باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

علوم اعصاب: یادگیری، حافظه، شناخت

نمونه سؤالات آزمون میان‌ترم

سؤالاتی که با علامت * مشخّص شده‌اند را برای مطالعه در اولویت قرار دهید.

۱ * گزاره‌های صحیح و غلط

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخّص کنید.

۱. اگر معادله‌ی منحنی تنظیم (tuning curve) یک نورون به صورت $f = 40[\cos\theta]_+$ باشد، در صورت مشاهده‌ی یک خطّ نورانی با زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$، فاصله‌ی دو اسپایک متوالی این نورون به طور متوسّط 50ms خواهد بود.
($[x]_+ = xu(x)$ و u تابع پلّه‌ی واحد است.)

۲. برای ناپایداری یک نقطه‌ی ثابت، کافی است تنها یکی از مسیرهای موجود در اطراف آن، یک مسیر واگرا باشد.

۳. در آنالیز رفتار نورون در صفحه‌ی فاز، اگر در اثر تغییر جریان ورودی، مقادیر ویژه‌ی سیستم از حالت حقیقی به حالت مزدوج مختلط تغییر حالت یابند، قطعاً bifurcation رخ داده است.

۴. اگر یک شبکه‌ی نورونی با معادلات $\tau\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{v} + W\boldsymbol{u} + M\boldsymbol{v}$ توصیف شود:

الف) M ماتریس فیدبک است که برای شبکه‌های مستقیم (feed-forward) داریم: $M = 0$

ب) اگر $\lambda_i = \lambda_{max}(M) = 1 - \epsilon$ (که $\epsilon > 0$ مقداری بسیار کوچک است)، پاسخ شبکه به ورودی دلخواه، تقریباً معادل با تصویر ورودی در راستای بردار ویژه‌ی متناظر با λ_i خواهد بود.

ج) وجود $\lambda_j = 0$ (که λ_j یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس M است) می‌تواند رفتار حافظه‌دار این شبکه‌ی نورونی را توصیف کند.

۲ * تشخیص محلّ صدا

می‌دانید که مغز انسان قادر است با شنیدن صدا، محلّ آن (جهت آمدن صدا) را تشخیص دهد. فرض کنید سیگنال‌های صوتی دریافتی از دو گوش (که می‌توانند در اثر اختلاف فاصله‌ی منبع صوت از گوش‌ها دارای تأخیر نسبی باشند) به مجموعه‌ای از نورون‌ها داده می‌شود که بیشینه‌ی نرخ اسپایک‌زدن آن‌ها زمانی رخ می‌دهد که سیگنال‌های ورودی بیشترین همبستگی (correlation) را داشته باشند.

۱. در این شرایط، مکانیزمی را شرح دهید که به کمک آن، مغز بتواند محلّ صوت را شناسایی کند.

۲. فرض کنید طول مؤثّر مسیر عبوری سیگنال صوتی از گوش راست و گوش چپ تا نورون i را به ترتیب با L_r^i و L_l^i نشان دهیم. (منظور از مسیر عبوری سیگنال، مسیری متشکّل از خطوط ارتباطی نورون‌ها ــ دندریت‌ها و آکسون‌ها ــ است.) اگر بیشینه‌ی اسپایک در این مجموعه نورون‌ها، متعلّق به نورون j باشد که $L_r^j = L_l^j$، محلّ منبع صوت نسبت به شخص در چه موقعیت‌هایی می‌تواند باشد؟

۳ * محاسبه‌ی پاسخ نورون به محرّک

جریان ورودی سیناپسی به یک نورون به فرم معادله‌ی زیر می‌باشد:

$$I(t) = \frac{q}{\tau_s} \exp\big(-\frac{t-t_f}{\tau_s}\big) u(t-t_f)$$

که در آن، t_f لحظه‌ی ورود اسپایک به سیناپس است.

۱. با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل تغییرات ولتاژ غشای نورون که در آن ثابت زمانی τ_m فرض می‌شود، فرم پاسخ ولتاژ به یک اسپایک ورودی در لحظه‌ی t_f را به دست آورید.

۲. در پاسخ به دست آمده، حالت حدّی $\tau_s \approx \tau_m$ را در نظر بگیرید و فرم پاسخ را به دست آورید.

۳. در فرم پاسخ قسمت ۱، حالت حدّی $\tau_s << \tau_m$ را در نظر بگیرید و فرم پاسخ را بنویسید.

۴. نتیجه‌ی قسمت قبل از نظر شهودی به چه معناست؟ آیا این استنباط در پاسخ به‌دست‌آمده قابل مشاهده است؟ این نتیجه چه تفاوتی با پاسخ سیستم به ورودی ضربه دارد؟

۴ دندریت‌ها و معادلات خطّ انتقال

می‌دانید می‌توان برای مدل کردن رفتار دندریت‌ها، معادلاتی مشابه با معادلات خط انتقال در نظر گرفت. اگر برای ساده‌سازی فرض کنیم طول کابل نامتناهی باشد، ولتاژ ایجادشده در طول کابل (دندریت) در پاسخ به ورودی $I(x,t) = I_0\delta(x)(t)$ به صورت معادله زیر خواهد بود:

$$V(x,t) = \frac{r_M I_0 \lambda}{4}\Big[e^{-(x/\lambda)}\,\mathrm{erfc}\,\big(\frac{x\sqrt{\tau}}{2\lambda\sqrt{t}} - \sqrt{t/\tau}\big) - e^{(x/\lambda)}\,\mathrm{erfc}\,\big(\frac{x\sqrt{\tau}}{2\lambda\sqrt{t}} + \sqrt{t/\tau}\big)\Big]$$

که در آن τ و λ به ترتیب ثوابت زمانی و مکانی بوده و r_M و I_0 نیز مقادیر و تابع $\mathrm{erfc}(x)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-y^2}dy$$

که با توجّه به ضابطه‌ی فوق واضح است که $\mathrm{erfc}(-\infty) = 2$، $\mathrm{erfc}(0) = 1$، و $\mathrm{erfc}(\infty) = 0$.

۱. شکل موج ولتاژ بر حسب زمان را برای $V(x=0,t)$، $V(x=\lambda,t)$، و $V(x\to\infty,t)$ بر روی یک شکل به صورت کیفی رسم کنید.

۲. شکل موج ولتاژ بر حسب مکان را برای $V(x,t\to 0)$، $V(x,t=\tau)$، و $V(x,t\to\infty)$ بر روی یک شکل به صورت کیفی رسم کنید.

۳. پاسخ حالت ماندگار ولتاژ را بیابید، یعنی ضابطه‌ی $V_{ss}(x) = \lim_{t\to\infty} V(x,t)$ را بیابید.

۵ * ورودی مورد نیاز برای تحریک نورون

مدل ساده‌ی نورون را در نظر بگیرید که با معادله‌ی زیر توصیف می‌شود:

$$C\frac{dV}{dt} = -\frac{V - V_{rest}}{R} + I_{ext}$$

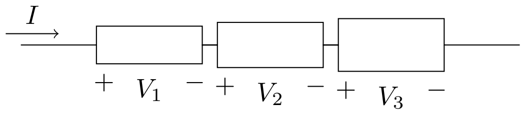
فرض کنید $I_{ext}(t)$ یک پالس مربّعی به طول T و اندازه‌ی I_0 باشد. همچنین می‌دانیم که نورون هنگامی که مقدار ولتاژ آن به مقدار آستانه‌ی V_t برسد اسپایک می‌زند.

۱. حدّاقل مقدار I_0 مورد نیاز را بیابید تا در اثر این جریان ورودی، نورون اسپایک بزند. (بگیرید $\tau = RC$ و پاسخ را بر حسب R و τ بیان کنید.)

۲. نمودار I_0 را بر حسب T رسم کنید. رفتار این نمودار را در $T\to 0$ و $T\to\infty$ تحلیل کنید.

۶ مدل چندقسمتی دندریت

یک مدل سه‌قسمتی (3-compartment model) برای یک دندریت در نظر گرفته‌ایم. شکل ۱ این ساختار را نشان می‌دهد:



شکل ۱

هم‌چنین معادلات حاکم بر این سیستم به شکل زیر است:

$$C\frac{dV_1}{dt} = -\frac{V_1}{R} + \frac{V_2 - V_1}{R_{couple}} + I$$
$$C\frac{dV_2}{dt} = -\frac{V_2}{R} + \frac{V_3 - 2V_2 + V_1}{R_{couple}}$$
$$C\frac{dV_3}{dt} = -\frac{V_3}{R} + \frac{V_2 - V_3}{R_{couple}}$$

که R و R_{couple} پارامترهای مدل (مقاومت ذاتی و مقاومت تزویج) هستند. همچنین در تمامی قسمت‌های سؤال برای سادگی مقدار I را ثابت در نظر بگیرید.

۱. مقاومت کلّ این دندریت سه‌قسمتی را (با آنالیز حالت پایدار) محاسبه کنید. اگر تعداد قسمت‌ها با همین الگو افزایش یابد، مقدار این مقاومت چه تغییری می‌کند؟

۲. اگر متغیّرهای حالت سیستم دینامیکی را مقادیر V_iها در نظر بگیریم ($i \in \{1,2,3\}$)، می‌توان این سیستم دینامیکی را به صورت

$$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}$$

توصیف کرد که در آن

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

ماتریس A و بردار $\boldsymbol{b}$ را بر حسب پارامترهای مدل مشخّص کنید.

۳. این سیستم چند نقطه‌ی ثابت دارد؟ نقاط ثابت آن را بر حسب A و $\boldsymbol{b}$ مشخّص کنید. (نیازی به محاسبه‌ی صریح نیست، کافی است پاسخ را با عملیات ماتریسی روی A و $\boldsymbol{b}$ مشخّص کنید.)

۴. پایداری نقاط ثابت سیستم را تحلیل کنید، یعنی با انجام محاسبه وضعیت پایداری سیستم را در حالت کلّی بر حسب مقادیر مختلف R و R_{couple} نشان دهید. آیا نتیجه‌ی حاصل با شهود شما از مسأله سازگار است؟

۷ یافتن نرخ اسپایک‌زدن نورون

می‌دانید یک مدل ساده‌ی رفتار نورون با استفاده از معادله‌ی

$$\tau\frac{dV}{dt} = -(V - V_R) + R_m I$$

توصیف می‌شود که در آن R_m مقاومت غشای نورون، τ ثابت زمانی، و V_R پتانسیل حالت استراحت نورون است. در تمامی مراحل این مسأله، مقدار I را ثابت در نظر بگیرید.

برای آن که مدل نورون واقعی‌تر عمل کند، علاوه بر این معادله‌ی خطّی، برخی شروط غیرخطّی نیز به آن افزوده می‌شود:

- اگر $V(t^-) = V_{spike}$ باشد، در این صورت نورون اسپایک می‌زند و پس از آن، ولتاژ غشای نورونی به صورت ناگهانی به مقدار V_{reset} نزول می‌یابد، یعنی $V(t) = V_{reset}$.
- پس از اسپایک زدن به مدت T_{ref} (بازه‌ی refractory period) نورون قادر به اسپایک زدن نخواهد بود. برای مدل‌سازی می‌توانید فرض کنید که در این مدت، ولتاژ نورون مستقل از دینامیک حاکم بر آن، از مقدار V_{reset} به مقدار V_R می‌رسد و پس از آن، با توجّه به معادلات حاکم و مقدار I، رفتار عادّی خود را انجام می‌دهد.

$$V(t^-) = V_{spike} \Rightarrow V(t) = V_{reset} \Rightarrow V(t + T_{ref}) = V_R$$

۱. I_{min} کمترین مقدار I است که به ازای آن، نورون به صورت مداوم اسپایک می‌زند. I_{min} را بیابید.

۲. اگر T_{spike} فاصله‌ی زمانی دو اسپایک متوالی باشد، آنگاه مقدار

$$r = \frac{1}{T_{spike}}$$

را نرخ اسپایک‌زدن (firing rate) نورون می‌نامیم. r را بر حسب پارامترهای مدل به صورت تابعی از I بیابید.

۳. نمودار نرخ اسپایک‌زدن بر حسب جریان ورودی I را (به صورت کیفی و با توجّه با ضابطه‌ی حاصل از قسمت قبل) رسم کنید.

۴. نشان دهید برای $I \to \infty$ با فرض $T_{ref} = 0$، مقدار r تابعی خطّی بر حسب I است؛ یعنی $r = kI$. ثابت k را بیابید.

۸ * مدل integrate-and-fire تعمیم‌یافته

مدل زیر برای توصیف رفتار اسپایک‌زدن نورون را که به مدل quadratic integrate and fire مشهور است، در نظر بگیرید:

$$\frac{dV}{dt} = a(I - I_0) + b(V - V_0)^2$$

فرض کنید $a > 0$، $b > 0$، و $I_0 > I$.

۱. نقاط ثابت این سیستم را بیابید.

۲. وضعیت پایداری هر یک از این نقاط ثابت را مشخّص کنید.

۳. نتیجه‌ی قسمت قبل را با استفاده از دانسته‌های خود از عملکرد نورون توجیه کنید.

حال می‌خواهیم آنالیز این مدل را با استفاده از روابط صفحه‌ی فاز انجام دهیم. برای این کار (همان طور که از اسلایدهای درس به خاطر دارید)، باید یک متغیّر کمکی مانند u تعریف کنیم. در حالت کلّی می‌توانیم روابط این دو متغیّر را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha V + \beta V^2 + \gamma - u + I(t)$$
$$\frac{du}{dt} = a(bV - u)$$

ابتدا مقادیر زیر را برای پارامترهای مدل در نظر بگیرید:

$$\alpha = \beta = a = b = 1, \gamma = I(t) = 0$$

۴. نقاط تعادل این سیستم را بیابید.

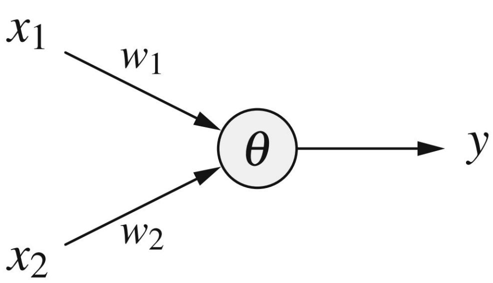
۵. (با تشکیل ماتریس ژاکوبین و بررسی مقادیر ویژه‌ی آن) وضعیت پایداری هر یک از این نقاط ثابت را مشخّص کنید.

۶. منحنی‌های nullcline را در صفحه‌ی فاز رسم کنید (محور افقی را متناظر با V در نظر بگیرید) و در هر یک از نواحی صفحه، علامت dV/dt و du/dt را مشخّص کنید. برای سادگی در هر ناحیه از یک نماد به صورت زوج مرتّب استفاده کنید. به عنوان مثال $(+,-)$ یعنی $dV/dt > 0$ و $du/dt < 0$.

۷. حال فرض کنید همه‌ی پارامترها مشابه قسمت‌های قبلی هستند، با این تفاوت که مقدار I نامشخّص است. (دقت کنید که I هم‌چنان مستقل از زمان و ثابت است، یعنی $I(t) = I_0$، امّا مقدار I_0 مشخّص نیست.)
بازه‌ای از مقادیر I_0 را بیابید که به ازای آن، سیستم فاقد نقطه‌ی تعادل باشد. آیا این مشاهده معنی‌دار است و تفسیر زیستی دارد یا صرفاً ناکارآمدی مدل مورد استفاده را نشان می‌دهد؟

۹ * شبکه‌های عصبی

شبکه‌ی عصبی شکل ۲ را در نظر بگیرید:



شکل ۲

می‌دانید خروجی شبکه‌های عصبی از نوع TLU (Threshold Logic Unit) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۱. مقادیر w_1، w_2، و θ را به گونه‌ای تعیین کنید که داشته باشیم:

$$y = x_1 \wedge x_2$$

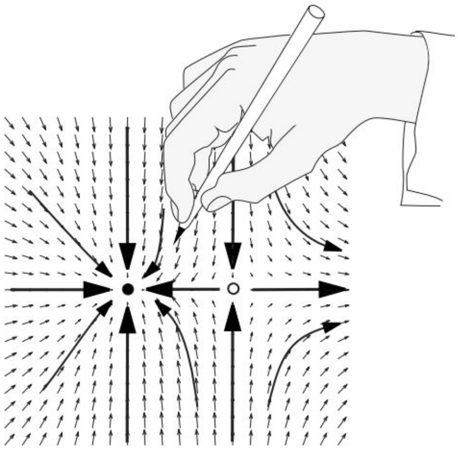
۲. مقادیر w_1، w_2، و θ را به گونه‌ای تعیین کنید که داشته باشیم:

$$y = x_1 \vee x_2$$

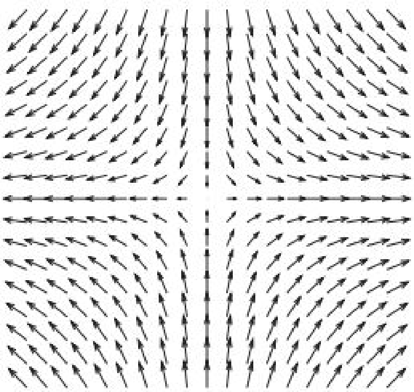
۳. آیا می‌توانید مقادیر وزن‌ها و آستانه را به گونه‌ای تعیین کنید که شبکه‌ی شکل ۲ تابع xor را پیاده‌سازی کند؟ در صورتی که پاسخ مثبت است مقادیر w_1، w_2، و θ را تعیین کنید و در صورتی که پاسخ منفی است، علّت را شرح دهید و شبکه‌ی جدیدی معرّفی کنید که این تابع را پیاده‌سازی کند. (ساختار شبکه، وزن‌ها، و مقادیر آستانه را مشخّص کنید.)

