

考试科目名称 概率论与数理统计(A 卷)

2017—2018 学年第 一 学期 教师 唐斌, 姚远 考试方式: 闭卷
系 (专业) _____ 年级 _____ 班级 _____
学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七
分数							

$$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.28) = 0.9, \Phi(1.64) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(2) = 0.977$$

$$t_{0.025}(16) = 2.12, t_{0.025}(17) = 2.11, t_{0.05}(16) = 1.746, t_{0.05}(17) = 1.740$$

$$\chi^2_{0.05}(40) = 55.758, \chi^2_{0.05}(39) = 54.572, \chi^2_{0.95}(40) = 26.509, \chi^2_{0.95}(39) = 25.695$$

得分	
----	--

1、(6 分×6=36 分)

(1) 一个盒子里分别有标号从1到 n 的 n 个红球、 n 个白球、 n 个蓝球，现从该盒子中随机选出两个球（无放回），求这两个球是同一颜色或者同一标号的概率。

(2) 设随机变量 X 与 Y 独立，且 $X \sim G(0.1)$ ， $Y \sim B(10, 0.2)$ ，求 $E(XY)$ 和 $D(5X - 2Y)$ 。

(3) 有三个抽屉各存有两枚硬币，分别为两枚金币、两枚银币、一枚金币一枚银币。现随机选择一个抽屉并从中随机选出一枚硬币。若此硬币为银币，求这个抽屉另外一枚硬币是金币的概率。

- (4) 设 X_1, X_2, \dots, X_5 为取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, \bar{X} 是样本均值, S^2 是修正样本方差, 求统计量 $Y = \frac{5(\bar{X} - \mu)^2}{S^2}$ 的分布 (如有自由度, 须指出)。
- (5) 设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{15} 相互独立且均是总体 $X \sim N(20, 3)$ 的样本, 求 $P(\bar{X} - \bar{Y} < \sqrt{2})$ 。
- (6) 从某正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽样, 考虑其置信度为 90% 的置信区间。若选取样本容量为 40, 能否保证该置信区间长度的期望小于总体方差本身? 请给出理由。

得分	
----	--

2、(本题满分 8 分)

从良种率为 0.5 的种子中任取 10000 粒, 问能以 95% 的概率保证在这些种子中良种所占比例与 0.5 的差的绝对值不超过多少?

得分	
----	--

 3、(本题满分 10 分)

设连续型随机变量 X 与 Y 的联合密度函数为

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (6-x-y)/8, & 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

求 a) $p_X(x)$; b) $p_{Y|X}(y)$; c) $P(2 < Y < 3|X = 1)$.

得分	
----	--

 4、(本题满分 12 分)

设 X 为连续型随机变量，证明下列结论：

- a) 若 X 的 k 阶矩存在，则其所有小于 k 阶的矩均存在。
- b) 若 X 的密度函数为偶函数，则 X 与 X^2 不相关。

得分	
----	--

 5、(本题满分 10 分)

假设某厂生产的牛奶中钠含量(单位: mg/L) X 服从正态分布, 出厂规定其钠含量平均不得高于 18mg/L。现抽取了 17 盒 500ml 的牛奶样品, 测得钠含量的均值为 19.8mg/L, 修正样本方差为 18.8.

a) 问显著水平 0.05 下该批牛奶是否合格? b) 求 $\mu = E(X)$ 的置信度为 95% 的置信区间。

得分	
----	--

 6、(本题满分 12 分)

N 个人 ($N > 5$) 围坐在一个圆桌旁, 现让每个人抛一次硬币, 如果某个人的结果与左右两个人均不同, 则此人将会收到一个礼物。令 X 为收到礼物的人数, 求 $E(X)$ 与 $D(X)$ 。

得分	
----	--

7、(本题满分 12 分)

设一台天气预报服务器从开始工作到失效的时间服从分布 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ，其中 $\theta > 0$ 为未知参数。某天气预报中心有两台这样的服务器，一台失效时另外一台可以立即工作。现进行 n 次观测，得到从开始到两台均失效的总时间分别为 X_1, X_2, \dots, X_n 。

a) 求 θ 的矩估计量与极大似然估计量; b) 判断它们的无偏性和一致性，并给出理由。