ತರದಲ್ಲಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತವಾಗುವ ವಿಷಯವು ಅರ್ಥವಾಗದಿದ್ದರೆ ಅತ್ಯಾನಂದ ವೀಯಬಹುದಾದ ಗಣಿತದ ವಿಷಯದಿಂದ ಮತ್ತಷ್ಟು ಹಿಮ್ಮುಖರಾಗುವ ಅಪಾಯವಿದೆ. ಅದಾಗಿ, ಸರಳ ಹಾಗೂ ಸೂಕ್ತವಾದ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿಷಯವನ್ನು ತಿಳಿಯಪಡಿಸುವುದೇ ಔಚಿತ್ಯಪೂರ್ಣವಾದ ಮಾರ್ಗವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಮಯಸಿದ್ಧ ಮಾರ್ಗವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರವೆಂಬ ಸಾಗರಸದೃಶ ಲೋಕದಿಂದ ತಾವು ದಕ್ಕಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಅಮೂಲ್ಯ ರತ್ನಗಳನ್ನೂ ಅವುಗಳು ನೀಡುವ ಅವರ್ಣನೀಯ ಆನಂದದ ಸವಿಯನ್ನು ಓದುಗರಿಗೆ ರುಚಿಸುವಂತೆ ಉಣಬಡಿಸಿರುವ ಶ್ರೀಯುತರ ವಿಷಯನಿಷ್ಠ ಸಾತ್ತ್ವಿಕ ಪ್ರಯತ್ನಕ್ಕೆ ಯಶಸ್ಸು ಹಾಗೂ ವಿಶಾಲ ಮನ್ನಣೆಗಳು ಸಿಗಲೆಂದು ಕಳಕಳಿಯಿಂದ ಬಯಸುತ್ತೇನೆ.

ಸಿ. ಎಸ್. ಅರವಿಂದ

ಲೇಖಕನ ಮಾತು

ಬಾಲ್ಯದಿಂದಲೂ ನನಗೆ ಗಣಿತ ಕಂಡರೆ ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿ. ಇದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ತಾಯಿಯವರೇ ಕಾರಣ. ತಾಯಿ ಮೊದಲ ಗುರು ಅಲ್ಲವೆ? ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅವರು ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಬಹಳ ಕುತೂಹಲಕರವಾಗಿತ್ತು. ಮೈಸೂರಿನ ಲಿಟರರಿ ಯೂನಿಯನ್‌ನಲ್ಲಿ ಪ್ರೊ. ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ, ಪ್ರೊ. ಎನ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ, ಪ್ರೊ. ಎಂ. ವಿ. ಜಂಬುನಾಥನ್, ಪ್ರೊ. ಎಲ್. ಎನ್. ಚಕ್ರವರ್ತಿ ಮುಂತಾದವರಿಂದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಬಗ್ಗೆ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಅನೇಕ ಉಪನ್ಯಾಸಗಳು, ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ಭಾಗವಹಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ. ಶಿಕ್ಷಕನಾದ ಮೇಲೆ ಗಣಿತವೇ ನನ್ನ ಉಸಿರಾಗಿತ್ತು. ಯುವರಾಜಾ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಗಣಿತ ಬೇಸಿಗೆ ಶಿಬಿರದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಿದೆ. ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ. ಡಿ.ಎಸ್.ಇ.ಆರ್.ಟಿ. ಮತ್ತು ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ.ಗಳಿಗೆ ಅನೇಕ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿ ರಾಷ್ಟ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರಶಸ್ತಿ ಪುರಸ್ಕಾರ ಪಡೆದೆ. ಶಿಕ್ಷಕನಾಗಿದ್ದಾಗ ಪ್ರೊ. ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ ಅವರ ಒಡನಾಟದಲ್ಲಿ ಅವರು ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದ ಗಣಿತದ ಅನೇಕ ರಸಪ್ರಶ್ನೆ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ. "ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು" "ನಾವೆಷ್ಟುಬುದ್ಧಿವಂತರು" ಮುಂತಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದೆ. ಅನಂತರ 'ಜಗತ್ತಿನ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರು', "ಮಕ್ಕಳ ಕೈಚಳಕ", "ಮೆದುಳಿಗೆ ಕಸರತ್ತು" ಮುಂತಾದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಾಶಕರು ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು. ಹೀಗೆ ಹಿಂದಿನಿಂದಲೂ ವಿವಿಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಗ್ರಹಿಸಿದ್ದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಈಗ "ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚ" ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೊರತಂದಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ನೀಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಬಲು ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ತಿಳಿಸಿದೆ. ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ನೇರವಾಗಿ ಭಾಗಿಸದೆ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕವನ್ನು ಸುಲಭಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು, ಭಾರತೀಯರ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪೈ, ಕೆಲವು ಜೋಡಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶೇಷಗುಣ. ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ನೋಡುವುದೇ ಒಂದು ಸಂತೋಷ. ಈ ಪುಸ್ತಕ ಬರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಿತ್ರರು ನೀಡಿದ ಯುಕ್ತ ಸಲಹೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಓದಿ, ತಿದ್ದಿ, ಯುಕ್ತ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನೀಡಿದ ಡಾ. ಸಿ. ಎಸ್. ಯೋಗಾನಂದ, ಶ್ರೀ. ಎ. ವೆಂಕಟರಾಮ್ ಅವರಿಗೂ, ಮುನ್ನುಡಿ ನೀಡಿರುವ

ಶ್ರೀ. ಸಿ. ಎಸ್. ಅರವಿಂದ, ಧೈರ್ಯದಿಂದ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಮುಂದೆ ಬಂದಿರುವ ಮಹಿಮಾ ಪ್ರಕಾಶನದ ಶ್ರೀ ಶ್ರೀನಿವಾಸ್ ಅವರಿಗೆ ನನ್ನ ವಂದನೆಗಳು.

ಆರೋಗ್ಯಕರ ಸಲಹೆಯನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಲು ನಾನು ಸದಾ ಸಿದ್ಧ.

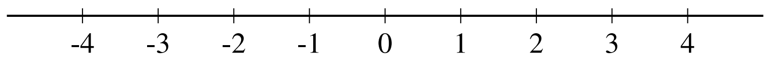
ಬೆಂಗಳೂರು

– ***ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ***
ನಿವೃತ್ತ ಗಣಿತಜ್ಞ
ಮೊಬೈಲ್ ಸಂಖ್ಯೆ: +91 9972034501

ವಿಷಯಸೂಚಿ

ಅಧ್ಯಾಯ ೧

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು



ಇದೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

0 ಯಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಇರುವ $1, 2, 3, 4 \ldots$ ಇವನ್ನು **ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

0 ಯಿಂದ ಎಡಗಡೆಗೆ ಇರುವ $-1, -2, -3, \ldots$ ಇವನ್ನು **ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

0 ಮಾತ್ರ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕವೂ **ಅಲ್ಲ**.

$0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ ಇವು **ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು**.

$1, 2, 3, 4 \ldots$ ಇವು **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ** ಅಥವಾ **ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು**.

ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ $2, 4, 6, 8 \ldots$ **ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು**. ಅಂದರೆ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ $1, 3, 5, 7 \ldots$ **ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು**. ಅಂದರೆ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18 \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು **ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳು**. ಇವುಗಳಿಗೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಎರಡೇ ಅಪವರ್ತನವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ **ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.**

ಉದಾ: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \ldots$ 1 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ 2, 3 ಅವಳಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳು (3, 5), (11, 13) ಕೊ ಪ್ರೈಮ್ಸ್.

$1, 4, 9, 16, 25 \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು **ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು**. ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$1, 8, 27, 64, 125 \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು **ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು**. ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಮೂರು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು ತನ್ನನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಅಪವರ್ತಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಅದು **ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ.**

ಉದಾಹರಣೆಗೆ:
$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$
$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

$6, 28, 496 \ldots$ **ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

p ಮತ್ತು q ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ p/q ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(q \neq 0)$ **ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

ಉದಾ: 3/2, 7/4.

$\sqrt{2}, \sqrt{3} \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇವು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆಗಳು.**

ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಧವಾದ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯೇ ಕಲ್ಪನಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. $\sqrt{-1}$ ಒಂದು ಕಲ್ಪನಾಸಂಖ್ಯೆ Imaginary Number. ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಕಲ್ಪನಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿ ಸಂಕೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೨

ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಎರಡು ಗುಂಪು ಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದು. $0, 2, 4, 6, 8$ ಮುಂತಾದವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಶೇಷ 0 ಬರುತ್ತದೆ. ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $2n$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸ ಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ $1, 3, 5, 7, 9$ ಮುಂತಾದವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $2n + 1$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಷಯವನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕು. 0 ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗಲೂ 2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$0, 2, 4, 6, 8$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2.

$1, 3, 5, 7, 9$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2.

ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$2 + 2 = 4, \quad 4 + 6 = 10, \quad 6 + 8 = 14$$

ಅಂದರೆ $2n + 2n = 4n$ ಅಥವಾ $2(2n)$

ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$3 + 5 = 8, \quad 7 + 9 = 16, \quad 11 + 13 = 24.$$

ಅಂದರೆ $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4(n + 1)$

ಎಷ್ಟು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ಮೊತ್ತವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$2 + 4 + 6 = 12$$
$$14 + 16 + 18 + 20 = 68$$

ಅಂದರೆ $(2n) + (2n + 2) + (2n + 4) = 6n + 6 = 6(n + 1)$

ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

3 ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

4 ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ.

5 ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

6 ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ.

$2n + 1$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ. $2n$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$4 \times 6 = 24, \qquad 8 \times 10 = 80$$

ಎಷ್ಟು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೂ ಗುಣಲಬ್ಧ ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ರುತ್ತದೆ.

$$2 \times 4 \times 6 = 48, \quad 2 \times 4 \times 8 \times 12 = 768$$
$$2n \cdot 2n \cdot 2n \cdots n = (2n)^n$$

ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$3 \times 5 = 15, \quad 7 \times 9 = 63$$
$$(2n + 1)(2n + 3) = 4n^2 + 8n + 3 = 2(2n^2 + 4n) + 3$$

ಎಷ್ಟು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೂ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$5 \times 7 \times 9 = 315, \quad 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$$
$$(2n + 1)(2n + 3)(2n + 5) = 2(4n^3 + 18n^2 + 23n) + 15$$

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮಸಂಖ್ಯೆ $4^2 = 16, \quad 8^2 = 64, \quad (2n)^2 = 4n^2$

ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ $9^2 = 81, \quad 15^2 = 225, \quad (2n+1)^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

$$= 4(n^2 + n) + 1$$

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟನೇ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$4^2 = 16, \quad 4^3 = 64, \quad 6^3 = 216, \quad 6^4 = 1296$$

ಆದರೆ $2^0 = 1$ ಇದೊಂದು ಅಪವಾದ

$$n^0 = 1, \quad n \neq 0$$

ಹಾಗೆಯೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟನೇ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$3^0 = 1, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81$$

ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗೆ 0 ಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಅಥವಾ ಕಳೆದರೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ.

$$2 + 0 = 2, \quad 4 + 0 = 4, \quad 5 + 0 = 5, \quad 7 + 0 = 7$$
$$2 - 0 = 2, \quad 4 - 0 = 4, \quad 5 - 0 = 5, \quad 7 - 0 = 7$$

$x \pm 0 = x$, x ಸಮ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲಿ, ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲಿ 0 ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 0 ನೇ ಬರುತ್ತದೆ.

$$4 \times 0 = 0, \quad 7 \times 0 = 0, \quad a \times 0 = 0$$

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲಿ, ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲಿ 0 ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಾರದು. 0 ಯನ್ನು ಸಮ ಅಥವಾ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 0 ನೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ 0 ಯನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅನಿರ್ಧಾರಿತ.

$$\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{0}{2} = 0, \quad \frac{0}{3} = 0, \quad \frac{0}{4} = 0, \quad \frac{0}{n} = 0, \quad n \neq 0$$

ಆದರೆ $0 \times 0, \quad \frac{0}{0} = 0$ ಇದನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸಲು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಆರಂಭವಾಯಿತು.

ಅಧ್ಯಾಯ ೩

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $5 \times 5 = 25$, $6 \times 6 = 36$.

25 ಮತ್ತು 36 ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡು ಸಮಾನ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುತ್ತದೆಯೋ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400 ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1, 4, 9, 6, 5 ಮತ್ತು 00 ಎಂಬ ಅಂಕಗಳೇ ಬಂದಿವೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1, 4, 9, 6, 5, 00 ಬಂದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ 11, 14, 15, 19, 20, 26 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1, 4, 5, 9, 0, 6 ಬಂದಿವೆ. ಅವು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ ಹೀಗೆ ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವಾದರೂ, ಅದರ ವಿಲೋಮ ಸತ್ಯವಲ್ಲ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2, 3, 7, 8 ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಖಂಡಿತ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು.

210, 312, 4203, 1187, 23458 ಇವು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ 0, 2, 3, 7, 8 ಅಂಕಗಳು ಬಂದಿವೆ.

ಕೆಲವು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ನೋಡೋಣ.

ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ	ಅಂಕಮೂಲ
16	1+6=7
25	2+5=7
36	3+6=9
100	1+0+0=1
121	1+2+1=4

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಕೆಲವು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $7, 9, 1, 4$ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $7, 9, 1$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅವು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $19, 31, 63, 34$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಆದರೂ ಅವುಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $1 + 9 = 10, 1 + 0 = 1$

$$3 + 1 = 4$$

$$6 + 3 = 9$$

$$3 + 4 = 7$$ ಆಗಿವೆ

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದೇ?

ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ $3n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $81, 144$ ಇವು ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$$81 = 3 \times 27, \quad 144 = 3 \times 48.$$

ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಎಲ್ಲಾ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $3n + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದೇ ರೀತಿ $49, 64, 25, 16$ ಇವು ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

$$64 = 3 \times 21 + 1$$

$$49 = 3 \times 16 + 1$$

$$25 = 3 \times 8 + 1$$

ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು, ಎಲ್ಲಾ ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ $4n$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$16 = 4 \times 4$$

$$64 = 4 \times 16$$

ಒಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಎಲ್ಲಾ ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ $4n+1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$49 = 4 \times 12 + 1$$

$$25 = 4 \times 6 + 1$$

$$81 = 4 \times 20 + 1$$

ಶುದ್ಧ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $3n, 3n + 1, 4n, 4n + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯ ಬಹುದಾದರೂ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $15 = 3 \times 5$

$$19 = 3 \times 6 + 1$$

$$40 = 3 \times 13 + 1$$

ಇದೇ ರೀತಿ $32 = 4 \times 8$

$$20 = 4 \times 5$$

$$40 = 4 \times 10$$

$$17 = 4 \times 4 + 1$$

$$29 = 4 \times 7 + 1$$

$$37 = 4 \times 9 + 1$$

ಅಂದರೆ $15, 19, 40, 32, 20, 40, 17, 29, 37$ ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಶುದ್ಧವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $4 = 1 + 3$

$$9 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೪

ಶುದ್ಧ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಘನಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $2\times2\times2 = 8, 3\times3\times3 = 27$, 8 ಮತ್ತು 27 ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಒಂದರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ

$$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1728\cdots$$

ಇವೆಲ್ಲವೂ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ.

ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಅಂಕ ಬೇಕಾದರೂ ಇರಬಹುದು. ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ 9 ರ ತನಕ ಎಲ್ಲ ಅಂಕಗಳೂ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದೊಂದು ವಿಶೇಷತೆ.

ಈ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 8 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿ, ಅಥವಾ 9 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ ಅಥವಾ 9 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು (1) ಸೇರಿಸುವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

$$\begin{aligned} 216 &= 8\times 27, & 512 &= 8\times 64\\ 729 &= 9\times 81, & 3375 &= 9\times 375\\ 4096 &= 9\times 455+1, & 6859 &= 9\times 762+1 \end{aligned}$$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $3^2 + 4^2 = 5^2$

$5^2 + 12^2 = 13^2$ ಇದು ಸಾಧ್ಯ

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು.

$$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 = 1729$$
$$15^3 + 9^3 = 2^3 + 16^3 = 32768$$

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಉದಾಹರಣೆ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಮೂರುಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನವಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

ಕ್ರಮಾಗತ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕ್ರಿ. ಶ. 476 ರಲ್ಲಿದ್ದ ಕುಸುಮಪುರದ ಆರ್ಯಭಟ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾನೆ.

ಆ ಸೂತ್ರವೇ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

$$1^3 + 2^3 = \left[\frac{1}{2}\cdot 2(2+1)\right]^2 = (3)^2 = 9$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = \left[\frac{1}{2}\times 3(3+1)\right]^2 = (6)^2 = 36$$

ಕ್ರಮಾಗತ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $1^3 + 2^3 = (1+2)^2 = 9.$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 = (6)^2 = 36.$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2 = (10)^2 = 100.$

$$\left[\frac{1}{2}\times n\times(n+1)\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೫

ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಆರು ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ಭಾಜಕಗಳು $1, 2, 3$ ಮತ್ತು 6. ಒಂದು, ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರರ ಮೊತ್ತ 6. ಆರು ಎನ್ನುವ ಭಾಜಕವನ್ನು ಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಹೀಗೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಜಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಂತೆ 6 ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಹಳ ಅಪರೂಪ. ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 6, ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ 28 ಏಕೆಂದರೆ 28 ರ ಭಾಜಕಗಳು 1, 2, 4, 7, 14, 28. ಇಪ್ಪತ್ತೆಂಟನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ, ಉಳಿದ 1, 2, 4, 7 ಮತ್ತು 14 ರ ಮೊತ್ತ 28. ಆದುದರಿಂದ 28 ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ. ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ನಾನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 496 ಮತ್ತು 8128. ಇವುಗಳ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ಭಾಜಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ, ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ತಿಳಿದಿರುವ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 6 ಅಥವಾ 28 ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಎಂಬುವನು ಕ್ರಿ. ಪೂ. 3 ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಮ್ಮ ಮುಂದೆ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ.

ಆ ಸೂತ್ರವೇ $2^{n-1}(2^n - 1)$. n ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದಾಗ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $2^n - 1$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಸೂತ್ರವು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

$2^n - 1$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ $n = 2$ ಆದರೆ

$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, 3 ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ದರಿಂದ $2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2-1}(2^2 - 1)$

$= 2 \times 3$

$= 6$ **ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ**

$2^n - 1$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ $n = 3$ ಆದರೆ

$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$, 7 ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ

$2^{n-1}(2^n - 1)$

$2^{3-1}(2^3 - 1)$

$4(7) = 28$ **ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ**

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ

$2^n - 1$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ $n = 5$ ಆದರೆ

$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$, 31 ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ

ಆದ್ದರಿಂದ $2^{n-1}(2^n - 1)$

$2^{5-1}(2^5 - 1)$

$= 16(31)$

$= 496$ **ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ**

ಇದೇ ರೀತಿ $n = 7$ ಆದಾಗ

$2^{7-1}(2^7 - 1)$

$2^6(128 - 1)$

64×127

$= 8128$ **ಇದು ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ**

ಯಹೂದಿ ವಂಶಸ್ಥನಾದ ನಿಕೋಮಾಕಸ್ ಎಂಬ ಗ್ರೀಸ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಿಗೆ ಕ್ರಿ. ಶ. ಒಂದನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದಿತ್ತಂತೆ. ಅನಂತರ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಫರ್ಮ ಮತ್ತು ಸ್ವಿಟ್ಜರ್‌ಲೆಂಡ್‌ನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆಯ್ಲರ್ ಕೆಲವು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದರು.

ಕ್ರಿ. ಶ. 12 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಭ್ಯವಾಯಿತು.

5 ನೆಯ ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ 33550336

6 ನೆಯ ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ 2589869056

ಕ್ರಿ. ಶ. 2001 ರ ಹೊತ್ತಿಗೆ $2^{126}(2^{127} - 1)$ ಎಂಬ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಲಭ್ಯವಾಗಿತ್ತು.

ಅಧ್ಯಾಯ ೬

ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಮೈತ್ರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು

220 ರ ಭಾಜಕಗಳು 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 (220 ರಿಂದ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೂ, ಅದನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿಲ್ಲ) ಈ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 284 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 284 ರ ಭಾಜಕಗಳು 1, 2, 4, 71, 142 (284 ರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೂ ಅದನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿಲ್ಲ) ಈ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 220 ಬರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ 220 ಮತ್ತು 284 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಮೈತ್ರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಈ ವಿಧವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅರಬ್ಬರು ಗಣಿತ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅದ್ಭುತ ಶಕ್ತಿ ಇರುವುದೆಂದೂ, ಇವು ಜ್ಯೋತಿಷ್ಯಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ ಇವುಗಳಿಂದ ಕತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಧರಿಸುವ ಅಥವಾ ಕೈಗೆ ಕಟ್ಟಿಕೊಳ್ಳುವ ಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅರಬ್ಬರು ತಯಾರಿಸುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. 11 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲೇ ಇದರ ಪರಿಚಯವಿತ್ತು. ಫರ್ಮಟ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನು 1636 ರಲ್ಲಿ 17296, 18416 ಮತ್ತು 9, 363, 584, 9, 437, 056 ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ.

