۱ سوال

اثبات کنید که:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \tag{۱}$$

۲ پاسخ

یک دایره‌ی واحد را در نظر بگیرید که در آن دو زاویه‌ی a و b قرار دارند. مختصات نقاط کلیدی روی دایره بر اساس توابع مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند. فرض کنید P و Q نقاطی روی دایره‌ی واحد باشند به‌طوری که:

$$P = (\cos a, \sin a), \quad Q = (\cos b, \sin b). \tag{۲}$$

اکنون نقطه‌ی P را به اندازه‌ی زاویه‌ی b دوران می‌دهیم. با استفاده از ماتریس دوران داریم:

$$\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix}. \tag{۳}$$

مختصات جدید برابر است با:

$$x = \cos b \cos a - \sin b \sin a, \quad y = \sin b \cos a + \cos b \sin a. \tag{۴}$$

از آنجا که مقدار y مولفه‌ی سینوسی نقطه‌ی دوران‌یافته است، نتیجه می‌گیریم:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \tag{۵}$$

این اثبات کامل است.