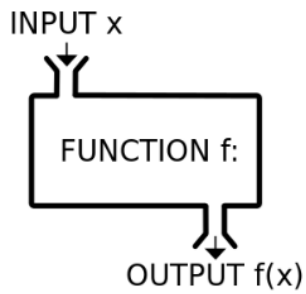
Calculus

تابع (Function) :

توابع در ریاضیات مانند یک کارخانه می باشد که مواد خام اولیه به عنوان ورودی های کارخانه یا تابع و محصول نهایی به عنوان خروجی کارخانه یا تابع می باشد.



در مثال بالا f یک تابع است که ورودی آن x می باشد و فرمول پایین به عنوان رابطه بین تابع و متغیر است که نشان دهنده تغییرات متغیر است.

$$f(x) = x^2 + 3$$

تعریف مشتق (Definition of a derivative) :

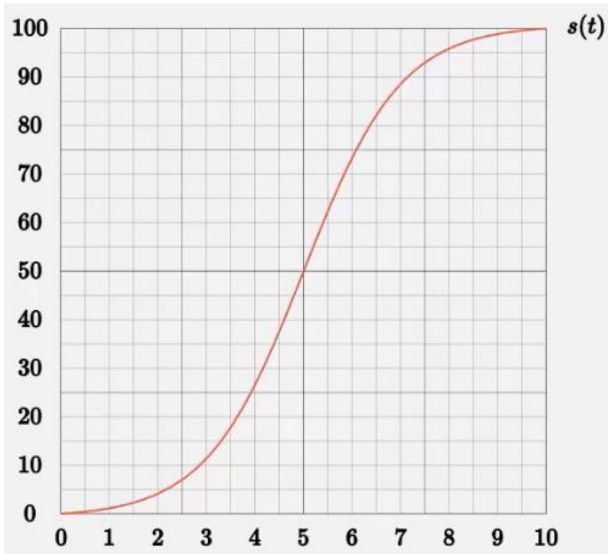
مشتق به صورت عمومی نرخ تغییر لحظه ای تعریف می شود.

اما این تعریف غلط است !!! چرا ؟؟؟

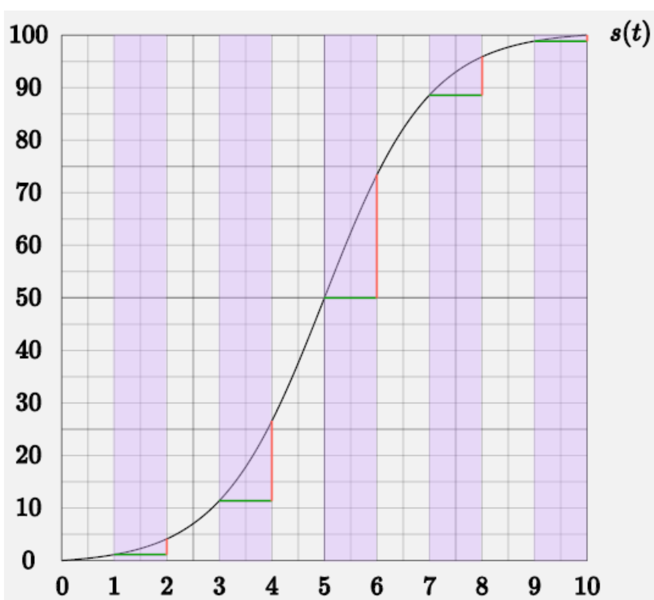
به دلیل آن که معنی این جمله یعنی در یک لحظه ، یک نقطه تغییر می کند. یعنی در یک لحظه یک نقطه دو تا مکان دارد.

- ✓ **مثال :** حرکت یک ماشین از نقطه صفر به مسافت ۱۰۰ متر را در مدت زمان ۱۰ ثانیه در نظر بگیرید.

اگر نمودار مسافت طی شده ماشین را برحسب زمان رسم کنیم :



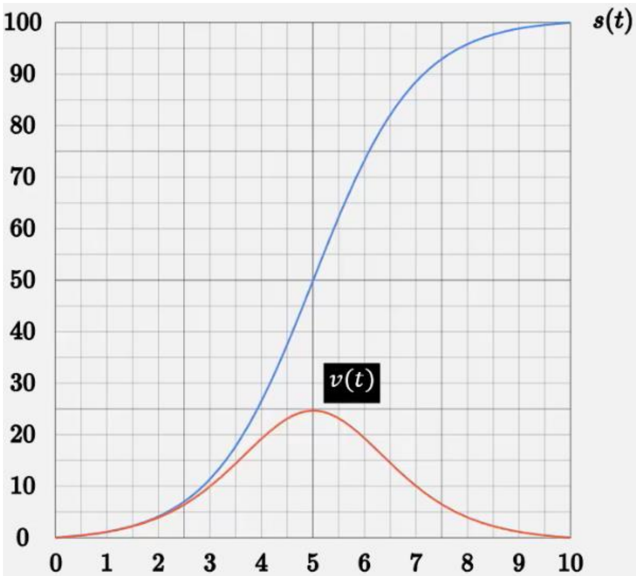
و اگر مسافت های طی شده را در بازه های یک ثانیه ای مشاهده کنیم :



ارتفاع مثلث ها نشان دهنده مسافت طی شده در بازه های یک ثانیه ای است.

ابتدا ارتفاع مثلث ها و مسافت طی شده کم بوده و رفته رفته زیاد شده است که این نشان دهنده افزایش یافتن سرعت ماشین است و دوباره کاهش پیدا می کند.

اگر نمودار سرعت را هم رسم کنیم :



نکته ! دو نمودار مسافت و سرعت برحسب زمان شدیدا به یکدیگر وابسته هستند.

جایی از نمودار مسافت که بیشترین شیب را دارد ، دارای بیشترین سرعت نیز است.

توجه ! سرعت در یک بازه رخ می دهد ، نه در یک لحظه

اگر بخواهیم سرعت لحظه ای را بدست بیاوریم ، یعنی سرعت در لحظه باشد نه در یک بازه ، ابتدا داریم :