ಅವನ ನಂತರ ಆಯ್ಲರ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನು 60 ಜೊತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದನು.

1866 ರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ 16 ವರ್ಷದ ಹುಡುಗ 1184 ಮತ್ತು 1210 ಎಂಬ ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ. ಇದು ಆಯ್ಲರ್ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟುಹೋಗಿತ್ತಂತೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ 1184 ಮತ್ತು 1210 . ಇಂದಿನವರಿಗೆ ಒಟ್ಟು 400 ವಿಶ್ವಾಸಾರ್ಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂದಿದೆ.

220	1184	2620	5020	6232	10744	17296
284	1210	2924	5564	6368	10856	18416

9363584	111448537712	ಇತ್ಯಾದಿ
9437056	118853793424	

ಮೈತ್ರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಒಂದು ಸೂತ್ರವೂ ಇದೆಯಂತೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೭

ಸೊನ್ನೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನರ್ಘ್ಯರತ್ನ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮಾತನಾಡುವಾಗ, ಸೊನ್ನೆ ಎಂದರೆ ಏನೂ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಏನೂ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸೊನ್ನೆಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ.

ಈ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಬಳಸಿದವರು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರು. ಇದೇ ರೀತಿ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಬಳಸಿದವರೂ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರೆ. ಹೀಗೆ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆ ಇವೆರಡೂ ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆ ಆಗಿದೆ.

ಖ್ಯಾತ ವ್ಯಂಗ್ಯ ಚಿತ್ರಕಾರ ಆರ್. ಕೆ. ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ಅವರು ಒಂದು ಸಲ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿಗೆ ಪ್ರವಾಸಕ್ಕೆ ಹೋಗಿದ್ದಾಗ, ಶ್ರೇಷ್ಠದಾರ್ಶನಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಬರ್ಟರೆಂಡ್ ರಸೆಲ್ ರವರನ್ನು ಭೇಟಿಮಾಡಿ ಇಬ್ಬರೂ ಲೋಕಾಭಿರಾಮವಾಗಿ ಮಾತನಾಡಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಒಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿ ರಸೆಲ್ ಅವರು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಏನೂ ಎಲ್ಲ ಎಂದರು, ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ಅವರು ಸುಮ್ಮನಿರದೆ ಹಾಗೆಂದರೇನು? ಆರ್ಯಭಟ, ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ, ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ ಮುಂತಾದವರ ಕೊಡುಗೆ ಅಪಾರವಲ್ಲವೇ ಎಂದರು. ರಸೆಲ್ ಅವರು ಪುನಃ ಮಾತು ಆರಂಭಿಸಿ ಅವರೆಲ್ಲ ಇರಲಿ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಮಾತ್ರ ಏನೂ ಎಲ್ಲ ಎಂದರು, ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ಅವರು ತಕ್ಷಣವೇ ಆಧುನಿಕ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಶ್ರೀನಿವಾಸರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಕೊಡುಗೆ ಅತಿಹೆಚ್ಚಿನದಲ್ಲವೇ ಎಂದರು. ರಸೆಲ್ ಅವರು ಏನು ಸಾರ್ ನಾನು ಆಗಲೇ ಹೇಳಿದೆನಲ್ಲ ಭಾರತೀಯರ ಕೊಡುಗೆ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದಾಗ, ಆಗ ಲಕ್ಷ್ಮಣ್ ಅವರಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಯಿತು. ಓಹೋ! ಸೊನ್ನೆ ಕುರಿತು ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದೀರಾ ಎಂದರು.

ರಸೆಲ್ ಅವರು ಮಾತು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದು ಭಾರತೀಯರು ಜಗತ್ತಿಗೆ ನೀಡಿರುವ ಅತ್ಯಮೂಲ್ಯವಾದ ಕೊಡುಗೆ. 'ಸೊನ್ನೆ' ಇಲ್ಲದ ಪ್ರಪಂಚವನ್ನು ನಾವು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳೆಲ್ಲಾ ಸ್ಥಗಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ವಾಣಿಜ್ಯ ವ್ಯವಹಾರಗಳು ಸ್ತಬ್ಧವಾಗುತ್ತವೆ. ವಿಜ್ಞಾನ, ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಕುಂಠಿತವಾಗುತ್ತವೆ. ಸಾಮಾಜಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳೆಲ್ಲಾ ನಿಂತು

ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಇದು ಊಹಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಚಿಂತನೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯು ಮಾನವನ ಜೀವನದ ಹೃದಯನಾಡಿ ಆಗಿದೆ ಎಂದರು.

ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಎಂದ ಕೂಡಲೆ ಬೆಲೆಯೇ ಇಲ್ಲದ್ದು ಎಂದು ತಿಳಿದರೂ ಅದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ತಿಳಿದಾಗ ಅದರ ಪೂರ್ಣಮಹತ್ವ ತಿಳಿದು ಬರುತ್ತದೆ. ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಶಬ್ದಗಳು ತತ್ಸಮ, ತತ್ಭವಗಳು.

ಸೊನ್ನೆಯ ಮಹತ್ವದ ಬಗ್ಗೆ ಒಂದು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರವಾದ ಕಥೆ ಇದೆ. ನಿಮಗೆಲ್ಲಾ ಗೊತ್ತು. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತದ ಮಾಸ್ತರು ಪಾಠಮಾಡುತ್ತಾ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಒಂದು ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. ಆಗ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಬಹಳ ವಿನಯದಿಂದ ಎದ್ದುನಿಂತು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಬರುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ಕೇಳಿದನಂತೆ. ಮಾಸ್ತರು ಉತ್ತರ ನೀಡಲಾಗದೆ ಬಹಳ ಬುದ್ಧಿವಂತಿಕೆಯಿಂದ ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸುತ್ತೇನೆಂದು ಹೇಳಿದರಂತೆ. ಆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೇಳಿದ ಬಾಲಕ ಮತ್ಯಾರೂ ಅಲ್ಲ ಆಧುನಿಕ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್. ಆ ಬಾಲಕ ಅಂದು ಕೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮುಂದೆ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಎಂಬ ಹೊಸ ಶಾಖೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಯಿತು.

ಸೊನ್ನೆಯ ವಿಶೇಷ ಗುಣದ ಬಗ್ಗೆ, ನನ್ನ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಶಿಕ್ಷಕರೊಬ್ಬರು ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದ ಮಾತು ನನ್ನ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹಸಿಯಾಗಿದೆ. ಯಾರ ಸಹವಾಸ ಬೇಕಾದರೂ ಮಾಡಿ, ಸೊನ್ನೆ ಸಹವಾಸ ಮಾತ್ರ ಮಾಡಬೇಡಿ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು. ಏಕೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೂ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಅಲ್ಲವೇ!.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ (Number line) ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಸೊನ್ನೆ. ಇದರ ಬಲಗಡೆ ಇರುವ $+1, +2, +3, \cdots$ ಮುಂತಾದವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಸೊನ್ನೆಯ ಎಡಗಡೆ ಇರುವ $-1, -2, -3 \cdots$ ಮುಂತಾದವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಮಾತ್ರ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಅಲ್ಲ, ಋಣಚಿಹ್ನೆಯೂ ಅಲ್ಲ, ಇದೊಂದು ತಟಸ್ಥ ಸಂಖ್ಯೆ. ಸೊನ್ನೆ ಮಾತ್ರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಅನನ್ಯ ಸ್ಥಾನ ಹೊಂದಿದೆ.

ಸೊನ್ನೆಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಹೆಸರುಗಳಿವೆ. ಶೂನ್ಯ, ಸೊನ್ನೆ, ಪೂಜಿ, ನಾಟ್, ಸೈಫರ್, ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಆಟದಲ್ಲಿ ಏನೂ ರನ್‌ಗಳಿಸದಿದ್ದಾಗ 'ಡಕ್' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಟೆನ್ನಿಸ್ ಆಟದಲ್ಲಿ 'ಲವ್' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕ ಬರದೇಯಿದ್ದಾಗ 'ಕುಂಬಳಕಾಯಿ' ಎನ್ನುವ ಪ್ರಯೋಗಗಳಿವೆ.

ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯದ ಅರ್ಥ ಏನೂ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಅರಬ್ಬರು ಇದನ್ನು 'ಸಿರ್ಫ' ಎಂದರು. ಕೆಲವು ಗಣಿತಜ್ಞರು. 'ಸಿರ್ಫ' ನ್ನು 'ಸಿಫ್ರ' ಎಂದು ಕರೆದರು. ಅದೇ ಮುಂದೆ ಸೈಫರ್ ಆಯಿತು. ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ವಿದ್ವಾಂಸರು ಇದನ್ನೇ 'ಜೀರೋ' ಎಂದರು.

ಸ್ಥಾನಬೆಲೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಕ್ರಮ ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತ, ಬೆಬಿಲೋನಿಯಾ, ಚೀನಾದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ ಏನೂ ಇಲ್ಲದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು

ಖಾಲಿಬಿಡುವ ಪದ್ಧತಿ ಜಾರಿಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 302 ರಲ್ಲಿ ಮೂರು ನೂರುಗಳು ಎರಡು ಬಿಡಿಗಳಿವೆ. ಇದನ್ನು 3 ರ ಮಧ್ಯೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಗಬಿಟ್ಟು 2 ನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಖಾಲಿ ಜಾಗದ ಪ್ರಮಾಣ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತ ಕೆಲವು ಬಾರಿ 3002 ಎಂದು ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಈ ಗೊಂದಲವನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು ಏನೂ ಇಲ್ಲದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಒಂದು ಚುಕ್ಕಿಯಿಂದ ಗುರುತಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಏಳನೆಯ ಶತಮಾನದ ಕವಿ 'ಸುಬಂಧುವಿನ' ವಾಸ್ತವದತ್ತಾ ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯವು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಕ್ರಿ. ಶ. 603 ರ ಕಾಂಬೋಡಿಯದ ಒಂದು ಶಾಸನದಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಚುಕ್ಕಿಯ ಬಳಕೆ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ. 9 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಚೀನಾದ ಒಂದು ಕೃತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಈ ಚುಕ್ಕಿಯ ಬಳಕೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು ಬಹುಶಃ ಈ ಚುಕ್ಕಿಯೇ ಬರುಬರುತ್ತ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸೊನ್ನೆ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗಿ ಇಂಡೋನೇಶ್ಯ ಚೀನಾಗಳಿಗೆ ಹರಡಿತೆಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. 9 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಭಾರತದ ಗಣಿತ ಪದ್ಧತಿ ಅರಬ್ ದೇಶಗಳಿಗೆ ತಲುಪಿ ಅನಂತರ ಯೂರೋಪಿಗೆ ತಲುಪಿತು. ಇಟಲಿಯ ಲಿಯೋನಾರ್ಡ್‌ಫಿಬೋನಾಚಿ, ಉತ್ತರ ಆಫ್ರಿಕ, ಗ್ರೀಸ್ ಮೊದಲಾದ ದೇಶಗಳಿಗೆ ಹೋಗಿದ್ದರಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯ ಬಳಕೆಯನ್ನು ಅಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಾರಕ್ಕೆ ತಂದ. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಇಟಲಿ ದೇಶದವರು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡರು.

ಆದಿಮಾನವನ ಆಲೋಚನೆ ವಿಸ್ತಾರಗೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಅವನಿಗೆ ಎಣಿಕೆಯ ಹಾಗೂ ಮಾಪನೆಯ ಅಗತ್ಯ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಯಿತು. ಅನಂತರ ಎಣಿಕೆಯ ಕ್ರಮ, ದಿನನಿತ್ಯದ ವ್ಯವಹಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಆತ ಹಲವಾರು ಎಣಿಕೆಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿಕೊಂಡ. ಮುಂದೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಬೇಕಾಯಿತು. ಅಂಕಗಣಿತದ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ವಿಧಾನವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕಲ್ಪನೆ ಬೆಳಕಿಗೆ ಬಂತು. ಮರದ ತುಂಡಿನ ಮೇಲೆ ಮಾಡುವ ಕಚ್ಚುಗಳು, ಬೊಟ್ಟುಗಳು ಬಳಕೆಗೆ ಬಂತು. ಗಣಿತದ ಮೂಲಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳೆಂಬ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಅಭ್ಯಾಸವಾಯಿತು.

ಮೊದಲು ಎಣಿಸಲು ತಮ್ಮ ಕೈ ಬೆರಳುಗಳನ್ನೇ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದರು. ಒಂಭತ್ತರ ಅನಂತರ ಬರುವ ಬೆರಳಿಗೆ ಬದಲಾಗಿ ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಬರೆದರೆ, ಆ ಎರಡೂ ಪ್ರತೀಕಗಳೂ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಸೇರಿ ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಅರಿವು ಮೂಡಿತು. ಇದು ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದರ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಪುಷ್ಟಿ ನೀಡಿತು. ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವನ್ನು ಹೋಲುವಂತಿದ್ದು ಈ ಪ್ರತೀಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ವಿಶಿಷ್ಟಸ್ಥಾನಗಳಿಸಿತು. ಈ ರೀತಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ಹೆಸರುಕೊಟ್ಟು ಅನಂತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $1, 2, 3$ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ 9 ರವರೆಗೆ ಬರೆಯಲಾಯಿತು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದುವಂತೆ ಈ ಪ್ರತೀಕವನ್ನು ಬಳಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ರೂಢಿಗೆ ಬಂತು. ಇದನ್ನೇ ದಾಶಮಿಕ ಅಥವಾ ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮ ಎನ್ನುವುದು.

ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ

ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ ಖ್ಯಾತಿ ಭಾರತೀಯರಿಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಏಕ, ದಶಕ, ಇತ್ಯಾದಿ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಸುಲಭವಾಗಿ ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸೊನ್ನೆಯ ಉಗಮ ಹೇಗಾಯಿತೆಂದು ನೋಡಿದೆವು. ಆದರೆ ಎಲ್ಲಿ ಆಯಿತು? ಎಂದು ಆಯಿತು? ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ನಿಖರವಾದ ಮಾಹಿತಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಕೆಲವು ಸಾಕ್ಷ್ಯಾಧಾರಗಳಿಂದ ಹೀಗಿರಬಹುದೆಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕ್ರಿ. ಪೂ. 200 ರ ಸುಮಾರಿಗೆ ಪಿಂಗಳ ಎಂಬುವನು ತನ್ನ "ಛಂದಸೂತ್ರ" ದಲ್ಲಿ ವೈದಿಕ ಛಂದಸ್ಸುಗಳ ವಿಮರ್ಶೆ ಮಾಡುತ್ತಾ ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗವನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಜೈನ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಕ್ರಿ. ಪೂ. 500 ಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಸೊನ್ನೆಯ ಬಳಕೆ ಇತ್ತೆಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಮೊಹೆಂಜೋದಾರೋ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದ ಉತ್ಖನನದಿಂದ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮ ಕ್ರಿ. ಪೂ. 300 ರ ವೇಳೆಗೆ ಪ್ರಚಾರದಲ್ಲಿರಬೇಕು ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿದೆ. ಋಜುರ್ವೇದ ಸಂಹಿತೆ(ವಾಜಸನೇಯಿ), ತೈತ್ತರೀಯ ಸಂಹಿತೆಯಲ್ಲಿ ಏಕದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ, ಆಯುತ, ನಿಯತ, ಪ್ರಯುತ, ಮುಂತಾದವು, ವಾಲ್ಮೀಕಿ ರಾಮಾಯಣದಲ್ಲಿ ವಾನರ ಸೈನ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳುವಲ್ಲಿ 10^{55} ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿದೆ. ಹಾಗೂ ಜೈನ ಗಣಿತ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯ ವ್ಯಾಪಕ ಬಳಕೆಯಿದೆ. ಪ್ರಾಚೀನ ಬ್ಯಾಬಿಲೊನ್ನಿಯರು ಮಧ್ಯ ಅಮೇರಿಕದ ಮಾಯಾ ಜನಾಂಗದವರೂ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಪ್ರತೀಕಗಳನ್ನು ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ್ದರ ದಾಖಲೆಗಳಿವೆ.

ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗವು ಛಂದಃಸೂತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಬಹಳ ಹಿಂದಿನ ಗಣಿತ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿದೆ.

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 200 ರ ಬಖಶಾಲಿಯ ಹಸ್ತಲಿಖಿತ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಕ್ರಿ. ಪೂ. 505 ರ "ಪಂಚಸಿದ್ಧಾಂತಿಕಾ" ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯದ ಬಳಕೆಯಿದೆ. ವರಾಹಮಿಹೀರರ ಸಮಕಾಲೀನಾದ ಜಿನಭದ್ರ (ಕ್ರಿ. ಶ. 529 – 585) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬರವಣಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಸಹಿತ ಸಮರ್ಥಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಕ್ರಿ. ಶ. 525 ರಲ್ಲಿದ್ದ ಭಾಸ್ಕರ ತನ್ನ 'ಮಹಾಭಾಸ್ಕರೀಯ' ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಈತನು ಆರ್ಯಭಟನ ಶಿಷ್ಯ (ಮೊದಲನೆಯ) ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಎಂದು ಊಹಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾನಪೂರಕವಾಗಿ ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ರೂಢಿಗೆ ತಂದವನು ಈತನೇ. ಆರ್ಯಭಟನ ಟೀಕಾ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲೂ ಶೂನ್ಯದ ಪ್ರಯೋಗವಿದೆ. ಸಿದ್ಧಸೇನ "ತತ್ವಾರ್ಥಾಧಿಗಮ ಸೂತ್ರ" ದ ವಿಮರ್ಶೆಯಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ಶತೋತ್ತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭ ಎಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಇಷ್ಟೆಲ್ಲಾ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ ಶೂನ್ಯವು ಕ್ರಿ. ಶ. 9 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಈಚೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಆಧಾರಗಳಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಹೆಸರಿಲ್ಲದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ಲಾಪ್ಲಾಸ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞ ಭಾರತೀಯರ ಮೇಧಾಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಬಹಳವಾಗಿ ಹೊಗಳಿದ್ದಾನೆ. ಕ್ರಿ. ಪೂ. 3 ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಗ್ರೀಕರ ಹೆಸರಾಂತ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಮತ್ತು ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ರವರಿಗೇ ಹೊಳೆಯದಿದ್ದ ಈ ಸೊನ್ನೆಯ ಮಹತ್ವ ಹಿಂದೂ ಗಣಿತಜ್ಞರಿಗೆ ಹೊಳೆದದ್ದು ಹಿಂದೂ ದೇಶಕ್ಕೆ ಖ್ಯಾತಿ ತಂದುಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತಾನೆ.

ಕ್ರಿ. ಶ. 660 ರ ಸುಮಾರಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಪುರಾತನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ ಎಂಬುವನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಮೊತ್ತ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $0 + 5 = 5$.

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಸೊನ್ನೆ ಸಂಕಲನದ ಅನನ್ಯತೆಯ ಸಂಕೇತ ಎನ್ನುವುದು.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $7 - 0 = 7$

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $8 \times 0 = 0$

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರ ಬಗ್ಗೆ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ ಸರಿಯಾಗಿ ವಿವರಿಸಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಪ್ರಖ್ಯಾತರಾದ ಎರಡನೆಯ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರು ಸೊನ್ನೆಯ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಪ್ರಕಾರ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅನಂತ ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಭಾಸ್ಕರರ ಭಾವನೆ. ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಈಗ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ನಿಷೇಧ. ಏಕೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅನಿರ್ಧಾರಿತ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$a = 1$ ಆದಾಗ $\frac{a^2-1}{a-1}$ ರ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಉತ್ತರ 2, ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ತರ ಅನಿರ್ಧಾರಿತ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಉತ್ತರ 2 ಬರಲು ಕಾರಣ 0 ಯಿಂದ ಅಂಶವನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದರ ಪರಿಣಾಮವೇ ಆಗಿದೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಕ್ರಿಯೆ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಬಂದರೆ ಯಂತ್ರವು ತನ್ನ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೇವಲ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಬೆಲೆಯಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅದರ ಎಡಗಡೆಗೆ ಒಂದು ಬರೆದರೆ ಹತ್ತು ಆಗುತ್ತದೆ. ಬಲಗಡೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸೊನ್ನೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಒಂದನೂರು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಏನೂ ಬೆಲೆಯಿಲ್ಲದ ಸೊನ್ನೆ ಬೇರೆ ಅಂಕಗಳ ಜೊತೆ ಸೇರಿ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಬರೆದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $01,001$

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಒಂದರಿಂದ ಆರಂಭವಾದರೆ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸೊನ್ನೆಯ ವರ್ಗ ಸೊನ್ನೆಯೇ, ಸೊನ್ನೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವೂ ಸೊನ್ನೆಯೇ, ಸೊನ್ನೆಯ ಘನ ಸೊನ್ನೆ, ಸೊನ್ನೆಯ ಘನಮೂಲವೂ ಸೊನ್ನೆ.

ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯ ಘಾತವು ಸೊನ್ನೆಯಾದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ಒಂದು. ಆದರೆ ಸೊನ್ನೆಯ ಘಾತ ಸೊನ್ನೆ ಒಂದಲ್ಲ.

ಸೊನ್ನೆ ಶ್ರೇಣಿಲಬ್ಧದ ಬೆಲೆ ಒಂದು. ಏಕೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದೇ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಸೊನ್ನೆ, ಒಂದು, ಅನಂತ ಇವುಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ 7 ಗಣಿತ ಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅನಂತತ್ವ ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಕಲ್ಪನೆ, ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಆ ಏಳು ಸಂಗತಿಗಳೇ $\frac{\text{ಸೊನ್ನೆ}}{\text{ಸೊನ್ನೆ}}$, $\frac{\text{ಅನಂತ}}{\text{ಅನಂತ}}$, ಸೊನ್ನೆಯ ಘಾತ ಸೊನ್ನೆ, ಸೊನ್ನೆ×ಅನಂತ, ಅನಂತ–ಅನಂತ, ಅನಂತದ ಘಾತ ಸೊನ್ನೆ, ಸೊನ್ನೆಯ ಘಾತ ಅನಂತ.

ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಬಂದೇ ಬರುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಮಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಒಂದು, ಪಂಚಮಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ, ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು. ಹೀಗೆ ಸಪ್ತಮಾನದಲ್ಲಿ, ದಶಮಾನಗಳಲ್ಲೂ ಸೊನ್ನೆಯಿಂದಲೇ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಆರಂಭಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೊನ್ನೆ.

ಸೊನ್ನೆಯು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ, ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬೇಕು.

ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಒಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೊನ್ನೆ, ಒಂದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲೇಬಾರದು.

ಆಗಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅನಿರ್ಧಾರಿತ. ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಛೇದ ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಗೆ ಛೇದ ಅನಂತವಾದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸೊನ್ನೆಯ ಹತ್ತಿರ ಬರುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ ಸೊನ್ನೆಯು ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಸೊನ್ನೆ ಎರಡರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಹೇಳುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಸೊನ್ನೆಯ ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣಗಳು ಅಪಾರ. ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಉಪಜ್ಞೆಮಾಡಿದ ನಮ್ಮ ಪೂರ್ವಿಕರನ್ನು ನಾವು ಎಷ್ಟು ನೆನೆದರೂ ಸಾಲದು. ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಅವರು ನಮಗೆ ಎಷ್ಟು ಉಪಕಾರ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

ಇಂದು ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

1. ಚೌಕಳಿಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಎಕ್ಸ್ ಮತ್ತು ವೈ ಅಕ್ಷಗಳು ಅರ್ಧಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

2. ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್ ಉಷ್ಣತಾ ಮಾಪಕದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ ಸೊನ್ನೆ.

3. ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವೆ ಬರುವ ಮೌಲ್ಯ–ಸೊನ್ನೆ.

4. ಪರಿಮಾಣ ಇಲ್ಲದಿರುವಿಕೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಲು ಬಳಸುವ ಪ್ರತೀಕ ಸೊನ್ನೆ.

5. ಧ್ವನಿವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆಯ ಬಳಕೆಯಿದೆ.

6. ಪವನ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ಮಿತಿ.

7. ನೀರು ಹೆಪ್ಪುಗಟ್ಟುವುದು ಸೊನ್ನೆ $0°C$ ನಲ್ಲಿ.

ಹೀಗೆ ಸೊನ್ನೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅನರ್ಘ್ಯರತ್ನವೇ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೮

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅನಂತ ಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ

ಗಣಿತವನ್ನು 'ವಿಜ್ಞಾನದ ರಾಣಿ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಪರಸ್ಪರ ಅವಲಂಬಿತ ವಿಷಯಗಳು. ಗಣಿತವಿಲ್ಲದೆ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ ಬೆಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತ ಮಾತ್ರ ಹಿಂದಿನಿಂದಲೂ ತನ್ನ ಶುದ್ಧತೆಯನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು ಬಂದಿದೆ. ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲ ಗಹನವೂ, ಶುದ್ಧವೂ ಆದ ಗಣಿತ ಚಿಂತನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಸಿದ್ಧಾಂತದ ಹಲವಾರು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಂತವೆ ಅಥವಾ ಅವುಗಳಿಗೆ ಮಿತಿ ಇದೆಯೇ? ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬೇರೆ ಯಾವ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬೇಕು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರಾತ್ಯಕ್ಷಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಈ ಶ್ರೇಢಿಯಿಂದ ಕೈಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಒಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆನ್ನುತ್ತೇವೆ (*prime Numbers*).

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (*Natural Numbers*) ಅನಂತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಹ ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಹಾಕಿಕೊಂಡಾಗ, ಇನ್ನೂ ಸಂಪೂರ್ಣ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅನೇಕ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಡೆದಿವೆ.

$1, 2, 3, 4, 5\ldots$ ಮುಂತಾದವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಶ್ರೇಢಿ. ಇದು ಅನಂತವಾಗಿ ಕೊನೆ ಎಂಬುದಿಲ್ಲದೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $1, 3, 5, 7\ldots$ ಮುಂತಾದವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ $2, 4, 6, 8\ldots$ ಮುಂತಾದವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ.

ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ 2 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಒಡೆಯಬಹುದು. ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\ldots$ ಮುಂತಾದ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಕ್ರಿ. ಪೂ. 230 ರಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಸಮಕಾಲೀನನಾದ ಎರಟೋಸ್ತನೀಸ್ ಎಂಬುವನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ತೋರಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಕ್ರಮ ಎರಟೋಸ್ತನೀಸನ ಜರಡಿ ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ. ಅವನು ಹೊಡೆದುಹಾಕುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದರಿಂದ, ಒಂದನೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ 25 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡ. ಹೇಗೆ ಬಂತು? ಅವನಿಗೆ ನೋಡೋಣ. 1 ರಿಂದ 100 ರವರೆಗಿನ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು, 2 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದ, ನಂತರ 3 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದ, ಅನಂತರ 5 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದ, ಅನಂತರ 7 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದ. ಈಗ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸಂಖ್ಯೆ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಾಗ 11 ಮತ್ತು 13 ರಿಂದ ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆ ಅವನು ಒಂದರಿಂದ, ಒಂದುನೂರರವರೆಗೆ ಅವನು 25 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಇದ್ದಾಗ ಈ ರೀತಿಯ ಹೊಡೆಯುವ ಕ್ರಮದಿಂದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೂರ್ಣವಾದ ಶ್ರೇಢಿ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ನಿಜವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಕೊನೆ ಎಂಬುದೇಯಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳ ಹಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನೀತಿನಿಯಮಗಳಿಲ್ಲ. ಸಮರ್ಪಕ ಸೂತ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವ ಗಣಿತಜ್ಞನಿಗೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.

ಕನಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 2, ಹಾಗಾದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು? ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ತಲೆಕೆಡಿಸಿಕೊಂಡವನು ಗ್ರೀಸ್ ದೇಶದ ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡ್. ಇವನ ಪ್ರಕಾರ ಗರಿಷ್ಠ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದೇ ಇಲ್ಲ. ನೀವು ಎಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ, ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆ ಎಂದು ನಾನು ಸಾಧಿಸಬಲ್ಲೆ ಎಂದು ಹೇಳಿ ಜೊತೆಗೆ ನಿಖರವಾದ ಗಣಿತ ಸಾಧನೆ ನೀಡಿದ.

ಇದೇ ರೀತಿ $6n^2 + 6n + 31$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ n ಗೆ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮಾತ್ರ 74 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

$3n^2 + 3n + 23$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ n ಗೆ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮಾತ್ರ 71 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ.

$5n + 3$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಾರದಿದ್ದರೂ, ಈ ಸೂತ್ರವು ಹೆಚ್ಚಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂದಿದೆ.

$k = 1$ ಅಥವಾ 3 ಮತ್ತು n ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $2^n \cdot k + 1$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ರಾಬಿನ್ಸನ್ ಸೂತ್ರ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $n = 5$ ಮತ್ತು $k = 1$ ಆದಾಗ ಬರುವ 33 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ, $n = 5$ ಮತ್ತು $k = 3$ ಆದಾಗ ಬರುವ 97 ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

ಈಗಾಗಲೇ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಅನುಕೂಲ ಅಂತರಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರದಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ.

2 ರಿಂದ 1000 ರವರೆಗೆ 168.

2 ರಿಂದ 5000 ರವರೆಗೆ 1146.

2 ರಿಂದ 50,000 ರವರೆಗೆ 5133 ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ.

ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1, 3, 7, 9 ಎನ್ನುವ ಅಂಕಗಳೇ ಇರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $n^2 + n + 11$ ಮತ್ತು $n^2 + n + 17$ ಎಂಬ ಮತ್ತೆರಡು ಸೂತ್ರಗಳಿವೆ. $n = 0$ ಮತ್ತು $n = 79$ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ 80 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $n = 80, 81, 84, 89, 96$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ.

ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ, ಹೆಚ್ಚು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಗಣಿತ ಸಂಶೋಧಕರು ಇಂದಿಗೂ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಹೆಚ್ಚು ಅನಿಶ್ಚತೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದೆ.

$10^{2n} - 10^n + 1$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, $n = 1$ ಆದಾಗ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

$n = 2$ ಆದಾಗ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

$n = 3$ ಆದಾಗ ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

$n = 4$ ಆದಾಗ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

ಹೀಗೆ ಬಿಟ್ಟು ಬಿಟ್ಟು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬಂದಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅನೇಕ ಸೂತ್ರಗಳಿದ್ದರೂ ಯಾವುದೂ ಸಮರ್ಪಕ

ವಾಗಿಲ್ಲ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಇಂದಿಗೂ ಜಟಿಲ. ಸಂಖ್ಯಾಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಇದೊಂದು ಭಾರೀ ಸವಾಲು.

ಫರ್ಮಟ್ ಮಿತ್ರನಾದ 17 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ದೇಶದ ಪಾದ್ರಿ ಮರ್ಸೆನ್ ಮತ್ತೊಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ. ಆ ಸೂತ್ರವೇ

$$2^n - 1$$

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $n = 2$ ಮತ್ತು $n = 3$ ಆದಾಗ ಬರುವ 3 ಮತ್ತು 7 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$2^n - 1$ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ n ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ಮರ್ಸೆನ್ ತಿಳಿಸಿದ. ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 11$ ಆದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ 3, 7, 31, 2047 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ $n = 179, 181, 197$ ಮತ್ತು 233 ಆದಾಗ $2^n - 1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ.

n ನ ಬೆಲೆ 2, 19, 23, 317 ಆದಾಗ $\frac{10^n - 1}{9}$ ಎಂಬುದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ರಿಪೊನೆಟ್ ಸೂತ್ರ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಇನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು? ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಗಮನ ಹರಿಯಲು ಆರಂಭವಾಯಿತು.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ $2^{127} - 1$ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರು.

ಅನಂತರ $2^{11,213} - 1$ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರು.

ಕ್ರಿ. ಶ. 1971 ರಲ್ಲಿ, 24 ನೆಯ ಮರ್ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು.

ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ $2^{19,937} - 1$ ಇದರಲ್ಲಿ 6002 ಅಂಕಗಳಿವೆ.

ಅನಂತರ $2^{21,701} - 1$ ಇದರಲ್ಲಿ 6530 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳಿವೆ.

ಆಗಸ್ಟ್ 23, 2008 ಇಂಟರ್‌ನೆಟ್ ಮರ್ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಶೋಧನೆಯಿಂದ ಲಭಿಸಿದ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

$$2^{4,31,12,609} - 1$$

(2 ರ ಘಾತ 4 ಕೋಟಿ, 31ಲಕ್ಷ, 12 ಸಾವಿರದ 609 − 1)

ಇದರಲ್ಲಿ 1, 29, 78, 189 (1 ಕೋಟಿ, 29 ಲಕ್ಷ, 78 ಸಾವಿರದ, 189 ಅಂಕಗಳಿವೆ.)

ಇದು ಮರ್ಸೆನ್ ನ 47 ನೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದರೆ ಸೆಪ್ಟೆಂಬರ್ 6, 2008 ಮತ್ತು ಏಪ್ರಿಲ್ 12, 2009 ರಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸಂಶೋಧನೆ ನಡೆದರೂ ಆಗಸ್ಟ್ 23, 2008 ರಲ್ಲಿ ತಿಳಿದ ಮರ್ಸೆನ್ ಅವಿಭಾಜ್ಯವೇ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿತು.

ಇತ್ತೀಚಿನ ಸಂಶೋಧನೆಯಿಂದ 58 ನೆಯ ಮರ್ಸೆನ್ ನ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ

$$2^{5,78,85,161} - 1$$

(2 ರ ಘಾತ 5 ಕೋಟಿ, 78 ಲಕ್ಷ, 85, ಸಾವಿರ,161 − 1)
ಇದರಲ್ಲಿ 17 ಮಿಲಿಯನ್ ಅಂಕಗಳಿವೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಅಂತೂ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹುಡುಕುವ ಒಂದು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾತ್ರ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತಿದೆ.

ಗಣಿತಜ್ಞರು ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ವಿಚಿತ್ರ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ ಗುರುತಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸ್ವಭಾವ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

1) ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $11 + 13 = 24.$

ಇದು ರಷ್ಯಾದೇಶದ ಗಣಿತಜ್ಞ ಗೋಲ್ಡ್‌ಬಾಕ್ ಎಂಬುವನ ಊಹಾಪ್ರಮೇಯ.

2) ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 24 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24.$

3) ಎರಡು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $19 - 17 = 2.$

4) $1, 3$ ಮತ್ತು 5 ಎಂಬ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮೂರು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $3 + 5 + 7 = 15.$

5) ಎಲ್ಲಾ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $15 = 3 \times 5.$

6) ಎರಡು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $3 = 2^2 - 1^2$

$5 = 2^2 + 1^2$

7) ಎರಡರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಾಗತ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $2 \times 3 + 1 = 7$

$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$

8) $4n + 1$ ಎಂಬ ರೂಪವುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತದಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $13 = 2^2 + 3^2.$

ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಯಿಲರನು ಸಾಧಿಸಿ, $2^n(4n + 1)$ ಎಂಬ ರೂಪವುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಇದೇ ಗುಣವಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದನು.

9) ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 13 ಮತ್ತು 31

17 ಮತ್ತು 71

10) ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $5, 7, 17, 19$

11) ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $7, 37, 67, 97$

12) 2 ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಯಾವುದೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಒಂದು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{7} = 0.142857$

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

13) ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $101, 131, 181, 313$

14) 2 ಮತ್ತು 3 ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಬಂದಿವೆ. ಆದರೆ ಈ ರೀತಿಯ ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಸಿಗುವುದು ಕಷ್ಟ. ಹೀಗೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಯಾತ್ರೆ ಅನಂತ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೬

ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳ ಚಿತ್ರ

$4, 9, 16, 25 \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇವುಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಮೂಲಗಳಿವೆ. ಆದರೆ $2, 3, 5, 7 \ldots$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪೂರ್ಣವರ್ಗಮೂಲ ವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಇವೆಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ವರ್ಗಮೂಲ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮೀಪದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 2 ರ ವರ್ಗಮೂಲ

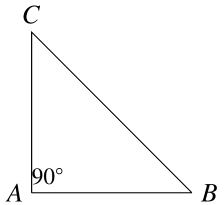
$$\sqrt{2} = 1.41421 \ldots$$

2 ರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು 5 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದವರೆಗೆ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು** ರೇಖಾಗಣಿತದ ರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ ನಮಗೆಲ್ಲಾ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.



CAB ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ

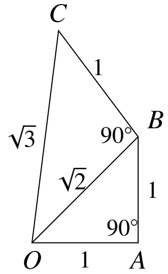
$\widehat{CAB} = 90^\circ$

CA ಮತ್ತು AB ಒಂದು ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ

$$\begin{aligned} CB^2 &= CA^2 + AB^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ &= 1 + 1 \\ CB^2 &= 2 \\ \therefore CB &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

ವಿಕರ್ಣ CB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದಾಗ $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

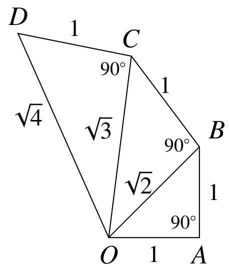


ಈಗ OBC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\widehat{B} = 90^\circ$

$OB = \sqrt{2}, BC = 1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\begin{aligned} OC^2 &= OB^2 + BC^2 \\ &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{1})^2 \\ &= 2 + 1 \\ OC^2 &= 3 \\ \therefore OC &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

3 ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು OC ಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯಬಹುದು.



ಈಗ OCD ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\widehat{c} = 90^\circ$

$OC = \sqrt{3}, CD = 1$ ಸೆಂ.ಮೀ.

$$\begin{aligned} OD^2 &= OC^2 + CD^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{1})^2 \\ &= 3 + 1 \\ OD^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore OD = \sqrt{4}$$
$$= 2$$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ 5, 6, 7, 8, 9, 10 ರ **ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.**

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 5, 6, 7, 8, 10 ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$\sqrt{1} = 1.000$

$\sqrt{2} = 1.414$

$\sqrt{3} = 1.732$

$\sqrt{4} = 2.000$

ಪೈ ಇದೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಯಾವುದೇ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಗೂ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ಇರುವ ಪ್ರಮಾಣ (ನಿಷ್ಪತ್ತಿ) ಇದರ ಬೆಲೆ $\frac{22}{7}$ ಅಥವಾ 3.1416 ರ ಸಮೀಪ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ವಿಶ್ವದಾದ್ಯಂತ ಬಹಳ ಹಿಂದಿನ ದಿನಗಳಿಂದ ಪ್ರಯತ್ನಗಳು ನಡೆದಿವೆ. ಕ್ರಿ. ಶ. 5 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಭಾರತದ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞ ಆರ್ಯಭಟನ ಪ್ರಕಾರ ಇದರ ಬೆಲೆ ಸುಮಾರು 3.1416…. ಭಾರತದ (ಎರಡನೆಯ) ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯರೂ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸುಮಾರು 3.1416 ಎಂದು ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದ್ದಾರೆ. ಭಾರತದ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಜ್ಞ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಹ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇದರ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಜ್ಯಾಮಿತಿಯ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ವಿಜ್ಞಾನ, ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ, ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ π ನ್ನು ಗಣಿತೀಯ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ನಾವು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಅಮೇರಿಕಾದಲ್ಲಿ ಮಾರ್ಚ್ 14 ರಂದು ಪೈ ದಿನವಾಗಿ ಆಚರಿಸುತ್ತಾರೆ. (3.14) ಯೂರೋಪ್‌ನಲ್ಲಿ ಜುಲೈ 22 ರಂದು ಪೈ ದಿನವಾಗಿ ಆಚರಿಸುತ್ತಾರೆ. $(\frac{22}{7})$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ದಿನಗಳಂದು ಆಚರಿಸುತ್ತಾರೆ.

e ಇದೊಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ exponential ಎಂಬ ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪದದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಕ್ಷರ. ಇದರ ಬೆಲೆ 2.7182·

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಲಾಗರಿದಂಗೆ ಇದೇ ಆಧಾರ. ಇದನ್ನು ಲಾಗರಿದಂನಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದವನು ಜಾನ್ ನೇಪಿಯರ್.

ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ಜೀವಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಮಾನವಿಜ್ಞಾನ ಮುಂತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ e ನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೦

ಭಾರತೀಯರ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪೈ

'ಯಾವ ವೃತ್ತದಲ್ಲೇ ಆಗಲಿ ಪರಿಧಿಗೂ, ವ್ಯಾಸಕ್ಕೂ ನಿಯತವಾದ ಅನುಪಾತವಿದೆ' ಇದನ್ನೇ ಪೈ ಎನ್ನುವುದು. ಇದರ ಸಂಕೇತ π

$$\pi = \frac{\text{ವೃತ್ತಪರಿಧಿ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}}$$

π ನ ಬೆಲೆ ಏನು? ಪುರಾತನ ಭಾರತೀಯರಲ್ಲಿ $\pi = \sqrt{10}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿತ್ತು.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಅತ್ಯಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞ ಕುಸುಮಪುರದ ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಯಭಟ ಜನಿಸಿದ್ದು ಕ್ರಿ. ಶ. 476 ರಲ್ಲಿ ಈತ ತನ್ನ 121 ಶ್ಲೋಕಗಳ **"ಆರ್ಯಭಟೀಯಂ"** ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ π ಗೆ ಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ಪ್ರಾಯಶಃ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಈ ಬೆಲೆ ಆರ್ಯಭಟೀಯದಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ಶ್ಲೋಕ ಹೀಗಿದೆ.

