考试科目名称 概率论与数理统计(A 卷)

2016—2017 学年第 一 学期　　教师 唐斌　　考试方式：闭卷

系（专业）________________　　年级________　　班级________

学号____________　　姓名____________　　成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	附加
分数								

$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.28) = 0.9, \Phi(1.64) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(2) = 0.977$

$t_{0.025}(48) = 2.0, t_{0.025}(49) = 1.98, t_{0.05}(48) = 1.66, t_{0.05}(49) = 1.64$

得分	

1、（6 分×6=36 分）

（1） 设平面上点(p,q)在$|p| \le 1, |q| \le 1$中等可能地出现，试求方程$x^2 + px + q = 0$有实根的概率。

（2） 设随机变量X与Y独立，且$X \sim P(2)$，$Y \sim B(10,0.2)$，求$E(XY)$和$D(X-2Y)$。

（3） 设$\{X_n\}$为独立随机变量序列，且$X_k \sim \begin{pmatrix} \sqrt{\ln k} & -\sqrt{\ln k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, k = 1,2,\ldots$。求证$\{X_n\}$服从大数定律。

（4） 设$X_1,X_2,\dots,X_5$为取自正态总体$N(0,\sigma^2)$的容量为 5 的样本，求统计量$Y=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$的分布（如有自由度，须指出）。

（5） 设$X_1,\mathrm{X}_2,\dots,\mathrm{X}_{10}$和$\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2,\dots,Y_{15}$相互独立且均是总体$X\sim N(20,3)$的样本，求$P(|\bar{X}-\bar{Y}|>\sqrt{2})$。

（6） 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（单位:h）分别为 6.0,5.7,5.8,6.5,7.0,6.3,5.6,6.1,5.0，设干燥时间总体$X\sim N(\mu,0.6^2)$，求未知参数μ的置信度为 0.95 的置信区间。

得分	

2、（本题满分 8 分）

设有 10 枚硬币，且抛第i枚硬币出现正面向上的概率为$\frac{i}{10},i=1,2,\dots,10$。随机选一枚硬币并抛出，结果正面向上。求该硬币是第 5 枚硬币的概率。

得分	

3、（本题满分 12 分）

设$(X,Y) \sim p(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$. 试求：a) 边缘密度$p_X(x), p_Y(y)$；b) $Z=X+Y$的密度函数。

得分	

4、（本题满分 10 分）

一复杂系统由n个相互独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性为 0.9，且必须至少有 80%的部件工作才能使整个系统工作。问：n至少为多大时，才能使得系统的可靠性不低于 0.95？

得分	

5、（本题满分 10 分）

某市居民月伙食费$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知$E(X) = 235.5$，现随机抽取 49 个居民，他们本月伙食费平均值为$\bar{x} = 236.5$元，修正的样本标准差$s_{49} = 3.5$元。 a) 试问在显著水平$\alpha = 0.05$下，是否可以认为本月居民平均伙食费有显著上升？ b) 求$\mu = E(X)$的置信度为 95%的置信区间。

得分	

6、（本题满分 12 分）

已知总体 $X \sim p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, 0 \le x \le \theta \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$，其中$\theta > 0$为未知参数。设$X_1, X_2, \dots, X_n$为样本。

a) 求θ的矩估计量与极大似然估计量; b) 判断它们的无偏性和一致性 (均须说明理由)。

得分	

7、（本题满分 12 分）

设π是集合$[n] = \{1,2,\dots,n\}$上的一个置换。若$i < j$且$\pi(i) > \pi(j)$，则称$(\pi(i), \pi(j))$是π中的一个倒置。例如，考虑[5]的置换(4,2,1,5,3)，其包含 5 个倒置$(4,2), (4,1), (4,3), (2,1), (5,3)$。现从$[n]$上的所有可能置换中随机挑选一个置换，令$X$表示该置换中倒置的个数。a) 求$E(X)$；b)求 $D(X)$。

得分	

附加题、（本题满分 4 分）

请利用中心极限定理证明等式

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$$