$$V = \frac{Change\ in\ Distance}{Change\ in\ Time} = \frac{90\ - 75}{7\ - 6}$$

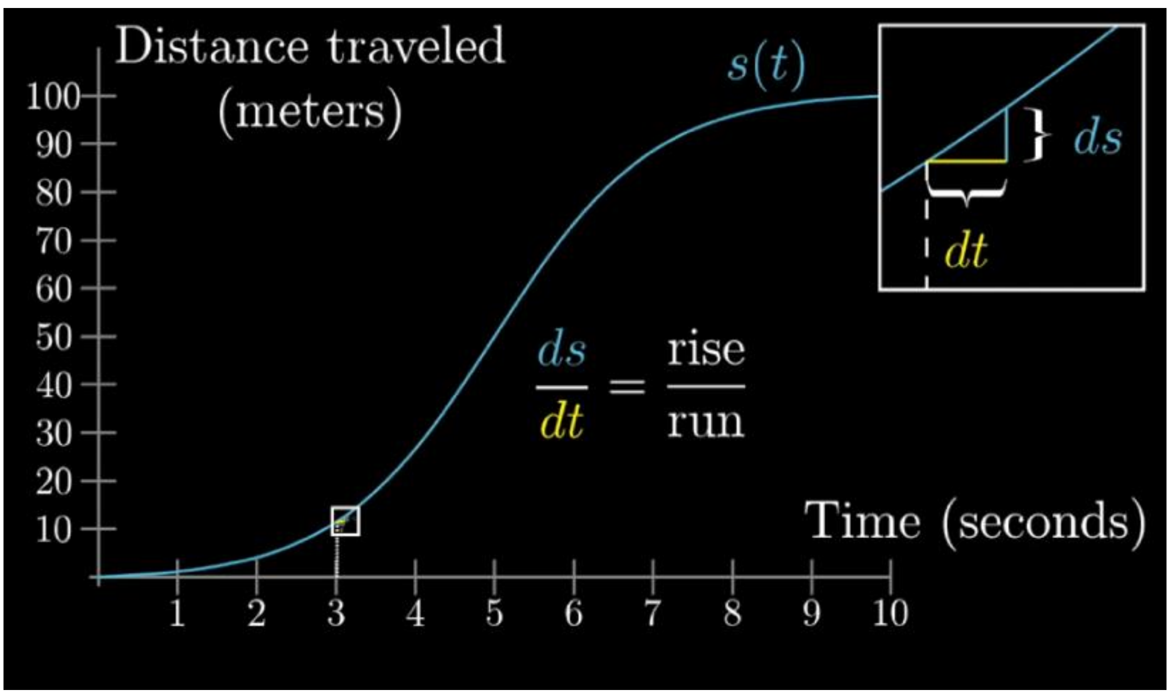
طبق فرمول بالا نسبت مسافت طی شده به بازه زمانی برابر با سرعت می شود. مجددا برای تعریف سرعت از بازه زمانی استفاده شد.

هدف این است که سرعت برحسب بازه زمانی نباشد و در یک لحظه مقدار آن را بدست بیاوریم.

- ✓ **مثال :** سرعت سنج ماشین را در نظر بگیرید ، در سرعت سنج ماشین برای بدست آوردن سرعت در هر لحظه بازه زمانی یک ثانیه ای تعریف نمی شود بلکه بازه زمانی خیلی کوچکی تعریف می شود مثلا ۰.۰۱ ثانیه ، حال اگر سرعت را بر اساس نسبت مسافت طی شده برحسب بازه زمانی ۰.۰۱ ثانیه ای بدست بیاوریم :

$$V = \frac{Change\ in\ Distance}{Change\ in\ Time} = \frac{20.21\ - 20}{3.01\ - 3}$$

نکته ! اگر بازه زمانی را خیلی کم کنیم نتیجه بسیار بهتر می شود ولی کماکان در بازه زمانی است. اگر تغییرات کوچک مکانی را ds در نظر بگیریم و تغییرات کوچک زمانی را dt آنگاه :



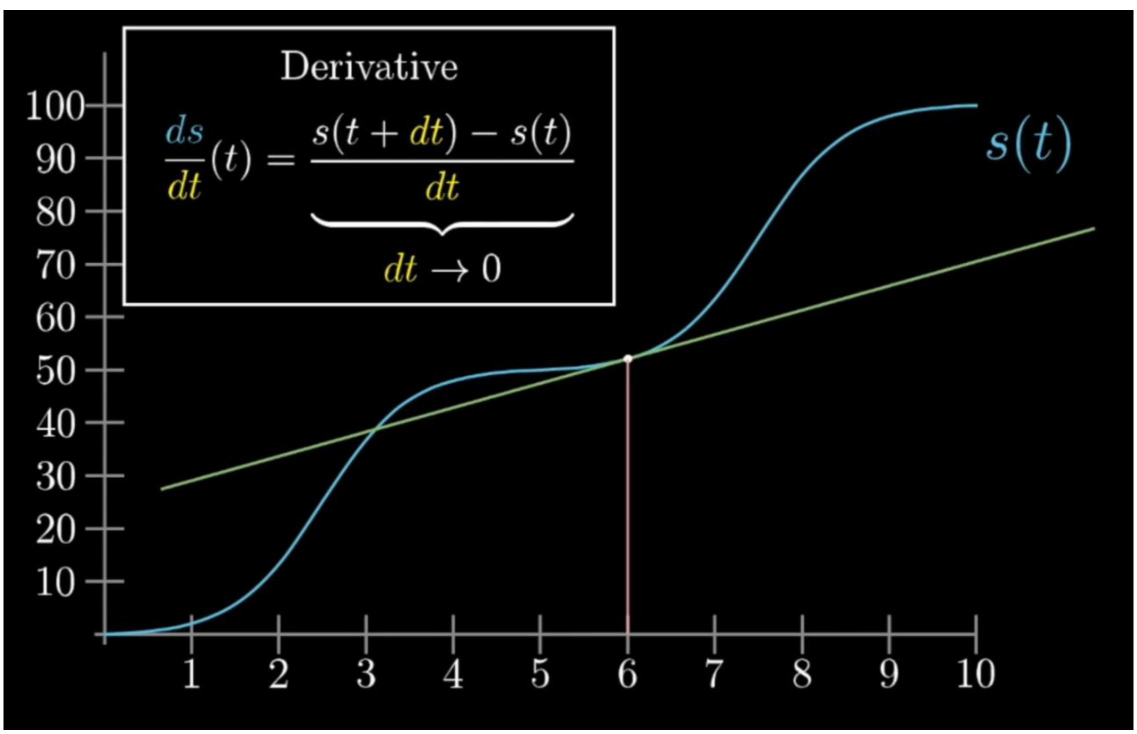
اگر ورودی ما زمان باشد ، می توان به عنوان خروجی ، سرعت یا نسبت ds/st را به صورت زیر بدست آورد :

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{s(t+dt) - s(t)}{dt}$$

مفهوم مشتق تقریبا همین است اما در ریاضیات dt یک عدد بخصوص نیست و باید به سمت صفر میل کند.

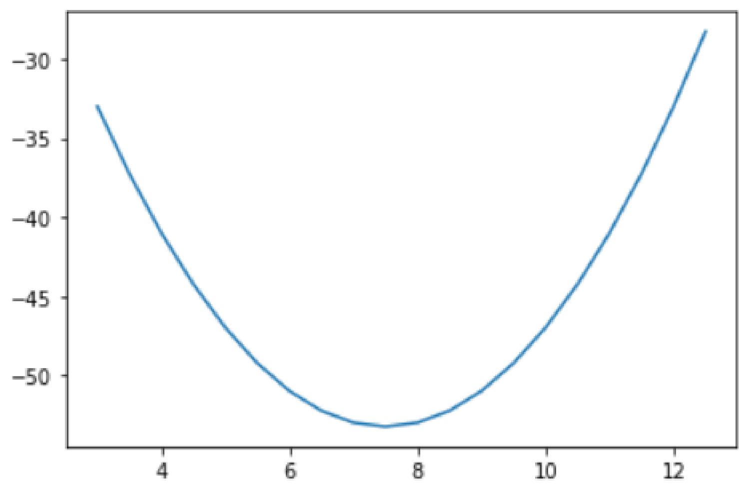
اگر دو نقطه را روی نمودار در نظر بگیریم و یک خط از آن عبور دهیم ، یک خط قاطع خواهیم داشت که شیب این خط برابر با ds/dt یا همان فرمول مشتق خواهد بود. حال اگر رفته رفته مقدار dt را به سمت صفر میل بدهیم شیب خط برابر می شود با شیب خط مماس بر نمودار در لحظه t.

