باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

گزارش تمرین متلب

سری چهارم

امیرحسین افشارراد

۹۵۱۰۱۰۷۷

بهراد منیـری

۹۵۱۰۹۵۶۴

بهار ۱۳۹۷

قسمت اول ـ آشنایی با تبدیل لاپلاس

در این سوال، بر طبق خواستهٔ سوال، تمامی مراحل با متلب انجام شده و هیچ محاسبهٔ دستی‌ای صورت نگرفته است.

بخش اول

محاسبهٔ تابع تبدیل سیستم با کمک توابع متلب

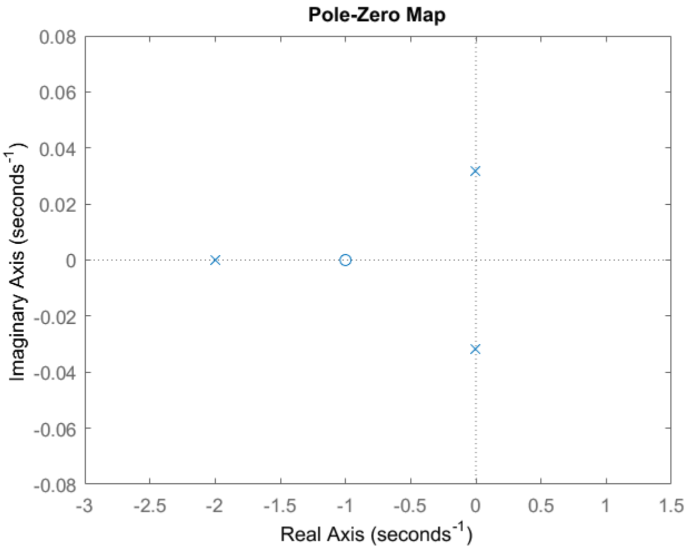
```
G1 = tf([1,1], [1,2]);
G2 = tf([1], [500, 0, 0]);
G = series(G1, G2);
unity = tf([1],[1]);
system = feedback(G, unity, -1);
```

```
system =

              s + 1
  --------------------------
  500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.
```

بخش دوم و سوم

محاسبهٔ قطب‌و صفرهای سیستم و رسم نمودار Zero-Pole برای سیستم

```
poles =

  -1.9995 + 0.0000i
  -0.0002 + 0.0316i
  -0.0002 - 0.0316i
```



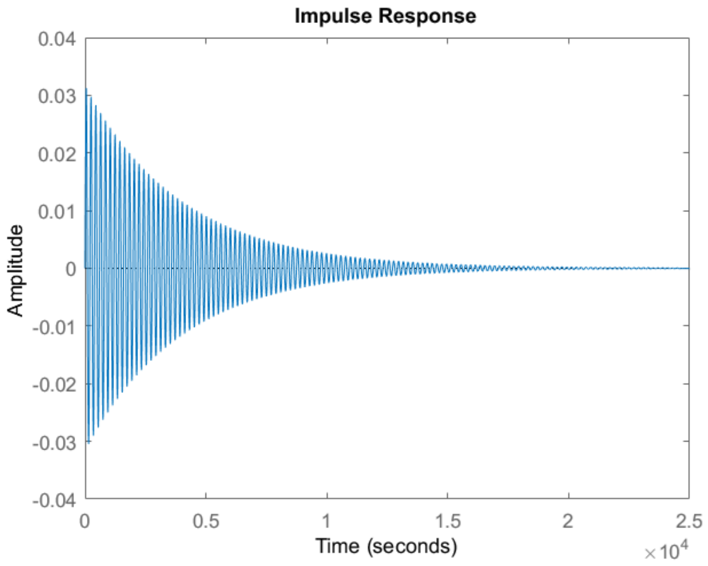
شکل ۱

بخش چهارم

به دلیل اینکه قطب‌ها در سمت چپ محور موهومی هستند سیستم پایدار است. این موضوع با تابع stable متلب نیز تایید می‌شود.

بخش پنج

در این بخش به کمک تابع impulse، پاسخ ضربهٔ سیستم را به دست می‌آوریم.

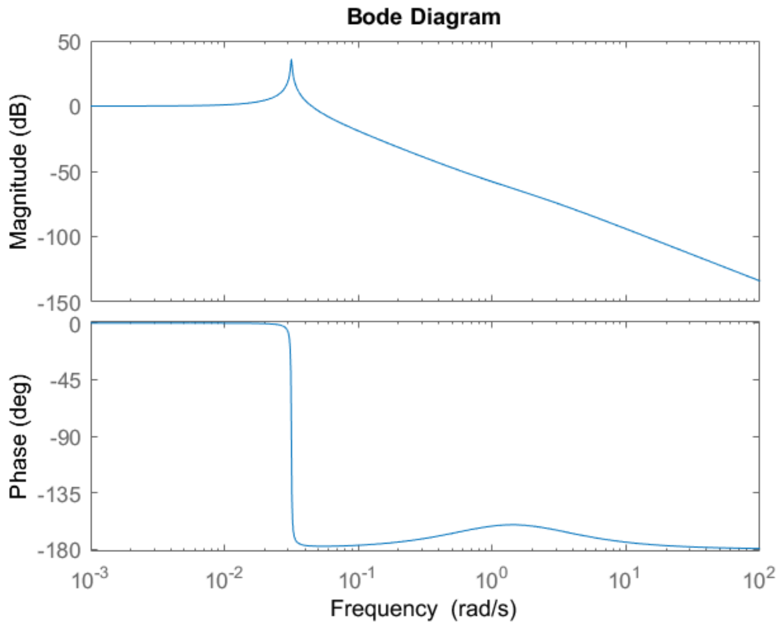


شکل ۲

مطابق انتظار در زمان بینهایت این پاسخ به صفر میل میکند و به دلیل علی بودن نیز از زمان صفر شروع شده است.

بخش شش

دیاگرام Bode این سیستم را رسم می‌کنیم.



بخش هفت

می‌توان با توجه به صفر و قطب‌های سیستم، در مورد دیاگرام بودی و نیز پاسخ ضربه آن اظهار نظر کرد. برای رسم دیاگرام بودی، باید روی محور موهومی از فرکانس صفر به سمت فرکانس‌های بالا حرکت کنیم. در هر نقطه روی این محور، حاصل‌ضرب اندازه بردارهای رسم شده از صفرها تا نقطه کنونی، تقسیم بر حاصل‌ضرب بردارهای رسم‌شده از قطب‌ها تا این نقطه، اندازه پاسخ فرکانسی را تشکیل می‌دهد. بنابراین، با توجه به نمودار صفر و قطب رسم شده برای سیستم موجود، به دلیل وجود قطب‌هایی که به محور موهومی بسیار نزدیک هستند، در فرکانس‌هایی که نزدیک به این قطب‌ها هستند (فرکانس‌هایی که به مقدار موهومی این قطب‌ها نزدیک هستند)، شاهد افزایش ناگهانی اندازه تابع تبدیل هستیم. همچنین فاز تابع تبدیل نیز از حاصل جمع زاویه بردارهای صورت تقسیم بر زاویه‌ی بردارهای مخرج (منظور از بردارهای صورت و مخرج، همان چیزی است که در توضیح اندازه تابع تبدیل بیان شد) به دست می‌آید. مجدداً به دلیل وجود قطب‌هایی در نزدیکی محور موهومی، شاهد تغییرات ناگهانی در فاز هستیم، چرا که با محض عبور از کنار این قطب، بردار واصل بین قطب و محور موهومی تقریباً عمودی شده، لذا به اندازه ۱۸۰ درجه (از ۹۰+ تا ۹۰-) تغییر در فاز خواهیم داشت. این اتفاق به خوبی در نمودار فاز، و در مجاورت فرکانس مذکور (که برابر با جزء موهومی قطب مربوطه است) قابل مشاهده می‌باشد.

نکته‌ی دیگر، در مورد ارتباط نمودار صفر و قطب با پاسخ ضربه (یا پاسخ پله) است. می‌دانیم که واگرایی یا همگرایی سیستم به جزء حقیقی قطب‌های آن بستگی دارد، چرا که در پاسخ زمانی سیستم، توابعی نمایی از زمان با ضرایبی برابر با جزء حقیقی این قطب‌ها وجود دارند. در تمامی سیستم‌های پیوسته پایدار، از جمله سیستم موجود در این سؤال، جزء حقیقی قطب‌ها منفی هستند، یا به تعبیر دیگر، تمامی قطب‌ها در سمت چپ محور موهومی قرار دارند. هر چقدر فاصله قطب‌ها تا محور موهومی بیشتر باشد، اندازه ضریب موجود در نمای تابع نمایی بیشتر بوده، لذا (با توجه به منفی بودن این ضریب) سریع‌تر نزول کرده و سیستم زودتر به مقدار نهایی خود میل می‌کند. در واقع می‌توان گفت که هرچقدر فاصله قطب‌ها از محور موهومی بیشتر باشد (با فرض آن که قطب‌ها در سمت چپ این محور واقع شده‌اند)، سیستم سریع‌تر است و زودتر پایدار می‌شود. نکته‌ی دیگر آن است که در صورت وجود چند قطب، قطب‌هایی که به محور موهومی نزدیک‌تر هستند، پاسخ کندتری دارند، و با گذشت زمان، پاسخ غالب سیستم صرفاً متعلق به این قطب‌ها خواهد بود. بنابراین در سنجش سرعت پاسخ سیستم، باید تنها قطب‌هایی را که به محور موهومی نزدیک هستند (کندترین قطب‌ها) را در نظر گرفت. به عنوان مثال، در سیستم موجود در این سؤال، وجود دو قطب بسیار نزدیک به محور موهومی، باعث کند شدن سیستم می‌شود.

