Q5

دستگاه معادلات پارامتری زیر را با روش حذف گوسی حل کنید. (متغیرهای مسئله x و y و z هستند که باید آنها را برحسب c و b و a بدست بیاورید.

$$(a+1)x-(y+z)a+bz=a-c$$

$$x-(x+z)c+cy=b$$

$$cx+c^2y-bc+z=1$$

ابتدا معادلات را بفرمی می‌نویسیم که ضرایب x و y و z در هر معادله مشخص شود:

$$(a+1)x-ay+(b-a)z=a-c$$

$$(1-c)x+cy-cz=b$$

$$cx+c^2y+z=1+bc$$

Subject: ....

Year: .... Month: .... Day: .... ( )

گام اول: دستگاه معادلات خطی را به فرم $A\vec{x}=\vec{b}$ می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} a+1 & -a & b-a \\ 1-c & c & -z \\ c & c^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{bmatrix} a-c \\ b \\ 1+bc \end{bmatrix}$$

گام دوم: تشکیل ماتریس کمکی به فرم $[A \,;\, \vec{b}]$ می‌باشد که $\vec{b}$ در ستون آخر قرار دارد. ماتریس کمکی:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & -a & b-a & a-c \\ 1-c & c & -c & b \\ c & c^2 & 1 & 1+bc \end{array}\right]$$

گام سوم: در روش حذف گوسی، هدف این است که یک ماتریس بالامثلثی بسازیم.

پس ابتداء مقادیر آرایه‌های $(2,1)$ و $(3,1)$ را براساس آرایه $(1,1)$

صفر می‌کنیم.

سطر دوم جدید: $\left(\frac{c-1}{a+1}\right) \times$ سطر اول + سطر دوم

ماتریس حاصل در صفحه‌ی بعد:

Subject: .... Year: ...... Month: ...... Day: ...... ( )

سطر دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & -a & b-a & a-c \\ 0 & \dfrac{a+c}{a+1} & \dfrac{(b-a)(c-1)}{a+1}-c & \dfrac{(a-c)(c-1)}{a+1}-c \\ c & c^2 & 1 & 1+bc \end{array}\right]$$

سطر سوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{سطر سوم جدید} = \left(\frac{-c}{a+1}\right) \times \text{سطر اول} + \text{سطر سوم}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a+1 & -a & b-a & a-c \\ 0 & \dfrac{a+c}{a+1} & \dfrac{(b-a)(c-1)}{a+1}-c & \dfrac{(a-c)(c-1)}{a+1}-c \\ 0 & \dfrac{ac+ac^2+c^2}{a+1} & \dfrac{c(a-b)}{a+1}+1 & \dfrac{c(c-a)}{a+1}+1+bc \end{array}\right]$$

گام چهارم: صفر شدن آرایه $(3,2)$ براساس آرایه $(2,2)$. مقدار ضریب برای صفر کردن را بدست می‌آوریم:

$$\frac{a+c}{a+1} \times \alpha + \frac{ac+ac^2+c^2}{a+1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a+1}{a+c} \times \frac{-(ac+ac^2+c^2)}{a+1}$$

$$= \frac{-(ac+ac^2+c^2)}{a+c}$$

سطر سوم جدید : سطر دوم $\times \dfrac{-(ac+ac^2+c^2)}{a+c}$ + سطر سوم

$$(3,3):\ \left(\frac{ac-ab+a+1}{a+1}\right)\times\left(\frac{-(ac+ac^2+c^2)}{a+c}\right)$$

$$=\frac{-a^2c^2-a^2c^3-ac^3+a^2bc+a^2bc^2+abc^2-a^2c-a^2c^2-ac^2-ac-ac}{(a+1)(a+c)}$$

$$(3,4):\ \left(\frac{c^2-ca+a+1+abc+bc}{a+1}\right)\times\left(\frac{-(ac+ac^2+c^2)}{a+c}\right)$$

$$=\frac{-ac^3-ac^4-c^4+a^2c^2+a^2c^3+ac^2-a^2c-a^2c^2-ac^2-ac-ac^2-c^2-a^2bc^2-a^2bc^3-abc^3-abc^2-abc^3-bc^3}{(a+1)(a+c)}$$

گام پنجم جایگذاری عقب گرد : طبق سطر آخر:

آرایه $(3,3) \times Z =$ آرایه $(3,4)$

که برای بدست آوردن Z و کافی است آرایه $(3,4)$ را به $(3,3)$ تقسیم کنیم.

برای x و y هم معادله‌هایشان را می‌نویسیم و بدست می‌آوریم:

آرایه $(2,2) \times y +$ آرایه $(2,3) \times z =$ آرایه $(2,1)$

که z را از معادله‌ی قبل داشتیم و y بدست می‌آید.

و همینطور برای سطر اول:

آرایه $(1,1) \times x +$ آرایه $(1,2) \times y +$ آرایه $(1,3) \times z =$ آرایه $(1,1)$

که y و z را برحسب دو معادله‌ی قبل داشتیم و x بدست می‌آید.