تعریف درست مشتق این است که به شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه مشخص مشتق می گویند.



- ✓ **مثال :** یکی از کاربردهای مشتق در الگوریتم های بهینه سازی است. تصور کنید می خواهید مینیمم تابع زیر را بدست بیاورید.

$$f(x) = x^2 - 15x + 3$$



نکته ! مینیمم یک تابع جایی رخ می دهد که شیب خط مماس آن صفر است.

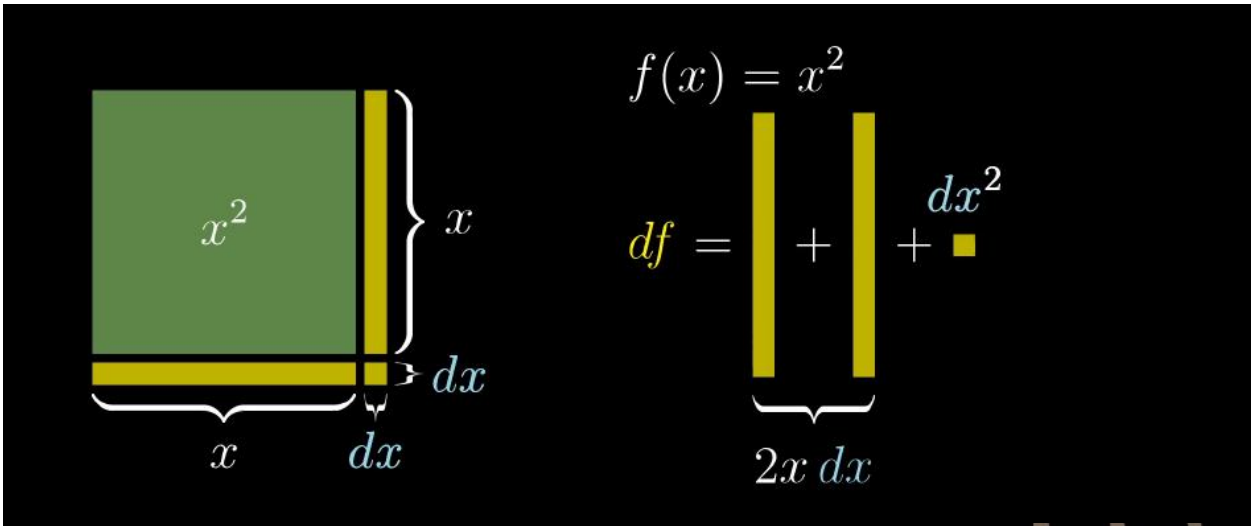
- ✓ **مثال :** مشتق تابع t^3 را در لحظه ۴ محاسبه کنید.

برای حل این سوال از تعریف مشتق استفاده می کنیم.

$$\frac{ds}{dt}(4) = \frac{s(4+dt) - s(4)}{dt} = \frac{4^3 + 3*4^2dt + 3*4*dt^2 + \ dt^3 - \ 4^3}{dt}$$
$$= 16*3 + 12*dt + \ dt^2 = 48$$

- ✓ **مثال :** مشتق تابع x^2 را محاسبه کنید.

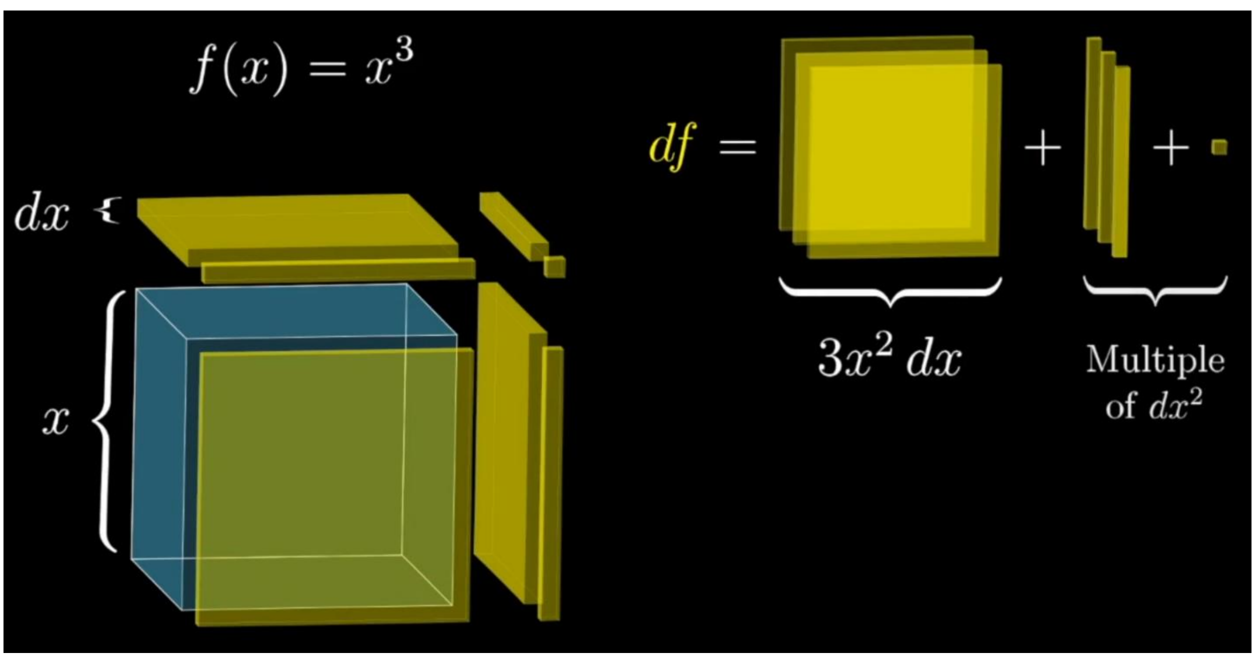
برای حل این سوال یک مربع به ضلع x را در نظر میگیریم چرا که مساحت مربع برابر با تابع x^2 خواهد شد. حال اضلاع را به اندازه dx بیشتر می کنیم. قصد داریم تغییرات مساحت را مشاهده کنیم. نسبت تغییرات مساحت به تغییرات ضلع دقیقا همان مفهوم مشتق را پیاده سازی می کنند.



نکته ! df تغییرات مساحت مربع است و dx به سمت صفر میل می کند.

- ✓ **تمرین :** مشتق تابع x^3 را مانند مثال قبل محاسبه کنید.

پاسخ : برای حل این سوال مانند سوال قبل باید پیش رفت با این تفاوت که باید یک مکعب به ضلع x در نظر گرفت.



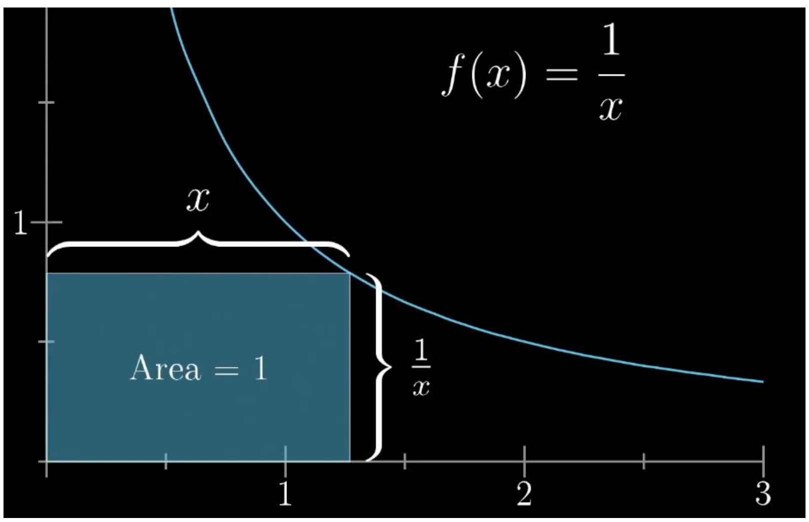
❖ **Power Rule**:

این قاعده بیان می کند که مشتق توابع توانی بر اساس فرمول زیر محاسبه می شود :

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

✓ **مثال :** مشتق تابع 1/x را محاسبه کنید.

برای حل این سوال نیز به صورت هندسی پیش خواهیم رفت. یک مستطیل به طول x و عرض 1/x در نظر میگیریم. مساحت مستطیل برابر ۱ خواهد شد. نمودار این تابع به شکل زیر است :

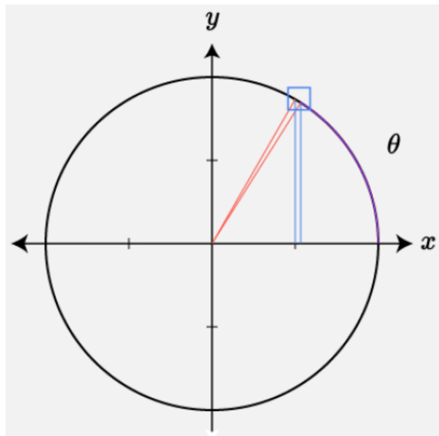


برای محاسبه مشتق اگر طول مستطیل را به اندازه dx افزایش دهیم ، برای آنکه مساحت مستطیل کماکان برابر ۱ باشد قطعا باید عرض مستطیل مقداری منفی داشته باشد. حال با توجه به مساحت مستطیل که برابر ۱ است مشتق را بدست میاوریم.

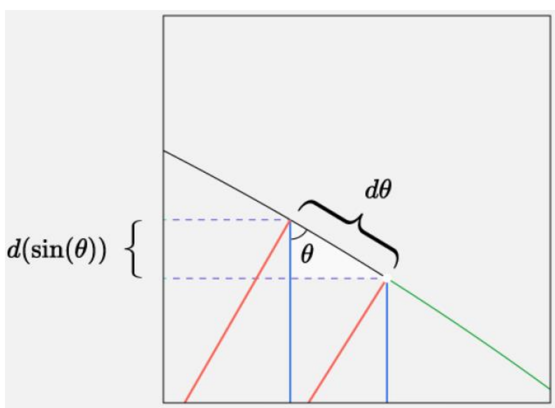
$$(x + dx)\left({}^{1}/_{x} + d\left({}^{1}/_{x}\right)\right) = 1 \ \rightarrow \ xd\left({}^{1}/_{x}\right) + {}^{1}/_{x}\, d(x) = 0$$
$$\rightarrow \ d\left({}^{1}/_{x}\right) = -\ {}^{1}/_{x^2}\ d(x)$$

مشتق مثلثاتی :

اگر مقدار زاویه θ را به اندازه $d\theta$ افزایش بدهیم ، تغییرات $sin\theta$ به تغییرات $d\theta$ برابر با مشتق تابع سینوس خواهد بود.



برای بدست آوردن مقدار تغییرات داریم :



حال اگر مقدار $cos\theta$ را بدست بیاوریم داریم :

$$cos\theta = \frac{d(sin\theta)}{d\theta}$$

که دقیقا تعریف بالا مشتق $sin\theta$ را به ما می دهد.

نکته ! مشتق تابع $cos\theta$ برابر است با $-sin\theta$.

مشتق توابع ترکیبی :

❖ قاعده جمع :

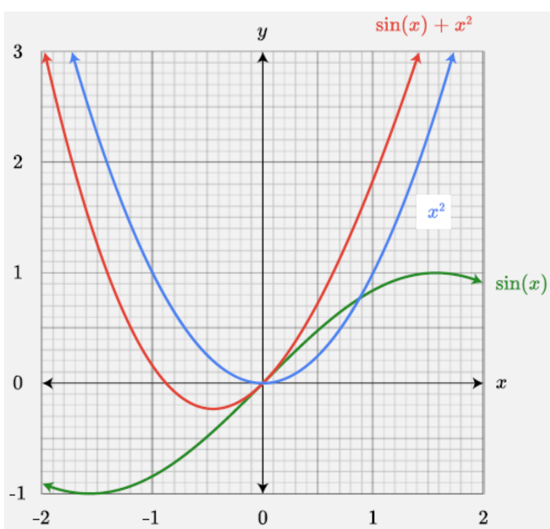
قاعده جمع بیان می کند ، مشتق جمع دو تابع برابر است با جمع مشتق هر تابع یعنی :

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)+h(x)\big)=\frac{dg}{dx}+\frac{dh}{dx}$$

✓ **مثال :** مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(x)+\ x^2$$

برای حل این سوال ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم.



مقدار هر y در این تابع برابر با جمع y های دو تابع x^2 و sin(x) است.

حال اگر از تعریف مشتق برای محاسبه آن استفاده کنیم ، باید مقدار x را به اندازه dx افزایش بدهیم که در این صورت مقدار y برای دو تابع را باید محاسبه کنیم

در نتیجه داریم :

$$f(x) = \sin(x) + x^2 \rightarrow df = d(\sin(x)) + d(x^2) \rightarrow df = \cos(x)\,dx + 2xdx$$

❖ **قاعده ضرب (Product Rule) :**

قاعده ضرب بیان می کند ، مشتق حاصل ضرب دو تابع برابر است با جمع مشتق تابع اول در تابع دوم و مشتق تابع دوم در تابع اول یعنی :

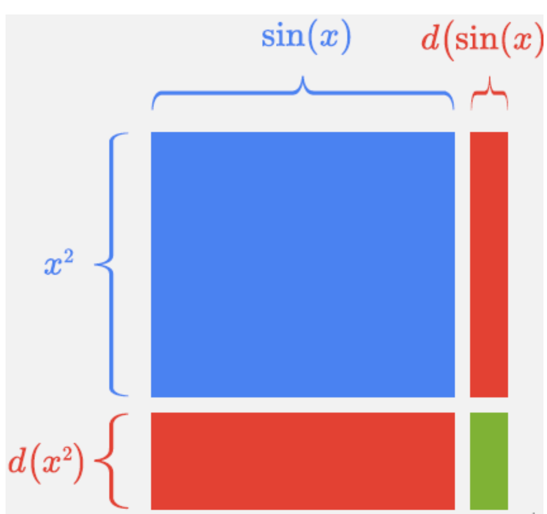
$$f(x) = h(x).g(x) \rightarrow \frac{df}{dx} = g(x).\frac{dh}{dx} + h(x).\frac{dg}{dx}$$

✓ **مثال :** مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \sin(x) * x^2$$

برای حل این سوال یک مستطیل به اضلاع x^2 و sin(x) در نظر میگیریم.

