باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

درس سیستم‌های کنترل خطی

پروژه‌ی پایانی درس: دینامیک و کنترل سیستم دوچرخه

استاد درس: دکتر بابازاده

امیرحسین افشارراد

۹۵۱۰۱۰۷۷

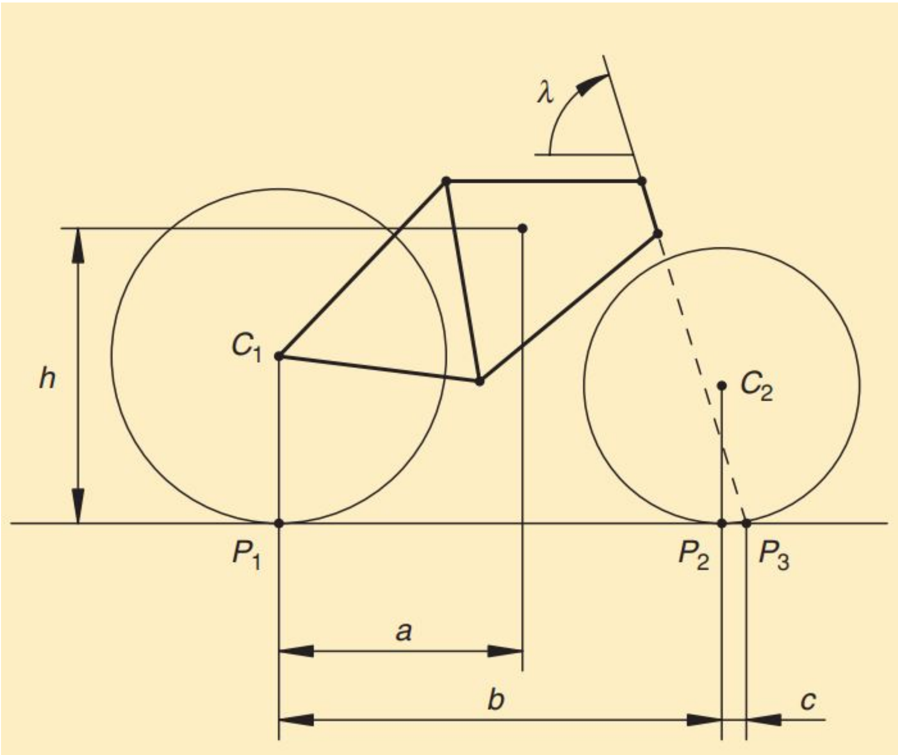
۴ بهمن ۱۳۹۷

۱ خلاصه‌ای از مطالب مقاله

- در این بخش، مروری مختصر بر مفاهیم مهم مقاله مرجع انجام خواهیم داد.
- نکاتی که در بررسی مقاله برای نگارنده‌ی این گزارش جالب توجه بوده‌اند، به صورت **پررنگ** مشخص شده‌اند. (متن توضیحات ارائه‌شده بیشتر از ۳ پاراگراف ـ مطابق خواسته‌ی صورت پروژه‌ـ می‌باشند اما نکات مهم‌تر را می‌توانید تنها با بررسی قسمت‌های پررنگ مشاهده کنید.)

۱.۱ مدل ابتدایی دوچرخه

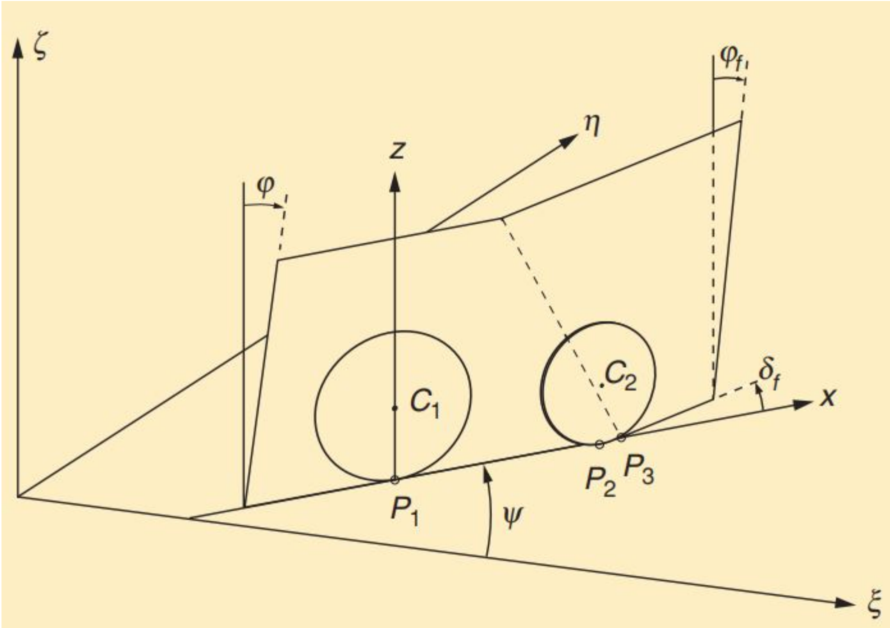
در ابتدا، توجه داریم که **دوچرخه در حالت استاتیک یک سیستم ناپایدار است (مشابه با یک آونگ وارون)، اما تحت شرایطی در حال حرکت می‌تواند به پایداری برسد.** همچنین بررسی خواهیم کرد که **دوچرخه، رفتار یک سیستم غیر مینیمم‌فاز** را از خود نشان می‌دهد.
برای مدل‌کردن سیستم دوچرخه، در ابتدا نیاز به تعریف چندین پارامتر داریم. این پارامترها در شکل ۱ قابل مشاهده هستند.



شکل ۱: مدل ساده‌ی دوچرخه و پارامترهای آن

در این مدل‌سازی، دوچرخه از نظر هندسی مانند دو صفحه است که از طریق یک لولا به هم متصل باشند. در این حالت چرخ عقب و بدنه‌ی دوچرخه در صفحه‌ی عقب، و چرخ جلو نیز در صفحه‌ی جلو قرار می‌گیرد. این دو صفحه در محور هدایت (خط گذرنده از نقطه P_3 در شکل ۱) متقاطع هستند. شکل ۲ این سیستم را به خوبی نمایش می‌دهد.
در ادامه به بررسی مدل‌های ارائه‌شده برای این سیستم می‌پردازیم. در ابتدا با مدل درجه دوم ساده شروع می‌کنیم. معادله ۱ فرم زمانی این سیستم را توصیف می‌کند که در آن، V سرعت حرکت، a و h به ترتیب مختصات x و z مرکز جرم، φ زاویه چرخش صفحه‌ی عقب، و δ زاویه‌ی بین صفحه‌ی عقب و صفحه‌ی جلو است.

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} - mgh\varphi = \frac{DV}{b}\frac{d\delta}{dt} + \frac{mV^2h}{b}\delta \qquad (۱)$$



شکل ۲: مدل دوچرخه و صفحات تشکیل‌دهنده‌ی آن در دستگاه مختصات مرجع

در این حالت تابع تبدیل سیستم از φ به δ نیز به صورت معادله ۲ در می‌آید.

$$G_{\varphi\delta}(s) = \frac{V(Ds + mVh)}{b(Js^2 - mgh)} \approx \frac{aV}{bh}\frac{s + \dfrac{V}{a}}{s^2 - \dfrac{g}{h}} \qquad (۲)$$

در این جا دو مورد مهم مشاهده می‌شود: اول **وابستگی بهره و صفر سیستم به سرعت حرکت**، و دوم آن که **سیستم همواره ناپایدار است** و یک قطب سمت راست دارد. اگر این سیستم را با یک فیدبک منفی با بهره k_2 کامل کنیم، به سیستمی پایدار دست خواهیم یافت که در معادله ۳ توصیف شده است. (در متن مقاله اشتباهی در صورت این معادله وجود دارد که در این جا، آن را تصحیح کرده‌ایم.)

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{DVk_2}{b}\frac{d\varphi}{dt} + (\frac{mV^2hk_2}{b} - mgh)\varphi = 0 \qquad (۳)$$

همچنین از معادله ۳ به سادگی نتیجه می‌شود که شرط پایداری سیستم آن است که $k_2 > bg/V^2$ که می‌توان از آن به این شکل استنباط کرد: **شرط لازم برای پایداری آن است که سرعت حرکت از مقدار معینی بیشتر باشد.**

