

## سوال ۱ (۵ نمره)

فرض کنید یک مدل Logistic Regression با تابع فرضیه  $H$  به صورت زیر داریم.

I

$$\hat{y} = h_{\theta}(x) = g(\theta_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_0)$$

الف) اگر  $\theta_2 = 0, \theta_1 = 2, \theta_0 = 1$  باشند مرز تصمیم به چه صورت خواهد بود؟ (مرز تصمیم قبل از اعمال تابع فعال سازی  $g$ ) (۱/۵ نمره)

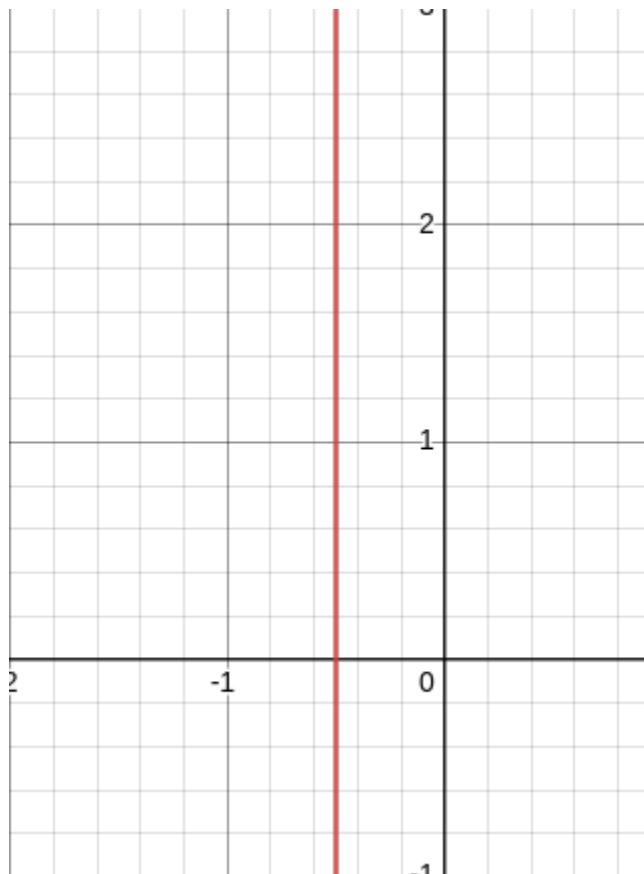
ب) اگر  $\theta_2 = 2, \theta_1 = 1, \theta_0 = -3$  باشند مرز تصمیم به چه صورت خواهد بود؟ (مرز تصمیم قبل از اعمال تابع فعال سازی  $g$ ) (۱/۵ نمره)

ج) اگر  $y = x_1 \& x_2$  باشند و  $x_1, x_2$  مقادیر باینری باشند و تابع فعال سازی sigmoid باشد. پارامترهای مدل را به گونه ای مشخص کنید که این مدل توانایی تفکیک Logical AND را داشته باشد (۲ نمره)

الف)

$$\theta_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_0 = 0$$

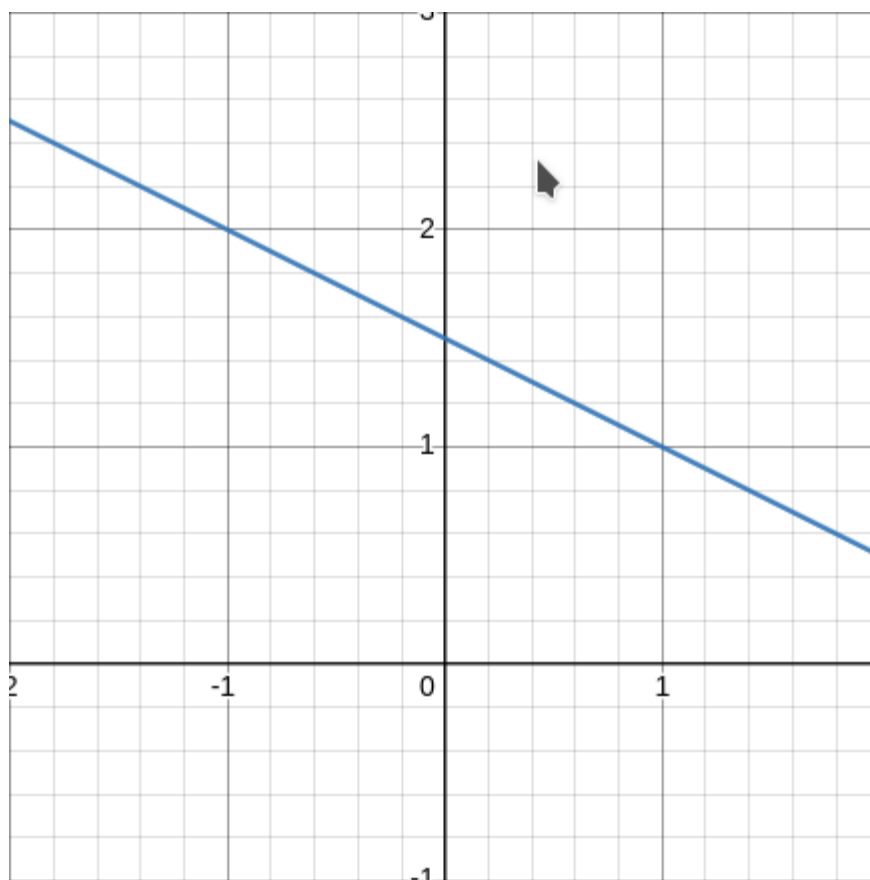
$$2x_1 + 1 = 0 \rightarrow \text{decision boundary}$$