مساحت مستطیل برابر با تابع ما خواهد شد. طول و عرض مستطیل را به اندازه dx افزایش می دهیم. بنابراین داریم :



$$\frac{df}{dx} = \sin(x) * 2x + \ x^2 * \cos\,(x)$$

نکته ! اگر تابع $f(x) = C.g(x)$ باشد ، مشتق آن برابر است با $df = C.d(g(x))$.

نکته ! با استفاده از روش های بالا اثبات می شود :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \ \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- **قاعده ضرب زنجیره ای :**

قاعده ضرب زنجیره ای بیان می کند :

$$\frac{d}{dx}g\big(h(x)\big) = \ \frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}$$

- **مثال :** مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \cos\,(x^3)$$

برای حل این سوال اگر مقدار x را به اندازه dx افزایش دهیم بنابراین ورودی تابع cos به اندازه $d(x^3)$ افزایش خواهد یافت و در نهایت تابع *f(x)* به اندازه $d(\cos(x^3))$ افزایش پیدا خواهد کرد. اگر x^3 را h در نظر بگیریم در نتیجه *f(x)* برابر خواهد شد با cos(h).

d(cos(h)) برابر است با -sin(h)dh . یعنی داریم :

$$d(\cos(x^3)) = -\sin(x^3)\,d(x^3) = \ -\sin(x^3) * 3x^2dx$$

حد (**Limit**) :

از مشتق به یاد داریم که اگر در نمودار مقدار x را به اندازه dx افزایش دهیم مقدار *f(x)* چه تغییری می کند. به خاطر داریم تعریف مشتق برابر است با :

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

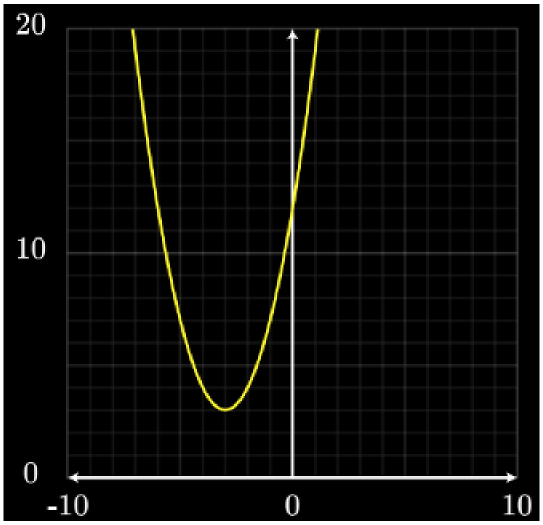
زمانی که dx به سمت صفر میل می کند. تعریف رسمی مشتق دقیقا همین است که در تعریف آن از حد استفاده شده است.

داریم :

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- ✓ **مثال :** تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \frac{(2+x)^3 - 2^3}{x}$$



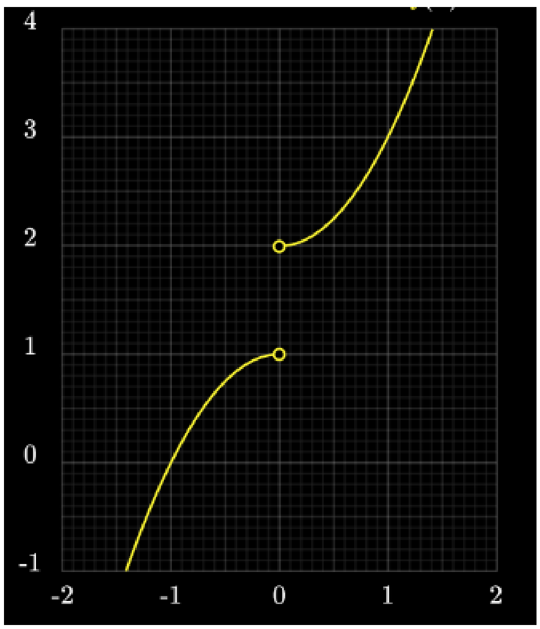
در نقطه صفر تابع تعریف نشده خواهد بود چرا که برابر با *0/0* خواهد شد.

مقدار تابع در نقطه صفر برابر با ۱۲ است. هر چقدر x را بیشتر به سمت صفر میل دهیم مقدار *f(x)* بیشتر به سمت ۱۲ میل خواهد کرد.

این همان تعریف حد است یعنی :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - \ 2^3}{\Delta x} = 12$$

✓ **مثال :** نمودار زیر را در نظر بگیرید.



این تابع در نقطه x برابر با صفر تعریف نشده است زیرا ناپیوستگی دارد. بر خلاف مثال قبل حد تابع نیز در نقطه صفر تعریف نشده است. در اینجا مفهومی تحت عنوان حد چپ و راست تعریف می شود. یعنی از سمت منفی اگر به نقطه صفر نزدیک شویم حد آن برابر ۱ خواهد شد و به آن حد چپ می گویند ، اگر از سمت مثبت به صفر نزدیک شویم حد آن برابر ۲ خواهد شد و به آن حد راست می گویند.

یعنی داریم :

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} f(x) = 2$$

نکته ! با توجه به مثال قبل تعریف می شود اگر حد چپ و راست یک تابع برابر نباشد و یا تابع دچار ناپیوستگی باشد ، در آن نقطه حد ندارد.

نکته ! صفر مطلق عدد صفر است ولی صفر حدی یعنی عددی بسیار نزدیک به صفر یا به عبارت دیگر عددی که به اندازه یک اپسیلون از صفر بزرگتر یا کوچکتر است.

انتگرال (Integral) :

- **مثال :** می خواهیم مسافت طی شده توسط یک ماشین در بازه زمانی ۱۰ ثانیه ای را محاسبه کنیم.

برای حل این سوال ابتدا فرض کنیم سرعت ماشین به صورت ثابت برابر ۱۰ متر بر ثانیه است. با توجه به این موضوع مسافت طی شده توسط ماشین برابر ۱۰۰ خواهد شد چرا که در هر ثانیه ۱۰ متر مسافت طی خواهد کرد و مدت حرکت نیز ۱۰ ثانیه است بنابراین سرعت ضرب در زمان برابر مسافت طی شده خواهد بود. یعنی اگر نمودار سرعت برحسب زمان را رسم کنیم ، مساحت زیر نمودار آن برابر با مسافت طی شده خواهد بود.

اما اگر سرعت به صورت ثابت نباشد !!!

سرعت تابعی از زمان خواهد بود. اگر سرعت را در بازه های یک ثانیه ای زمان به صورت ثابت در نظر بگیریم سپس مساحت های مستطیل های هر بازه زمانی را محاسبه کنیم و در نهایت مساحت ها را با هم جمع کنیم نتیجه برابر با مسافت طی شده خواهد بود.

نکته ! هر چه بازه های زمانی به سمت صفر میل کنند ، نتیجه از دقت بالاتری برخوردار است.

تعریف انتگرال بدین شکل است که انتگرال یک تابع برابر است با مساحت زیر نمودار آن تابع. به عبارت دیگر جمع تمامی مستطیل های مربوط به هر بازه زمانی برابر با مساحت زیر نمودار آن تابع خواهد شد.

$$s(t) = \int_0^{10} v(t)\, dt$$

نکته ! به صورت کلی مشتق انتگرال یک تابع برابر خود آن تابع می باشد.

با توجه به نکته بالا مشتق و انتگرال یکدیگر را خنثی می کنند. حال با توجه به مثال برای بدست آوردن تابع مربوط به مسافت طی شده یا به عبارت دیگر برای بدست آوردن آن که مشتق چه تابعی برابر با تابع سرعت شده است.

فرض کنید تابع سرعت برابر است با $v(t) = (10 - t)t$.

بنابراین :

$$(10 - t)t = 10t - t^2$$

حال با استفاده از فرمول مشتق های توانی باید محاسبه کنیم که مشتق چه توابعی برابر با تابع بالا خواهد شد پس :

$$g'(t) = 10t \rightarrow g(t) = 5t^2$$

$$h'(t) = -t^2 \rightarrow h(t) = -\frac{1}{3}t^3$$

و تابع برابر است با :

$$s(t) = g(t) + h(t) = 5t^2 - \frac{1}{3}t^3 + C$$

نکته ! بدلیل آن که مشتق عدد ثابت برابر با صفر است ممکن است در تابع عدد ثابتی وجود داشته باشد که از آن مشتق گرفته شده است و در هنگام انتگرال گیری این عدد ثابت لحاظ نشود بنابراین برای آن عدد ثابت معمولا یک C در نظر می گیرند.

برای محاسبه مسافت طی شده حال باید بین زمان های ۰ تا ۱۰ثانیه تغییرات تابع s(t) را حساب کرد.

بنابراین :

$$\int_0^{10} (10 - t)t\,dt = \left(5 * 10^2 - \frac{1}{3}10^3 + C\right) - \left(5 * 0^2 - \frac{1}{3}0^3 + C\right)$$

حال اگر بین بازه ۱ تا ۹ مسافت طی شده را محاسبه کنیم ، داریم :

$$\int_1^{9} (10 - t)t\,dt = \left(5 * 9^2 - \frac{1}{3}9^3 + C\right) - \left(5 * 1^2 - \frac{1}{3}1^3 + C\right)$$

بنابراین به صورت کلی داریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

نکته ! اگر جواب انتگرال منفی شود یعنی مساحت زیر نمودار غالبا در قسمت منفی است و برای مثال قبل مانند این است که ماشین دنده عقب برود.

✓ **مثال :** انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx$$

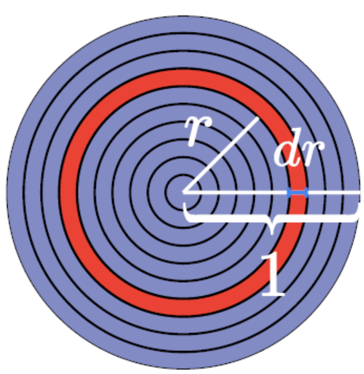
داریم :

$$-\cos(2\pi) - (-\cos(\pi)) = -1 - 1 - 2$$

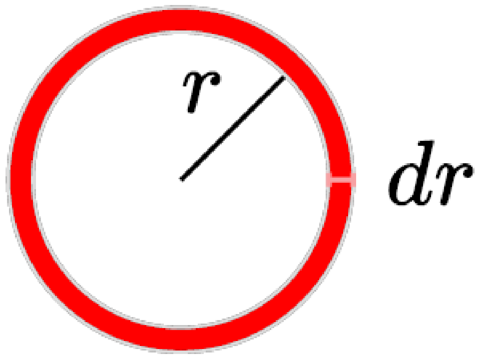
کاربردی از مشتق و انتگرال :

✓ **مثال :** با توجه به فرمول محیط دایره که برابر است با $2\pi r$ ، مساحت دایره را بدست بیاورید.

برای حل این سوال ابتدا دایره را به حلقه های کوچک تقسیم می کنیم. سپس مساحت حلقه های کوچک را محاسبه می کنیم یعنی :



حال اگر بخواهیم مساحت حلقه قرمز رنگ را که فاصله آن از مرکز r است و ضخامت آن dr می باشد را بدست بیاوریم ، داریم :

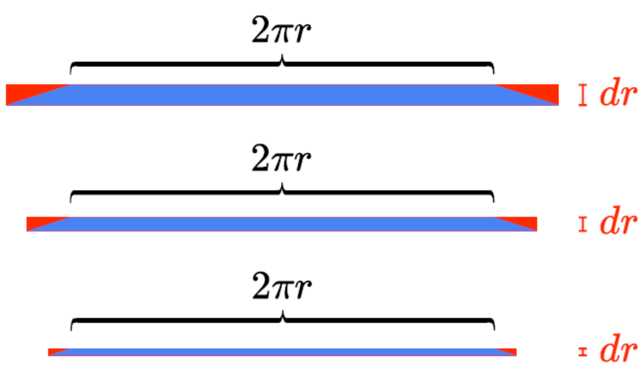


اگر حلقه را باز کنیم ، تبدیل به یک مستطیل خواهد شد که عرض آن dr است و طول آن برابر با محیط حلقه می باشد.

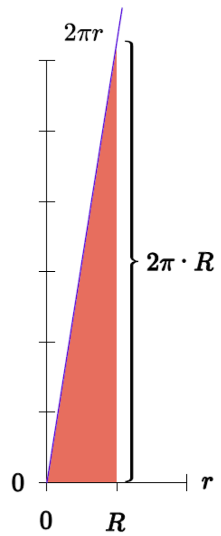
مساحت این مستطیل برابر است با :

$$Area = 2\pi r dr$$

نکته ! هر چه dr کم تر در نظر گرفته شود ، مقدار مساحت خطای کمتر خواهد داشت.



حال اگر تمامی مستطیل های ساخته شده را کنار یکدیگر قرار دهیم ، داریم :

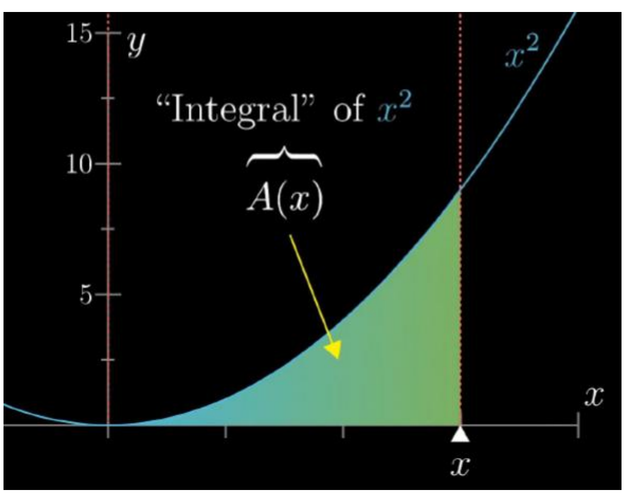


قاعده مثلث برابر است با جمع dr ها و ارتفاع آن نیز برابر است با محیط بیرونی ترین حلقه.