ಚತುರಧಿಕಂ ಶತಂ ಅಷ್ಟಗುಣಂ ದ್ವಾಷಷ್ಟಿಸ್ತಥಾ ಸಹಸ್ರಾಣಾಮ್
ಅಯುತದ್ವಯ ವಿಷ್ಕಂ ಭಸ್ಯ ಆಸನ್ನಃ ವೃತ್ತಪರಿಣಾಹಃ

$(100+4)\times 8+62,000$ ಎಂದರೆ $62,832$ ನ್ನು ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸವು $10,000\times 2$ ಅಥವಾ $20,000$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದಕಾರಣ $$\pi = \frac{\text{ಸುತ್ತಳತೆ(ಪರಿಧಿ)}}{\text{ವ್ಯಾಸ}} = \frac{62,832}{20,000}$$
$$= 3.1416 \quad \text{(ಸುಮಾರಾಗಿ)}$$

(ಕ್ರಿ. ಶ. 1340 – 1425) ಮಾಧವನ ಪ್ರಕಾರ $\pi = 3.14159265358979323$

$= 3.1416$ (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಎರಡನೆಯ ಆರ್ಯಭಟನ ಪ್ರಕಾರ

$$\pi = \frac{600}{191}$$

ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಯಭಟನಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಇದೇನು ಉತ್ತಮ ಬೆಲೆಯಲ್ಲ. ಕ್ರಿ. ಶ. 628 ರಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ $\pi = \sqrt{10}$ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ.

9 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ $\pi = 3.03\frac{3}{4}$ ಎಂದಿದ್ದಾನೆ.

ಕ್ರಿ. ಶ. 1150 ರಲ್ಲಿ ಭಾರತದ ಎರಡನೆಯ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಮೊದಲ ಆರ್ಯಭಟ ನೀಡಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ.

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416 \quad \text{(ಸುಮಾರು)}$$

ಮತ್ತೊಂದು ಬೆಲೆ $\pi = \frac{355}{113} = 3.14159292$

ಶ್ರೀಧರ ಮತ್ತು ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಹ π ಗೆ ತಮ್ಮದೇ ಬೆಲೆ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ. ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಸಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ನಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಮಾತ್ರ

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

19–20 ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಪುರಿಜಗನ್ನಾಥದ ಗೋವರ್ಧನ ಪೀಠದ ಸ್ವಾಮಿಗಳಾಗಿದ್ದ ಭಾರತೀ ಕೃಷ್ಣತೀರ್ಥರು π ಬೆಲೆಯನ್ನು 30 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಕೊಡುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಕ್ಷರ ಶ್ಲೋಕವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಗೋಪೀಭಾಗ್ಯ ಮಧುವ್ರಾತ ಶೃಂಗಿತೋದಧಿಸಂದಿಗೆ
ಜಲ ಜೀವಿತ ಖಾತಾವ ಗಲಹಾಲಾರ ಸಂಧರ

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279 2$$

22 – 12 – 1887 ರಿಂದ 26 – 4 – 1920 ರ ತನಕ ಜೀವಿತವಾಗಿದ್ದ ಆಧುನಿಕ ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರ ಪ್ರಕಾರ

$$\pi = 3.1415926535, 8979323846, 26434$$

$$\pi = \frac{12}{\sqrt{130}} \log\left[\frac{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{13})}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{13}{4^2}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \frac{19}{4^3}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

ಇತ್ತೀಚಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಪೈ ಬದಲಿಗೆ ಗ್ರೀಕ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ 21 ನೇ ಅಕ್ಷರವಾದ "ತೌ" ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಸೂಕ್ತ ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಪೈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಎರಡರಷ್ಟು ಮೌಲ್ಯ ಹೊಂದಿರುವ 'ತೌ' ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಂದರೆ 6.28 ರಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚು ಯುಕ್ತ ಎಂಬುದು ಕೆಲವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪೈಗಿಂತ (ಟೌ) ತೌ ಹೆಚ್ಚು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮೌಲ್ಯ ದಾಖಲಿಸಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತಿದೆ ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಿದೆ.

TAU(ಟೌ) ತೌ $= 2\pi$

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೧

ಕಲ್ಪನಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

9 ರ ವರ್ಗಮೂಲವೇನು?

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$+3 \times +3 = 9 \quad \text{ಅಥವಾ} \; -3 \times -3 = 9$$

ಆದರೆ $\sqrt{-9}$ ರ ವರ್ಗಮೂಲವೇನು? ಇಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಶೇಷವಿದೆ.

9 ಕ್ಕೆ ವರ್ಗಮೂಲವಿದೆ ಆದರೆ – ಗೆ ವರ್ಗಮೂಲವಿದೆಯೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ ಯಾವ ಎರಡು ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆ ಬರುತ್ತದೆ? ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಂಜಸವಾದ ಉತ್ತರವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಆ ಚಿಹ್ನೆಯೇ "i". ಇದು ಕಲ್ಪನಾಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot -1} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$$

ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot -1} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$

ಆದ್ದರಿಂದ $i = \sqrt{-1}$ ಆದ್ದರಿಂದ $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$i^4 = +1, i^8 = +1$ ಅಂದರೆ i ನ ಸಮಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ $+1$ ನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

i ಎಂಬುದು ಕಲ್ಪನಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಸಮಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದಾಗ, ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂರು ರೀತಿಯ ಘನಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

1) 8 ರ ಘನಮೂಲ $\sqrt[3]{8} = 2$ ಅಂದರೆ $2^3 = 8$.

2) 8 ರ ಮತ್ತೊಂದು ಘನಮೂಲ $\sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$.

ಅಂದರೆ $= (-1 - i\sqrt{3})^3$

$$= \left[-(1 + i\sqrt{3})\right]^3$$
$$= -\left[1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3\right]$$
$$= -\left[1 + 3i\sqrt{3} + 3(-3) + (-1 \cdot i\sqrt{3}\right]$$
$$= -\left[1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3}\right]$$
$$= -[1 - 9]$$
$$= -[-8]$$
$$= 8$$

3) 8 ರ ಇನ್ನೊಂದು ಘನಮೂಲ $\sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3}$.

ಅಂದರೆ $(-1 + i\sqrt{3})^3$

$$= (-1)^3 + 3(-1)^2 \cdot i\sqrt{3} + 3(-1)\left\{i\sqrt{3}\right\}^2 + \left\{i\sqrt{3}\right\}^3$$
$$= -1 + 3i\sqrt{3} + 3 \cdot -1 \cdot -1 \cdot (3) - 3\sqrt{3}$$
$$= -1 + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3}$$
$$= -1 + 9$$
$$= 8$$

ಆದುದರಿಂದ 8 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮೂರು ಘನ ಮೂಲಗಳಾಯಿತು.

ಅವುಗಳೇ $2, -1 - i\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $-1 + i\sqrt{3}$

i ಇದೊಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ. ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ $x = \pm\sqrt{1}$ ಎಂಬ ಉತ್ತರವನ್ನು ನಾವು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

$\sqrt{-1}$ ಎನ್ನುವುದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕೇನು ಅರ್ಥವಿದೆಯೋ ತಿಳಿಯದು ಆಯಲರ್‌ನು ಇದನ್ನು i ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ.

$i = \sqrt{-1}$ ಆದ್ದರಿಂದ $i^2 = -1$ ಅಂದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ -1 ಬರಬೇಕು ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೊಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ. ಗೌಸ್ ಎಂಬುವನು ಇದನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ. ಅದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತಿಯ ಅನೇಕ ಪರಿಕರ್ಮದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಯಿತು.

ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ, ವಿದ್ಯುತ್‌ಕ್ಷೇತ್ರ, ಹೈಡ್ರೊಡೈನಮಿಕ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೨

ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1202 ರಲ್ಲಿ ಇಟಲೀ ದೇಶದ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಎಂಬುವನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿದ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ ಮುಂತಾದವು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು $F(n)$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$1 + 2 = 3 \quad , \quad 5 + 8 = 13$$
$$F(1) + F(2) = F(3)$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $F(n) + F(n+1) = F(n+2)$ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾಗತ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ, ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಅಧಿಕ ಅಥವಾ ಕಡಿಮೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $2, 3, 5, 8$ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಮಾಗತ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

3 ಮತ್ತು 5 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 15, 2 ಮತ್ತು 8 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 16

ಆದ್ದರಿಂದ 15 ಎಂಬುದು, 16 ಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $F(n) \times F(n+1) = F(n-1) \times F(n+2) \pm 1$

$F(n)$ ಎಂಬುದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ -1 ಆಗುತ್ತದೆ.

$F(n)$ ಎಂಬುದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗದ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ $+1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$8, 13, 21$ ಕ್ರಮಾಗತ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 13 ರ ವರ್ಗ ಮೊದಲನೆ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಜಾಸ್ತಿ

$$13^2 - (8 \times 21) = +1$$
$$169 - 168 = +1$$

$13, 21, 34$ ಕ್ರಮಾಗತ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಮಧ್ಯದ ಸಂಖ್ಯೆ 21 ರ ವರ್ಗ ಮೊದಲನೆ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆ.

$$21^2 - (13 \times 34) = -1$$
$$441 - 442 = -1$$

$3, 5, 8, 13, 21 \ldots$ ಇವು ಕ್ರಮಾಗತ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಯಾವುದಾದರೂ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 2 ನೆಯ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 8 ರ ವರ್ಗ 16.

ಇದರಲ್ಲಿ 13 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 3 ಬರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $16 - 13 = 3$

ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡಿದರೆ

$$1 + 1 = 2$$
$$1 + 1 + 2 = 4$$
$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$
$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33$$

ಪ್ರತಿ ಮೊತ್ತವೂ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತಿಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$3, 5, 8, 13$ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$5 \times 8 = 40 \quad \text{ಇದರ ಎರಡರಷ್ಟು} \quad 2 \times 40 = 80$$
$$80 \text{ ರ ವರ್ಗ } 80^2 = 6400$$
$$3 \times 13 = 39 \quad \text{ಇದರ ವರ್ಗ} \quad 39^2 = 1521$$

$$6400 + 1521 = 7921$$

ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ $\sqrt{7921} = 89$

ಇದು ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 1 ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವು ಪೈಥಾಗೊರಾಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಂದರೆ $a^2 + b^2 = c^2$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

3, 5, 8 ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಚಿಕ್ಕಸಂಖ್ಯೆ 3 ಇದರ ಘನ $3^3 = 27$

$$5^3 + 8^3 = 125 + 512 = 637$$

$637 - 27 = 610$ ಇದು ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ

ಇದೇ ರೀತಿ 8, 13, 21 ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ಇದರ ಘನ $8^3 = 512$

$$13^3 + 21^3 = 2197 + 9261$$

$$11458 - 512 = 10946$$

10946 ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ

ಆಚಾರ್ಯ ಹೇಮಚಂದ್ರ ಸುರಿ

ಗುಜರಾತ್‌ನ ಒಬ್ಬ ಜೈನ ವಿದ್ವಾಂಸ, ಕವಿ, ವ್ಯಾಕರಣಗಾರ, ತತ್ತ್ವಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ. ಇವರನ್ನು ಕಲಿಗಾಲ್ ಸರ್ವಜ್ಞ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. ಕಲಿಯುಗದ ಎಲ್ಲ ವಿಷಯವನ್ನೂ ತಿಳಿದವನು. ಜನ್ಮ 1089 ರಲ್ಲಿ. ಇವರನ್ನು prodigy ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು. ಇಟಲಿ ದೇಶದ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ 1202 ರಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ನೀಡಿದರು. ಇವರು ತಿಳಿಸುವುದಕ್ಕೆ 50 ವರ್ಷ ಹಿಂದೆಯೇ 1150 ರಲ್ಲಿ ಆಚಾರ್ಯ ಹೇಮಚಂದ್ರ ಅವರು ಈ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ತಿಳಿಸಿದ್ದರು. 84 ವರ್ಷ ಬದುಕಿದ್ದು 1173 ರಲ್ಲಿ ಇಹಜನ್ಮ ಬಿಟ್ಟರು.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೩

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಬಾಹುಗಳೆಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗುವಂತೆ ಆರಿಸುವುದು ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತನ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಯಾವುದಾದರೂ 3 ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: 3, 4 ಮತ್ತು 5 ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಏಕೆಂದರೆ $3^2 + 4^2 = 5^2$

3, 4 ಮತ್ತು 5 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಕ್ರಮಾಗತವಾಗಿ ಬಂದಿವೆ. ಈ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇದೊಂದೇ ಎಂದು ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ಇದನ್ನು ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. a, b ಮತ್ತು c ಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಮಾತ್ರ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿ ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರವಿದೆ.

$$a = m, \quad b = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad c = \frac{m^2 + 1}{2} \quad \text{ಆಗಿರಲಿ}$$

ಈಗ 'm' ಗೆ ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ದೊರಕುತ್ತವೆ.

$a^2 + b^2 = c^2$ ಸೂತ್ರಕ್ಕೆ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$\left(m^2\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$
$$m^2 + \frac{m^4-2m^2+1}{4} = \frac{m^4+2m^2+1}{4}$$
$$\frac{4m^2+m^4-2m^2+1}{4} = \frac{m^4+2m^2+1}{4}$$
$$\frac{m^4+2m^2+1}{4} = \frac{m^4+2m^2+1}{4}$$

ಈಗ $m = 3$ ಆದರೆ

$$(3)^2 + \left(\frac{3^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^2+1}{2}\right)^2$$
$$(3)^2 + (4)^2 = (5)^2$$

ಅಂದರೆ $m = 3$ ಆದಾಗ 3, 4, 5 ಎಂಬ **ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು** ದೊರಕುತ್ತವೆ.

$m = 5$ ಆದಾಗ

$$(5)^2 + \left(\frac{5^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5^2+1}{2}\right)^2$$
$$(5)^2 + (12)^2 = (13)^2$$

$m = 5$ ಆದಾಗ 5, 12, 13 ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ m ಗೆ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಆದೇಶಿಸಿದೆವು. ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ

$$m = 4 \quad \text{ಆದಾಗ} \quad \frac{m^2-1}{2} = \frac{15}{2} \quad \frac{m^2+1}{2} = \frac{17}{2}$$

ಅಂದರೆ 4, $\frac{15}{2}$, $\frac{17}{2}$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಭಿಸಿದುವು. ಆದರೂ ಸಮೀಕರಣ ಸರಿ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು

$$(4)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$
$$\frac{16}{1} + \frac{225}{4} = \frac{289}{4}$$
$$\frac{64+225}{4} = \frac{289}{4}$$

$$\frac{289}{4} = \frac{289}{4}$$

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮತ್ತೊಂದು ಸೂತ್ರವಿದೆ.

$$\left(m^2-n^2\right)^2 + (2mn)^2 = (m^2+n^2)^2$$

ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ $a = m^2-n^2$, $b = 2mn$ ಮತ್ತು $c = m^2+n^2$ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $m = 2$ ಮತ್ತು $n = 1$ ಆದರೆ

$a = 3$, $b = 4$, ಮತ್ತು $c = 5$ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಇದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವಂತೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$m = 3$ ಮತ್ತು $n = 2$ ಆದಾಗ $a = 5$, $b = 12$ ಮತ್ತು $c = 13$ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಸಹ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ. ಮೇಲೆ ಬಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

1) ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.
2) a, b, c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲೇ ಬಂದಿವೆ.

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ $a \neq b \neq c$
$a < b < c$

1 ಮತ್ತು 2 ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

$a = 6$ ಆದಾಗ $b = 8$ ಮತ್ತು $c = 10$ ಆಗುತ್ತದೆ
$a = 10$ ಆದಾಗ $b = 24$ ಮತ್ತು $c = 26$ ಆಗುತ್ತದೆ
$a = 12$ ಆದಾಗ $b = 35$ ಮತ್ತು $c = 37$ ಆಗುತ್ತದೆ

ಇವೆಲ್ಲಾ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$a = 7$ ಆದಾಗ $b = 24$ $c = 25$
$a = 13$ ಆದಾಗ $b = 84$ $c = 85$
$a = 17$ ಆದಾಗ $b = 144$ $c = 145$

ಪುನಃ ಇವೆಲ್ಲಾ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಆಗಲೇ ಹೇಳಿದಂತೆ $3^2 + 4^2 = 5^2$
$(33)^2 + (44)^2 = (55)^2$

$$(333)^2 + (444)^2 = (555)^2$$
$$(3333)^2 + (4444)^2 = (5555)^2$$

ಇದೂ ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು

$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$5 - 1 = 4$	$3, 4, 5$	$\frac{5}{3}$ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಅಂಶವುತ್ರಿಭುಜದ ಕರ್ಣವಾಗಿಯೂ, ಛೇದವು ಒಂದು ಬಾಹುವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದು.
$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$	$13 - 1 = 12$	$5, 12, 13$	$\frac{13}{5}$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ
$3\frac{4}{7} = \frac{25}{7}$	$25 - 1 = 24$	$7, 24, 25$	$\frac{25}{4}$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ
$4\frac{5}{9} = \frac{41}{9}$	$41 - 1 = 40$	$9, 40, 41$	$\frac{41}{9}$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ

$3 \cdot 4 \cdot 5$, $5 \cdot 12 \cdot 13$, $7 \cdot 24 \cdot 25$, $9 \cdot 40 \cdot 41$ ಇವುಗಳೆಲ್ಲ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$2n + 1$, $2n^2 + 2n$, $2n^2 + 2n + 1$ ಗಳು

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಮತ್ತೊಂದು ಸೂತ್ರವಿದೆ ಆದರೆ ಇದು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಲ್ಲ. (ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯ)

$n = 1$ ಆದಾಗ $3 \cdot 4 \cdot 5$

$n = 2$ ಆದಾಗ $5 \cdot 12 \cdot 13$

$n = 3$ ಆದಾಗ $7 \cdot 24 \cdot 25$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಕಾರ ಲಂಬಕೋನದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸೂತ್ರ ವಿದೆ.

$2n + 1$, $2n^2 + 2n$, $2n^2 + 2n + 1$ $n = 2$ ಆದಾಗ $5, 12, 13$

ಎಂದು ಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಉತ್ತರದಲ್ಲಿ ಕಡೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂತರವು 1 ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರವು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾದ ಉತ್ತರವಲ್ಲ. ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಇಂದು ನಾವು ಕರೆಯುತ್ತಿರುವುದು ಬಹಳ ಹಿಂದಿನಿಂದಲೂ ಈಜಿಪ್ಟ್, ಇಂಡಿಯ, ಚೀನಾಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಮೊದಲನೆಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಸಾಧನೆಯು ಯೂಕ್ಲಿಡ್ಡನೇ ಸ್ವತಃ ಕೊಟ್ಟಿರುವುದು. ಅದು ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನದಲ್ಲ. ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಇಂಡಿಯಕ್ಕೆ ಬಂದು ಇದನ್ನು ಭಾರತೀಯರಿಂದ ಕಲಿತುಕೊಂಡ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೪

ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದರಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಬರುವ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತ್ರಿಭುಜದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಈ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ.

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ **ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ** ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಇವುಗಳನ್ನು $T(n)$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$T(1) = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$
$$T(2) = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$
$$T(3) = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$\therefore T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಎರಡು ಕ್ರಮಾಗತ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ.

$$\left.\begin{aligned} T(1) + T(2) &= 1 + 3 = 4 \\ T(3) + T(4) &= 6 + 10 = 16 \end{aligned}\right\} \text{ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು}$$

$$\begin{aligned} T(n-1) + T(n) &= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + n^2 + n}{n} = \frac{2n^2}{2} = n^2 \end{aligned}$$

ಯಾವುದಾದರೂ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಸಂಖ್ಯೆಯ 8 ರಷ್ಟಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ರಾಪ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

$$\begin{aligned} 8T(1) + 1 &= 8 + 1 = 9 \\ 8T(2) + 1 &= 24 + 1 = 25 \qquad \text{ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು} \\ 8T(4) + 1 &= 80 + 1 = 81 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8T(n) + 1 &= \frac{8 \cdot n(n+1)}{2} + 1 \\ &= 4n(n+1) + 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 \\ &= (2n+1)^2 \qquad \text{ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ} \end{aligned}$$

$2\{100T(n) + 12\} + 1$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

$n = 1$ ಆದಾಗ $2\{100T(1) + 12\} + 1$

$= 2 \times \{112\} + 1 = 225$

$n = 2$ ಆದಾಗ $2\{100T(2) + 12\} + 1$

$= 2 \times \{312\} + 1 = 625$ ಇವೆಲ್ಲವೂ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$n = 3$ ಆದಾಗ $2\{100T(3) + 12\} + 1$

$= 2 \times 612 + 1 = 1225$

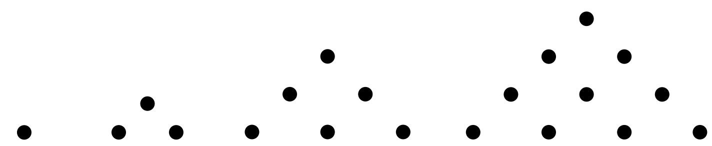
$= 1224 + 1 = 1225$

ಈ ರೀತಿ ಲಭ್ಯವಾದ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 25 ರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಗಾಣುತ್ತವೆ.