۲.۱ مدل دوچرخه با در نظر گرفتن بخش جلویی

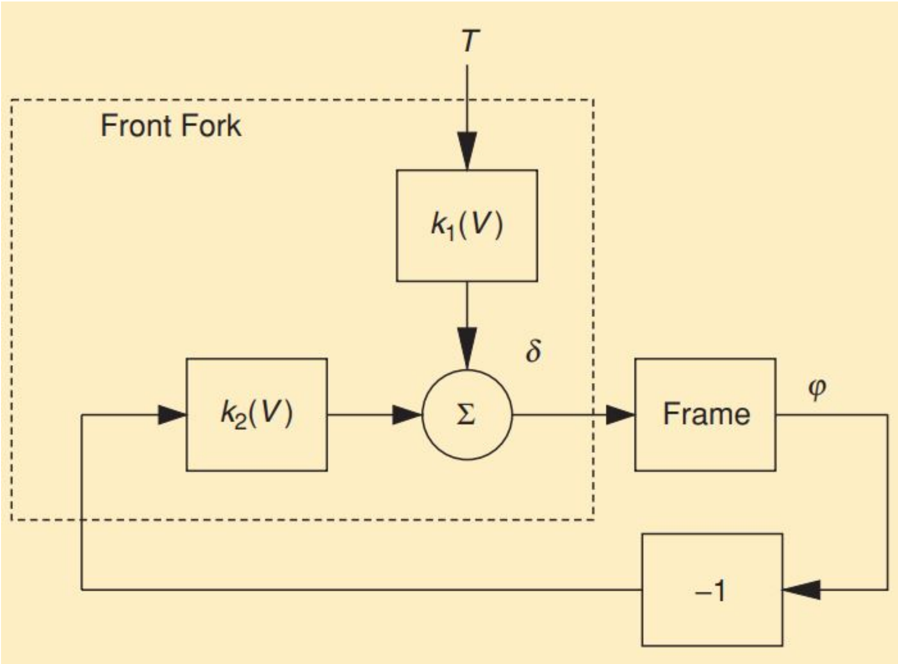
تا به این جا در مدل ارائه‌شده، اثر بخش جلویی [۱] مورد بررسی قرار نگرفته است، چرا که در آن داشتیم $c = 0$ و $\lambda = 90°$ (که c مقدار trail و λ مقدار زاویه سر [۲] است که هر دو در شکل ۱ مشخص شده‌اند). برای اثر دادن به این پارامتر، ورودی سیستم را به جای زاویه هدایت δ [۳]، گشتاور اعمالی به دسته‌های دوچرخه در نظر می‌گیریم. در این حالت، با توجه به معادلاتی که در بخش ۲.۲ ذکر شده است، سیستم با دو شرط زیر به پایداری می‌رسد:

$$V > V_c = \sqrt{bg\cot\lambda}$$

$$bh > ac\tan\lambda$$

[1] front fork
[2] head angle
[3] steer angle

مجدداً مشاهده می‌شود که **شرط لازم برای پایداری آن است که سرعت حرکت از مقدار معینی بیشتر باشد.** **همچنین، در نظر گرفتن اثر قسمت جلویی باعث می‌شود تا یک فیدبک از زاویه‌ی کج‌شدگی φ** [4] **به زاویه هدایت δ شکل بگیرد و وجود این فیدبک، موجب پایداری (یا به تعبیری، خودپایداری** [5]**) سیستم می‌شود.** **دقت کنید که در حالت $c = 0$ و $\lambda = 90^\circ$ امکان دستیابی به این پایداری با این سناریو وجود ندارد.** شکل ۳ نموداری از چگونگی شکل‌گیری سیستم فیدبک مذکور را نشان می‌دهد که در آن، T گشتاور هدایت [6] است که به عنوان ورودی به سیستم اعمال می‌شود.



شکل ۳: مدل فیدبک ناشی از در نظر گرفتن اثر بخش جلویی دوچرخه در مدل

۳.۱ اثر کنترل دستی

می‌توان اثر کنترل دستی فرد سوار بر دوچرخه را نیز با یک سیستم فیدبک مدل کرد. با توجه به دینامیک سیستم و مطابق با شکل ۳، رابطه‌ی بین گشتاور اعمالی، زاویه‌ی هدایت، و زاویه‌ی کج‌شدگی به صورت معادله ۴ است.

$$\delta = k_1(V)T - k_2(V)\varphi \tag{۴}$$

اگر اثر کنترل دستی فرد را مطابق با یک سیستم فیدبک با رابطه‌ی $T = -k\varphi$ مدل کنیم، معادله ۴ به صورت معادله ۵ ساده می‌شود.

$$\delta = -\big(kk_1(V) + k_2(V)\big)\varphi \tag{۵}$$

این مدل فیدبک بدان معناست که فرد سوار بر دوچرخه، با زیاد شدن زاویه‌ی کج‌شدگی دوچرخه، به گونه‌ای به اعمال گشتاور می‌پردازد که از سقوط و ناپایداری جلوگیری کند.

۴.۱ هدایت به وسیله‌ی چرخ عقب

در ادامه، به بررسی حالت دیگری از کنترل دوچرخه می‌پردازیم که در آن، هدایت جهت حرکت به وسیله‌ی چرخ عقب صورت می‌گیرد و چرخ جلو وظیفه‌ی پیش‌رانی را به عهده دارد. (برعکس حالت عادی که چرخ عقب پیش‌ران، و چرخ جلو هدایت‌گر

[4] tilt angle
[5] self-stabilization
[6] steer torque

است.) این حالت در دوچرخه‌های خوابیده [۷] مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمونه‌ی چنین دوچرخه‌ای در شکل ۴ قابل مشاهده است.

شکل ۴: دوچرخه‌ی خوابیده که در آن، چرخ جلو پیش‌ران و چرخ عقب هدایت‌گر است

ادعا می‌شود که ساختار چنین دوچرخه‌هایی دارای امنیت بیشتر است؛ اما از طرف دیگر مشاهده می‌شود که کنترل آن‌ها نیز پیچیده‌تر و سخت‌تر است. در این بخش از مقاله‌ی مرجع به داستان The NHSA[8] Rear-Steered Motorcycle نیز اشاره می‌شود که نتیجه‌ی مهم این داستان، آن است که **در بسیاری از موارد می‌توان سیستم‌هایی طراحی کرد که ویژگی‌های بسیار مطلوب و مناسبی داشته باشند؛ اما در عمل قابل استفاده ــ قابل کنترل، و پایدار ــ نباشند.**
این سیستم را می‌توان با معکوس کردن علامت V در معادله ۲ توصیف کرد. **در این حالت مشاهده می‌شود که سیستم یک صفر و یک قطب سمت راست دارد. در این حالت سیستم حلقه‌باز ناپایدار است و سیستم حلقه‌بسته نیز، چنان‌چه صفر و قطب سمت راست به هم نزدیک باشند، به آسانی قابل کنترل (به صورت robust و مقاوم) نمی‌باشد. همچنین می‌توان بررسی کرد که فیدبک با یک بهره تحت هیچ شرایطی قادر به پایدارسازی این سیستم نمی‌باشد.** (این حالت مشابه سؤالی است که در آزمون پایانی درس مورد بررسی قرار گرفت. همچنین بررسی دقیق‌تر معادلات همراه با مکان هندسی ریشه‌ها در قسمت ۳.۳ انجام می‌گیرد.) **همچنین برای کنترل مقاوم چنین سیستمی لازم است که نسبت صفر به قطب سمت راست، عددی بزرگ باشد که طبق رابطه‌ی**

$$\frac{z}{p} = \frac{mVh}{D}\sqrt{\frac{J}{mgh}} \approx \frac{V}{a}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

نشان می‌دهد که افزایش سرعت، امکان کنترل مقاوم سیستم حلقه بسته را بیشتر فراهم می‌کند. همچنین یک نکته‌ی مهم دیگر نیز آن است که **صفرهای سیستم وابسته به سنسورها، و actuatorها، و حالت‌های سیستم هستند و اگر تمامی متغیرهای حالت سیستم اندازه‌گیری شوند، صفرها به تمامی از بین می‌روند و می‌توان از این طریق، مشکل صفرهای سمت راست را حل نمود.**

۵.۱ بررسی چگونگی مانور در حرکت دوچرخه

با بررسی معادلات حاکم بر زاویه‌های هدایت و کج‌شدگی و نیز گشتاور اعمالی که به صورت خلاصه در شکل ۳ قابل مشاهده است، می‌توان توابع تبدیل از T به δ را به دست آورد. همچنین با بررسی دستگاه مختصات نشان‌داده‌شده در شکل ۲ و روابط خطی‌شده، نهایتاً می‌توان تابع تبدیل از گشتاور اعمالی T به انحراف مسیر، η را به دست آورد. معادله ۶ این تابع تبدیل را نشان می‌دهد.

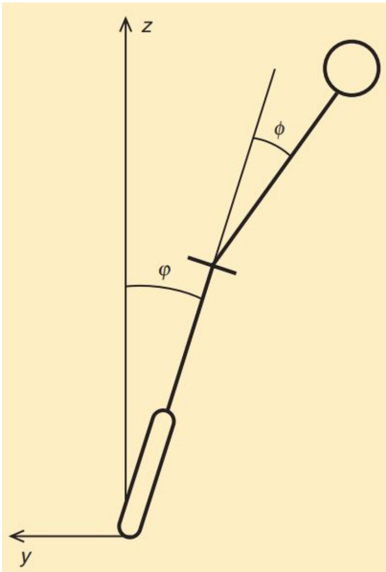
$$G_{\eta T}(s) = \frac{k_1(V)V^2}{b}\frac{s^2 - \dfrac{mgh}{J}}{s^2\Big(s^2 + \dfrac{k_2(V)VD}{bJ}s + \dfrac{mgh}{J}\big(\dfrac{V^2}{V_c^2} - 1\big)\Big)} \tag{۶}$$

[7]recumbent bicycle
[8]National Highway Safety Administration

نکته‌ی مهمی که از معادله ۶ قابل مشاهده است، **وجود صفر غیر مینیمم‌فاز است که باعث می‌شود در پاسخ پله پایین‌زدگی داشته باشیم.** تعبیر معادل این پایین‌زدگی آن است که **سیستم ابتدا در جهتی حرکت می‌کند که در ادامه آن جهت را تغییر می‌دهد؛ به عبارت دیگر، انحراف ابتدا در جهت گشتاور اعمالی است اما با گذشت زمان اندکی، جهت آن تغییر می‌کند.**
در این مورد در بخش ۷ بیشتر توضیح داده خواهد شد.