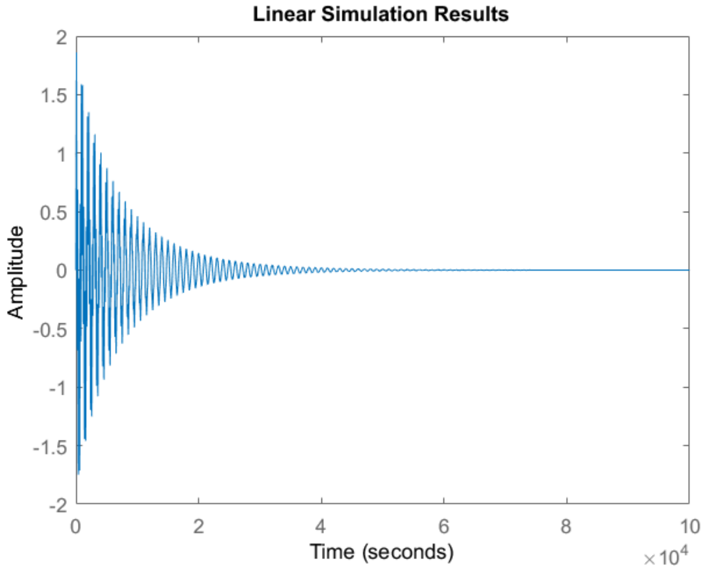
در مورد جزء موهومی این قطب‌ها نیز، می‌دانیم که توابع نمایی با نمای موهومی، نشان‌گر نوسان هستند و هرچقدر اندازه جزء موهومی قطب‌ها بیشتر باشد، فرکانس نوسان پاسخ ضربه (یا پله...) در حوزه زمان بیشتر خواهد بود.

بخش هشت

قصد داریم پاسخ سیستم به ورودی زیر را محاسبه کنیم

$$x(t) = e^{-t/10000} \times \cos(\frac{\pi}{500} \times t) \times u(t)$$

این تابع را تولید کرده و خروجی سیستم به این ورودی را به کمک تابع lsim متلب به دست می‌آوریم.

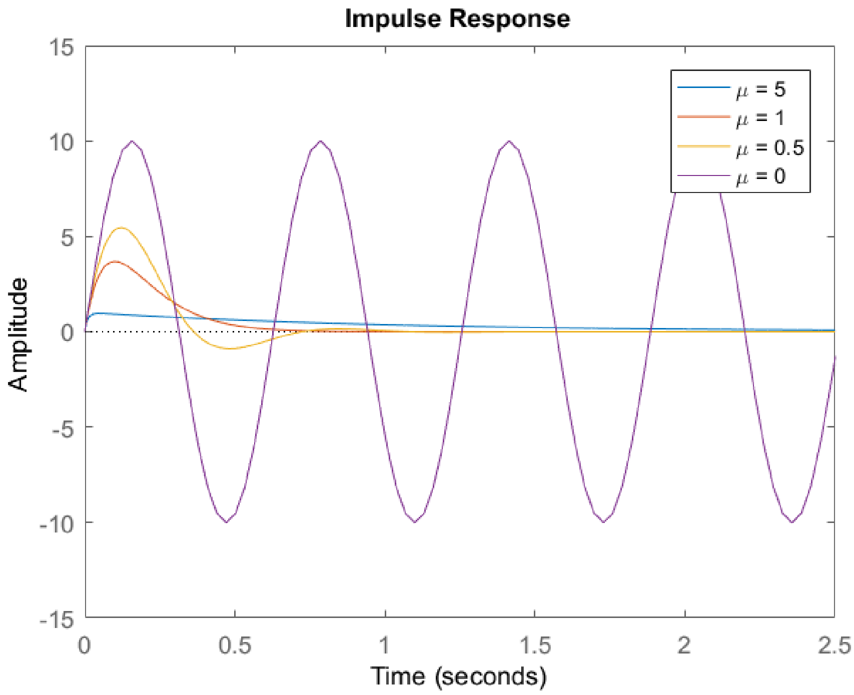

Linear Simulation Results
Amplitude
Time (seconds)
×10^4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
2
4
6
8
10

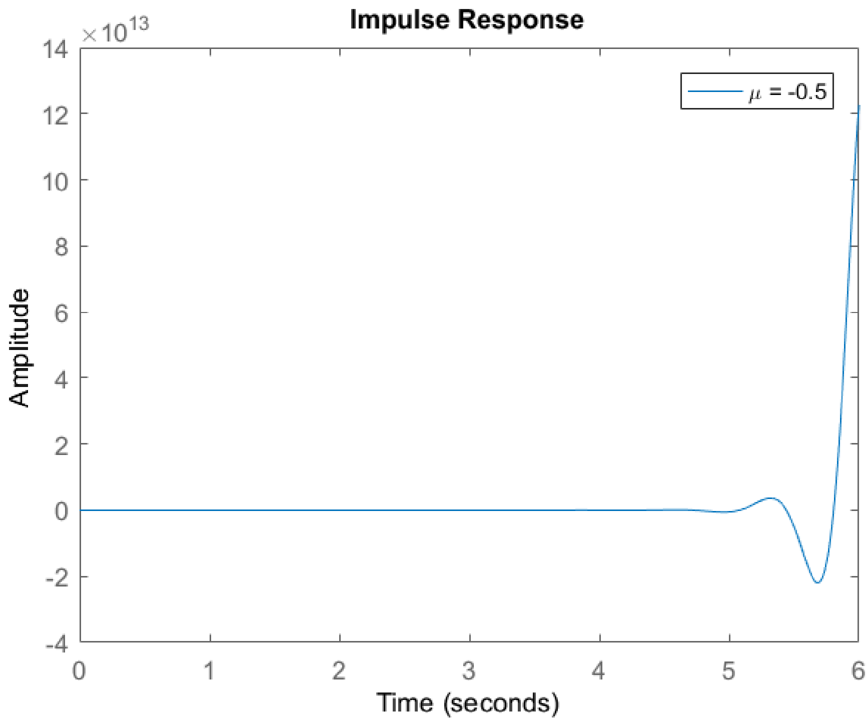
قسمت دوم) سیستم‌های مرتبه ۲

۱ـ۲)

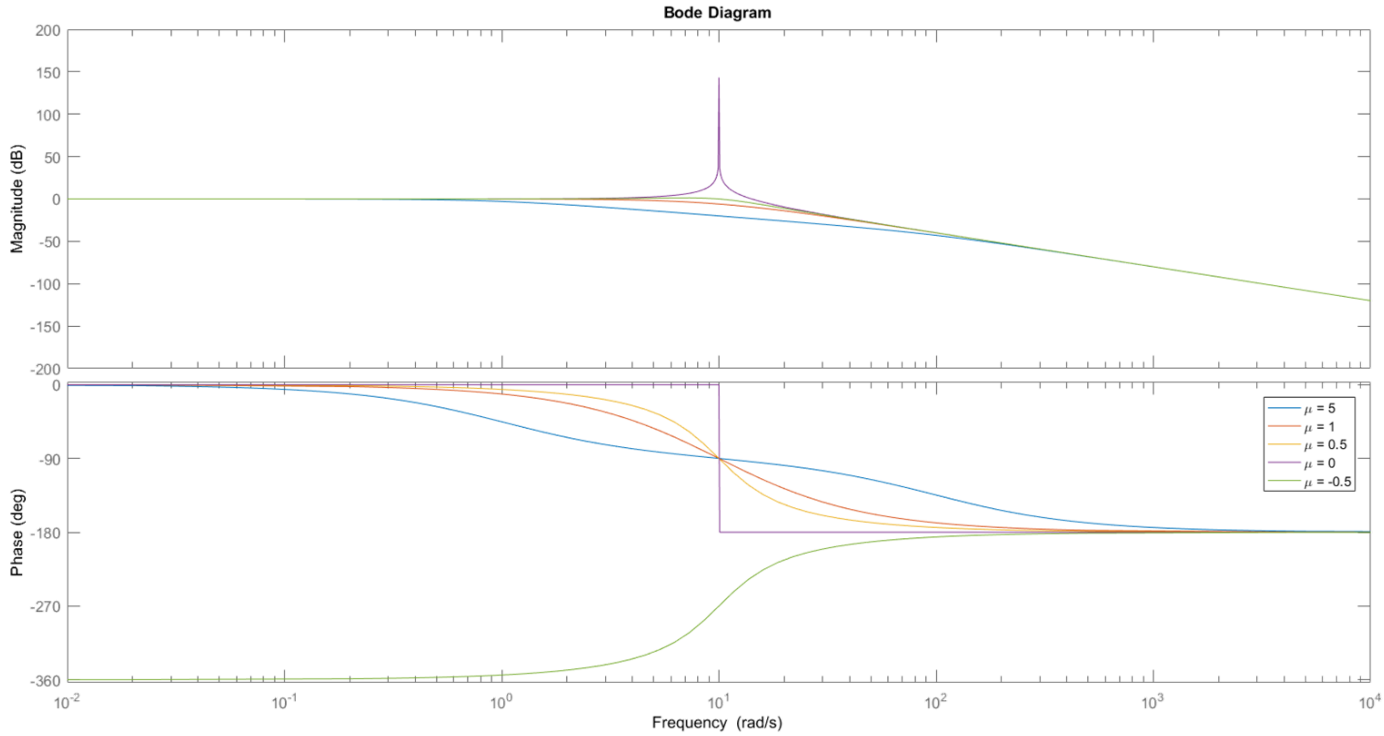
با استفاده از دستور tf، پاسخ ضربه مربوط به μ های مختلف در شکل های زیر آورده شده است ($\omega_n = 10$)

(چون پاسخ ضربه در حالت $\mu = -0.5$ واگرا می‌شود، نمودار آن را جداگانه رسم کرده‌ایم)





نمودار بودی مربوط به سیستم ها با μ های مختلف نیز در زیر آورده شده است ($\omega_n = 10$):



۲ــ۲)

<u>مزیت حالت ۳ ($0 < \mu < 1$) بر حالت های دیگر :</u>

همان طور که در پاسخ ضربه می بینیم، پاسخ سیستم با $\mu < 0$ واگرا می شود و پس از مدت کوتاهی، مقادیر بسیار بزرگی را به خود می گیرد که این امر برای سیستم های ما که با انرژی های محدود سر و کار دارند مناسب نیست.

در سیستم هایی که $\mu = 0$ دارند، ضریب میرایی صفر است و پاسخ سیستم به ضربه یک سیسنوسی خالص خواهد بود، که با فرکانس ω_n نوسان می کند . این امر موجب وجود قله‌ای در نمودار اندازه‌ی بودی مربوط به این سیستم است، که باعث می‌شود پاسخ سیستم در یک فرکانس مشخص، بسیار تقویت شود و پاسخ سایر فرکانس‌ها در مقابل آن، تقریبا دیده نمی‌شوند. البته اگر در کاربردی، هدف ما چنین باشد، این سیستم می‌توان کارآمد باشد. اما آن چه که در کاربردهای عادی وجود دارد معمولاً چنین نیست و ما به طیفی از فرکانس‌ها علاقه داریم و نه صرفاً به یک فرکانس خاص.همچنین مشاهده می‌شود که تغییرات فاز در این سیستم به صورت ناگهانی اتفاق می افتد. همچنین این نکته نیز شایان ذکر است که در عمل، دستیابی به چنین سیستمی امکان‌پذیر نیست و همواره در سیستم‌های واقعی، شاهد اتلاف و ضریب میرایی مخالف صفر هستیم.