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 3^2 &= 1 + 8 = 9 \\ 6^2 &= 1 + 8 + 27 = 36 \\ 10^2 &= 1 + 8 + 27 + 64 = 100 \end{aligned}$$

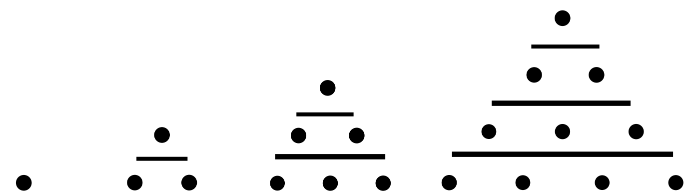
ಅಂದರೆ ಕ್ರಮಾಗತ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು, ಕ್ರಮಾಗತ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.

I ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



$T(1)$	$T(2)$	$T(3)$	$T(4)$
$= \frac{1\times2}{2}$	$= \frac{2\times3}{2}$	$= \frac{3\times4}{2}$	$= \frac{4\times5}{2}$
$= 1$	$= 3$	$= 6$	$= 10$

II ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.



$T(1)$	$T(2)$	$T(3)$	$T(4)$
	$= 1 + 2$	$= 1 + 2 + 3$	$= 1 + 2 + 3 + 4$
$= 1$	$= 3$	$= 6$	$= 10$

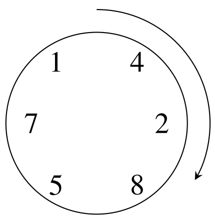
ಅಧ್ಯಾಯ ೧೫

ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Cyclic Numbers)

ಏಳು ಎಂಬ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಒಂದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಒಂದು ಗುಂಪು ಅಂಕಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ಅಂಕಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$$\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$$

ಇಲ್ಲಿ ಎಡತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಬಲತುದಿಯ ಕೊನೆಯ ಅಂಕದ ಮೇಲಿರುವ ಆವರ್ತಸೂಚಕ ಬಿಂದುವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬಿಟ್ಟರೆ 142857 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದೊಂದು **ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ**. ಏಕೆಂದರೆ 7 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

142857 ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 999, 999 ಬರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ 3, 6, 0 ಮತ್ತು 9 ಎಲ್ಲೂ ಬಂದಿಲ್ಲ.

ಇದೇ ರೀತಿ 17 ರಿಂದ 1 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

ಇದು 16 ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ಅಂಕಿಗಳು.

ಇದರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ರೂಪ 0588235294117647.

ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಬರುವ 0 ಯನ್ನು ಕೈಬಿಡಬಾರದು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $1, 2, 3, 4 \ldots 15, 16$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಲಬ್ಧ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $0588235294117647 \times 17 = 999, 999, 999, 999, 999, 9$.

ಇದು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ ಇನ್ನೂ ವಿವರವಾಗಿ ತಿಳಿಸಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{19} = 526, 315, 789, 423, 684, 210$

(18 ಅಂಕಗಳು) ಇವೂ ಸಹ ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{23} = 0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$ (22 ಅಂಕಗಳು)

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{27} = 0.037$ (3 ಅಂಕಗಳು)

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{29} = 344, 827, 586, 106, 896, 551, 724, 137, 931, 0$

(28 ಅಂಕಗಳು);

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{31} = 0.32258064516129$

(15 ಅಂಕಗಳು);

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{63} = 0.15873$ಇವೂ ಸಹ ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

(6 ಅಂಕಗಳು);

ಇದೇ ರೀತಿ 1 ನ್ನು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ 076923 ಇಂದೊಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆ

$$\frac{1}{13} = 0.076923$$

$$076923 \times 1 = 076923$$

〃 $\times 3 = 230769$

$$076923 \times 4 = 307692$$

$$076923 \times 9 = 692307$$

〃 $\times 10 = 769230$

$$076923 \times 12 = 923076$$

$$076923 \times 2 = 153846$$

〃 $\times 5 = 384615$

$$076923 \times 6 = 461538$$

〃 $\times 7 = 538461$

〃 $\times 8 = 615384$

〃 $\times 11 = 846153$

076923 ನ್ನು ಈ ಎರಡು ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಅಂತೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವೇ ಒಂದು ಸೊಬಗು! 076923 ನ್ನು 13 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 999, 999 ಬರುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೬

ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆ

ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಪುಟ್ನಿ ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅವರನ್ನು ನೋಡಲು ಪ್ರೊ. ಹಾರ್ಡಿ ಅವರು ಟ್ಯಾಕ್ಸಿಯಲ್ಲಿ ಬಂದಿದ್ದರು. ಹಾಗೆಯೇ ಮಾತನಾಡುತ್ತಾ "ಏನು ರಾಮಾನುಜನ್, ನೀವು ಖಾಯಿಲೆಯಿಂದ ಬಳಲುತ್ತಿದ್ದೀರಿ. ನಾನು ಬರುವಾಗ ಶಕುನವೂ ಸರಿಹೋಗಲಿಲ್ಲ. ನಾನು ಬಂದ ಟ್ಯಾಕ್ಸಿಯ ನಂ 1729 ಅದೊಂದು ಅಶುಭ ಸಂಖ್ಯೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು 7, 13, 19 ಎಂಬ ಮೂರು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು" ಎಂದು ಅಪ ಶ್ರುತಿ ಹಾಡಿದರು. ಆಗ ರಾಮಾನುಜನ್ ತಕ್ಷಣ ಎದ್ದು ಕುಳಿತು"ಅದು ತುಂಬಾ ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆಂದರೆ 1729 ನ್ನು ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಆ ರೀತಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ ಇದೇ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದು" ಎಂದು ಸಂತೋಷವಾಗಿ ಹೇಳಿದರಂತೆ.

ಈ ಘಟನೆಯಿಂದ 1729 ಎಂಬುದು ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಖ್ಯಾತಿಯಾಗಿದೆ. ರಾಮಾನುಜನ್ ಅವರು ತಕ್ಷಣ ಉತ್ತರ ಹೇಳಿದ್ದಲ್ಲ. ಈ ರೀತಿಯ ಅನೇಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವರಿಗೆ ಪರಿಚಯವಾಗಿತ್ತು ಎನ್ನುವುದು ಕೆಲವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ.

$$1729 = 10^3 + 9^3$$
$$1729 = 12^3 + 1^3$$

1729 ರಲ್ಲಿರುವ 3 ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ 13 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದೇ ಪ್ರೊ. ಹಾರ್ಡಿಯವರ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಪಶಕುನ.

$$1729 = 7 \times 13 \times 19$$

ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಡಿ. ಆರ್. ಕಪ್ರೇಕರ್ ಎಂಬುವರು ಇದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

$$4104 = 16^3 + 2^3 = 15^3 + 9^3$$
$$13832 = 24^3 + 2^3 = 20^3 + 18^3$$

ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (order) ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮ ವರ್ಗರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ,	2 ನೇ ಕ್ರಮ	R_2
ಘನರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ	3 ನೇ ಕ್ರಮ	R_3
ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ	4 ನೇ ಕ್ರಮ	R_4

ಇದೇ ರೀತಿ n ಕ್ರಮದ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು R_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

R_n ದ ಸಾಮಾನ್ಯರೂಪ

$$R_n = A^n + B^n = C^n + D^n$$

A, B, C, D ಮತ್ತು n ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

R_2 ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು $19^2 + 43^2 = 29^2 + 37^2$

$$7^2 + 61^2 = 37^2 + 49^2$$

R_3 ರೂಪದ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

$$2^2 + 16^3 = 9^3 + 15^3$$

R_3 ರೂಪದ ತ್ರಿವಿಧದ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$228^3 + 423^3 = 167^3 + 436^3 = 255^3 + 414^3$$

R_4 ರೂಪದ ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆ

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4 = 635318657$$

ಪ್ರೊ. ಹಾರ್ಡಿಯವರು ಕೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ರಾಮಾನುಜನ್ ಅದೊಂದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದಿದ್ದರು.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೨

ಡಿ. ಆರ್. ಕಪ್ರೇಕರ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಡಿ. ಆರ್. ಕಪ್ರೇಕರ್ ಅವರು 20 ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞರು. ಇವರನ್ನು "ಪುಣೆಯ ಸಂಖ್ಯಾಮಾಂತ್ರಿಕ" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಇವರ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಖ್ಯಾತವಾಗಿವೆ. ಅವೇ 6174 ಮತ್ತು 153. ಇವನ್ನು ಕಪ್ರೇಕರ್ ನಿಯತಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಲ್ಲದ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ. ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿರುಗುಮುರುಗು ಮಾಡಿ. ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ (ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದ) ಕಳೆಯಿರಿ. ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅದರ ತಿರುಗು ಮುರುಗು ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆಯಿರಿ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾ ಮುಂದುವರೆದರೆ ಅಂತಿಮವಾಗಿ 6174 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಕಪ್ರೇಕರ್ ನಿಯತಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ 8426 ಆಗಿರಲಿ.

ಇದನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ 2468 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ 8642 ಬರುತ್ತದೆ. 8642 ರಲ್ಲಿ 2468 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ 6174 ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಬರುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅನೇಕ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಬರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂರರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಖ್ಯೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಆ ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿನ ಅಂಕಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದವರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಕೊನೆಗೆ 153 ಬರುತ್ತದೆ. ಈ **153 ಕಪ್ರೇಕರ್ ನಿಯತಾಂಕ.**

ಉದಾಹರಣೆ: ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ 27 ಆಗಿರಲಿ

$$2^3 + 7^3 = 8 + 343 = 351$$

$$3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153$$

ಒಂದು ಸಮಯ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೂ

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ವಿಚಿತ್ರವನ್ನು ಶ್ರೀಯುತರು ತೋರಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬರೆಯಿರಿ. ಅವೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತಿರುಗು ಮುರುಗು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಗುಂಪುಮಾಡಿ. ಆ ಗುಂಪುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮೊತ್ತದಲ್ಲಿ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಂಕಗಳಿದ್ದರೆ ಮತ್ತೆ ಗುಂಪುಮಾಡಿ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಕೊನೆಗೆ ಎರಡು ಅಂಕ ಉಳಿಯುವವರೆಗೂ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ ನೋಡಿ ಕೊನೆಗೆ ಏನು ಬರುತ್ತದೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\dfrac{541 \times 328}{17,74,48}$ $\qquad$ $\dfrac{145 \times 823}{11,93,35}$

$$17 + 74 + 48 = 139 \qquad 11 + 93 + 35 = 139$$

139 ಕ್ಕೆ 139 ಸಮ

$$139 = 139$$

ಇದೇ ರೀತಿ 495 ನ್ನು ಕಪ್ರೇಕರ್ ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯಾವರೀತಿ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಮಾಡಿದೆವೋ, ಅದೇ ರೀತಿ ಮೂರು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಾಡಬೇಕು.

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೮

ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Palindrome Numbers)

ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕಾಗಲಿ, ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕಾಗಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಓದಿದಾಗ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವು ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಕ್ರಿ. ಶ. 9 ನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಭಾರತೀಯ ಪುರಾತನ ಗಣಿತಜ್ಞಮಹಾವೀರಾಚಾರ್ಯ ತಮ್ಮ "ಗಣಿತಸಾರ ಸಂಗ್ರಹ" ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $139 \times 109 = 15151$

15151 ನ್ನು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕಾಗಲಿ, ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕಾಗಲಿ ಓದಿದಾಗ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದೆ

$$152207 \times 73 = 111,111,11$$

$$12345679 \times 9 = 111,111,111$$

ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$(101)^2 = 10201$$

$$(1001)^2 = 1002001$$

$$(10101)^2 = 102030201$$

ಕೆಲವುಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 11 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

$$121 \times 11 = 1331$$

$$12321 \times 11 = 135531$$

2201 ರ ಘನ ಒಂದು ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆ $2201^3 = 10662526601$
8547 ಒಂದು ವಿಚಿತ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಏಕೆಂದರೆ

$$8547 \times 13 = 111111$$
$$8547 \times 26 = 222,222$$
$$8547 \times 39 = 333,333$$
$$8547 \times 52 = 444,444$$
$$8547 \times 65 = 555,555$$
$$8547 \times 78 = 666,666$$
$$8547 \times 91 = 777,777$$
$$8547 \times 104 = 888,888$$
$$8547 \times 117 = 999,999$$

12345679 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 9 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ.

37 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತವೆ.

37037 ಎಂಬ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಬ್ಧವಾಗುತ್ತವೆ.

$$37037 \times 3 = 111,111$$
$$37037 \times 6 = 222,222$$
$$37037 \times 9 = 333,333$$
$$37037 \times 12 = 444,444$$
$$37037 \times 15 = 555,555$$
$$37037 \times 18 = 666,666$$
$$37037 \times 21 = 777,777$$
$$37037 \times 24 = 888,888$$
$$37037 \times 27 = 999,999$$

65359477124183 ನ್ನು 17, 34, 51 ಕೊನೆಗೆ 153 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ 5847953216374269 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 19, 38, 57 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಕೊನೆಗೆ 171 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 9 ಎನ್ನುವುದು 17 ಬಾರಿ ಬರುತ್ತದೆ. ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲಾ ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$$12345679 \times 9 = 111,111,111$$
$$'' \quad \times 18 = 222,222,222$$
$$'' \quad \times 27 = 333,333,333$$
$$'' \quad \times 36 = 444,444,444$$
$$'' \quad \times 45 = 555,555,555$$
$$'' \quad \times 54 = 666,666,666$$
$$'' \quad \times 63 = 777,777,777$$
$$'' \quad \times 72 = 888,888,888$$
$$'' \quad \times 81 = 999,999,999$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೧೯

ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1) $19 + 37 = 56$ ಇದು ಸರಿ ನಾವು ಒಪ್ಪುತ್ತೇವೆ.

   $1 \times 9 + 3 \times 7 = 5 \times 6$ ಇದು ಸರಿಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಮನಸ್ಸು ಒಪ್ಪುತ್ತದೆಯೇ?

   $9 + 21 = 30$ ಇದು ಸರಿ ತಾನೆ ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ?

2) $18 + 39 = 57$ ಇದು ಸರಿ ನಾವು ಒಪ್ಪುತ್ತೇವೆ.

   $1 \times 8 + 3 \times 9 = 5 \times 7$ ಇದು ಸರಿಯೇ ನಿಮ್ಮ ಮನಸ್ಸು ಒಪ್ಪುತ್ತದೆಯೇ?

   $8 + 27 = 35$ ಇದು ಸರಿತಾನೆ ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ?

3) $29 + 38 = 67$ ಇದು ಸರಿ.

   $2 \times 9 + 3 \times 8 = 6 \times 7$ ಇದು ಸರಿಯೇ?

   $18 + 24 = 42$ ಇದು ಸರಿ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟನ್ನು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಮೊತ್ತ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ

$$327 + 654 = 981$$
$$273 + 546 = 819$$

$$219 + 438 = 657$$
$$192 + 384 = 576$$

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $x + 2x = 3x$. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಆಶ್ಚರ್ಯವೆಂದರೆ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಭತ್ತರತನಕ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಗಳೂ ಒಂದೊಂದೇ ಸಲ ಬಂದಿವೆ.

ಇದು ಸೋಜಿಗವಲ್ಲವೇ?

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇದೇನು ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರವಲ್ಲ. ಇದು ಆಕಸ್ಮಿಕ.

$$10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 = 4^3$$
$$10^3 - 6^3 = 1000 - 216 = 784 = 28^2$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

4, 5, 6, 8, 3, 2 ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದಿಲ್ಲ

ಇದೇ ರೀತಿ
$$4^2 + 5^2 + 6^2 = 8^2 + 3^2 + 2^2 = 77$$
$$48^2 + 53^2 + 62^2 = 84^2 + 35^2 + 26^2 = 8957$$

ಈ ಆಶ್ಚರ್ಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.
ನಂತರ ಎರಡು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಬರೆಯಿರಿ.
ಹೀಗೆ ಲಭ್ಯವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಕೊನೆಗೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದೇ ಅಂಕವು ಬರುತ್ತದೆ.

ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳು

	1		4		9		16		25		36		49
ವ್ಯತ್ಯಾಸ		3		5		7		9		11		13	
ವ್ಯತ್ಯಾಸ			2		2		2		2		2		

ಇದೇ ರೀತಿ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳು

	1		8		27		64		125		216
ವ್ಯತ್ಯಾಸ		7		19		37		61		91	
ವ್ಯತ್ಯಾಸ			12		18		24		30		
ವ್ಯತ್ಯಾಸ				6		6		6			

41, 80 ಮತ್ತು 320 ರಲ್ಲಿ ಯಾವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುತ್ತದೆ.

$$41 + 80 = 121 = 11^2$$
$$80 + 320 = 400 = 20^2$$
$$320 + 41 = 361 = 19^2$$

41, 80 ಮತ್ತು 320 ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$$41 + 80 + 320 = 441 = 21^2$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೦

ಕೆಲವು ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$9 + 9 = 18$	$9 \times 9 = 81$
$24 + 3 = 27$	$24 \times 3 = 72$
$47 + 2 = 49$	$47 \times 2 = 94$
$497 + 2 = 499$	$497 \times 2 = 994$
ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದೆ, ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.	ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದೆ, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಕೂಡಿದಾಗ ಬಂದ ಮೊತ್ತದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳು, ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಅಂಕಗಳೇ ಅದಲು ಬದಲಾಗಿವೆ.

$8^3 = 512$	$5 + 1 + 2 = 8$
$17^3 = 4913$	$4 + 9 + 1 + 3 = 17$
$18^3 = 5832$	$5 + 8 + 3 + 2 = 18$
$26^3 = 17576$	$1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$
$27^3 = 19683$	$1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

37 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯು ಒಂದು ವಿಚಿತ್ರವಾಗಿದೆ. ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಬರೆದಾಗ

$37 \times 1 = 037$	370	703
$37 \times 2 = 074$	407	740
$37 \times 3 = 111$	111	111
$37 \times 4 = 148$	481	814
$37 \times 5 = 185$	518	851
$37 \times 6 = 222$	222	222
$37 \times 7 = 259$	592	925
$37 \times 8 = 296$	629	962
$37 \times 9 = 333$	333	333

ಮೊದಲು 37 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ನಂತರ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಆದರೂ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 37 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ. 37 ನ್ನು 3 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ.

12345679 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ವಿಚಿತ್ರ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. 3 ಅಂಕಗಳ 3 ಗುಂಪುಗಳಾಗುತ್ತವೆ. (ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕ 8 ಇಲ್ಲ ಗಮನಿಸಿ)

$$12345679 \times 3 = 037, 037, 037$$
$$〃 \quad \times 30 = 370, 370, 370$$
$$〃 \quad \times 57 = 703, 703, 703$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 30.

ಇದೇ ರೀತಿ $12345679 \times 6 = 074, 074, 074$
$$〃 \quad \times 33 = 407, 407, 407$$
$$〃 \quad \times 60 = 740, 740, 740$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 33

ಇದೇ ರೀತಿ $12345679 \times 12 = 148, 148, 148$
$$〃 \quad \times 39 = 481, 481, 481$$
$$〃 \quad \times 66 = 814, 814, 814$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 39.

ಇದೇ ರೀತಿ $12345679 \times 15 = 185, 185, 185$
$$〃 \quad \times 42 = 518, 518, 518$$
$$〃 \quad \times 69 = 851, 851, 851$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 42.

ಇದೇ ರೀತಿ $12345679 \times 21 = 259, 259, 259$
$$〃 \quad \times 48 = 592, 592, 592$$
$$〃 \quad \times 75 = 925, 925, 925$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 48.

ಇದೇ ರೀತಿ $12345679 \times 24 = 296, 296, 296$
$$〃 \quad \times 51 = 629, 629, 629$$
$$〃 \quad \times 78 = 962, 962, 962$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 51. 12345679 ನ್ನು 9 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

1089 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂಖ್ಯೆ

ಇದು $3, 9, 11, 33, 99$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೊಂದು ಶುದ್ಧ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ 33. ಮತ್ತೊಂದು ಸೋಜಿಗವೆಂದರೆ 1089 ನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ 9801 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಸಹ ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ 99.

1089 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದರಿಂದ 9 ರ ತನಕ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧ ವಿಶೇಷವಾಗಿದೆ.

$$1089 \times 1 = 1089$$
$$1089 \times 2 = 2178$$
$$1089 \times 3 = 3267$$
$$1089 \times 4 = 4356$$

$$1089 \times 5 = 5445$$
$$1089 \times 6 = 6534$$
$$1089 \times 7 = 7623$$
$$1089 \times 8 = 8712$$
$$1089 \times 9 = 9801$$

ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಗಮನಿಸಿ. ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 9 ರಿಂದ ಇಳಿಯುತ್ತಾ ಒಂದರ ತನಕ ಬಂದಿದೆ. ದಶಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೂ ಸಹ 8 ರಿಂದ ಇಳಿಯುತ್ತಾ 0 ತನಕ ಬಂದಿದೆ. ಶತಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ ಏರುತ್ತಾ 8 ರ ತನಕ ಬಂದಿದೆ. ಸಾವಿರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ ಏರುತ್ತಾ 9 ರ ತನಕ ಬಂದಿದೆ.

ಮತ್ತೊಂದು ವಿಷಯ ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು. 1 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ 1089, ಆದರೆ 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದಲು ಬದಲು 9801.