۶.۱ بررسی اثر خم شدن دوچرخه‌سوار

گام بعدی برای آن که مدل خود را به واقعیت نزدیک کنیم آن است که خم شدن دوچرخه‌سوار و حرکت بدن او را نیز در مدل خود لحاظ کنیم. برای این کار، بدن فرد را (که در قسمت‌های بعدی به صورت یک‌قسمتی و در راستای محور دوچرخه در نظر گرفته می‌شد) به صورت دو بخشی با قابلیت خم شدن و مطابق با شکل ۵ در نظر می‌گیریم.



شکل ۵: دیاگرام مدل با در نظر گرفتن خم شدن دوچرخه‌سوار

نکته‌ی قابل توجه در این وضعیت آن است که سیستم دو ورودی دارد (T و ϕ) و این امر باعث می‌شود تا بتوان مشکل صفر غیر مینیمم‌فاز را که در قسمت قبل با آن روبه‌رو بودیم، برطرف کرد. به عبارت دیگر، با اضافه کردن یک متغیر کنترلی جدید، می‌توان صفر سمت راست را حذف نمود.

۷.۱ مدل خطی مرتبه چهارم

آخرین گام در حوزه مدل‌های خطی برای شبیه‌سازی رفتار دوچرخه، آن است که مدل استاتیک قسمت جلوی دوچرخه را با یک مدل دینامیکی جایگزین کنیم. نتیجه‌ی حاصل، به دست آمدن یک مدل مرتبه چهارم است که معادله ۷ آن را توصیف می‌کند.

$$M\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\delta}\end{pmatrix} + CV\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\delta}\end{pmatrix} + (K_0 + K_2V^2)\begin{pmatrix}\varphi\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix} \tag{۷}$$

تا به این جا مدل‌سازی سیستم دوچرخه را گام به گام پیچیده‌تر و کامل‌تر کردیم و ادامه‌ی مقاله به بحث مدل‌های غیرخطی می‌پردازد که خارج از محدوده‌ی بررسی ما است.
در نهایت بحث خلاصه‌سازی مقاله را در این نقطه به پایان می‌بریم و در ادامه به شبیه‌سازی و بررسی مدل‌های ارائه‌شده می‌پردازیم.

۲ مدل‌سازی سیستم دوچرخه

۱.۲ مدل مرتبه دوم ساده

تابع تبدیل سیستم حلقه بازبا مدل ساده‌ی مرتبه دوم، در معادله ۸ مشاهده می‌شود.

$$G_{\varphi\delta}(s) = \frac{V(Ds + mVh)}{b(Js^2 - mgh)} \approx \frac{aV}{bh}\frac{s + \dfrac{V}{a}}{s^2 - \dfrac{g}{h}} \tag{۸}$$

همچنین معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم حلقه بسته و معادله مشخصه‌ی آن نیز در عبارات ۹ و ۱۰ قابل مشاهده هستند. (معادله ۹ در متن مقاله دارای یک اشتباه جزئی است که در این‌جا آن را تصحیح کرده‌ایم.)

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{DVk_2}{b}\frac{d\varphi}{dt} + (\frac{mV^2hk_2}{b} - mgh)\varphi = 0 \tag{۹}$$

$$\Delta_{\varphi\delta}(s) = Js^2 + \frac{DVk_2}{b}s + \frac{mV^2hk_2}{b} - mgh \tag{۱۰}$$

۲.۲ مدل مرتبه دوم با در نظر گرفتن اثر بخش جلویی

در این حالت معادله‌ی سیستم حلقه‌بسته به شکل معادله ۱۱ در می‌آید:

$$T_{\varphi T}(s) = \frac{\dfrac{DVb}{acm(V^2\sin\lambda - bg\cos\lambda)}s + \dfrac{b(V^2h - acg)}{ac(V^2\sin\lambda - bg\cos\lambda)}}{Js^2 + \dfrac{DVg}{V^2\sin\lambda - bg\cos\lambda}s + \dfrac{mg^2(bg\cos\lambda - ac\sin\lambda)}{V^2\sin\lambda - bg\cos\lambda}} \tag{۱۱}$$

۳.۲ مدل دوچرخه با هدایت به وسیله‌ی چرخ عقب

معادلات این حالت با منفی قرار دادن مقدار V در معادلات بخش ۱.۲ به دست می‌آیند. سیستم حلقه‌بسته در این حالت معادله مشخصه‌ای مطابق با ۱۲ دارد.

$$\Delta_{\varphi\delta}(s) = Js^2 - \frac{DVk_2}{b}s + \frac{mV^2hk_2}{b} - mgh \tag{۱۲}$$

۴.۲ مدل خطی مرتبه چهارم

در این حالت با در نظر گرفتن یک مدل دینامیکی برای قسمت جلوی دوچرخه، شکل روابط حاکم بر سیستم به صورت معادله ۱۳ در می‌آید.

$$M\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}\\ \ddot{\delta}\end{pmatrix} + CV\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\delta}\end{pmatrix} + (K_0 + K_2V^2)\begin{pmatrix}\varphi\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix} \tag{۱۳}$$

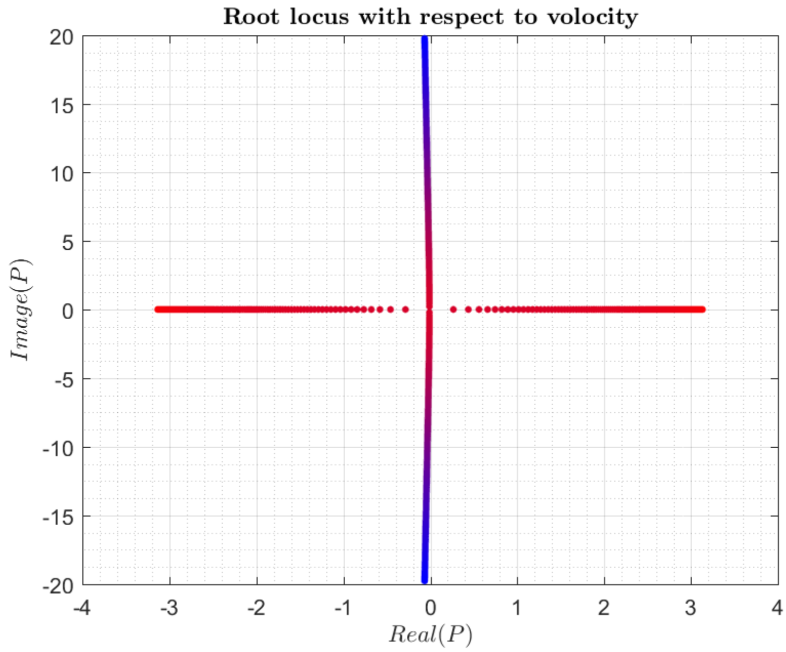
برای تبدیل معادله ۱۴ به شکل یک تابع تبدیل، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\left(Ms^2 + CVs + (K_0 + K_2V^2)\right)\begin{pmatrix}\varphi\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\varphi\\ \delta\end{pmatrix} = \left(Ms^2 + CVs + (K_0 + K_2V^2)\right)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix} \tag{۱۴}$$

۳ بررسی پایداری مدل دوچرخه

۱.۳ مدل مرتبه دوم ساده

در این بخش با تغییر مقدار سرعت، مکان هندسی قطب‌های سیستم را با توجه به معادله‌ی ۱۰ رسم می‌کنیم. شکل ۶ این مکان هندسی را نمایش می‌دهد. دقت کنید که شروع مکان هندسی به ازای $V = 0$ با رنگ قرمز است و با بزرگ‌تر شدن مقدار سرعت، به سمت مقادیر آبی حرکت می‌کند.



شکل ۶: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۰ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)

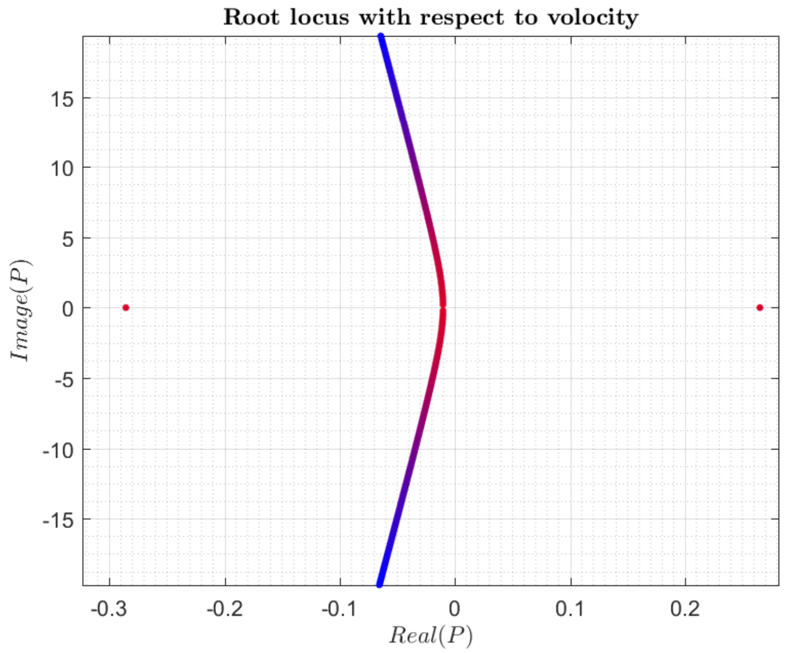
مشخص است که به ازای سرعت‌های کم، سیستم ناپایدار است اما با بزرگ‌تر شدن سرعت به پایداری می‌رسد. برای مشخص‌تر بودن قسمت وسط نمودار، صورت بزرگ‌نمایی‌شده‌ی آن را نیز در شکل ۷ مشاهده می‌کنید.
ضمناً لازم به ذکر است که مقدار k_2 که درجه‌ی آزادی مسأله است، در این شبیه‌سازی برابر با ۱ در نظر گرفته شده است.
این نتیجه با شهود ما از مسأله نیز سازگار است، چرا که دوچرخه در سرعت‌های کم نمی‌تواند پایدار بماند و برای رسیدن به حالت تعادل و پایداری، لازم است سرعت دوچرخه از یک مقدار حداقلی بزرگ‌تر باشد.

۲.۳ مدل مرتبه دوم با در نظر گرفتن اثر بخش جلویی

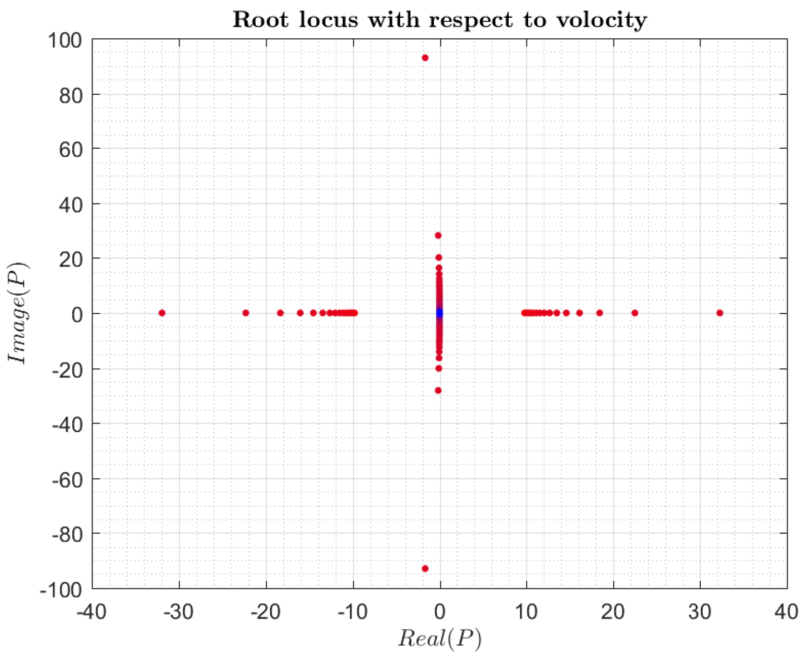
مکان هندسی ریشه‌های معادله‌ی ۱۱ مطابق با شکل ۸ می‌باشد. مجدداً برای مشاهده‌ی بهتر، شکل بزرگ‌نمایی‌شده‌ی ناحیه‌ی میانی مکان هندسی را نیز در شکل ۹ مشاهده می‌کنید. آن چه مشاهده می‌شود باز هم مطابق با آن چه انتظار داشتیم، آن است که با افزایش سرعت (که از روی نمودار معادل با حرکت از نقاط قرمز به سمت نقاط آبی است) سیستم به سمت پایداری می‌رود. نکته‌ی قابل توجه دیگر آن است که در این مدل، با افزایش سرعت مشاهده می‌کنیم که فرکانس نوسانات سیستم بسیار زیاد می‌شود که این نیز با شهود مسأله منطبق است.

۳.۳ مدل دوچرخه با هدایت به وسیله‌ی چرخ عقب

مطابق با توضیح مقاله و نیز با مشاهده‌ی معادله ۱۲ که معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم در این حالت است، مشاهده می‌شود که سیستم با هیچ سرعتی پایدار نیست. مکان هندسی ریشه‌های سیستم که در شکل ۱۰ (و نمونه‌ی بزرگ‌نمایی‌شده‌ی شکل ۱۱) نیز این موضوع را تأیید می‌کند.



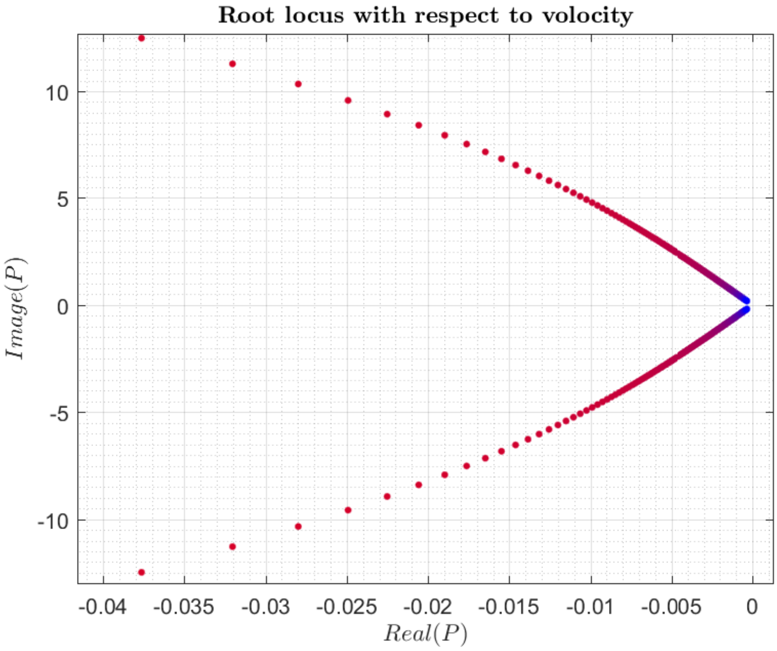
شکل ۷: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۰ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)



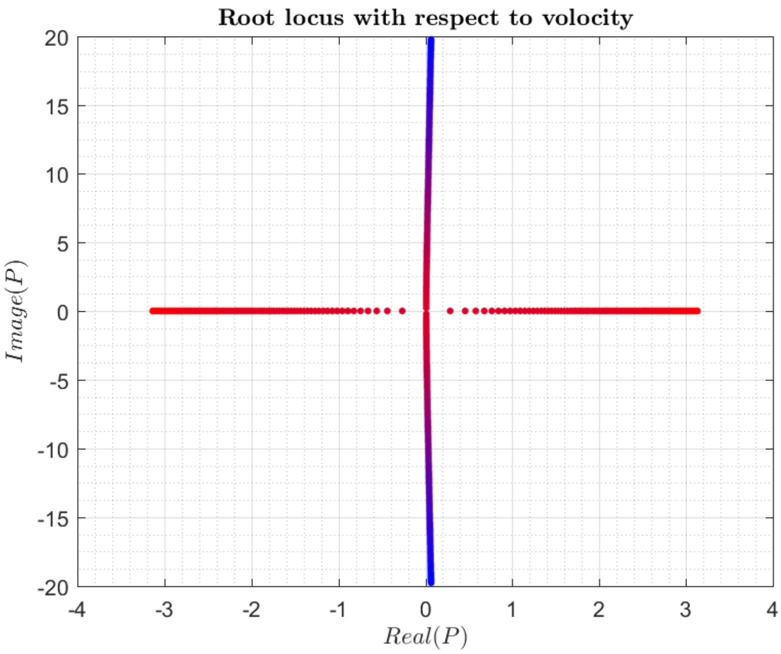
شکل ۸: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۱ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)

۴.۳ مدل خطی مرتبه چهارم

در این مدل با افزایش دقت، انتظار داریم که نتایج دقیق‌تر و با انطباق بیشتری بر واقعیت را مشاهده کنیم. دقت کنید که رابطه‌ی معادله ۱۴ سه متغیر φ، δ و T را به هم مرتبط می‌سازد. شبیه‌سازی انجام‌شده (مطابق با قسمت‌های پیشین) به گونه‌ای است که در آن، ورودی سیستم را گشتاور اعمالی T و خروجی آن را زاویه‌ی کج‌شدگی φ در نظر گرفته‌ایم. در نتیجه‌ی این شبیه‌سازی، مکان هندسی ریشه‌ها مطابق با شکل ۱۲ و نمونه‌ی بزرگ‌نمایی‌شده‌ی ۱۳ به دست می‌آید.
نتیجه‌ای که با توجه به شکل‌های ۱۲ و ۱۳ قابل مشاهده است، آن است که سیستم به ازای سرعت‌های پایین و نیز سرعت‌های بالا ناپایدار است، و تنها به ازای بازه‌ای میانی از سرعت‌ها به پایداری می‌رسد. این نتیجه، منطبق بر واقعیت مسأله است، چرا