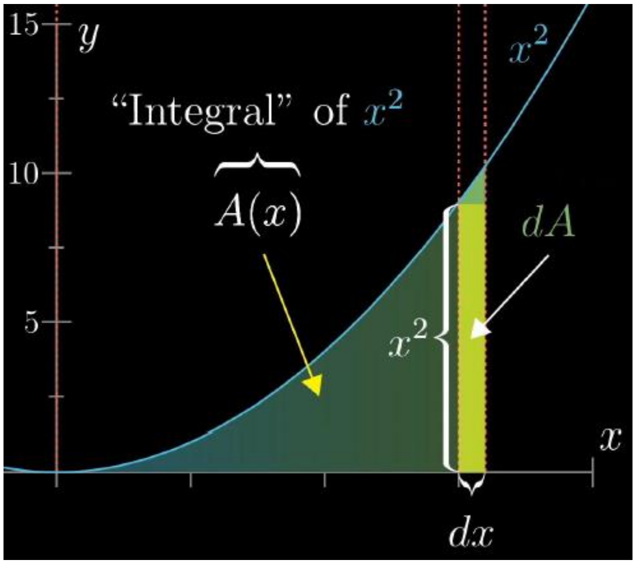
اگر مساحت مثلث را بدست بیاوریم ، داریم :

$$Area = \frac{1}{2}R * 2\pi R = \pi R^2$$

✓ **مثال :** مساحت زیر نمودار $y = x^2$ را در بازه صفر تا x بدست آورید.



برای حل این سوال اگر مساحت زیر نمودار را تبدیل به تعدادی مستطیل کنیم که عرض مستطیل ها برابر dx است و ارتفاع آن ها برابر x^2.



مساحت مستطیل ها برابر است با :

$$dA = x^2 dx$$

از دو طرف رابطه انتگرال می گیریم :

$$\int dA = \int x^2\, dx \rightarrow A = \frac{1}{3}x^3$$

مساحت زیر نمودار برحسب x بدست می آید که این مساحت برابر است با جمع تمامی مستطیل ها.

همچنین اگر بازه نمودار برای محاسبه مساحت را به اندازه dx افزایش دهیم مقدار مساحت زیر نمودار به اندازه dA افزایش پیدا خواهد کرد یعنی :

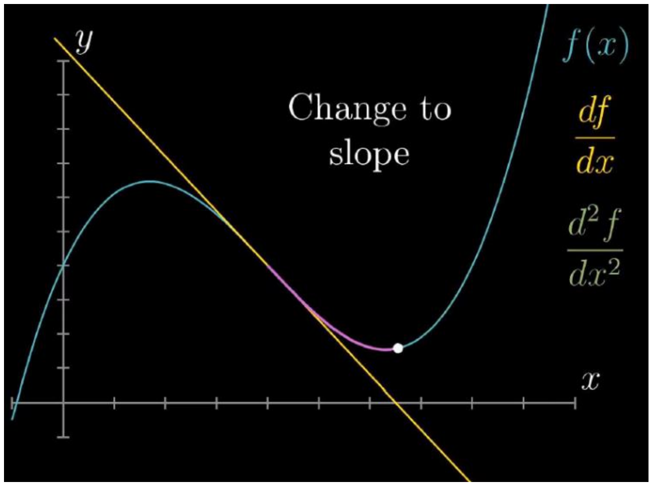
$$\frac{dA}{dx} = x^2$$

که این همان تعریف مشتق است.

مشتق مراتب بالا :

به صورت کلی مشتق روند تغییرات یک تابع را نشان می دهد. مشتق مرتبه دوم (یعنی از حاصل مشتق یک تابع مجدد مشتق بگیریم) روند تغییرات شیب خط مماس یا همان مشتق اول را نشان می دهد.

شکل زیر روند تغییرات مشتق مرتبه اول و دوم را نشان می دهد.



روند تغییرات تابع که برابر است با مشتق مرتبه اول بدین شکل است که ابتدا شیب مثبت است سپس صفر می شود و بعد از آن منفی می شود.

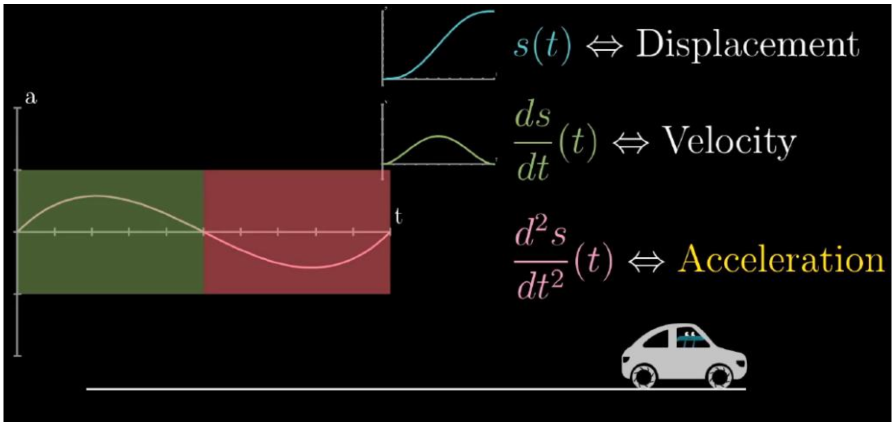
اما روند تغییرات شیب خط مماس که برابر است با مشتق مرتبه دوم بدین شکل است که چون شیب خط مماس به مرور صفر خواهد شد پس روند تغییرات آن منفی است سپس صفر می شود و بعد از آن بدلیل آنکه از صفر شروع به شیب گرفتن می کند پس روند تغییرات آن مثبت است.

معمولا مشتق مرتبه دوم را به شکل زیر می نویسند :

$$\frac{d(\frac{df}{dx})}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

- ✓ **مثال :** مثال خودرو را به خاطر بیاورید. می خواهیم روند تغییرات سرعت این خودرو را بدست بیاوریم.

  برای حل این سوال کافی است از تابع مربوط به تغییرات مسافت طی شده برحسب زمان مشتق مرتبه دوم بگیریم. مشتق مرتبه اول سرعت را به ما می دهد و مشتق مرتبه دوم تغییرات سرعت را می دهد که به آن شتاب می گویند.



نکته ! مشتق مرتبه سوم تابع مربوط به مسافت طی شده برحسب زمان ، تغییرات شتاب را نشان می دهد.

نکته ! کاربرد مشتق مراتب بالاتر در بدست آوردن ماکزیمم ها و مینیمم های یک تابع است که در مباحث بهینه سازی و شبکه های عصبی بسیار اهمیت دارند.