2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ 2178, ಆದರೆ 8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದಲು ಬದಲು 8712.

3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ 3267, ಆದರೆ 7 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದಲು ಬದಲು 7623.

4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ 4356, ಆದರೆ 6 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದಲು ಬದಲು 6534, 5 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮಾಲಾಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದಿದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೧

ಸಂಖ್ಯಾ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಚಿತ್ರಗಳು

8547 ಒಂದು ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ

ಏಕೆಂದರೆ

$$8547 \times 13 = 111,111$$
$$8547 \times 26 = 222,222$$
$$8547 \times 39 = 333,333$$
$$8547 \times 52 = 444,444$$
$$8547 \times 65 = 555,555$$
$$8547 \times 78 = 666,666$$
$$8547 \times 91 = 777,777$$
$$8547 \times 104 = 888,888$$
$$8547 \times 117 = 999,999$$

15873 ಮತ್ತೊಂದು ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ

$$15873 \times 7 = 111,111$$
$$15873 \times 14 = 222,222$$
$$15873 \times 21 = 333,333$$
$$15873 \times 28 = 444,444$$
$$15873 \times 35 = 555,555$$

$$15873 \times 42 = 666,666$$
$$15873 \times 49 = 777,777$$
$$15873 \times 56 = 888,888$$
$$15873 \times 63 = 999,999$$

12345679 ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಡಬಹುದಾದ ವಿಚಿತ್ರ ಸಂಖ್ಯೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 9 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಸಂತೋಷಪಡಿ.

ಇದೊಂದು ಚಿಕ್ಕಸಂಖ್ಯೆ ನೋಡಿ 37. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ನೆಯ ಮಗ್ಗಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಮುದ ನೀಡುತ್ತದೆ.

142857 **ಇದೊಂದು ವಿಶೇಷಸಂಖ್ಯೆ.** ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1 ರಿಂದ 6 ರವರೆಗೆ ಗುಣಿಸಿದರೆ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

$$142857 \times 1 = 142857$$
$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571428$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

ಆದರೆ $142857 \times 7 = 999999$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $3^2 + 4^2 = 5^2$

ಆದರೆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು.

$$9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3$$
$$15^3 + 9^3 = 2^3 + 16^3$$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನಕ್ಕೆ ಸಮ.

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$
$$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೨

ದತ್ತ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಜಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಜಕಗಳಿವೆ?

ಯಾವ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 4 ಬರುತ್ತದೆ. 2 ಮತ್ತು 2 ನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 4 ಬರುತ್ತದೆ.

$$2 \times 2$$

ಅಥವಾ $2^1 \times 2^1 = 2^2$

ಈಗ 2 ರ ಘಾತಗಳಿಗೆ ಒಂದನ್ನು (1) ಕೂಡೋಣ

ಅಂದರೆ $2 + 1 = 3$

ಅಂದರೆ 4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 3 ಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷೆಮಾಡಿ ನೋಡಿ 4 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 1, 2 ಮತ್ತು 4 ಭಾಜಕಗಳು.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡೋಣ.

6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ಯಾವ ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 6 ಬರುತ್ತದೆ. 2 ಮತ್ತು 3 ನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ 6 ಬರುತ್ತದೆ.

$$2 \times 3$$

ಅಥವಾ $2^1 \times 3^1$

ಈಗ 2 ಮತ್ತು 3 ರ ಘಾತಗಳಿಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡೋಣ.

$$(1+1)(1+1)$$
$$2 \times 2 = 4$$

ಅಂದರೆ 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 4 ಭಾಜಕಗಳಿವೆ. ಪರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡಿನೋಡಿ 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ $1, 2, 3$ ಮತ್ತು 6 ಭಾಜಕಗಳು.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ N ಎಂಬುದು ಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ.

$$N = x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^c \cdots x_n^r$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n \quad \text{ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು}$$
$$a \cdot b \cdot c \cdot \cdots \cdot r \quad \text{ಎಂಬವು ಘಾತಗಳು}$$

ಆದ್ದರಿಂದ N ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಇರಬೇಕಾದ ಭಾಜಕಗಳು.

$$(a+1)(b+1)(c+1) \cdots\cdots\cdots (r+1)$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೩

ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸೌಂದರ್ಯ

ಸೌಂದರ್ಯ ಸಮೀಕ್ಷೆ ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಡಾ। ಶಿವರುದ್ರಪ್ಪನವರು ಸೌಂದರ್ಯದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆ ಮಾಡುತ್ತಾ "ಸೌಂದರ್ಯ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿಲ್ಲ ನೋಡುವವರ ಕಣ್ಣಿನಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಿದ್ದಾರೆ". ಈ ಮಾತು ನನ್ನ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ವಿವಿಧ ಹೂವುಗಳಿದ್ದರೂ ಕೆಲವರಿಗೆ ಕೆಲವೇ ಹೂವುಗಳು ಆಕರ್ಷಣೀಯ. ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ರಾಗಗಳಿದ್ದರೂ ಕೆಲವರಿಗೆ ಕೆಲವೇ ರಾಗಗಳು ಆಪ್ಯಾಯಮಾನ. ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡುವಾಗಲೂ ಕೆಲವರಿಗೆ ಕೆಲವೇ ಜಾತಿ ಪ್ರಾಣಿಗಳು ಮುದ್ದಾಡಲು ಯೋಗ್ಯ. ಎಷ್ಟು ತರಹ ಸೀರೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೂ ಕೆಲವರಿಗೆ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ನಮೂನೆಯ ಸೀರೆಗಳೇ ಅವರ ಆಯ್ಕೆ. ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕನಾದ ನನಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡರೆ ಅದರಲ್ಲೂ ಅವುಗಳ ವಿನ್ಯಾಸ ಕಂಡರೆ ಆಶ್ಚರ್ಯ ಮತ್ತು ಕುತೂಹಲ.

64 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿ. ಇದು ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ. ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 4 ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ದಶಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 6 ಸಹ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. 64 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 8. ಘನಮೂಲ 4. 6 ಮತ್ತು 4 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 10 ಬರುತ್ತದೆ. ಅದೂ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ. 1 ಮತ್ತು 0 ಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 1 ಬರುತ್ತದೆ. ಅದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ. 1 ನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ.

64 ನ್ನು 4×16 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. 4 ಮತ್ತು 16 ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ವರ್ಗಮೂಲವಿದೆ. 64 ನ್ನು $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$ ಎಂದೂ $2^3 \cdot 2^3$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇನ್ನು 961 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಇದೊಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ 31. ಈ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 4 ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲ 2. ಈ 2 ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹೌದು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಹೌದು. 961 ರ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 16 ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲ 4. ಪುನಃ ಈ 4 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 2. ಇದೂ ಸಹ ಸಮ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯಸಂಖ್ಯೆ.

961 ರಲ್ಲಿ 9 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 3 ಮತ್ತು 1 ರ ವರ್ಗಮೂಲ 1. 961 ನ್ನು ತಿರುಗು ಮುರುಗು ಮಾಡಿದರೆ 169 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದೂ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ 13, ಅಂಕ ಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 4 ಬರುತ್ತದೆ. ಅದರ ವರ್ಗಮೂಲ 2. 961 ರಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿ ಸಿದರೆ 196 ಬರುತ್ತದೆ. ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ 14. 1 ಮತ್ತು 4 ರ ಮೊತ್ತ 5 ಇದು ಬೆಸ ಹಾಗೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ. 196 ನ್ನು 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$196 = 4^2 + 6^2 + 12^2$$

961 ನ್ನು 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ 4 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$961 = 5^2 + 6^2 + 30^2$$
$$961 = 6^2 + 14^2 + 27^2$$
$$961 = 6^2 + 21^2 + 22^2$$
$$961 = 14^2 + 18^2 + 21^2$$

ಅಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ 961 ನ್ನು 4 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ 14 ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$961 = 2^2 + 5^2 + 16^2 + 26^2$$
$$'' = 2^2 + 14^2 + 19^2 + 20^2$$
$$'' = 4^2 + 8^2 + 16^2 + 25^2$$
$$'' = 4^2 + 10^2 + 13^2 + 26^2$$
$$'' = 4^2 + 10^2 + 19^2 + 22^2$$
$$'' = 4^2 + 16^2 + 17^2 + 26^2$$
$$'' = 5^2 + 8^2 + 14^2 + 26^2$$
$$'' = 5^2 + 14^2 + 16^2 + 22^2$$
$$'' = 8^2 + 10^2 + 11^2 + 26^2$$
$$'' = 10^2 + 11^2 + 16^2 + 22^2$$
$$'' = 3^2 + 4^2 + 6^2 + 30^2$$
$$'' = 3^2 + 12^2 + 18^2 + 22^2$$
$$'' = 4^2 + 12^2 + 15^2 + 24^2$$
$$'' = 5^2 + 6^2 + 18^2 + 24^2$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೪

ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ವಿನ್ಯಾಸ ನೋಡಿ ಆನಂದಿಸಿ

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$

$$0 \times 9 + 1 = 1$$
$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1 \times 9 + 1 = 10$$
$$12 \times 9 + 2 = 110$$
$$123 \times 9 + 3 = 1110$$
$$1234 \times 9 + 4 = 11110$$

$$1 - 1 = 9 \times 0$$
$$11 - 2 = 9 \times 1$$
$$111 - 3 = 9 \times 12$$
$$1111 - 4 = 9 \times 123$$

$$11 \times 11 = 121$$
$$111 \times 111 = 12321$$
$$1111 \times 1111 = 1234321$$
$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$11(1) = 10 + 1$$
$$11(2) = 20 + 2$$
$$11(3) = 30 + 3$$
$$11(4) = 40 + 4$$

$$(143 \times 7) = 1001$$
$$(143 \times 14) = 2002$$
$$(143 \times 21) = 3003$$
$$(143 \times 28) = 4004$$
$$(143 \times 35) = 5005$$

$$(1 \times 9) - 1 = 08$$
$$(21 \times 9) - 1 = 188$$
$$(321 \times 9) - 1 = 2888$$
$$(4321 \times 9) - 1 = 38888$$

$$(1 \times 8) - 1 = 07$$
$$(21 \times 8) - 1 = 167$$
$$(321 \times 8) - 1 = 2567$$
$$(4321 \times 8) - 1 = 34567$$

$$10 - 1 = 9$$
$$100 - 1 = 99$$
$$1000 - 1 = 999$$
$$10000 - 1 = 9999$$

$$9 \times 6 = 54$$
$$99 \times 66 = 6534$$
$$999 \times 666 = 665334$$
$$9999 \times 6666 = 66653334$$

$$7 \times 7 = 49$$
$$67 \times 67 = 4489$$
$$667 \times 667 = 444889$$
$$6667 \times 6667 = 44448889$$

$$6 \times 7 = 42$$
$$66 \times 67 = 4422$$
$$666 \times 667 = 444222$$
$$6666 \times 6667 = 44442222$$

$$4 \times 4 = 16$$
$$34 \times 34 = 1156$$
$$334 \times 334 = 111556$$
$$3334 \times 3334 = 11115556$$

$$9 \times 9 = 81$$
$$99 \times 99 = 9801$$
$$999 \times 999 = 998001$$
$$9999 \times 9999 = 99980001$$

$$7 \times 9 = 63$$
$$77 \times 99 = 7623$$
$$777 \times 999 = 776223$$
$$7777 \times 9999 = 77762223$$

$$9 + 1 = 10$$
$$90 + 10 = 100$$
$$900 + 100 = 1000$$
$$9000 + 1000 = 10,000$$

$$1 \times 8 = 10 - 2$$
$$2 \times 8 = 20 - 4$$
$$3 \times 8 = 30 - 6$$
$$4 \times 8 = 40 - 8$$

$$1 \times 9 = 10 - 1$$
$$2 \times 9 = 20 - 2$$
$$3 \times 9 = 30 - 3$$
$$4 \times 9 = 40 - 4$$

$$1 = 1$$
$$10 + 1 = 11$$
$$100 + 10 + 1 = 111$$
$$1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$$

$$(6)^2 - (5)^2 = 11$$
$$(56)^2 - (45)^2 = 11,11$$
$$(556)^2 - (445)^2 = 111,111$$
$$(5556)^2 - (4445)^2 = 1111,1111$$

$$1^3 = 1 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೫

ನೇರವಾಗಿ ಭಾಗಿಸದೆಯೇ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿದ ತಕ್ಷಣ ಅಥವಾ ಸುಲಭ ಕ್ರಮದಿಂದ ಭಾಜಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ.

1) **2 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0, 2, 4, 6, 8 ಇದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

2) **3 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಕಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

1) **ಉದಾ:** 225 ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $2 + 2 + 5 = 9$
9, 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 225, 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

2) **ಉದಾ:** 311 ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $3 + 1 + 1 = 5$
5, 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ 311, 3 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

3) **4 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ದಶಕ ಮತ್ತು ಏಕಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೊನೆಯ 2 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 120, 132, 816, 968. ಕಡೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 20, 32, 16, 68 ಇವುಗಳು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

4) **5 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಅಥವಾ 5 ನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 65, 70, 85, 90. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ (ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ) 5 ಮತ್ತು 0 ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

5) **6 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ.**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಿದ್ದು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ಅದು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಆಗ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 36, 72. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

6) **7 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

I. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದ 2 ರಷ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನುಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿ ಕೊನೆಗೆ ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುವವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಕೊನೆಗೆ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾದರೆ, ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$$\begin{array}{r} 24367 \\ 14 \\ \hline 2422 \\ 4 \\ \hline 238 \\ 16 \\ \hline 7 \end{array}$$

7, 7 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 24367, 7 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

II ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ + ಮತ್ತು − ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ. ಹೀಗೆ ಬಂದ ಉತ್ತರವು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದ್ದರೆ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: $14294863492 \div 7$

$$-14 + 294 - 863 + 492$$

$$= -91$$

91 ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 14294863492 ನ್ನೂ ಸಹ 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಇದೇ ಉತ್ತರ 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು 13 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

7) **7 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ.**

7 ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನೋಡುವುದೇ ಯುಕ್ತ.

8) **8 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ.**

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯ 3 ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 8 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 124, 2480, 31648. 124, 480, 648 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

9) **9 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ.**

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಂಕಮೂಲ ಬರುವವರೆಗೂ ಕೂಡಿ. ಬಂದ ಅಂಕವು 9 ಆಗಿದ್ದರೆ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 1) 1404 ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $1+4+0+4=09$. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 2) 7398 ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $7+3+9+8=27=2+7=9$. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

10) **10 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 0 ಇದ್ದರೆ ಅದು 10 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 200, 700, 1580

11) **11 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಅಸಮ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಅಥವಾ ಈ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 11, 22, 33 ಇತ್ಯಾದಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ: 2519 ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ
ಏಕ ಮತ್ತು ನೂರರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $5+9=14$
ದಶಕ ಮತ್ತು ಸಾವಿರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ $2+1=3$
ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 11 ಅದು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ 2519, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

12) **13 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದ 4 ರಷ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದನ್ನು ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನುಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನುಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಕಟ್ಟಕಡೆಗೆ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 13 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾದರೆ ಆಗ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆಯು 13 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ:

$$\begin{array}{r} 34567 \\ 28 \\ \hline 3484 \\ 16 \\ \hline 364 \\ 16 \\ \hline 52 \end{array}$$

52, 13 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 13 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. [7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ವಿವರಣೆ ಇದಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.]

13) **17 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದ 5 ರಷ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನುಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕಳೆಯಬೇಕು. ಕೊನೆಗೆ ಎರಡು ಅಥವಾ ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 17 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆಯು 17 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ:

$$\begin{array}{r} 35564 \\ 20 \\ \hline 3536 \\ 30 \\ \hline 323 \\ 15 \\ \hline 17 \end{array}$$

17, 17 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 35564, 17 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$$\begin{array}{r} 46832 \\ 10 \\ \hline 4673 \\ 15 \\ \hline 452 \\ 10 \\ \hline 35 \end{array}$$

35, 17 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವು–ದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ 46832, 17 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

14) **19 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದ ಎರಡರಷ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನುಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಇದೇರೀತಿ ಕಟ್ಟಕಡೆಗೆ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಕೊನೆಗೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾ:

$$\begin{array}{r}
424327 \\
14 \\ \hline
42446 \\
12 \\ \hline
4256 \\
12 \\ \hline
437 \\
14
\end{array}$$

57, 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 424327, 19 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

15) **23 ಭಾಜಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ**

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನದ 7 ರಷ್ಟನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕಸ್ಥಾನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಮಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 3 ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಬರುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 23 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾದರೆ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆಯು 23 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾ:

$$\begin{array}{r}
144233 \\
21 \\ \hline
14444 \\
28 \\ \hline
1472 \\
14 \\ \hline
161 \\
7 \\ \hline
23
\end{array}$$

23, 23 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆ 144233, 23 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೬

ಇವು ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ

ಕೆಲವು ಜೋಡಿಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಶೇಷಗುಣ

$$1 \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$2 \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3} \qquad 2 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}$$

ಇದೇನಿದು ಆಶ್ಚರ್ಯ! ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೂ ಉತ್ತರ ಒಂದೇ ಬರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ತತ್ತ್ವ ನಿಜ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ

$$\begin{array}{ll}
n \times \frac{n}{n+1} & n - \frac{n}{n+1} \\
\frac{n \cdot n}{n+1} & \frac{n(n+1)-n}{n+1} \\
\frac{n^2}{n+1} & \frac{n^2+n-n}{n+1} \\
 & \frac{n^2}{n+1}
\end{array}$$

ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು n ಮತ್ತು $\frac{n}{n+1}$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ತತ್ತ್ವವು ನಿಜ.

ಕೂಡಿದಾಗ $3\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{16}{5} + \frac{4}{5} = \frac{16+4}{5} = \frac{20}{5} = 4$

ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $3\frac{1}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \times \frac{5}{4} = 4$

ಇದೇನಿದು ಆಶ್ಚರ್ಯ! ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉತ್ತರ ಒಂದೇ ಬರುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಒಂದು ವಿಶೇಷ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ತತ್ತ್ವನಿಜ.

ಇದನ್ನು ಬೀಜ ಗಣಿತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ.

$$\left(n + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{n(n+2)+1}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{n^2+2n+1+n+1}{n+2}$$
$$\frac{n^2+3n+2}{n+2}$$
$$\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)}$$
$$= n+1$$

$$\left(n + \frac{1}{n+2}\right) \div \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{n(n+2)+1}{n+2} \div \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{n^2+2n+1}{n+2} \div \frac{n+1}{n+2}$$
$$\frac{(n+1)^2}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1}$$
$$\frac{(n+1)^2}{n+1}$$
$$= n+1$$

$$1\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4} \times 5 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

$$1\frac{1}{4} + 5 = \frac{5}{4} + \frac{5}{1} = \frac{5+20}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಅಥವಾ ಕೂಡಿದಾಗ ಉತ್ತರ ಒಂದೇ ಬಂದಿದೆ. ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಯಾವುದೋ ಕೆಲವು ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟಾಗ ಇದು ಸರಿ.

ಮತ್ತೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ನೋಡಿದರೆ

$$1\frac{1}{5} \times 6 = \frac{6}{5} \times 6 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

$$1\frac{1}{5} + 6 = \frac{6}{5} + 6 = \frac{6+30}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \times (n+1)$$
$$\frac{(n+1)}{n} \times (n+1)$$
$$\frac{(n+1)^2}{n}$$
$$\frac{n^2+2n+1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n + 1$$
$$\frac{n+1}{n} + n + 1$$
$$\frac{n+1+n^2+n}{n}$$
$$\frac{n^2+2n+1}{n}$$

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಒಂದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಕಳೆದರೂ, ಅಥವಾ ಒಂದನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೂ ಉತ್ತರ ಒಂದೇ ಬರುತ್ತದೆ.

$$6\frac{1}{4} - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{25-20}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

$$6\frac{1}{4} \div 5 = \frac{25}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ ಸರಿಯಲ್ಲ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಏನೋ ಒಂದು ರೀತಿಯ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಇದು ನಿಜ.

$$n + \frac{1}{n-2} - (n-1)$$
$$\frac{n(n-2)+1}{n\cdot 2} - (n-1)$$
$$\frac{n^2-2n+1}{n-2} - (n-1)$$
$$\frac{(n-1)^2}{n-2} - (n-1)$$
$$(n-1)\left[\frac{(n-1)}{n-2} - 1\right]$$
$$\frac{(n-1)(n-1-n+2)}{n-2}$$
$$\frac{(n-1)\cdot 1}{n-2}$$

$$n + \frac{1}{n-2} \div (n-1)$$
$$\frac{n(n-2)+1}{n-2} \div (n-1)$$
$$\frac{n^2-2n+1}{n-2} \div n - 1$$
$$\frac{(n-1)^2}{n-2} \times \frac{1}{n-1}$$
$$= \frac{n-1}{n-2}$$

ಕೂಡಿದರೂ ಒಂದೇ, ಗುಣಿಸಿದರೂ ಒಂದೇ

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$$

$$(-1) + 0 + (+1) = (-1) \times 0 \times (+1)$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೭

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಶೋಧನೆ – ೧

ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ 61 ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ವಿಲೋಮ 16.

ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ

$$\begin{array}{r} 61 \\ 16 \\ \hline 77 \end{array}$$

77, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ xy ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ yx

$$\begin{array}{c} 10x + y \\ 10y + x \\ \hline 11x + 11y \end{array}$$

$11(x + y)$ ಇದು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿಯಾಗಲೀ ಬರೆದರೆ, ಆಗ ಇಡೀ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ 24 ಆಗಿರಲಿ ಇದರ ವಿಲೋಮ 42.

ಈಗ 42 ನ್ನು 24 ರ ಎಡ ಅಥವಾ ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

ಅಂದರೆ 4224 ಅಥವಾ 2442 ಆಯಿತು

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

ಸಂಖ್ಯೆ xy ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ yx

yx ನ್ನು xy ನ ಎಡ ಅಥವಾ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ

$yxxy$ ಅಥವಾ $xyyx$ ಆಯಿತು

$$1000y + 100x + 10x + y = 1001y + 110x = 11(91y + 10x)$$

ಅಥವಾ

$$1000x + 100y + 10y + x = 1001x + 110y = 11(91x + 10y)$$

ಇವೆರಡೂ 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದು, ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಲೋಮವನ್ನು ಕಳೆದು, ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಕೂಡಿದರೆ ಯಾವಾಗಲೂ 1089 ಬರುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ 432 ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ವಿಲೋಮ 234

ಕಳೆದರೆ

$$\begin{array}{r} 432 \\ 234 \\ \hline 198 \end{array}$$

198 ರ ವಿಲೋಮ 891

ಈಗ $198 + 891 = 1089$

ಇದು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯ?

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿ ನೋಡೋಣ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y, z ಗಳಾಗಿರಲಿ

$$\begin{array}{ll} & 100x + 10y + z ----(1) \\ \text{ಇದರ ವಿಲೋಮ} & 100z + 10y + x ----(2) \\ \hline \end{array}$$

1 ರಿಂದ 2 ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$100x - 100z + z - x$ $\quad$ y ಹೋಗಿದೆ

$100(x - z) - (x - z)$

$100(x - z) - 100 + 100 - (x - z)$ $\quad$ ಅನುಕೂಲತೆಗೆ 100 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ 100 ನ್ನು ಕಳೆದಿದೆ

$100(x - z) - 100 + 90 + 10 - (x - z)$

$100(x - z - 1) \;\; + 9 \times 10 + 10 - (x - z) \quad ---- (3)$

ಇದರ ವಿಲೋಮ $100(10 - x + z) \;\; + 10 \times 9 + (x - z - 1) \quad ---- (4)$

ಸಮೀಕರಣ 3 ಮತ್ತು 4 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ

$$
\begin{array}{rl}
100(x - z - 1) + 9 \times 10 + 10 - (x - z) & ----(3) \\
100(10 - x + z) + 10 \times 9 + (x - z - 1) & ----(4) \\
\hline
\cancel{100x} - \cancel{100z} - 100 + 90 + 10 - \cancel{x} + \cancel{z} & \\
1000 - \cancel{100x} + \cancel{100z} + 90 + \cancel{x} - \cancel{z} - 1 & \\
1000 + 90 + 90 + 10 - 100 - 1 & \\
1190 - 101 & \\
= 1089 &
\end{array}
$$

ಒಂದೇ ಅಂಕವನ್ನುಳ್ಳ, 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ,2 ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಚಕ್ರೀಯವಾಗಿ 3 ವಿಧದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಕೂಡಿದರೆ ಬರುವ ಮೊತ್ತವು 11ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಲೋಮವೂ ಸಹ ಅದೇ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಡುವುದು.

ಉದಾ: $4, 5, 9$ ಎಂಬ ಮೂರು ಒಂದೇ ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅವುಗಳೇ 45, 59 ಮತ್ತು 94. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 198. ಈ 198, ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲೆ ಬಂದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ, 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 45, 59, 94 ರ ವಿಲೋಮ. 54, 95 ಮತ್ತು 49 ರ ಮೊತ್ತ 198 ಇದೂ ಸಹ 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y, z ಗಳಾಗಿರಲಿ

ಎರಡು ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು xy, yz ಮತ್ತು zx

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$
\begin{array}{c}
10x + y \\
10y + z \\
10z + x \\
\hline
11x + 11y + 11z \\
11(x + y + z)
\end{array}
$$

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ xy, yz ಮತ್ತು zx ಗಳ ವಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು yx, zy ಮತ್ತು xz ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ

$$
\begin{array}{c}
10y + x \\
10z + y \\
10x + z \\
\hline
11x + 11y + 11z \\
11(x + y + z)
\end{array}
$$

ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ. ಅದು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದೇ ಅಂಕದ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಅವು $1, 4$ ಮತ್ತು 6 ಆಗಿರಲಿ.

ಇವುಗಳಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಅವು $14, 46$ ಮತ್ತು 61 ಆಯಿತು.

ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 121 ಆಯಿತು. ಇದು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ಮೇಲೆ ಬಂದ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ವಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ, ಅಂದರೆ $41, 64$ ಮತ್ತು 16 ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ 121.

ಇದೂ ಸಹ 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಸಹ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$$
\begin{array}{lcl}
14^2 = 196 & \text{ಇದರ ವಿಲೋಮ} & 41^2 = 1681 \\
46^2 = 2216 & & 64^2 = 4096 \\
61^2 = \underline{3721} & & 16^2 = \underline{256} \\
 6033 & & 6033
\end{array}
$$

ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಮೊತ್ತ 6033

ಬೀಜಗಣಿತರೂಪದಲ್ಲಿ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು x, y ಮತ್ತು z ಗಳಾದರೆ,

ಎರಡು ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು xy, yz ಮತ್ತು zx

$$
\begin{aligned}
xy &= (10 + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 \\
yz &= (10y + z)^2 = 100y^2 + 20yz + z^2 \\
zx &= (10z + x)^2 = 100z^2 + 20zx + x^2 \\
&= 101(x^2 + y^2 + z^2) + 20(xy + yz + zx)
\end{aligned}
$$

ಇದರ ವಿಲೋಮ

$$
\begin{aligned}
yx &= (10y + y)^2 = 100y^2 + 20yx + x^2 \\
zy &= (10z + y)^2 = 100z^2 + 20zy + y^2 \\
xz &= (10x + z)^2 = 100x^2 + 20xz + z^2 \\
\hline
&= 101(x^2 + y^2 + z^2) + 20(xy + yz + zx)
\end{aligned}
$$

ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಮೊತ್ತ ಒಂದೇ

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೮

ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಶೋಧನೆ – 2

ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ವಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ, ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಸಂಖ್ಯೆ 72 ಆದರೆ ಅದರ ವಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆ 27

$$\begin{array}{r} 72 \\ 27 \\ \hline 45 \end{array}$$

ಇದೇ ರೀತಿ 64 ಆದರೆ ಅದರ ವಿಲೋಮ ಸಂಖ್ಯೆ 46

$$\begin{array}{r} 64 \\ 46 \\ \hline 18 \end{array}$$

45 ಮತ್ತು 18 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ $10x + y$

ವಿಲೋಮ ಅಂದರೆ $10y + x$

ಕಳೆದರೆ

$$\begin{array}{r} 10x + y \\ x + 10y \\ \hline 9x - 9y \\ = 9(x - y) \end{array}$$

ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅದೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗಲೂ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: ಸಂಖ್ಯೆ 724 ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ.

$$\begin{array}{r} 724 \\ 427 \\ \hline 297 \end{array} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \begin{array}{r} 724 \\ 472 \\ \hline 252 \end{array} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \begin{array}{r} 724 \\ 274 \\ \hline 450 \end{array} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \begin{array}{r} 724 \\ 247 \\ \hline 477 \end{array}$$

297, 252, 450 ಮತ್ತು 477 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆ xyz **ಆದರೆ** $100x + 10y + z$

zyx ನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$\begin{array}{r} 100x + 10y + z \\ 100z + 10y + x \\ \hline 99x - 99z \\ = 99(x - z) \end{array}$$

ಇದೇ ರೀತಿ xyz ನಲ್ಲಿ yzx ನ್ನು ಕಳೆದರೆ

$$\begin{array}{r} 100x + 10y + z \\ 100y + 10z + x \\ \hline 99x - 90y - 9z \\ = 9(11x - 10y - z) \end{array}$$

ಎರಡು ರೀತಿ ಕಳೆದರೂ ಅದು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಬದಲಾಯಿಸಿ ಬರೆದು ಕಳೆದರೂ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆ 5321 ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ

$$\begin{array}{r} 5321 \\ 1235 \\ \hline 4086 \end{array} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \begin{array}{r} 5321 \\ 3215 \\ \hline 2106 \end{array} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \begin{array}{r} 5321 \\ 2315 \\ \hline 3006 \end{array}$$

4086, 2106 ಮತ್ತು 3006 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತವೆ.

ಬೀಜಗಣಿತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ $xyzw$ ಆದರೆ ಅದರಲ್ಲಿ $wzyx$ ಅಥವಾ $zwxy$ ನ್ನು ಕಳೆದರೆ.

ಅಂದರೆ

$$\begin{array}{rl} 1000x + 100y + 10z + w & \text{ನಲ್ಲಿ} \\ 1000w + 100z + 10y + x & \text{ಕಳೆದರೆ} \\ \hline -999w - 90z + 90y + 999x & \\ \hline 9(-111w - 10z - 10y - 111x) & \end{array}$$

ಅಥವಾ

$$\begin{array}{rl} 1000x + 100y + 10z + w & \text{ನಲ್ಲಿ} \\ 1000z + 100w + 10x + y & \text{ಕಳೆದರೆ} \\ \hline 990x + 99y - 990z - 99w & \\ = 9(110x + 11y - 110z - 11w) & \end{array}$$

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿ ಕಳೆದರೂ 9 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸಂಖ್ಯೆ ಆರರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$
$$2 \times 3 \times 4 = 24$$
$$3 \times 4 \times 5 = 60$$
$$4 \times 5 \times 6 = 120$$
$$5 \times 6 \times 7 = 210$$
$$6 \times 7 \times 8 = 336$$
$$7 \times 8 \times 9 = 504$$
$$8 \times 9 \times 10 = 720$$

6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, 720 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆ? ಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎರಡರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗಬೇಕು. ಉಳಿದೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು, 3 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವು 3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧವು 2×3 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$(n-1)(n)(n+1) \quad \text{ಆಗಿರಬೇಕು}$$
$$n(n^2-1) = n^3 - n$$

$n^3 - n$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ 6 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಘನದಲ್ಲಿ ಆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 6 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ ೨೯

ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಲ್ಲ ಆದರೂ ಖಚಿತ

ಮೂರು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ, ಬರುವ ಆರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಏಳು, ಹನ್ನೊಂದು ಮತ್ತು ಹದಿಮೂರು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 123 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು ಒಂದರ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಬರುವಂತೆ ಎರಡು ಸಾರಿ ಬರೆಯೋಣ. ಈಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ 123 123 ಆಯಿತು. 123123 ಎಂಬುದು **7, 11** ಮತ್ತು **13** ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. 123123 ನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ 17589 ಬರುತ್ತದೆ. ಈ 17589 ನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 1599 ಬರುತ್ತದೆ. 1599 ನ್ನು 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧ ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಬರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಬರಲು ಕಾರಣವೇನು? ಮೂರು ಅಂಕದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ $7 \times 11 \times 13 = 1001$ ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೋಡೋಣ. ಮೂರು ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆ xyz ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದರೆ $xyzxyz$ ಆಗುತ್ತದೆ

ಈಗ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬರೆದರೆ

$$10^5x + 10^4y + 10^3z + 10^2x + 10^1y + 10^0z \quad \text{ಆಯಿತು}$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು

$$10^5x + 10^2x + 10^4y + 10^1y + 10^3z + 10^0z$$
$$10^2x\left(10^3+1\right) + 10^1y\left(10^3+1\right) + z\left(10^3+1\right) \quad (10^0 = 1 \text{ ಆದ್ದರಿಂದ})$$
$$\left(10^3+1\right)\left(10^2x + 10^1y + z\right)$$

$$(1000+1)\left(10^2x+10y+z\right)$$
$$1001\left(10^2x+10y+z\right)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡುಬಾರಿ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆ 1001 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ 7 ರಿಂದ ಅನಂತರ 11 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೆ 13 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಮೂರು ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $10^2x+10y+z$

ಅದನ್ನೇ $100x+10y+z$ ಅಥವಾ xyz ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ. ಯಾವುದೇ 3 ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರುತ್ತದೆ.

$$514 \times 1001 = 514514$$
$$732 \times 1001 = 732732$$

ಎರಡು ಅಂಕಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಬರುವ ಆರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 3, 7, 13 ಮತ್ತು 37 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ನಾವು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 12 ಆಗಿರಲಿ. ಮೂರುಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ 121212 ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 40404 ಬರುತ್ತದೆ. ಏಳರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 5772 ಬರುತ್ತದೆ. ಹದಿಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 444 ಬರುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ 37 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ 12 ಬರುತ್ತದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿ ನೋಡಿದರೆ

ಸಂಖ್ಯೆ xy ಆಗಿರಲಿ. 3 ಬಾರಿ ಬರೆದರೆ $xy\ xy\ xy$

ಅಂದರೆ $10^5x+10^4y+10^3x+10^2y+10^1x+10^0y$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು

$$10^5x+10^3x+10^1x+10^4y+10^2y+10^0y$$
$$10x\left(10^4+10^2+1\right)+y\left(10^4+10^2+1\right) \quad (\text{ಏಕೆಂದರೆ } 10^0=1)$$
$$10x(10000+100+1)+y(10000+100+1)$$
$$10x(10101)+y(10101)$$
$$=10101(10x+y)$$

ಅಂದರೆ ಎರಡು ಅಂಕದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 3 ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಅದು 10101 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. 10101 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳೇ 3, 7, 13 ಮತ್ತು 37.

ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 10101 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ, ಗುಣ ಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ನೋಡಬಹುದು.

$$14 \times 10101 = 141414$$
$$65 \times 10101 = 656565$$

ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಬರುವ ಎಂಟು ಅಂಕದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 73 ಮತ್ತು 137 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಆರಂಭದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಾಲ್ಕು ಅಂಕದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 5882 ಆಗಿರಲಿ. ಎರಡು ಸಲ ಬರೆದರೆ 5882 5882 ಬರುತ್ತದೆ. ಎಪ್ಪತ್ತಮೂರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 805834 ಬರುತ್ತದೆ. ಒಂದುನೂರ ಮೂವತ್ತೇಳರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 5882 ರೇ ಬರುತ್ತದೆ. ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದ 5882 ನಾವು ಆರಂಭಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಇದನ್ನೇ ಬೀಜಗಣಿತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೋಡೋಣ

ಸಂಖ್ಯೆ $abcd$ ಆದರೆ, ಎರಡುಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ $abcd\ abcd$ ಆಗುತ್ತದೆ

$$10^7a+10^6b+10^5c+10^4d+10^3a+10^2b+10^1c+10^0d$$
$$10^7a+10^3a+10^6b+10^2b+10^5c+10^1c+10^4d+10^0d \quad \left(10^0=1\right)$$
$$10^3a\left(10^4+1\right)+10^2b\left(10^4+1\right)+10c\left(10^4+1\right)+d\left(10^4+1\right)$$
$$\left(10^4+1\right)\left(10^3a+10^2b+10c+d\right)$$
$$(10000+1)\left(10^3a+10^2b+10c+d\right)$$
$$=10001\left(10^3a+10^2b+10c+d\right)$$

ಅಂದರೆ 4 ಅಂಕದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ಅದು 1001 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷ ವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ. 37 ಮತ್ತು 137, 1001 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ 37 ಮತ್ತು 137 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ.

ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ $10^3a+10^2b+10c+d$ ಆರಂಭ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿದೆ.

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ 4 ಅಂಕಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 1001 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡುಸಲ ಬರೆದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

$$1525 \times 10001 = 15251525$$
$$3078 \times 10001 = 30783078$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೩೦

ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n$$

ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇರುವ ಸೂತ್ರ

$$\begin{aligned} &= \tfrac{n}{2}[2a + (n-1)d] && a = 1 \\ &= \tfrac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)1] && d = 1 \\ &= \tfrac{n}{2}[2 + n - 1] \\ &= \tfrac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

ಕ್ರಮಾಗತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$$1 + 3 + 5 + 7 \ldots (2n-1)$$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{n}{2}[2a + (n-1)\cdot d] && a = 1 \\ &= \tfrac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)\cdot 2] && d = 2 \\ &= \tfrac{n}{2}[2 + 2n - 2] \\ &= \tfrac{n \times 2n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots n^2$$

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= n^3 - n^2 + 3n^2 - 3n + 1 \\ 3n^2 - 3n + 1 &= n^3 - (n-1)^3 \\ 3S_2 - 3S_1 + n &= n^3 \qquad (1 = n) \\ 3S_2 &= n^3 + 3S_1 - n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n\left[n^2 + \frac{3(n+1)}{2} - 1\right] \\ &= n\left[n^2 + \frac{3n+3}{2} - 1\right] \\ &= n\left[\frac{2n^2 + 3n + 3 - 2}{2}\right] \\ &= n\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{2}\right] \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots n^3$$

$$\begin{aligned} n^4 - (n-1)^4 &= 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \\ 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 &= n^4 - (n-1)^4 \\ 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - n &= n^4 \qquad (1 = n, n - n = 0) \\ 4S_3 &= n^4 + 6S_2 - 4S_1 + n \end{aligned}$$

$$= n^4 + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= n\left[n^3 + \left(2n^2 + n + 2n + 1\right) - 2(n+1) + 1\right]$$
$$= n\left[n^3 + 2n^2 + n + 2n + 1 - 2n - 2 + 1\right]$$
$$= n\left[n^3 + 2n^2 + n\right]$$
$$= n^2\left[n^2 + 2n + 1\right]$$
$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$
$$= \frac{n^2}{4}(n+1)^2$$

ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ, ಕ್ರಮಾಗತ ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots n$$
$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$ S_1 = ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots n^3$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$ S_3 = ಕ್ರಮಾಗತ ಘನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ $S_3 = [S_1]^2$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\mathbf{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n(n+1)}$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡುವ ಸೂತ್ರ

$$n(n+1) = n^2 + n = S_2 + S_1$$

$$S_2 + S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1+3}{3}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+4}{3}\right]$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2(n+2)}{3}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \ldots\ldots$

$n = 3 \quad \frac{3(3+1)(3+2)}{3} = 20$

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots\cdots n(n+1)(n+2)$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡುವ ಸೂತ್ರ

$$= n(n+1)(n+2)$$
$$= n(n^2 + 3n + 2)$$
$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$
$$= s_3 + 3s_2 + 2s_1$$
$$= \frac{n^2}{4}(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{2} + 1\right]$$
$$= n(n+1)\left[\frac{n^2 + n + 4n + 2 + 4}{4}\right]$$
$$= n(n+1)\left[\frac{n^2 + 5n + 6}{4}\right]$$
$$= n(n+1)\left[\frac{(n+2)(n+3)}{4}\right]$$

$$= \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots\cdots$

$n = 3$ ಆದಾಗ $\frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{4} = 3(4)(5)(6) = \frac{360}{4} = 90$

2 ರಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸೂತ್ರ

$$2 + 4 + 6 + \cdots\cdot n$$

$$2[1 + 2 + 3 \cdots\cdots n]$$

$$2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸೂತ್ರ

$1 + 5 + 9 + 13 + \cdots\cdots (4n-3)$

$$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$S = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)4\}$$

$$= \frac{n}{2}(2 + 4n - 4)$$

$$= \frac{n}{2}(4n-2)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot 2(2n-1)$$

$$= n(2n-1)$$

$n = 1$	ಆದಾಗ	$1(2-1) = 1$
$n = 2$		$2(4-1) = 6$
$n = 3$		$3(6-1) = 15$
$n = 4$		$4(8-1) = 28$

ಅಧ್ಯಾಯ ೩೧

ಅಪವರ್ತನಗಳು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳು

3 ಮತ್ತು 4 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 12.

2 ಮತ್ತು 6 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 12.

1 ಮತ್ತು 12 ರ ಗುಣಲಬ್ಧ 12.