(ب)

$$\theta_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_0 = 0$$

$$2x_2 + x_1 - 3 = 0 \rightarrow \text{decision boundary}$$



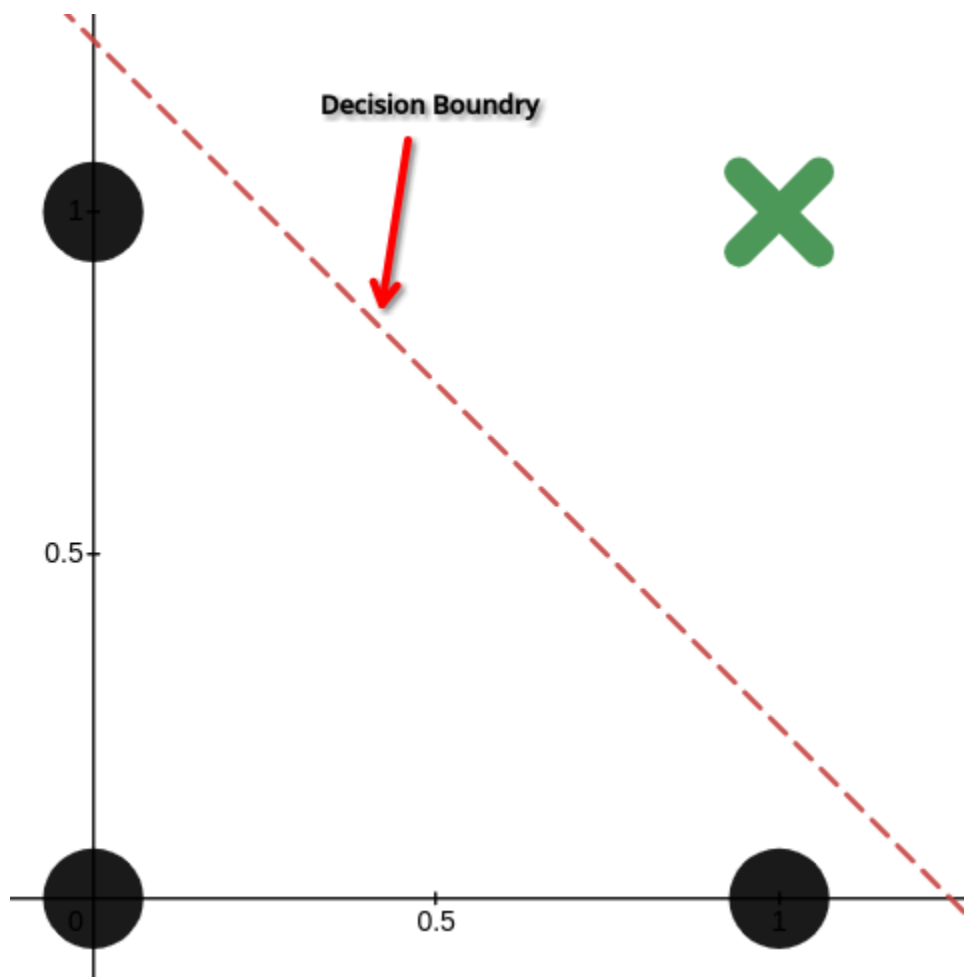
ج) از اون جایی که تابع sigmoid مقادیر مثبت  $x$  رو به  $y$  بزرگتر از ۰.۵ (دسته ی مثبت) و مقادیر منفی  $x$  رو به  $y$  کوچکتر از ۰.۵ (دسته منفی) نگاشت میکنه باید وزن ها جوری در نظر گرفته شوند که فقط وقتی مقادیر ویژگی ها هردو یک شوند مقدار خروجی ما مثبت شود با این توصیف مقدار بایاس باید منفی باشد تا حتی اگر یکی از ویژگی ها مثبت بود حاصل جمع را منفی کند پس با این حساب داریم :