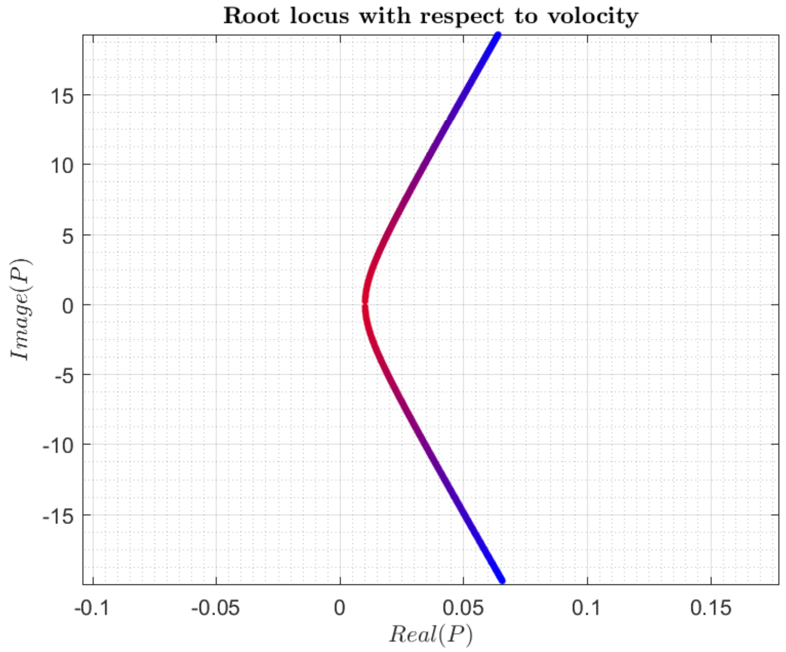


شکل ۹: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۱ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)

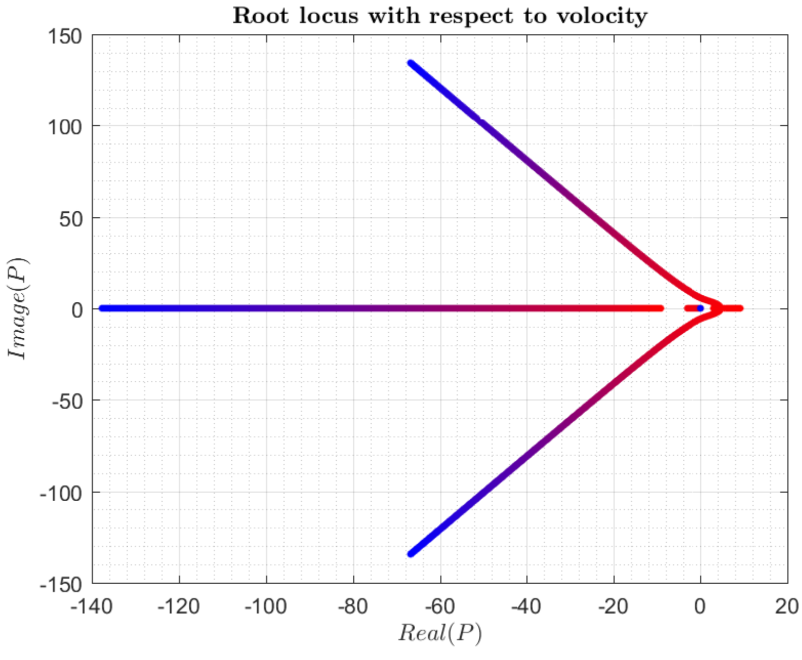


شکل ۱۰: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۲ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)

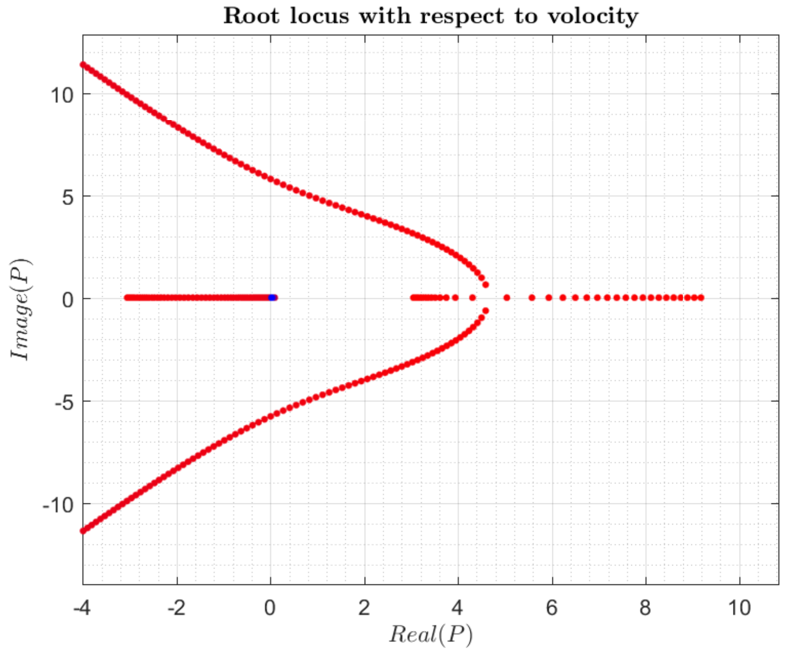
که هدایت دوچرخه با سرعت‌های بسیار پایین و نیز سرعت‌های بسیار بالا میسر نیست. برای تأیید این امر، نتایج شبیه‌سازی را به طور مشخص برای پایداری سیستم بر حسب سرعت بررسی کرده‌ایم که شکل ۱۴ این نتایج را نشان می‌دهد. مطابق با این شکل، مشاهده می‌شود که سیستم به صورت تقریبی در بازه‌ی $5 < V < 10$ پایدار است و در سایر سرعت‌ها ناپایدار می‌باشد.



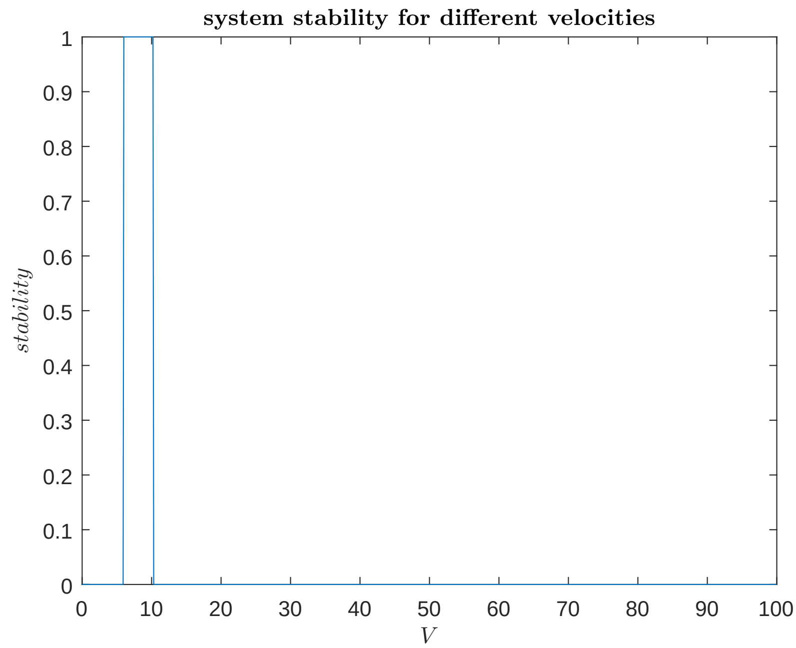
شکل ۱۱: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۲ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)



شکل ۱۲: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۴ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)



شکل ۱۳: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۴ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)



شکل ۱۴: وضعیت پایداری سیستم معادله ۱۴ بر حسب سرعت

۴ مدل‌سازی مانور در مدل دوچرخه

در این بخش، برای دو مدل متفاوت، سناریوی مانور را بررسی می‌کنیم. مطابق با گفته‌ی مقاله، تابع تبدیل از δ به میزان انحراف از مسیر η از معادله ۱۵ به دست می‌آید:

$$G_{\eta\delta}(s) = \frac{V^2}{bs^2} \tag{۱۵}$$

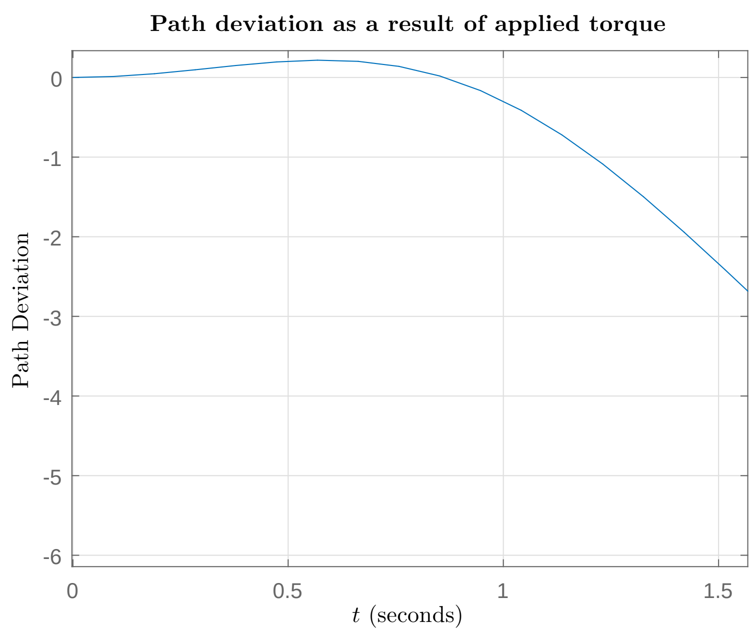
بنابراین تابع تبدیل از گشتاور اعمالی به میزان انحراف نیز از رابطه‌ی معادله ۱۶ به دست می‌آید:

$$G_{\eta T}(s) = G_{\eta\delta}(s)G_{\delta T}(s) \tag{۱۶}$$

مطابق بیان مقاله، یک روش برای محاسبه‌ی عبارت معادله ۱۶، استفاده از مدل‌های مرتبه‌ی دوم ساده همراه با اثر بخش جلویی و نیز دقت به نمودار شکل ۳ است. در این صورت معادله ۱۶ به صورت معادله ۱۷ نوشته می‌شود:

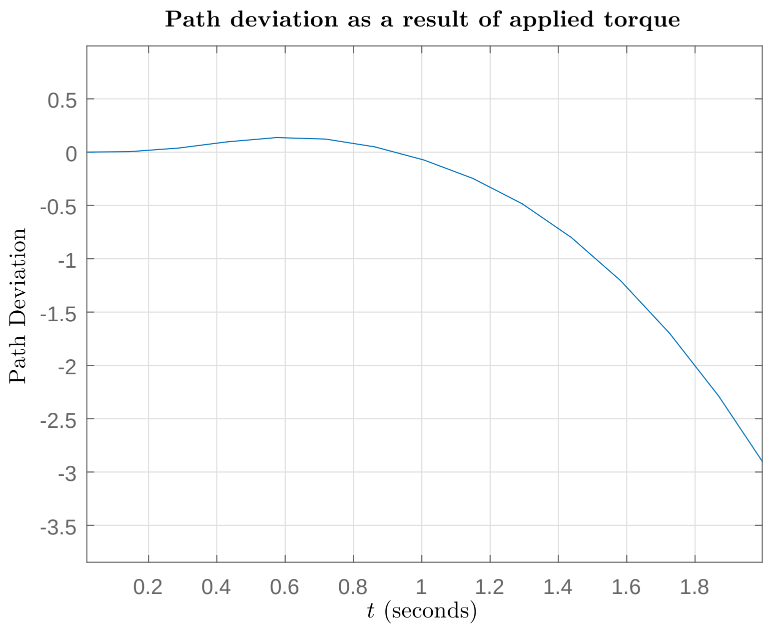
$$G_{\eta T} = \frac{k_1(V)V^2}{b}\frac{s^2 - \dfrac{mgh}{J}}{s^2\Big(s^2 + \dfrac{k_2(V)VD}{bJ}s + \dfrac{mgh}{J}(\dfrac{V^2}{V_c^2} - 1)\Big)} \tag{۱۷}$$

در این صورت شکل پاسخ پله سیستم (یعنی میزان انحراف در اثر اعمال گشتاور ثابت) برای یک سرعت پایدار (منظور از پایداری، پایداری حرکت دوچرخه است، یعنی $G_{\varphi T})$ قطب سمت راست نداشته باشد) به صورت شکل ۱۵ خواهد بود که با گفته‌های مقاله سازگار است. در این حالت، مشاهده می‌شود که در اثر اعمال گشتاور، ابتدا مقدار انحراف هم علامت با گشتاور اعمالی است، اما پس از مدت کوتاهی وضعیت برعکس می‌شود.



شکل ۱۵: میزان انحراف در اثر اعمال گشتاور ثابت در مدل مرتبه دوم

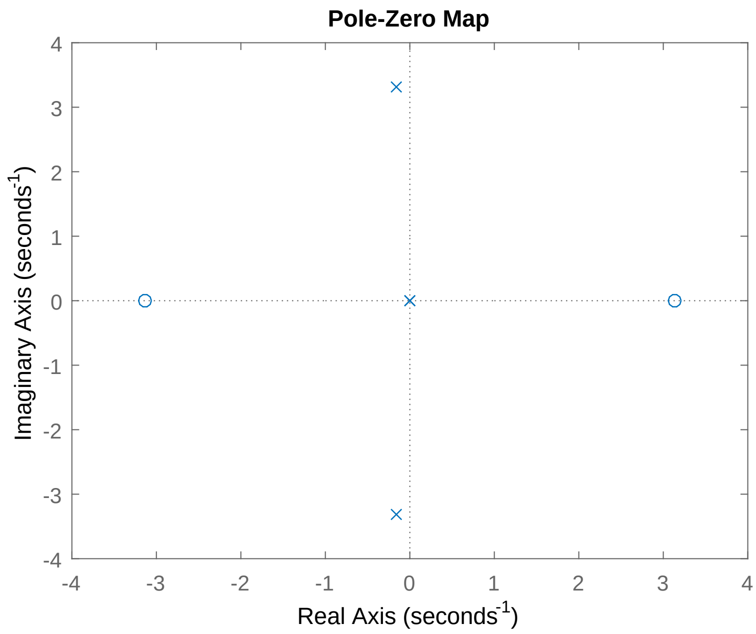
همچنین می‌توان معادله ۱۶ را بر اساس معادله ۱۴ ساده کرد (یعنی $G_{\delta T}$ را از معادله ۱۴ جایگذاری نمود) که در این صورت نتیجه مطابق شکل ۱۶ خواهد بود که مجدداً با بیان مقاله سازگار است. دقت کنید که این شبیه‌سازی نیز برای یک سرعت پایدار (مطابق نمودار شکل ۱۴) صورت گرفته است.
دقت کنید که به دلیل آن که مدل با هدایت چرخ عقب همواره ناپایدار است، در این بخش آن را مورد بررسی قرار نداده‌ایم.



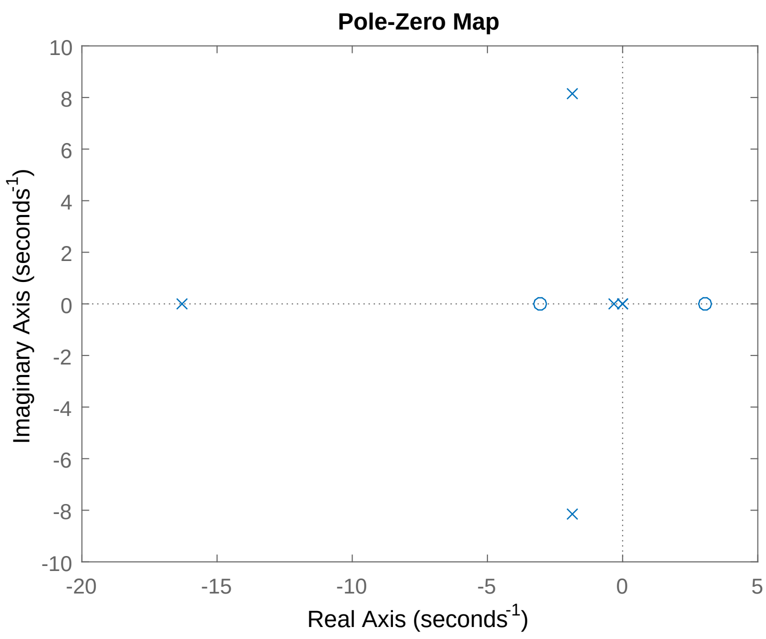
شکل ۱۶: میزان انحراف در اثر اعمال گشتاور ثابت در مدل مرتبه چهارم

۵ بررسی نتایج مدل‌سازی مانور

در هر دو شبیه‌سازی قسمت قبل، مشاهده می‌شود که رفتار خروجی ابتدا در یک جهت است، اما پس از مدتی جهت خود را عوض می‌کند. این پدیده، همان مفهوم undershoot یا پایین‌زدگی است که علت آن، وجود قطب سمت راست است. برای تحقیق این امر، باید نمودار صفر و قطب توابع تبدیل شبیه‌سازی قسمت قبل را رسم کنیم و ببینیم که آیا در این توابع قطب سمت راست وجود دارد یا نه. شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نمودار قطب و صفر متناظر با شبیه‌سازی‌های مربوط به دو شکل ۱۵ و ۱۶ هستند که نشان از وجود صفر سمت راست دارند.



شکل ۱۷: نمودار صفر و قطب تابع تبدیل انحراف بر حسب گشتاور برای مدل مرتبه دوم



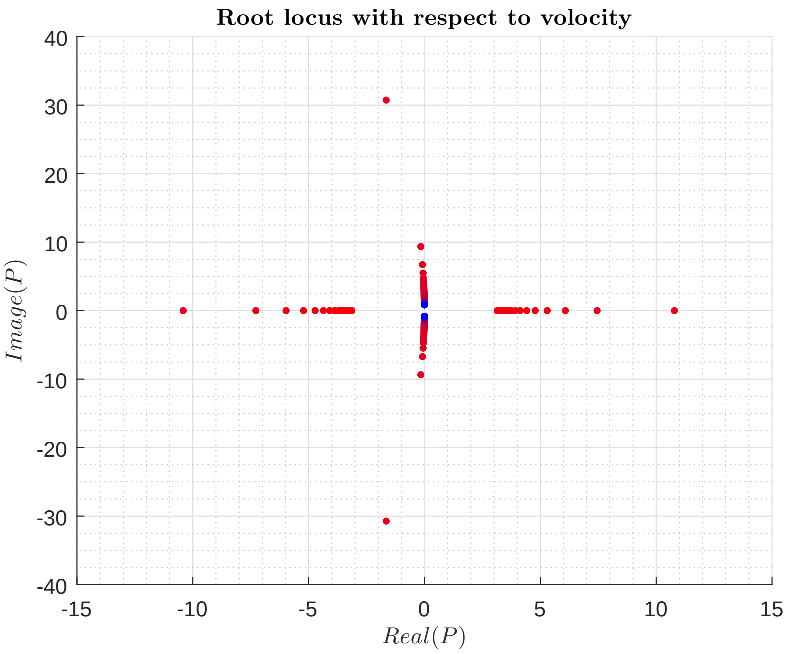
شکل ۱۸: نمودار صفر و قطب تابع تبدیل انحراف بر حسب گشتاور برای مدل مرتبه چهارم

۶ بررسی اثر خم شدن دوچرخه‌سوار بر دینامیک سیستم دوچرخه

در حالت خم شدن دوچرخه‌سوار، معادله دیفرانسیل سیستم به صورت معادله ۱۸ در می‌آید:

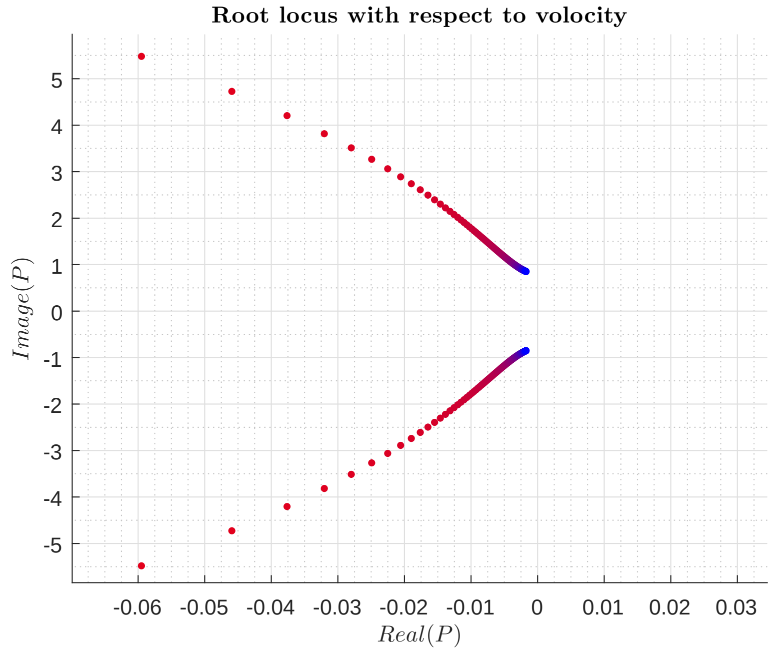
$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{DVk_2(V)}{b}\frac{\varphi}{dt}+(\frac{mV^2hk_2(V)}{b}-mgh)\varphi=\frac{DVk_1(V)}{b}\frac{dT}{dt}+\frac{mV^2k_1(V)}{b}T-J_R\frac{d^2\phi}{dt^2}+m_rgh_r\phi \quad (۱۸)$$

دقت داریم که در این حالت، سیستم دو ورودی دارد، T و ϕ.
برای شبیه‌سازی، فرض می‌کنیم گشتاور اعمالی صفر باشد و تنها اثر خم شدن دوچرخه‌سوار، یعنی اثر ϕ را بررسی می‌کنیم.
ابتدا مکان هندسی ریشه‌ها را بر حسب سرعت رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که مطابق انتظار (و با توجه به این که از مدل مرتبه دوم استفاده می‌کنیم) سیستم به ازای سرعت‌های پایین ناپایدار است، اما بعد از رسیدن به مقدار حداقلی از سرعت، پایدار می‌شود. مکان هندسی ریشه‌ها و شکل بزرگ‌نمایی‌شده‌ی آن در نمودارهای ۱۹ و ۲۰ قابل مشاهده هستند.

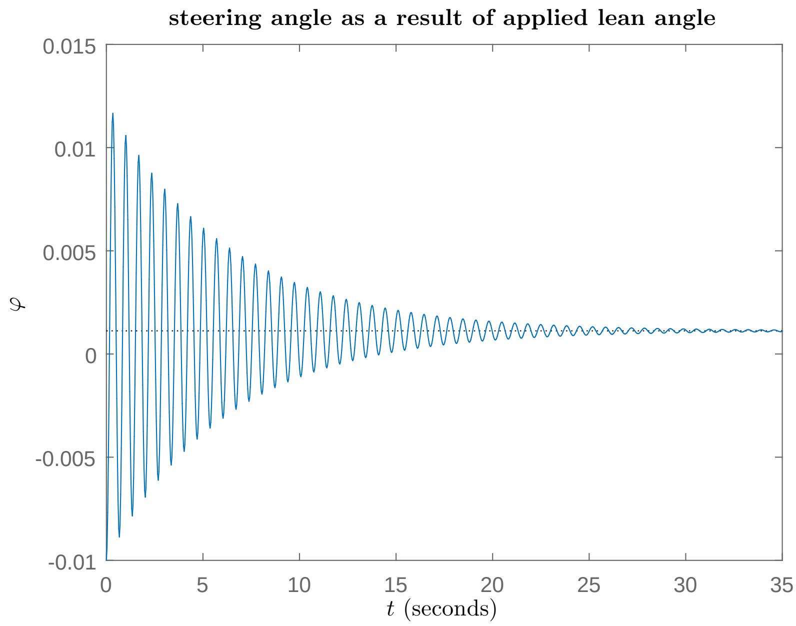


شکل ۱۹: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۸ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)

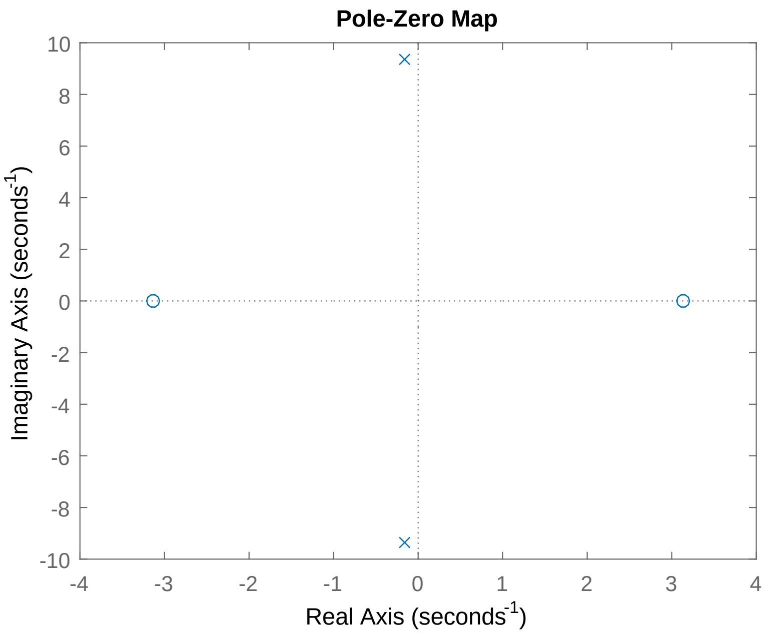
در ادامه، به ازای یک ورودی ثابت و کوچک ϕ رفتار سیستم را بررسی می‌کنیم. در این حالت، نمودار صفر و قطب و پاسخ زمانی میزان کج‌شدگی φ مطابق شکل‌های ۲۱ و ۲۲ خواهد بود.
مشاهده می‌شود که سیستم نوسان می‌کند تا نهایتاً به پایداری برسد. علت فرکانس زیاد نوسانات در این شبیه‌سازی آن است که مقادیر عددی مورد استفاده برای این بخش به صورت دقیق در دست نبودند و عددگذاری مدل کمی مشکل دارد اما شکل کلی رفتار سیستم همین است. ضمناً با بزرگ‌تر شدن مقدار زاویه خم شدن، مقدار دامنه‌ی نوسانات چنان بزرگ می‌شود که در سیستم واقعی (دوچرخه) عملاً پایداری از بین می‌رود و دوچرخه‌سوار به زمین می‌خورد. این مشاهده نیز با شهود مسأله سازگار است.



شکل ۲۰: مکان هندسی ریشه‌های معادله ۱۸ (شروع از نقاط قرمز و ختم به نقاط آبی)



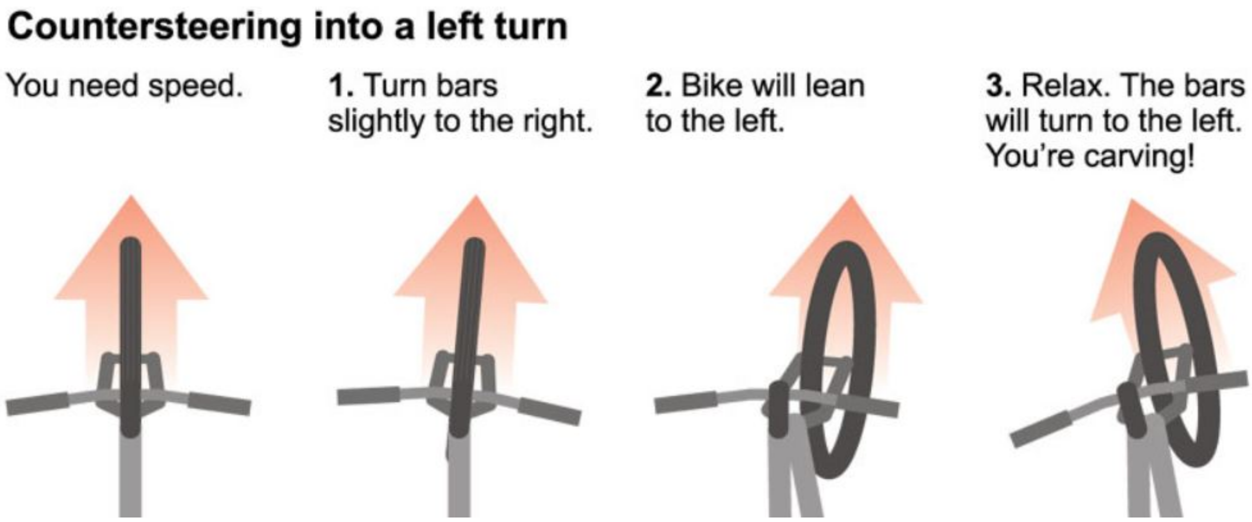
شکل ۲۱: پاسخ زمانی سیستم به ازای مقدار کوچک و ثابت خم شدن دوچرخه‌سوار



شکل ۲۲: نمودار صفر و قطب تابع تبدیل از ϕ به φ

۷ تحلیل سیستم غیر مینیمم‌فاز

پاسخ به این سؤال پیش‌تر در توضیحات مربوط به بخش مانور داده شده است. برای توضیح این پدیده بدون استفاده از مفاهیم صفر و قطب، کافی است به همان پدیده‌ای اشاره کنیم که در اثر اعمال گشتاور در یک سو، میزان انحراف ابتدا در آن جهت است، سپس جهت انحراف برعکس می‌شود. این پدیده بعضاً عامل تصادف موتورسواران است که برای جلوگیری از تصادف، گشتاور را به یک سمت اعمال می‌کنند اما نهایتاً سیستم در خلاف آن جهت منحرف می‌شود که همان اثر صفر سمت راست و معادل با پدیده‌ی پایین‌زدگی است. شکل ۲۳ نیز این پدیده را در عمل توصیف می‌کند.



شکل ۲۳: نحوه counter-steering در دوچرخه‌سواری تحت تأثیر وجود صفر غیر مینیمم‌فاز

۸ ضمیمه: کدمتلب مربوط به شبیه‌سازی

```
%% Parameters
clc
clear
D = 0.603;
b = 1;
g = 9.81;
c = 0.08;
R_rw = 0.35;
R_fw = 0.35;
m_RearFrame = 87;
m_FrontFrame = 2;
m_RearWheel = 1.5;
m_FrontWheel = 1.5;
m = m_RearFrame + m_FrontFrame + m_RearWheel + m_FrontWheel;
x_RearFrame = 0.492;
z_RearFrame = 1.028;
x_FrontFrame = 0.866;
z_FrontFrame = 0.676;
x_RearWheel = 0;
z_RearWheel = R_rw;
x_FrontWheel = b;
z_FrontWheel = R_fw;
x = (x_RearFrame*m_RearFrame + x_FrontFrame*m_FrontFrame +
    x_RearWheel*m_RearWheel + x_FrontWheel*m_FrontWheel)/m;
z = (z_RearFrame*m_RearFrame + z_FrontFrame*m_FrontFrame +
    z_RearWheel*m_RearWheel + z_FrontWheel*m_FrontWheel)/m;
a = x;
h = z;
J = m*h^2;
lambda = 70*pi/180;
%% Closed-Loop Transfer Functions
% Note that without assigning values to V and k2, the following
    models
% would be incomplete
s = tf([1 0],1);
% The simple second order model
Delta1 = J*s^2+D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h;
% The second order model with the front fork
A1 = D*V*b/(a*c*m*(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda)));
A2 = b*(V^2*h-a*c*g)/(a*c*(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda)));
```

```
A3 = D*V*g/(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda));
A4 = m*g^2*(b*g*cos(lambda)-a*c*sin(lambda))/(V^2*sin(lambda)-b*g*
    cos(lambda));
T2 = (A1*s+A2)/(J*s^2+A3*s+A4);
% Model with rear-wheel steering
Delta3 = J*s^2-D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h;
% The Linear Forth-Order Model
M = [96.8 -3.57; -3.57 0.258];
C = [0 -50.8; 0.436 2.20];
K0 = [-901 35.17; 35.17 -12.04];
K2 = [0 -87.06; 0 3.50];
A = (M*s^2+C*V*s+K0+K2*V^2)\[0; T];
T4 = A(2);
%% First Model Root Locus
k2 = 1;
s = tf([1 0],1);
for V = 0 : 0.02 : 20
    Delta1 = J*s^2+D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h;
    temp = zpk(minreal(1/Delta1));
    P = cell2mat(temp.P);
    plot(real(P),imag(P),'.','MarkerSize',10,'color',[1-V/20,0,V
       /20])
    xlabel('$Real(P)$','interpreter','latex')
    ylabel('$Image(P)$','interpreter','latex')
    title('\textbf{Root locus with respect to volocity}','
       interpreter','latex')
    grid on
    grid minor
    hold on
end
%% Second Model Root Locus
k2 = 1;
P=[];
for V = 0 : 0.1 : 100
    A1 = D*V*b/(a*c*m*(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda)));
    A2 = b*(V^2*h-a*c*g)/(a*c*(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda)));
    A3 = D*V*g/(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda));
    A4 = m*g^2*(b*g*cos(lambda)-a*c*sin(lambda))/(V^2*sin(lambda)-b
       *g*cos(lambda));
    T2 = (A1*s+A2)/(J*s^2+A3*s+A4);
    temp = zpk(minreal(T2));
    P = cell2mat(temp.P);
```

```
    plot(real(P),imag(P),'.','MarkerSize',10,'color',[1-sqrt(V/100),0,sqrt(V/100)])
    xlabel('$Real(P)$','interpreter','latex')
    ylabel('$Image(P)$','interpreter','latex')
    title('\textbf{Root locus with respect to volocity}','interpreter','latex')
    grid on
    grid minor
    hold on
end
%% Third Model Root Locus
k2 = 1;
s = tf([1 0],1);
for V = 0 : 0.02 : 20
    Delta3 = J*s^2-D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h;
    temp = zpk(minreal(1/Delta3));
    P = cell2mat(temp.P);
    plot(real(P),imag(P),'.','MarkerSize',10,'color',[1-V/20,0,V/20])
    xlabel('$Real(P)$','interpreter','latex')
    ylabel('$Image(P)$','interpreter','latex')
    title('\textbf{Root locus with respect to volocity}','interpreter','latex')
    grid on
    grid minor
    hold on
end
%% Fourth Model Root Locus
k2 = 1;
stable = [];
for V = 0 : 0.1 : 100
    M = [96.8 -3.57; -3.57 0.258];
    C = [0 -50.8; 0.436 2.20];
    K0 = [-901 35.17; 35.17 -12.04];
    K2 = [0 -87.06; 0 3.50];
    A = (M*s^2+C*V*s+K0+K2*V^2)\[0; 1];
    T4 = A(1);
    stable = [stable isstable(T4)];
    temp = zpk(minreal(T4));
    P = cell2mat(temp.P);
    plot(real(P),imag(P),'.','MarkerSize',10,'color',[1-V/100,0,V/100])
    xlabel('$Real(P)$','interpreter','latex')
```

```
    ylabel('$Image(P)$','interpreter','latex')
    title('\textbf{Root locus with respect to volocity}','interpreter','latex')
    grid on
    grid minor
    hold on
end
figure
plot(0:0.1:100,stable)
xlabel('$V$','interpreter','latex')
ylabel('$stability$','interpreter','latex')
title('\textbf{system stability for different velocities}','interpreter','latex')
%% Maneuver simulation for the second-order model
s = tf([1 0],1);
V = 2;
k1 = b^2/((V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda))*m*a*c*sin(lambda));
k2 = b*g/(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda));
G = k1*V^2/b*(s^2-m*g*h/J)/(s^2*(s^2+k2*V*D/b/J*s+m*g*h/J*(V^2/b/g/cot(lambda))));
step(G)
xlim([0 10])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('Path Deviation','interpreter','latex')
title('\textbf{Path deviation as a result of applied torque}','interpreter','latex')
grid on
grid minor
hold on
figure
pzmap(G)

%% %% Maneuver simulation for the fourth-order model
s = tf([1 0],1);
V = 7.5;
M = [96.8 -3.57; -3.57 0.258];
C = [0 -50.8; 0.436 2.20];
K0 = [-901 35.17; 35.17 -12.04];
K2 = [0 -87.06; 0 3.50];
A = (M*s^2+C*V*s+K0+K2*V^2)\[0; 1];
G = minreal(V^2/b/s^2*A(2));
step(G)
xlim([0 10])
```

```
%     ylim([1 -5])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('Path Deviation','interpreter','latex')
title('\textbf{Path deviation as a result of applied torque}','interpreter','latex')
grid on
grid minor
hold on
figure
pzmap(G)
%% Driver Lean Simulation
for V = 0 : 0.1 : 20
    k2 = b*g/(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda));
    G = (-J*s^2+m*g*h)/(J*s^2+D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h);
    temp = zpk(minreal(G));
    P = cell2mat(temp.P);
    plot(real(P),imag(P),'.','MarkerSize',10,'color',[1-V/20,0,V/20])
    xlabel('$Real(P)$','interpreter','latex')
    ylabel('$Image(P)$','interpreter','latex')
    title('\textbf{Root locus with respect to volocity}','interpreter','latex')
    grid on
    grid minor
    hold on
end

V = 2;
k2 = b*g/(V^2*sin(lambda)-b*g*cos(lambda));
G = (-J*s^2+m*g*h)/(J*s^2+D*V*k2/b*s+m*V^2*h*k2/b-m*g*h);
figure
pzmap(G)
figure
step(0.01*G)
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$\varphi$','interpreter','latex')
title('\textbf{steering angle as a result of applied lean angle}','interpreter','latex')
```