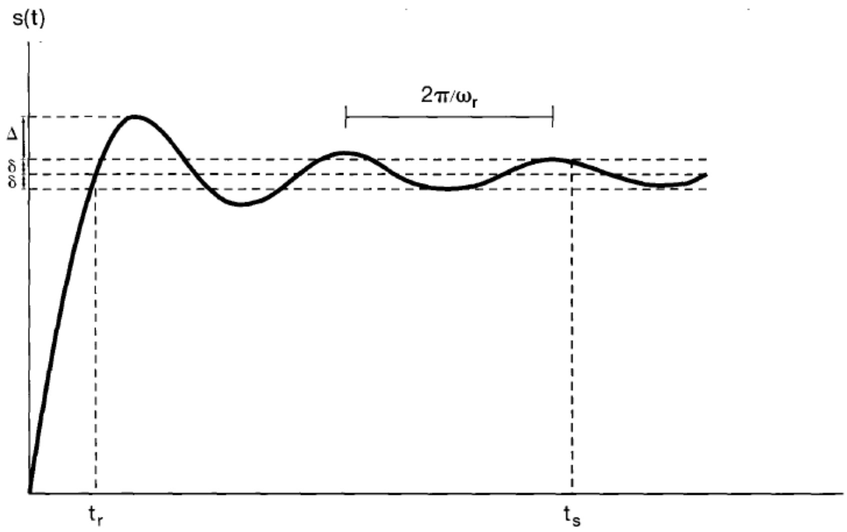
در سیستم هایی که $\mu \geq 1$ ضریب میرایی انقدر بالاست که سیستم ها قبل از اینکه نوسانی بکنند میرا می شوند و به صفر میل میکنند. یک مزیت سیستم‌های $0 < \mu < 1$ بر این سیستم‌ها، آن است که میزان افت پاسخ فرکانسی در فرکانس شکست برای آن کمتر است، و با افزایش مقدار μ ، این میزان افزایش می‌یابد، سیستم از تقریب تکه‌ای خطی فاصله بیشتری می گیرد، و به عنوان یک فیلتر پایین‌گذر، ناکارآمدتر می‌شود. همچنین با افزایش μ ، زمان پاسخ سیستم (به عنوان مثال، زمان پایدار شدن پاسخ پله) نیز افزایش می‌یابد و طولانی می‌شود که می‌تواند یک ویژگی منفی باشد.

با توجه به مواردی که ذکر شد، سیستم‌هایی با $0 < \mu < 1$ می‌توانند گزینه‌های مناسب‌تری در طراحی سیستم‌ها باشند.

۳ـ۲)

مفاهیم overshoot و settling time :

در پردازش سیگنال، نظریه کنترل، الکترونیک، و ریاضیات، افزایش اولیه مقدار سیگنال (تابع) نسبت به مقدار نهایی خود را فراجهش یا overshoot می‌نامند. همچنین به مدت زمان لازم برای قرار گرفتن پاسخ پله در بازه ای کوچک ($\pm\delta$) حول مقدار نهایی خود را زمان نشست یا settling time می نامند. در شکل زیر Δ میزان فراجهش و t_s زمان نشست می باشد.

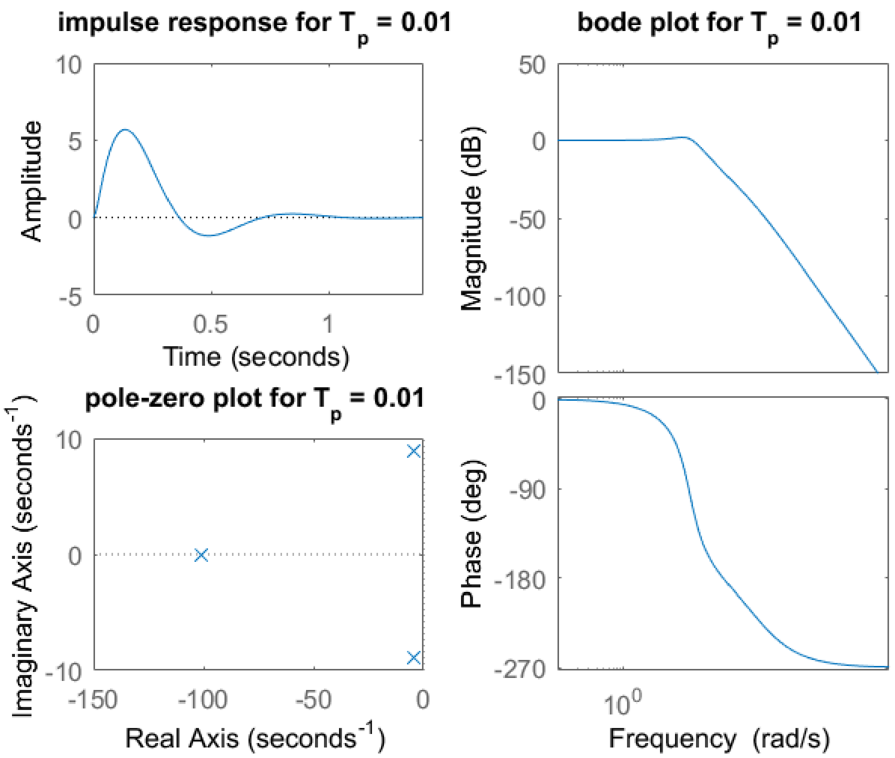


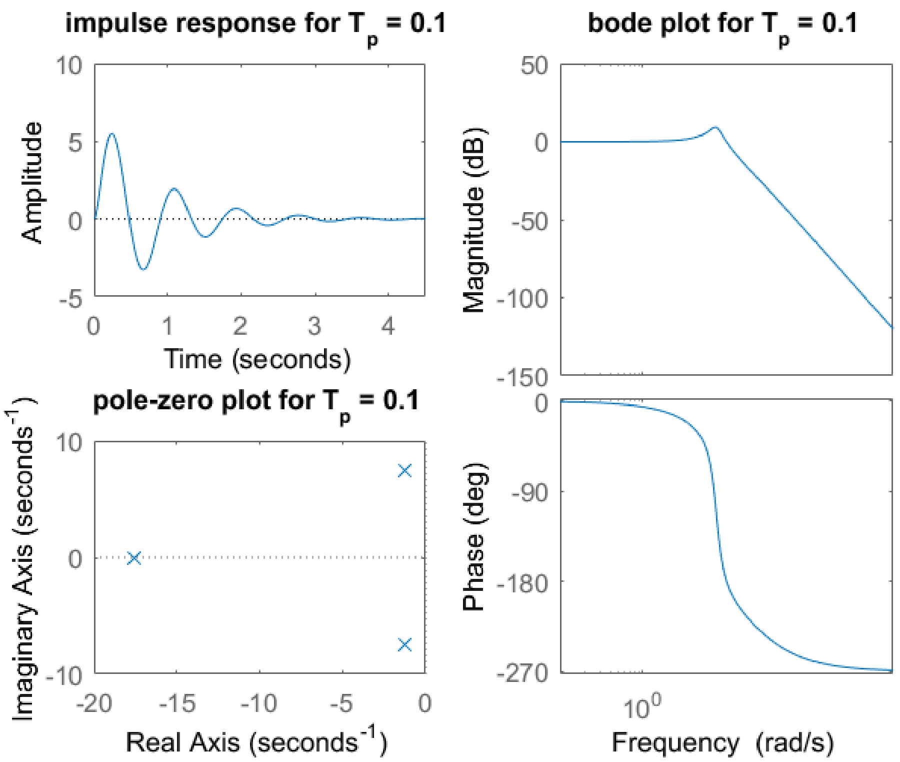
۴ـ۲)

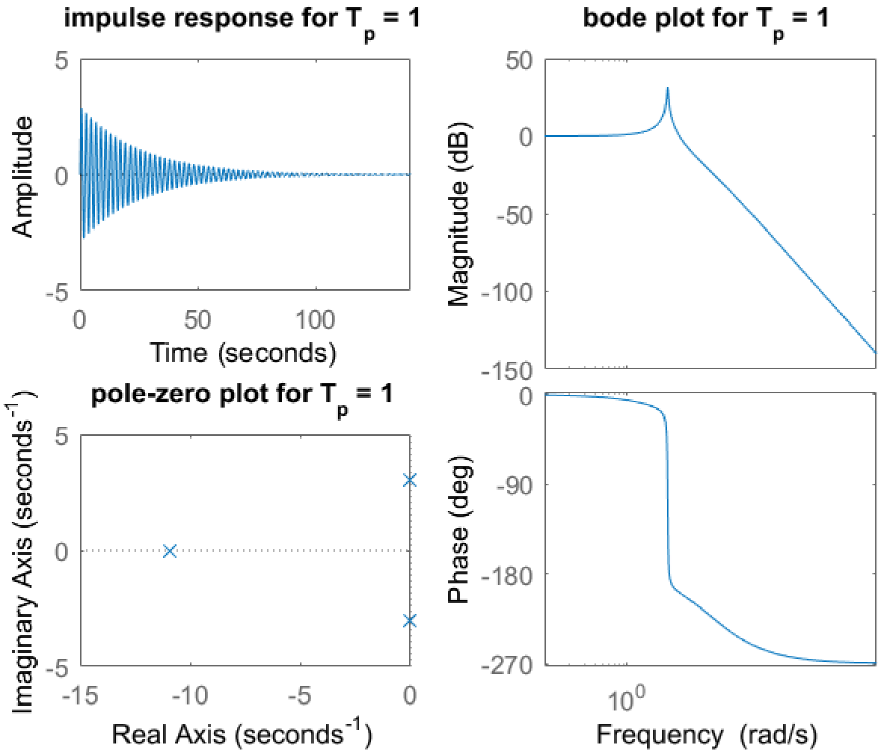
با توجه به قسمت‌های قبلی، در نظر می‌گیریم: $\omega_n = 10, \mu = 0.5$

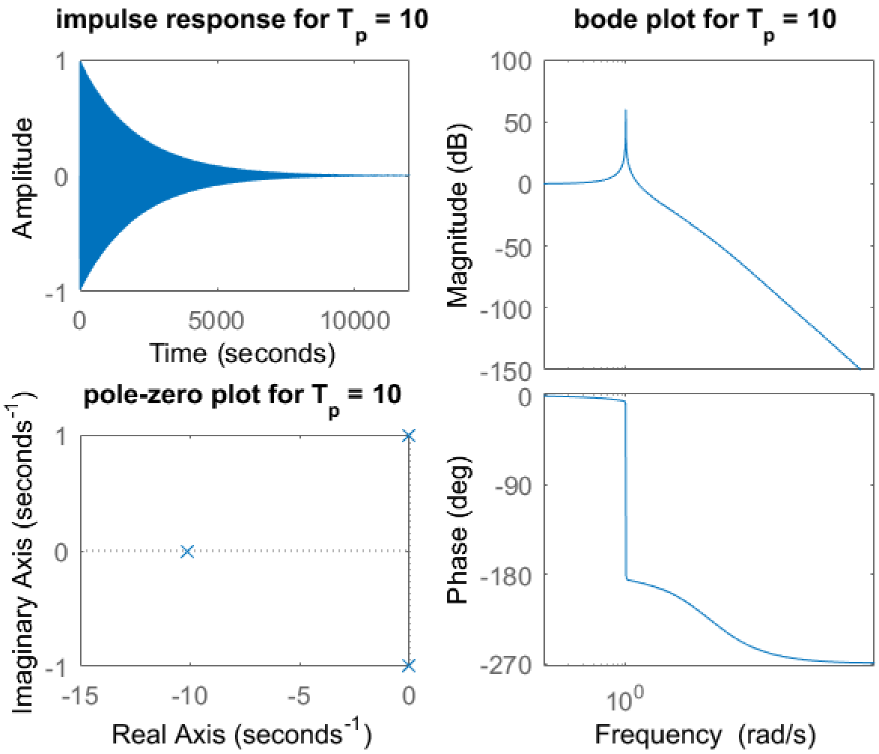
۵ـ۲)

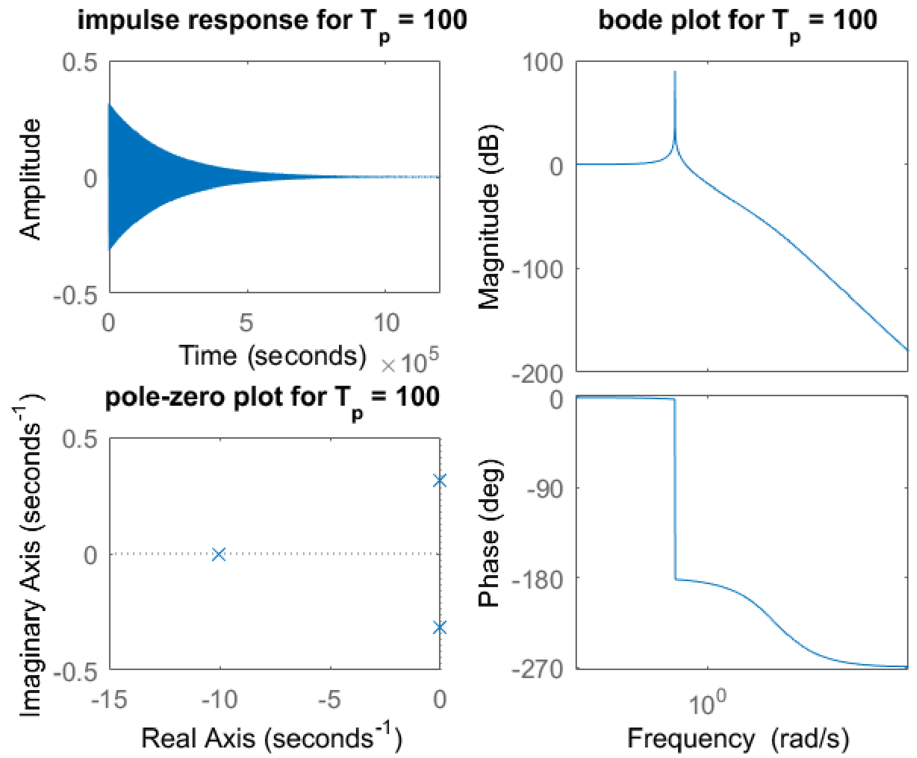
چند نمونه نمودار به ازای مقادیر مختلف Tp در ادامه آمده است:

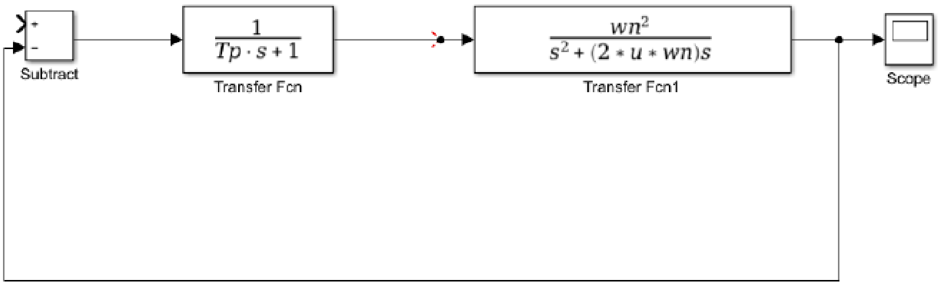





impulse response for T_p = 1
Amplitude
Time (seconds)
bode plot for T_p = 1
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
pole-zero plot for T_p = 1
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)


impulse response for T_p = 10
Amplitude
Time (seconds)
bode plot for T_p = 10
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
pole-zero plot for T_p = 10
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)





$$H(s)=\frac{\frac{1}{T_p s+1}\times\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\mu\omega_n s}}{1+\frac{1}{T_p s+1}\times\frac{\omega_n^{\,2}}{s^2+2\mu\omega_n s}\times 1}\Rightarrow H(s)=\frac{\omega_n^{\,2}}{(s^2+2\mu\omega_n s)(T_p s+1)+\omega_n^{\,2}}$$

اثر افزایش Tp در هر یک از نمودارهای رسم‌شده، به گونه‌ای خود را نشان می‌دهد. با مشاهده نمودارها، (و نیز با بررسی تابع تبدیل فوق) می‌توان مشاهده کرد که با افزایش مقدار Tp، قطب‌های سیستم به محور موهومی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. این اثر، معادل آن است که سیستم کُندتر عمل کرده، و میزان میرایی پاسخ ضربه کاهش می‌یابد. بنابراین مدت زمان بیشتری طول می‌کشد تا نوسانات سیستم از حد معینی کم‌تر شود. نکته‌ی دیگر که در نمودارهای بودی قابل مشاهده است، آن است که با افزایش مقدار Tp، در نمودار اندازه شاهد یک قله‌ی ناگهانی در فرکانس قطع هستیم، که این نیز از روی نمودار صفر و قطب قابل توجیه است، چرا که با نزدیک شدن قطب‌ها به محور موهومی، هنگامی که در پیمایش این محور به محل قطب‌ها نزدیک شویم، اندازه مخرج تابع تبدیل بسیار کوچک شده، لذا اندازه این تابع زیاد می‌شود.

همچنین یک نکته‌ی دیگر که از نمودارها قابل مشاهده است، آن است که مقدار موهومی قطب‌ها، با افزایش Tp (و با نزدیک شدن آن‌ها به محور موهومی)، کاهش می‌یابد که این پدیده اثر خود را در فرکانس نوسانات نشان می‌دهد.

۶ـ۲)

با ضرب کردن عامل $\frac{1}{T_p s+1}$ در سیستم ما قادر شدیم که مکان قطب ها را تغییر دهیم ، اگر این عامل نبود ، تابع تبدیل کلی به صورت $H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\mu\omega_n s+\omega_n^2}$ در می آمد که یک سیستم مرتبه ۲ عادی است. اما تابع تبدیل سیستم جدید، همان طور که در قسمت قبل نیز ذکر شد، به صورت زیر در می‌آید:

$$H(s)=\frac{\frac{1}{T_p s+1}\times\frac{\omega_n^2}{s^2+2\mu\omega_n s}}{1+\frac{1}{T_p s+1}\times\frac{\omega_n^2}{s^2+2\mu\omega_n s}\times 1}\Rightarrow H(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\mu\omega_n s)(T_p s+1)+\omega_n^2}$$

بنابراین وجود سیستم Transfer Fcn باعث شد تا بتوانیم محل قطب‌ها را جابه‌جا کنیم و به واسطه‌ی آن، میزان میرایی سیستم و زمان پایدار شدن آن، و میزان قله زدن اندازه پاسخ فرکانسی در فرکانس تشدید را تنظیم کنیم. همان طور که در قس‌مت قبل توضیح داده شد، افزایش Tp باعث حرکت قطب‌ها به سمت محور موهومی می‌شود که نزدیک شدن قطب‌ها به محور موهومی، باعث می‌شود اندازه‌ی پاسخ فرکانسی در نزدیکی مقدار موهومی این قطب‌ها قله داشته باشد، چرا که در پیمایش محور موهومی، وقتی به این قطب‌ها نزدیک می‌شوی‌م، مخرج تابع تبدیل بسیار کوچک شده، و در نتیجه اندازه پاسخ فرکانسی بسیار افزایش می‌یابد.

۷ـ۲)

با افزایش Tp سیستم به سمت ناپایداری می‌رود، چرا که با فرض علی بودن، سیستم زمانی پایدار است که ناحیه همگرایی آن (که دست راستی فرض شده است) محور موهومی را در بر بگیرد. با نزدیک شدن قطب‌ها به محور موهومی در اثر افزایش Tp، ناحیه همگرایی کوچک و کوچک‌تر شده و مرز آن به محور موهومی نزدیک‌تر می‌شود، زمان پایدار شدن سیستم طولانی‌تر شده، و سیستم به سمت ناپایداری می‌رود.

۸ـ۲)

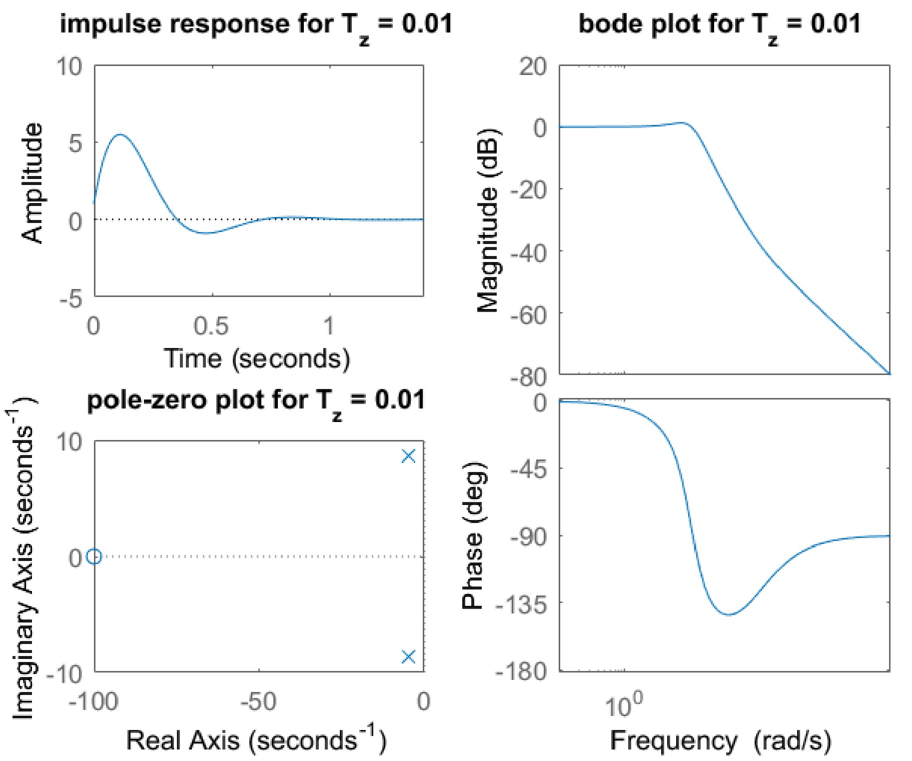
تا اینجا تغییرات مربوط به پارامتر T_p بررسی شد. همچنان پارامتر های دیگر موجود در سیستم مرتبه ۲ (Transfer Func1) نماینده‌ی میرایی و فرکانس شکست در سیستم خود هستند، اما باید توجه داشت که با افزایش ω_n قطب های سیستم زودتر به محور $j\omega$ نزدیک می شوند و پاسخ ضربه نامیراتر خواهد شد . هم چنین افزایش μ ضریب میرایی را افزایش خواهد داد . ولی به صورت کلی مکان قطب های تابع تبدیل بالای صفحه، تابعی از هر سه متغیر T_p, ω_n, μ می باشد که با تغییر آنها می توان مکان قطب ها را تعیین کرد.

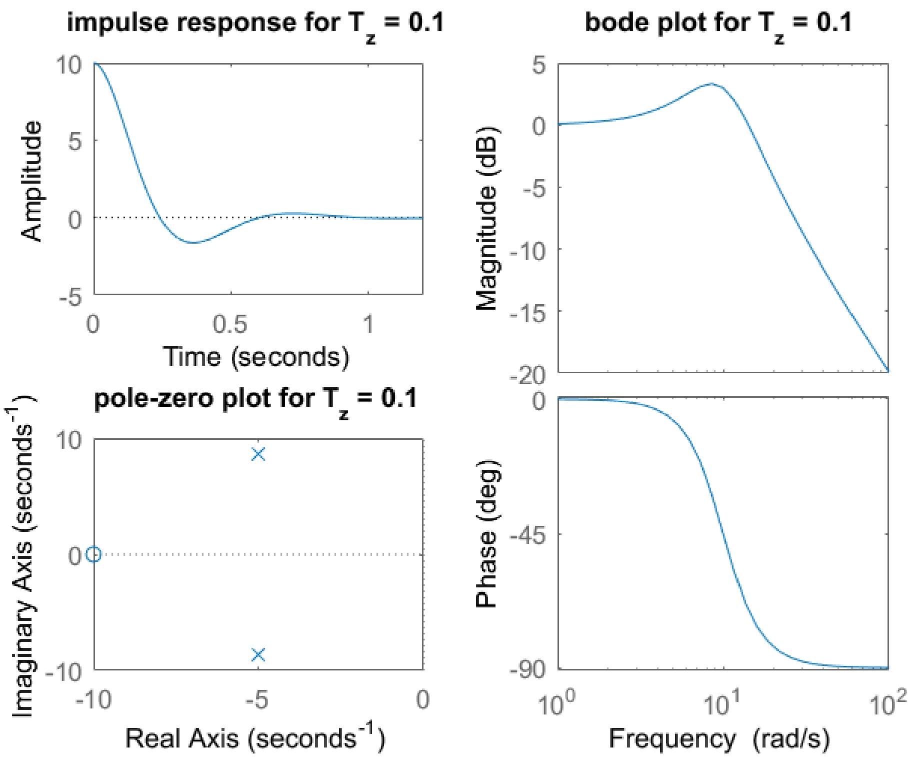
می‌توان نشان داد که این سیستم دو قطب موهومی، و یک قطب حقیقی دارد که برای بررسی اثر دقیق پارامترها، باید آن‌ها را بررسی کرد. قطب‌های این سیستم به صورت زیر می‌باشند:

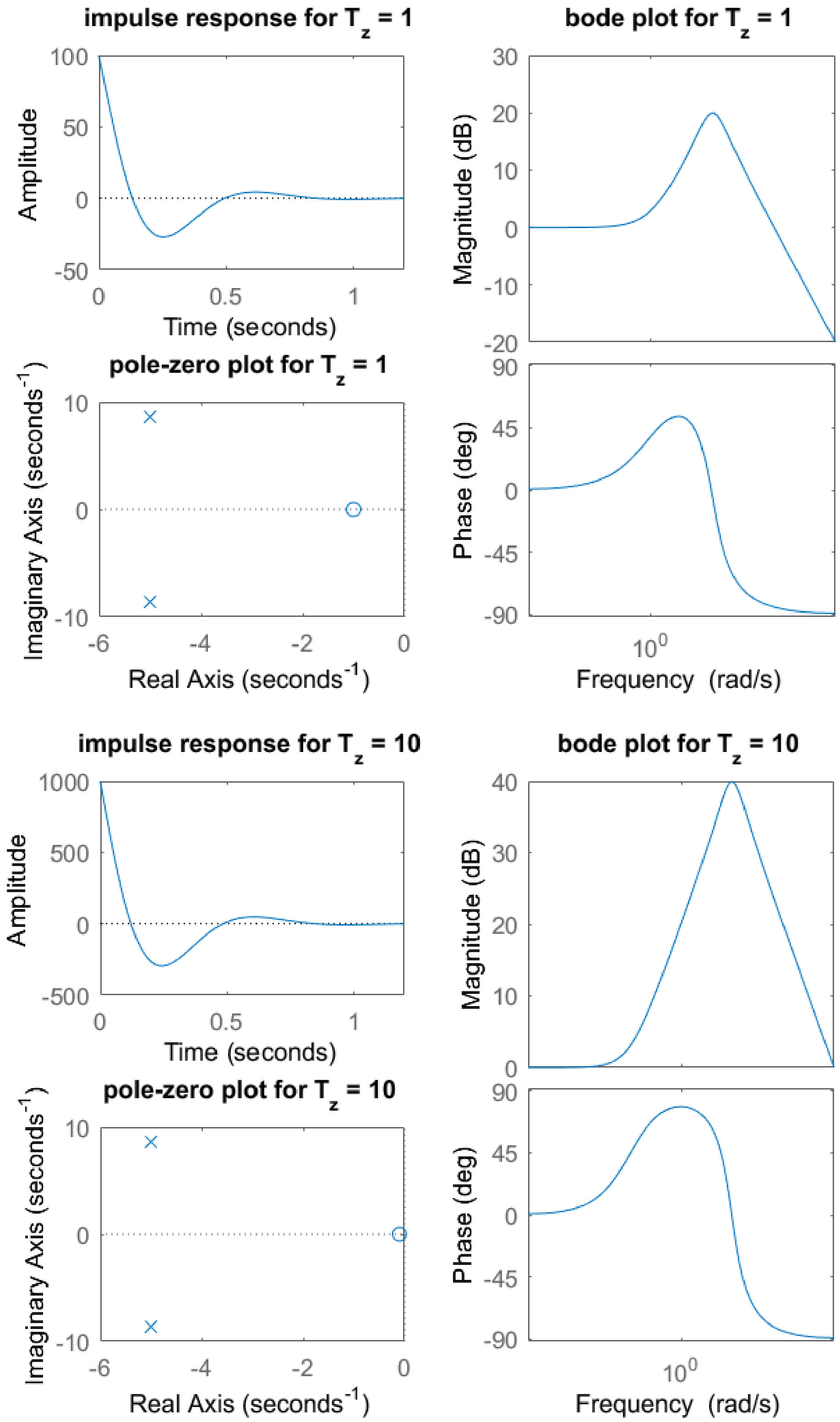
$$\left\{\begin{array}{l}
s=\left(\frac{-(\sqrt{3}\cdot i)}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{\left(\left(\frac{(\sqrt{3}\cdot i)}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot(4\cdot t^2\cdot u^2\cdot w^2-2\cdot t\cdot u\cdot w+1)\right)}{\left(9\cdot t^2\cdot\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)}-\frac{(2\cdot t\cdot u\cdot w+1)}{(3\cdot t)} \\
s=\left(\frac{(\sqrt{3}\cdot i)}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{\left(\left(\frac{-(\sqrt{3}\cdot i)}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot(4\cdot t^2\cdot u^2\cdot w^2-2\cdot t\cdot u\cdot w+1)\right)}{\left(9\cdot t^2\cdot\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)}-\frac{(2\cdot t\cdot u\cdot w+1)}{(3\cdot t)} \\
s=\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{(4\cdot t^2\cdot u^2\cdot w^2-2\cdot t\cdot u\cdot w+1)}{\left(9\cdot t^2\cdot\left(\frac{w\cdot\sqrt{32\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+((-16\cdot t^2\cdot u^4)-24\cdot t^2\cdot u^2+27\cdot t^2)\cdot w^2+(16\cdot t\cdot u^3-12\cdot t\cdot u)\cdot w-4\cdot u^2+4}}{2\cdot 3^{\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot t^2}-\frac{16\cdot t^3\cdot u^3\cdot w^3+t^2\cdot(27\cdot w^2-12\cdot u^2\cdot w^2)-6\cdot t\cdot u\cdot w+2}{54\cdot t^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)}-\frac{(2\cdot t\cdot u\cdot w+1)}{(3\cdot t)}
\end{array}\right.$$

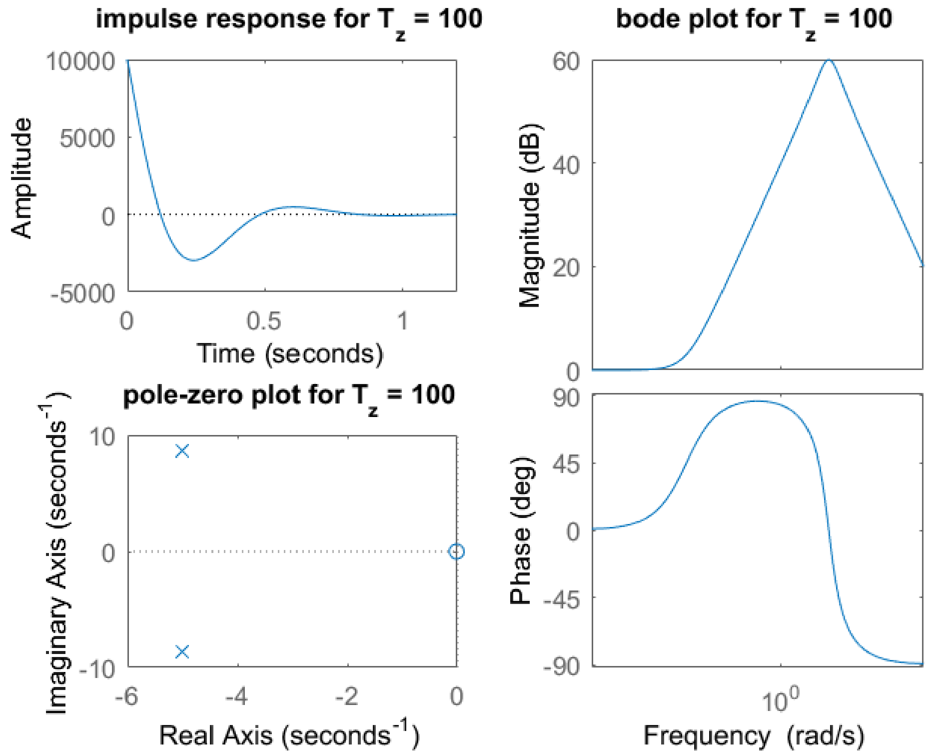
۹ـ۲)

ابتدا نمودارهای بودی و پاسخ ضربه و نمودار های صفر و قطب های سیستم کلی را به ازاء چند مقدار متفاوت Tz رسم می‌کنیم:






impulse response for T_z = 1
Amplitude
Time (seconds)
bode plot for T_z = 1
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
pole-zero plot for T_z = 1
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
impulse response for T_z = 10
Amplitude
Time (seconds)
bode plot for T_z = 10
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
pole-zero plot for T_z = 10
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)



$$H(s)=(T_z s+1)(\frac{\omega_n^2}{s^2+2\mu\omega_n s+\omega_n^2})\Rightarrow H(s)=\frac{\omega_n^2(T_z s+1)}{s^2+2\mu\omega_n s+\omega_n^2}$$

۵ــ۲: همان طور که مشاهده می کنیم در تابع تبدیل به دست آمده ما یک صفر در صورت با ریشه ی $S=-\frac{1}{T_z}$ اضافه کرده‌ایم و قطب های سیستم ثابت هستند؛ بنابراین فرکانس نوسان و میرایی برای پاسخ های ضربه به ازای T_z های متفاوت یکسان هستند و فقط دامنه‌ی آن‌ها متفاوت است. همچنین به دلیل آن که با افزایش T_z، صفر به سمت محور موهومی حرکت می کند، دامنه‌ی اولیه‌ی پاسخ ضربه افزایش می یابد و چون یک جمله ی $jT_z\omega+1$ در صورت ظاهر می شود ، در نمودار بودی ابتدا یک افزایش اندازه‌ی دامنه، و سپس کاهش آن را داریم و با افزایش T_z این افزایش اندازه پاسخ فرکانسی، در فرکانس های زودتری رخ می دهد.

۶ــ۲: همان طورکه ذکر شد ما با Transfer Func در حقیقت یک صفر با ریشه ی $S=-\frac{1}{T_z}$ به تابع تبدیل اضافه می کنیم، که این امر باعث می شود نمودار بودی این سیستم با نمودار بودی سیستم مرتبه ۲ (Transfer Func1) جمع شود و ما در ابتدا یک افزایش در اندازه‌ی پاسخ فرکانسی مشاهده کنیم که این ناشی از وجود صفر است. سپس با افزایش T_z فرکانس شکست را کاهش می‌دهیم و این افزایش اندازه پاسخ فرکانسی در فرکانس های کمتری رخ می دهد. همچنین یک نکته دیگر این است که نرخ افت اندازه پاسخ فرکانسی، نصف حالتی است که سیستم مرتبه دوم عادی داشته باشیم، چراکه در واقع وجود صفر باعث افزایش این اندازه با آهنگ 20dB/dec می‌شود، در حالی که در سیستم مرتبه ۲ ، اندازه پاسخ فرکانسی با شیب 40dB/dec- نزول می‌کند. بنابراین برایند این دو، یعنی 20dB/dec- در حاصل نهایی مشاهده خواهد شد.

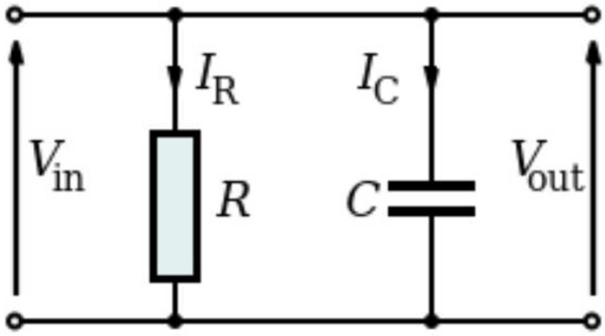
۷ــ۲: چون مکان قطب ها با تغییر T_z ثابت است ، پایداری سیستم تغییری نخواهد کرد.

۸ـ۲: نقش پارامتر T_z در سیستم بررسی شد . پارامتر های دیگر یعنی μ,ω_n دقیقا همان نقش هایی که در سیستم مرتبه ۲ دارند را بازی می کنند. یعنی افزایش μ به معنای افزایش میرایی و افزایش ω_n یعنی افزایش فرکانس طبیعی سیستم. همچنین می دانیم افت اندازه‌ی پاسخ فرکانسی در سیستم‌های مرتبه ۲ در فرکانسی تقریبا برابر با ω_n رخ می دهد. بنابراین با افزایش ω_n می‌توان این افت اندازه ی پاسخ فرکانسی را دیرتر مشاهده کرد.(قله در نمودار های اندازه پاسخ فرکانسی در فرکانس‌های بالاتری رخ می‌دهد؛ و در واقع پهنای باند سیستم افزایش می‌یابد)

قسمت سوم ــ حل عددی یک سیستم پیوسته

سوال یک

در این مساله قصد داریم مدار زیر را به روش‌عددی حل کرده و پایداری جواب را بررسی کنیم. مدار رسم شده در تمرین، در صورتی که ورودی را یک منبع ولتاژ بگیریم، مداری بدیهی است که در آن ورودی با خروجی برابر می‌شود بنابراین برای معنادار بودن سوال، ورودی را یک منبع جریان گرفته و جریان مقاومت را به عنوان خروجی معرفی می‌کنیم.



شکل ۳

با نوشتن یک معادلهٔ جریان کیرشهف داریم

$$i_{in}(t) = \frac{V_{out}}{R} + C\frac{dV_{out}}{dt} = I_R + RC\frac{dI_R}{dt}$$

تعریف می‌کنیم $\tau = RC$

سوال دو

از تقریب زیر استفاده کرده و معادله را بازنویسی می‌کنیم. می‌گیریم $\alpha = \frac{T}{RC}$

$$v(nT) = v[n] \rightarrow \frac{dv}{dt} \approx \frac{v[n+1] - v[n]}{T}$$

$$i_{in}[n] = I_R[n] + RC\,\frac{I_R[n+1] - I_R[n]}{T} \rightarrow i_n[n] = \left(1 - \frac{RC}{T}\right)I_R[n] + \frac{RC}{T}I_R[n+1]$$

این رابطه را بر حسب الفا باز نویسی می‌کنیم.

$$I_R[n]\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\,I_R[n+1] = i_n[n]$$

سوال سه

با تبدیل Z گرفتن از معدلهٔ تفاضلی بالا داریم

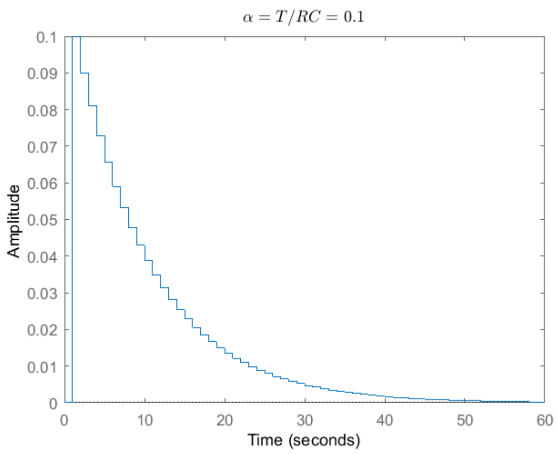
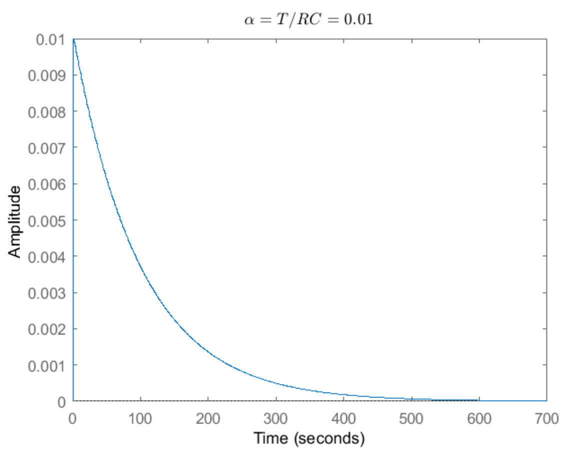
$$I_{in}(z) = \left(1 - \frac{RC}{T} + \frac{RC}{T} z\right) I_{out}(z) \rightarrow H(z) = \frac{\alpha}{z + (\alpha - 1)} \rightarrow h[n] = \alpha(1-\alpha)^n u[n]$$

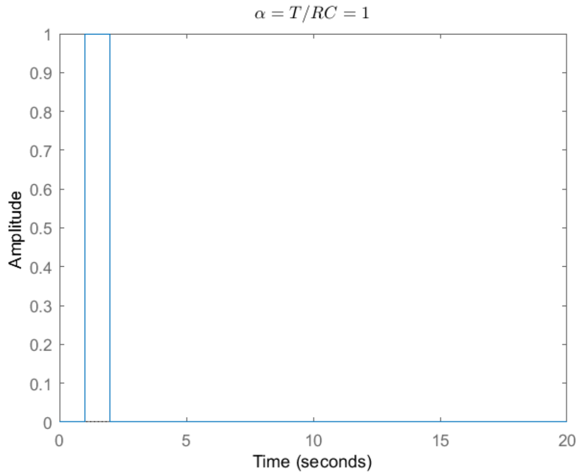
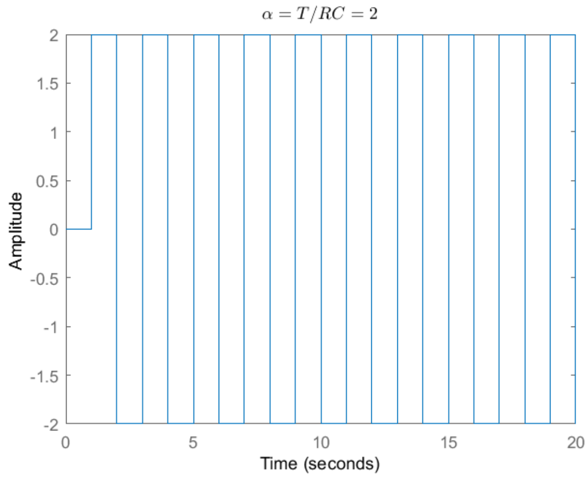
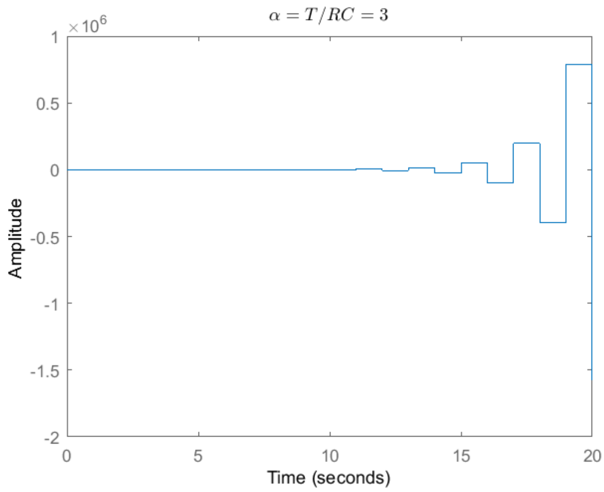
این سیستم یک سیستم تک قطبی است که قطب آن در $z = 1 - \frac{T}{RC}$ قرار دارد. برای پایداری این قطب باید در داخل دایره واحد قرار بگیرد چون سیستم دست راستی است. پس برای پایداری باید داشته باشیم $\frac{RC}{T} > \frac{1}{2}$ یعنی باید با زمانی کوچکتر از دو برابر ثابت زمانی مدار سمپل بگیریم تا سیستم گسستهٔ حاصل پایدار شود. پس شرط همگرایی این سیستم به این صورت است.

$$\alpha = \frac{T}{RC} < 2 \iff Stable\ System$$

سوال چهار

در این سوال برای مقادیر مختلف آلفا پاسخ ضربه را به دست می‌آوریم.

α	$h[n]$	Plot
0.1	$0.1(1-0.1)^n u[n]$	
0.01	$0.01(1-0.01)^n u[n]$	

<table>
<tr><td>1</td><td>$1(1-1)^n u[n]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2(1-2)^n u[n]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$3(1-3)^n u[n]$</td><td>
</td></tr>
</table>

سوال پنج

هنگامی که آلفا از دو بزرگتر باشد، قطب سیستم خارج دایره واحد قرار می‌گیرد پس به همین دلیل سیستم دست راستی ما ناپایدار می‌شود و پاسخ ضربه در زمان‌های بزرگ، واگرا می‌شود. در حالت $\alpha = 2$ نیز سیستم در مرز ناپایداری قرار دارد و قطب آن بر روی دایره واحد است و پاسخ ضربه آن $2(-1)^n u[n]$ است.

به دلیل اینکه از روش Forward استفاده کردیم، این پاسخ در زمان صفر، برابر صفر و اصولا از درایه اول به بعد معتبر است.

سوال شش ـ ۱

از تقریب زیر استفاده کرده و معادله را بازنویسی می‌کنیم. $\alpha = \frac{T}{RC}$

$$v(nT) = v[n] \to \frac{dv}{dt} \approx \frac{v[n] - v[n-1]}{T}$$

$$i_{in}[n] = I_R[n] + RC\,\frac{I_R[n] - I_R[n-1]}{T} \to i_{in}[n] = I_R[n]\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} I_R[n-1]$$

سوال شش ـ ۲

با تبدیل Z گرفتن از معدلهٔ تفاضلی بالا داریم

$$I_{in}(z) = I_R(z)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha z} I_R(z) \to I_{in}(z) = I_R(z)\left(1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha z}\right) \to H(z) = \frac{\alpha z}{z(\alpha+1) - 1}$$

این سیستم یک قطب در $z = \frac{1}{\alpha+1}$ و یک صفر در نقطهٔ صفر دارد. با توجه به این حقیقت که آلفا عددی مثبت است، قطب این سیستم همواره داخل دایرهٔ واحد قرار دارد و سیستم پایدار است.

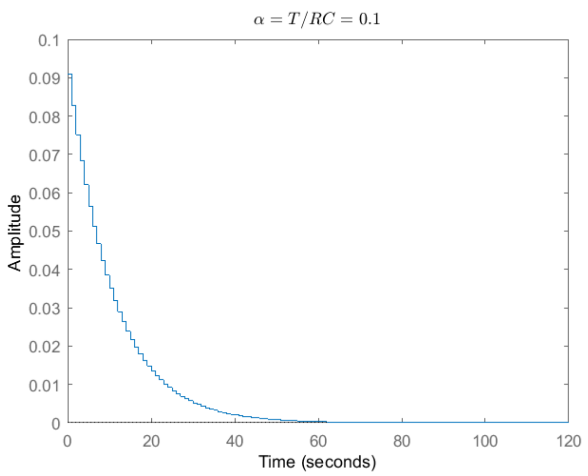
$$H(z) = \frac{\alpha z}{z(\alpha+1) - 1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\left(1 + \frac{1}{z - \frac{1}{\alpha+1}} \times \frac{1}{\alpha+1}\right)$$

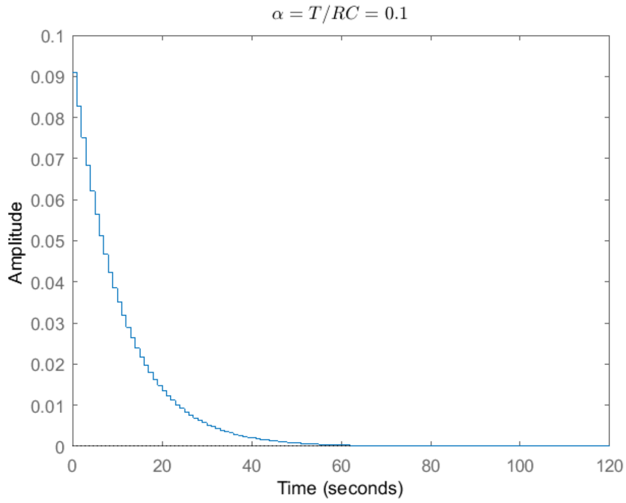
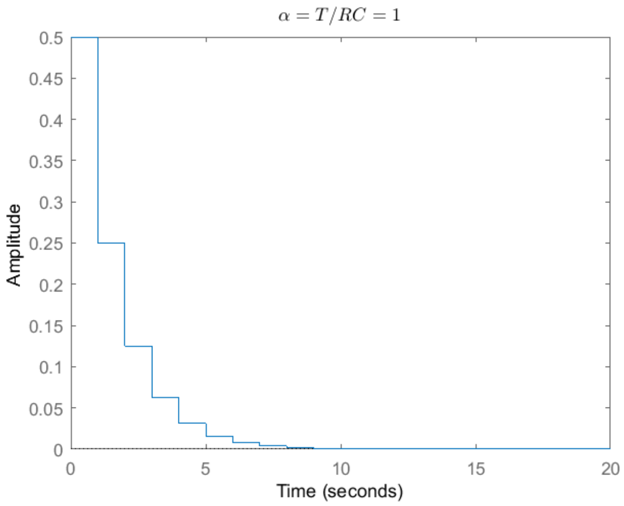
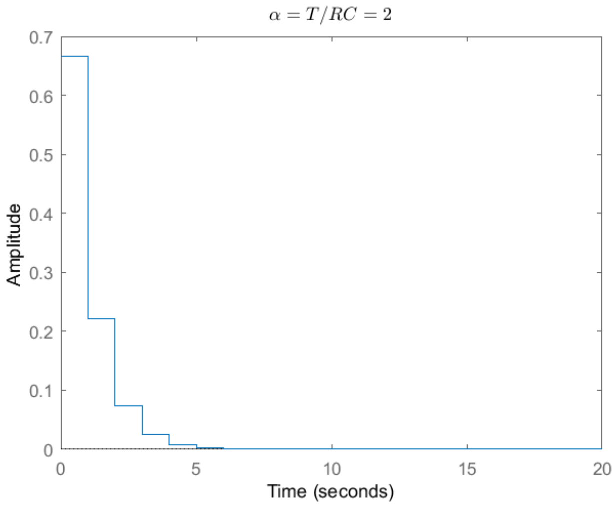
پاسخ ضربه در حوزه زمان برای این سیستم بدین صورت است.

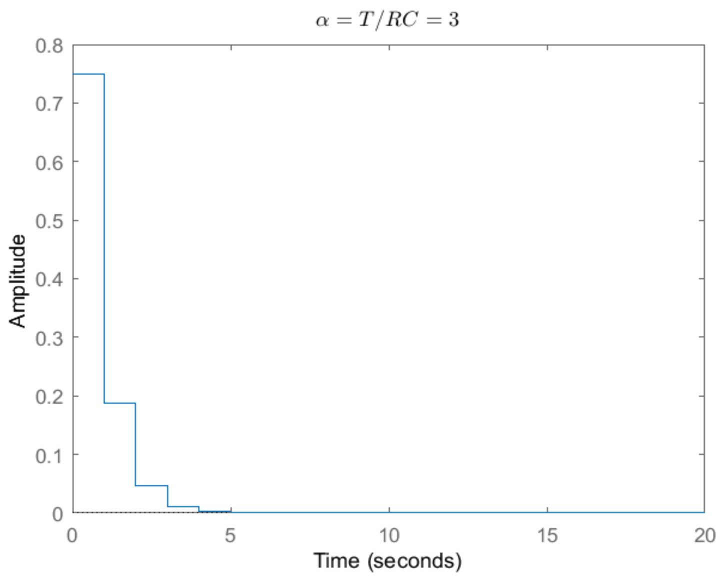
$$h[n] = \frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\delta[n] + \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{n+1} u[n]\right)$$

سوال شش ـ ۳

در این سوال برای مقادیر مختلف آلفا پاسخ ضربه را به دست می‌آوریم.

α	Plot
0.1	

0.01	$\alpha = T/RC = 0.1$ Amplitude Time (seconds) 0 20 40 60 80 100 120 0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1
1	$\alpha = T/RC = 1$ Amplitude Time (seconds) 0 5 10 15 20 0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5
2	$\alpha = T/RC = 2$ Amplitude Time (seconds) 0 5 10 15 20 0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7

3	

سوال شش – نتیجه‌گیری

استدلال شد که این سیستم به ازای تمام آلفا ها پایدار است چون قطب آن برای تمام آلفاها در داخل دایرهٔ واحد قرار می‌گیرد.

این یکی از مزیت‌های سیستم Backward است. مزیت دیگر این سیستم نیز علی بودن آن است.

سوال هفت

در این بخش به‌جای استفاده از روش دونقطه‌ای یک طرفه، از روش متقارن دونقطه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y[n+1] - y[n-1]}{2T}$$

از این تقریب استفاده کرده و معادله را بازنویسی می‌کنیم. $\alpha = \frac{T}{RC}$

$$i_{in}[n] = I_R[n] + RC\,\frac{I_R[n+1] - I_R[n-1]}{2T} \rightarrow \, i_{in}[n] = I_R[n] + \frac{RC}{2T}\left(I_R[n+1] - I_R[n-1]\right)$$

با تبدیل Z گرفتن از معدلهٔ تفاضلی بالا داریم

$$I_{in}(z) = I_R(z)\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\left(zI_R(z) - \frac{1}{z}I_R(z)\right)\right) \rightarrow H(z) = \frac{2\alpha z}{z^2 + 2\alpha z - 1}$$

دیده می‌شود که به ازای هیچ آلفایی این جواب پایدار نمی‌شود زیرا قطب‌های آن خارج دایره واحد قرار می‌گیرند.

این اتفاق جالب نیست بنابراین به دنبال تقریب بهتر می‌گردیم.

برای این تقریب از نگاشت دو خطی استفاده می‌کنیم که در امتحان میان‌ترم مورد سوال قرار گرفت.

به جای استفاده از $z = e^{sT}$ که روشی بسیار خوب برای نمونه‌برداری است، از تقریب زیر استفاده می‌کنیم. به طور کلی تمام روش‌های استفاده شده تقریبی از exp(sT) را به عنوان Z به ما ارائه می‌دادند.

$$z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}$$

یعنی داریم

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}(\frac{2z - 2}{1 + z})} = \frac{\alpha(1 + z)}{(2 + \alpha)z + (\alpha - 2)}$$

قطب این سیستم در $z = \frac{2-\alpha}{2+\alpha}$ قرار دارد. که همواره در داخل دایره واحد است پس سیستم به ازای تمام آلفا ها(ی مثبت) پایدار است. این تقریب در حوزه زمان بدین صورت عمل می‌کند.

Approximate CT signals at points between samples:

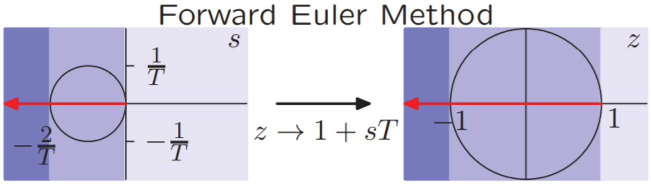
$$y_c\Big((n-\frac{1}{2})T\Big) = \frac{y_d[n] + y_d[n-1]}{2}$$

Approximate derivatives at points between samples:

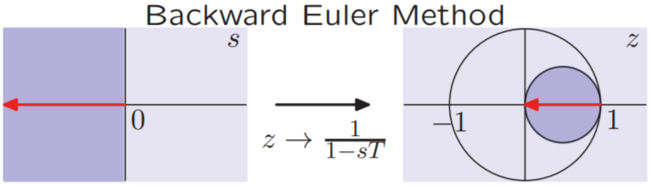
$$\dot{y}_c\Big((n-\frac{1}{2})T\Big) = \frac{y_d[n] - y_d[n-1]}{T}$$

$$y_c\Big((n-\frac{1}{2})T\Big) = \frac{y_d[n] + y_d[n-1]}{2}$$
$$\dot{y}_c\Big((n-\frac{1}{2})T\Big) = \frac{y_d[n] - y_d[n-1]}{T}$$

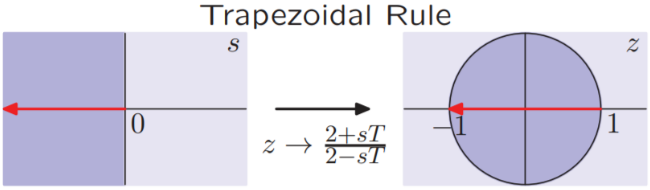
Forward Euler Method



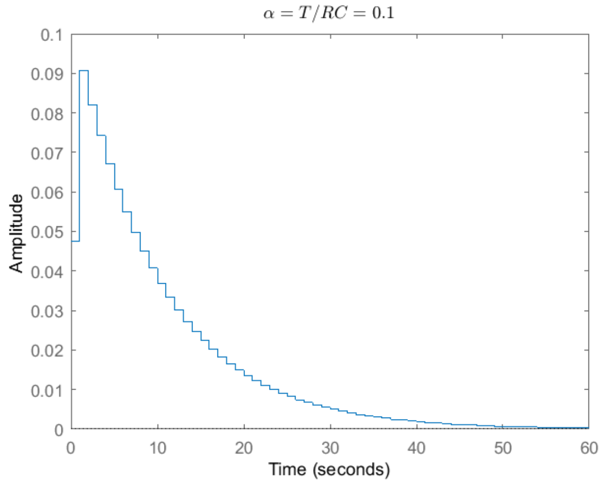
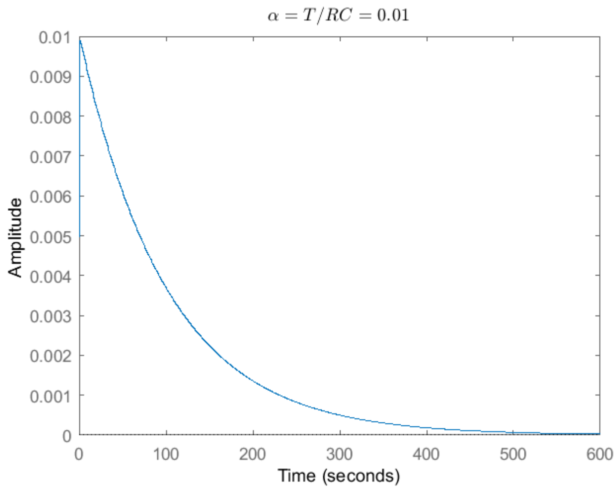
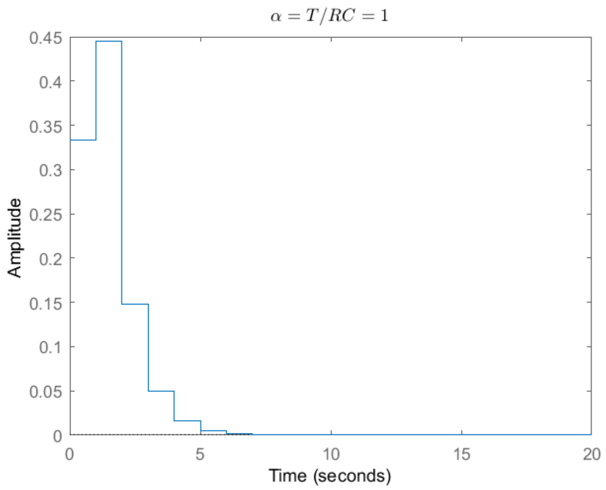
Backward Euler Method

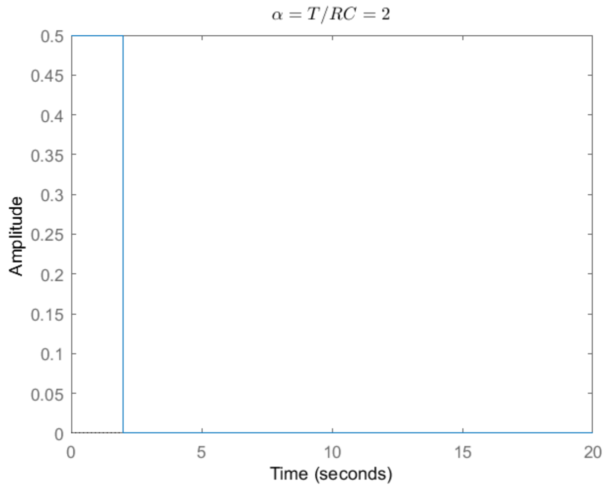
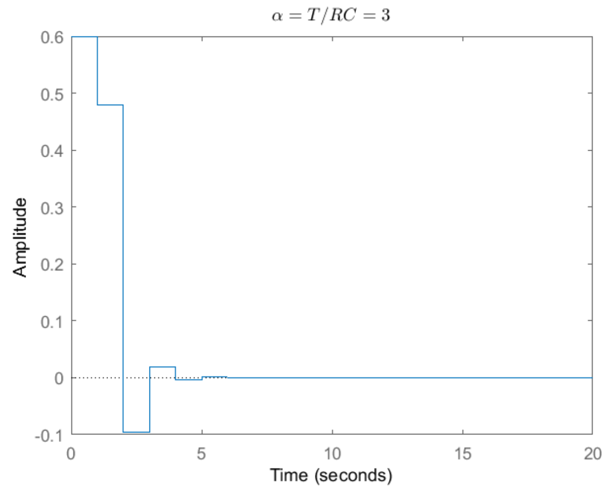


Trapezoidal Rule



در این بخش برای مقادیر مختلف آلفا پاسخ ضربه را به دست می‌آوریم.

α	Plot
0.1	
0.01	
1	

<table>
<tr><td>2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
</table>