۱۰ * صفحه‌ی فاز

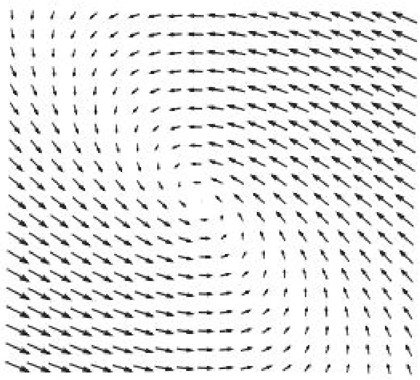
(مشابه آن‌چه در شکل ۳ نشان داده شده است)، چند نمونه از خطوط توصیف‌کننده‌ی وضعیت صفحه‌ی فاز را برای میدان‌های برداری شکل‌های ۴ تا ۸ ترسیم کنید. نقاط پایدار و نوع پایداری آن‌ها، و حوزه‌ی پایداری آن‌ها را مشخّص کنید. همچنین (در صورت وجود) مسیرهایی که دو نقطه‌ی پایدار را متصّل می‌کنند، مسیرهایی که از یک نقطه‌ی پایدار خارج شده و به همان برمی‌گردند، و نیز مسیرهای تناوبی را مشخّص کنید.



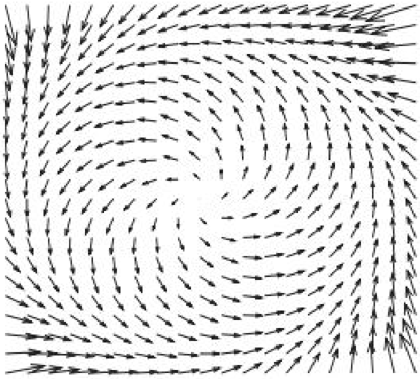
شکل ۳



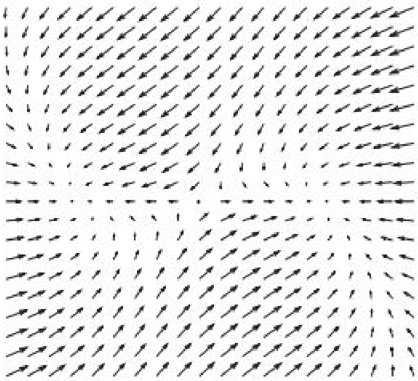
شکل ۴



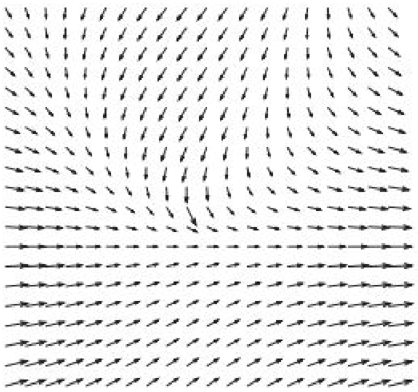
شکل ۵



شکل ۶



شکل ۷



شکل ۸

۱۱ * شبکه‌ی بازگشتی

می‌دانید می‌توان برای یک لایه از یک شبکه‌ی بازگشتی از نورون‌ها، معادله‌ای به صورت زیر نوشت:

$$\tau \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\boldsymbol{v} + \boldsymbol{h} + M\boldsymbol{v}$$

۱. در مورد چگونگی پاسخ شبکه به ورودی دل‌خواه بر حسب مقادیر ویژه‌ی ماتریس فیدبک (که آن را متقارن در نظر می‌گیریم) بحث کنید.

۲. لایه‌ای از شبکه را در نظر بگیرید که در آن، فیدبک تنها از هر نورون به خود آن نورون داده می‌شود، امّا وزن این فیدبک برای هر نورون با نورون دیگر متفاوت است. در این حالت ماتریس M به چه صورتی در می‌آید؟ اگر در مورد ماتریس M بدانیم که جمع تمامی درایه‌های آن برابر ۱ بوده، همه‌ی درایه‌ها نامنفی هستند، و $M_{11} = 0.95$ است، فرم پاسخ به ورودی به صورت تقریبی به چه شکل خواهد بود؟

۳. اگر ماتریس M برای شبکه‌ای به صورت

$$M = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.24 \\ -0.24 & 0.25 \end{bmatrix}$$