بسط تیلور :

از مشتقات مراتب بالا در بسط تیلور استفاده می شود. بسط تیلور برای تبدیل توابع پیچیده تر مانند توابع مثلثاتی که مشتق و انتگرال آن ها پیچیده تر می باشد به توابع چند جمله ای ساده استفاده می شود. یعنی از بسط تیلور برای معادل سازی یک تابع پیچیده مانند cos(x) به یک تابع ساده چند جمله ای مانند $1 - \frac{1}{2}x^2$ استفاده می شود.

- ✓ **مثال :** معادل چند جمله ای تابع cos(x) را پیدا کنید.

برای پیدا کردن یا تخمین زدن تابع چند جمله ای معادل تابع cos(x) ، ابتدا فرض می کنیم تابع معادل ، تابعی درجه دو است.

فرض می کنیم تابع چند جمله ای معادل به شکل زیر است :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

حالا باید ضرایب این تابع چند جمله ای را بدست بیاوریم. برای بدست آوردن ضرایب از ابتدا باید یک نقطه از تابع را در نظر بگیریم که معمولا صفر در نظر می گیرند و سپس

مقدار تابع اصلی cos(x) و تابع چند جمله ای را در x برابر با صفر بدست میاوریم و برابر هم قرار می دهیم :

$$\cos(0) = 1\,, P(0) = a_0 \rightarrow a_0 = 1$$

برای بدست آوردن ضریب بعدی از هر دو تابع مشتق می گیریم :

$$\frac{d(\cos)}{dx}(0) = -\sin(0) = 0\,, \frac{dP}{dx}(0) = a_1 + a_2 * 0 = a_1 \rightarrow a_1 = 0$$

برای بدست آوردن ضریب سوم از هر دو تابع دوبار مشتق می گیریم :

$$\frac{d^2(\cos)}{dx^2}(0) = -\cos(0) = -1\,, \frac{d^2P}{dx^2}(0) = 2a_2 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

با توجه به ضرایب بدست آمده تابع چند جمله ای به شکل زیر ساخته می شود :

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2)$$

اگر هر دو تابع اصلی و چند جمله ای را در نقطه به خصوصی مقایسه کنیم خواهیم دید که مقادیری یکسان با خطای بسیار کم دارند.

در واقع یک چند جمله ای با درجه دلخواه را به عنوان تابع معادل داریم و با توجه به مقدار تابع اصلی و مشتقات آن در نقطه صفر ضرایب چند جمله ای را بدست میاوریم.

نکته ! برای بالا بردن دقت تخمین تابع چند جمله ای می توان درجه چند جمله ای را افزایش داد.

نکته ! فرم کلی ضریب جمله n ام ، بدین شکل $\frac{1}{n!}$ است.

نکته ! تخمین تابع چند جمله ای حول نقطه ای به جز صفر مانند نقطه *c* به شکل زیر است :

$$P(x) = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2\,(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

فرم کلی بسط تیلور حول نقطه *c* به شکل زیر است :

$$P(x) = f(c) + \frac{df}{dx}(c)\frac{(x-c)^1}{1!} + \frac{d^2f}{dx^2}(c)\frac{(x-c)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}(c)\,\frac{(x-c)^3}{3!} + \cdots$$

چند نمونه از بسط های تیلور معروف عبارتند از :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

مشتق جزئی :

تمامی توابع قبلی بر اساس یک متغیر ساخته می شدند یعنی همگی بر اساس x نوشته شده بودند. اگر تابعی داشته باشیم که بر اساس چند متغیر مستقل یعنی متغیرهایی که هیچ ارتباطی با متغیر دیگر ندارند ، نوشته شده باشد و بخواهیم مشتق آن تابع را بدست بیاوریم از مشتق جزئی استفاده می کنیم.

✓ **مثال :** مشتق جزئی تابع زیر را بدست بیاورید.

$$f(x_1, x_2, x_3) = {x_2}^3 + x_1 * {x_2}^2 + \sin(x_1 * x_3)$$

برای حل این سوال باید یک بار از تابع برحسب x_1 ، بار دیگر از تابع برحسب x_2 و در نهایت از تابع برحسب x_3 مشتق بگیریم.

نکته ! زمانی که از تابع برحسب یکی از متغیرهای مستقل مشتق گرفته می شود مابقی متغیرها باید مانند یک عدد ثابت در نظر گرفته شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = {x_2}^2 + x_3 \cos(x_1 * x_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3{x_2}^2 + 2x_1 * x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 \cos(x_1 * x_3)$$

✓ **مثال :** مکعبی به اضلاع x, y, z داریم. تغییر یک واحدی هر کدام از اضلاع چه تاثیری بر حجم مکعب دارد.

اضلاع مکعب به ترتیب برابر است با 2, 3, 4 .

برای حل این سوال باید از حجم مکعب مشتق جزئی نسبت به اضلاع آن بگیریم.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y * z = 3 * 4 = 12$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x * z = 2 * 4 = 8$$

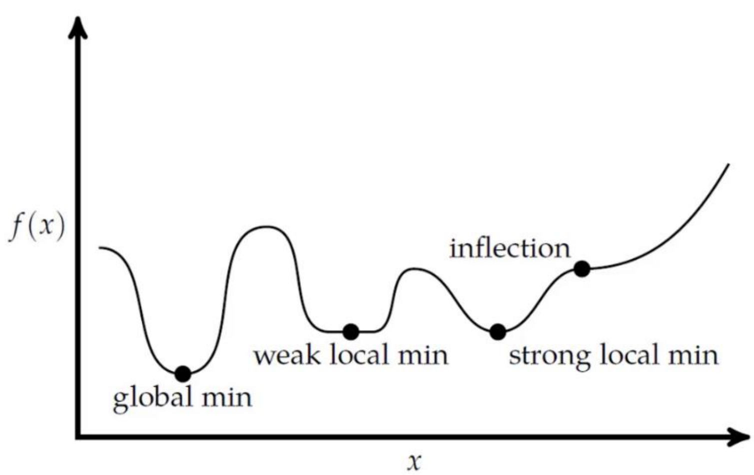
$$\frac{\partial v}{\partial z} = x * y = 2 * 3 = 6$$

مقدمه ای بر بهینه سازی :

در بهینه سازی هدف پیدا کردن مینیمم یا ماکزیمم یک تابع است. یعنی به دنبال x هایی هستیم که تابع به ازای آن مقدار مینیمم یا ماکزیمم پیدا خواهد کرد.

نکته ! در بعضی اوقات ممکن است برای پیدا کردن مینیمم یا ماکزیمم قیدی وجود داشته باشد یعنی برای مثال مینیمم x نمی تواند کمتر از صفر باشد یا حتما باید بزرگتر از صفر باشد که به آن بهینه سازی مقید (Constrained Optimization) می گویند.

در یادگیری ماشین به دلیل آن که قیدی برای پیدا کردن مینیمم وجود ندارد ، بهینه سازی نامقید استفاده می شود.



- **Global Min :**

اگر x در کل تابع کمترین مقدار باشد به آن مینیمم کلی یا Global Min می گویند.

- **Local Min :**

اگر x نسبت به مقادیر اطراف خود کمترین مقدار را داشته باشد به آن مینیمم محلی یا Local Min می گویند.

- **Inflection :**

به نقطه ای که در آن جهت تعقر نمودار تغییر می کند نقطه عطف یا Inflection می گویند.