$$\theta_0 = -2.5$$

$$\theta_1 = 2$$

$$\theta_2 = 2$$

Feature_1	Feature_2	$Z = \theta_2 x_2 + \theta_1 x_1 + \theta_0$	(Z)sigmoid	LABEL
0	0	$2*0+2*0-2.5 = -2.5$	0.07	0
0	1	$2*1 + 2*0 -2.5 = -0.5$	0.37	0
1	0	$2*0 + 2*1 -2.5 = -0.5$	0.37	0
1	1	$2*1 + 2*1 -2.5 = 1.5$	0.81	1



## سوال ۲ (۳ نمره)

ثابت کنید تابع softmax نسبت به اضافه شدن مقدار ثابت به ورودی حساس نیست. به عبارت دیگر تساوی زیر برقرار است ( $x + c$  به معنای افزودن مقدار ثابت  $c$  به تمام ابعاد  $x$  می باشد).

$$\text{softmax}(x) = \text{softmax}(x + c)$$

برای تابع softmax داریم

$$\text{softmax}(x)_i = \frac{e^{x_i}}{\sum_j e^{x_j}}$$

$$\text{softmax}(x_i) = \exp(x_i) / \text{sum}(\exp(x))$$

$$\text{softmax}(x_i + c) = \exp(x_i + c) / \text{sum}(\exp(x+c))$$

$$\text{For exp we have } \exp(x + c) = \exp(x) \cdot \exp(c)$$

$$\rightarrow \text{softmax}(x_i + c) = \exp(x_i) \cdot \exp(c) / \text{sum}(\exp(x) \cdot \exp(c))$$

$$\rightarrow \text{softmax}(x_i + c) = \exp(x_i) \cdot \cancel{\exp(c)} / \text{sum}(\exp(x)) \cdot \cancel{\exp(c)}$$

$$\rightarrow \text{softmax}(x_i + c) = \exp(x_i) / \text{sum}(\exp(x)) = \text{softmax}(x_i)$$

### سوال ۳ ( ۵ نمره)

جدول زیر یک مجموعه آموزشی شامل ۸ نمونه می‌باشد. در این جدول چهار ستون Color, Legs, Height, Smelly ویژگی‌های هر نمونه هستند. ستون Species نیز ستون هدف می‌باشد که دارای دو دسته M و H است. با استفاده از طبقه‌بند Naive Bayes محاسبه کنید که نمونه داده‌ی زیر به کدام یک از دو دسته‌ی M یا H تعلق خواهد گرفت.

Color = Green, Legs = 2, Height = Tall, Smelly = No

ID	Color	Legs	Height	Smelly	Species
1	White	3	Short	Yes	M
2	Green	2	Tall	No	M
3	Green	3	Short	Yes	M
4	White	3	Short	Yes	M
5	Green	2	Short	No	H
6	White	2	Tall	No	H
7	White	2	Tall	No	H
8	White	2	Short	Yes	H

#### Color

	M	H
White	2	3
Green	2	1
total	4	4

#### Legs

	M	H
3	3	0
2	1	4
total	4	4

### Height

	M	H
Short	3	2
Tall	1	2
total	4	4

### Smelly

	M	H
Yes	3	1
No	1	3
total	4	4

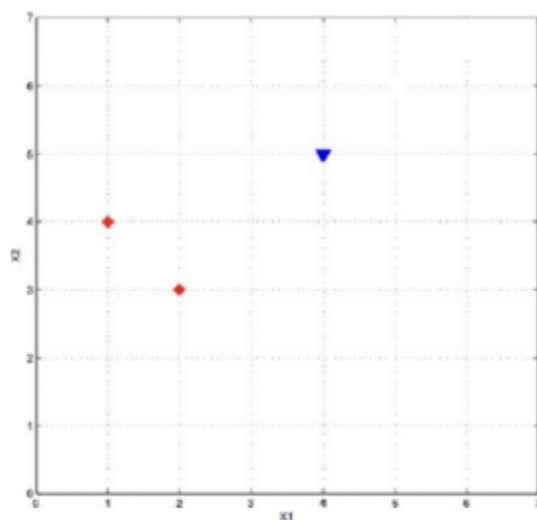
$$P(M \mid x_n) = P(\text{Color} = \text{Green} \mid M) * P(\text{Legs} = 2 \mid M) * P(\text{Height} = \text{Tall} \mid M) * P(\text{Smelly} = \text{No} \mid M) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$P(H \mid x_n) = P(\text{Color} = \text{Green} \mid H) * P(\text{Legs} = 2 \mid H) * P(\text{Height} = \text{Tall} \mid H) * P(\text{Smelly} = \text{No} \mid H) = \frac{1}{4} * 1 * \frac{1}{2} * \frac{3}{4} \quad (2)$$

$(2) > (1) \rightarrow$  sample belong to "H".