باشد، فرم پاسخ به ورودی دل‌خواه $\boldsymbol{h}$ را به دست آورید. آیا در این حالت می‌توان ادّعا کرد که پاسخ به نوعی تصویر ورودی بر روی یک راستای خاص است؟ اگر پاسخ مثبت است این راستا را مشخّص کنید. هر ورودی هنگام تصویر شدن بر این راستا در چه بهره‌ای ضرب می‌شود؟

۴. (با توجّه به محدودیت‌های زیستی نورون‌ها) آیا ماتریس زیر، می‌تواند یک انتخاب معتبر برای M باشد؟ چرا؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & -0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.6 & -0.3 \\ -0.5 & 0.6 & 1 & 0.2 \\ 0.4 & -0.3 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۲ یادگیری در وزن‌های سیناپسی

یک نورون خطّی که از دو مرجع، ورودی‌های I_1 و I_2 را با وزن‌های w_1 و w_2 دریافت می‌کند در نظر بگیرید:

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V + w_1 I_1(t) + w_2 I_2(t)$$

همچنین فرض کنید قاعده‌ی حاکم بر تغییرات وزن‌ها متناسب با فعّالیت هم‌زمان نورون‌های پیش‌سیناپسی (pre-synaptic) و پس‌سیناپسی (post-synaptic) است:

$$\Delta w = k I_{pre} V_{post}$$

۱. این قاعده‌ی یادگیری متناظر با کدام‌یک از قواعدی است که در اسلایدهای درس دیده‌اید؟ مهم‌ترین ایراد آن چیست؟

۲. با توجّه به تغییرات I و V در طول زمان، مدل خود را با استفاده از متوسّط این کمیّت‌های تصادفی کامل می‌کنیم. اگر فرض کنیم تغییرات وزن‌ها در مقایسه با ورودی بسیار آرام انجام می‌شود، $\mathbb{E}[\Delta w_1]$ و $\mathbb{E}[\Delta w_2]$ را بر حسب w_1، w_2، و مقادیر ماتریس همبستگی $\mathbb{E}[\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} R_s & R_d \\ R_d & R_s \end{bmatrix}$ به دست آورید.

۳. در ادامه سعی می‌کنیم مدل ارائه‌شده را کمی بهبود ببخشیم و مشکلات فعلی آن را حل کنیم. مدل جدیدی که ارائه می‌شود به صورت زیر است:

$$\frac{dw_j}{dt} = f(\mathbb{E}[I_j V])(1 - w_j) - g\Big(\sum_i w_i\Big) \prod_{i \neq j} w_i$$

معادلات فوق را برای سیستم ساده‌ی این مسأله (که تنها دو ورودی $j = 1, 2$ دارد) بر حسب مقادیر ماتریس $\mathbb{E}[\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{I}]$ به صورت ساده‌شده بازنویسی کنید.

۴. اگر f و g توابعی مثبت باشند، محدوده‌ی تغییرات w_iها چگونه است؟ آیا مشکلی که در قسمت ۱ به آن اشاره کردید در این مدل نیز مشاهده می‌شود؟

۵. فرض کنید:

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{I}^T\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp\big(-\alpha(x - \frac{1}{2})\big)}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + \exp\big(-\beta(x - 1)\big)}$$

نشان دهید $w_1 = w_2 = \dfrac{1}{2}$ همواره یک نقطه‌ی ثابت برای این سیستم است. آیا می‌توانید پایداری سیستم را به صورت تابعی از α و β تحلیل کنید؟

۱۳ * مسأله‌ی خوشه‌بندی

با مفهوم خوشه‌بندی (clustering) و competitive learning از اسلایدهای درس آشنا هستید. الگوریتم خوشه‌بندی‌ای را در نظر بگیرید که در آن (با فرض مشخّص بودن تعداد خوشه‌ها)، در هر مرحله مرکز هر خوشه به صورت میانگین مختصّات اعضای آن خوشه محاسبه می‌شود، سپس فاصله‌ی هر نقطه در فضا تا مرکز هر یک از خوشه‌های موجود محاسبه شده و در مرحله‌ی بعدی، هر یک از نقاط به خوشه‌ای منتقل می‌شود که کم‌ترین فاصله تا مرکز آن را در مرحله‌ی قبل داشته است (در صورتی که فاصله‌ی نقطه‌ای تا مرکز چند خوشه یکسان باشد، اولویت اوّل آن است که اصلاً تغییر خوشه اتفاق نیفتد، ولی اگر الزاماً نیاز به تغییر خوشه باشد، در این صورت از بین خوشه‌های ممکن به صورت تصادفی یکی انتخاب می‌شود). در ادامه مجدّداً مراکز خوشه‌ها محاسبه شده و این فرآیند تکرار می‌شود. (در مدل کردن رفتار سیستم عصبی به کمک مسأله‌ی خوشه‌بندی، هر نورون متصدّی یک خوشه خواهد بود. در صورتی که جزئیات این موضوع را به خاطر ندارید، خوب است اسلایدهای درس را مرور کنید.)

۱. آیا جواب مسأله‌ی خوشه‌بندی با الگوریتم فوق یکتاست؟

۲. در صورتی که وضعیت اوّلیه‌ی خوشه‌بندی به صورت تصادفی انتخاب شود، آیا ممکن است به ازای دو وضعیت اوّلیه‌ی متفاوت، الگوریتم به دو حالت متفاوت همگرا شود؟

۳. اگر خوشه‌ای تنها یک عضو داشته باشد، آیا ممکن است در مرحله‌ی بعد این عضو به خوشه‌ی دیگری منتقل شود؟

۴. اگر خوشه‌ای تنها یک عضو داشته باشد، آیا ممکن است در مرحله‌ی بعد عضو دیگری به این خوشه اضافه شود؟

۵. در صورتی که پس از پایدار شدن الگوریتم خوشه‌بندی، نقطه‌ی جدیدی به فضا اضافه شده و با توجّه به فاصله‌ی آن تا مرکز هر یک از خوشه‌ها، به خوشه‌ی مناسب اضافه شود، آیا در این حالت خوشه‌بندی پایدار خواهد ماند؟ یا ممکن است سایر نقاط (که پیش‌تر به شرایط پایدار رسیده بودند) نیز در ادامه مجدّداً دچار تغییر خوشه شوند؟

۶. فرض کنید الگوریتم خوشه‌بندی برای مجموعه‌ای از نقاط به پایداری رسیده است. در این حالت، یک نقطه در فضا را «نیمه‌پایدار» می‌نامیم، هرگاه فاصله‌ی آن تا مرکز خوشه‌ی کنونی‌اش، مساوی با فاصله تا مرکز یک یا چند خوشه‌ی دیگر باشد. آیا ممکن است در حالت تعادلی الگوریتم خوشه‌بندی نقطه‌ی نیمه‌پایدار وجود داشته باشد؟

۷. آیا ممکن است در حالت تعادلی الگوریتم خوشه‌بندی، تمامی نقاط نیمه‌پایدار باشند؟

۸. آیا ممکن است یک مجموعه از نقاط دو حالت تعادلی مختلف داشته باشند، به گونه‌ای که در یکی از آن‌ها حدّاقل یک نقطه‌ی نیمه‌پایدار وجود داشته باشد، در حالی که در تعادل دیگر، همه‌ی نقاط پایدار باشند؟

۹. آیا ممکن است یک مجموعه از نقاط دو حالت تعادلی مختلف داشته باشند، به گونه‌ای که در یکی از آن‌ها همه‌ی نقاط نیمه‌پایدار باشند، در حالی که در تعادل دیگر، همه‌ی نقاط پایدار باشند؟

به عنوان مثال، فرض کنید مسأله در فضای دوبُعدی بوده و ۶ نقطه به مختصّات

$$(0,0), (8,0), (16,0), (0,6), (8,6), (16,6)$$

موجود می‌باشند. فرض کنید می‌خواهیم مسأله‌ی خوشه‌بندی را برای n خوشه حل کنیم.

۱۰. آیا این مسأله برای $n = 2$ پاسخ دارد؟ آیا این پاسخ یکتا دارد؟

۱۱. آیا این مسأله برای $n = 3$ پاسخ دارد؟ آیا این پاسخ یکتا دارد؟

۱۲. آیا این مسأله برای $n = 4$ پاسخ دارد؟ آیا این پاسخ یکتا دارد؟

۱۴ * کدگذاری تُنُک

می‌دانید که می‌توان نقاط موجود در یک فضا را به صورت تُنُک (sparse) کدگذاری کرده و نمایش داد.

۱. منظور از یک پایه‌ی فوق کامل (over-complete) چیست؟ چرا برای انجام کدگذاری تنک به چنین پایه‌ای نیاز داریم؟ آیا یک پایه‌ی فوق کامل می‌تواند متعامد باشد؟

۲. عمل‌کرد سیستم پردازش تصویر مغز انسان به صورت کدگذاری تنک است. توضیح دهید این روش چگونه می‌تواند باعث آن شود که در هر لحظه، تعداد کمتری از نورون‌ها در حال فعّالیت باشند.