ಆದ್ದರಿಂದ $3 \times 4, 2 \times 6$ ಮತ್ತು 1×12 ನ್ನು 12 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈಗ 6 ಮತ್ತು 18 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

6 ರ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

$6 = 1, 2, 3, 6$

18 ರ ಭಾಜಕಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

$18 = 1, 2, 3, 6, 18$

6 ರ ಭಾಜಕಗಳು $1, 2, 3, 6$ ಅಪವರ್ತನಗಳು. 18 ರ ಭಾಜಕಗಳು $1, 2, 3, 6, 18$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $1, 2, 3, 6$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಅದರಲ್ಲಿ 6 ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡದು. ಆದ್ದರಿಂದ 6 ನ್ನು 6 ಮತ್ತು 18 ರ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಇದೇ 6 ಮತ್ತು 18 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ

6 ಅಪವರ್ತ್ಯ $6, 12, 18, 24, 30, 36$

18 ಅಪವರ್ತ್ಯ $18, 36, 54, 72, \ldots$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $18, 36$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ. ಅದರಲ್ಲಿ 18 ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದು. ಆದ್ದರಿಂದ 18 ಲಘುತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ

ಅಂದರೆ 6 ಮತ್ತು 18 ರ ಮ. ಸಾ. ಅ. 6

6 ಮತ್ತು 18 ರ ಲ. ಸಾ. ಅ. 18

ಇದರಿಂದ ನಾವೊಂದು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ದತ್ತ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ

$$6 \times 18 = 6 \times 18$$

ಬೀಜಗಣಿತದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದಾದರೆ
ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು A ಮತ್ತು B ಗಳಾದರೆ
ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. H ಮತ್ತು L ಆದರೆ

$$A \times B = H \times L \quad \text{ಗೆ ಸಮ}$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ
ಎರಡು ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು

$$A = \frac{H \times L}{B} \qquad B = \frac{H \times L}{A}$$

ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದು ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ. ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$L = \frac{A \times B}{H}$$

ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದು ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ. ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$H = \frac{A \times B}{L}$$

ಬೀಜಗಣಿತದ ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡುವುದಾದರೆ

$$(a-b)^2 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad a^2 - b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. $(a-b)$
ಇವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. $(a-b)^2(a+b)$

$$A \times B = H \times L$$
$$(a-b)^2 \times (a^2 - b^2) = (a-b)(a-b)^2 \cdot (a+b)$$
$$(a-b)(a-b)(a+b)(a-b) = (a-b)(a-b)(a-b)(a+b)$$

ಅಧ್ಯಾಯ ೩೨

ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದಲ್ಲಿ $2, 5$ ಅಥವಾ ಇವುಗಳ ಘಾತಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸ್ಥಾನಗಳ ನಂತರ ದಶಮಾಂಶವು ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{2} = 0.5$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)
$\frac{1}{4} = 0.25$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)
$\frac{1}{8} = 0.125$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)
$\frac{1}{16} = 0.0625$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)

ಇದೇ ರೀತಿ $\frac{1}{5} = 0.2$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)
$\frac{1}{25} = 0.04$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)
$\frac{1}{125} = 0.008$ (ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು)

ಈ ರೀತಿ ಅಂಶ ಒಂದನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ ಸೊನ್ನೆ.

ಆದರೆ ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದಲ್ಲಿ 3 ಅಥವಾ 7 ರ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರೆ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದೇ ಇಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅಂಕಿಗಳು ಪುನರಾವರ್ತವಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{3} = 0.333$ (3 ಎನ್ನುವ ಅಂಕ ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

$\frac{1}{6} = 0.1666$ (.1 ರ ನಂತರ 6 ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

$\frac{1}{7} = 0.142857142857$ (142857 ಪುನರಾವರ್ತನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.)

ಇವುಗಳನ್ನು $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, $\frac{1}{7} = 0.142857$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಛೇದದಲ್ಲಿ 6 ಇದ್ದಾಗ, 14 ಇದ್ದಾಗ ಅಂದರೆ 3, 7 ರ ಗುಣಕಗಳಿದ್ದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಬರುವ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ ಆವರ್ತವಾಗದ ಭಾಗವೂ, ಆವರ್ತಕವಾಗುವ ಭಾಗವೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$

$\frac{1}{14} = 0.071428\dot{5}$

ಅಂದರೆ $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}$ ರೀತಿಯ ಶುದ್ಧ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಡೆಯ ಅಂಕ 9 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{1}{3} = 0.3$ $(3 \times 3 = 9)$

$\frac{1}{7} = 0.142857$ $(7 \times 7 = 49)$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಒಂದು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬರಬಹುದು. ಶುದ್ಧ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶದ ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಈ ನಿಯಮವು ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ $\frac{1}{43}$ ರಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 3 ಆಗಿರಬೇಕು.

$\frac{1}{57}$ ರಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಕ ಭಾಗದ ಕಡೆಯ ಅಂಕಿ 7 ಆಗಿರಬೇಕು.

ಅನುಬಂಧಗಳು

2 ರಿಂದ 5000 ತನಕ ಇರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Primes Numbers between 2 to 5000

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89	97	101	103
107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251
257	263	269	271	277	281	283	293	307
311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419
421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883
887	907	911	919	929	937	941	947	953
967	971	977	983	991	997	1009	1013	1019

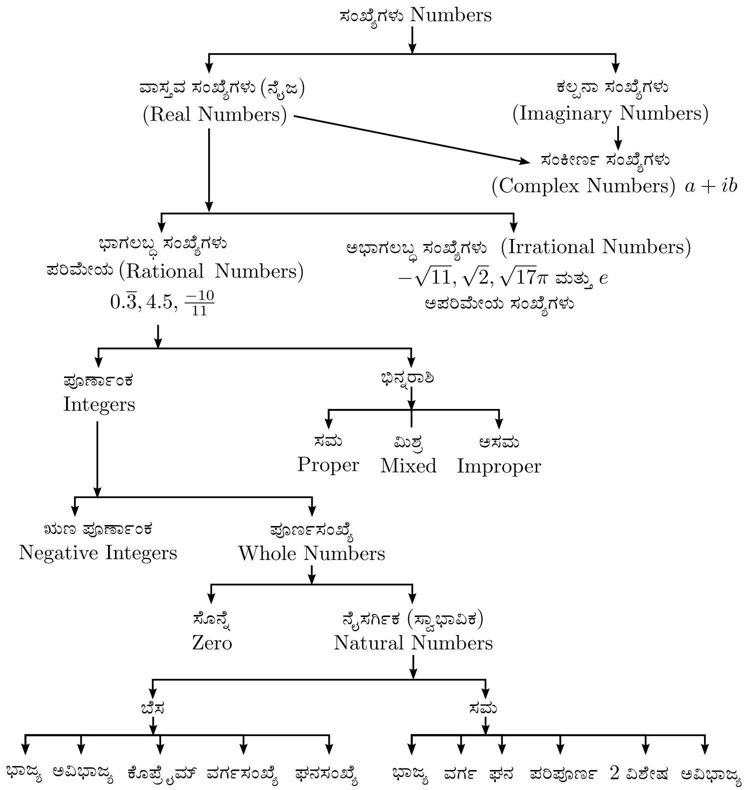
1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063
1069	1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117
1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237
1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297
1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367
1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433
1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483
1487	1489	1493	1499	1511	1523	1531	1543
1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597
1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637
1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709
1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777
1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847
1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889	1901
1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979
1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027
2029	2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087
2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137	2141
2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213	2224
2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281
2287	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341
2347	2351	2357	2371	2377	2381	2383	2389
2393	2399	2411	2417	2423	2437	2441	2447
2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539
2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609
2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671
2677	2683	2687	2689	2693	2699	2707	2711
2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767
2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819	2833
2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897
2903	2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963

2969	2971	2999	3001	3011	3019	3023	3037
3041	3049	3061	3067	3079	3083	3089	3109
3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181	3187
3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253
3257	3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319
3323	3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371
3373	3389	3391	3407	3413	3433	3449	3457
3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517
3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559
3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623
3631	3637	3643	3659	3671	3673	3677	3691
3697	3701	3709	3719	3727	3733	3739	3761
3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821	3823
3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889
3907	3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943
3947	3967	3989	4001	4003	4007	4013	4019
4021	4027	4049	4051	4057	4073	4079	4091
4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139	4153
4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229
4231	4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273
4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349	4357
4363	4373	4391	4397	4409	4421	4423	4441
4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507
4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567
4583	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643
4649	4651	4657	4663	4673	4679	4691	4703
4721	4723	4729	4733	4751	4759	4783	4787
4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831	4861
4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933
4937	4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987
4993	4999	...	...	...	...	...	...

ವೇದಗಣಿತದ ಸೂತ್ರಗಳು

1. ಏಕಾಧಿಕೇನ ಪೂರ್ವೇಣ
2. ನಿಖಿಲಂ ನವತಶ್ಚರಮಂ ದಶತಃ
3. ಊರ್ಧ್ವ ತಿರ್ಯಗ್ಭ್ಯಾಮ್
4. ಪರಾವರ್ತ್ಯ ಯೋಜಯೇತ್
5. ಶೂನ್ಯಂ ಸಾಮ್ಯ ಸಮುಚ್ಚಯೇ
6. (ಆನುರೂಪ್ಯೇ) ಶೂನ್ಯಮನ್ಯತ್
7. ಸಂಕಲನ ವ್ಯವಕಲನಾಭ್ಯಾಮ್
8. ಪೂರಣಾಪೂರಣಾಭ್ಯಾಮ್
9. ಚಲನಕಲನಾಭ್ಯಾಮ್
10. ಯಾವದೂನಮ್
11. ಶೇಷಾಣ್ಯಂಕೇನ ಚರಮೇಣ
12. ಸೋಪಾಂತ್ಯದ್ವಯಮಂತ್ಯಮ್
13. ಏಕನ್ಯೂನೇನ ಪೂರ್ವೇಣ
14. ಗುಣಿತಸಮುಚ್ಚಯಃ
15. ಗುಣಕಸಮುಚ್ಚಯಃ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ
Classification of Numbers



ವಿವಿಧ ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Numbers in Different Base Systems

ದಶಮಾನದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾದ, ದ್ವಿಮಾನ, ಪಂಚಮಾನ, ಸಪ್ತಮಾನದ ದ್ವಾದಶಮಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

$0 \cdots 9$	$0, 1$	$0, 1, 2, 3, 4$	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$	
ದಶಮಾನ	ದ್ವಿಮಾನ	ಪಂಚಮಾನ	ಸಪ್ತಮಾನ	ದ್ವಾದಶಮಾನ
1	1	1	1	1
2	$(10)_2$	2	2	2
3	$(11)_2$	3	3	3
4	$(100)_2$	4	4	4
5	$(101)_2$	$(10)_5$	5	5
6	$(110)_2$	$(11)_5$	6	6
7	$(111)_2$	$(12)_5$	$(10)_7$	7
8	$(1000)_2$	$(13)_5$	$(11)_7$	8
9	$(1001)_2$	$(14)_5$	$(12)_7$	9
10	$(1010)_2$	$(20)_5$	$(13)_7$	T
11	$(1011)_2$	$(21)_5$	$(14)_7$	E
12	$(1100)_2$	$(22)_5$	$(15)_7$	$(10)_{12}$
13	$(1101)_2$	$(23)_5$	$(16)_7$	$(11)_{12}$
14	$(1110)_2$	$(24)_5$	$(20)_7$	$(12)_{12}$
15	$(1111)_2$	$(30)_5$	$(21)_7$	$(13)_{12}$
16	$(10000)_2$	$(31)_5$	$(22)_7$	$(14)_{12}$
17	$(10001)_2$	$(32)_5$	$(23)_7$	$(15)_{12}$
18	$(10010)_2$	$(33)_5$	$(24)_7$	$(16)_{12}$
19	$(10011)_2$	$(34)_5$	$(25)_7$	$(17)_{12}$
20	$(10100)_2$	$(40)_5$	$(26)_7$	$(18)_{12}$
21	$(10101)_2$	$(41)_5$	$(30)_7$	$(19)_{12}$
22	$(10110)_2$	$(42)_5$	$(31)_7$	$(1T)_{12}$
23	$(10111)_2$	$(43)_5$	$(32)_7$	$(1E)_{12}$
24	$(11000)_2$	$(44)_5$	$(33)_7$	$(20)_{12}$
25	$(11001)_2$	$(100)_5$	$(34)_7$	$(21)_{12}$
	ಕ್ಯಾಲ್ಕ್ಯುಲೇಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಈ ಪದ್ಧತಿಯೇ			

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು

Absolute	ನಿರಪೇಕ್ಷ
Abstract Number	ಅಮೂರ್ತಸಂಖ್ಯೆ
Addition	ಸಂಕಲನ
Aggregate	ಸಮಷ್ಟಿ
Alternate	ಪರ್ಯಾಯ
Analogy	ಅನುರೂಪತೆ, ಸಾದೃಶ್ಯ
Analyse	ವಿಶ್ಲೇಷಿಸು
Appendix	ಅನುಬಂಧ
Application	ಅನ್ವಯ
Approximate Value	ಸನ್ನಿಹಿತ ಬೆಲೆ
Arithmetician	ಅಂಕಗಣಿತಜ್ಞ
Ascending	ಏರುವ, ಆರೋಹಿ
Average	ಸರಾಸರಿ
Base Number	ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ
Basic Concept	ಮೂಲಪರಿಕಲ್ಪನೆ
Basis	ಮೂಲಾಧಾರ
Binomial Theorem	ದ್ವಿಪದಪ್ರಮೇಯ
Bracket	ಆವರಣ
Calculus	ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ
Calculation	ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ, ಗಣನೆ
Cardinal Number	ಗಣನ ಸಂಖ್ಯೆ
Classification	ವರ್ಗೀಕರಣ
Code	ಸಂಕೇತ
Common Factor	ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ
Comparision	ತುಲನೆ, ಹೋಲಿಕೆ
Complex Number	ಸಂಕೀರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ
Composite Number	ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Consecutive Numbers	ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಕ್ರಮಾಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Constant Number	ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ

Count	ಎಣಿಸು
Counting Numbers	ಎಣಿಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Cube	ಘನ
Cube Root	ಘನಮೂಲ
Cube Numbers	ಘನಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Cyclic	ಚಕ್ರೀಯ
Cyclic Numbers	ಚಕ್ರೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Decimal Numbers	ದಶಮಾಂಶ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Definition	ವ್ಯಾಖ್ಯೆ
Denominator	ಛೇದ
Descending	ಅವರೋಹಣ
Digit	ಅಂಕ
Divisibility	ಭಾಜ್ಯತೆ
Divisor	ಭಾಜಕ
Equality	ಸಮತೆ, ಸಮಾನತೆ
Equal Numbers	ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Equation	ಸಮೀಕರಣ
Equilateral Triangle	ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ
Error	ತಪ್ಪು, ದೋಷ
Estimate	ಅಂದಾಜು
Even Number	ಸಮಸಂಖ್ಯೆ
Factor	ಅಪವರ್ತನ
Formula	ಸೂತ್ರ
Furmat Last Theorem	ಫರ್ಮನ ಕಡೆಯ ಪ್ರಮೇಯ
Fibonacci Numbers	ಫಿಬೋನಾಕ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Formula	ಸೂತ್ರ, ಸಂಕ್ಷೇಪೋಕ್ತಿ
Fundamental Operation	ಮೂಲಪರಿಕರ್ಮ
Generalisation	ಸಾರ್ವತ್ರೀಕರಣ
Highest Common Factor	ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ
Hindu Arabic Numerals	ಹಿಂದೂ ಅರಬ್ಬೀ ಸಂಖ್ಯಾ ಸೂಚಕಗಳು
Identical	ಸರ್ವಸಮತ್ವದ, ಅನನ್ಯ
Identity Equation	ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ

Imaginary Number	ಊಹಾಸಂಖ್ಯೆ; ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Indefinite	ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ
Imaginary Numbers	ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Index	ಘಾತಸೂಚಿ; ಸೂಚಿ
Indivisible	ಅವಿಭಾಜ್ಯ
Inequality	ಅಸಮಾನತೆ
Inference	ತೀರ್ಮಾನ
Irrational Number	ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
Integer	ಪೂರ್ಣಾಂಕ
Inverse	ವಿಲೋಮ
Kaprekar Number	ಕಪ್ರೇಕರ್ ಸಂಖ್ಯೆ
Lowest Common Multiple	ಲಘುತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತ್ಯ
Magic Square	ಮಾಯಾಚೌಕ
Mathematician	ಗಣಿತಜ್ಞ
Mathematics	ಗಣಿತ
Minimum	ಕನಿಷ್ಠ
Mixed Fraction	ಮಿಶ್ರಭಿನ್ನರಾಶಿ
Multiple	ಅಪವರ್ತ್ಯ
Multiplier	ಗುಣಕ
Multiply	ಗುಣಿಸು
Natural Numbers	ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Negative Numbers	ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Negative Sign	ಋಣಚಿಹ್ನೆ
Negative Integer	ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ
Negative Term	ಋಣಪದ
Number	ಸಂಖ್ಯೆ
Numberline	ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ
Numeral	ಸಂಖ್ಯಾ ಸೂಚಕ
Odd Number	ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ
Operation	ಸಂಕ್ರಿಯೆ
Ordinal Number	ಕ್ರಮಸೂಚಕ ಸಂಖ್ಯೆ
Palindrome	ಮಾಲಾ ಸಂಖ್ಯೆ

Perfect Number	ಪರಿಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ
Positive Integer	ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ
Positive Number	ಧನಾಂಶ, ಧನಸಂಖ್ಯೆ
Prime Number	ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ
Pythagorian Numbers	ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Quotient	ಭಾಗಲಬ್ಧ
Ramanujan Numbers	ರಾಮಾನುಜನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Rational Number	ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ
Real Number	ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ;
Rectangle	ಆಯತ
Recurring Decimal	ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ
Remainder	ಶೇಷ
Remainder Theorem	ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ
Result	ಫಲಿತಾಂಶ
Right Angle	ಲಂಬಕೋನ
Root	ಮೂಲ
Rule	ನಿಯಮ
Sign	ಚಿಹ್ನೆ
Simple Equation	ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ
Simplification	ಸರಳೀಕರಣ
Simplify	ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸು
Square	ವರ್ಗ
Square root	ವರ್ಗಮೂಲ
Theory of Numbers	ಸಂಖ್ಯಾಶಾಸ್ತ್ರ; ಸಂಖ್ಯಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ
Triangular Numbers	ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
Transpose	ಸ್ಥಳಾಂತರಿಸು
Unequal	ಅಸಮ
Unique	ಏಕೈಕ, ಅನನ್ಯ
Unknown Number	ಅಜ್ಞಾತ ಸಂಖ್ಯೆ; ಅವ್ಯಕ್ತಸಂಖ್ಯೆ
Variable Number	ಚರಸಂಖ್ಯೆ
Whole Number	ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ
Zero	ಸೊನ್ನೆ

ಗ್ರಂಥಋಣ

'ಸಂಖ್ಯಾ ಪ್ರಪಂಚ' ಪುಸ್ತಕಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಮುಂದೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಗ್ರಂಥಗಳ ಸಹಾಯವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇನೆ. ಪುಸ್ತಕದ ಲೇಖಕರಿಗೂ, ಪ್ರಕಾಶಕರಿಗೂ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

1) ಸಂಖ್ಯಾಲೋಕ — ಶ್ರೀ ಎನ್. ಸುಬ್ರಮಣ್ಯ

2) ಸಂಖ್ಯೋಧ್ಯಾನ — ಶ್ರೀ ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರಿ

3) ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ — ಪ್ರೊ॥ ವಿ. ಕೆ. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ

4) ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಸ್ವರೂಪ — ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್

5) ಮಾಯಾಚೌಕಗಳ ಸ್ವಾರಸ್ಯ — ಡಾ॥ ಎಸ್. ಬಾಲಚಂದ್ರರಾವ್, ಎಮ್. ಶೈಲಜ, ವಿ. ವನಜಾ

6) ಅಂಕಿ–ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮ್ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ — ಬಿ. ಕೆ. ವಿಶ್ವನಾಥರಾವ್, ಕ. ರಾ. ವಿ. ಪ. ಬೆಂಗಳೂರು

7) ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು — ವೈ. ಎಸ್. ಸುಬ್ರಹ್ಮಣ್ಯ

8) ಮಾಯಾಚೌಕಗಳ ಸ್ವಾರಸ್ಯ — ಬಿ. ಕೆ. ವಿಶ್ವನಾಥರಾವ್, ಕ. ರಾ. ವಿ. ಪ. ಬೆಂಗಳೂರು

9) ಚತುರ್ವರ್ಣಸಮಸ್ಯೆ — ಪ್ರೊ॥ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾವ್

10) ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಚರಿತ್ರೆ — ಡಾ॥ ಸಿ. ಎನ್. ಶ್ರೀನಿವಾಸ ಅಯ್ಯಂಗಾರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಇದೇ ಲೇಖಕರ ಪ್ರಕಟಿತ ಕೃತಿಗಳು

1) ವಿಜ್ಞಾನ ಕೈಪಿಡಿ (ಜನಪ್ರಿಯ ವಿಜ್ಞಾನ)
2) ವಿಜ್ಞಾನ ಒಂದು ಪಕ್ಷಿನೋಟ
3) ವಿಜ್ಞಾನ ವೈವಿಧ್ಯ
4) ವಿಜ್ಞಾನ ಕೈಪಿಡಿ (ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ)
5) ಆರೋಗ್ಯ–ಪರಿಸರ–ಪರಧರ್ಮ
6) ಗಣಿತ ಮಾಧುರ್ಯ
7) ಮೆದುಳಿಗೆ ಕಸರತ್ತು (ಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು)
8) ಗಣಿತ ಅಗಣಿತ
9) ಸಂಖ್ಯಾವಿನ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು
10) ನಾವೆಷ್ಟು ಬುದ್ಧಿವಂತರು (ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ)
11) ಮಕ್ಕಳ ಕೈಚಳಕ (ರೇಖಾಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ)
12) ಜಗತ್ತಿನ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞರು.
13) ಗಣಿತ ವೈವಿಧ್ಯ
14) ಗಣಿತದ ನೂತನ ಮಾದರಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು