

اثبات اتحاد مثلثاتی

مسئله

اثبات کنید که:

$$\left(\frac{1}{\cos a} + \tan a\right)(1 - \sin a) = \cos a. \quad (۱)$$

اثبات اول: ساده‌سازی جبری

ابتدا سمت چپ اتحاد (LHS) را گسترش می‌دهیم:

$$\left(\frac{1}{\cos a} + \frac{\sin a}{\cos a}\right)(1 - \sin a). \quad (۲)$$

عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \sin a}{\cos a}(1 - \sin a). \quad (۳)$$

حاصل ضرب دو جمله را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{(1 + \sin a)(1 - \sin a)}{\cos a}. \quad (۴)$$

با استفاده از اتحاد $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ داریم:

$$1 - \sin^2 a = \cos^2 a. \quad (۵)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos^2 a}{\cos a} = \cos a. \quad (۶)$$

که برابر با سمت راست اتحاد (RHS) است. بنابراین اتحاد اثبات شد.

اثبات دوم: تبدیل به توابع کسری

با نوشتن تابع تانژانت به صورت کسر داریم:

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \frac{1}{\cos a} + \tan a = \frac{1 + \sin a}{\cos a}. \quad (۷)$$

حال ضرب در $(1 - \sin a)$ را انجام می‌دهیم:

$$\frac{(1 + \sin a)(1 - \sin a)}{\cos a}. \quad (۸)$$

چون $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$ داریم:

$$\frac{\cos^2 a}{\cos a} = \cos a. \quad (۹)$$

پس اتحاد برقرار است.