۳. فرض کنید در فضای دوبُعدی از یک پایه‌ی فوق کامل استفاده کنیم. برای این کار در صفحه‌ی مختصّات چهار محور در نظر می‌گیریم که محورهای اوّل و دوم، همان محورهای x و y بوده و محورهای سوم و چهارم با جهت مثبت محور x زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ می‌سازند. بنابراین می‌توان مختصّات هر نقطه را به صورت یک چهارتایی مرتّب بیان کرد. در این حالت، مختصّات نقطه‌ای که در حالت عادی به صورت (α, β) نشان داده می‌شود، به چه شکل در می‌آید؟

۴. فرض کنید در فضای فوق کاملی که در قسمت قبل توصیف شد، تصمیم می‌گیریم هر نقطه را تنها با بزرگ‌ترین مؤلّفه‌ی آن (از نظر اندازه) نشان دهیم و سایر مؤلّفه‌های آن را صفر کنیم، یعنی اگر مختصّات نقطه‌ای به صورت $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ باشد به گونه‌ای که $|\alpha_2| > |\alpha_i|, i \neq 2$، این نقطه را به صورت $(0, \alpha_2, 0, 0)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که در این حالت، نمایش ما دقیق نخواهد بود و نقاط مختلفی در فضا وجود خواهند داشت که با این نمایش، از یک‌دیگر قابل تفکیک نمی‌باشند.

الف) مکان‌هندسی نقاطی که نمایش آن‌ها با این روش از کدگذاری تنک به صورت $(0, r, 0, 0)$ در می‌آید را (به صورت نمایش هندسی یا با نشان دادن مختصّات جبری) مشخّص کنید.

ب) استدلال کنید که اگر همین روش از کدگذاری تنک را در دستگاه دکارتی عادی (با دو محور متعامد) پیاده‌سازی می‌کردیم، مقدار خطا بیشتر بود یا کم‌تر. (منظور آن است که در دستگاه مختصّات به صورت (x, y)، اگر اندازه‌ی مؤلّفه‌ی اوّل بزرگ‌تر بود، نقطه را به صورت $(x, 0)$ نمایش می‌دادیم، و اگر اندازه‌ی مؤلّفه‌ی دوم بزرگ‌تر بود، آن را به صورت $(0, y)$ نمایش می‌دادیم.)

ج) همان‌طور که بررسی کردید، با این روش از کدگذاری تنک، اگر مختصّات نقطه به صورت $(0, r, 0, 0)$ (در پایه‌ی فوق کامل) یا به صورت $(r, 0)$ (در پایه‌ی کامل) گزارش شود، مجموعه‌ای از نقاط در فضا وجود دارند که ممکن است نقطه‌ی اصلی، هر یک از این نقاط بوده باشد. به عبارت دیگر، نقطه‌ی اصلی روی نزدیک‌ترین محور تصویر شده و مختصّاتی که در نهایت گزارش‌شده است، مختصّات این نقطه‌ی تصویر است. می‌دانیم که فاصله‌ی نقطه‌ی اصلی از این محور، می‌تواند عددی غیر صفر باشد (که اگر این فاصله صفر باشد، نقطه‌ی حاصل از کدگذاری تنک دقیقاً همان نقطه‌ی اوّلیه بوده است.) فرض کنید توزیع فاصله‌ی نقطه‌ی اصلی از محوری که بر روی آن تصویر شده است را یکنواخت در نظر بگیریم. در این صورت در هر یک از دو حالت (پایه‌ی فوق کامل و پایه‌ی متعامد)، میانگین و واریانس این توزیع (بر حسب r) چقدر است؟ آیا می‌توان این واریانس را به عنوان معیاری از خطا در نظر گرفت؟

د) به نظر شما با افزایش تعداد محورها (بزرگ‌تر کردن پایه‌ی فوق کامل)، مقدار خطای ناشی از این روش کدگذاری تنک چگونه تغییر خواهد کرد؟

۵. به نظر شما کاربرد نمایش فوق کامل برای رفع نویز چگونه است؟ آیا در حالتی که از پایه‌ی متعامد استفاده کنیم، با در دست داشتن مختصّات یک نقطه می‌توان اقدامی در جهت رفع نویز دیتای موجود (با فرض آن که مختصّات دریافتی آلوده به نویز شده باشد) می‌توان انجام داد؟ در حالت فوق کامل چطور؟

۶. با توجّه به نکات این سؤال و آن‌چه از اسلایدهای درس می‌دانید، به نظر شما فواید آن که سیستم پردازش تصویر در مغز انسان از روش‌های کدگذاری تنک استفاده کند چیست؟