# 考试科目名称 <u>概率论与数理统计（期中）</u>

2017 年 11 月 15 日

院系____________________　　年级__________　　班级_________

学号____________________　　姓名_____________　　成绩__________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分数 | | | | | | |

| 得分 | |
|---|---|

1、（6 分×6=36 分）

（1）　已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，求事件$A,B,C$全不发生的概率。

（2）　从一副扑克牌（不含大小王，共 52 张，4 种花色，每种花色 13 种面值）中任取三张牌，试求下列事件的概率。a) 三张牌面值相同；b) 至多有两张牌花色相同的概率。

（3）　已知$X\sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，试比较$P(X\geq\mu+\sigma_1)$与$P(Y\leq\mu-\sigma_2)$ 的大小。

（4）　设X与Y具有相同的分布律$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$，已知$P(XY=0)=1$，求$(X,Y)$的联合分布律。

（5）　设随机变量$X,Y,Z$相互独立，且$X\sim U(-2,2), Y\sim N(0,4), Z\sim E(3)$。设$W=2X-Y+3Z+2$，　求期望$E(W)$和方差$D(W)$。

（6）　设X的密度函数为$p_X(x)=\begin{cases} 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right), & 1\le x\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$。求$Y=X^2-2X$的密度函数$p_Y(y)$。

| 得分 | |
|---|---|

2、（本题满分 12 分）

将 A、B、C 中任意字母输入信道，输出为原字母的概率为$\alpha$，为其他一字母的概率均为$(1-\alpha)/2$。现将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入的概率分别为$p_1, p_2, p_3$（$p_1+p_2+p_3=1$）。a) 求输出与输入完全相同的概率是多少？b) 已知输出为 CBAC，求输入的是 AAAA 的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的）

| 得分 | |
|---|---|

3、（本题满分 12 分）

设随机向量$(X,Y)$的联合密度函数为$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$。

a) X 与 Y 是否独立？b) 求$Z=X+Y$的密度函数。

| 得分 | |
|---|---|

4、（本题满分 12 分）

甲乙两人进行多轮博弈。在每一轮博弈中，甲和乙获胜的概率分别为$p$和$1-p$，且每轮博弈的结果相互独立。一旦某人赢得的博弈次数比对方多 2 次，则博弈不再进行，且该人为最终赢家。a) 求甲为最终赢家的概率；b) 求总博弈次数的期望值。

| 得分 | |
|---|---|

5、（本题满分 16 分）

设随机向量$(X,Y)$在圆域$x^2+y^2\leq\ r^2$上均匀分布。a) 求 X 和 Y 的边缘密度函数；b) 求相关系数$\rho_{XY}$；3) 讨论 X 与 Y 的相关性与独立性。

| 得分 | |
|---|---|

6、（本题满分 12 分,附加题 3 分，共 15 分）

令$\pi$是集合$[n]=\{1,2,\ldots,n\}$上的一个置换。若$[n]$中$k$个不同的元素组成的有序 $k$ 元组$(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ $(i_1<i_j, j=2,3,\ldots,k)$满足$\pi(i_j)=i_{j+1}, 1\le j\le k-1$且$\pi(i_k)=i_1$，则称该 $k$ 元组构成$\pi$上的一个长度为 $k$ 的环。现从$[n]$上的所有可能置换中随机挑选一个置换，令$X$表示该置换中长度为$k$的环的个数。a) 求$E(X)$；b) (附加题) 求 $D(X)$ 。