#### سوال ۴ (۷ نمره)

می‌خواهیم یک طبقه‌بند ماشین بردار پشتیبان را روی داده‌های زیر آموزش دهیم. در این شکل ۲ داده با مقدار  $-1$  (مثبت‌های قرمز) و یک داده با مقدار  $+1$  (مثبت‌های آبی) نشان داده شده است



الف) معادله خط تصمیم را بدست آورید (مقادیر  $b, w, m$  را بدست آورید).  
 ب) نقاط بردار پشتیبان را روی تصویر مشخص کرده و خط تصمیم را رسم کنید

$$\begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ (2, 3) & (1, 4) \end{array} \rightarrow \text{Label} = -1$$

$$\begin{array}{c} \alpha_3 \\ (4, 5) \end{array} \rightarrow \text{Label} = +1$$

$$L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i (x_i^T w + b) - 1)$$

$$= \frac{1}{2} w^T w - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i^T w - b \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \right) + \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

minimum  $b, w$

$$\textcircled{1} \frac{dL}{dw} = w - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i \Rightarrow w^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i$$

$$\frac{dL}{db} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$w^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i = -\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \textcircled{2}$$



$$L(w, b, \alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \alpha_i \alpha_j (x_i)^T x_j - b \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

$$\sum \alpha_i \bar{y}_i = 0 \quad \alpha_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\max_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j + \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

$$\alpha_1 \alpha_1 = 13$$

$$\alpha_1 \alpha_3 = 23$$

$$x_2 x_3 = 24$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = 14$$

$$x_2 x_2 = 17$$

$$x_3 x_3 = 41$$

$$\alpha_1 \alpha_1 y_1 y_1 x_1 x_1 = \alpha_1^2 \cdot 13 = 13 \alpha_1^2 \quad i=1, j=1$$

$$\alpha_1 \alpha_2 y_1 y_2 x_1 x_2 = 14 \alpha_1 \alpha_2 \quad i=1, j=2$$

$$\alpha_1 \alpha_3 y_1 y_3 x_1 x_3 = -23 \alpha_1 \alpha_3 \quad i=1, j=3$$

$$\alpha_2 \alpha_1 y_2 y_1 x_2 x_1 = 14 \alpha_1 \alpha_2 \quad i=2, j=1$$

$$\alpha_2 \alpha_2 y_2 y_2 x_2 x_2 = 17 \alpha_2^2 \quad i=2, j=2$$

$$\alpha_2 \alpha_3 y_2 y_3 x_2 x_3 = -24 \alpha_2 \alpha_3 \quad i=2, j=3$$

$$\alpha_3 \alpha_1 y_3 y_1 x_3 x_1 = -23 \alpha_1 \alpha_3 \quad i=3, j=1$$

$$\alpha_3 \alpha_2 y_3 y_2 x_3 x_2 = -24 \alpha_2 \alpha_3 \quad i=3, j=2$$

$$\alpha_3 \alpha_3 y_3 y_3 x_3 x_3 = 41 \alpha_3^2 \quad i=3, j=3$$

PAYCO

DATE: \_\_\_\_\_



$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} -\frac{1}{2} \left[ 13\alpha_1^2 + 28\alpha_1\alpha_2 - 46\alpha_1\alpha_3 + 17\alpha_2^2 - 48\alpha_2\alpha_3 + 4\alpha_3^2 \right] \\ \quad + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = \max_{\alpha_1, \alpha_2} -\frac{1}{2} \left[ 8\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_2 + 10\alpha_2^2 \right] + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_1^2 - 8\alpha_1\alpha_2 - 5\alpha_2^2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{d\alpha_1} = -8\alpha_1 - 8\alpha_2 + 2 = 0 \\ \frac{dy}{d\alpha_2} = -8\alpha_1 - 10\alpha_2 + 2 = 0 \end{array} \right.$$

$$2\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = 1/4$$

$$\alpha_3 = 1/4$$

$$\omega^* = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$m = \frac{2}{11\omega^*H} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}} \text{PAYCO}} = 2\sqrt{2}$$

DATE: \_\_\_\_\_

→ طبق / اویزایی نه مس

$$b^* = y_1 (x_1^T \cdot w + b^*) = 1 \rightarrow b^* = -(x_1 \cdot w + 1)$$

$$m = 2\sqrt{2}$$

$$b^* = -3,5$$

$$w^* = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(c)

